

Jan Felix Koenen

# **Ein Beitrag zur Beherrschung von Unsicherheit in Lastmonitoring-Systemen**

Schriftenreihe der Arbeitsgruppe  
für Technische Mechanik  
im Institut für Mechanik und Regelungs-  
technik - Mechatronik

Herausgeber: Claus-Peter Fritzen

**Band 10**

---

**Impressum**

Prof. Dr.-Ing. Claus-Peter Fritzen

Arbeitsgruppe für Technische Mechanik

Institut für Mechanik und Regelungstechnik - Mechatronik

Universität Siegen

57068 Siegen

ISSN 2191-5601

urn:nbn:de:hbz:467-10164

Dissertation, Universität Siegen, 2016

gedruckt auf alterungsbeständigem holz- und säurefreiem Papier

---

# Ein Beitrag zur Beherrschung von Unsicherheit in Lastmonitoring-Systemen

genehmigte  
DISSERTATION  
zur Erlangung des Grades eines Doktors  
der Ingenieurwissenschaften

vorgelegt von  
Dipl.-Ing. Jan Felix Koenen  
aus Offenbach a. M.

eingereicht bei der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät  
der Universität Siegen

Referent: Prof. Dr.-Ing. C.-P. Fritzen  
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. B. Schweizer (TU Darmstadt)

Tag der mündlichen Prüfung:  
03.März 2016

---



---

## Kurzfassung

---

Die Betriebslast eines lasttragenden Systems ist eine wesentliche dimensionierende Größe und beeinflusst maßgeblich dessen Lebensdauer. Tatsächliche produktindividuelle Betriebslasten sind aber meist nur unvollständig bekannt und werden pauschal und stellvertretend für ähnliche Produktgruppen abgeschätzt. Ein Lastmonitoring-System ermöglicht die Ermittlung aktueller, produktindividueller Belastungs- und Verformungszustände in der Nutzung eines lasttragenden Systems. Es besteht in der Regel aus sensorischen Elementen, einem mathematischen Modell zur Abbildung der relevanten Systemeigenschaften und einer geeigneten Informationsverarbeitung. Zum Lastmonitoring wird in dieser Arbeit ein dem Stand der Technik entsprechender Zustandsbeobachter für unbekannte Eingangsgrößen verwendet. Zur Lösung unterbestimmter Problemstellungen des Lastmonitorings wird ein neuer Weg auf Basis eines Projektionsansatzes vorgestellt. Er beruht auf der Annahme, dass oftmals tatsächlich nur wenige Ursachen zu den beobachteten Wirkungen führen. Der Ansatz wird in zwei praxisrelevanten Beispielen zur a) Ermittlung von Lastort und zur b) Ermittlung von veränderlichen Systemeigenschaften bei unbekanntem Belastungen in der numerischen und experimentellen Simulation validiert.

Unsicherheit, die in den Prozessen des Lastmonitorings auftreten kann, führt zu Abweichungen zwischen der tatsächlichen und der durch das Lastmonitoring ermittelten Belastung. Diese Unsicherheit wird mit der in dieser Arbeit entwickelten Methodik beherrscht. Die Methodik beruht auf der Anwendung bekannter und erweiterter Methoden zum Lastmonitoring und zur Beschreibung, Bewertung und Beeinflussung von Unsicherheit. Der Beitrag der einzelnen, in dieser Arbeit vorgestellten Methoden zur Beherrschung von Unsicherheit wird qualitativ und quantitativ in zahlreichen analytischen, numerischen und experimentellen Untersuchungen bewertet und miteinander verglichen. Zur qualitativen Bewertung dient ein Unsicherheitsmodell, in welchem die Unsicherheit in der Ermittlung der Belastung nach dem Grad an verfügbaren Informationen eingeordnet werden kann. Zur quantitativen Bewertung dient die relative effektive Abweichung zwischen der direkt gemessenen und der durch das Lastmonitoring ermittelten Belastung. Der größte Anteil der Unsicherheit in der ermittelten Belastung resultiert aus unvermeidbarer Modellunsicherheit durch die vereinfachende Abbildung des realen lasttragenden Systems im mathematischen Modell. Diese Modellunsicherheit wird mit einem Fehlerübertragungsmodell zur Beschreibung von systematischen und stochastischen Abweichungen statistisch bewertet. Den wesentlichen quantitativen Beitrag zur Reduktion von Unsicherheit leistet die unsicherheitsminimierende Positionierung von Sensoren.

Die Funktionstauglichkeit des Lastmonitoring-Systems wird in numerischen Simulationen und experimentellen Untersuchungen an einem axial und lateral belasteten Balken und einer Platte aufgezeigt. In der experimentellen Untersuchung wird für ein breitbandiges Belastungsspektrum eine relative effektive Abweichung zwischen gemessener und ermittelter Belastung im Bereich von 4% bis 12% erreicht.

Die vorliegende Arbeit liefert einen Beitrag zur Reduktion von Unsicherheit in der Nutzung lasttragender Systeme, indem Methoden zur Ermittlung produktindividueller Betriebslasten entwickelt und zur Anwendung bereitgestellt werden. Die dabei potentiell auftretende Unsicherheit kann durch die Methodik erstmals ganzheitlich und anwendungsorientiert beherrscht werden.

---



---

## Abstract

---

A fundamental characteristic for the lifetime of load-carrying structures is the operating load. Real operating loads for an individual structure are mostly only partly available from rough estimations for similar structures. A load-monitoring system provides the identification of current load and deformation states during the usage of load-carrying structures. Normally, it consists of sensors, a mathematical model to represent the relevant systems properties and a suitable information processing algorithm. In this work, an observer-based estimation algorithm for unknown input is used to identify the current loads and deformation states. A new projection approach is presented to solve so-called underdetermined inverse problems. This approach is based on the assumption that often only a few causes result to the observed effects. The approach is used in numerical and experimental simulations for two practical examples in order to a) identify the location of a load and b) identify changing system properties without knowing loads.

Uncertainty that may occur within the processes of load monitoring could potentially lead to a deviation between the real loads and those that are identified by the load-monitoring. This uncertainty will be controlled by the methodology developed within this work. The methodology is based on the usage of known and refined methods to describe, evaluate and eventually control uncertainty. The contribution of each method shown in this work is rated and compared qualitatively and quantitatively in numerous analytical, numerical and experimental investigations. For a qualitative rating, an uncertainty model is used to classify uncertainty based on the level of available information. The root mean squared error of the deviation between directly measured loads and loads that are estimated by the load-monitoring is used for quantitative rating. On the one hand, the highest amount of uncertainty results from the unavoidable model uncertainty due to the simplified and idealized representation of the real structure in a mathematical model. This model uncertainty is statistically described by using a model error model. On the other hand, the choice of sensor position has the highest amount to reduce uncertainty in a load-monitoring system.

The functional efficiency of the proposed load-monitoring system is proven by numerical and experimental simulations using the example of an axially and laterally loaded beam structure and a plate. For a broadband excitation in experimental simulations, a relative root mean squared error between measured and identified load between 4% and 12% occurs.

The present work is a contribution to reduce uncertainty in the usage of load-carrying structures by providing methods to identify individual operation loads. Thereby, uncertainty that may occur during the processes of load-monitoring can be controlled in a holistic and integrated manner for the first time.

---





Ich danke allen, die das Verfassen dieser Schrift ermöglicht haben.

Diese Arbeit entstand in den Jahren 2009 bis 2013 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Systemzuverlässigkeit und Maschinenakustik der Technischen Universität Darmstadt und im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Sonderforschungsbereichs 805 „Beherrschung von Unsicherheit in lasttragenden Systemen des Maschinenbaus“.

Herrn Prof. C.-P. Fritzen vom Institut für Mechanik und Regelungstechnik der Universität Siegen bin ich sehr dankbar für die Übernahme des Referats und die anregenden fachlichen und menschlich sehr angenehmen Gespräche. Ebenso danke ich Herrn Prof. B. Schweizer der TU Darmstadt für die unkomplizierte Übernahme des Korreferats.

Herrn Prof. P. Hagedorn der TU Darmstadt danke ich für seine wohlwollenden und väterlichen Ratschläge. Ebenso bedanke ich mich bei seiner Arbeitsgruppe Dynamik für die Offenheit und Hilfe bei fachlichen Diskussionen im Bereich der Strukturmechanik. Herr Dr. Platz hat einen wesentlichen Beitrag zur Darstellung der Ergebnisse meiner Arbeit mit der nötigen Präzision und Schärfe geleistet. Ich danke ihm für seine unermüdlichen Hinweise und fachlichen Anregungen. Den Kollegen Georg Enß und Serge Ondoua danke ich für die vielen Gespräche, die oftmals auch über den fachlichen Rahmen hinaus gingen. Ebenso danke ich den anderen Kollegen des Fachgebiets Systemzuverlässigkeit und Maschinenakustik der TU Darmstadt für die Unterstützung und die wertvollen Hinweise bezüglich meiner Ergebnisse und deren Darstellung. Herrn Wiener von der mechanischen Werkstatt danke ich für die unkomplizierte Fertigung der Bauteile für den in dieser Arbeit verwendeten Versuchsstand.

Herrn Oliver Janda vom Institut für Automatisierungstechnik der TU Darmstadt danke ich für die zahlreichen anregenden Diskussionen zur Identifikation dynamischer Systeme. Ebenso danke ich den Kollegen Andreas Friedmann und Johannes Käsgen vom Fraunhofer Institut für Betriebsfestigkeit und Systemzuverlässigkeit für die Gespräche zur Lastermittlung und zu Monitoring-Systemen. Auch fand ich es toll, mit den etwa 35 Mitgliedern des SFB 805 zusammen zu arbeiten und das Thema Unsicherheit auch aus Sicht der Produktentwicklung, der Produktion und der Mathematik kennenzulernen.

Auch mein privates Umfeld hat zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Besonderen Dank gebührt meinem Vater. Durch seine Ratschläge wurde ich regelmäßig zum kritischen und selbstständigen Denken angeregt, eine Grundlage des wissenschaftlichen Arbeitens. Meinen Freunden danke ich für den Halt, den sie mir in schweren Zeiten gaben.

---



---

## Inhaltsverzeichnis

---

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>III</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>V</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>VII</b>
<b>Glossar und Abkürzungen</b>	<b>XI</b>
<b>1 Einleitung und Motivation</b>	<b>1</b>
<b>2 Forschungsbedarf und Zielstellung der Arbeit</b>	<b>5</b>
2.1 Stand der Forschung und Technik . . . . .	5
2.1.1 Verfahren zur Abschätzung und Ermittlung mechanischer Belastungen . . . . .	5
2.1.2 Terminologie und Methoden der Unsicherheit . . . . .	13
2.2 Ziele und Gliederung dieser Arbeit . . . . .	19
<b>3 Systembeschreibung und Methodik zur Beherrschung von Unsicherheit</b>	<b>23</b>
3.1 Der axial belastete Balken als Beispielsystem . . . . .	23
3.2 Systemtheoretische Darstellung Inverser Probleme unter Unsicherheit . . . . .	28
3.2.1 Ursache-Wirkungs-Beziehung in der Nutzung lasttragender Systeme . . . . .	29
3.2.2 Arbeitshypothese eines unsicherheitsminimierten Lastmonitoring-Systems . . . . .	32
3.3 Eine Methodik zur Beherrschung von Unsicherheit . . . . .	33
3.4 Prozesskette zur Beschreibung von Unsicherheit . . . . .	35
<b>4 Mathematische Modelle und Methoden des Lastmonitorings</b>	<b>39</b>
4.1 Mathematische Modelle linearer zeitinvarianter Struktursysteme . . . . .	39
4.1.1 Systembeschreibung im Zeit- und Modalbereich . . . . .	39
4.1.2 Zustandsraumdarstellung, modale Reduktion und zeitliche Diskretisierung . . . . .	40
4.1.3 Impulsantwort-Modell . . . . .	43
4.2 Regelungstechnische Methoden zur Lösung Inverser Probleme . . . . .	44
4.2.1 Systemidentifikation zur Ermittlung von Parametern des mathematischen Modells . . . . .	44
4.2.2 Zustandsbeobachter zur Ermittlung von Belastungen und Systemzuständen . . . . .	46
4.3 Ein neuartiger Projektionsansatz zur Lösung unterbestimmter Inverser Probleme . . . . .	47
4.3.1 Algebraische Grundlage . . . . .	48
<b>5 Fallbeispiele zur Ermittlung von Belastungen und Systemeigenschaftsänderungen</b>	<b>51</b>
5.1 Fallbeispiel 1: Ermittlung einer Laterallast bei bekanntem Lastort . . . . .	51
5.2 Fallbeispiel 2: Ermittlung mehrerer Laterallasten bei unbekanntem Lastort . . . . .	56

5.3	Fallbeispiel 3: Ermittlung von parametrisierten Systemeigenschaftsänderung bei unbekannter Belastung . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Untersuchung und Anwendung unsicherheitsminimierender Maßnahmen</b>	<b>65</b>
6.1	Auswahl eines geeigneten Frequenzbereiches zum Lastmonitoring . . . . .	67
6.2	Unsicherheitsminimierende Auswahl von Sensorpositionen . . . . .	68
6.2.1	Beobachtbarkeitsindex . . . . .	68
6.2.2	Methode der Effective Independence . . . . .	69
6.2.3	Robustheit der optimalen Sensorposition gegenüber Parameterunsicherheit . . . . .	71
6.2.4	Zusammenfassung zur optimalen Auswahl der Sensorpositionen . . . . .	72
6.3	Unsicherheitsminimierende Auswahl von Parametern der digitalen Signalverarbeitung . . . . .	73
6.4	Auswahl von Sensorart, Sensoranzahl und der damit verbundenen Modellordnung . . . . .	74
6.5	Parameterstudie zur Auswirkung von Unsicherheit in der ermittelten Axiallast . . . . .	76
6.6	Statistische Bewertung von Modellunsicherheit in der experimentellen Untersuchung . . . . .	80
6.6.1	Beschreibung des Verfahrens . . . . .	80
6.6.2	Anwendung des Verfahrens . . . . .	82
6.6.3	Interpretation der Ergebnisse . . . . .	83
<b>7</b>	<b>Experimentelle Erprobung der Lastmonitoring-Methoden</b>	<b>87</b>
7.1	Der axial belastete Balken als Versuchsstand . . . . .	87
7.1.1	Ermittlung einer axialen und lateralen zeitvarianten Belastung . . . . .	87
7.1.2	Ermittlung einer lateralen stochastischen Belastung . . . . .	89
7.1.3	Ermittlung von Lastort und Lasthöhe . . . . .	90
7.1.4	Ermittlung einer Systemeigenschaftsänderung bei unbekannter Belastung . . . . .	92
7.2	Die Rechteckplatte als Versuchsstand . . . . .	94
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>97</b>
8.1	Zusammenfassende Sichtweise zur Beherrschung von Unsicherheit im Lastmonitoring . . . . .	97
8.1.1	Qualitativer Beitrag . . . . .	99
8.1.2	Quantitativer Beitrag . . . . .	100
8.2	Fazit und Ausblick . . . . .	102
<b>A</b>	<b>Lineare und nichtlineare Bewegungsgleichungen des axial belasteten Balkens</b>	<b>105</b>
A.1	Galerkin-Verfahren zur Beschreibung des linearen Systemverhaltens . . . . .	108
A.2	Ritz-Verfahren zur Beschreibung des nichtlinearen Systemverhaltens . . . . .	110
<b>B</b>	<b>Zustandsbeobachter für unbekannte Eingangsgrößen</b>	<b>115</b>

---

## Abbildungsverzeichnis

---

1.1	Zielkonflikt zwischen Unsicherheit durch Informationsmangel und Unsicherheit in der Anwendung einer Technologie . . . . .	2
1.2	Auswirkung von Abweichungen in der Spannungsamplitude auf die ertragbare Schwingzahl . . . . .	3
2.1	Einteilung unterschiedlicher Ansätze zur Gewinnung von Information über die Belastung lasttragender Systeme nach dem SFB 805-Unsicherheitsmodell . . . . .	6
2.2	Unsicherheitsmodell des SFB 805 . . . . .	14
3.1	Lastmonitoring am axial belasteten Balken: a) mechanisches Ersatzschaubild, b) Versuchstand für experimentelle Simulationen . . . . .	24
3.2	Erste Eigenfrequenz $f_1(P)$ in Abhängigkeit der Axiallast $P$ . . . . .	26
3.3	Lastmonitoring-System mit Eingangs-, Steuer-, Stör- und Zielgrößen . . . . .	32
3.4	Einteilung unterschiedlicher Methoden zur Beherrschung von Unsicherheit . . . . .	34
3.5	Prozesskette eines lasttragenden Systems mit Unterprozessen des Lastmonitoring-Systems . . . . .	36
3.6	Qualitativer Verlauf der Unsicherheit in den Prozessen des Lastmonitorings. . . . .	37
4.1	a) Mechanisches Ersatzschaubild für den Balken, b) Lösung für äquivalenten Lastvektor . . . . .	49
4.2	Funktionsweise des Projektionsansatzes . . . . .	50
5.1	Prinzipskizze des Balkensystem für Fallbeispiel 1 . . . . .	52
5.2	Gemessene und ermittelte Belastung sowie Fehler zwischen diesen für Gleitsinus . . . . .	53
5.3	Gemessene und ermittelte Belastung sowie Fehler zwischen diesen für ein rosa Rauschen . . . . .	54
5.4	Gemessene und ermittelte Belastung sowie Fehler zwischen diesen für Rechteckimpuls . . . . .	55
5.5	Prinzipskizze des Balkensystem für Fallbeispiel 2 . . . . .	57
5.6	Projektionsfehler $e_{p,lm}$ bei tatsächlicher Belastung an $x_{F,1}^k = 10$ und $x_{F,2}^k = 25$ . . . . .	58
5.7	Ortsschätzfehler $e_{loc,ij}$ für alle möglichen Kombinationen aus Lastorten $x_{F,1}^k$ und $x_{F,2}^k$ . . . . .	58
5.8	Prinzipskizze des Balkensystem für Fallbeispiel 3 . . . . .	63
5.9	Ermittlung von Ort und Höhe einer Zusatzmasse $\Delta m$ für alle potentielle Knoten $x_{\Delta m}^k$ . . . . .	64
6.1	Prinzipskizze des Balkensystem für Anwendungsbeispiel 1 . . . . .	66
6.2	Vergleich der tatsächlichen spektralen Leistungsdichte $S_{FF}$ und der ermittelten spektralen Leistungsdichte $S_{FF,e}$ eines Belastungsspektrums mit rosa $1/f$ -Rauschen. . . . .	67
6.3	Beobachtbarkeitsindex $i_{obs}$ für Auslenkungsmoden und Dehnungsmoden . . . . .	69
6.4	Absolute Kondition für Auslenkung und Dehnung für alle Kombinationen aus Sensorpositionen . . . . .	70
6.5	Relativer effektiver Fehler $U_{eff}$ für alle Kombinationen aus Sensorpositionen . . . . .	71
6.6	Auswirkung eines Vielfachen $c_u$ der Ungewissheit in den Annahmen der Masse und Steifigkeit des Rotationsgelenks auf die optimale Sensorposition . . . . .	72

6.7	Einfluss von Filtereckfrequenz und Abtastrate auf den relativen effektiven Fehler $U_{\text{eff}}$ in der numerischen Simulation . . . . .	73
6.8	Spektrale Leistungsdichte der gemessenen und ermittelten Belastung sowie deren Fehler für analytische, numerische und experimentelle Simulation bei einer Abweichung der axialen Last von $\Delta P = 2N$ . . . . .	78
6.9	Auswirkung einer variierenden Parameterunsicherheit $\Delta P$ auf den relativen effektiven Fehler $U_{\text{eff}}$ , analytisch und numerisch . . . . .	79
6.10	Schaubild zum Ablauf der Ermittlung des Fehlerübertragungsmodells . . . . .	81
6.11	Belastungssignal mit ansteigendem Effektivwert über Zeit und gleitendem Fenster . . . . .	82
6.12	Fehlerübertragungsmodell: Amplitudengang (oben) und Phasengang (unten) . . . . .	82
6.13	Spektrogramm: Zeitlicher Verlauf der spektralen Leistungsdichte des Beschleunigungssignals bei Belastung mit Gleitsinus zur Beschreibung des nichtlinearen Systemverhaltens. . . . .	84
7.1	Versuchsaufbau zum Lastmonitoring am axial belasteten Balken: a) mechanisches Ersatzschaubild, b) Versuchsstand für experimentelle Simulation . . . . .	88
7.2	Gemessene und ermittelte Axiallast sowie Amplitude $\hat{F}$ der harmonischen Laterallast $F(t)$ . . . . .	88
7.3	Spektrale Leistungsdichte der gemessenen und ermittelten Laterallast sowie des Fehlers zwischen diesen für rosa Rauschen . . . . .	89
7.4	Versuchsaufbau zur Ermittlung von Lastort und Lasthöhe am axial belasteten Balken: a) mechanisches Ersatzschaubild, b) Versuchsstand für experimentelle Simulation . . . . .	90
7.5	Experimentell ermitteltes, interpoliertes Modell $H$ zur Beschreibung des statischen Belastungs-Dehnungszusammenhangs . . . . .	91
7.6	Ergebnis der experimentellen Validierung zur Lastortermittlung. Ermittelter Lastort (oben), gemessene und ermittelte Last sowie Fehler zwischen diesen (unten). . . . .	91
7.7	Versuchsaufbau zur Ermittlung einer Systemeigenschaftsänderung durch die Zusatzmasse . . . . .	93
7.8	Experimentell ermittelte Sensitivitätsmatrix $S^e$ . . . . .	93
7.9	Ermittlung des Ortes und der Höhe einer Zusatzmasse $\Delta m$ in der experimentellen Simulation . . . . .	94
7.10	Versuchsstand zur Ermittlung von Belastungen an einer Platte . . . . .	95
7.11	Gemessene und ermittelte Belastung an der Platte sowie Fehler zwischen diesen für Gleitsinus, Darstellung im Zeit- und Frequenzbereich . . . . .	95
8.1	Zusammenfassende Darstellung des Einflusses von unsicheren Größen und unsicherheitsbeherrschender Methoden und Maßnahmen . . . . .	98
A.1	Axial belasteter Balken und Absenkung der Masse bei Auslenkung in $z$ -Richtung . . . . .	105

---

## Tabellenverzeichnis

---

3.1	Eigenschaftsbeschreibung und Unsicherheit des Balkensystems . . . . .	27
3.2	Einteilung Inverser Probleme . . . . .	30
5.1	Eigenschaften des Balkensystems für Fallbeispiel 1 . . . . .	52
5.2	Eigenschaften des Balkensystems für Fallbeispiel 2 . . . . .	57
5.3	Eigenschaften des Balkensystems für Fallbeispiel 3 . . . . .	63
6.1	Eigenschaften des Balkensystems für Methodenuntersuchungen . . . . .	66
6.2	Ergebnisse der Parameterstudie zur Sensorart und -anzahl . . . . .	75
6.3	Eigenfrequenzen des Balkensystems in Hz und Unsicherheitsmaße $U_{\text{eff}}$ in analytischer, numerischer und experimenteller Simulation für Parameterunsicherheit $\Delta P$ . . . . .	78





---

## Symbolverzeichnis

---

### Lateinische Buchstaben

Symbol	Einheit	Beschreibung
$A$	mehrere	Systemmatrix des Zustandsraummodells
$A$	$m^2$	Querschnittsfläche
$A_{\text{FIM}}$	mehrere	Fisher-Informationsmatrix
$B$	mehrere	Steuermatrix des Zustandsraummodells
$b$	m	Balkenbreite
$C$	mehrere	Messmatrix des Zustandsraummodells
$c_F$	-	Anteil der gemonitorten Signalleistung der Last
$c_r$	Nm/rad	Rotationsfedersteifigkeit
$c_u$	-	Vielfaches eines unsicheren Parameters
$D$	mehrere	Durchgangsmatrix des Zustandsraummodells
$E_{\text{EI}}$	-	Effective-Independence-Vorhersagematrix
$e_{r,\text{base}}$	-	Basisfehler zur Ermittlung von Systemeigenschaftsänderungen
$E$	$N/m^2$	Elastizitätsmodul
$E_T$	Ns	diskrete Fouriertransformierte des Fehlers der ermittelten Belastung
$e_{\text{loc}}$	-	Ortsschätzfehler der ermittelten Lastorte
$e_p$	mehrere	Projektionsfehler für angenommenen Belastungsort
$e_r$	-	relatives Fehlermaß zur Ermittlung von Systemeigenschaftsänderungen
$F$	N	Lastvektor
$F_e^g$	N	modale ermittelte Belastung
$F^g$	N	modaler Lastvektor
$F^v$	N	Pseudo-Lastvektor
$F$	N	Einzellast
$F_e$	N	ermittelte Belastung
$F_{\text{eff}}$	N	Effektivwert einer Last
$F_m$	N	gemessene Belastung
$F_T$	Ns	diskrete Fouriertransformierte der gemessenen Belastung
$f_c$	Hz	Filtereckfrequenz
$f_n$	Hz	$n$ -te Eigenfrequenz
$g$	mehrere	Gewichtsfunktion bzw. Impulsantwort, kontinuierlich oder diskret

Symbol	Einheit	Beschreibung
$H$	-	mathematisches Modell, allgemein
$H_{\text{err}}$	-	Fehlermodell
$H_{\text{np}}$	mehrere	nichtparametrische Übertragungsfunktion, Frequenzgang
$h$	m	Balkenhöhe
$I$	$\text{m}^4$	Flächenträgheitsmoment
$i_{\text{obs}}$	-	Beobachtbarkeitsindex
$K^P$	N/m bzw. Nm	Steifigkeitsmatrix (trans. bzw. rot.)
$K^P$	1/m bzw. m	Steifigkeitseinflussmatrix durch Axiallast $P$ (trans. bzw. rot.)
$K^*$	N/m bzw. Nm	Steifigkeitsmatrix unter Einfluss der Axiallast $P$ (trans. bzw. rot.)
$k$	-	diskreter Zeitpunkt
$L_F$	-	Selektionsmatrix für Lastorte
$L_s$	-	Selektionsmatrix für Messstellen
$l$	m	Balkenlänge
$M$	kg bzw. $\text{kgm}^2$	Massenmatrix (trans. bzw. rot.)
$m_r$	N/rad	Rotationsfedermasse
$m_{s,b}$	kg	Sensormasse der Beschleunigungssensoren
$n$	-	normalverteilter Einheitszufallsvektor
$N$	-	Anzahl an Freiheitsgraden des FE-Modells
$N_F$	-	Anzahl an Lasten
$N_k$	-	Anzahl an Knoten des FE-Modells
$N_r$	-	Anzahl an berücksichtigten Moden im reduzierten Modell
$N_s$	-	Anzahl an Messstellen
$N_v$	-	Anzahl an berücksichtigten Zeitschritten im Impulsantwort-Modell
$p$	mehrere o. m	Parametervektor des mathematischen Modells oder modaler Auslenkungsvektor
$P_F^g$	$N^2$	Kovarianzmatrix der ermittelten modalen Belastungen
$p_0$	mehrere	Parametervektor des Nominalmodells
$P$	N	Axiallast
$p(x)$	mehrere	Häufigkeitsverteilung einer Produkteigenschaft $x$
$P_{\text{cr},n}$	N	$n$ -te kritische Knicklast
$q$	m bzw. m/s	modaler Zustandsvektor
$q_0$	m bzw. m/s	modale Anfangsbedingungen
$r$	m bzw. rad	Auslenkungsvektor an Knoten (trans. bzw. rot.)
$r_0$	m bzw. rad	Anfangsbedingungen (trans. bzw. rot.)

Symbol	Einheit	Beschreibung
$S^e$	1/kg	Sensitivitätsmatrix des Fehlers gegenüber Systemeigenschaftsänderung
$T$	mehrere	Toeplitz-Matrix des Impulsantwort-Modells
$q$	N/m <sup>2</sup>	Flächenlast
$S_{FF}$	N <sup>2</sup> s	Leistungsdichtespektrum der Last $F$
$S_{ee,a}$	N <sup>2</sup> s	analytisches Leistungsdichtespektrum des Fehlers $\Delta F$
$S_{ee}$	N <sup>2</sup> s	Leistungsdichtespektrum des Fehlers $\Delta F$ der ermittelten Belastung
$s$	-	Laplace-Variable
$t$	s	Zeit
$t_K$	s	zeitliche Länge eines Signalabschnitts
$t_s$	s	Simulationsdauer
$U_{eff}$	-	relativer effektiver Fehler der ermittelten Belastung, skalares Unsicherheitsmaß
$v$	-	diskrete Zeitschritte des Impulsantwort-Modells
$w$	m	Auslenkung des Balkens
$x_i^k$	-	Ganzzahlige Laufvariable des $i$ -ter Knoten des Balken-FE-Modells
$x_{\Delta m}$	m	Ort einer Masseänderung
$x_F$	m	Lastort einer Laterallast
$x_s$	m	Messstelle
$y$	mehrere	Messvektor, allgemein
$y$	mehrere	Messsignal, allgemein
$Y_T$	mehrere	Diskrete Fouriertransformierte des Messsignals $y$

### Griechische Buchstaben

Symbol	Einheit	Beschreibung
$\Gamma$	mehrere	erweiterte Beobachtermatrix
$\varepsilon$	-	Dehnung
$\varepsilon_{ax}$	-	axiale Dehnung des Balkens
$H$	mehrere	Hankel-Matrix des Impulsantwort-Modells
$\theta_n$	1/s	modaler Dämpfungsgrad
$\Theta$	1/s	modale Dämpfungsmatrix
$I$	-	Einheitsmatrix
$\kappa$	-	Konditionszahl

Symbol	Einheit	Beschreibung
$\Lambda$	$1/s^2$	Eigenwertmatrix
$\lambda_n$	$1/s^2$	$n$ -ter Eigenwert
$\mu$	mehrere	Mittelwert
$\xi_n$	-	$n$ -ter modaler Dämpfungsgrad
$\rho$	$kg/m^3$	Dichte
$\sigma$	mehrere	Standardabweichung
$\Phi$	-	Modalmatrix
$\Phi_\varepsilon$	-	Dehnungsmodalmatrix
$\phi$	-	Eigenvektor, trans. bzw. rot.
$\varphi$	rad	Verdrehung
$\omega_n$	rad/s	$n$ -te Eigenkreisfrequenz
$\omega_{n,0}$	rad/s	$n$ -te Eigenkreisfrequenz des Systems mit $P = 0$
$\Omega$	rad/s	Kreisfrequenz

## Indices

$\square_a$	Beschleunigung
$\square_c$	kontinuierlich
$\square_d$	diskret
$\square^e$	element
$\square_m$	modal
$\square_r$	reduziert
$\Delta\square$	Abweichung in einer Variablen

---

## Glossar und Abkürzungen

---

Das **Glossar** definiert die in dieser Arbeit regelmäßig verwendeten Begriffe für diese Arbeit.

**Aleatorische Unsicherheit** beschreibt Abweichungen oder Streuungen, die der betrachteten Eigenschaft oder dem betrachteten System eigen sind. Sie lässt sich nicht durch Informationsgewinnung reduzieren, kann aber z. B. durch Verteilungsfunktionen beschrieben werden.

Das **Belastungsspektrum** einer zeitvarianten einzelnen Belastung beschreibt die spektrale Leistungsdichte eines deterministischen oder stochastischen Belastungssignals.

Ein (Zustands-) **Beobachter**, z.B. der Luenberger-Beobachter, dient zur indirekten Bestimmung von Systemzuständen oder Messgrößen durch Abbildung des realen Systemverhaltens in einem mathematischen Modell und Rückführung von Messsignalen zur Anpassung des (aktuellen) Systemzustandes. Erfolgt die Rückführung der Messsignale unter Berücksichtigung statistischer Eigenschaften der Störgrößen, spricht man von einem (Zustands-) **Schätzer** oder Filter, z.B. dem Kalman-Filter.

**Epistemische Unsicherheit** beschreibt einen potentiellen Informationsmangel in der Modellierung eines System. Sie lässt sich durch Informationsgewinnung reduzieren.

Die **ermittelte Belastung** ist der Wert oder zeitliche Verlauf einer Belastung, welcher durch das Lastmonitoring ermittelt wurde. In der Literatur wird auch oft von geschätzter Belastung (engl.: *estimated load*, ein Begriff aus der Regelungstechnik, speziell der Schätztheorie, siehe z. B. [99]) gesprochen.

Ein **Lastmonitoring-System** ist eine Technologie zur Ermittlung von Belastungen bestehend aus sensorischen Elementen, einer Informationsverarbeitung und einem mathematischen Modell.

Eine **Maßnahme** dient zur Veränderung einer Situation. Bei der Beherrschung von Unsicherheit soll durch Anwendung von geeigneten Maßnahmen Unsicherheit reduziert werden.

Eine **Methodik** beschreibt eine Sammlung von Methoden. Die Beherrschung von Unsicherheit erfolgt durch Anwendung unterschiedlicher Methoden zur Beschreibung, zur Bewertung und zur Beeinflussung von Unsicherheit.

**Modellunsicherheit** beschreibt die Unsicherheit, welche durch eine vereinfachende Abbildung eines realen Systems durch ein mathematisches Modell entsteht. Sie ist somit in der realen Anwendung modellbasierter Methoden nicht vermeidbar.

**Parameterunsicherheit** beschreibt die Unsicherheit in den Parametern des mathematischen Modells. Da sowohl in der numerischen als auch in der experimentellen Simulation zur Ermittlung von Belastungen das selbe mathematische Modell verwendet wird, kann Parameterunsicherheit per Definition vollständig in der numerischen Simulation bewertet werden.

**Simulationen** werden zur Abbildung eines realen Systemverhaltens durchgeführt. Simulationen können numerisch am Computer oder experimentell an einem Versuchsstand durchgeführt werden. In dieser Arbeit wird dann von numerischen oder experimentellen Simulationen gesprochen.

**Stochastische Unsicherheit** liegt vor, wenn die Wirkung einer unsicheren Eigenschaft durch ihre Wahrscheinlichkeit ausreichend oder vollständig quantifiziert wurde.

**Ungewissheit** liegt vor, wenn die Wirkung einer unsicheren Eigenschaft bekannt, deren Wahrscheinlichkeit aber nur teilweise quantifiziert wurde.

**Unsicherheit** tritt auf, wenn Prozesseigenschaften nicht oder nicht vollständig determiniert werden können.

**Unwissen** liegt vor, wenn die Wirkung einer unsicheren Eigenschaft unbekannt oder nur vermutet wird.

### **Abkürzungen**

DMS: Dehnungsmessensoren

ERA: Eigenvalue Realization Algorithm – Ein Algorithmus zur Systemidentifikation

FHG: Freiheitsgrade

SFB: Sonderforschungsbereich

---

## 1 Einleitung und Motivation

---

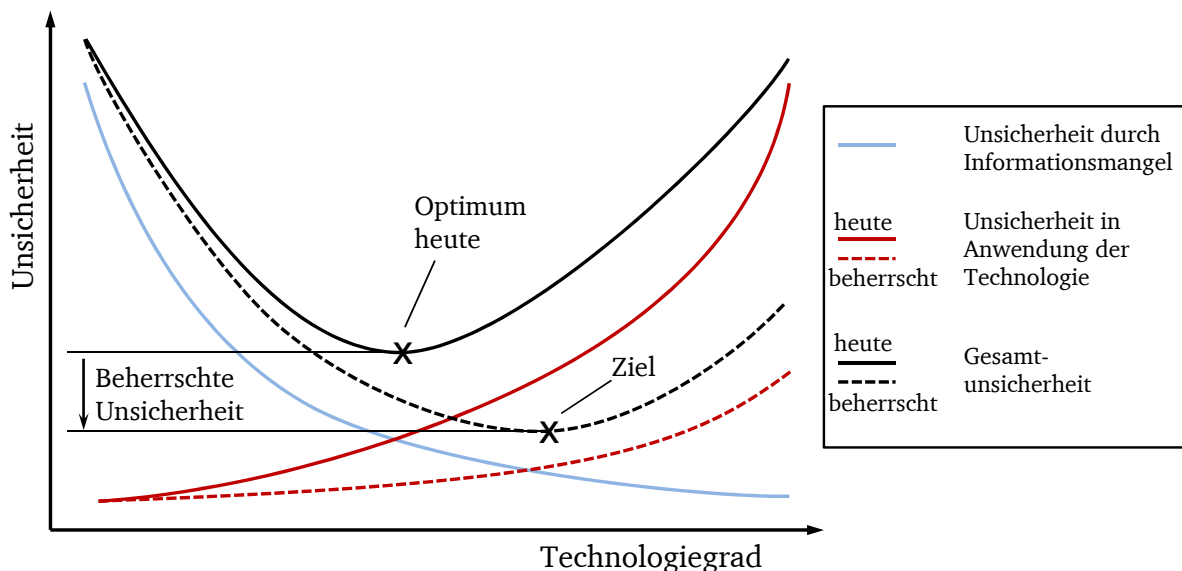
Die Betriebslast eines lasttragenden Systems ist eine wesentliche dimensionierende Größe und beeinflusst maßgeblich seine Lebensdauer [63]. Unterschiedliches Nutzungsverhalten sowie Missbrauchslasten, aber auch Schwingungs- und Stabilitätseigenschaften der Struktur beeinflussen die Beanspruchung des lasttragenden Systems. Die tatsächlichen individuellen Beanspruchungen eines einzelnen lasttragenden Systems sind aber meist nur unvollständig bekannt und werden oftmals pauschal und stellvertretend für ähnliche Produktgruppen abgeschätzt. Der daraus resultierenden Unsicherheit in der abzuschätzenden Lebensdauer wird in der Produktentwicklung oftmals durch Verwendung von Sicherheitsbeiwerten begegnet.

Ein Monitoring lasttragender Systeme ermöglicht die Überwachung im Betrieb durch Ermittlung aktueller Belastungs- und Beanspruchungszustände und potentieller Schadenszustände. Es besteht in der Regel aus sensorischen Elementen, einem mathematischen Modell zur Abbildung der relevanten Systemeigenschaften und einer geeigneten Informationsverarbeitung [25]. Ein solches Monitoring-System bietet eine Vielzahl potentieller Anwendungsmöglichkeiten. Belastungen und Beanspruchungen des lasttragenden Systems können ermittelt und vorausgesagt werden, Schadenszustände bzw. die Restlebensdauer des lasttragenden Produkts können abgeschätzt werden (*Load Monitoring, Structural Health Monitoring*), sodass einzelne Bauteile bei Bedarf gewartet oder ausgetauscht (*Condition-Based Maintenance*) oder nach ihrer Nutzungsphase wiederverwendet werden können. Die Kenntnis des aktuellen Belastungs- und Verformungszustandes des Systems ermöglicht den aktiven Eingriff in die Struktur unter Verwendung von aktiven Komponenten und geeigneten Regelalgorithmen zur Beeinflussung des Systemverhaltens (z. B. *Active Vibration Control, Active Shape Control, Active Stabilisation*). Gespeicherte Belastungskollektive können zur Auslegung neuer Produktgenerationen verwendet werden (Bestandteil eines *Product Lifecycle Management*). Ein Monitoring-System ist also eine Technologie zur Gewinnung zusätzlicher Information über die tatsächliche Nutzung lasttragender Systeme und trägt somit zur Reduktion von Unsicherheit bei.

Allerdings herrscht auch bei der Anwendung der Technologie eines Monitoring-Systems selbst Unsicherheit. Unsicherheit tritt beispielsweise auf in der Auswahl und Anwendung der benötigten Messtechnik, der benötigten Algorithmen oder bei der Verwendung mathematischer Modelle zur Abbildung des realen Systemverhaltens. Messrauschen, veränderliche oder unmodellierete Systemeigenschaften sowie äußere Einflüsse können zu Abweichungen zwischen den tatsächlichen und den ermittelten Größen führen. In aktiven mechatronischen oder adaptronischen Systemen kann Unsicherheit in der Modellbeschreibung zu einer reduzierten Leistungsfähigkeit oder sogar zum Stabilitätsverlust der geregelten Struktur führen [19]. Darüber hinaus kann ein Mangel an Verfügbarkeit von geeigneten informationsverarbeitenden Algorithmen dazu führen, dass Problemstellungen des Monitorings gar nicht oder nur unzureichend gelöst werden können. All diese Unsicherheiten können zu einer Fehlinterpretation der zu ermittelnden Größen führen und gefährden somit die sichere Nutzung des lasttragenden Systems [34, 75, 92, 110]. Dies ist neben ökonomischen Aspekten ein wesentlicher Nachteil für eine industrielle Anwendung von Monitoring-Systemen zur produktindividuellen Ermittlung von Belastung und

Schädigung [39, 45, 117]. Sollen heute Belastungen lasttragender Systeme produkttypspezifisch und mit möglichst geringer Unsicherheit ermittelt werden, werden daher oftmals aufwendige, aber meist weniger unsichere experimentelle Simulationen an Prototypen durchgeführt [25, 63]. Gelingt es aber, geeignete und problemorientierte Algorithmen zur Informationsverarbeitung bereit zu stellen und die darin potentiell auftretende Unsicherheit strukturiert und ganzheitlich zu beschreiben, zu bewerten und daraus geeignete Maßnahmen zur Reduktion von Unsicherheit abzuleiten, kann Unsicherheit in einem Monitoring-System beherrscht und so dessen Technologiereife erhöht werden.

Abbildung 1.1 visualisiert den vorgestellten Zielkonflikt zwischen Unsicherheit durch Informationsmangel und Unsicherheit in der Anwendung einer Technologie in Abhängigkeit des Technologiegrades. Mit steigendem Technologiegrad sinkt zwar die Unsicherheit z. B. durch zusätzliche Verfügbarkeit von Information über die produktindividuelle Belastung, vgl. [38, 112]. Unsicherheit, die durch eine zusätzliche Komplexität in der Anwendung der Technologie entstehen kann, steigt jedoch an, vgl. [120]. Diese Unsicherheit soll durch den Beitrag der vorliegenden Arbeit derart verringert werden, dass bei höherem Technologiegrad eine reduzierte Unsicherheit vorliegt und so Unsicherheit verringert wird.



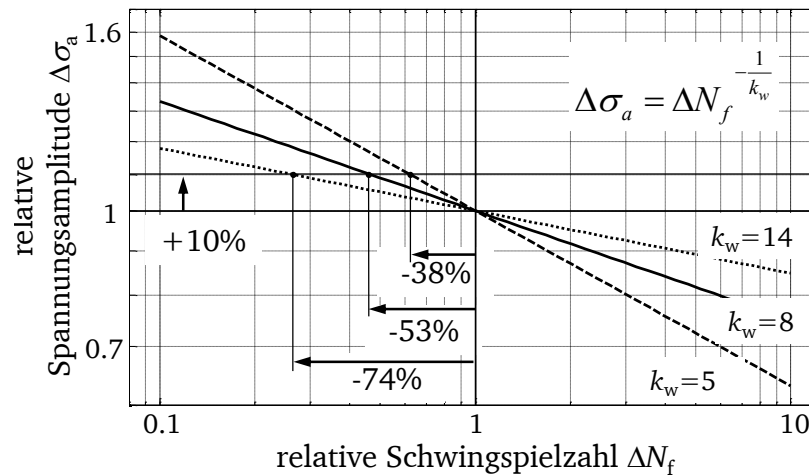
**Abbildung 1.1:** Zielkonflikt zwischen Unsicherheit durch Informationsmangel und Unsicherheit in der Anwendung einer Technologie. Ähnliche Abbildungen finden sich z. B. in [17].

Prinzipbedingt ist es nicht möglich, Unsicherheit in einem Monitoring-System vollständig zu eliminieren. Nicht vermeidbare Unsicherheit z. B. in Messprozessen oder durch unvollständige Abbildung des realen Systemverhaltens führen dazu, dass eine durch ein Monitoring-System ermittelte Größe praktisch niemals vollständig der tatsächlichen Größe entspricht. Dies kann signifikante Auswirkungen auf die Abschätzung der Lebensdauer eines lasttragenden Systems haben, wie im Folgenden am Beispiel von im Bauteil wirkenden Spannungsamplituden aufgezeigt wird.

Abbildung 1.2 zeigt die relative Auswirkung einer potentiellen Abweichung in der tatsächlichen Spannungsamplitude  $\Delta\sigma_a$  von +10% auf die ertragbare Schwingspielzahl  $\Delta N_f$  anhand einer Wöhlerlinie für unterschiedliche Steigungen  $k_w$ . Für niedrige Steigungen der Wöhlerlinie, z. B.  $k_w = 14$  für sehr ker-



barme Strukturen, kann eine um 10% höhere Spannungsamplitude zu einer Reduktion der ertragbaren Schwingspielzahl und somit der Lebensdauer des betrachteten Systems von 74% führen.



**Abbildung 1.2:** Auswirkung von Abweichungen in der Spannungsamplitude auf die ertragbare Schwingspielzahl

Diese Darstellung unterstreicht die Bedeutung der Angabe eines Unsicherheitsbereichs der ermittelten Belastungen für die Lebensdauerabschätzung eines lastragenden Systems, wie es beispielsweise für Messergebnisse in Form der Angabe einer Messunsicherheit üblich ist. Ein solcher Unsicherheitsbereich ist von wesentlicher Bedeutung für Lebensdauerabschätzungen in der Produktentwicklung, aber auch für die Abschätzung der Restlebensdauer des individuellen Systems durch Schadensakkumulationsrechnungen auf Basis online ermittelter Belastungen.

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Sonderforschungsbereiches (SFB) 805 „Beherrschung von Unsicherheit in lastragenden Systemen des Maschinenbaus“. Im SFB 805 wurde folgende Arbeitshypothese aufgestellt: *Unsicherheit tritt auf, wenn Prozesseigenschaften nicht oder nicht vollständig determiniert werden können* [66]. Diese Arbeitshypothese wird in der vorliegenden Arbeit aufgegriffen, um Unsicherheit, die in den Prozessen eines Monitoring-Systems auftreten kann, strukturiert zu beschreiben, zu bewerten und letztendlich zu beherrschen.



---

## 2 Forschungsbedarf und Zielstellung der Arbeit

---

---

### 2.1 Stand der Forschung und Technik

---

In diesem Abschnitt wird der Stand der Forschung und Technik erörtert. Die für die vorliegende Arbeit relevanten Themenbereiche sind:

1. Etablierte und moderne Verfahren zur Abschätzung und Ermittlung von Belastungen.
2. Terminologie, Umgang mit und Bewertung von Unsicherheit in technischen Systemen im Allgemeinen und Lastmonitoring-Systemen im Speziellen.

Beide Bereiche werden schon lange in wissenschaftlichen Arbeiten thematisiert. Es gibt bewährte Verfahren, die teilweise industriell eingesetzt werden und in diesem Abschnitt auch vorgestellt werden. Andererseits hat sich eine Fülle unterschiedlicher Forschungswege zur Behandlung beider Fragestellungen ergeben, deren vollständige Darstellung weit über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen würde. Es wird eine Übersicht über die wesentlichen, für die Themenbereiche der vorliegenden Arbeit relevanten Forschungsergebnisse gegeben, geeignete Verfahren zur Behandlung der Problemstellungen des Lastmonitorings und der Unsicherheit in dieser Arbeit ausgewählt und der existierende Forschungsbedarf abgeleitet.

---

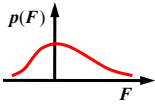
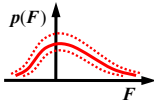
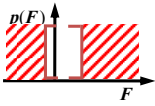
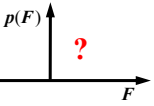
#### 2.1.1 Etablierte und moderne Verfahren zur Abschätzung und Ermittlung mechanischer Belastungen

---

Ohne ausreichend qualifizierte und quantifizierte Kenntnis der während der Nutzung auf ein lasttragendes System wirkenden Belastungen ist eine Vorhersage der Lebensdauer nur sehr eingeschränkt möglich. Zudem ist die Verlässlichkeit der Kenntnis der Betriebslasten bei der Dimensionierung eines lasttragenden Systems von elementarer Bedeutung [63]. Je geringer die Verlässlichkeit, desto höher müssen ggf. Sicherheitsbeiwerte gewählt werden. Dies wird unter anderem in Normen berücksichtigt, z. B. [8, 10].

Zur qualitativen Einteilung unterschiedlicher Ansätze zur Ermittlung von Belastungs- und Systemzuständen rein nach der Unsicherheit durch potentiell verfügbare Informationen wird das Unsicherheitsmodell des SFB 805 verwendet. Dabei wird Unsicherheit in der Kenntnis der Belastungen, hier am Beispiel einer Last  $F$ , nach dem Grad der verfügbaren, vertrauensvollen Informationen in die drei Kategorien Unwissen, Ungewissheit und Stochastische Unsicherheit unterteilt. Für jede Kategorie sind je nach Verfügbarkeit die Häufigkeitsverteilungen  $p(F)$  der Last  $F$  angedeutet. Die Kategoriegrenzen werden als fließend angenommen [38]. Abbildung 2.1 auf der folgenden Seite zeigt diese Einteilung.

Wenn keine Information über die Belastung verfügbar ist, liegt Unwissen vor, Fall 1. Wenn nur vage Informationen in Grenzen, als Nominalwerte oder Maximalwerte von Belastungen aus der Literatur oder Normen vorliegen, herrscht Ungewissheit, Fall 2. Standardisierte Lastkollektive bieten Informationen über die Häufigkeitsverteilung  $p(F)$  von Belastungen. Amplitude und Gesamthäufigkeit müssen jedoch

	Stochastische Unsicherheit		Ungewissheit		Unwissen
					
	Fall 5	Fall 4	Fall 3	Fall 2	Fall 1
<b>Ermittelte Belastung <math>F</math> durch</b>	individuelles Online-Monitoring	Messung an Prototypen	umfassende Abschätzung als Lastkollektive	grobe Abschätzung	keine
<b>Häufigkeits-Verteilung <math>P(F)</math></b>	vollständig und bauteilspezifisch bekannt	exemplarisch bekannt	teilweise bekannt	nur Nennwert/Grenzen bekannt	unbekannt

**Abbildung 2.1:** Einteilung unterschiedlicher Ansätze zur Gewinnung von Information über die Belastung lasttragender Systeme nach dem SFB 805-Unsicherheitsmodell

zusätzlich produktspezifisch abgeschätzt werden. Es liegt Ungewissheit vor, Fall 3. Durch Messungen an Prototypen sind Häufigkeitsverteilungen  $p(F)$  exemplarisch, aber nicht produktindividuell bekannt. Es liegt Stochastische Unsicherheit vor, Fall 4. Durch eine Online-Erfassung der Belastungen individuell am Bauteil durch ein Lastmonitoring ist die Häufigkeitsverteilung  $p(F)$  für jede Last  $F$  bekannt, Fall 5.

Diese Einteilung entspricht qualitativ dem Graphen der Unsicherheit durch Informationsmangel über dem Technologiegrad in Abbildung 1.1 und zeigt die Verwendbarkeit des Unsicherheitsmodells des SFB 805 zur Einteilung von Unsicherheit durch unterschiedlichen Ansätzen zur Ermittlung von Belastungen. Im Folgenden werden die einzelnen Ansätze näher diskutiert.

### Fall 1: Unwissen

Sind die Belastungen eines lasttragenden Systems vollständig unbekannt, liegt Unwissen vor. Letztendlich kann hinsichtlich der Funktionstauglichkeit des betrachteten Systems nur die Aussage getroffen werden, dass das Bauteil bis zum aktuellen Zeitpunkt den auftretenden Belastungen Stand gehalten hat oder zu einem bestimmten Zeitpunkt an einer bestimmten Stelle versagt hat.

### Fall 2: Abschätzung

Belastungen, insbesondere Maximalbelastungen, können beispielsweise durch plausible Annahmen über die Masse und die maximal auftretenden Beschleunigungen eines Systems, durch Normen oder durch einfache Berechnungen und Simulationen abgeschätzt werden. So werden sicherheitsrelevante Bauteile wie beispielsweise knickgefährdete Kolbenstangen in hydraulischen oder pneumatischen Aktoren oder Dämpfern oft nur auf maximal auftretende Axiallasten ausgelegt [4]. Diese können durch Plausibilitätsbetrachtungen oder den maximal auftretenden Druck und der Kolbenfläche abgeschätzt werden [15]. Ungenügend bekannte Belastungen und potenzielles, plötzliches Knickversagen bei Überbelastung führen dazu, dass für knickgefährdete Strukturen hinsichtlich Knickversagen Sicherheitsbeiwerte von bis zu 10 vorgesehen werden [56]. Zur Bemessung von Tragwerken finden sich Normen, beispielsweise die *DIN 1055: Einwirkung auf Tragwerke* [10], oder die *DIN 15018 Krane: Grundsätze für Stahltragwerke, Berechnung* [7]. In diesen Normen werden Abschätzungen zu Maximalbelastungen durch plausible Annahmen über die Masse und die auftretenden Beschleunigung des Systems durch-

geführt. Bei kinetischen Beanspruchungen findet man anzunehmende dynamische Lastfaktoren, sodass sich die Nennlast aus der Multiplikation der Eigenlast mit dem dynamischen Lastfaktor unter Berücksichtigung eines Sicherheitsbeiwertes ergibt [6, 7, 8]. Sonderlastfälle beispielsweise durch Anprall werden in Normen oft durch einfache kinetische Betrachtungen berechnet [9]. Auch die kinetischen Belastungen eines Flugzeugfahrwerkes werden zur Dimensionierung oftmals auf Basis der statischen Lasten und den zu erwartenden auftretenden Beschleunigungen abgeschätzt. Sie müssen dann am realen Flugzeug durch einen Falltest experimentell an einer Kraftmessplattform validiert werden [1]. Die Abschätzung einer zuverlässigen Nutzungsdauer durch Betriebsfestigkeitskonzepte sind nicht möglich.

### **Fall 3: Standardisierte Lastkollektive**

Für komplexe, sicherheitsrelevante Leichtbaustrukturen werden zur numerischen oder experimentellen Abschätzung der Betriebsfestigkeit Betriebslasten und deren Auftretenshäufigkeit oftmals aus standardisierten Lastkollektiven abgeleitet [63, 71]. Standardisierte Lastkollektive wie beispielsweise TWIST [128] und FALSTAFF [102] zur Annahme über Biegemomente im Flügelwurzelbereich von Flugzeugen oder CARLOS [127] für Komponenten im Automobilbereich sind ein wichtiges Werkzeug in industriellen Problemstellungen der Produktauslegung lasttragender Systeme. Teilweise werden firmenintern eigene Lastkollektive für unterschiedliche Belastungsszenarien erstellt, z. B. [136]. Sie kommen zur Anwendung, wenn nicht die Möglichkeit besteht, Betriebslasten an interessierenden Bauteilen individuell und anwendungsspezifisch zu ermitteln. Standardisierte Lastkollektive werden oft in experimentellen Untersuchungen ermittelt und stehen dann stellvertretend für eine gesamte Produktgruppe. Produktgruppenspezifische standardisierte Lastkollektive müssen bei der Verwendung zum Nachweis der Betriebsfestigkeit auf die produktspezifischen Einsatzbedingungen skaliert werden, beispielsweise indem Kollektivhöchstwerte und Gesamthäufigkeit der auftretenden Belastungen an die jeweiligen Anforderungen angepasst werden oder indem mehrere einsatzspezifische Lastkollektive überlagert werden [63]. Diese notwendigen Informationen können natürlich für sich unsicherheitsbehaftet sein.

### **Fall 4: Messung an Prototypen**

Oftmals liegen nur sehr begrenzte Informationen über voraussichtliche Betriebsbelastungen eines Produkts vor, beispielsweise weil die Maximalbelastung oder die Lastkollektivform nicht bekannt ist oder das Produkt auf einen besonderen Einsatzzweck ausgelegt werden soll. Soll das betrachtete Produkt dennoch mit geringen Sicherheitsfaktoren ausgelegt werden, müssen die Betriebslasten individuell und für einen bestimmten Einsatzzweck durch Messungen an einem oder mehreren Prototypen ermittelt werden. Die möglichen Vorgehensweisen zur Ermittlung von Belastungen sind vielfältig. Eine einfache Methode zur Ermittlung von Schnittkräften ist die Verwendung von Kraftmessdosen oder Kraftmessplattformen. Im Fahrzeugbereich kommen Kraftmessräder zum Einsatz. Oftmals werden die Prototypen mit einer Vielzahl von Sensoren ausgestattet und für einige Lastfälle ein mathematisches Modell für den meist statisch angenommenen Zusammenhang zwischen den Belastungen und den Sensorsignalen aufgestellt und durch ein experimentelles Vorgehen kalibriert, z. B. [25, 54, 147]. Als Sensoren werden heute häufig Dehnmessstreifen eingesetzt [24, 25]. Produktspezifische, durch Messungen an Prototypen ermittelte Lastkollektive liefern detaillierte Informationen über die Höhe und Häufigkeitsverteilung von Belastungen eines bestimmten lasttragenden Systems. Allerdings ist es nicht üblich, Belastungen über die gesamte Produktlebensdauer zu ermitteln. Belastungen werden üblicherweise auf die vorgesehene

Lebensdauer des Produkts extrapoliert. Auch können Lastkollektive einzelner Produkte durch unterschiedlich intensive Nutzung schwanken. Die Unsicherheit in der Kenntnis der Belastung liegt zwischen Ungewissheit und Stochastischer Unsicherheit.

### **Fall 5: Lastmonitoring**

Ein Lastmonitoring, wie es in dieser Arbeit vorgestellt wird, ermöglicht idealerweise die produktindividuelle, kontinuierliche Ermittlung der tatsächlich in der Nutzung auftretenden Belastung und Beanspruchung. Verfahren, die auf der Invertierung einer dynamischen Nachgiebigkeitsmatrix beruhen, z. B. [86, 98, 139, 143], eignen sich nicht zum echtzeitfähigen Lastmonitoring, da die benötigten Berechnungen im Frequenzbereich erfolgen. Verfahren, die auf einer iterativen Lösung der direkten Problemstellung auf Basis nichtlinearer Optimierung durch Verfahren konjugierter Gradienten oder auf Basis der dynamischen Programmierung beruhen, z. B. [11, 76], sind numerisch sehr aufwendig und eignen sich nur bedingt für ein echtzeitfähiges Lastmonitoring.

Moderne, modellbasierte Verfahren zum echtzeitfähigen Lastmonitoring nutzen im Wesentlichen zwei Ansätze, um aus gemessenen Systemantworten, z. B. weg-, geschwindigkeits- oder beschleunigungsproportionale Messsignale, auf die zu ermittelnde Belastung zurück zu schließen:

- (a) Modellinversion von Impulsantwort-Modellen und
- (b) Zustandsbeobachter für unbekannte Eingangsgrößen.

Einige existierende Techniken dieser beiden Ansätze werden im Folgenden vorgestellt.

#### **(a) Modellinversion von Impulsantwort-Modellen**

Impulsantwort-Modelle bilden das Eingangs-Ausgangs-Verhalten eines Systems durch seine Impulsantwort ab [84]. Sie benötigen kein detailliertes Wissen über die inneren Zustände und Eigenschaften des Modells, beispielsweise die modalen Eigenschaften. Allgemein lässt sich durch eine Modellinversion mit geringem numerischem Aufwand aus einem Sensorsignal unabhängig von der Modellordnung eine Belastung ermitteln [134]. Dies ist bei Verfahren basierend auf einer Zustandsraumdarstellung aufgrund der Voraussetzung der Beobachtbarkeit der Moden nicht ohne weiteres möglich [101]. Die Funktionstauglichkeit solcher Verfahren wurde in numerischen Simulationen für Plattenstrukturen und Tragwerke nachgewiesen [107, 141]. Allerdings liegt bei der Invertierung der Matrizen eines Impulsantwort-Modells meistens ein schlecht gestelltes Inverses Problem vor. Ein schlecht gestelltes Inverses Problem äußert sich beispielsweise dadurch, dass kleine Abweichungen in den Messsignalen große Abweichungen in den ermittelten Belastungen bewirken. Ein Maß für die Empfindlichkeit gegenüber Störungen in Messsignalen ist die numerische Kondition des Problems. Deshalb wird die numerische Kondition oftmals durch ein Regularisierungsverfahren verbessert, z. B. [107, 141, 137]. Die Anwendung von Regularisierungsverfahren ist meist numerisch rechenaufwändig. Zudem wird durch das Regularisierungsverfahren gleichzeitig ein Modellfehler eingebracht, sodass ein Zielkonflikt zwischen einer akkuraten Modellbeschreibung und einer geringen Sensitivität gegenüber Abweichungen in den Messsignalen besteht [82]. Darüber hinaus können innere Systemzustände wie beispielsweise modale Auslenkungen als transformierte Größe nicht ohne weiteres ermittelt werden. Diese können aber bei Bedarf zur Regelung verwendet werden. Die Modellinversion von Impulsantwort-Modellen kann als deterministisches Verfah-

ren interpretiert werden. Zustandsbeobachter ermöglichen hingegen die Berücksichtigung stochastischer Störeinflüsse. Diese werden im Folgenden vorgestellt.

### **(b) Zustandsbeobachter für unbekannte Eingangsgrößen**

Zustandsbeobachter für unbekannte Eingangsgrößen ermöglichen es, sowohl innere Zustände als auch Belastungen zu ermitteln. Somit sind diese auch für Regelungsaufgaben z. B. unter Verwendung von Zustandsreglern geeignet. Darüber hinaus ermöglicht die Anwendung der Schätztheorie eine optimale Berücksichtigung stochastischer Störeinflüsse wie beispielsweise Mess- oder Systemrauschen. Bekanntester Vertreter solcher Zustandsbeobachter ist sicherlich das *Kalman-Filter*. Für diesen müssen aber die Eingangsgrößen üblicherweise bekannt sein oder zumindest als Störgrößen angenommen werden. Sie sind nicht geeignet zur Ermittlung unbekannter Eingangsgrößen wie z. B. mechanische Belastungen. In den letzten Jahren gab es umfangreiche Forschungsarbeiten zu Zustandsbeobachtern für unbekannte Eingangsgrößen (*Unknown Input Observer*). Mit diesen Verfahren ist ein echtzeitfähiges Lastmonitoring, wie es in dieser Arbeit vorgesehen ist, möglich.

Das klassische Kalman-Filter lässt sich mit einem rekursiven Least-Square-Filter zur Rekonstruktion der Belastungen kombinieren, um gleichzeitig innere Systemzustände als auch Belastungen zu ermitteln [30, 105]. Das rekursive Least-Square-Filter kann aber eine Zeitverzögerung in den Zustandsbeobachter bringen. Zudem ist durch die Verknüpfung beider Filter mit völlig unterschiedlichen Funktionsweisen eine analytische Betrachtung der Eigenschaften nur schwer möglich, wodurch aus Sicht des Autors weder eine optimale analytische Auslegung noch der analytische Nachweis der Stabilität und Leistungsfähigkeit (*Performance*) möglich ist.

Gleitzustandsbeobachter (*Sliding Mode Observer*) basieren auf einfachen, binären Regelgesetzen, um den Schätzfehler der zu ermittelten Zustandsgrößen zu minimieren. Sie gelten hinsichtlich ihrer Stabilität als besonders robust gegenüber Parameterschwankungen des mathematischen Modells [14]. Sliding Mode Observer können auch als Unknown Input Observer aufgebaut werden [77]. Nachteilig wirkt sich das binäre Umschalten im Bereich des dynamischen Gleichgewichts des Zustandes aus. Dieses äußert sich durch ein Flattern des identifizierten Zustandes bzw. der ermittelten Belastung. Auch geht aus den Ausführungen [77] und [28] nicht hervor, wie sich solche Gleitzustandsbeobachter hinsichtlich unvermeidbarem Messrauschen verhalten. Gerade Messrauschen dürfte sich aber aus Sicht des Autors bei Gleitzustandsbeobachtern aufgrund der binären Regelgesetze stark auf die ermittelten Belastungen auswirken.

In dieser Arbeit wird ein Zustandsbeobachter für unbekannte Eingangsgrößen als Algorithmus zur Ermittlung von Belastungen verwendet, welcher 2007 von GILLIJNS vorgestellt wurde [47, 48, 49]. Für diesen wurde der analytische Nachweis einer optimalen Ermittlung von aktuellen Zuständen und Eingangsgrößen bei gegebenen statistischen Informationen über Mess- und Systemrauschen im Sinne einer minimalen Varianz erbracht. GILLIJNS untersuchte in seiner Dissertation [47] als Anwendungsbeispiele die Ermittlung unbekannter Eingangsgrößen eines Aktuators am Heckruder eines F16 Flugzeuges, wenn beispielsweise ein Sensor ausgefallen ist, aber auch die Ermittlung unbekannter Randbedingungen bei der Wärmeleitung an einer Platte. LOURENS greift auf die Arbeiten von GILLIJNS zurück, um mechanische Belastungen an lasttragenden Systemen zu ermitteln [101, 100].

Solche Zustandsbeobachter für unbekannte Eingangsgrößen werden in der Praxis erfolgreich zur Ermittlung von Belastungen eingesetzt. Beispielsweise nutzen KLINKOV & FRITZEN einen Zustandsbeobachter zur Ermittlung von Windbelastungen an einer Windenergieanlage [89]. LOURENS ermittelt mechanische Belastungen in numerischen und experimentellen Simulationen an Balkenstrukturen [101], aber auch an einer Brücke [100]. Auch im Automobilbereich werden Zustandsbeobachter zur Ermittlung aktueller Systemzustände im Fahrzeug eingesetzt [32, 44]. Dazu wird meist die Mehrkörperdynamik des Fahrzeugs in einem mathematischen Modell abgebildet. Durch Weg- und Beschleunigungsmessung lassen sich betriebsrelevante Größen wie aktuelle Radlasten, aber auch Position und Geschwindigkeit von Radträger und Aufbau ermitteln. Diese Größen werden dann oftmals zum aktiven Eingriff in den aktuellen Fahrzeugzustand verwendet, beispielsweise zur Fahrdynamikregelung oder zur Beeinflussung von Radlasten durch semiaktive oder aktive Feder-Dämpfer-Elemente.

Zustandsbeobachter für unbekannte Eingangsgrößen eignen sich auch zur Ermittlung von Belastungen in nichtlinearen Systemen [14, 59, 60, 106].

Die bisher vorgestellten Verfahren zum Lastmonitoring haben alle gemeinsam, dass das mathematische Modell zur Abbildung des realen Systems vollständig bekannt sein muss. In der Praxis tritt aber häufig der Fall auf, dass einige Eigenschaften des mathematischen Modells vorab nicht bekannt oder während des Betriebes veränderlich sind. Beispielsweise ist nicht immer bekannt, an welchem Ort eine Belastung an der Struktur angreift. Auch sind in der Praxis oftmals Systemeigenschaften während des Betriebes veränderlich, beispielsweise durch nicht berücksichtigte oder nicht quantifizierbare Einflüsse, aber auch durch potentielle Schädigung der Struktur. Diese Unsicherheit in der Kenntnis der tatsächlichen Systemeigenschaften kann zu einer Abweichung zwischen ermittelten und tatsächlichen Belastungen führen.

Aus diesem Grund werden im Folgenden existierende Verfahren zur Lösung folgender Problemstellungen vorgestellt:

- (c) Gleichzeitige Ermittlung von Belastungen und veränderlicher Systemeigenschaften und
- (d) Gleichzeitige Ermittlung von Lastort und Lasthöhe.

### **(c) Gleichzeitige Ermittlung von Belastungen und veränderlichen Systemeigenschaften**

Das zur Ermittlung von Belastungen benötigte mathematische Modell zur Abbildung der Systemeigenschaften des realen lasttragenden Systems kann beispielsweise vor dem Betrieb durch numerische Modelle oder in experimentellen Simulationen durch Verfahren der Systemidentifikation ermittelt werden. Systemeigenschaften können aber im Betrieb variieren, beispielsweise durch Schädigung der Struktur oder vernachlässigten Einflüssen auf das betrachtete System. Oftmals kann aber während des Betriebes keine definierte Belastung auf die Struktur aufgebracht werden, eine Systemidentifikation im Betrieb ist somit nicht möglich [152].

Werden Annahmen über die auftretenden Belastungen getroffen, beispielsweise dass diese voraussichtlich einem weißen Rauschen entsprechen, lassen sich klassische Verfahren der Systemidentifikation



im Zeit- oder Frequenzbereich anwenden [80]. Auch Verfahren beruhend auf dem *Extended Kalman Filter* sind so prinzipiell derart erweiterbar, dass sie Systemeigenschaften ohne bekannte Eingangsgrößen ermitteln können [122]. Allerdings ist die Annahme der Belastung als weißes Rauschen in den meisten Fällen nicht zutreffend, sodass sich ein abweichendes Belastungsspektrum stark auf das Ergebnis der Systemidentifikation auswirken dürfte.

Verfahren der *Operational Modal Analysis* eignen sich, um modale Parameter des betrachteten Systems bei unbekanntem Betriebslasten zu ermitteln. Meist wird versucht, Messdaten über einen längeren Zeitraum statistisch zu mitteln. So können dann im Zeitbereich auf deterministischer Ebene Impulsantworten und auf stochastischer Ebene Kovarianzmatrizen oder im Frequenzbereich Frequenzgänge gewonnen werden können. Durch bekannte Methoden der Modalanalyse oder der Singulärwertzerlegung können dann die modalen Parameter des betrachteten Systems ermittelt werden [114].

Die *Random Decrement Methode* beruht auf der Annahme, dass die Schwingungsantwort eines Systems unter breitbandiger Anregung im Mittel einer Impulsantwort entspricht. Überschreitet die gemessene Schwingungsantwort einen Schwellenwert, werden die Zeitsignale in einem Zeitfenster aufgezeichnet und bei weiteren Messungen gemittelt. Dies geschieht solange, bis eine qualitativ ausreichend abgeschätzte Impulsantwort des Systems vorliegt. Aus dieser können durch eine Singulärwertzerlegung die interessierenden modalen Parameter gewonnen werden [16, 43, 130]. Das Verfahren bietet den Vorteil, dass bei der Implementierung eines Sensornetzwerkes die Sensorknoten nur Triggersignale untereinander austauschen müssen, womit nur sehr geringe Datenraten zu übertragen sind [43]. Sind dann die modalen Parameter des Systems bekannt, lässt sich aus diesen über ein mathematisches Modell invers auf einen potentiellen Schaden zurück schließen [23].

Einige Ansätze beruhen darauf, dass sich Schäden derart verhalten, als wären es zusätzliche Belastungen, die auf das System wirken, sogenannte *schadensäquivalente Belastungen* oder virtuelle Verformung (*Virtual Distortion Method*) [74, 115, 151, 152]. Unterschiedliche Schadensfälle werden dann durch Schadensmustern charakterisiert. Durch geeignete Verfahren der Mustererkennung lässt sich dann aus den ermittelten tatsächlichen und schadensäquivalenten Belastungen der vorliegende Schadensfall abschätzen. So erprobten ZHANG et al. 2010 auf Basis der Virtual Distortion Method von HOLNICKI-SZULC [74] die gleichzeitige Identifikation von Lasten und Schäden an einem Tragwerk in numerischen Simulationen [151]. Zur Ermittlung von Belastungen verwenden sie die Invertierung von Impulsantwort-Modellen. Am Tragwerk greift eine einzelne Last an. Es werden Dehnungen an 7 Stäben gemessen. Als Schadensfälle werden zum einen ein reduzierter E-Modul des gesamten Tragwerkes, zum anderen ein atmender Riss angenommen. Sowohl die Einzellast als auch die Schadensfälle und Schadenshöhe wurden in numerischen Simulationen echtzeitfähig erfolgreich identifiziert. Diese Methode wurde 2012 von ZHANG erweitert auf die Ermittlung von Systemeigenschaftsänderungen durch Masseänderungen und in numerischen und experimentellen Untersuchungen validiert [152]. Darüber hinaus werden in der Arbeit zur Reduktion des numerischen Berechnungsaufwandes die Impulsantwort-Funktionen durch Polynome interpoliert. Bei seinen Untersuchungen geht ZHANG allerdings stets davon aus, dass die Struktur zu Beginn des zeitlichen Betrachtungshorizontes in ihrer Ruhelage ist, was im realen Betrieb selten der Fall ist.

Ein wesentlicher Nachteil all dieser Methoden ist, dass ohne zusätzliche Annahmen zur *eindeutigen* Lösung der Problemstellung die Anzahl an Messfreiheitsgraden zumindest gleich oder möglichst größer als die Anzahl potentieller Belastungs- und Schadensorte sein muss, z. B. [23, 58, 95, 101]. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, liegt ein sogenanntes unterbestimmtes Inverses Problem vor, vgl. Abschnitt 3.2. In der Praxis kann dies bei unbekanntem Lastort und zahlreichen potentiellen Schadensorten dazu führen, dass eine sehr hohe Anzahl an Messfreiheitsgraden benötigt wird. Die vorgestellten Methoden sind somit gegebenenfalls nicht praxistauglich.

#### **(d) Ermittlung von Belastungen bei unbekanntem Lastort**

Im Bereich der Lastermittlung bei unbekanntem oder variablem Lastort entstehen ähnliche Herausforderungen. Zur eindeutigen Ermittlung des Lastortes und damit auch der Lasthöhe muss die Anzahl an Messfreiheitsgraden zumindest gleich oder möglichst größer als die Anzahl potentieller Lastorte sein [95]. Oftmals werden die Lastorte als bekannt angenommen [101, 108]. Einige im Folgenden dargestellte Ausnahmen beruhen auf vereinfachenden Annahmen.

Sollen bewegte Lasten wie beispielsweise Fahrzeuge auf einer Brücke ermittelt werden (*Moving Load Identification*), ist dies nicht ohne Kenntnis des Fahrzeug- bzw. Lastortes möglich. Oftmals werden deshalb zusätzliche Annahmen über den zeitlichen Verlauf des Lastortes, beispielsweise durch Geschwindigkeitsmessung des Fahrzeugs an einem oder mehreren Orten und Extrapolation, getroffen [51, 113, 153]. Eine besondere Herausforderung ist hierbei, dass das Fahrzeug als Subsystem die dynamischen Eigenschaften des belasteten Systems, beispielsweise der Brücke, verändert. Die dargestellte Vorgehensweise löst das Problem eines unbekanntes Lastortes aber nur problemspezifisch. Der Ort der Belastung wird nicht durch das Lastmonitoring selbst, sondern durch zusätzliche Messungen ermittelt. Dies ist aber nicht immer möglich.

Sollen verteilte Lasten ermittelt werden, z. B. Windlasten an Brücken oder Gebäuden, bietet sich die Approximation der verteilten Last durch einen Satz orthogonaler Polynome an. Es werden dann statt den Belastungen an diskreten Freiheitsgraden die Koeffizienten der Polynome ermittelt [53, 154]. Dieses Verfahren eignet sich aber nicht zur Ermittlung einer oder mehrerer diskreter Belastungen, da eine sehr hohe Anzahl an Polynomen zur Approximation der diskreten Belastung nötig wären, was wiederum mit einer hohen Anzahl an benötigten Sensoren einher geht.

Ein neuer Ansatz zur Ermittlung von lokalen Impulslasten bei unbekanntem Lastort wurde 2014 von GINSBERG et al vorgestellt [50]. Unter der Annahme, dass die meisten Belastungen einer Struktur gleich null sind, lässt sich das daraus resultierende dünn besetzte lineare Gleichungssystem zur Beschreibung der Auswirkung der Impulslast auf die Sensorsignale mit einem Regularisierungsansatz unter Berücksichtigung der  $L_1$ -Norm lösen (Stichworte: *Compressed Sensing*, *Sparse Solution*), vgl [96]. Die Funktionstauglichkeit des Algorithmus wird in numerischen und experimentellen Simulationen an einem Balken nachgewiesen. Aus Sicht des Autors dieser Arbeit bietet der Ansatz großes Potential zur Lösung praxisrelevanter Problemstellungen des Lastmonitorings. Es bleibt jedoch abzuwarten, wie sich dieser Ansatz für andere Belastungsarten anwenden lässt.

Neben den aufgeführten Lösungsansätzen zur Ermittlung von Fahrzeuglaste, verteilten Windlasten oder lokalen Impulslasten lässt sich in der Literatur zumindest kein Forschungsgebiet aufdecken, in dem das Problem eines unbekanntes Lastortes grundlegend behandelt wird.

---

## 2.1.2 Terminologie und Methoden der Unsicherheit

---

In diesem Abschnitt werden Beriffe und Methoden zur Beschreibung, Bewertung und zum Umgang mit Unsicherheit in technischen Systemen allgemein und in Lastmonitoring-Systemen speziell vorgestellt und diskutiert.

---

### Der Begriff 'Unsicherheit' in den Ingenieurwissenschaften

---

Bevor in diesem Abschnitt existierende Methoden zur Beschreibung, Bewertung von Unsicherheit und zum Umgang mit Unsicherheit vorgestellt werden, sollen einige in dieser Arbeit benötigten Definitionen rund um den Begriff der Unsicherheit vorgestellt werden. In der Literatur wird der Begriff Unsicherheit nicht einheitlich verwendet. Deshalb werden im Folgenden einige Begriffsdefinitionen aus dem Bereich der Ingenieurwissenschaften geklärt.

OBERKAMPF et al. unterscheiden in ihrem Bericht von 1999 zwischen Variabilität (*variability*), Unsicherheit (*uncertainty*) und Fehler (*error*) [112].

**Variabilität** wird von OBERKAMPF als Abweichungen oder Streuung angesehen, die dem betrachteten physikalischen System oder seiner Umgebung eigen ist. Sie wird auch als *Aleatorische Unsicherheit* oder als nicht reduzierbare Unsicherheit bezeichnet [90, 112]. Im Bezug auf ein Lastmonitoring wäre das z. B. thermisches Messrauschen in den Messsignalen.

**Unsicherheit** ist nach OBERKAMPF eine potentieller Informationsmangel in allen Phasen der Modellierung, bezieht sich also auf die Verfügbarkeit von Informationen. Sie wird auch als *epistemische Unsicherheit* oder als reduzierbare Unsicherheit bezeichnet [90, 112]. Im Bezug auf ein Lastmonitoring wäre das z. B. eine nicht vollständig bekannte Sensoreigenschaft.

Ein **Fehler** ist nach OBERKAMPF definiert als ein erkennbarer Missstand, der nicht durch einen Informationsmangel entstanden ist. Im Bezug auf ein Lastmonitoring wäre das z. B. der Ausfall eines Sensors.

VANDEPITTE greift diese Begriffe für nichtdeterministische Finite-Element-Berechnungen auf [144].

In dieser Arbeit wird zur Charakterisierung des Begriffes Unsicherheit die Arbeitshypothese des SFB 805 verwendet. Diese lautet [66]:

*Unsicherheit tritt auf, wenn Prozesseigenschaften nicht oder nicht vollständig determiniert werden können.*

Unsicherheit tritt also in Prozessen auf und kann sowohl durch Variabilität von Parametern als auch durch Informationsmangel oder Fehler entstehen. Zur Kategorisierung von Unsicherheit wurde im SFB 805 ein Unsicherheitsmodell erarbeitet, welches bereits zur Einteilung unterschiedlicher Ansätze zur Gewinnung von Informationen über Belastungen verwendet wurde, Abbildung 2.1. Es liefert eine

sinnvolle Einteilung von Unsicherheit über den Grad der verfügbaren und vertrauenswürdigen Information über die Wahrscheinlichkeit und Wirkung unsicherer Größen auf einen Prozess. Abbildung 2.2 zeigt das vollständige Modell nach [38].

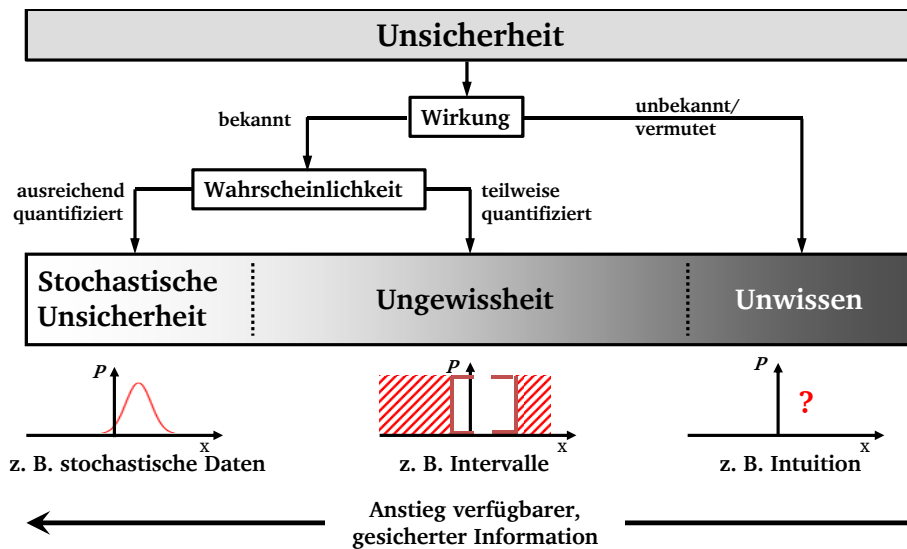


Abbildung 2.2: Unsicherheitsmodell des SFB 805

Ist die Wirkung einer Unsicherheit unbekannt oder wird nur vermutet, kann keine Aussage über die Häufigkeitsverteilung  $p(x)$  der Produkteigenschaft  $x$  eines lasttragenden Systems getroffen werden. Es herrscht Unwissen. Ist die Wirkung einer Unsicherheit bekannt, deren Häufigkeitsverteilung  $p(x)$  aber nur teilweise quantifiziert, beispielsweise durch Intervalle oder Toleranzen, liegt Ungewissheit vor. Stochastische Unsicherheit liegt dann vor, wenn die Häufigkeitsverteilung  $p(x)$  der unsicheren Produkteigenschaft ausreichend oder vollständig quantifiziert vorliegt, z. B. durch Angabe einer Dichtefunktion oder statistische Größen wie beispielsweise der Momente der Dichtefunktion. Die Begriffe des Unsicherheitsmodell werden in der vorliegenden Arbeit verwendet, um unsicherheitsbehaftete Größen zu kategorisieren und je nach Kategorie unterschiedliche Maßnahmen zur Beherrschung der Unsicherheit zu treffen.

### Begriffe der Unsicherheit im modellbasierten Monitoring

Neben der übergeordneten und allgemein kategorisierenden Einteilung von Unsicherheit nach dem Unsicherheitsmodell des SFB 805 existieren in der Literatur unterschiedliche Begriffe zur Charakterisierung von Unsicherheit, die in modellbasierten, informationsverarbeitenden Systemen wie beispielsweise dem modellbasierten Monitoring auftreten kann. Einige für diese Arbeit relevanten Begriffe werden im Folgenden dargestellt.

Die in dieser Arbeit untersuchten Lastmonitoring-Systeme basieren alle auf einem mathematischen Modell. Ein Modell ist aber per Definition eine vereinfachende Abbildung der Realität [133], bildet also die Realität nicht vollständig ab. Die daraus resultierende Unsicherheit wird als **Modellunsicherheit** bezeichnet [90, 103, 111, 126]. Sie entsteht beispielsweise durch Idealisierungen in der Modellbildung, diskretisierte Abbildung kontinuierlicher Systeme, Linearisierung potentiell nichtlinearer Systeme oder

Vernachlässigung relevanter Systemeigenschaften und kann nicht in numerischen Simulationen bewertet werden. Modellunsicherheit wird auch als *unstrukturierte Unsicherheit* (*unstructured uncertainty*) bezeichnet und kann in experimentellen Simulationen z. B. durch statistische Analysen oder auf Basis der Bayes-Theorie in Modellfehler-Modellen (*model error models*) beschrieben werden, siehe nachfolgende Ausführungen und [19, 27, 57, 119].

Andererseits können auch die Parameter des mathematischen Modells unsicherheitsbehaftet sein. Dies wird als **Parameterunsicherheit** (oder parametrische Unsicherheit, *parametric uncertainty*) bezeichnet [57, 90, 119, 142]. Parameterunsicherheit kann beispielsweise entstehen, wenn die Modellparameter nicht an die realen Systemeigenschaften angepasst wurden oder durch Änderungen von Systemeigenschaften im Betrieb, beispielsweise durch Steifigkeitsänderungen in Folge einer mechanischen Schädigung. Sie kann durch analytische Berechnungen und numerische Simulationen bewertet werden, z. B. durch statistische Analyse, Parameterstudien oder Sensitivitätsanalysen [52, 57]. Modellunsicherheit und Parameterunsicherheit gemeinsam werden auch als *strukturierte Unsicherheit* (*structured uncertainty*) bezeichnet.

Auswirkung von Unsicherheit, die in dem zum Lastmonitoring benötigten Messprozess zur Gewinnung von Messsignalen auftreten kann, wird in der *DIN 1319-1: Grundlagen der Messtechnik - Teil 1: Grundbegriffe* in **zufällige (Mess-)Abweichung** und **systematische (Mess-)Abweichung** unterteilt [2]. Als zufällige Abweichungen werden die Abweichungen des aktuellen Messwertes von seinem Erwartungswert bezeichnet [2]. Im Allgemeinen ist der wahre Erwartungswert aber nicht bekannt. Zufällige Abweichungen in Messsignalen zur Schwingungsmessung können durch Messrauschen oder durch Quantisierung bei der Analog-Digitalwandlung, dem Quantisierungsrauschen, entstehen. Zufällige Abweichungen können meist durch Verteilungsfunktionen beschrieben werden, z. B. durch eine Normalverteilung im Falle des Messrauschens [72] oder durch eine Gleichverteilung im Falle des Quantisierungsrauschens [79]. Als systematische Abweichungen werden die Abweichungen des Erwartungswertes eines Messsignals von seinem wahren Wert bezeichnet [2]. Diese werden auch als Bias bezeichnet. Systematische Abweichungen können beispielsweise durch Schwankungen der Eigenschaften von Sensoren entstehen. Diese können im Herstellungsprozess, aber auch im Betrieb beispielsweise durch Ermüdung entstehen und sind meist nur schwer vorherzusagen [81].

---

## Existierende Methoden zum Umgang mit Unsicherheit

---

Methoden zur Beschreibung, Bewertung und zum Umgang mit Unsicherheit waren und sind bereits Gegenstand zahlreicher Forschungsaktivitäten. Grundsätzlich kann man zwischen qualitativen und quantitativen Methoden unterscheiden. Qualitative Methoden haben zum Ziel, anhand einer systematischen Vorgehensweise auf Basis von Formblättern und festgelegten Prozessdefinitionen Ursachen von Unsicherheit und deren Folgen zu ermitteln und zu bewerten. Eine gängige Methode, um potentiell auftretende Fehler zu bewerten, ist die *Fehlermöglichkeits- und Einflussanalyse* (FMEA). Eine im SFB 805 entwickelte Methodik zur Analyse und Beurteilung von Unsicherheit ist die *Unsicherheitsmöglichkeits- und Einflussanalyse* (UMEA) [35, 36]. Sie basiert auf einer Zusammenführung unterschiedlicher qualitativer und quantitativer Methoden und ermöglicht es, Unsicherheit in unterschiedlichen Phasen der Produktentwicklung zu beschreiben und zu bewerten. Die UMEA wurde bereits erfolgreich in der Praxis einge-

setzt [22]. Die meisten qualitativen Methoden benötigen zur qualitativen Bewertung von Unsicherheit Expertenwissen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich im Wesentlichen mit quantifizierbaren Auswirkungen von Unsicherheit. Die elementar interessierende, quantifizierbare Auswirkung von Unsicherheit in den Prozessen des Lastmonitorings ist die Abweichung zwischen der tatsächlich am lasttragenden System angreifenden Belastung und der durch das Lastmonitoring-System ermittelten Belastung. Methoden zur Bewertung und Quantifizierung der Auswirkung von Unsicherheit in Prozessen werden im Folgenden vorgestellt.

Eine gängige und altbewährte Methode zur Beschreibung und Bewertung der Auswirkung von Unsicherheit ist die *Gaußsche Fehlerfortpflanzung*, welche in Normen zur Bestimmung von Messunsicherheit aufgenommen wurde, z. B. im *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement GUM* [5] oder dem deutschen Pendant, der *DIN 1319: Grundlagen der Messtechnik* [2]. Dazu müssen analytisch oder numerisch ermittelte Sensitivitäten des vollständig bekannten, mathematischen Modells ermittelt werden. Unsicherheit, die nicht im Rahmen des mathematischen Modells beschrieben werden kann, z. B. Modellunsicherheit, kann somit nicht ermittelt werden. Auch die Bewertung komplexerer informationsverarbeitender Systeme ist mit diesem analytischen Ansatz nicht möglich.

Breites Anwendungspotential zu Berechnungen mit unsicheren Variablen bietet der Ansatz der *Fuzzy-Arithmetik* basierend auf Fuzzy-Zahlen. Die Grundlagen der Fuzzy-Arithmetik wurden 1965 von ZADEH entwickelt [150]. Sie ermöglicht den Umgang und die Ableitung von Rechenregeln mit unscharfen oder vagen Informationen wie beispielsweise verbale Aussagen ('ein bisschen', 'ziemlich'), Expertenmeinung auf Basis persönlicher Erfahrungen oder aber auch streuenden Parametern. Fuzzy-Arithmetik wird beispielsweise in der Unsicherheitsanalyse [68], in der stochastischen FE-Methode [67], in der Zuverlässigkeitsanalyse [138], in der probabilistischen Sicherheitsanalyse [131], aber auch in der Regelungstechnik in Form der Fuzzy-Regelung [12] eingesetzt. Ein wesentlicher Vorteil der Verwendung von Fuzzy-Zahlen ist, dass in der Modellierung auch mit weichen Faktoren gearbeitet werden kann, wenn Parameter oder Modellstruktur nicht oder noch nicht vollständig bekannt sind, beispielsweise in der Produktentwicklung. Auch ist die Ausführung der Fuzzy-Arithmetik numerisch sehr effizient umsetzbar [67]. Als schwierig gilt allerdings die sinnvolle Rückführung von Fuzzy-Zahlen in deterministische, quantifizierbare Größen durch eine Defuzzifizierung [121].

Ebenso verwenden zahlreiche Verfahren die Grundlagen der *Bayesschen Statistik*, um mit vagen Informationen über mögliche Ereignisse und deren Verknüpfung umzugehen. Die Bayessche Statistik ermöglicht die Verwendung bedingter Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen. Im Gegensatz zur klassischen Statistik kann, ähnlich zur Fuzzy-Arithmetik, die angenommene Wahrscheinlichkeit den Grad der persönlichen Überzeugung repräsentieren. Die Bayessche Statistik wird beispielsweise in der probabilistischen Modellanpassung [26], der Identifikation nichtlinearer Systeme [149], zur Sensitivitäts- und Unsicherheitsanalyse [125] oder zur unsicherheitsminimierenden Sensorpositionierung [41] verwendet. Auch der Kalman-Filter kann aus Sicht der Bayesschen Statistik interpretiert und sogar daraus hergeleitet werden [99].

*Chaos-Polynome* (*polynomial chaos*) approximieren Verteilungsfunktionen streuender Variablen beispielsweise durch einen Satz orthogonaler Polynome. Die Grundlagen dazu wurden 1938 von WIENER veröffentlicht [148]. Mit relativ einfachen Rechenregeln kann dann die Fortpflanzung der streuenden

Variablen in mathematischen Operationen unter Verwendung der Koeffizienten der Chaos-Polynome erfolgen. Der Ansatz findet z. B. Anwendung in der stochastischen FE-Methode [46, 124], in der Beschreibung und Bewertung unsicherer Prozesse [29], in der probabilistischen Sicherheitsanalyse [21] oder zur Unsicherheitsbeschreibung in der Modalanalyse [129].

Besondere Bedeutung zur Bewertung von Unsicherheit in technischen Systemen besitzen aufgrund ihrer vielseitigen Anwendbarkeit sicherlich Methoden der *Sensitivitätsanalyse*. Die Sensitivitätsanalyse beschäftigt sich allgemein mit der quantitativen Bewertung von Auswirkungen variierender Eingangsgrößen eines Systems auf vorab definierte Ausgangs- bzw. Zielgrößen [125]. Es existieren zahlreiche unterschiedliche Ansätze wie beispielsweise die varianzbasierte Sensitivitätsanalyse z. B. auf Basis von Monte-Carlo-Methoden oder die Methoden der statistischen Versuchsplanung (*Design of Experiments*) [125]. Beide Ansätze wurden in eigenen Arbeiten zur Bewertung von Unsicherheit in Lastmonitoring-Systemen in numerischen Simulationen eingesetzt [92, 93].

Im Allgemeinen kann zwischen der lokalen und der globalen Sensitivitätsanalyse unterschieden werden. Die lokale Sensitivitätsanalyse betrachtet örtlich begrenzte Sensitivitäten eines Systems bei geringen Änderungen der Eingangsgrößen. Nichtlineare Zusammenhänge oder Wechselwirkungen werden meist nicht berücksichtigt. Lokale Verfahren werden beispielsweise in der Strukturmechanik zur Optimierung eingesetzt, meist in iterativen Optimierungsverfahren [69]. Bei der globalen Sensitivitätsanalyse wird hingegen versucht, die Zusammenhänge zwischen den Ein- und Ausgangsgrößen eines Systems und deren Wechselwirkung im vollständigen betrachteten Werteraum abzubilden. Sie wird auch zur Bewertung von Sensitivitäten komplexer Systeme verwendet [64].

Einen wichtigen Beitrag zum Umgang mit Unsicherheit in regelungstechnischen Systemen und somit auch in einem Zustandsbeobachter zum Lastmonitoring leisten die Methoden der *robusten Regelung*. Sie haben zum Ziel, trotz unvermeidbarer Abweichungen zwischen dem realen Verhalten eines geregelten Systems und dessen Abbildung durch ein mathematisches Modell sowohl die Stabilität als auch die Leistungsfähigkeit der verwendeten Regelstrategie zu gewährleisten. Im Wesentlichen sind dazu folgende zwei Schritte notwendig:

- (1) Die Ermittlung und Modellierung eines Nominalmodells und einer Unsicherheitsregion zur Beschreibung der Systemeigenschaften und deren Streuung innerhalb eines relevanten Frequenzbereichs.
- (2) Die Reglerauslegung durch Nachweis der Stabilität und Leistungsfähigkeit eines Sets an Regelparametern innerhalb der beschriebenen Unsicherheitsregion.

Für die vorliegende Arbeit ist dabei insbesondere Schritt (1) von Interesse. BALAS bietet 1990 in seiner Dissertation einen Überblick über die Robuste Regelung am Beispiel großformatiger, schwach gedämpfter Leichtbaustrukturen [19]. Neben der Anwendung von Singulärwert-Methoden zur robusten Auslegung von Reglereigenschaften beschäftigt sich ein Teil der Arbeit mit der Identifikation sowohl eines Nominalmodells als auch einer Unsicherheitsregion zur Beschreibung der Systemeigenschaften und deren Streuung. Er unterscheidet bei den unstrukturierten Unsicherheiten nach additiver und multiplikativer Unsicherheit. Parameterunsicherheit beschreibt er durch plausible Annahmen oder durch eine experimentelle Ermittlung der Streuungen modaler Parameter des mathematischen Modells. Eine wesentliche Erkenntnis seiner Arbeit ist, dass eine akkurate Beschreibung des Systems und dessen Unsicherheit

für die hohe Leistungsfähigkeit und Robustheit von Regelstrategien zur Schwingungsminderung von Leichtbaustrukturen essenziell ist. Die Arbeit von BALAS wurde in der *Robust Control Toolbox* in MATLAB verstetigt [18].

REINELT & LJUNG greifen das Konzept der robusten Regelung auf und konzentrieren sich in weiteren Arbeiten auf die Identifikation von Modellunsicherheit. Die daraus entstandene Methodik der Modellfehler-Modellierung (*model error modelling*) basiert auf einer Betrachtung des Residuums zwischen den Messsignalen, die durch das Modell beschrieben werden können und denen, die nicht durch das Modell beschrieben werden. Dieses Residuum wird dann verwendet, um ein parametrisches Modell im Frequenzbereich zu identifizieren, das sogenannte Modellfehler-Modell, welches das Übertragungsverhalten zwischen den Eingangsgrößen des Systems und dem Residuum beschreiben. Aus diesem Modellfehler-Modell werden dann Konfidenzintervalle zur Beschreibung einer Unsicherheitsregion abgeleitet und ggf. in ein parametrisches Modell für weiteren Untersuchungen überführt [119, 118].

Aspekte der Unsicherheitsmodellierung und -bewertung werden auch für Zustandsbeobachtern diskutiert. So weist ELLIS in seinem Buch *Observers in Control Systems: A practical guide* darauf hin, dass Zustandsbeobachter ein hohes Potential zur robusten Gewinnung von Informationen haben, insbesondere zur Gewinnung von nicht direkt messbaren Größen, sie aber auch zusätzliche Komplexität in das Produkt bringen und empfindlich gegenüber Änderungen von Systemeigenschaften reagieren können [34]. Diese Aussage unterstreicht die Notwendigkeit einer Unsicherheitsbetrachtung bei Lastmonitoring-Technologien, insbesondere unter Verwendung von Zustandsbeobachtern für unbekannte Eingangsgrößen.

Teilweise wird in Arbeiten zu Lastmonitoring-Systemen der Einfluss von Messrauschen auf die Güte der ermittelten Belastung untersucht und bei der Auslegung des Systems berücksichtigt. Einige Arbeiten vergleichen dazu auch unterschiedliche Methoden zur Ermittlung von Belastungen auf ihre Robustheit gegenüber Messrauschen [137, 139].

HWANG et al nutzen in [78] einen Zustandsbeobachter zur Ermittlung von Belastungen einer Tragwerkstruktur. Sie diskutieren die Auswirkung von Unsicherheit wie beispielsweise Schwankungen in Parametern des mathematischen Modells oder Messrauschen, aber auch die Verwendung unterschiedlicher Sensoren, auf die Güte der ermittelten Belastungen. Dazu werden analytische und numerische Sensitivitätsanalysen durchgeführt. Ein Ergebnis der Arbeit ist, dass sich zur Ermittlung von Belastungen beschleunigungsproportionale Messsignale besser als weg- oder geschwindigkeitsproportionale Messsignale eignen. Darüber hinaus werden weder systematische Maßnahmen zur Beherrschung von Unsicherheit noch Unsicherheit, die durch unvollständige Abbildung des realen Systems im mathematischen Modell entstehen kann, diskutiert.

Nur wenige Arbeiten diskutieren Unsicherheit, die bei der Ermittlung von Belastungen in der experimentellen Simulation auftreten kann. THIENE et al. untersuchen beispielsweise in numerischen und experimentellen Simulationen den Einfluss unterschiedlicher Sensorpositionen auf einer Platte auf die Güte der ermittelten Belastungen [139]. Sie stellen fest, dass die Wahl der Sensorposition einen Einfluss auf die numerische Kondition des verwendeten Algorithmus zum Lastmonitoring haben. Die in dieser Arbeit verwendeten Verfahren zur Sensorpositionierung in Abschnitt 6.2 beruhen ebenfalls auf einer Bewertung der numerischen Kondition.



Der Ansatz der Gaußsche Fehlerfortpflanzung wird in Abschnitt 6.5 zur analytischen Bewertung einer Parameterunsicherheit verwendet.

Die drei Ansätze Fuzzy-Arithmetik, Bayessche Statistik und Chaos-Polynome erscheinen zwar als geeignet für eine numerisch effiziente Durchführung von Unsicherheitsbetrachtungen auch in Lastmonitoring-Systemen. Die Ansätze kommen aber dennoch in dieser Arbeit nicht zur Anwendung, da aus Sicht des Autors dazu eine vollständige Übertragung deterministischer Modelle und Berechnungsalgorithmen auf die jeweilige Rechenarithmetik erfolgen muss. Der dafür notwendige Arbeitsaufwand ist nur schwierig abschätzbar, gegebenenfalls ist eine Verwendung der jeweiligen Rechenarithmetik beispielsweise für Zustandsbeobachter nicht oder nur eingeschränkt möglich. Auch könnte ein Vergleich der Ergebnisse einer Unsicherheitsbewertung aus numerischen und experimentellen Simulationen schwierig werden. Darüber hinaus ist eine numerisch effiziente Durchführung von Unsicherheitsbetrachtungen aufgrund überschaubarer Modellkomplexitäten in dieser Arbeit nicht erforderlich.

Trotz der vielseitigen Anwendbarkeit der Methoden der Sensitivitätsanalyse entsteht bei diesen ein Nachteil durch die Verwendung skalarer Bewertungsmaße. So wird meist eine detaillierte Diskussion physikalischer Zusammenhänge und Auswirkungen z. B. von variierenden modalen Parametern des lasttragenden Systems auf die Systemantwort im Frequenzbereich vollständig ausgeblendet. Dennoch ist die Sensitivitätsanalyse als wertvolles Werkzeug zur Bewertung von Unsicherheit anzusehen und wird in dieser Arbeit beispielsweise in Abschnitt 6.5 eingesetzt.

Das Konzept der Modellfehler-Modellierung aus dem Bereich der robusten Regelung wird in der vorliegenden Arbeit aufgegriffen, um Modellunsicherheit bei der Ermittlung von Belastungen zu charakterisieren und zu beschreiben, siehe Abschnitt 6.6. Was aber die robuste Regelung nicht leisten kann, ist eine detaillierte Diskussion zum Ursache-Wirkungs-Zusammenhang bezüglich der Unsicherheit. Ebenso lassen sich in der Literatur keine speziellen Methoden zur Beschreibung und Bewertung von Modellunsicherheit bei der Ermittlung von Belastungen finden.

---

## 2.2 Ziele und Gliederung dieser Arbeit

---

Aus der Darstellung des Stands der Forschung und Technik lässt sich folgender Forschungsbedarf ableiten.

- Es existiert keine praxisorientierte und umfassende Vorgehensweise zur unsicherheitsminimierenden Auslegung eines Lastmonitoring-Systems. Bisherige Arbeiten konzentrieren sich meist auf Teilproblemstellungen wie beispielsweise der Sensorpositionierung, Auswahl und Applikationsmöglichkeiten von Sensorarten, Auslegung von Zustandsbeobachtern, Ermittlung von Systemeigenschaften etc.
- Es fehlt eine strukturierte und ganzheitliche Diskussion von Unsicherheit, die in den Prozessen eines Lastmonitoring-Systems auftreten kann. Auch hier gibt es bereits Lösungen für ähnliche

Problemstellungen wie beispielsweise der Ermittlung der Messunsicherheit oder Methoden der Unsicherheitsmodellierung und Bewertung von Unsicherheit, aber nicht problemspezifisch und ganzheitlich für Lastmonitoring-Systeme.

- Für beliebige Lastarten (statisch, Impuls, stochastisch, etc.) ist kein funktionstauglicher Algorithmus zur gleichzeitigen Ermittlung von Lastort und Lasthöhe bekannt, bei dem die Anzahl potentieller Lastorte größer als die Anzahl der Messfreiheitsgrade sein kann<sup>1</sup>.
- Ebenso ist kein funktionstauglicher Algorithmus zur eindeutigen modellbasierten Ermittlung, Lokalisierung und Quantifizierung von Systemeigenschaftsänderungen verfügbar, bei dem die Anzahl potentieller Lastorte und Schadensfälle größer als die Anzahl der Messfreiheitsgrade sein kann.

Als Beitrag zur Beherrschung von Unsicherheit in lasttragenden Systemen durch Verwendung geeigneter, unsicherheitsminimierter Lastmonitoring-Systeme verfolgt diese Arbeit deshalb im Wesentlichen folgende zwei Ziele.

### **1. Die Entwicklung, Erprobung und Bereitstellung von Verfahren zur Reduktion von Unsicherheit in der Nutzung lasttragender Systeme durch Ermittlung von Belastungen und Systemeigenschaften**

Es soll ein praxistauglicher Weg zur modellbasierten Ermittlung von Belastungen aufgezeigt und anhand mehrerer Beispiele in numerischen und experimentellen Simulationen erprobt werden. Zu den zu ermittelnden Belastungsarten gehören sowohl statische als auch dynamische, deterministische, stochastische oder stoßartige Belastungen. Zur Lösung praxisrelevanter, aber bisher ungelöster, unterbestimmter Problemstellungen im Monitoring lasttragender Systeme wird ein neuartiger Ansatz vorgestellt. Dieser ermöglicht es, sowohl a) Lastort und Lasthöhe als auch b) Systemeigenschaftsänderungen bei unbekanntem Belastungen unter Verwendung einer begrenzten Anzahl an Messfreiheitsgraden zu ermitteln. Darüber hinaus werden Anwendungsregeln zur unsicherheitsminimierenden Auslegung eines Lastmonitoring-Systems gegeben. Durch die Erfüllung dieses Zieles sollen die benötigten technologischen und algorithmischen Grundlagen für eine unsicherheitsminimierende Anwendung von Lastmonitoring-Systemen zur Ermittlung produktindividueller Betriebslasten geschaffen und zur Anwendung bereit gestellt werden.

### **2. Die Entwicklung und Erprobung von Methoden zur Beherrschung von Unsicherheit in Lastmonitoring-Systemen**

Für eine zuverlässige Anwendung eines Lastmonitoring-Systems muss Unsicherheit, die in den dabei benötigten Prozessen auftreten kann, berücksichtigt werden. Dazu wird eine strukturierte und möglichst umfassende Methodik zur Beherrschung von Unsicherheit entwickelt und einzelne Methoden anhand von Anwendungsbeispielen erprobt. Die Methodik ermöglicht eine ganzheitliche Beschreibung, Bewertung und Beeinflussung von Unsicherheit. Ergebnis der angewendeten Methodik ist einerseits ein unsicherheitsminimiertes Lastmonitoring mit möglichst geringer Auswirkung von Unsicherheit im mathematischen Modell und in der Messung auf die ermittelte Belastung. Andererseits wird die Auswirkung nicht reduzierbarer oder nicht reduzierter Unsicherheit in der ermittelten Belastung durch Angabe einer Unsicherheitsregion charakterisiert, quantifiziert und für weitere Anwendungen beispielsweise in der Produktentwicklung verfügbar gemacht.

---

<sup>1</sup> Für Impulslasten liefern GINSBERG et al. eine Lösung [50]

Unsicherheit, die in der Infrastruktur des Lastmonitoring-Systems selbst auftreten kann, beispielsweise dem Ausfall der Stromversorgung oder der mechanischen Schädigung von Leitungen oder informationsverarbeitenden Elementen, soll in dieser Arbeit nicht berücksichtigt werden. Dies sind Fragestellungen einer rein technischen und konstruktiven Umsetzung eines solchen Systems oder einer Zuverlässigkeitsbetrachtung beispielsweise durch bekannte qualitative oder quantitative Methoden. Ebenso ist der Umgang mit Ermüdung oder Ausfall von Sensoren oder elektronischer Komponenten nicht Bestandteil dieser Arbeit. Hierzu liegen bereits umfangreiche Forschungsarbeiten vor, z. B. [94, 97].

Die Arbeit gliedert sich wie folgt in 8 Kapitel und dem Anhang.

**Kapitel 1** liefert die Motivation zur Beherrschung von Unsicherheit in einem Lastmonitoring-System.

In **Kapitel 2** wurden die Ziele der Beherrschung von Unsicherheit in Lastmonitoring-Systemen anhand des Stands der Forschung erläutert. Die Darstellung des Stands der Forschung und Technik erfolgt für zwei Themenbereiche: 1.) Verfahren zur Ermittlung von Belastungen und 2.) Verfahren zum Umgang und zur Bewertung von Unsicherheit in technischen Systemen im Allgemeinen und Lastmonitoring-Systemen im Speziellen. Auf Basis des abgeleiteten Forschungsbedarfs werden die Ziele und die Gliederung der Arbeit vorgestellt.

In **Kapitel 3** werden die im Lastmonitoring vorliegenden Problemstellungen und benötigten Methoden erläutert und in einer Methodik grundlegend eingeteilt.

Zunächst wird ein axial belasteter Balken als Beispiel für ein lasttragendes System eingeführt. An diesem Beispiel werden die im Laufe der Arbeit vorgestellten Methoden in analytischen Betrachtungen sowie numerischen und experimentellen Simulationen diskutiert und ihr Anwendungspotential validiert.

Die Ermittlung von Belastung kann als Inverses Problem angesehen werden. Deshalb wird anhand einer systemtheoretischen Darstellung mechanischer Strukturen die Problemklasse der Inversen Probleme charakterisiert. Unsicherheit, die bei der Lösung Inverser Probleme auftreten kann, wird grundlegend charakterisiert und systematisch eingeteilt. Auf Basis dieser systemtheoretischen Darstellung wird eine Arbeitshypothese für ein robustes Lastmonitoring formuliert und die benötigten Methoden zur Beherrschung von Unsicherheit in einer Methodik charakterisiert und eingeteilt. Zur Bewertung von Unsicherheit werden Bewertungsmaße im Zeit- und Frequenzbereich eingeführt. Die in den Prozessen eines Lastmonitoring potentiell auftretende Unsicherheit wird in einem Prozessmodell beschrieben.

Die zur Lösung Inverser Probleme benötigten mathematischen Modelle und Methoden werden in **Kapitel 4** beschrieben. Den Kern des Lastmonitoring-Systems zur Ermittlung von Belastungen bildet in dieser Arbeit ein Zustandsbeobachter für unbekannte Eingangsgrößen. Am Ende von Kapitel 4 wird ein neuer Ansatz zur Lösung unterbestimmter Inverser Probleme vorgestellt. Er beruht auf der Annahme, dass oftmals trotz vieler potentieller Ursachen nur wenige Ursachen tatsächlich auf das System wirken.

In **Kapitel 5** werden die vorgestellten mathematischen Modelle und Methoden am axial belasteten Balken in numerischen Simulationen angewendet. In einem ersten Fallbeispiel wird die Funktionstauglichkeit des Zustandsbeobachters für verschiedene Belastungsarten erprobt. In zwei weiteren Fallbeispielen wird der neu vorgestellte Ansatz zur Lösung unterbestimmter Inverser Probleme verwendet, um a) einen unbekanntem Lastort und b) Systemeigenschaftsänderungen bei unbekanntem Belastungen zu ermitteln.

In **Kapitel 6** werden unsicherheitsminimierende Maßnahmen vorgestellt und in analytischen, numerischen und experimentellen Simulationen erprobt. Es wird die unsicherheitsminimierende Auswahl des Frequenzbereichs zum Lastmonitoring, der Sensorpositionen, der Parametern der digitalen Signalverarbeitung und der Art und Anzahl von Sensoren diskutiert. In einer Parameterstudie wird die Auswirkung von Unsicherheit in den Parametern des mathematischen Modells auf die ermittelte Belastung diskutiert. Unsicherheit, die durch unvollständige Abbildung des realen Systems im mathematischen Modell entstehen kann, wird durch ein Fehlerübertragungsmodell statistisch beschrieben.

Die experimentelle Erprobung der vorgestellten Methoden zum Lastmonitoring erfolgt in **Kapitel 7**. In vier Fallbeispielen werden am axial belasteten Balken Belastungen unter Verwendung von Dehnungs- und Beschleunigungssignalen bei a) bekanntem Lastort und variabler Axiallast, bei b) bekanntem Lastort und stochastischer Belastung, bei c) unbekanntem Lastort und d) veränderliche Systemeigenschaften ermittelt und die dabei auftretende Unsicherheit quantifiziert. Als weiteres Fallbeispiel wird an einer Platte bei bekanntem Lastort eine deterministische Belastung unter Verwendung von Beschleunigungssignalen ermittelt.

In **Kapitel 8** werden die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit in einer vergleichenden Darstellung zusammengefasst und visualisiert. Dabei wird der Beitrag der einzelnen Methoden oder Maßnahmen zur Beherrschung von Unsicherheit in einem Lastmonitoring-System qualitativ oder quantitativ miteinander verglichen. Die Arbeit wird mit einem Fazit und einem Ausblick auf potentielle weiterführende Arbeiten abgeschlossen.

Im **Anhang** werden für die Erkenntnisse der Arbeit nicht direkt benötigte Ergebnisse aufgeführt. **Kapitel A** behandelt die Herleitung von mathematischen Modellen zur Abbildung des linearen und nichtlinearen dynamischen Verhaltens des Balkens. **Kapitel B** beschreibt den Algorithmus des Zustandsbeobachters näher.

In den einzelnen Kapiteln werden unterschiedliche Methoden oder Maßnahmen zur Beherrschung von Unsicherheit vorgestellt. Am Ende eines Abschnitts zur Vorstellung einer Methode oder Maßnahme wird der **Beitrag zur Beherrschung von Unsicherheit** in einem kurzen Absatz hervorgehoben. Die vorgestellte Methodik ermöglicht dabei begleitend zur Arbeit die Charakterisierung und strukturierte Einteilung der einzelnen Methoden oder Maßnahmen.

---

### 3 Systembeschreibung und Methodik zur Beherrschung von Unsicherheit

---

In diesem Kapitel werden die Grundlagen zur Beherrschung von Unsicherheit in einem Lastmonitoring-System dargestellt. Dazu wird zunächst ein Beispielsystem vorgestellt, an welchem im Laufe der weiteren Arbeit unterschiedliche Methoden und Maßnahmen zur Ermittlung von Belastungen und zur Beherrschung von Unsicherheit erprobt und validiert werden. Die allgemeine systemtheoretische Darstellung sogenannter Inverser Probleme klassifiziert die vorliegenden Problemstellungen des Lastmonitoring. Unsicherheit führt bei der Lösung dieser inversen Probleme im Allgemeinen dazu, dass die ermittelten Größen nicht den realen, tatsächlichen Größen entsprechen. Eine eigene Arbeitshypothese beschreibt generisch die Ansätze zur Beherrschung von Unsicherheit in einem Lastmonitoring-System durch Anwendung unsicherheitsminimierender Methoden und Maßnahmen. Unterschiedliche Methoden lassen sich einheitlich in eine Methodik einteilen. In dieser Methodik wird grundlegend unterschieden in unsicherheitsbeschreibende, unsicherheitsbewertende und unsicherheitsbeeinflussende Methoden und Maßnahmen. Das Kapitel schließt mit einer Beschreibung der zum Lastmonitoring benötigten Prozesse.

---

#### 3.1 Der axial belastete Balken als Beispielsystem

---

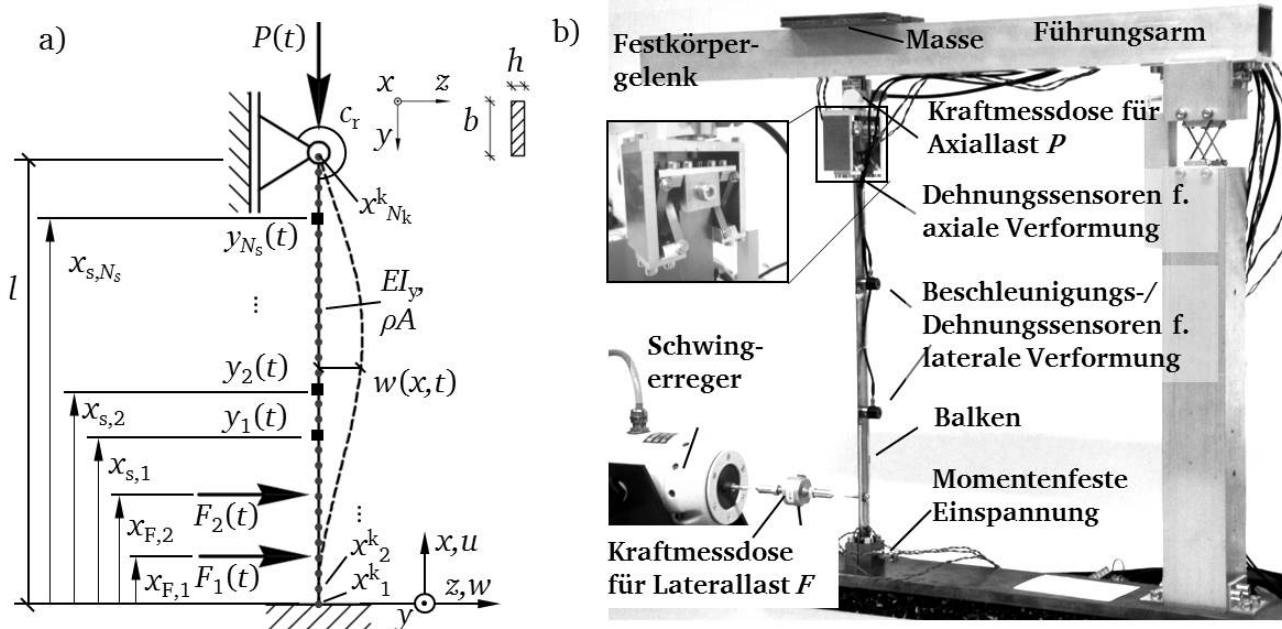
Zur Erläuterung und Validierung der in dieser Arbeit vorgestellten Methoden und Maßnahmen begleitend zum Text soll als Anschauungsbeispiel ein axial belasteter Balken verwendet werden, siehe Abbildung 3.1 auf der folgenden Seite. Der Balken als Beispiel für ein lasttragendes System bietet eine Vielzahl realistischer Fragestellungen aus dem Bereich des Lastmonitorings, z. B.:

- Was ist das betrachtete System und aus welchen Elementen besteht es? Was sind Eingangsgrößen, was sind Ausgangsgrößen, was sind Störgrößen? Welche Prozesse spielen eine Rolle?
- Wie lässt sich Unsicherheit in dem System strukturiert beschreiben?
- Wie hoch und wo wird der Balken aktuell belastet und wie lassen sich diese Belastungen ermitteln?
- Wo werden welche Sensoren angebracht, um Belastungen mit möglichst geringer Unsicherheit zu ermitteln?
- Wie lassen sich Auswirkungen von Unsicherheit im mathematischen Modell auf die ermittelte Belastung quantifizieren und bewerten? Welche Unsicherheit hat dabei einen besonders großen Einfluss?
- etc.

Anhand des vorgestellten generischen Beispiels des Balkensystems werden im weiteren Verlauf der Arbeit konkrete Anwendungsszenarien zur Erläuterung und Validierung vorgestellter Methoden diskutiert. Außerdem werden die potentiell unsicheren Eigenschaften des Systems systematisch beschrieben. So sind für die Beispiele konkrete unsichere Eigenschaften des Balkensystems verfügbar.

Abbildung 3.1 a) zeigt ein mechanisches Ersatzschaubild des Balkens. Abbildung 3.1 b) zeigt den Versuchsstand zur experimentellen Simulation für eine Laterallast  $F(t)$  zur Zeit  $t$  an einem bekannten

Lastort  $x_F$ . In dem gezeigten Beispiel ist das Ziel eines Lastmonitoring am Balken, eine Axiallast  $P(t)$  und eine Laterallast  $F(t)$  bzw. mehrere Laterallasten  $F_i(t)$  sowie den Verformungszustand  $w(x, t)$  unter Verwendung von Messsignalen  $y_i(t)$  und eines mathematischen Modells zu ermitteln und die dabei auftretende Unsicherheit zu beschreiben, zu bewerten, positiv zu beeinflussen und so letztendlich zu beherrschen.



**Abbildung 3.1:** Lastmonitoring am axial belasteten Balken: a) mechanisches Ersatzschaubild, b) Versuchsaufbau für experimentelle Simulationen

Der flache schlanke Balken mit Länge  $l$ , Breite  $b$  und Höhe  $h$  ist an der oberen Einspannung bei  $x = l$  elastisch gelagert mit einer Rotationsfeder der Steifigkeit  $c_r$  und unten bei  $x = 0$  momentenfest eingespannt. Die Biegesteifigkeit  $EI_y$  um die  $y$ -Achse und die Masseverteilung  $\rho A$  des Balkens wird entlang der Balkenlänge  $l$  als konstant angenommen. Da für den in dieser Arbeit betrachteten flachen Balken mit Rechteck  $h \ll b$  auch  $I_y \ll I_z$  gilt, vgl. Abbildung 3.1, wird die Dynamik des Balkens in dieser Arbeit nur in der  $xz$ -Ebene betrachtet. Der Balken ist mit der äußeren Axiallast  $P(t)$  und  $N_F$  Laterallasten  $F_i(t)$  an den  $N_F$  Lastorten  $x_{F,i}$  belastet. Im Versuchsaufbau in Abbildung 3.1 b) zur experimentellen Simulation kann die Axiallast  $P(t)$  durch Auflegen zusätzlicher Massen auf den Führungsarm variiert werden, eine Laterallast  $F(t)$  kann durch einen Schwingerreger aufgebracht werden. Messsignale  $y_i(t)$  an den  $N_s$  Messstellen  $x_{s,i}$  liefern je nach Sensorart Informationen über lokale Zustände des Systems, z. B. Dehnung  $\varepsilon_i(t)$ , Auslenkung  $w_i(t)$ , Geschwindigkeit  $\dot{w}_i(t)$  oder Beschleunigung  $\ddot{w}_i(t)$ . Im Versuchsaufbau zur experimentellen Simulation werden beispielsweise an zwei Stellen Dehnungen und Beschleunigungen gemessen. Die Dehnungssensoren sind als Halbbrücke mit Normalkraftkompensation geschaltet, sodass sich die Axiallast  $P(t)$  möglichst gering auf die gemessenen, biegungsproportionalen Dehnungen des Balkens auswirkt. Zusätzlich sind im Versuchsaufbau nahe der oberen Einspannung Dehnungssensoren als Halbbrücke mit Biegunskompensation angebracht. Mit diesen kann über eine statische Belastungs-Verformungsbeziehung die Axiallast  $P(t)$  ermittelt werden. In der experimentellen Simulation werden als Referenzgröße zur Bewertung von Unsicherheit in den ermittelten Belastungen

sowohl Axiallast als auch Laterallast mit Kraftmessdosen gemessen. In der numerischen Simulation sind diese Referenzgrößen zur Bewertung von Unsicherheit bekannt.

Für das mathematische Modell zur Abbildung des dynamischen Verhaltens des Balkens werden folgende Annahmen getroffen:

- Die Dynamik des Balkens wird nur in der  $xz$ -Ebene betrachtet.
- Das dynamische Verhalten des Balkens ist linear.<sup>1</sup>
- Scherbeanspruchungen werden vernachlässigt.
- Das Balkensystem ist schwach gedämpft. Es wird Strukturdämpfung mit dem modalen Dämpfungsgrad  $\xi_n \ll 1$  angenommen.
- Rotationsmasse und -steifigkeit des Festkörpergelenks sowie Masse der Beschleunigungssensoren können im ortsdiskreten Modell als lokale Masse bzw. Steifigkeit an einzelnen Knoten berücksichtigt werden, Anhang A.1.

Abhängig von der Position  $x$ , der Zeit  $t$  und der Streckenlast  $q(x, t)$  lautet die allgemeine kontinuierliche Bewegungsgleichung für den axial belasteten Balken mit konstanter Axiallast  $P$  zur Beschreibung der Auslenkung  $w(x, t)$  [62]

$$EI_y w^{IV}(x, t) + c_1 \dot{w}(x, t) + c_2 \dot{w}''(x, t) + \rho A \ddot{w}(x, t) + P w''(x, t) = q(x, t), \quad (3.1)$$

wobei  $c_1$  den auslenkungsgeschwindigkeitsproportionalen und  $c_2$  den dehnungsgeschwindigkeitsproportionalen Dämpfungsfaktor beschreibt.

Oftmals werden in den Ingenieurwissenschaften kontinuierliche lasttragende Systeme durch diskrete mathematische Modelle beschrieben, beispielsweise in Form von Finite-Elemente-Modellen (FE-Modelle). Dies erfolgt auch in dieser Arbeit. So können die vorgestellten und neu entwickelten Methoden auf andere FE-Modelle lasttragender Systeme übertragen werden. Es werden für das Balkensystem in Abbildung 3.1  $N_k$  Knoten  $x_i^k$  mit  $i = 1, 2, \dots, N_k$  eingeführt. Jeder Knoten  $x_i^k$  hat einen translatorischen Freiheitsgrad  $w_i^k(t) = w(x_i^k, t)$  und einen rotatorischen Freiheitsgrad  $\varphi_i^k(t) = \varphi(x_i^k, t)$ . An jedem Knoten  $x_i^k$  kann potentiell eine Kraft  $F_i^k(t) = F(x_i^k, t)$  und ein Moment  $M_i^k(t) = M(x_i^k, t)$  wirken. Zur Bezeichnung der Lastorte  $x_{F,i}$  und Messstellen  $x_{s,i}$  an diskreten Knoten wird ebenfalls der Index  $x_i^k$  verwendet. Wenn z. B. eine Laterallast  $F_1(t)$  am Knoten  $x_5^k$  wirkt, wird der diskrete Lastort der Laterallast  $F_1(t)$  mit  $x_{F,1}^k = 5$  bezeichnet.

Durch eine Ortsdiskretisierung, z. B. mit einem Galerkin-Ansatz [55], vgl. Anhang A, kann (3.1) in ein System von  $N$  Differentialgleichungen 2. Ordnung überführt werden,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{C}_d \dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{K}^* \mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{K}^* = \mathbf{K} - P \cdot \mathbf{K}^P \quad (3.2)$$

Hierin ist  $\mathbf{F}(t) = [F_1^k(t), M_1^k(t), F_2^k(t), \dots, M_{N_k}^k(t)]^T$  der Lastvektor der diskretisierten Flächenlast  $q(x, t)$ ,  $\mathbf{r}(t) = [w_1^k(t), \varphi_1^k(t), w_2^k(t), \dots, \varphi_{N_k}^k(t)]^T$  der Vektor mit den translatorischen und rotatorischen Auslenkungen an den Knoten des Modells,  $\mathbf{M}$  die Massenmatrix,  $\mathbf{C}_d$  die Dämpfungsmatrix mit der

<sup>1</sup> Ein mathematisches Modell zur Beschreibung des nichtlinearen Verhaltens des realen Balkensystems findet sich in A.2

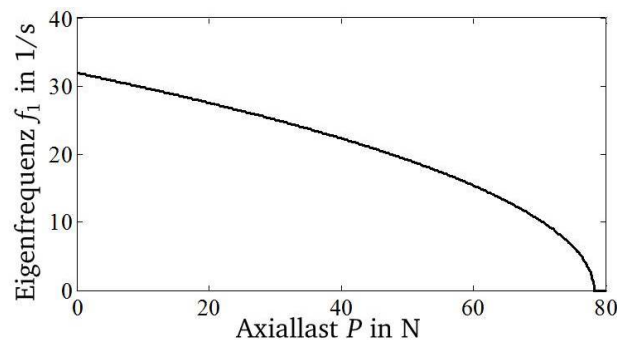
Proportionaldämpfung  $C_d = \alpha M + \beta K$ , oftmals zulässig für schwach gedämpfte Strukturen [62],  $K^*$  die mit der Axiallast  $P$  variierende Steifigkeitsmatrix,  $K$  die Steifigkeitsmatrix und  $K^P$  die (geometrische) Steifigkeitseinflussmatrix durch die Axiallast  $P$  [146]. Mit steigender Axiallast  $P$  sinkt die Steifigkeit  $K^*$  des Balkens. Erreicht die Axiallast  $P$  die erste kritische Knicklast  $P_{cr,1}$ , knickt der Balken aus. Die  $n$ -te kritische Knicklast  $P_{cr,n}$  ist nach TIMOSHENKO [140] für die im aufgeführten Balkensystem gegebenen Randbedingungen

$$P_{cr,n} = \eta_n EI_y \quad \text{mit} \quad \tan \eta_n - \eta_n = 0. \quad (3.3)$$

Weiterhin ist bekannt, dass die  $n$ te Eigenkreisfrequenz  $\omega_n$  des axial belasteten Balkens von der Axiallast  $P$  und der kritischen Knicklast  $P_{cr,n}$  abhängt,

$$\omega_n^2(P) = \omega_{n,0}^2 \cdot \left(1 - \frac{P}{P_{cr,n}}\right), \quad (3.4)$$

wobei  $\omega_{n,0}$  die  $n$ te Eigenkreisfrequenz des Systems mit Axiallast  $P = 0$  beschreibt [62]. Abbildung 3.2 zeigt den Zusammenhang (3.4) für die erste Eigenfrequenz  $f_1(P)$  des Balkensystems in Abhängigkeit einer variierenden Axiallast  $P$ , wobei  $f_n = \omega_n / (2\pi)$ .



**Abbildung 3.2:** Erste Eigenfrequenz  $f_1(P)$  in Abhängigkeit der Axiallast  $P$

Die erste kritische Knicklast  $P_{cr,1}$  des realen Balkensystems beträgt etwa 78 N. Schlanke, knickgefährdete Strukturen werden mit Sicherheitsbeiwerten zwischen 3 bis 10 ausgelegt [56]. Im Betrieb des passiven Balkensystems sollten die auftretenden Axiallasten also bei einem Sicherheitsfaktor von 3 nicht über  $P = 25$  N betragen. Dies wird in den numerischen und experimentellen Simulationen in Abschnitt 5.1, Abschnitt 6.5 und 7.1 berücksichtigt. Es soll zur Motivation für weitere Unsicherheitsdiskussionen an dieser Stelle schon darauf hingewiesen werden, dass Unsicherheit in der Kenntnis der Axiallast  $P$  einen hohen Einfluss auf die Unsicherheit in einer ermittelten Laterallast haben kann, vgl. Abschnitt 6.5 und [91]. Der axial belastete Balken sei somit in seinen grundlegenden dynamischen Eigenschaften beschrieben. Gl. (3.2) wird im Abschnitt 4.1 weiter verwendet, um zeitdiskrete und reduzierte Modelle zu bilden. Weitere detaillierte Herleitungen mathematischer Modelle zur Beschreibung des linearen und nichtlinearen Systemverhaltens des Balkensystems finden sich in Anhang A.

Zur Beschreibung der Eigenschaften eines lasttragenden Systems und seiner potentiellen Unsicherheiten ist es hilfreich, diese strukturiert in einer Tabelle aufzuführen. Sie dient als Informationsbasis für die Untersuchungen in Kapitel 5. Die Eigenschaftstabelle 3.1 auf der folgenden Seite zeigt einen Auszug der Eigenschaften des Balkensystems und deren Unsicherheit für das konkrete Beispiel in Bild 3.1.



**Tabelle 3.1:** Eigenschaftsbeschreibung und Unsicherheit des Balkensystems

Teilsystem	Eigenschaft			Unsicherheit		
	Attribut	Nominalwert	Einheit	Stochast. Uns.	Ungewissheit	Unwissen
Passive Struktur	Balkenlänge $l$	330	mm	-	[329.8, 330.2]	-
	Balkenbreite $b$	20	mm	-	[19.9, 20.1]	-
	Balkenhöhe $h$	1	mm	-	[0.95, 1.05]	-
	Elastizitätsmodul $E$	$2.1 \cdot 10^5$	N/mm <sup>2</sup>	-	[2.09, 2.11]	-
	Materialdichte $\rho$	$7.87 \cdot 10^3$	kg/m <sup>3</sup>	-	[7.83, 7.91]	-
	Rotationsfederst. $c_r$	15.75	N·m/rad	-	[12.6, 18.9]	-
	Rotationsfederm. $m_r$	$3.3 \cdot 10^{-7}$	kg·m <sup>2</sup> /rad	-	[2.97, 3.63]·10 <sup>-7</sup>	-
	Mod. Dämpfungsggr. $\xi_n$	0.02	-	-	[0.01, 0.05]	-
	Belastungsspektrum $S_{FF}(\Omega)$	n.a.	N <sup>2</sup> s	-	-	?
	...	...	...	...	...	...
Messkette am Bsp. Beschleunigungs- messung	Sensorposition $x_{s,i}$	variabel	mm	-	±1	-
	Sensormasse $m_{s,b}$	5.6	g	-	-	?
	Verstärkungsfaktor	101	mV/g	-	[100, 102]	-
	Messrauschen	0	m/s <sup>2</sup>	$N(0, 6 \cdot 10^{-5})$	-	-
	Quantisierungsr.	0	m/s <sup>2</sup>	$G(0, 10^{-6})$	-	-
	Abtastfrequenz $f_a$	variabel	Hz	-	-	-
	...	...	...	...	...	...
Informations- verarbeitung	Modellunsicherheit	-	-	-	-	?
	Modellordnung $N_f$	variabel	-	-	-	-
	Algorithmus	variabel	-	-	-	?
	...	...	...	...	...	...

In der Eigenschaftstabelle 3.1 werden die Eigenschaften des Balkensystems nach den Teilsystemen 'Passive Struktur', 'Messkette' und 'Informationsverarbeitung' unterteilt. Jede Eigenschaft hat ein Attribut und einen Nominalwert mit einer physikalischen Einheit. In der Spalte 'Unsicherheit' ist die potentielle Abweichung der Eigenschaft angegeben. Ist die Abweichung oder gar ein Nominalwert der Eigenschaft unbekannt, herrscht Unwissen. Es steht in dieser Zeile ein Fragezeichen. Ungewissheit einer Variablen  $x$  wird angegeben als Intervall mit  $[x_{\min}, x_{\max}]$ , wobei  $x_{\min}$  den unteren Grenzwert und  $x_{\max}$  den oberen Grenzwert der jeweiligen Eigenschaft beschreibt oder als symmetrisches Intervall mit  $\pm\Delta x$ . Typisch für eine Ungewissheit ist beispielsweise eine Toleranzangabe von Geometrieigenschaften oder Angaben zur Streuung von Sensoreigenschaften nach Herstellerangaben. Stochastische Unsicherheit wird in dieser Arbeit meist als Normalverteilung mit  $N(\mu, \sigma)$  oder als Gleichverteilung mit  $G(\mu, \sigma)$  angesehen, wobei  $\mu$  der Mittelwert und  $\sigma$  die Standardabweichung der Eigenschaft ist. Eine typische Stochastische Unsicherheit sind stochastische Messabweichungen infolge thermischen Messrauschens, welche normalverteilt sind und deren Standardabweichung leicht aus experimentellen Untersuchungen gewonnen werden kann [72]. Für eine deterministische Variable liegt keine Unsicherheit vor, es ist in allen drei Kategorien ein Minus (-) angegeben.

Für eine unsicherheitsminimierende Auslegung eines Lastmonitoring-Systems ist das zu erwartende Belastungsspektrum von besonderer Bedeutung. Je nach Art und Höhe der Betriebslast muss das Lastmonitoring-System unterschiedlich ausgelegt werden. So erfordert die Ermittlung quasistatischer Belastungen andere mathematische Modelle als die Ermittlung dynamischer Belastungen. Impulsartige oder hochfrequente Belastungen erfordern eine andere Modellordnung als rein harmonische, niederfrequente Belastungen. Dieser Aspekt wird in Abschnitt 6.1 näher diskutiert.

Die Eigenschaftstabelle ist ein rein beschreibendes Element zur Beherrschung von Unsicherheit und dient als Informationsbasis für weitere Untersuchungen. Einige Informationen über die Eigenschaften und ihre Unsicherheit können gegebenenfalls aus Normen, Herstellerangaben oder eigene Untersuchungen gewonnen werden. Andere sind gegebenenfalls nur schwer zu gewinnen. Es herrscht Ungewissheit oder gar Unwissen. Es müssen dann konservative Annahmen über die Unsicherheit der jeweiligen Eigenschaft getroffen werden. Sollte sich in weiteren Untersuchungen (z. B. durch Sensitivitätsanalysen) zeigen, dass die Unsicherheit in der jeweiligen Eigenschaft keinen relevanten Einfluss auf die zu bewertende Zielgröße (z. B. die Unsicherheit in der ermittelten Belastung) hat, können die getroffenen konservativen Annahmen beibehalten werden. Stellt sich aber heraus, dass die Eigenschaft einen relevanten Einfluss auf die zu bewertende Zielgröße hat, müssen nähere Untersuchungen der jeweiligen Eigenschaft durchgeführt werden, z. B. durch weitere Messungen. Ungewissheit wird dann so, und nur bei Bedarf, in Stochastische Unsicherheit überführt.

**Beitrag zur Beherrschung von Unsicherheit:** Mit der Eigenschaftstabelle wird Unsicherheit durch eine strukturierte Beschreibung und Dokumentation beherrscht.

---

### 3.2 Systemtheoretische Darstellung Inverser Probleme unter Unsicherheit

---

In diesem Abschnitt erfolgt eine grundlegende systemtheoretische und charakterisierende Einteilung von Problemstellungen und deren Unsicherheit, die im Monitoring lasttragender Systeme zu lösen sind.

Dabei wird insbesondere auf den linearen Zusammenhang zwischen Belastung und Verformung eingegangen. Auf Basis dieser systemtheoretischen Darstellung wird eine Arbeitshypothese für ein unsicherheitsminimiertes Lastmonitoring formuliert.

---

### 3.2.1 Ursache-Wirkungs-Beziehung in der Nutzung lasttragender Systeme

---

Zur allgemeinen Beschreibung der linearen *Ursache-Wirkungs-Beziehung* zwischen Belastungen und Verformungen in lasttragenden Systemen wird folgende Systembeschreibung eingeführt:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{F}, \quad (3.5)$$

wobei  $\mathbf{F}$  ein Belastungsvektor (die Ursache),  $\mathbf{y}$  ein Messvektor (die Wirkung) und  $\mathbf{H}(\mathbf{p})$  ein mathematisches Modell zur Systembeschreibung ist und abhängig von den Parametern des Systems zur Beschreibung der Systemeigenschaften im Parametervektor  $\mathbf{p}$  ist. Es sei angemerkt, dass ein lineares algebraische Gleichungssystem der Form (3.5) auch andere lineare Ursache-Wirkungs-Beziehungen beschreiben kann, z. B. die Auswirkung von Systemeigenschaftsänderungen beispielsweise durch Schäden (Ursache) auf die modalen Parameter des Systems (Wirkung).

In den Ingenieurwissenschaften sind Problemstellungen oft als Direktes Problem formuliert [111]. Ein Direktes Problem liegt dann vor, wenn aus einer *bekannten Ursache* (ein bekannter Belastungsvektor  $\mathbf{F}$ ) die *unbekannte Wirkung* (ein Messvektor  $\mathbf{y}$ ) eines Systems mit *bekannten Systemeigenschaften* ermittelt werden soll. Ist beispielsweise die Belastung einer Struktur bekannt, lässt sich mit einem geeigneten mathematischen Modell dessen Verformung berechnen. Soll aber aus einer *beobachteten Wirkung* (z. B. Messsignale) auf eine *unbekannte Ursache* oder auf Parameter des Modells zurück geschlossen werden, spricht man von einem Inversen Problem [96, 141, 111]. Die Lösung Inverser Probleme ist oftmals mit zusätzlichen Schwierigkeiten verbunden, man spricht dann von einem *schlecht gestellten Inversen Problem*. Nach Definition des Mathematikers HADAMARD [61] liegt ein schlecht gestelltes Inverses Problem dann vor, wenn es nicht alle folgenden drei Eigenschaften eines gut gestellten Problems besitzen:

1. Es existiert eine Lösung für beliebige Daten.
2. Die Lösung ist eindeutig.
3. Die Lösung ist nicht empfindlich gegenüber Störungen in den Daten.

Insbesondere die zweite und dritte Frage sind von besonderem Interesse für Inverse Probleme der Ingenieurmechanik. So kann beispielsweise ein unterbestimmtes Inverses Problem vorliegen, wenn mehr unbekannte Ursachen (z. B. Belastungen) ermittelt werden sollen, als beobachtete Wirkungen (z. B. Messsignale) vorliegen. Die Lösung ist dann nicht eindeutig, es gibt unendlich viele potentielle Lösungen, siehe Abschnitt 4.3.1. Ebenso kann sich beispielsweise Messrauschen in den Messsignalen abhängig von der Wahl der Sensorposition unterschiedlich stark auf die zu ermittelnde Belastungen auswirken. Die zu ermittelnde Belastung ist ggf. empfindlich gegenüber Störungen in den Messsignalen.

In Anlehnung an NATKE [111] und LAERMANN [96] soll in dieser Arbeit zwischen drei Arten vom Inversen Problemen unterschieden werden. Diese sind in der folgenden Tabelle 3.2 dargestellt.

**Tabelle 3.2:** Einteilung Inverser Probleme

	gegeben:	gesucht:
Inverses Problem 1. Art	$\mathbf{H}(\mathbf{p}), \mathbf{y}$	$\mathbf{F}$
Inverses Problem 2. Art	$\mathbf{F}, \mathbf{y}$	$\mathbf{H}(\mathbf{p})$
Gemischtes Inverses Problem	$\mathbf{y}, \mathbf{H}(\mathbf{p}_0)$	$\mathbf{F}, \mathbf{H}(\mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p})$

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich im Wesentlichen mit dem Lastmonitoring, welches dem *Inversen Problem 1. Art* entspricht. Dabei werden aus dem Messvektor  $\mathbf{y}$  über ein bekanntes mathematisches Modell  $\mathbf{H}(\mathbf{p})$  die gesuchten Belastungen  $\mathbf{F}$  ermittelt. Das mathematische Modell  $\mathbf{H}(\mathbf{p})$  kann aus analytischen oder numerischen Modellen gewonnen werden, der Parametervektor  $\mathbf{p}$  wird dann aber meistens unsicherheitsbehaftet sein. Unter Verwendung von gemessenen Belastungen  $\mathbf{F}$  und Verformungen  $\mathbf{y}$  lässt sich innerhalb einer Klasse von mathematischen Modellen  $\mathbf{H}$  ein unsicherheitsminimiertes Modell  $\mathbf{H}(\mathbf{p})$  ermitteln. Dieser Ansatz ist unter dem Begriff 'Systemidentifikation' bekannt und entspricht dem *Inversen Problem 2. Art*. Eine dritte Art von Inversen Problemen liegt vor, wenn die im Parametervektor  $\mathbf{p}$  abgebildeten Systemeigenschaften im Betrieb variieren, beispielsweise durch Schädigung der Struktur oder vernachlässigte Einflüsse. Oftmals kann aber während der Nutzung des lasttragenden Systems keine definierte Belastung  $\mathbf{F}$  auf die Struktur aufgebracht werden. Eine klassische Systemidentifikation im Betrieb ist somit nicht möglich [152]. Sollen aus gemessenen Verformungen  $\mathbf{y}$  und einem Nominalmodell  $\mathbf{H}(\mathbf{p}_0)$  mit dem Parametervektor  $\mathbf{p}_0$  des Nominalmodells die Belastungen  $\mathbf{F}$  und gleichzeitig die veränderlichen Systemeigenschaften im Modell  $\mathbf{H}(\mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p})$  mit den Systemeigenschaftsänderungen  $\Delta\mathbf{p}$  des Parametervektors ermittelt werden, kann dies als *gemischtes Inverses Problem* bezeichnet werden. In der Literatur wird weiter unterschieden in *überbestimmte*, *bestimmte* und *unterbestimmte* Inverse Probleme. Unterbestimmte Inverse Probleme sind schlecht gestellt und meist nicht oder nur unter zusätzlichen Vereinfachungen oder Annahmen eindeutig lösbar [58, 95].

Soll die Belastung  $\mathbf{F}$  aus dem Messvektor  $\mathbf{y}$  ermittelt werden, lässt sich dies schreiben als

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}^+(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{y}, \quad (3.6)$$

wobei  $\mathbf{H}^+(\mathbf{p})$  = die Pseudoinverse von  $\mathbf{H}(\mathbf{p})$  bezeichnet. Eine eindeutige Lösung wird man nur erhalten, wenn die Anzahl  $N_F$  unbekannter Belastungen kleiner oder gleich der Anzahl  $N_s$  gemessener Signale ist [96]. Ist dies nicht der Fall, liegt ein schlecht gestelltes inverses Problem vor. Dieser Fall wird in Abschnitt 4.3 näher behandelt.

Wie bereits aus der Einleitung hervor geht, ist in der Praxis zu erwarten, dass die Prozesse des Lastmonitoring *unsicherheitsbehaftet* sind. Zur allgemeinen Beschreibung lässt sich (3.6) erweitern als

$$\mathbf{F} + \Delta\mathbf{F} = (\mathbf{H}(\mathbf{p}) + \Delta\mathbf{H}_p(\Delta\mathbf{p}) + \Delta\mathbf{H}_m)^+ (\mathbf{y} + \Delta\mathbf{y}). \quad (3.7)$$

Darin beschreibt  $\Delta\mathbf{H}_p(\Delta\mathbf{p})$  die Parameterunsicherheit z. B. durch Schwankung der Parameter in dem Parametervektor  $\mathbf{p}$  des mathematischen Modells,  $\Delta\mathbf{H}_m$  die Modellunsicherheit z. B. infolge einer vereinfachenden Abbildung der Realität und  $\Delta\mathbf{y}$  die Unsicherheit in den Messsignalen z. B. durch Messrauschen oder systematische Abweichungen in den Messsignalen. All diese Unsicherheiten führen zu Abweichungen  $\Delta\mathbf{F}$  in den zu ermittelten Belastungen  $\mathbf{F}$ .

Als Maß zur analytischen Quantifizierung der Auswirkung von  $\Delta \mathbf{y}$  auf  $\Delta \mathbf{F}$  lässt sich die Konditionszahl  $\kappa$  der Matrix  $\mathbf{H}(\mathbf{p})$  verwenden<sup>2</sup>. Bei einer kleinen Konditionszahl wirken sich Abweichungen  $\Delta \mathbf{y}$  in den Messsignalen nur gering auf die Abweichungen  $\Delta \mathbf{F}$  in den zu ermittelten Belastungen aus, et vice versa. Für die absolute Kondition der Matrix  $\mathbf{H}(\mathbf{p})$  gilt die Ungleichung [31]

$$\|\Delta \mathbf{F}\| \leq \kappa(\mathbf{H}(\mathbf{p})) \|\Delta \mathbf{y}\|. \quad (3.8)$$

Die Kondition  $\kappa$  der Matrix  $\mathbf{H}(\mathbf{p})$  ist somit ein Maß für die Empfindlichkeit der zu ermittelnden Belastung gegenüber Abweichungen in den Messsignalen. Sie kann für Lastmonitoring-Systemen durch unterschiedliche Ansätze verbessert werden, beispielsweise durch die Wahl der Sensorpositionen [141], die Wahl und Konfiguration des Algorithmus [31], die Verwendung von Regularisierungsstrategien [107] oder Mittelwertbildung zur Reduktion von Auswirkungen zufälliger Messabweichungen [137]. Es sei angemerkt, dass  $\mathbf{H}(\mathbf{p})$  zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens eines Systems abhängig von der Kreisfrequenz  $\Omega$  ist,  $\mathbf{H}(\mathbf{p}, \Omega)$ , und somit auch die Konditionszahl von der Kreisfrequenz abhängt [141].

Zur Quantifizierung und Bewertung von Auswirkung der Parameterunsicherheit  $\Delta \mathbf{H}_p(\Delta \mathbf{p})$  auf die Abweichungen  $\Delta \mathbf{F}$  eignen sich Parameterstudien oder analytische bzw. numerische Sensitivitätsanalysen. Modellunsicherheit  $\Delta \mathbf{H}_m$  entsteht durch eine unvollständige Abbildung des realen Systems und lässt sich somit per Definition nur durch Auswertung experimenteller Simulationen vollständig ermitteln.

Als skalares Maß zur Quantifizierung von Unsicherheit im Zeitbereich in der numerischen und experimentellen Simulation wird in dieser Arbeit der relative effektive Fehler<sup>3</sup>  $U_{\text{eff}}$  mit

$$U_{\text{eff}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\Delta F(k))^2}}{\sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (F(k))^2}} \quad (3.9)$$

einer Last  $F(k)$  und dem Fehler  $\Delta F(k) = F(k) - F_e(k)$  zwischen der tatsächlichen Last  $F(k)$  und der ermittelten Last  $F_e(k)$  zu den  $K$  diskreten Zeitpunkten  $k$  verwendet. Sind die tatsächliche Last und der Fehler mittelwertfrei ( $\overline{\Delta F} = 0$  und  $\overline{F} = 0$ ,  $\overline{\Delta F}$  und  $\overline{F}$  bezeichnen die Mittelwerte), lässt sich (3.9) auch schreiben als

$$U_{\text{eff}} = \frac{\sigma(\Delta F(k))}{\sigma(F(k))} \quad (3.10)$$

wobei  $\sigma$  die Standardabweichung bezeichnet. Zur Analyse im Frequenzbereich wird die spektrale Leistungsdichte  $S_{\text{ee}}(\Omega_k)$  des Fehlers verwendet,

$$S_{\text{ee}}(\Omega_k) = \lim_{t_K \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_K} (E_T^*(\Omega_k) E_T(\Omega_k)), \quad (3.11)$$

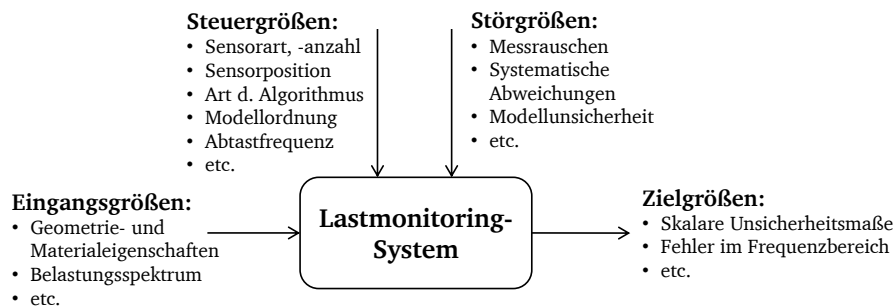
wobei  $E_T(\Omega_k)$  die diskrete Fouriertransformierte des Fehlers  $\Delta F(k)$ ,  $E_T^*(\Omega_k)$  deren konjugiert Komplexe,  $\Omega_k$  die Frequenzstützstellen und  $t_K$  die zeitliche Länge darstellt.

<sup>2</sup> Es gilt:  $\kappa(\mathbf{H}^+(\mathbf{p})) = \kappa(\mathbf{H}(\mathbf{p}))$

<sup>3</sup> engl.: relative root mean squared error

### 3.2.2 Arbeitshypothese eines unsicherheitsminimierten Lastmonitoring-Systems

Im vorherigen Abschnitt wurden grundlegende systemtheoretische Betrachtungen Inverser Probleme und deren Unsicherheit diskutiert. Dabei wurden bereits Hebel zur Beeinflussung der Auswirkung von Unsicherheit auf die ermittelte Belastung angedeutet. Im Folgenden wird eine Arbeitshypothese zum ganzheitlichen Umgang mit Unsicherheit in einem Lastmonitoring-System aufgestellt. Diese erfolgt in Anlehnung an die Arbeiten zu robusten Prozessen und Systemen von TAGUCHI [88]. Zunächst soll das System bestehend aus einer passiven Struktur, der Messkette und der Informationsverarbeitung als ein einziges System, das Lastmonitoring-System, betrachtet werden. Ein Systemschaubild mit seinen Einflussgrößen ist in folgender Abbildung 3.3 dargestellt.



**Abbildung 3.3:** Lastmonitoring-System mit Eingangs-, Steuer-, Stör- und Zielgrößen

Die *Eingangsgrößen* des Lastmonitoring-Systems sind beispielsweise vorgegebene bekannte, aber potentiell unsicherheitsbehaftete Geometrie- und Materialeigenschaften der passiven Struktur oder die erwarteten und vorab abzuschätzenden Belastungsspektren bzw. Belastungsarten. Als *Zielgrößen* dienen Bewertungsmaße zur Quantifizierung von Unsicherheit, wie beispielsweise der relative effektive Fehler  $U_{\text{eff}}$  nach (3.9), die Konditionszahl  $\kappa$  oder die spektrale Leistungsdichte des Fehlers  $S_{\text{ee}}(\Omega_k)$  nach (3.11). Nicht vermeidbare *Störgrößen* wie beispielsweise Messrauschen, systematische Abweichungen in den Messsignalen oder Modellunsicherheit beeinflussen die Prozesse des Lastmonitoring-Systems und somit auch die Zielgrößen meist negativ. *Steuergrößen* können in einem gewissen Rahmen frei gewählt werden, z. B. Art, Ort und Anzahl von Sensoren, Art des Algorithmus zur Informationsverarbeitung, Modellordnung, Abtastfrequenz usw. Sie beeinflussen die Zielgröße idealerweise positiv. Eine positive Beeinflussung von Unsicherheit bedeutet, dass der relative effektive Fehler  $U_{\text{eff}}$  kleiner wird. Ziel eines unsicherheitsminimierten Lastmonitoring-Systems ist es, die Steuergrößen derart auszuwählen, dass für unsicherheitsbehaftete Eingangsgrößen und wirkende Störgrößen die Zielgröße, z. B.  $U_{\text{eff}}$ , minimiert wird. Gemeinsam mit der Darstellung inverser Probleme unter Unsicherheit aus dem vorherigen Abschnitt 3.2.1 führt dies zu folgender Arbeitshypothese für ein unsicherheitsminimiertes Lastmonitoring-System:

*Ein Lastmonitoring-System ist unsicherheitsminimiert, wenn*

1. *es eine eindeutige Lösung der Problemstellung ermöglicht,*
2. *es möglichst unempfindlich gegenüber Unsicherheit in Eingangsgrößen und Störgrößen ist*
3. *und wenn nicht vermeidbare Unsicherheit quantifiziert und dokumentiert wird.*

Oftmals wird der Einfluss aller unsicherer oder variabler Größen auf die betrachtete Zielgröße eines Systems gleichzeitig und global z. B. durch bekannte Methoden der Sensitivitätsanalyse bewertet. Für ein Lastmonitoring-System ist dies jedoch nicht sinnvoll. Erstens wird bei sehr vielen variablen Größen die Anzahl der durchzuführenden numerischen oder gar experimentellen Realisierungen sehr hoch. Zweitens liegen für einige Größen stark nichtlineare (z. B. Sensorposition) oder gar unstetige (z. B. Anzahl an Sensoren, Anzahl zu verwendender Moden) Zusammenhänge vor, sodass eine geschlossene globale Sichtweise nicht sinnvoll erscheint. Deshalb wird im nächsten Abschnitt 3.3 eine Einteilung unterschiedlicher Methoden zur Beherrschung von Unsicherheit vorgestellt.

---

### 3.3 Eine Methodik zur Beherrschung von Unsicherheit

---

Wie im vorherigen Abschnitt festgestellt, ist die Beherrschung von Unsicherheit durch eine geschlossene, globale Methode nicht oder nur schwer möglich. Vielmehr lässt sich Unsicherheit sinnvoll und ganzheitlich durch Anwendung unterschiedlicher, meist bekannter Methoden für unterschiedliche Teilproblemlösungen behandeln [66]. Ziel einer Methodik muss daher sein, die Beiträge einzelner bekannter oder erweiterter Methoden zu charakterisieren und zusammenzuführen und somit eine umfassende Behandlung von Unsicherheit in einem Lastmonitoring-System zu ermöglichen. Hierfür wird in diesem Abschnitt eine geeignete Einteilung der unterschiedlichen Methoden vorgestellt. Die Methodeneinteilung basiert auf eigenen Vorarbeiten im SFB 805, in welcher zahlreiche Methoden zur Behandlung von Unsicherheit lasttragender Systeme des Maschinenbau aus unterschiedlichen Disziplinen analysiert wurden [37].

Methoden werden in dieser Arbeit in drei Bereiche differenziert: 1. Unsicherheit beschreiben, 2. Unsicherheit bewerten, 3. Unsicherheit beeinflussen. Abbildung 3.4 auf der nächsten Seite zeigt diese Einteilung und listet als Beispiele einige konkrete Methoden auf. Es sei angemerkt, dass das Lastmonitoring als eine Methode zur Beherrschung von Unsicherheit nicht aufgeführt ist. Deren elementare Bedeutung für die Unsicherheit in der Kenntnis des tatsächlichen Belastungszustandes einer Struktur wurde bereits im Stand der Forschung diskutiert.

Üblicherweise erfolgt zunächst eine strukturierte *Beschreibung* des zu analysierenden Lastmonitoring-Systems und der darin potentiell auftretenden Unsicherheit. So wurde bereits in Abschnitt 3.1 das Balkensystem durch ein mechanisches Ersatzschaubild und ein mathematisches Modell beschrieben. Die Eigenschaften des Balkensystems und deren Unsicherheit wurden in der Eigenschaftstabelle 3.1 gelistet. Die in einem Lastmonitoring-System existierenden Prozesse werden in folgendem Abschnitt 3.4 durch ein Prozessmodell beschrieben.

Methoden zur *Bewertung* der Auswirkung von Unsicherheit benötigen üblicherweise zunächst eine Beschreibung der Unsicherheit. So ist beispielsweise eine Sensitivitätsanalyse zur Bewertung von Unsicherheit nur möglich, wenn vorher das Lastmonitoring-System und dessen Unsicherheit beschrieben wurde. Die Bewertung von Unsicherheit erfolgt anhand von Bewertungsmaßen oder Zielgrößen. Diese werden meist durch einen Vergleich zwischen einer Referenzgröße (z. B. die in numerischer Simulation bekannte Belastung oder in der experimentellen Simulation gemessene Belastung) und einer unsicheren Größe (z. B. die ermittelte Belastung) gewonnen. Im Allgemeinen kann Unsicherheit auf drei unterschiedlichen Betrachtungsebenen bewertet werden: 1. analytisch 2. numerisch und 3. experimentell.

## Beherrschung von Unsicherheit in Lastmonitoring-Systemen

### Unsicherheit beschreiben

- Systembeschreibung
- Eigenschaftstabelle
- Prozessmodellierung
- Systemmodellierung
- Algorithmen beschreiben
- etc.

### Unsicherheit bewerten



- |                       |   |
|-----------------------|---|
| <b>Analytisch:</b>    | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Fehlerrechnung</li> <li>• Kondition des Problems</li> <li>• etc.</li> </ul>                                      |
| <b>Numerisch:</b>     | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Parameterstudien</li> <li>• Sensitivitätsanalyse</li> <li>• etc.</li> </ul>                                      |
| <b>Experimentell:</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Statistische Versuchsplanung</li> <li>• Statistische Bewertung von Modellunsicherheit</li> <li>• etc.</li> </ul> |

### Unsicherheit beeinflussen

#### Unsicherheit vermeiden:

- Bessere/mehr Sensoren
- etc.

#### Anpassen an Unsicherh.:

- Wahl v. Steuergrößen
- Lastortermittlung
- Sensorpositionierung
- Systemidentifikation
- etc.

**Abbildung 3.4:** Einteilung unterschiedlicher Methoden zur Beherrschung von Unsicherheit

Analytische Betrachtungen bieten auf meist einfachem Wege grundlegende Erkenntnisse zur Auswirkung von Unsicherheit. So bewertet die Konditionszahl  $\kappa$  die Auswirkung von Fehlern in einem algebraischen Gleichungssystem z. B. zur Beschreibung der Ursache-Wirkungs-Beziehung zwischen Belastungen und Verformungen. Die Gaußsche Fehlerrechnung ermöglicht z. B. die analytische Bewertung der Auswirkung von Abweichungen in Messsignalen auf das Messergebnis.

Numerische Simulationen ermöglichen eine Bewertung der Auswirkung von Unsicherheit in komplexen, ggf. nicht mehr analytisch beschreibbaren Systemen. So können durch Parameterstudien Wirkzusammenhänge zwischen einzelnen unsicheren Eingangsgrößen, Stör- und Steuergrößen nach Abschnitt 3.2.2 bewertet und verständlich dargestellt werden. Numerische Sensitivitätsanalysen, z. B. auf Basis von Monte-Carlo-Simulationen oder numerischen Realisierungen statistischer Versuchsplanung ermöglichen die gleichzeitige Bewertung von Unsicherheit mehrerer unsicherer Größen und deren Wechselwirkung, wie eigene Arbeiten gezeigt haben [92, 93].

Die Bewertung von Parameterunsicherheit kann per Definition für ein modellbasiertes Lastmonitoring vollständig durch numerische Simulationen erfolgen. Dies lässt sich wie folgt begründen. Parameterunsicherheit ist definiert als Unsicherheit in den Parametern des mathematischen Modells. Sowohl in der numerischen als auch in der experimentellen Simulation wird dasselbe mathematische Modell und ebenso derselbe Algorithmus zur Ermittlung von Belastungen verwendet. Unsicherheit in den Parametern des mathematischen Modells tragen somit in beiden Simulationsarten zu den gleichen Anteilen an den Abweichungen der ermittelten Belastungen bei. Modellunsicherheit durch vereinfachende Abbildung des realen Systems kann hingegen nach Definition nur in experimentellen Simulationen vollständig ermittelt werden. Dazu werden in dieser Arbeit frequenzabhängige, statistische Betrachtungen des Fehlers



zwischen tatsächlicher und ermittelter Belastung durchgeführt und in Form einer Unsicherheitsregion dargestellt, Abschnitt 6.6.

Sinnvollerweise wird man bestrebt sein, zunächst Unsicherheit auf analytischer Ebene, dann auf numerischer Ebene und zuletzt in der experimentellen Simulation zu bewerten. Durch diese Vorgehensweise wird der Aufwand an numerischen und insbesondere experimentellen Untersuchungen zur Bewertung von Unsicherheit in einem Lastmonitoring-System erheblich reduziert, Kapitel 6.

Die – idealerweise positive – *Beeinflussung* von Unsicherheit ist wiederum meist nur auf Basis vorher beschriebener und bewerteter Unsicherheit möglich. So ist z. B. für eine unsicherheitsminimierende Auswahl der Sensorpositionen zunächst eine Systembeschreibung und eine Bewertung nötig. Unsicherheit kann einerseits vermieden werden, beispielsweise die Gewinnung von mehr oder höherwertigen Messsignalen durch Verwendung zusätzlicher oder besserer Sensoren. Andererseits können auf Basis der Bewertung von Unsicherheit Steuergrößen derart angepasst werden, dass sich gegebene Unsicherheit möglichst gering z. B. auf die ermittelten Belastungen auswirkt. Gegebenenfalls bieten erweiterte Algorithmen die Möglichkeit, Unsicherheit zu beherrschen. So wird in Abschnitt 4.3 ein Algorithmus vorgestellt, der es auf Basis einer Bewertung von Unsicherheit, quantifiziert durch einen Projektionsfehler, ermöglicht, unbekannte Lastangriffspunkte zu ermitteln. Auch die Systemidentifikation, also die experimentelle Ermittlung von Systemeigenschaften auf Basis von Messdaten, lässt sich als Beeinflussung von Unsicherheit interpretieren. Unsicherheit in den Parametern des mathematischen Modells wird durch deren Anpassung an reale Messdaten minimiert.

Der **Beitrag zur Beherrschung von Unsicherheit** in einem Lastmonitoring-System erfolgt in dieser Arbeit durch Anwendung meist bekannter Methoden. Abbildung 3.4 bietet dabei eine strukturierende Einordnung aller in dieser Arbeit dargestellter und untersuchter Methoden und Maßnahmen. Die Methoden tragen zur Erfüllung der Arbeitshypothese eines unsicherheitsminimiertes Lastmonitoring-System aus Abschnitt 3.2.2 bei. Die Beschreibung und Anwendung der Methoden und Maßnahmen erfolgt im Wesentlichen in den Kapiteln 4 bis 6.

---

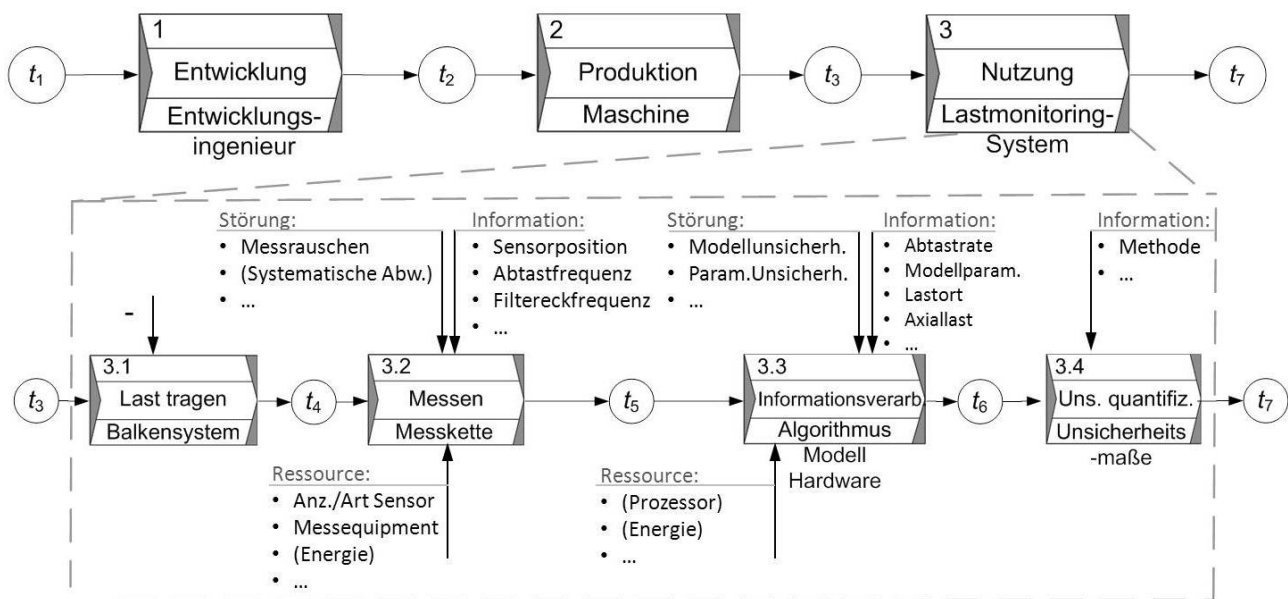
### 3.4 Prozesskette zur Beschreibung von Unsicherheit

---

Nach der Arbeitshypothese des SFB 805 entsteht Unsicherheit in Prozessen. Unsicherheit kann durch Darstellung der Prozesse, die zur Erfüllung einer technischen Problemstellung benötigt werden, und der darin wirkenden Unsicherheit beschrieben werden [66]. Die Arbeiten im SFB 805 liefern eine Möglichkeit, Prozesse strukturiert zu beschreiben [33]. Ein Prozess kann beschrieben werden als der Übergang von einem Anfangszustand zum Zeitpunkt  $t_n$  in einen Endzustand zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$ . Ein Prozess hat einen Zweck und ein Prozessmittel zur Umsetzung des Prozesses. Der Endzustand eines Prozesses kann der Anfangszustand des nächsten Prozesses sein, es entsteht eine Prozesskette. Üblicherweise führen Störeinflüsse im Prozess in Folge von Störgrößen zu Abweichungen im Endzustand eines Prozesses. Prozesse werden durch Informationen gesteuert oder beeinflusst, es werden oftmals Ressourcen benötigt. Abbildung 3.5 auf der folgenden Seite zeigt die Prozesskette eines Lastmonitoring-Systems.

Ein lasttragendes System wird in seinem Produktlebenslauf zunächst entwickelt und produziert, um anschließend in die Nutzung zu gehen. Diese drei Phasen können als Überprozesse angesehen werden.

In dieser Arbeit wird der Prozess 'Nutzung' eines lasttragenden Systems mit einem Lastmonitoring näher diskutiert. Er kann in die Unterprozesse 'Last tragen', 'Messen', 'Last ermitteln' und 'Unsicherheit quantifizieren' unterteilt werden, siehe Abbildung 3.5. Bei Bedarf können diese Prozesse zur näheren Analyse in weitere Unterprozesse unterteilt werden, z. B. den Prozess 'Messung' in die Unterprozesse 'Übertragung der physikalischen in eine elektrische Messgröße', 'Umformen in elektrisches Messsignal', 'Verstärkung', 'Aliasing-Filterung', 'Abtastung' und 'Analog-Digitalwandlung'. Die Darstellung einer Prozesskette kann so nach Bedarf beliebig komplex und detailliert erfolgen. In der Praxis ist dies bei einem Lastmonitoring-System jedoch nicht nötig, für die weiteren Untersuchungen in dieser Arbeit reicht die in Abbildung 3.5 gezeigte Prozesskette aus. Die im Stand der Forschung dargestellten Arten von Unsicherheit lassen sich im Prozessmodell einzelnen Prozessen zuordnen.



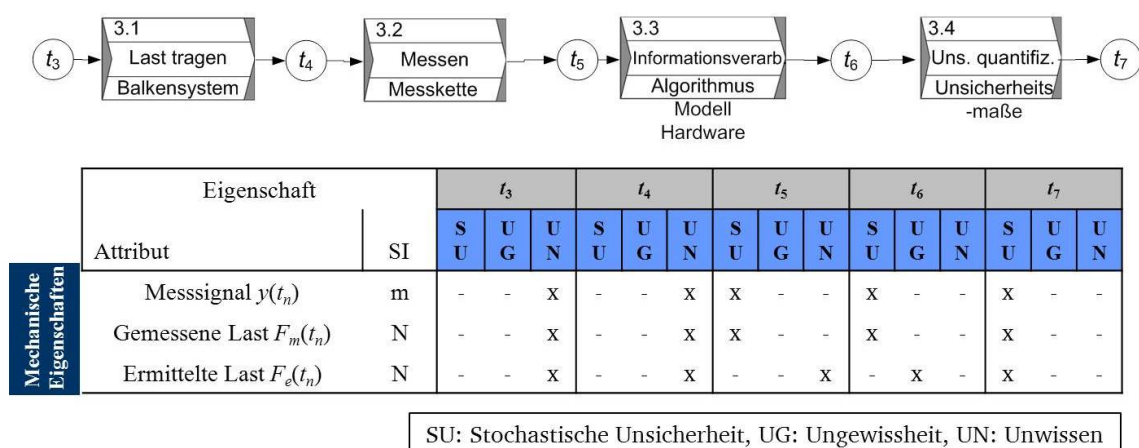
**Abbildung 3.5:** Prozesskette eines lasttragenden Systems mit Unterprozessen des Lastmonitoring-Systems. Angaben in Klammer werden in dieser Arbeit nicht näher untersucht.

Zur Quantifizierung von Unsicherheit, die in einem Lastmonitoring-System auftreten kann, lässt sich folgende Ansichtswiese auf Basis der vorgestellten Prozesskette ausführen.

- **Prozess 3.1 'Last tragen':** Es wirken tatsächliche Belastungen  $F$  auf das reale lasttragende System und rufen tatsächliche Verformungen  $y$  hervor. Dieser Prozess wird als nicht unsicherheitsbehaftet angesehen; er ist durch die realen und tatsächlichen physikalischen Vorgänge im System beschrieben.
- **Prozess 3.2 'Messen':** Es werden mechanische Messgrößen lokaler Zustände des lasttragenden Systems, z. B. Dehnungen, Auslenkungen oder Beschleunigungen an diskreten Orten, durch Sensoren und einer Signalverarbeitung durch eine Messkette in Messsignale  $y_m$  umgewandelt. Sensorposition, Abtastrate und Filtereckfrequenz beeinflussen den Prozess. Störgrößen im Messprozess z. B. durch Messrauschen, Temperatur oder systematische Abweichungen führen im Allgemeinen zu  $y_m = y + \Delta y$ .

- **Prozess 3.3 'Informationsverarbeitung'**: Die potentiell unsicherheitsbehafteten Messsignale  $y_m$  werden in einer Informationsverarbeitung unter Verwendung eines geeigneten Algorithmus und eines geeigneten mathematischen Modells verwendet, um die Belastung  $F_e$  zu ermitteln. Modell- und Parameterunsicherheit, aber auch die Unsicherheit in den Messsignalen führt dazu, dass die tatsächliche Belastung  $F$  praktisch niemals der ermittelten Belastung entspricht,  $F \neq F_e$ . Die Abtastrate und die Kenntnis der Modellparameter, des Lastortes und der Axiallast beeinflussen diesen Prozess.
- **Prozess 3.4 'Unsicherheit quantifizieren'**: Durch den Vergleich der tatsächlichen Belastung  $F$  mit der ermittelten Belastung  $F_e$  lässt sich durch statistische Auswertungen die Unsicherheit in den ermittelten Belastungen quantifizieren. In der numerischen Simulation sind die tatsächlichen Belastungen bekannt, in der experimentellen Simulation müssen diese z. B. durch eine Kraftmessdose direkt gemessen werden. Auch hier entsteht natürlich Unsicherheit im Messprozess. Deren Auswirkung ist aber in der Praxis meist deutlich kleiner als im Lastmonitoring-System. So werden beispielsweise in der experimentellen Simulation minimale Unsicherheitsmaße  $U_{\text{eff}} \approx 6\%$  der ermittelten Belastung erreicht, Abschnitt 7.2. Unter Berücksichtigung von Messrauschen und Linearitätsfehler ist das Unsicherheitsmaß für eine Kraftmessung mit der in dieser Arbeit verwendeten und kalibrierten Kraftmessdose (*ME-Meßsysteme KM26z* bis 100 N, Linearitätsabweichung:  $\pm 0.1\%$  nach Herstellerangaben, Messrauschen:  $6.3 \cdot 10^{-2}$  N) bei gleichem Effektivwert der Belastung aber nur  $U_{\text{eff}} \approx 0.12\%$  und somit mehr als eine Größenordnung geringer.

Trägt man die Unsicherheit in den Zuständen des Lastmonitoring-Systems qualitativ über die einzelnen Zeitpunkte auf, lässt sich der Verlauf der Unsicherheitskategorien der einzelnen Zustände darstellen, wie in Abbildung 3.6 an ausgewählten mechanischen Größen des Lastmonitoring exemplarisch dargestellt. In den Prozessen des Lastmonitoring wird also Unsicherheit im Sinne des SFB 805 insofern beherrscht, als das durch einzelne Prozesse Unwissen in Ungewissheit und letztendlich, wenn möglich, in Stochastische Unsicherheit überführt wird, vgl. [37].



**Abbildung 3.6:** Qualitativer Verlauf der Unsicherheit in den Prozessen des Lastmonitorings.

Die Beschreibung einzelner, unsicherheitsbehafteter Prozesse und die Verknüpfung in einer Prozesskette liefert den Mehrwert einer strukturierten und einheitlichen Beschreibung von Unsicherheit, die in einem Lastmonitoring-System auftreten kann. Wird die Prozesskette z. B. in einem Simulationsmodell

abgebildet, kann der Einfluss einzelner unsicherer Parameter auf die ermittelte Belastung untersucht werden. Mit der einheitlichen Beschreibung von Unsicherheit im Prozessmodell wird durch die definierte Schnittstelle in den Zuständen des Prozessmodells eine fachdisziplinübergreifende Beherrschung von Unsicherheit ermöglicht.

Zum Beispiel können durch die Untersuchung von Unsicherheit in den Prozessen der Produktion Informationen über Geometrie- und Materialeigenschaften und deren Unsicherheit im Zustand  $t_3$  des Prozessmodells in Abb. 3.5 abgebildet werden. Diese werden dann als Ausgangsbasis zur Untersuchung weiterer unsicherer Prozesse in der Nutzung verwendet. Ebenso können Untersuchungsergebnisse zu Unsicherheit in Lastmonitoring-Systemen für weitere Analysen beispielsweise in den Prozessen aktiver Systeme verwendet werden, wenn diese durch das Lastmonitoring ermittelten Belastungs- und Verformungszustände verwenden. Ermittelten Belastungen und deren Unsicherheit werden in die Produktentwicklung zurück gespiegelt und dort zur angemessenen Auswahl von Sicherheitsfaktoren in der Produktauslegung verwendet.

**Beitrag zur Beherrschung von Unsicherheit:** Durch das Prozessmodell wird die strukturierte Beschreibung von Unsicherheit und die fachdisziplinübergreifende Weitergabe von Informationen über unsicherheitsbehaftete Zustände in den Prozessen ermöglicht.

---

## 4 Mathematische Modelle und Methoden des Lastmonitorings

---

In diesem Kapitel werden die zur Lösung Inverser Probleme benötigten mathematischen Modelle und Methoden vorgestellt. Sie werden im weiteren Verlauf der Arbeit immer wieder aufgegriffen und in Anwendungsbeispielen am Balkensystem eingesetzt. Gleichzeitig sind die mathematischen Modelle und Methoden so formuliert, dass sie übertragbar sind auf andere lasttragende Systeme, für welche ortsdiskretisierte Modelle vorliegen.

---

### 4.1 Mathematische Modelle linearer zeitinvarianter Struktursysteme

---

Zur modellbasierten Ermittlung von Belastungen ist es notwendig, dass die relevanten Eigenschaften des Systems in Form eines mathematischen Modells zur Beschreibung des Übertragungsverhalten zwischen Belastungen  $F(t)$  und Messsignalen  $y(t)$  vorliegen. In diesem Abschnitt werden dazu unterschiedliche Modelle vorgestellt.

---

#### 4.1.1 Systembeschreibung im Zeit- und Modalbereich

---

Im Allgemeinen sind lasttragende Systeme kontinuierliche, elastische Systeme. Diese werden oftmals als ortsdiskretisierte Modelle dargestellt, beispielsweise durch FE-Modelle oder Mehrkörpermodelle. Unter der Annahme, das System sei linear, kausal, zeitinvariant und schwach gedämpft, kann das zeitliche Verhalten eines diskretisierten lasttragenden Systems mit  $N$  Freiheitsgraden<sup>1</sup> durch ein inhomogenes Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung beschrieben werden, vgl. (3.2),

$$M\ddot{\mathbf{r}}(t) + C_d\dot{\mathbf{r}}(t) + K^*\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t), \quad \mathbf{r}(t=0) = \mathbf{r}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}(t=0) = \nu_0, \quad (4.1)$$

wobei die Dämpfung zur Lösung des Eigenwertproblems zunächst vernachlässigt wird [62], aber später als modaler Dämpfungsgrad in den mathematischen Modellen berücksichtigt wird. Darin sind  $\mathbf{r}(t=0) = \mathbf{r}_0$  und  $\dot{\mathbf{r}}(t=0) = \nu_0$  die Anfangsbedingungen. Die Lösung des Eigenwertproblems

$$(K^* - \lambda_n M)\boldsymbol{\phi}_n = 0 \quad (4.2)$$

führt zu den  $N$  Eigenwerten  $\lambda_n$ , den  $N$  Eigenkreisfrequenzen  $\omega_n$  mit  $\omega_n^2 = \lambda_n$  und den  $N$  Eigenvektoren  $\boldsymbol{\phi}_n$ . Die Eigenwertmatrix  $\Lambda \in \mathbb{R}^{N \times N}$  und Modalmatrix  $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times N}$  lassen sich schreiben als

$$\Lambda = \text{diag}(\omega_n^2); \quad \Phi = \left[ \boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \dots, \boldsymbol{\phi}_N \right].$$

Die Modalmatrix ist massenormiert,  $\Phi^T M \Phi = \mathbf{I}$ , wobei  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix ist. Unter Annahme modaler Dämpfung kann eine diagonale modale Dämpfungsmatrix  $\Theta = \text{diag}(\theta_n)$  mit den modalen Dämpfungen  $\theta_n = 2\xi_n\omega_n$  und den modalen Dämpfungsgraden  $\xi_n \ll 1$  eingeführt werden.

---

<sup>1</sup> Für das Balkensystem wie in Abbildung 3.1 gezeigt und in (3.2) beschrieben, ist z. B.  $N = 2N_k - 3$  (jeder Knoten besitzt 2 FHG, durch die Randbedingungen sind insg. 3 FHG gesperrt).

Das dynamische Verhalten eines linearen Struktursystems kann somit unter Verwendung seiner modalen Größen  $\Lambda$ ,  $\Theta$  und  $\Phi$  beschrieben werden. Durch Einführung des modalen Auslenkungsvektors  $\mathbf{p}(t) = [p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)]^T$  und des modalen Lastvektors  $\mathbf{F}^g(t) = [F_1^g(t), F_2^g(t), \dots, F_n^g(t)]^T$  mit

$$\mathbf{r}(t) = \Phi \mathbf{p}(t) \quad (4.3)$$

$$\mathbf{F}^g(t) = \Phi^T \mathbf{F}(t) \quad (4.4)$$

lässt sich (4.1) als System von  $N$  ungekoppelten Differentialgleichungen im modalen Raum beschreiben,

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) + \Theta \dot{\mathbf{p}}(t) + \Lambda \mathbf{p}(t) = \mathbf{F}^g(t). \quad (4.5)$$

Im Frequenzbereich lässt sich (4.3) bis (4.5) durch eine Laplace-Transformation mit der Laplace-Variablen  $s = i\Omega + \sigma$  als Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}(s)$  schreiben [116],

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{n=1}^N \frac{\boldsymbol{\phi}_n \boldsymbol{\phi}_n^T}{s^2 + 2\theta_n \omega_n s + \omega_n^2}. \quad (4.6)$$

#### 4.1.2 Zustandsraumdarstellung, modale Reduktion und zeitliche Diskretisierung

Zur numerisch effizienten Lösung der Systembeschreibung durch (4.3) bis (4.5) im Zeitbereich ist es hilfreich, diese in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung in Form einer Zustandsraumdarstellung zu überführen. Diese Darstellung ist üblich in der Regelungstechnik, z. B. [42, 104], und wird in dieser Arbeit zum Lastmonitoring in einem Zustandsbeobachter eingesetzt. Sie bietet folgende, für Monitoring-Systeme relevante Vorteile:

- Die Zustandsraumdarstellung beschreibt nicht nur das Verhalten zwischen Ein- und Ausgangsgrößen, sondern auch den Verlauf innerer (modaler) Systemzustände. Diese können zu regelungstechnischen Aufgaben verwendet werden, z. B. in Zustandsreglern. Sie bietet den Vorteil, dass mehr Informationen über die Systemstruktur vorliegen [13].
- Darüber hinaus ermöglicht die Kenntnis der inneren Systemzustände die Abschätzung des Verformungszustandes der gesamten Struktur, z. B. durch modale Expansion [58].
- Die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung ist numerisch effizient möglich [104].
- Im Vergleich zur Darstellung der Übertragungsmatrix in (4.6) lässt sich das Eigenverhalten des Systems aus einem Anfangszustand  $\mathbf{q}_0$  leicht bestimmen.

Mit Einführung eines modalen Zustandsvektors  $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^{2N}$  und der modalen Anfangsbedingungen  $\mathbf{q}_0$  mit

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} \Phi^{-1} \mathbf{r}_0 \\ \Phi^{-1} \mathbf{v}_0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

kann (4.3) bis (4.5) in eine Zustandsgleichung und eine Ausgangsgleichung überführt werden,

*Zustandsgleichung:*

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{q}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{F}(t) \quad (4.8)$$

*Ausgangsgleichung:*

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{C} \mathbf{q}(t), \quad (4.9)$$

wobei  $\mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$  die Systemmatrix,  $\mathbf{B}_c \in \mathbb{R}^{2N \times N}$  die Eingangsmatrix und  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times 2N}$  die Messmatrix wie folgt definiert sind,

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{\Lambda} & -\mathbf{\Theta} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi}^T \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [\mathbf{\Phi} \ \mathbf{0}].$$

Sollen zusätzlich Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{r}}(t)$  gemessen werden, wird eine Messmatrix  $\mathbf{C}_a$  und eine Durchgangsmatrix  $\mathbf{D}_a$  eingeführt. Die Ausgangsgleichung für eine Beschleunigung ist dann:

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{C}_a \mathbf{q}(t) + \mathbf{D}_a \mathbf{F}(t) \quad (4.10)$$

mit

$$\mathbf{C}_a = [-\mathbf{\Phi} \mathbf{\Lambda} \quad -\mathbf{\Phi} \mathbf{\Theta}]; \quad \mathbf{D}_a = [\mathbf{\Phi} \mathbf{\Phi}^T].$$

## Modale Reduktion

Im Allgemeinen ist es nicht sinnvoll und praktikabel, dass das Modell zur Beschreibung des dynamischen Systemverhaltens alle  $N$  Moden berücksichtigt. Die Gründe hierfür sind:

- Im Allgemeinen können nicht alle  $N$  Freiheitsgrade gemessen werden,  $N_s \ll N$ .
- Das mathematische Modell wird bei Systemen mit vielen Freiheitsgraden sehr groß, beispielsweise  $N > 10^5$  für komplexere FE-Modelle, und somit rechenintensiv. Es ist ggf. nicht mehr tauglich für ein echtzeitfähiges Lastmonitoring-System.
- Höhere Moden tragen oftmals nur einen geringen Anteil zum Gesamtverhalten des Systems bei und können somit in vielen Fällen vernachlässigt werden [132]. Dies gilt insbesondere für Belastungsspektren, bei welchen die Leistung mit steigender Frequenz abnimmt. Dies ist eine realistische Annahme für stochastische Anregungen, z. B. [70, 153].

Um ein reduziertes Modell der Ordnung  $N_r$  zu erhalten, kann eine modale Reduktion durchgeführt werden. Dazu werden nur die ersten  $N_r$  Moden im Modell berücksichtigt. Es ergibt sich die reduzierte Modalmatrix  $\mathbf{\Phi}_r \in \mathbb{R}^{N \times N_r}$  und ihre komplementäre residuale Modalmatrix  $\mathbf{\Phi}_k \in \mathbb{R}^{N \times N - N_r}$ , die reduzierte Eigenwertmatrix  $\mathbf{\Lambda}_r \in \mathbb{R}^{N_r \times N_r}$  und ihre komplementäre residuale Eigenwertmatrix  $\mathbf{\Lambda}_k \in \mathbb{R}^{N - N_r \times N - N_r}$  sowie die reduzierte modale Dämpfungsmatrix  $\mathbf{\Theta}_r$ . Weiterhin werden die Selektionsmatrizen  $\mathbf{L}_F$  für die (bekannten) Freiheitsgrade, an denen laterale Belastungen angreifen und  $\mathbf{L}_s$  für die bekannten, translatorischen Messfreiheitsgrade eingeführt. Die Selektionsmatrizen besitzen in jeder Zeile nur einen Eintrag

gleich 1 an der Stelle, wo eine Belastung angreift bzw. ein Sensor angebracht ist, alle anderen Einträge sind null,

$$\mathbf{L}_{F,ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x_{F,j}^k = 2i - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{L}_{s,ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x_{s,j}^k = 2i - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.12)$$

Mit den so definierten Gleichungen lässt sich die Zustandsraumdarstellung eines lasttragenden Systems zur Abbildung des linearen dynamischen Verhaltens mit einer reduzierten Anzahl an Moden  $N_r$  mit den modalen Zuständen  $\mathbf{q}_r$  zwischen Belastungen  $\mathbf{F}(t)$  an den Lastorten  $x_{F,i}^k$  und dem Messvektor  $\mathbf{y}(t)$  für Auslenkungen und Beschleunigungen an den Messstellen  $x_{s,i}^k$  wie folgt schreiben:

$$\dot{\mathbf{q}}_r(t) = \mathbf{A}_r \mathbf{q}_r(t) + \mathbf{B}_r \mathbf{F}(t) \quad (4.13)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_r \mathbf{q}_r(t) + \mathbf{D}_r \mathbf{F}(t) \quad (4.14)$$

mit

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{\Lambda}_r & -\mathbf{\Theta}_r \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi}_r^T \mathbf{L}_F^T \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s \mathbf{\Phi}_r & \mathbf{0} \\ -\mathbf{L}_s \mathbf{\Phi}_r \mathbf{\Lambda}_r & -\mathbf{L}_s \mathbf{\Phi}_r \mathbf{\Theta}_r \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s \mathbf{\Phi}_c \mathbf{\Lambda}_k \mathbf{\Phi}_c^T \mathbf{L}_F^T \\ \mathbf{L}_s \mathbf{\Phi}_r \mathbf{\Phi}_r^T \mathbf{L}_F^T \end{bmatrix},$$

wobei  $\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r, \mathbf{D}_r$  die entsprechenden Matrizen des reduzierten Zustandsraummodells sind.

Für numerische Simulationen im Zeitbereich muss (4.13) zeitdiskretisiert werden. Mit der Abtastzeit  $\Delta t$  ergibt sich nach [142]

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{k+1} &= \mathbf{A}_d \mathbf{q}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{F}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_r \mathbf{q}_k + \mathbf{D}_r \mathbf{F}_k, \end{aligned} \quad (4.15)$$

wobei  $\mathbf{q}_k = \mathbf{q}(k\Delta t)$ ,  $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}(k\Delta t)$  und  $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}(k\Delta t)$ , die diskreten Zeitpunkte  $k \in \{0, 1, \dots, K\}$  und

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}_r \Delta t}; \quad \mathbf{B}_d = [e^{\mathbf{A}_r \Delta t} - \mathbf{I}] \mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{B}_r. \quad (4.16)$$

Es sei angemerkt, dass in dieser Arbeit für eine Belastung  $F$  bzw. ein Messsignal  $y$  an diskreten Zeitpunkten  $k$  die Bezeichnungen  $F_k$  und  $F(k)$  bzw.  $y_k$  und  $y(k)$  gleichwertig und je nach Anforderung an die Lesbarkeit bzw. Verständlichkeit der mathematischen Ausdrücke verwendet wird.



---

### 4.1.3 Impulsantwort-Modell

---

Das dynamische Verhalten eines lasttragenden Systems lässt sich im Zeitbereich durch seine Impulsantwort vollständig beschreiben [84]. Es leitet sich eine Modelldarstellung ab, die in dieser Arbeit als Impulsantwort-Modell bezeichnet wird, aber auch als Gewichtsfunktionsmodell (*weighting sequence description*) bekannt ist. In dieser Arbeit wird das Impulsantwort-Modell verwendet, um einen effizienten Algorithmus zur Ermittlung von Systemeigenschaftsänderungen bei unbekannter Belastung umzusetzen, aber auch zur Systemidentifikation. Das Impulsantwort-Modell bietet folgende, für ein Monitoring-System relevante Vorteile:

- Die zeitliche Dimension des Impulsantwort-Modells ist unabhängig von der Ordnung des Systems und der Anzahl an Sensoren. So ist es z. B. möglich, aus einem Messsignal unabhängig von der Ordnung des Systems eine Belastung zu ermitteln.
- Die Beschreibung des Impulsantwort-Modells ist eindeutig, während für ein Zustandsraummodell durch Ähnlichkeitstransformationen unendlich viele Realisierungen der Systemmatrizen möglich sind<sup>2</sup> [103].
- Ein Zustandsraummodell lässt sich in ein Impulsantwort-Modell überführen, et vice versa. Dieser Zusammenhang lässt sich zur Ermittlung eines Zustandsraummodells verwenden, da Impulsantworten des Systems in experimentellen Simulationen leicht zu ermitteln sind [84].

Im zeitdiskreten Fall und der Anfangsbedingung  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$  lässt sich der Zusammenhang zwischen einer Kraft  $F_k$  und einem Messsignal  $y_k$  zu den Zeitpunkten  $k$  durch die Faltungssumme

$$y_k = \sum_{\nu=0}^{N_\nu} g(\nu) F_{k-\nu} \quad (4.17)$$

beschreiben, wobei  $g(\nu)$  die diskrete Gewichtsfunktion zu den diskreten Zeitschritten des Impulsantwort-Modells  $\nu$  darstellt und  $N_\nu$  die Anzahl an berücksichtigten Zeitschritten im Impulsantwort-Modells beschreibt. Der seinem zeitdiskreten Verlauf von  $g(\nu)$  entspricht der Impulsantwort des Systems. Für einen Lastvektor  $F_k$  und einem Messvektor  $y_k$  lässt sich der Zusammenhang analog darstellen als

$$\mathbf{y}_k = \sum_{\nu=0}^{N_\nu} \mathbf{g}(\nu) \mathbf{F}_{k-\nu}, \quad (4.18)$$

wobei  $\mathbf{g}(\nu)$  die Gewichtsfunktionsmatrix oder Markov-Parameter des Systems beschreibt.

Die Zustandsraumdarstellung (4.15) lässt sich durch rekursive Lösung in ein Impulsantwort-Modell überführen,

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mathbf{q}_0 + \sum_{\nu=1}^{N_\nu} \mathbf{C} \mathbf{A}^{\nu-1} \mathbf{B} \mathbf{F}_{k-\nu} + \mathbf{D} \mathbf{F}_k, \quad (4.19)$$

---

<sup>2</sup> Aber nur für eine Realisierung sind die inneren Zustände gleichzeitig die modalen Zustände des Systems.

wobei hier nun die Anfangsbedingungen  $\mathbf{q}_0$  berücksichtigt sind. Fasst man die Messvektoren  $\mathbf{y}_k$  und Lastvektoren  $\mathbf{F}_k$  für die Zeitschritte  $k - N_v \dots k$  in Vektoren zusammen,

$$\underline{\mathbf{y}} = [\mathbf{y}_{k-N_v}, \mathbf{y}_{k-N_v+1}, \dots, \mathbf{y}_k]^T \text{ und } \underline{\mathbf{F}} = [\mathbf{F}_{k-N_v}, \mathbf{F}_{k-N_v+1}, \dots, \mathbf{F}_k]^T, \quad (4.20)$$

lässt sich (4.19) in Matrixschreibweise wie folgt darstellen,

$$\underline{\mathbf{y}} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{q}_0 + \mathbf{T} \underline{\mathbf{F}}, \quad (4.21)$$

wobei  $\mathbf{\Gamma}$  eine erweiterte Beobachtermatrix ist, welche den Anteil der Schwingungsantwort  $\mathbf{y}$  durch die modalen Anfangsbedingungen  $\mathbf{q}_0$  beschreibt,

$$\mathbf{\Gamma} = [\mathbf{C}^T, \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T, \dots, (\mathbf{A}^{N_v})^T \mathbf{C}^T]^T, \quad (4.22)$$

und  $\mathbf{T}$  folgende Toeplitz-Matrix ist,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{N_v-1} \mathbf{B} & \mathbf{CA}^{N_v-2} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{D} \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Die Markov-Parameter  $\mathbf{g}(\nu)$  des Systems sind also

$$\mathbf{g}(\nu) = \mathbf{CA}^{\nu-1} \mathbf{B}, \nu \in \{1, 2, \dots, N_v\} \text{ und } \mathbf{g}(0) = \mathbf{D}. \quad (4.24)$$

---

## 4.2 Regelungstechnische Methoden zur Lösung Inverser Probleme

---

In diesem Abschnitt werden die zur Lösung bestimmter und überbestimmter Inverser Probleme benötigten regelungstechnischen Methoden knapp erläutert.

---

### 4.2.1 Systemidentifikation zur Ermittlung von Parametern des mathematischen Modells

---

Aus der theoretischen Modellbildung geht auf Basis der getroffenen Annahmen über beispielsweise Geometrie- und Materialeigenschaften ein mathematisches Modell mit einer bestimmten Modellstruktur und berechneten Parametern, z. B. den modalen Größen des Systems, hervor. Gegebenenfalls sind aber manche Systemeigenschaften nicht oder nur unvollständig bekannt, es herrscht eine Unsicherheit. Die Systemidentifikation, auch experimentelle Modellbildung genannt, beschäftigt sich mit der Ermittlung eines mathematischen Modells aus einer vorgegebenen Modellklasse unter Verwendung gemessener Signale [80]. Üblicherweise werden dazu gemessene Belastungen und gemessene Verformungen des Systems verwendet. Es handelt sich also um ein *Inverses Problem 2. Art*, vgl. Abschnitt 3.2.1.

Es kann zwischen *nichtparametrischer* und *parametrischer Identifikation* unterschieden werden. Beide Ansätze kommen in dieser Arbeit zur Verwendung und im Folgenden knapp vorgestellt. Umfangreiche Darstellungen von Verfahren der Systemidentifikation finden sich z. B. in [80, 84].

Eine nichtparametrische Identifikation zeichnet sich durch den Vorteil aus, dass keine Modellstruktur benötigt wird. Unter bestimmten Voraussetzungen (z. B. Annahme lokaler Linearität des betrachteten Systems) ist es möglich, Modellunsicherheit durch Vergleich des identifizierten parametrischen Modells mit dem identifizierten nichtparametrischen Modells zu quantifizieren, Abschnitt 6.6. Zur Schätzung der Übertragungsfunktion einer Struktur zwischen einem Anregungsort und einer Schwingungsantwort in Form des Frequenzgangverlaufs (Amplituden- und Phasengang) kann die Spektralanalyse verwendet werden [80]. Aufgrund unvermeidbarer Unsicherheit in den Messsignalen werden unter Annahme statistischer Unabhängigkeit der Störgrößen üblicherweise hinreichende Mittlungen der spektralen Leistungsdichte durchgeführt.

Unter Verwendung der Autoleistungsdichte der gemessenen Verformung an einem Messfreiheitsgrad

$$S_{yy}(\Omega_k) = \lim_{t_k \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_k} (Y_T^*(\Omega_k) Y_T(\Omega_k)) \quad (4.25)$$

und der komplexwertigen Kreuzleistungsdichte zwischen einer gemessenen Verformung und einer gemessenen Belastung

$$S_{yF}(\Omega_k) = \lim_{t_k \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_k} (Y_T^*(\Omega_k) F_T(\Omega_k)) \quad (4.26)$$

mit den diskreten Fouriertransformierten  $Y_T(\Omega_k)$  der Messsignale und  $F_T(\Omega_k)$  der gemessenen Belastung, der Frequenzstützstelle  $\Omega_k$  und der Messdauer  $t_k$  lässt sich die nichtparametrische Übertragungsfunktion  $H_{np}(\Omega_k)$  berechnen zu

$$H_{np}(\Omega_k) = \frac{S_{yy}(\Omega_k)}{S_{yF}(\Omega_k)}. \quad (4.27)$$

---

### Parametrische Identifikation: Ermittlung des Parametervektors $\mathbf{p}$

---

Ist die zu erwartende bzw. gewünschte Modellordnung  $N_r$  des mathematischen Modells beispielsweise durch numerische oder experimentelle Modalanalyse bekannt, können parametrische Methoden zur Ermittlung der Systemeigenschaften angewendet werden. Falls die angenommene Modellordnung und Modellstruktur zutrifft, sind wegen der höheren A-priori-Informationen im Zusammenhang mit statistischen Ausgleichsmethoden wie z. B. Least-Square-Verfahren Modelle höherer Güte zu erwarten. Solche Parameterschätzmethoden lassen sich vielseitig einsetzen und erlauben auch bei ungünstigem Signal-Rausch-Verhältnis die Ermittlung von Modellen mit geringer Unsicherheit [80]. Sollen die identifizierten Modelle zur Regelung in einem modellbasierten Regler verwendet werden, ist die Verwendung eines parametrischen Modells sogar zwingend erforderlich [84]. In dieser Arbeit wird das für experimentelle Simulationen benötigte mathematische Modell  $\mathbf{H}(\mathbf{p})$  in Form eines Zustandsraummodells mittels des *Eigensystem-Realisierungs-Algorithmus* (ERA) ermittelt [84]. Dieser wird im Folgenden kurz skizziert.

Die Markov-Parameter  $\mathbf{g}(\nu) = \mathbf{g}_\nu$  des Systems können aus gemessenen Belastungen  $\mathbf{F}_k$  und Verformungen  $\mathbf{y}_k$  unter Verwendung von (4.21) durch Least-Square-Regression oder unter Verwendung

der inversen Fouriertransformation identifizierter Übertragungsfunktionen, z. B. durch (4.27), ermittelt werden. Im nächsten Schritt wird die Hankel-Matrix  $\mathbf{H}(0)$  mit

$$\mathbf{H}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{g}_1 & \cdots & \mathbf{g}_{\beta-1} \\ \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \cdots & \mathbf{g}_\beta \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 & \cdots & \mathbf{g}_{\beta+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{g}_{\alpha-1} & \mathbf{g}_\alpha & \cdots & \mathbf{g}_{\alpha+\beta-2} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

durch eine Singulärwertzerlegung zerlegt. Die Singulärwerte und Singulärvektoren der Hankel-Matrix  $\mathbf{H}(0)$  werden dann zur Bildung einer Realisierung der Zustandsmatrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}$  verwendet. Die Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  müssen ausreichend groß, aber mindestens so groß wie die erwartete Modellordnung  $2N_r$  sein,  $\alpha, \beta > 2N_r$ . Durch eine Ähnlichkeitstransformation des so gewonnenen Zustandsraummodells lassen sich die modalen Parameter des betrachteten Systems bis zur  $N_r$ -ten Mode ermitteln.

**Beitrag zur Beherrschung von Unsicherheit:** Durch die Systemidentifikation wird Parameterunsicherheit beherrscht, indem die vorab abgeschätzten Parameter des mathematischen Modells derart angepasst werden, dass das Modell möglichst gut das reale Verhalten des Systems abbildet.

---

#### 4.2.2 Zustandsbeobachter zur Ermittlung von Belastungen und Systemzuständen

---

Der wesentliche Vorteil eines Zustandsbeobachters zur Ermittlung unbekannter Eingangsgrößen basierend auf der Kalman-Filtertheorie besteht in der Ermittlung von Belastungen und inneren Systemzuständen unter optimaler Berücksichtigung einer gaußverteilten stochastischen Unsicherheit in den Messsignalen und dem mathematischen Modell. Als optimal wird hier die minimale Varianz des Fehlers in den ermittelten Größen bezeichnet, was für den in dieser Arbeit verwendeten Zustandsbeobachter analytisch nachgewiesen wurde [48]. Im Folgenden wird die Funktionsweise des Zustandsbeobachters knapp vorgestellt.

Der zu ermittelnde Lastvektor  $\mathbf{F}_k$  und der zu ermittelnde modale Zustandsvektor  $\mathbf{q}_k$  werden im Zustandsbeobachter aus dem Messvektor  $\mathbf{y}_k$  rekursiv für jeden Zeitpunkt  $k$  in den drei Schritten *Eingangssgrößenschätzung*, *Messgrößenaktualisierung* und *Zustandsaktualisierung* durch folgende Bestimmungsgleichungen (4.29) bis (4.31) berechnet [48]:

*Eingangssgrößenschätzung:*

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{S}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\mathbf{q}_{k-1}), \quad (4.29)$$

*Messgrößenaktualisierung:*

$$\mathbf{q}_{k|k-1} = \mathbf{q}_{k-1} + \mathbf{T}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\mathbf{q}_{k-1} - \mathbf{D}\mathbf{F}_k), \quad (4.30)$$

*Zustandsaktualisierung:*

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{A}\mathbf{q}_{k|k-1} + \mathbf{B}\mathbf{F}_k. \quad (4.31)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{q}_{k|k-1}$  den Prädiktorwert des Zustandes  $\mathbf{q}_k$ . Die Kalman-Matrizen  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{T}$  sind hier vereinfachend als konstant angenommen. Sie beinhalten Informationen über die Varianzen des Messrauschens und des Systemrauschens und können für jeden Zeitschritt  $k$  berechnet werden. Eine nähere Beschreibung zur optimalen Wahl der Kalman-Matrizen des vorgestellten Zustandsbeobachters findet sich im Anhang B, die vollständige Herleitung findet sich in [48].

**Beitrag zur Beherrschung von Unsicherheit:** Der Zustandsbeobachter bildet in dieser Arbeit den Kern der Informationsverarbeitung eines Lastmonitoring-Systems. Unsicherheit wird durch ihn beherrscht, indem die vorab abgeschätzten Betriebslasten eines individuellen lasttragenden Systems zu jedem Zeitpunkt bekannt gemacht werden.

---

### 4.3 Ein neuartiger Projektionsansatz zur Lösung unterbestimmter Inverser Probleme

---

Eine wesentliche Annahme der allermeisten Arbeiten über Lastmonitoring-Systeme ist, dass der Lastort  $x_F$  bekannt ist. Das Problem der Ermittlung von Belastungen bei unbekanntem Lastort ist jedoch bisher nur unbefriedigend gelöst, wie aus dem Stand der Forschung hervor geht.

In diesem Abschnitt wird ein neuartiger Ansatz zur Lösung unterbestimmter Inverser Probleme vorgestellt. Ein unterbestimmtes Inverses Problem liegt vor, wenn die Anzahl potentieller Ursachen (z. B. Belastungen an unterschiedlichen Freiheitsgraden des lasttragenden Systems) größer als die Anzahl der beobachteten Wirkungen (z. B. Messsignalen an unterschiedlichen Messfreiheitsgraden des lasttragenden Systems) ist. Diese unterbestimmte Inverse Problemstellung ist nur durch zusätzliche Annahmen eindeutig lösbar [58, 95]. In dieser Arbeit wird folgende, ingenieurmäßige Annahme getroffen:

*Die Anzahl der tatsächlich auftretenden Ursachen ist kleiner als die Anzahl der potentiell auftretenden Ursachen und auch kleiner als die Anzahl der beobachteten Wirkungen.*

Diese Annahme kann in einigen Problemstellungen der Ingenieurmechanik getroffen werden. Ist beispielsweise der Lastort einer ortsdiskreten Belastung unbekannt, die Anzahl  $N_F$  der ortsdiskreten Belastungen aber bekannt und die Anzahl an Messsignalen an den  $N_s$  Messfreiheitsgraden größer als die Anzahl der ortsdiskreten Belastungen,  $N_F < N_s$ , lässt sich dieses unterbestimmte Inverse Problem mit dem im Folgenden vorgestellten mathematischen Ansatz lösen.

Ein weiteres Anwendungsszenario des Ansatzes findet sich in der modellbasierten Schadensdetektion. Ziel einer Schadensdetektion sei die Ermittlung von Ort, Art und Höhe des Schadens, Stufe 3 des Structural Health Monitoring nach RYTTER [123]. Hier sei die Ursache ein Schaden der Struktur, z. B. eine Steifigkeitsreduktion durch einen Riss, und die beobachtete Wirkung des Schadens die schadenscharakteristischen Parameter, z. B. die Änderungen der beobachteten modalen Parameter des Systems oder die Schwingungssignaturen des Schadens. Potentiell können Schäden in einer Struktur an vielen unterschiedlichen Orten auftreten. Die Anzahl der potentiellen Schadensorte kann also deutlich größer als die Anzahl der beobachteten Wirkungen des Schadens sein. In der Praxis wird aber ein Schaden tatsächlich nur an wenigen Orten auftreten. Mit der oben dargestellten Annahme kann ein solches Anwendungsszenario durch den im Folgenden vorgestellten mathematischen Ansatz ebenso gelöst werden.

Der grundlegende algebraische Ansatz zur Lösung dieser Problemstellungen wird in Abschnitt 4.3.1 anhand eines einfachen Beispiels vorgestellt, zwei Anwendungsszenarien zur Ermittlung dynamischer Belastungen bei unbekanntem Lastort und zur Ermittlung veränderlicher Systemeigenschaften bei unbekanntem Belastungen werden in den Abschnitten 5.2 und 5.3 diskutiert. Rotationsfedersteifigkeit  $c_r$ , -masse  $m_r$  sowie Axiallast  $P$  werden dabei vernachlässigt.

---

### 4.3.1 Algebraische Grundlage

---

Zur Erläuterung der algebraischen Grundlage des Ansatzes wird das denkbar einfachste Beispiel für das Balkensystem betrachtet. Es wirkt eine statische Last  $F_1$  an einem unbekanntem Lastort am Knoten  $x_{F,1}^k$  auf den Balken, und es wird die Auslenkung  $w_1$  und  $w_2$  an zwei bekannten Orten an den Knoten  $x_{s,1}^k$  und  $x_{s,2}^k$  gemessen, siehe Abbildung 4.1 a) auf der folgenden Seite. Die benötigte algebraische Grundlage wird anhand dieses Beispiels erläutert, aber so formuliert, dass sie auch auf komplexere Problemstellungen z. B. mit mehreren unbekanntem Lastorten übertragen werden kann.

Es wird die allgemeine Gleichung (3.5) des Ursache-Wirkungsbezuges aufgegriffen und als statischer Belastungs-Verformungsbezug des Balkensystems angesehen,

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{F}. \quad (4.32)$$

Darin ist  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N_s}$  der Vektor mit den gemessenen Verformungen an den  $N_s = 2$  Messstellen,  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N_k}$  der Vektor mit allen potentiellen Belastungen und  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N_s \times N_k}$  die statische Nachgiebigkeitsmatrix in  $z$ -Richtung zur Beschreibung des Ursache-Wirkungsbezuges. Die Annahme, dass tatsächlich nur  $N_F$  Belastungen  $F_k$  ungleich Null sind, lässt sich schreiben als

$$F_k = \begin{cases} F_i & \text{wenn } x_{F,i}^k = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (4.33)$$

Soll nun aus gemessenen Verformungen  $\mathbf{y}$  die (äquivalente) Belastung  $\tilde{\mathbf{F}}$  ermittelt werden, ergibt sich

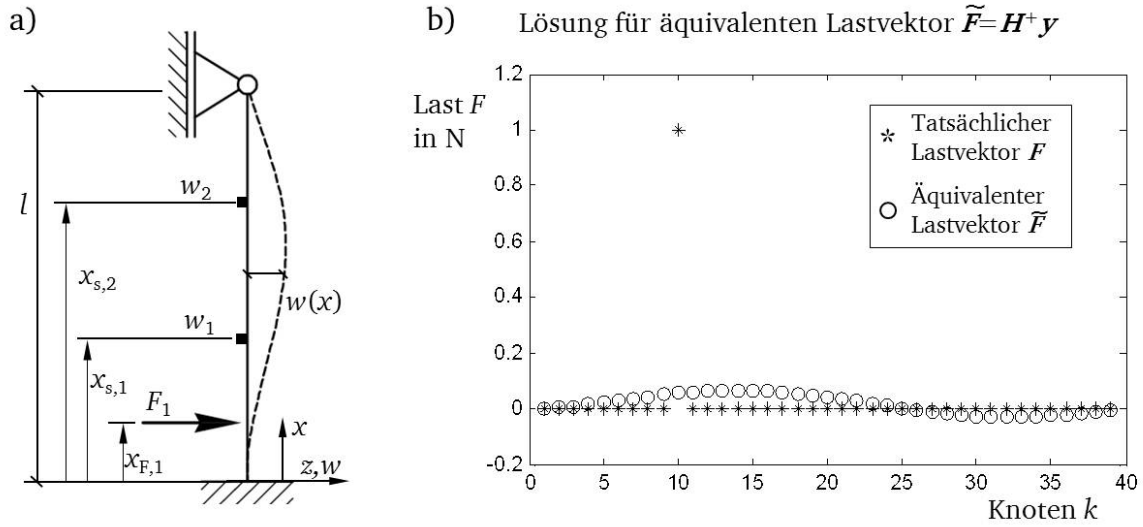
$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{H}^+ \cdot \mathbf{y}. \quad (4.34)$$

Abbildung 4.1 a) zeigt ein Beispiel für das Balkensystem mit  $N_k = 39$  Knoten,  $N_F = 1$  Belastungen  $F_1 = 1$  N an dem (bei der Lastermittlung zunächst unbekanntem) Knoten  $x_{F,1}^k = 10$  und  $N_s = 2$  Messstellen.

Wird nicht berücksichtigt, dass  $N_k - N_F = 38$  Einträge des Vektors  $\mathbf{F}$  null sind, ergibt sich die in Abbildung 4.1 b) gezeigte äquivalente Belastung<sup>3</sup>. Diese hat offenbar nur wenig mit der eigentlichen Belastung gemeinsam. Nicht einmal der Ort der maximalen äquivalenten Belastung stimmt mit dem Ort der tatsächlichen Belastung überein. Damit dennoch der Lastort und die Lasthöhe unter der Zuhilfenahme der Zusatzinformation, die meisten Belastungen seien gleich null, gelöst werden kann, wird folgender Projektionsansatz verwendet.

---

<sup>3</sup> engl.: equivalent load



**Abbildung 4.1:** a) Mechanisches Ersatzschaubild für den Balken ohne Axiallast und Rotationsfeder, b) Lösung für äquivalenten Lastvektor

Für alle Knoten  $x^k = k$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, N_K\}$  wird eine Selektionsmatrix  $L_{F,k} \in \mathbb{R}^{N_F \times N_K}$  gebildet mit

$$L_{F,ki} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x^k = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.35)$$

Die Selektionsmatrix wird verwendet, um aus der vollen Nachgiebigkeitsmatrix die  $k$ -te Spalte zu selektieren,

$$H_k = L_{F,k} H. \quad (4.36)$$

Mit  $H_k$  wird dann aus den gemessenen Verformungen eine Belastung berechnet,

$$F_k = (H_k)^+ y. \quad (4.37)$$

Wenn  $x^k$  der Knoten ist, an dem tatsächlich die Belastung angreift,  $x^k = x_{F,1}^k$ , wird auch die Höhe der Belastung  $F_k$  richtig berechnet. Nutzt man diese ermittelte Belastung nun, um wiederum die gemessene Verformung zu berechnen,

$$\hat{y} = H_k F, \quad (4.38)$$

muss die so berechnete Verformung  $\hat{y}$  im Falle eines richtig angenommenen Lastortes der gemessenen Verformung  $y$  entsprechen. Ist der angenommene Lastort nicht der tatsächliche Lastort, resultiert ein Fehlervektor

$$e_k = y - \hat{y} = (I - H_k (H_k)^+) y, \quad (4.39)$$

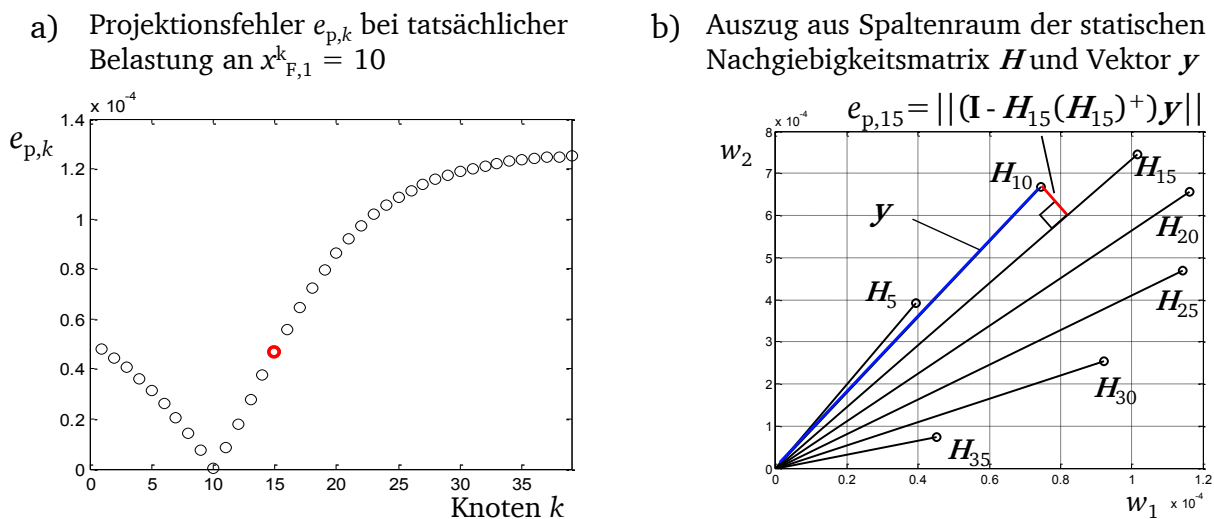
mit welchem für den mehrdimensionalen Fall eine Fehlernorm gebildet werden kann,

$$e_{p,k} = \|(I - H_k (H_k)^+) y\|_2. \quad (4.40)$$

Gl. (4.40) beschreibt den Projektionsfehler  $e_{p,k}$  der gemessenen Verformung auf einen Unterraum, welcher durch die  $k$ -te Spalte der Matrix  $\mathbf{H}$  aufgespannt wird.  $e_{p,k}$  kann dann verwendet werden, um für den Fall einer angreifenden Belastung folgendes Optimierungsproblem zu formulieren:

Finde  $k$  so, dass  $e_{p,k}$  minimal wird.

Abbildung 4.2 a) zeigt für das Beispiel den Projektionsfehler  $e_{p,k}$  für alle potentiellen Knoten  $x^k = k$ . Dieser ist null für den Knoten  $x_{F,1}^k = 10$ , an welchem tatsächlich eine Belastung angreift. Abbildung 4.2 b) zeigt geometrisch visualisiert die Funktionsweise des Projektionsansatzes. Angedeutet ist der zwei-dimensionale Spaltenraum, der durch die Nachgiebigkeitsmatrix  $\mathbf{H}$  aufgespannt wird. Jeder Vektor  $\mathbf{H}_k$  entspricht einer Spalte aus  $\mathbf{H}$ . Liegt nun der Messvektor  $\mathbf{y}$  auf dem Vektor  $\mathbf{H}_k$  für den Knoten  $k$ , an dem tatsächlich eine Belastung angreift, ist der Projektionsfehler im Idealfall null, für alle anderen Knoten nicht. Anschaulich formuliert lässt sich für den hier dargestellten zweidimensionalen Fall sagen, dass derjenige Vektor der Ursache gesucht wird, der möglichst in die Richtung der beobachteten Wirkung zeigt.



**Abbildung 4.2:** Funktionsweise des Projektionsansatzes: a) Projektionsfehler  $e_k$  für alle Knoten, b) Geometrische Visualisierung des Projektionsansatzes

Die Anwendung der vorgestellten Methode erfolgt für die numerische Simulation in Abschnitt 5.2 und 5.3 sowie für die experimentelle Simulation in Abschnitt 7.1.3 und 7.1.4.

**Beitrag zur Beherrschung von Unsicherheit:** Der vorgestellte Ansatz ermöglicht die Lösung eines unterbestimmten Inversen Problems durch die zusätzliche Annahme, dass die meisten Ursachen Null sind, wobei zunächst nicht bekannt ist, welche dies sind. Es liegen dann mehr beobachtete Wirkungen als tatsächliche Ursachen vor. Das vorher unterbestimmte Inverse Problem wird in ein überbestimmtes Inverses Problem überführt, womit die beobachteten Wirkungen eine redundante Information über die Ursache beinhalten. Diese kann dann verwendet werden, um einen Projektionsfehler zu berechnen. Die Ermittlung des minimalen Projektionsfehlers liefert dann den Ort der tatsächlichen Ursache.



---

## 5 Fallbeispiele zur Ermittlung von Belastungen und Systemeigenschaftsänderungen

---

In diesem Kapitel werden die in Kapitel 4 vorgestellten Methoden zur Lösung Inverser Probleme am Beispiel des Balkensystems aus Abschnitt 3.1 in numerischen Simulationen angewendet und hinsichtlich ihrer Unsicherheit bewertet. Es sei angemerkt, dass Fehler in der Modellierung natürlich zu Modellunsicherheiten führen, die aber in der numerischen Simulation nicht vollständig bewertet werden können. Beispielsweise führt die Annahme zur Proportionaldämpfung oder die vereinfachenden Annahmen zum Euler-Bernoulli-Balken hinsichtlich der Vernachlässigung von Scherbeanspruchung und Drehträgheit sowohl bei der Simulation des realen Systemverhaltens als auch bei der Ermittlung von Belastungen und veränderlichen Systemeigenschaften zu den selben Fehlern. Somit werden bei der Lösung des direkten Problems und des Inversen Problems die selben Fehler gemacht. Die durch die vereinfachenden Annahmen entstehende Modellunsicherheit kann und soll somit an dieser Stelle nicht vollständig bewertet werden. Sie wird in der experimentellen Simulation am Balkensystem in Abschnitt 6.6 sowie in Kapitel 7 bewertet.

---

### 5.1 Fallbeispiel 1: Ermittlung einer Laterallast am axial belasteten Balken bei bekanntem Lastort in der numerischen Simulation

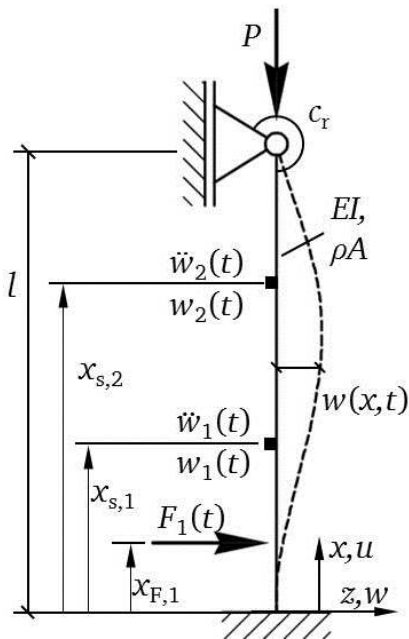
---

In diesem Abschnitt soll die grundlegende Funktionstauglichkeit des im Kapitel 4.2.2 vorgestellten Zustandsbeobachters zur Ermittlung von Belastungen am Balken-System in der numerischen Simulation validiert werden. Dies erfolgt für drei Arten von Belastungen. Als deterministische Belastung wird ein Gleitsinus, als stochastische Belastung ein rosa  $1/f$ -Rauschen und als stoßartige Belastung ein Rechteckimpuls simuliert. Dabei wirkt zunächst nur Unsicherheit durch ein numerisch generiertes Messrauschen und infolge des reduzierten Modells zur Abbildung des Systemverhaltens,  $N_r < N$ . Nähere Untersuchungen zum Einfluss unsicherer Eingangs- und Störgrößen sowie der Wahl der Steuergrößen erfolgen in Kapitel 6.

Es werden folgende Annahmen für die numerischen Simulationen getroffen:

- Es wird kleine Strukturdämpfung mit dem modalen Dämpfungsgrad  $\xi_n = 0.01$  für alle Moden  $n$  angenommen.
- Der Balken wird mit einer Laterallast  $F_1(t)$  an einem bekanntem Lastort  $x_{F,1}$  belastet.
- Die Systemeigenschaften sind vollständig bekannt.
- Es werden Auslenkungen  $w_i(t)$  und Beschleunigungen  $\ddot{w}_i(t)$  an zwei Messfreiheitsgraden ermittelt.
- Die Höhe der Belastungen werden derart gewählt, dass realistische Auslenkungen kleiner als 0.01 m am Balken auftreten.

Folgende Abbildung 5.1 zeigt erneut das Balkensystem, nun in seiner konkreten Ausführung für dieses Fallbeispiel 1. Die danebenstehende Tabelle 5.1 zeigt die verwendeten Variablen der numerischen Untersuchung, sofern diese nicht explizit in der Eigenschaftstabelle 3.1 aufgeführt sind.



Ordnung des vollständigen Modells $N$	63
Ordnung des reduzierten Modells $N_r$	2
Sensorposition $x_{s,1}, x_{s,2}$	110 mm, 220 mm
Intensität des Messrauschen	5%
1. Eigenfrequenz $f_1$ d. Balkens	32,6 Hz
2. Eigenfrequenz $f_2$ d. Balkens	112,4 Hz
Abtastfrequenz $f_a$	400 Hz
Filtereckfrequenz $f_c$	125 Hz
Simulationsfrequenz $f_s$	10 kHz
Lastort $x_{F,1}$	30 mm
Belastungsart BL1	Gleitsinus
Belastungsart BL2	Rosa Rauschen
Belastungsart BL3	Impuls
Axiallast $P$	20 N

**Abbildung 5.1:** Prinzipskizze des Balkensystem für Fallbeispiel 1

**Tabelle 5.1:** Eigenschaften des Balkensystems für Fallbeispiel 1, sofern nicht angegeben in Tabelle 3.1

Zur Abbildung des realen kontinuierlichen Balkensystems in der numerischen Simulation wird das Systemverhalten des Balkens mit  $N = 63$  Freiheitsgraden und einer Simulationsfrequenz von  $f_s = 10$  kHz simuliert. Zur Abbildung des Messprozesses wird auf die simulierten Auslenkungen  $w_1(t)$  und  $w_2(t)$  und Beschleunigungen  $\dot{w}_1(t)$  und  $\dot{w}_2(t)$  des Balkensystems ein normalverteiltes Messrauschen mit einer Standardabweichung von 5% der Standardabweichung des jeweiligen Messsignals addiert,

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t) + 0.05 \cdot \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}_y) \cdot \mathbf{n}(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{y}(t) = [w_1(t), w_2(t), \dot{w}_1(t), \dot{w}_2(t)]^T, \quad (5.1)$$

wobei  $\tilde{\mathbf{y}}(t)$  der Vektor mit den verrauschten Messsignalen,  $\boldsymbol{\sigma}_y$  der Vektor mit den Standardabweichungen der Messsignale ist und  $\mathbf{n}(t)$  einen weißen normierten Rauschprozess darstellt. Anschließend werden die Messsignale mit einem Butterworth-Filter 8. Ordnung und einer Filtereckfrequenz von  $f_c = 125$  Hz gefiltert und mit einer Abtastfrequenz von  $f_a = 400$  Hz abgetastet. Die Abtastung erfolgt in der numerischen Simulation durch ein Downsampling. Ebenso wird das Belastungssignal gefiltert und abgetastet, um die Vergleichbarkeit der ermittelten und tatsächlichen Belastungen sowohl in der numerischen als auch später in der experimentellen Simulation zu ermöglichen. Es wird deshalb auch in der numerischen Simulation von einer gemessenen Belastung  $F_m(t)$  gesprochen. Zur Gewährleistung der Beobachtbarkeit der modalen Verformungen  $\mathbf{q}$  mit  $N_s = 2$  Sensoren wurde die Modellordnung  $N_r = 2$  gewählt, die Filtereckfrequenz  $f_c$  entsprechend der 2. Eigenfrequenz  $f_2$  des Systems. Es sei angemerkt, dass der Prozess der Filterung und Abtastung in dieser Arbeit als nicht unsicherheitsbehaftet angesehen wird. Durch die

Filterung entsteht zwar ein Phasenverzug, dieser ist aber bekannt und kann so in weiteren Analysen berücksichtigt werden. Der Fehler durch eine Quantifizierung des Messsignals im realen Messprozess kann bei heute üblichen Abtastsystemen mit Diskretisierungen von z. B. 16 bit oder 24 bit bei ausreichender Nutzung des Dynamikbereiches der Messtechnik vernachlässigbar oder als zusätzliches, aber sehr kleines Rauschen angenommen werden [79].

---

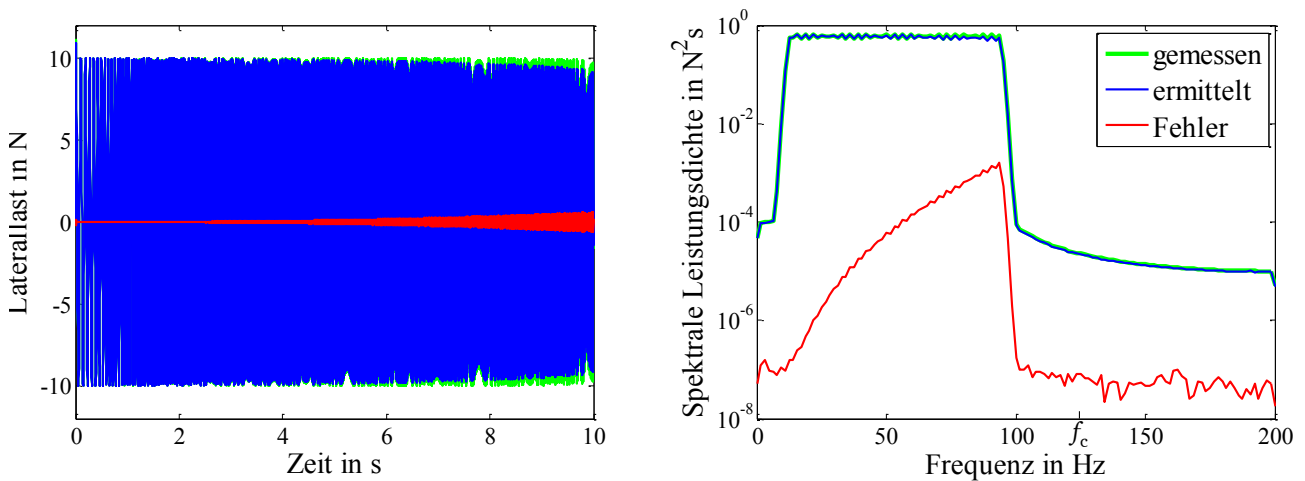
### Belastungsart 1: Gleitsinus

---

Als erstes Beispiel wird auf dem Balkensystem als Laterallast  $F_1(t)$  ein Gleitsinus

$$F_1(t) = |F_1| \sin\left(2\pi(f_{F,0} + (f_{F,1} - f_{F,0})t/t_s) \cdot t\right) \quad (5.2)$$

mit einer Amplitude  $|F_1| = 10$  N, einer Startfrequenz  $f_{F,0} = 10$  Hz und einer Endfrequenz  $f_{F,1} = 100$  Hz und einer Simulationsdauer  $t_s = 10$  s in der numerischen Simulation aufgebracht. Das Systemverhalten wird simuliert und die numerisch generierten Messsignale werden verwendet, um durch den Zustandsbeobachter die Belastung  $F_{1,e}(t)$  zu ermitteln. Folgende Abbildung 5.2 zeigt die gemessene Laterallast  $F_{1,m}(t)$  und die ermittelte Laterallast  $F_{1,e}(t)$  sowie den Fehler zwischen diesen im Zeit- und Frequenzbereich.



**Abbildung 5.2:** Gemessene und ermittelte Belastung sowie Fehler zwischen diesen für Gleitsinus, Darstellung im Zeit- und Frequenzbereich

Die Amplituden der gemessenen und ermittelten Laterallast stimmen weitestgehend überein. Mit zunehmender Frequenz steigt aber der Fehler zwischen der gemessenen und der ermittelten Laterallast an, wie in Abbildung 5.2 sowohl aus der Darstellung im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich hervor geht. Diese Abweichungen lassen sich auf den zunehmenden Einfluss der nächst höheren, nicht im mathematischen Modell zur Belastungsermittlung berücksichtigten Schwingungsmode zurückführen. Im hier beschriebenen Balkensystem ist dies die 3. Schwingungsmode. Mit zunehmender Frequenz lässt sich dieser Einfluss nicht mehr durch seinen statischen Anteil an der Gesamtverformung der Struktur durch die Durchgangsmatrix  $D_r$  des Zustandsraummodells (4.13) bis (4.14) beschreiben, sondern hat zunehmend einen dynamischen Einfluss auf das simulierte Messsignal. Der effektive relative Fehler beschreibt

nach (3.9) das Verhältnis des Effektivwerts des Fehlers zwischen gemessener und ermittelter Belastung und dem Effektivwert der gemessenen Belastung und beträgt für den untersuchten Fall  $U_{\text{eff}} = 2,1\%$ .

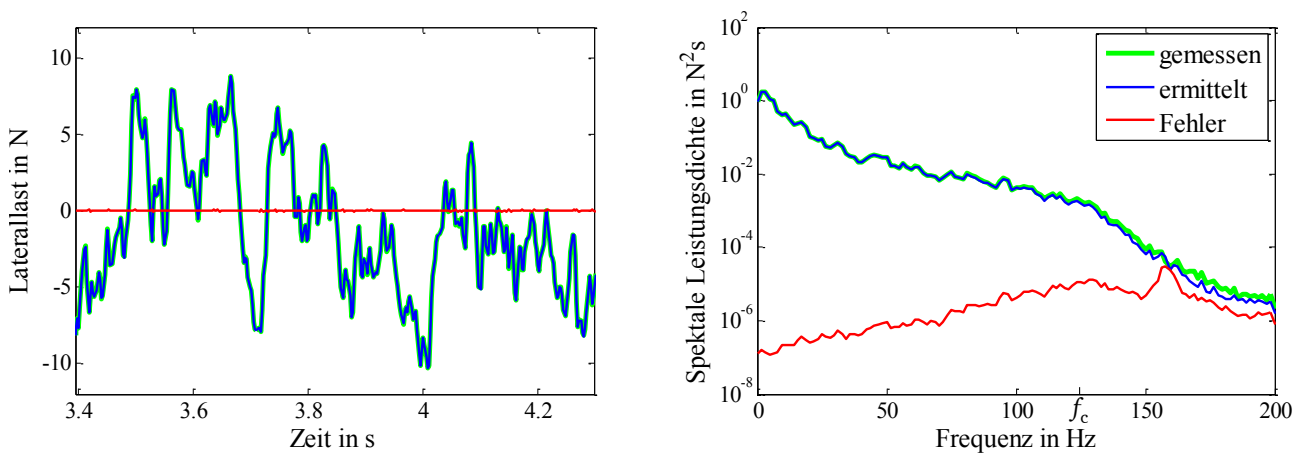
Darüber hinaus geht aus Abbildung 5.2 hervor, dass der Einfluss von Messrauschen auf die ermittelte Belastung für dieses Beispiel verschwindend gering ist. Im Frequenzbereich über 100 Hz sinkt die Spektrale Leistung des Fehlers um etwa 4 Dekaden ab auf ein über die Frequenz gleichmäßiges Niveau. Dieser Bereich über 100 Hz beschreibt den Einfluss des Messrauschens, denn der Gleitsinus liefert in diesem Bereich keinen Anteil mehr an der Gesamtleistung des Belastungssignals und somit auch des Fehlers.

---

### Belastungsart 2: Rosa $1/f$ -Rauschen

---

Oftmals kann als erste Annahme über das zu erwartende Belastungsspektrum  $S_{\text{FF}}(\Omega)$  der auf ein lasttragendes System wirkenden Belastungen ein rosa Rauschen mit einer Amplitude proportional zu  $1/f$  angenommen werden. Dieses trifft näherungsweise für reale stochastische Anregungen z. B. für eine Fußpunktanregung eines Fahrzeugs oder Flugzeugfahrwerks durch eine raue Fahrbahn [70] oder einer Windanregung [153] zu. Abbildung 5.3 zeigt einen Ausschnitt der tatsächlichen und ermittelten Belastungen im Zeitbereich und das tatsächliche und ermittelte Belastungsspektrum im Frequenzbereich für eine Simulationsdauer  $t_s = 50$  s.



**Abbildung 5.3:** Gemessene und ermittelte Belastung sowie Fehler zwischen diesen für rosa Rauschen, Darstellung im Zeit- und Frequenzbereich

Wie im vorherigen Beispiel stimmen die gemessenen und ermittelten Belastungen gut überein. Allerdings nimmt auch in diesem Beispiel der Fehler mit zunehmender Frequenz zu. Zusätzlich ist in Abbildung 5.3 in der Darstellung im Frequenzbereich erkennbar, dass bei etwa 160 Hz der Fehler am höchsten ist. Dieser resultiert, wie im vorherigen Beispiel, ebenfalls aus dem Schwingungsanteil der 3. Mode. Die Übertragungsfunktion des als real simulierten Balkensystems mit  $N = 63$  Moden besitzt bei dieser Frequenz ein Nullstelle, welche im reduzierten Modell mit  $N = 2$  Moden nicht vorhanden ist. Der relative effektive Fehler beträgt für den untersuchten Fall  $U_{\text{eff}} = 0,8\%$ .

---

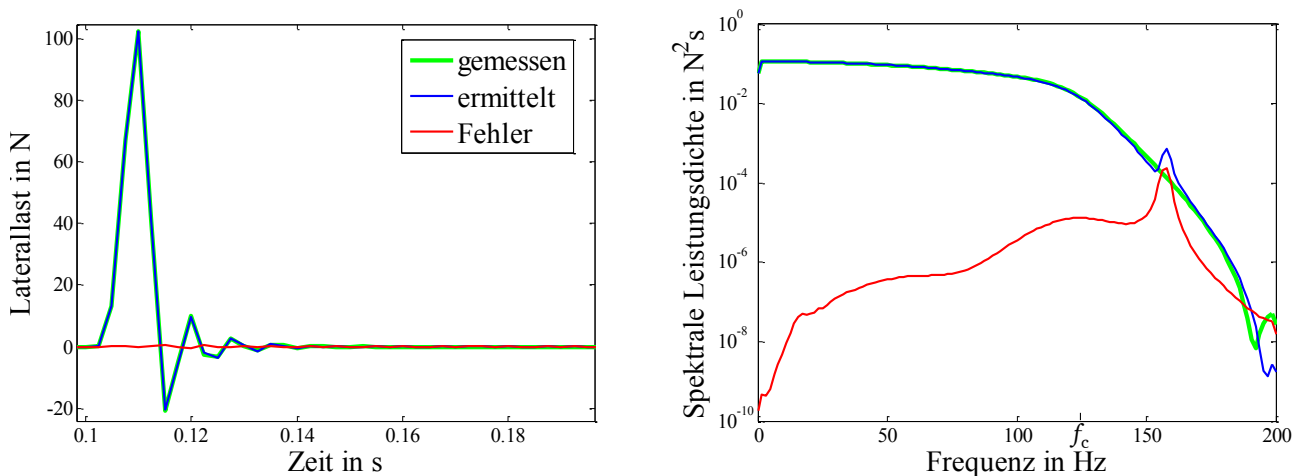
## Belastungsart 3: Rechteckimpuls

---

In diesem Anwendungsbeispiel wird als Laterallast ein Rechteckimpuls

$$F_1(t) = \begin{cases} |F| & \text{für } t_1 < t < t_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.3)$$

mit einer Amplitude  $|F| = 100$  N, dem Beginn des Rechteckimpulses an  $t_1 = 0.1$  s und Ende an  $t_2 = 0.105$  s für eine Simulationsdauer  $t_s = 1$  s simuliert. Abbildung 5.4 zeigt erneut die Belastungssignale und den Fehler im Zeit- und Frequenzbereich.



**Abbildung 5.4:** Gemessene und ermittelte Belastung sowie Fehler zwischen diesen für Rechteckimpuls, Darstellung im Zeit- und Frequenzbereich

Der für das reale System simulierte Rechteckimpuls wird durch die Tiefpassfilterung geglättet, der Rechteckimpuls schwingt durch die Filterung nach. Der relative effektive Fehler  $U_{\text{eff}} = 16,9\%$  ist für diesen Fall im Vergleich zum Gleitsinus und zum rosa  $1/f$ -Rauschens deutlich höher. Der Rechteckimpuls regt das System breitbandig an. Der für das rosa  $1/f$ -Rauschen diskutierte Anstieg des Fehlers bei 160 Hz ist für dieses Beispiel noch ausgeprägter, da die spektrale Leistungsdichte des Belastungssignals in diesem Frequenzbereich höher ist.

---

## Diskussion

---

Die drei Anwendungsbeispiele aus diesem Abschnitt 5.1 zeigen die grundlegende Funktionstauglichkeit des vorgestellten Zustandsbeobachters zur Ermittlung deterministischer, stochastischer und impulsförmiger Belastungen. In der numerischen Simulation wurde der Belastungsvorgang des Balkensystems simuliert und aus den simulierten, gemessenen Verformungen durch den Algorithmus die Belastung mit geringer Unsicherheit ermittelt. Die wesentliche Unsicherheit in der ermittelten Belastung entsteht durch eine Modellunsicherheit. Das reale, simulierte Balkensystem wird durch ein reduziertes Modell abgebildet. Es resultieren mit zunehmender Frequenz größere Fehler in den ermittelten Belastungen,

da der Einfluss der nächst höheren, im Modell nicht mehr berücksichtigten Mode auf das Schwingungsverhalten des Balkensystems mit zunehmender Frequenz zunimmt. Der Einfluss des Messrauschens auf die Unsicherheit in der ermittelten Belastung hingegen ist sehr gering, wie für Belastungsart 1 diskutiert. Dies ist auf die Funktionsweise des Zustandsbeobachters zurückzuführen, welcher eine optimale Ermittlung von Belastungen bei bekanntem Messrauschen ermöglicht. Darüber hinaus ermöglicht die Ensemblemittlung der vier Messsignale eine Reduktion der Auswirkung des Messrauschens, wie auch in Abschnitt 6.4 diskutiert wird. Eine detaillierte Diskussion unterschiedlicher potentieller Unsicherheiten erfolgt in Kapitel 6.

---

## 5.2 Fallbeispiel 2: Ermittlung mehrerer Laterallasten bei unbekanntem Lastort in der numerischen Simulation

---

In diesem Fallbeispiel wird der vorgestellte Projektionsansatz verwendet, um in der numerischen Simulation den Lastort und die Lasthöhe zweier dynamischer Lasten  $F_1(t)$  und  $F_2(t)$ , also  $N_F = 2$ , unter Verwendung von  $N_s = 4$  Weg- und Beschleunigungssensoren zu ermitteln.

Zur Ermittlung der unbekanntenen Lastorte wird der in Abschnitt 4.2.2 vorgestellte Zustandsbeobachter verwendet, um den modalen Belastungsvektor  $\mathbf{F}^g(t) \in \mathbb{R}^{N_s \times 1}$  zu ermitteln. Dazu werden die Steuermatrix  $\mathbf{B}_r$  und die Durchgangsmatrix  $\mathbf{D}_r$  aus (4.13) und (4.15) ersetzt durch

$$\mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s \Phi_c \Lambda_c \\ \mathbf{L}_s \Phi_r \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

mit  $\mathbf{B}_m, \mathbf{D}_m$  den Matrizen des modalen Zustandsraummodells, vergleiche (4.4). Mit dem Zustandsbeobachter werden unter Verwendung von  $N_s = 4$  Sensoren die ersten  $N_s = 4$  modalen Lasten  $F_i^g(t)$  des Balkensystems ermittelt. Der im vorherigen Abschnitt 4.3.1 verwendete Ursache-Wirkungsbezug ist für dieses Beispiel das algebraische Gleichungssystem zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen modalen Belastungen  $\mathbf{F}^g(t)$  und realen physikalischen Belastungen  $\mathbf{F}(t)$  durch die Modalmatrix  $\Phi_r$  nach (4.4)

$$\mathbf{F}^g(t) = \Phi_r^T \mathbf{F}(t) \quad (5.5)$$

gegeben. Zur Ermittlung des Lastortes der lateralen Belastung wird die Selektionsmatrix  $\mathbf{L}_{F,lm}$  verwendet, um die  $l$ -te und  $m$ -te Zeile der Modalmatrix zu selektieren,

$$\Phi_{F,lm} = \mathbf{L}_{F,lm} \Phi_r \quad \text{mit} \quad L_{F,lm,ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x_{F,lm,i}^k = 2j - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (5.6)$$

wobei alle Kombinationen  $l, m$  der potentiellen Lastorte möglich sind, also  $x_{F,lm,1}^k = l, l \in \{1, 2, \dots, N_K\}$  und  $x_{F,lm,2}^k = m, m \in \{1, 2, \dots, N_K\}, m \neq l$ . Der Projektionsfehler

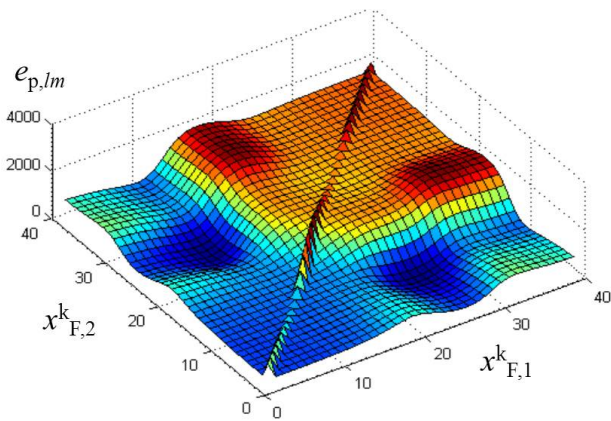
$$e_{p,lm}(k) = \|(\mathbf{I} - \Phi_{F,lm}^T (\Phi_{F,lm}^T)^+) \mathbf{F}_e^g(k)\| \quad (5.7)$$

der diskreten ermittelten modalen Belastungen  $\mathbf{F}_e^g(k)$  ist somit abhängig von der Kombination der zwei potentiellen Lastorte.

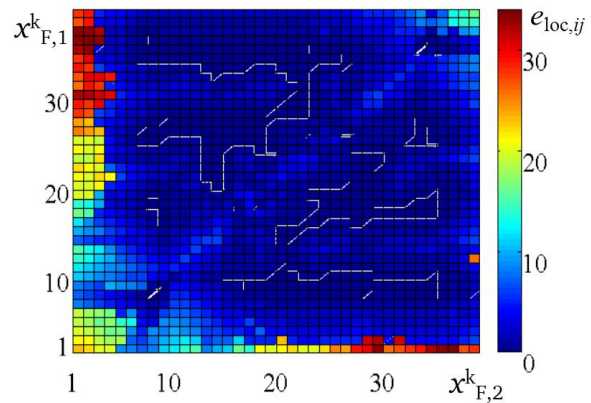


in diesem Beispiel für die Laterallast  $F_1(t)$  ein Gleitsinus mit einer Amplitude von  $|F_1| = 5$  N in einem Frequenzbereich von 10 Hz bis 100 Hz, für die Laterallast  $F_2(t)$  ein Gleitsinus mit einer Amplitude von  $|F_2| = 3$  N in einem Bereich von 30 Hz bis 60 Hz verwendet. Die Simulationsdauer beträgt  $t_s = 10$  s.

Abbildung 5.6 zeigt den Projektionsfehler  $e_{p,lm}$  für den konkreten Fall einer Laterallast  $F_1(t)$  an  $x_{F,1}^k = 10$  und  $F_2(t)$  an  $x_{F,2}^k = 25$ . Die Fehlerfläche des Projektionsfehlers ist symmetrisch, die Lastorte von  $F_1$  und  $F_2$  sind gleichwertig und vertauschbar. Darüber hinaus fällt auf, dass die Fehlerfläche nicht konvex ist. Soll das Minimum des Projektionsfehlers  $e_{p,lm}$  durch einen Optimierungsalgorithmus gefunden werden, führt dies zu zusätzlichen Schwierigkeiten, z. B. das Auffinden lokaler Minima. Eigene numerische Untersuchungen haben gezeigt, dass durch eine heuristische Vorabschätzung des Lastortes und der Verwendung einer Straffunktion die Optimierung in lokale Nebenminima in den meisten Fällen vermieden werden kann. Trotzdem soll in dieser Arbeit der Einfachheit halber das Minimum des Projektionsfehlers durch Suche des Minimums des Projektionsfehlers für alle Kombinationen  $l, m$  ermittelt werden. Es sei darauf hingewiesen, dass dieses Vorgehen für eine hohe Anzahl an potentiellen Lastorten und mehreren Belastungen aufgrund der daraus resultierenden sehr hohen Anzahl an Kombinationsmöglichkeiten für eine Echtzeitanwendung des Algorithmus nicht praktikabel ist.



**Abbildung 5.6:** Projektionsfehler  $e_{p,lm}$  bei tatsächlicher Belastung an  $x_{F,1}^k = 10$  und  $x_{F,2}^k = 25$



**Abbildung 5.7:** Ortsschätzfehler  $e_{loc,ij}$  für alle möglichen Kombinationen aus Lastorten  $x_{F,1}^k$  und  $x_{F,2}^k$

Abbildung 5.7 zeigt den Ortsschätzfehler  $e_{loc,ij}$  als Summe des Fehlers zwischen den tatsächlichen Orten  $x_{F,1}^k = i$  und  $x_{F,2}^k = j$  und den durch den Algorithmus ermittelten Lastorten  $x_{F,e,1}^k$  und  $x_{F,e,2}^k$  für alle möglichen Kombinationen aus tatsächlichen Lastorten  $x_{F,1}^k$  und  $x_{F,2}^k$ :

$$e_{loc,ij} = \sum_{k=1}^2 |x_{F,k}^k - x_{F,e,k}^k| \quad \text{für } x_{F,1}^k = i \text{ und } x_{F,2}^k = j. \quad (5.11)$$

Beträgt beispielsweise der Betrag der Abweichung zwischen den tatsächlichen und den ermittelten Lastorten  $|x_{F,1}^k - x_{F,e,1}^k| = 2$  und  $|x_{F,2}^k - x_{F,e,2}^k| = 3$ , so ist  $e_{loc,ij} = 5$ .

Für die meisten Kombinationen ist der Ortsschätzfehler  $e_{loc,ij} = 0$ . Die beiden Lastorte wurden dann durch den Algorithmus richtig ermittelt. Lediglich an den Rändern der festen oder gelenkigen Lagerung entstehen höhere Abweichungen zwischen den tatsächlichen und den ermittelten Lastorten. Dies



könnte darin begründet liegen, dass eine Laterallast in diesem Bereich nur geringe Auswirkung auf die Verformung hat. Unsicherheit in den Messsignalen sowie Modellunsicherheit wirkt sich dann stärker auf das Berechnungsergebnis aus. Nahe beieinander liegende Laterallasten  $F_1(t)$  und  $F_2(t)$  haben ebenfalls erkennbare Abweichungen, da sie sehr ähnliche Verformungen hervor rufen, wodurch nicht mehr gut zwischen den beiden Belastungen unterschieden werden kann. An diesen Stellen ist die Problemstellung schlecht konditioniert. Insgesamt ist aber der Ortsschätzfehler bis auf einige Fälle an den Rändern nicht größer als 5. Der Lastort wird also durch den vorgestellten Algorithmus gut ermittelt.

**Beitrag zur Beherrschung von Unsicherheit:** Durch das vorgestellte Verfahren zur Ermittlung des Lastortes wird Unsicherheit beherrscht, indem die vorher unbekanntes Lastorte bestimmt und so die Lasthöhe an diesen überhaupt erst ermittelt werden kann.

---

### 5.3 Fallbeispiel 3: Ermittlung von parametrisierten Systemeigenschaftsänderung bei unbekannter Belastung in der numerischen Simulation

---

Verfahren zur Ermittlung von Systemeigenschaften verwenden üblicherweise gemessene Ein- und Ausgangsgrößen des Systems. In der Nutzung ist allerdings die tatsächliche Belastung im Allgemeinen nicht bekannt, sondern kann nur z. B. durch ein Lastmonitoring-System indirekt ermittelt werden. Ändern sich die Systemeigenschaften im Betrieb, beispielsweise durch lokale Schädigung oder Masseänderungen, ist aber die ermittelte Belastung in Abhängigkeit der Systemeigenschaftsänderung unsicherheitsbehaftet und eignet sich somit nicht zur klassischen Systemidentifikation.

In diesem Fallbeispiel wird der vorgestellte Projektionsansatz am Balkensystem angewendet, um in der numerischen Simulation eine lokale Systemeigenschaftsänderung ohne Kenntnis der Belastungen zu ermitteln. Es handelt sich somit nach Abschnitt 3.2.1 um ein gemischtes Inverses Problem. Sind die Systemeigenschaftsänderungen bekannt, lassen sich anschließend mit dem Zustandsbeobachter die Belastungen ermitteln. Das gemischte Inverse Problem kann also in zwei Teilprobleme aufgetrennt werden. Als Systemeigenschaftsänderung wird angenommen, dass auf dem Balken eine Zusatzmasse  $\Delta m$  an einen unbekanntes Ort  $x_{\Delta m}$  angebracht wird. Im Gegensatz zu einer Steifigkeitsänderung durch eine lokale Schädigung wird so eine experimentelle Validierung des vorgestellten Verfahrens mit überschaubarem Versuchsaufwand für unterschiedliche lokale Systemeigenschaftsänderungen möglich.

Das in diesem Abschnitt vorgestellte Verfahren basiert auf der Virtual Distortion Method nach HOLNICKI-SZULC von 1995 [74]. Diese Methode wurden von ZHANG 2012 in numerischen und experimentellen Simulationen zur Ermittlung von Steifigkeits- und Masseänderungen validiert [152]. ZHANG geht allerdings stets davon aus, dass die Struktur zu Beginn des zeitlichen Betrachtungshorizontes in ihrer Ruhelage ist, die Anfangsbedingungen sind Null,  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ . Dies ist in der realen Nutzung eines lasttragenden Systems selten der Fall. In dieser Arbeit wird die Methode derart erweitert, dass gerade eben die Voraussetzung  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$  nicht mehr nötig ist. Somit ist die Methode auch tauglich zur Ermittlung von Systemeigenschaftsänderungen während der Nutzung.

Die Anwendung lässt sich wie folgt charakterisieren:

- Der Lastort  $x_F$  ist bekannt.

- Es wird in der numerischen Simulation eine diskrete Zusatzmasse  $\Delta m$  an einem Knoten  $x_{\Delta m}^k$  des Balkenmodells angebracht.
- Zur Ermittlung der Systemeigenschaftsänderung wird das Impulsantwort-Modell nach Abschnitt 4.1.3 verwendet. Der wesentliche Vorteil dieses Modells ist, dass die Anzahl der berücksichtigten Moden  $N_r$  im Modell unabhängig von der Anzahl der Messfreiheitsgrade  $N_s$  gewählt werden kann. Darüber hinaus lässt sich der zeitliche Betrachtungshorizont des Modells  $N_v$  frei wählen. Diese beiden Eigenschaften des Impulsantwort-Modells ermöglichen es, dass deutlich mehr Informationen zur Ermittlung der Systemeigenschaftsänderung gleichzeitig berücksichtigt werden können als bei der Verwendung des Zustandsraummodells oder von ermittelten modalen Parametern.
- Wie bei der Ermittlung des Lastortes und der Lasthöhe in Abschnitt 5.2 wird zunächst der Ort  $x_{\Delta m}^k$  und dann die Höhe  $\Delta m$  der Zusatzmasse ermittelt.
- Der Zusammenhang zwischen den zu ermittelnden Systemeigenschaftsänderungen und den beobachtbaren Auswirkungen wird linearisiert abgebildet. Es ist zu erwarten, dass durch diese Linearisierung ein Fehler in den ermittelten Systemeigenschaften entsteht, der aber durch eine iterative Vorgehensweise verringert werden kann, vgl. [152].

---

## Mathematische Grundlagen der Virtual Distortion Method

---

Zur Beschreibung der Auswirkung einer Systemeigenschaftsänderung durch eine zusätzliche diskrete Masse wird das Differentialgleichungssystem (4.1) um die Änderung der Massenmatrix  $\Delta \mathbf{M}$  erweitert<sup>1</sup>,

$$(\mathbf{M} + \Delta \mathbf{M})\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t). \quad (5.12)$$

Die Systemeigenschaftsänderung wird auf die rechte Seite als Pseudo-Lastvektor  $\mathbf{F}^v(t)$  gebracht,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{F}^v(t), \quad (5.13)$$

wobei der Pseudo-Lastvektor infolge der Masseänderungen durch den Beschleunigungsvektor des unveränderten Systems beschrieben werden kann,

$$\mathbf{F}^v(t) = -\Delta \mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}(t). \quad (5.14)$$

Für eine Masseänderung  $\Delta m$  an einem Knoten  $x_{\Delta m}^k = j$  des Balkensystems lässt sich (5.14) schreiben als

$$F_j^v(t) = -\Delta m \cdot \ddot{r}_{2j-1}(t). \quad (5.15)$$

Es greift also eine Pseudo-Last  $F_j^v(t)$  am Knoten  $x_{\Delta m}^k = j$  an, die abhängig von den translatorischen Beschleunigungen  $\ddot{r}_{2j-1}(t)$  an diesem Knoten ist.

---

<sup>1</sup> Prinzipiell lässt sich die Virtual Distortion Method auch bei Steifigkeitsänderungen anwenden, siehe [74] und [152]

Die Auswirkung einer Masseänderung auf die Systemeigenschaften kann also durch die Pseudo-Last  $F_j^y(t)$  beschrieben werden. Eine Neuformulierung des Differentialgleichungssystems (5.12) für alle potentiellen Systemeigenschaftsänderungen ist somit nicht nötig, es kann für weitere Analysen das unveränderte Ausgangssystem (4.1) verwendet werden und die Auswirkungen der Systemeigenschaftsänderung durch die Pseudo-Lasten zusätzlich berücksichtigt werden. Der Eintrag der Pseudo-Last in die Systemeigenschaften des veränderten Systems wird im Folgenden anhand des Impulsantwortmodells beschrieben, vgl. Abschnitt 4.1.3.

Es wird zunächst angenommen, die Anfangsbedingungen seien null,  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ . Die Impulsantwort eines dynamischen Systems lässt sich zeitkontinuierlich durch seine kontinuierliche Gewichtsfunktion  $g(t)$  beschreiben, vgl. Abschnitt 4.1.3. Die Impulsantwort an der Messstelle  $x_s^k = i$  infolge einer äußeren Last  $F_l(t)$  an dem Knoten  $x_F^k = l$  des durch eine Zusatzmasse  $\Delta m$  am Knoten  $x_{\Delta m}^k = j$  veränderten Systems  $g_{il}^*(t)$  lässt sich durch die Addition der Impulsantwort des unveränderten Systems  $g_{il}^0(t)$  und der Auswirkung der Pseudo-Last  $F_j^y(t)$  beschreiben zu

$$g_{il}^*(t) = g_{il}^0(t) + \int_0^t g_{ij}(t - \tau) F_j^y(\tau) d\tau. \quad (5.16)$$

Hierin ist  $g_{ij}(t)$  die kontinuierliche Gewichtsfunktion der Pseudo-Last  $F_j^y(t)$  am Knoten  $x_{\Delta m}^k = j$  auf die Impulsantwort an der Messstelle  $x_s^k = i$ .

Durch eine Diskretisierung von (5.16) erhält man die diskrete Impulsantwort. Diese wird verwendet, um die Toeplitz-Matrix  $\mathbf{T}$  zu bilden, vgl. Abschnitt 4.1.3. Sie beschreibt den Zusammenhang zwischen den äußeren Lasten  $\underline{\mathbf{F}}$  und den Sensorsignalen  $\underline{\mathbf{y}}$  in Abhängigkeit von der angenommenen Masseänderung  $\Delta m$

$$\underline{\mathbf{y}}(\Delta m) = \mathbf{T}(\Delta m) \underline{\mathbf{F}}, \quad (5.17)$$

wobei  $\underline{\mathbf{F}}$  und  $\underline{\mathbf{y}}$  die äußeren Lasten und Sensorsignale im zeitlich diskreten Betrachtungshorizont  $N_v$  sind, vgl. Abschnitt 4.1.3.

Ist die Anzahl der Belastungen  $N_F$  kleiner als die Anzahl der Sensorsignale  $N_s$ , lassen sich die Sensorsignale  $\underline{\mathbf{y}}(\Delta m)$  des veränderten Systems aus den gemessenen Sensorsignalen  $\underline{\mathbf{y}}^m$  berechnen zu

$$\underline{\mathbf{y}}(\Delta m) = \mathbf{T}(\Delta m) \mathbf{T}^+(\Delta m) \underline{\mathbf{y}}^m, \quad (5.18)$$

wodurch die unbekanntnen Belastungen  $\mathbf{F}$  eliminiert wurden. Die einzige Unbekannte in (5.18) ist die Masseänderung  $\Delta m$ . Für  $N_F \geq N_s$  wird unabhängig von  $\Delta m$  immer  $\underline{\mathbf{y}}(\Delta m) = \underline{\mathbf{y}}^m$  sein, (5.18) enthält dann keinerlei brauchbaren Informationen über die Systemeigenschaftsänderung. Die Anzahl an diskreten Belastungen  $N_F$  muss also für die Funktionstauglichkeit des Algorithmus stets kleiner als die Anzahl an Sensoren  $N_s$  sein.

Ist eine tatsächliche Masseänderung  $\Delta m = 0$ , gilt  $\underline{\mathbf{y}}(\Delta m = 0) = \underline{\mathbf{y}}^m$ . Für  $\Delta m \neq 0$  entsteht ein Fehler

$$e_i(k) = y_i(k, \Delta m) - y_i^m(k) \quad (5.19)$$

für das  $i$ -te Sensorsignal  $y_i^m(k)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, N_s\}$  zu den diskreten Zeitpunkten  $k = \{1, 2, \dots, N_v\}$ . Dieses lässt sich verwenden, um ein relatives skalares Fehlermaß für das  $i$ -te Sensorsignal  $e_{r,i}$  zu bilden mit

$$e_{r,i} = \frac{\sigma(e_i(k))}{\sigma(y_i^m(k))}. \quad (5.20)$$

Mit (5.18) und (5.20) lässt sich also die Auswirkung der Masseänderung  $\Delta m$  auf den Fehler  $e_{r,i}$  beschreiben. Die tatsächliche Masseänderung  $\Delta m$  ist aber unbekannt, ebenso ist der Knoten  $x_{\Delta m}^k$  unbekannt. Es können nun unter Verwendung von (5.18) und (5.20) die Sensitivitäten des Fehlers  $e_{r,i}$  gegenüber einer Masseänderung  $\Delta m_j$  geschrieben werden als

$$\left. \frac{\partial e_{r,i}}{\partial (\Delta m_j)} \right|_{\Delta m_j=0} \Delta m_j = e_{r,i} \quad (5.21)$$

mit  $\Delta m_j$  einer Masseänderung am Knoten  $x_{\Delta m}^k = j$ . (5.21) lässt sich als algebraisches Gleichungssystem zur lokal-linearen Beschreibung des Ursache-Wirkungsbezug schreiben, vgl. (4.34) in Abschnitt 4.3.1,

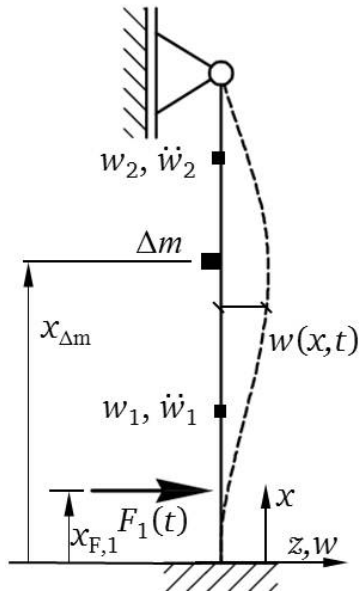
$$\mathbf{S}^e \Delta \mathbf{m} = \mathbf{e}_r, \quad (5.22)$$

wobei  $\mathbf{S}^e \in \mathbb{R}^{N_k \times N_y}$  die Sensitivitätsmatrix mit  $S_{ij}^e = \frac{\partial e_{r,i}}{\partial \Delta m_j}$  beschreibt und die Vektoren  $\Delta \mathbf{m}$  und  $\mathbf{e}_r$  die entsprechenden Masseänderungen an den Knoten bzw. Fehlermaße für die Sensorsignale beschreibt. In dieser Arbeit wird die Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{S}^e$  durch den zu (5.21) äquivalenten Differenzenquotienten in der numerischen Simulation ermittelt.

Da üblicherweise  $N_k > N_s$ , liegt bei der Ermittlung der  $N_k$  potentiellen Masseänderungen im Vektor  $\Delta \mathbf{m}$  aus den  $N_s$  ermittelten Fehlern im Vektor  $\mathbf{e}_r$  erneut ein unterbestimmtes Inverses Problem vor. Dieses kann unter der Annahme, dass nur an einer Stelle des Balkens tatsächlich eine Masseänderung vorliegt, mit dem in Abschnitt 4.3.1 vorgestellten Projektionsansatz gelöst werden. Es wird also zuerst der Ort  $x_{\Delta m}^k$  und dann die Höhe  $\Delta m$  der Masseänderung ermittelt.

Es besteht nun noch die Frage, wie mit den unbekanntem Anfangsbedingungen  $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{0}$ ,  $\nu_0 \neq \mathbf{0}$  zu Beginn des zeitlichen Betrachtungshorizontes des Impulsantwortmodells umgegangen werden kann. Die Anfangsbedingungen beeinflussen die Sensorsignale, vgl. (4.19), sind aber nicht bekannt und nicht durch einen Zustandsbeobachter zu ermitteln. Zur statistischen Mittelung des Einflusses der unbekanntem Anfangsbedingungen werden in dieser Arbeit, ähnlich wie beim ERA-Algorithmus [84], die Sensorsignale  $\mathbf{y}(k)$  in einem gleitenden Fenster mit einer diskreten Fouriertransformation in den Frequenzbereich übertragen und dort gemittelt. Der gemittelte Frequenzinhalt der Sensorsignale wird dann durch eine inverse diskrete Fouriertransformation zurück in den Zeitbereich übertragen, wodurch die Anfangsbedingungen eliminiert wurden. Im Gegensatz zu der Anwendung von ZHANG [152] ist es somit auch möglich, Sensorsignale während der Nutzung des lasttragenden Systems zur Ermittlung von Systemeigenschaftsänderungen zu verwenden. Der zeitliche Betrachtungshorizont der diskreten Impulsantwort kann kleiner gewählt werden, wodurch der numerische Aufwand zur Lösung von (5.18) reduziert wird. Darüber hinaus kann durch dieses Vorgehen die Auswirkung von Messrauschen auf die Sensorsignale statistisch gemittelt werden.

Die vorgestellte Methode wird zunächst in der numerischen Simulation erprobt. Abbildung 5.8 auf der folgenden Seite zeigt erneut das Balkensystem, Tabelle 5.3 listet die Parameter des Simulationsmodells.



Anzahl an Knoten $N_k$	41
Ordnung des vollständigen Modells $N$	79
Ordnung des reduzierten Modells $N_r$	6
Anzahl an Messfreiheitsgraden $N_s$	2
Anzahl der Stellen d. Impulsantwort $N_V$	500
Sensorpositionen an Knoten $x_{s,i}^k$	15, 29
Intensität des Messrauschen	5%
6. Eigenfrequenz $\omega_6/(2\pi)$ d. Balkens	897 Hz
Abtastfrequenz $f_a$	5 kHz
Filtereckfrequenz $f_c$	833 Hz
Simulationsfrequenz $f_s$	10 kHz
Lastort $x_{F,1}$	33 mm
Laterallast $F_1(t)$	rosa Rauschen

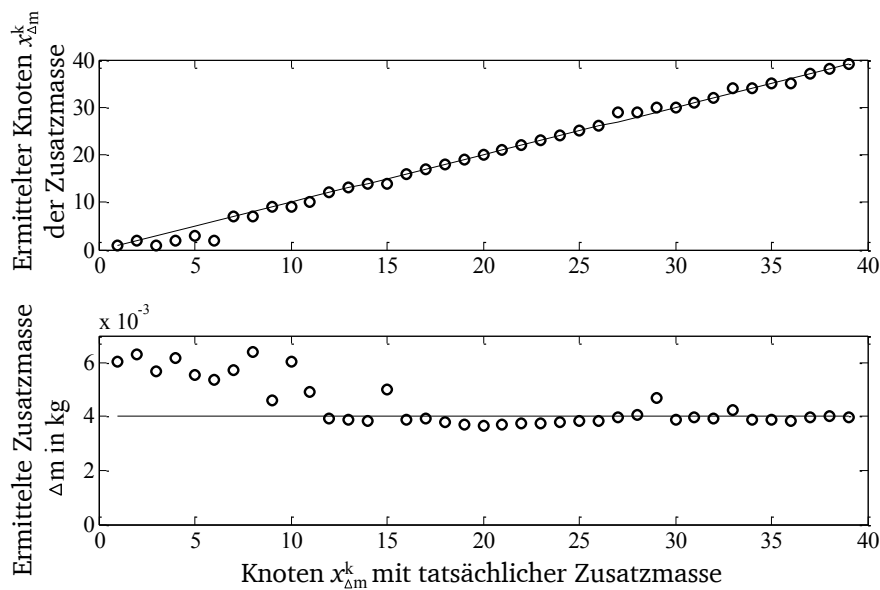
**Abbildung 5.8:** Prinzipskizze des Balkensystems für Fallbeispiel 3

**Tabelle 5.3:** Konkrete Eigenschaften des Balkensystems für Fallbeispiel 3, sofern nicht angegeben in Tabelle 3.1

Es wird angenommen, dass an einem Knoten  $x_{\Delta m}^k$  des Balkenmodells eine Zusatzmasse von  $\Delta m = 4 \cdot 10^{-3}$  kg angebracht wird. Im Vergleich dazu wiegt der Balken  $52,1 \cdot 10^{-3}$  kg. Es werden an zwei Orten des Balkens die simulierten Auslenkungen  $w_1(t)$  und  $w_2(t)$  und Beschleunigungen  $\dot{w}_1(t)$  und  $\dot{w}_2(t)$  gemessen, wobei ein gaußverteilt Messrauschen addiert wird. Die Simulationsdauer beträgt  $t_s = 20$  s. Zur Bildung der Differenzenquotienten für die Sensitivitätsmatrix  $S^e$  zur Beschreibung der Zusammenhänge zwischen der Masseänderung  $\Delta m$  und dem resultierenden Fehler  $e_r$  nach (5.21) wird eine Masseänderung von  $1 \cdot 10^{-3}$  kg angenommen. Da diese kleiner als die tatsächliche Zusatzmasse  $\Delta m = 4 \cdot 10^{-3}$  kg ist, ist zu erwarten, dass ein Linearisierungsfehler entsteht.

Abbildung 5.9 auf der folgenden Seite zeigt oben die jeweils ermittelten Knoten  $x_{\Delta m}^k$  und unten die ermittelte Höhe  $\Delta m$  der Zusatzmasse für alle möglichen Fälle einer tatsächlichen Zusatzmasse an einem Knoten. Die durchgehende Linie zeigt jeweils den Referenzwert, also den tatsächlichen Knoten bzw. die tatsächliche Höhe der Zusatzmasse.

Der Knoten  $x_{\Delta m}^k$  und die Zusatzmasse  $\Delta m$  werden für die meisten Fälle gut ermittelt. Lediglich im Bereich der festen Einspannung nahe  $x^k = 1$  und am Knoten  $x^k = 15$  und  $x^k = 29$  weisen höhere Abweichungen zwischen den ermittelten und den tatsächlichen Größen auf. Die Abweichungen sind einerseits auf den linearisierten Ursache-Wirkungszusammenhang zwischen der Masseänderung  $\Delta m$  und dem daraus resultierenden Fehler  $e_r$  durch die Sensitivitätsmatrix  $S^e$  zurück zu führen. Andererseits sind



**Abbildung 5.9:** Ermittlung von Ort und Höhe einer Zusatzmasse  $\Delta m$  für alle potentielle Knoten  $x_{\Delta m}^k$

die Pseudo-Lasten  $F^V(t)$  im Bereich der festen Einspannung niedrig, da dort die Beschleunigungsamplituden im Vergleich zur Mitte des Balkens gering sind. Die Zusatzmasse  $\Delta m$  hat somit nur geringe Auswirkung auf den Fehler  $e_r$ . Die Ergebnisse der numerischen Simulation in diesem Abschnitt zeigen das Potential der vorgestellten Methode.

**Beitrag zur Beherrschung von Unsicherheit:** Durch das vorgestellte Verfahren zur Ermittlung von Systemeigenschaftsänderungen wird Unsicherheit beherrscht, indem veränderliche tatsächliche Systemeigenschaften bekannt gemacht werden. Das mathematische Modell zum Lastmonitoring kann dann an die ermittelten Systemeigenschaften angepasst werden, wodurch die Unsicherheit in der ermittelten Belastung nicht mehr von den Systemeigenschaftsänderungen abhängt.

Anmerkungen zu dem vorgestellten Verfahren der Virtual Distortions:

- Das vorgestellte Verfahren ist übertragbar auf mechanische Schädigungen, z. B. Pseudo-Lasten durch atmenden Riss, vgl. [74].
- Es besteht ein hoher rechnerischer Aufwand bei der Differenzenbildung zur Erlangung der Sensitivitäten des Ersatzmodells (5.22) und Lösung des großen Gleichungssystems (5.18). Formfunktionen zur Abbildung der Schwingungssignale und der Impulsantworten z. B. durch Polynome oder Wavelets können den Rechenaufwand enorm verringern [152].
- Zur Beschreibung der Auswirkung einer Systemeigenschaftsänderung auf ein Sensorsignal wird in dieser Arbeit ein einzelnes skalares Fehlermaß verwendet. Es besteht ein Verbesserungspotential durch die Abbildung der parametrisierten Systemeigenschaftsänderung und der zu analysierenden Sensorsignale im Frequenzbereich. Dadurch würden zur Analyse mehr Informationen zur Verfügung stehen, was insbesondere bei der gleichzeitigen Ermittlung mehrerer diskreter Systemeigenschaftsänderungen die Analyseergebnisse deutlich verbessern dürfte. Dieser Ansatz bleibt aber im Rahmen dieser Arbeit nur ein Ausblick.

---

## 6 Untersuchung und Anwendung unsicherheitsminimierender Maßnahmen

---

Mit den bisherigen Darstellungen in dieser Arbeit stehen wesentliche Werkzeuge zur Realisierung eines Lastmonitoring-Systems und die Grundlagen zur Beherrschung von Unsicherheit, die bei der Anwendung eines Lastmonitoring-Systems auftreten kann, zur Verfügung. Zum Lastmonitoring werden ein mathematisches Modell zur Abbildung der dynamischen Eigenschaften des lasttragenden Systems, Messsignale lokaler Zustände der Struktur, z. B. Weg-, Dehnungs- oder Beschleunigungssignale, und eine geeignete Informationsverarbeitung benötigt. Durch das Lastmonitoring lässt sich Unsicherheit in der Kenntnis des tatsächlichen und individuellen Belastungszustandes eines lasttragenden Systems reduzieren. Prinzipbedingt wird es aber nicht möglich sein, die tatsächlichen Belastungen zu ermitteln. Unsicherheit, die in den Prozessen eines Lastmonitoring-Systems auftreten kann, führt dazu, dass die ermittelten Belastungen praktisch niemals den tatsächlichen Belastungen entsprechen. In diesem Kapitel werden Maßnahmen zur Beschreibung, Bewertung und positiven Beeinflussung der Unsicherheit in den ermittelten Belastungen untersucht. In Kapitel 8.1 werden dann die Auswirkungen von Unsicherheit und unsicherheitsminimierender Methoden und Maßnahmen in einer übergreifenden Betrachtung qualitativ und quantitativ zusammengefasst und miteinander verglichen.

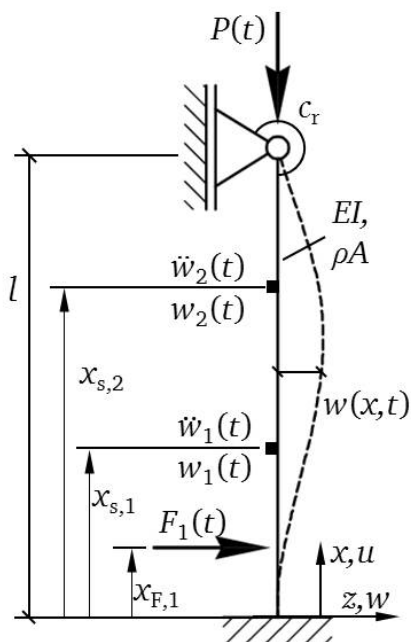
Nach der Arbeitshypothese aus Abschnitt 3.2.2 ist ein Lastmonitoring-System dann unsicherheitsminimiert, wenn:

1. es eine eindeutige Lösung der Inversen Problemstellung ermöglicht,
2. gegebene Störgrößen sich möglichst gering auf die ermittelten Belastungen auswirkt und
3. die nicht vermeidbare oder vermiedene Unsicherheit quantifiziert und dokumentiert wird.

Mathematische Methoden und Techniken zur eindeutigen Lösung Inverser Problemstellungen (Punkt 1) wurden bereits in Kapitel 4 vorgestellt. In diesem Kapitel werden zur Erfüllung von Punkt 2 und Punkt 3 einzelne Maßnahmen vorgestellt, diskutiert und in analytischen, numerischen und experimentellen Simulationen untersucht. Die Erläuterung der einzelnen Methoden erfolgt am Beispiel des Balkensystems. Dabei sollen insbesondere folgende Fragestellungen zu Teilproblemstellungen der Beherrschung von Unsicherheit in einem Lastmonitoring-System beantwortet werden:

- In welchem Frequenzbereich müssen Belastungen ermittelt werden und welche Modellordnung leitet sich daraus ab?
- Welche Sensoren eignen sich zum Lastmonitoring? Wo werden idealerweise Sensoren platziert und wie viele?
- In welchem Rahmen können Steuergrößen sinnvollerweise variiert werden und welche Konfiguration der digitalen Signalverarbeitung liefern unsicherheitsminimierende Ergebnisse des Lastmonitoring?
- Wie wirkt sich Unsicherheit in den Parametern des mathematischen Modells aus?
- Wie lässt sich Modellunsicherheit ermitteln und bewerten?

Folgende Abbildung 6.1 zeigt erneut das Balkensystem, die nebenstehende Tabelle 6.1 zeigt die angenommenen Eigenschaften des Systems für die Untersuchungen in diesem Kapitel. Die als "variabel" gekennzeichneten Eigenschaften stehen dabei für Steuergröße. Diese können in einem bestimmten Bereich variiert werden. Somit kann die Beeinflussung der Wahl der Steuergrößen auf die Unsicherheit in den ermittelten Belastungen untersucht werden. Als Belastungsspektrum wird für alle Untersuchungen ein stochastisches Belastungssignal verwendet, entweder als bandbegrenzttes weißes Rauschen oder als rosa  $1/f$ -Rauschen. Dadurch stehen für einen Simulationsdurchlauf ausreichend Informationen zur statistischen Bewertung der Unsicherheit durch das skalare Unsicherheitsmaß des relativen effektiven Fehlers  $U_{\text{eff}}$ , aber auch für Analysen im Frequenzbereich zur Verfügung. Darüber hinaus ist das rosa  $1/f$ -Rauschen eine gute erste Annahme eines realistischen Belastungsspektrums, wie bereits in Abschnitt 5.1 für das Fallbeispiel 1 zur Belastungsart 2 argumentiert. Es werden in den numerischen Simulationen Weg- und Beschleunigungssensoren verwendet. Diese können kollokiert positioniert werden, denn die Bewertung der Sensorposition erfolgt für beide Sensorarten auf Basis der Auslenkungseigenvektoren. So wird die Anzahl an möglichen Kombinationen von Sensorpositionen im Vergleich zur Verwendung von Dehnungs- und Beschleunigungssensoren deutlich reduziert, vgl. Abschnitt 6.2 und 6.4.



Anzahl an Knoten $N_k$	41
Anz. an Moden d. vollen Modells $N$	75
Anz. an Moden d. red. Modells $N_r$	variabel: 2-3 (2)
Anzahl an Sensoren $N_s$	variabel: 2-5 (2)
Sensorposition $x_{s,i}$ in mm	variabel (115, 223)
Masse Sensor $m_s$	5,6 g
Intensität des Messrauschen	5%
1. Eigenfrequenz $f_1$ d. Balkens	25,1 Hz
2. Eigenfrequenz $f_2$ d. Balkens	90,8 Hz
Simulationsfrequenz $f_s$	10 kHz
Abtastfrequenz $f_a$	variabel (400 Hz)
Filtereckfrequenz $f_c$	variabel (125 Hz)
Lastort $x_{F,1}$	33 mm
Belastungsart	Stochastisch
Axiallast $P$	20 N

**Abbildung 6.1:** Prinzipskizze des Balkensystem für Anwendungsbeispiel 1

**Tabelle 6.1:** Eigenschaften des Balkensystems für Methodenuntersuchungen, sofern nicht angegeben in Tabelle 3.1

Die Untersuchungen in diesem Kapitel finden zunächst auf analytischer Ebene statt, dann in numerischen Simulationen und letztendlich in experimentellen Simulationen. Die Erkenntnisse einer jeden Untersuchung können somit nach und nach in die folgenden Untersuchungen einfließen, wie bereits in Abschnitt 3.3 argumentiert. In der Praxis wird durch diese allgemeine Vorgehensweise der Aufwand numerischer, aber insbesondere experimenteller Untersuchungen zur Beherrschung von Unsicherheit reduziert.



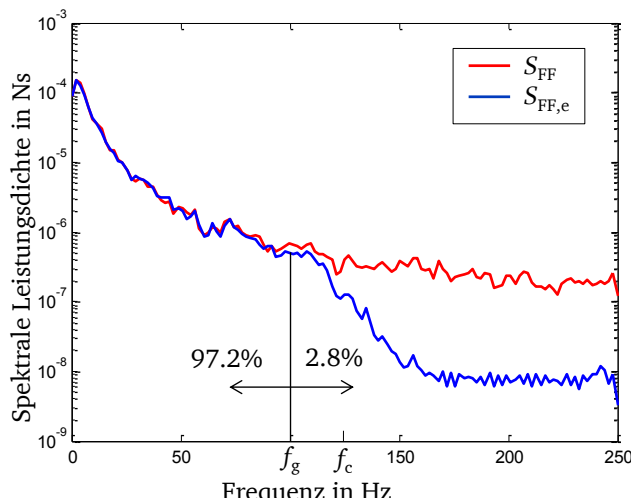
## 6.1 Auswahl eines geeigneten Frequenzbereiches zum Lastmonitoring

Im Allgemeinen ist es weder sinnvoll noch möglich, im mathematischen Modell zur Abbildung des realen dynamischen Verhaltens eines lasttragenden Systems alle  $N$  Moden zu berücksichtigen. Üblicherweise werden reale Systeme in reduzierten Modellen abgebildet. Die Gründe und die Funktionsweise einer modalen Reduktion wurden bereits in Abschnitt 4.1.2 diskutiert. Es wurde aber nicht geklärt, wie viele Moden  $N_r$  das reduzierte Modell berücksichtigen sollte, um Betriebslasten z. B. zur Abschätzung der Betriebsfestigkeit praxisorientiert zu ermitteln. Für die erste und realistische Annahme eines rosa  $1/f$ -Rauschens einer Belastung lässt sich sogar leicht argumentieren, dass es nicht nötig ist, alle  $N$  Moden zu berücksichtigen.

Eine Möglichkeit zur Bewertung der benötigten Moden  $N_r$  beruht auf der Argumentation, dass nur ein bestimmter Anteil  $c_F$ ,  $0 < c_F < 1$  der spektralen Leistungsdichte  $S_{FF}(f)$  einer Belastung  $F(t)$  durch das Lastmonitoring ermittelt werden muss. Höhere Moden entsprechen höheren Frequenzen, sodass ein Frequenzband bis zu einer zu bestimmenden Grenzfrequenz  $f_g$  existiert, in welchem der größte Anteil der Leistung des Belastungssignals abgedeckt ist. Die Argumentation führt zu folgender Formel:

$$c_F = \frac{\int_0^{f_g} S_{FF}(f) df}{\int_0^{\infty} S_{FF}(f) df}. \quad (6.1)$$

Zur Erläuterung der vorgeschlagenen Vorgehensweise wird ein rosa  $1/f$ -Rauschen betrachtet. Wird eine Grenzfrequenz  $f_g = 100$  Hz gewählt, also in einem Bereich, in welchem der Aliasing-Filter mit einer Filtereckfrequenz  $f_c = 125$  Hz noch nahezu keinen Einfluss hat, erhält man ein  $c_F = 97,2\%$ . Die zweite Eigenfrequenz  $f_2$  des Balkensystems aus diesem Beispiel liegt bei 90,8 Hz, die gewählte Modellordnung  $N_r = 2$  ermöglicht es also, etwa 97% der Leistung des Belastungssignals zu monitoren, Abbildung 6.2.



**Abbildung 6.2:** Vergleich der tatsächlichen spektralen Leistungsdichte  $S_{FF}$  und der ermittelten spektralen Leistungsdichte  $S_{FF,e}$  eines Belastungsspektrums mit rosa  $1/f$ -Rauschen.

Mit einer Modellordnung  $N_r = 3$  mit der dritten Eigenfrequenz des Balkens zu  $f_3 = 242,7$  Hz und einer entsprechenden Filtereckfrequenz, lassen sich etwa  $c_F = 98,9\%$  der Leistung des Belastungssignals ermitteln. Für andere lasttragende Systeme mit geringeren Steifigkeiten und einer höheren Anzahl an Eigenfrequenzen in unteren Frequenzbereichen, z. B. bis 100 Hz, müssen natürlich dementsprechend mehr Moden im mathematischen Modell berücksichtigt werden, um gleiche Anteile der Leistung des Belastungssignals zu ermitteln.

**Beitrag zur Beherrschung von Unsicherheit:** Durch eine sinnvolle Auswahl des Frequenzbereichs zum Lastmonitoring kann Unsicherheit beherrscht werden, indem die Modellordnung dem vorliegenden Belastungsspektrum angemessen gewählt wird.

---

## 6.2 Unsicherheitsminimierende Auswahl von Sensorpositionen

---

Eine wesentliche Steuergröße für ein Lastmonitoring ist die Sensorposition. Sie beeinflusst die Qualität der Messsignale. Eine geeignete Auswahl an Sensorpositionen ermöglicht eine Reduktion der Unsicherheit in den ermittelten Größen und trägt ebenso dazu bei, die Kosten der Messhardware zu reduzieren [20]. In diesem Abschnitt 6.2 wird untersucht, welche Sensorpositionen unsicherheitsminimierend hinsichtlich der ermittelten Belastungen sind. Es wird davon ausgegangen, dass an zwei Orten Auslenkung, Dehnung oder Beschleunigung gemessen wird,  $N_s = 2$ , sodass die Ergebnisse noch anschaulich visualisiert werden können. Zunächst erfolgt die Darstellung zweier Methoden zur Sensorpositionierung: 1) Sensorpositionierung nach dem Beobachtbarkeitsindex und 2) Sensorpositionierung nach der Effective Independence Methode. Die Ergebnisse der Methoden werden anschließend in numerischen Simulationen validiert. In Abschnitt 6.2.3 wird dann die Robustheit der Sensorposition gegenüber Parameterschwankungen kurz diskutiert.

---

### 6.2.1 Beobachtbarkeitsindex

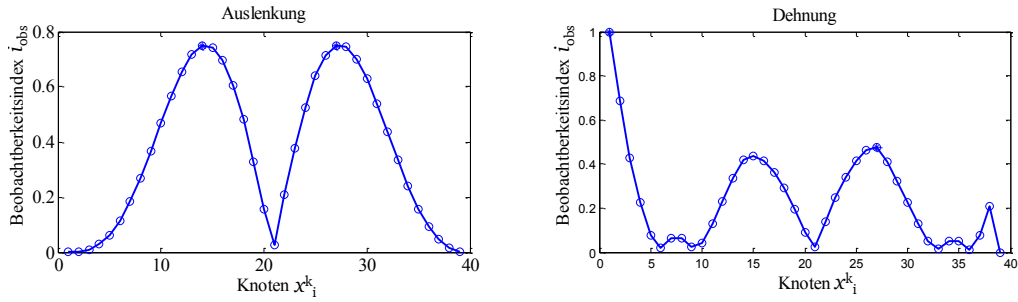
---

Sensorsignale sollen möglichst große Amplituden haben, um das Signal-Rauschverhältnis zu verbessern. Diese Forderung führt zu dem *Beobachtbarkeitsindex*  $i_{\text{obs}}$  [135]. Er wird durch Multiplikation der normierten Eigenvektoren  $\phi_n$  bis zur Mode  $N_r$  mit

$$i_{\text{obs}} = \prod_{n=1}^{N_r} \left| \frac{\phi_n}{\phi_{n,\text{max}}} \right| \quad (6.2)$$

berechnet, wobei  $\phi_{n,\text{max}}$  der maximale Betrag des  $n$ -ten Eigenvektors ist. Abbildung 6.3 auf der folgenden Seite zeigt den Beobachtbarkeitsindex für das Beispiel des Balkensystem für  $N_k = 41$  Knoten und  $N_r = 2$  Moden, hier für Auslenkungs- und Dehnungsmoden.

Für Knoten, in denen der Beobachtbarkeitsindex nahe Null ist, liegt in einer Mode ein Schwingungsknoten vor. Dementsprechend kann ein einzelner Sensor hier kaum oder keine Information über den aktuellen Schwingungszustand der Struktur für diese Mode liefern. In Bereichen hoher Beobachtbarkeit liefert ein Sensor große Messsignalamplituden für alle Moden. So ist z. B. für Dehnungsmessung eine



**Abbildung 6.3:** Beobachtbarkeitsindex  $i_{\text{obs}}$  für Auslenkungs- und Dehnungsmoden,  $\times$  markiert zwei Orte mit hoher Beobachtbarkeit

Sensorposition nahe der festen Einspannung am Knoten 1 optimal, da hier die höchsten Dehnungen auftraten. Allerdings muss berücksichtigt werden, dass Randeﬀekte in den Einspannungen eines lasttragenden Systems, z. B. der Effekt der antiklastischen Krümmung in der festen Einspannung des Balkens, zusätzliche Unsicherheit im Messprozess und Modellunsicherheit bewirken kann, z. B. durch lokale Versteifungseﬀekte.

Nach dem Beobachtbarkeitsindex  $i_{\text{obs}}$  wäre es auch für mehrere Sensoren optimal, alle Sensoren am gleichen oder nahe beieinander liegenden Knoten in Bereichen des Maximums von  $i_{\text{obs}}$  zu positionieren. Dies würde aber dazu führen, dass alle Sensoren die gleichen oder sehr ähnliche Signale liefern würden, die Kondition der Übertragungsmatrix wäre schlecht. Die Maximierung der Kondition der Übertragungsmatrix ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

---

### 6.2.2 Methode der Effective Independence

---

Eine Methode zur optimalen Sensorpositionierung unter Berücksichtigung der Kondition der Übertragungsmatrix ist die Methode der *Effective Independence* (EI), [85]. Bei der EI werden Sensorpositionen derart gewählt, dass die numerische Kondition der Übertragungsmatrix minimal wird und sich damit unvermeidbare Unsicherheit in den Messsignalen möglichst gering auf die ermittelten Belastungen auswirkt, z. B. [139]. Dazu wird zunächst die *Fisher Informationsmatrix* (FIM) aus der Modalmatrix  $\Phi_r$  des reduzierten Modells gebildet:

$$\mathbf{A}_{\text{FIM}} = \Phi_r^T \Phi_r. \quad (6.3)$$

Die Fisher Informationsmatrix liefert, allgemein und abstrakt gesprochen, ein Maß für die Information, welche eine Zufallsvariable über eine unbekannte Größe beinhaltet [20].  $\mathbf{A}_{\text{FIM}}$  wird verwendet, um die Vorhersagematrix<sup>1</sup>  $\mathbf{E}_{\text{EI}}$  zu bilden mit

$$\mathbf{E}_{\text{EI}} = \Phi_r (\mathbf{A}_{\text{FIM}})^{-1} \Phi_r^T. \quad (6.4)$$

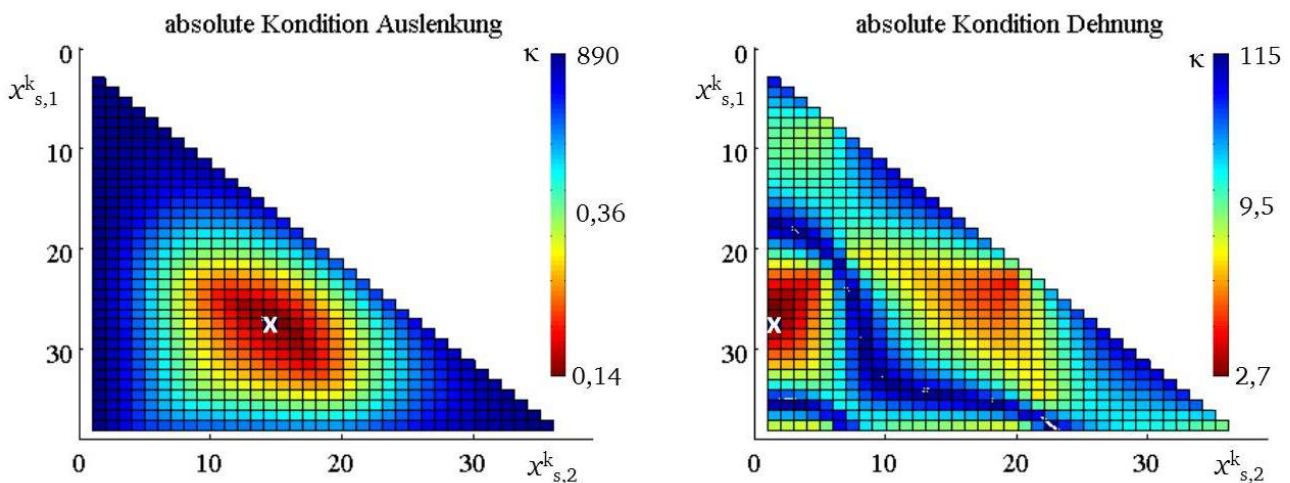
Die Diagonalelemente von  $\mathbf{E}_{\text{EI}}$  beschreiben dann den Anteil der jeweiligen Stelle zum Rang der Modalmatrix  $\Phi_r$ , die Summe der Diagonalelemente ergibt den Rang der Matrix,  $\text{spur}(\mathbf{E}_{\text{EI}}) = N_r$ . Man erhält

---

<sup>1</sup> engl.: prediction matrix

einen iterativen Algorithmus, wenn die Zeile mit dem kleinsten Wert der Diagonalelemente aus der Modalmatrix  $\Phi_r$  gestrichen wird und die Vorhersagematrix  $E_{EI}$  so lange erneut gebildet wird, bis nur noch die gewünschte Anzahl an Sensorpositionen übrig bleibt [20].

Folgende Abbildung 6.4 zeigt die absolute Kondition  $\kappa$  der Übertragungsmatrix jeweils für Dehnungs- und Auslenkungsmoden für alle möglichen Kombinationen von Sensororten. Zusätzlich sind die durch die EI-Methode ermittelten Sensorpositionen aufgetragen und markiert. Die ermittelte Sensorposition nach der EI-Methode befindet sich nach Abbildung 6.4 in Bereichen mit hoher Kondition der Übertragungsmatrix. Für den untersuchten Fall entsprechen die durch die EI-Methode ermittelten Sensorpositionen ebenfalls denen mit hohem Beobachtbarkeitsindex, vgl. Abbildung 6.3.



**Abbildung 6.4:** Absolute Kondition für Auslenkung und Dehnung für alle Kombinationen aus Sensorpositionen,  $\times$  markiert die optimale Sensorposition nach der Effective Independence Methode

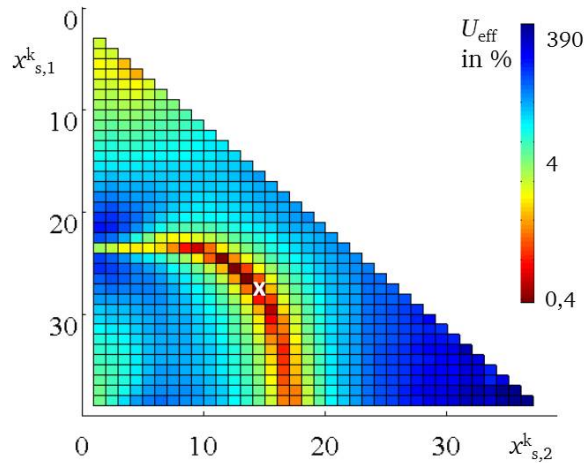
---

### Vergleich der Ergebnisse mit numerischen Simulationen

---

Im nächsten Schritt sollen die Ergebnisse der vorherigen analytischen Betrachtungen mit denen numerischer Simulationen für eine kollokierte Messung von Auslenkung und Beschleunigung an  $N_s = 2$  Sensorpositionen verglichen werden. Zur Bewertung der Sensorposition in der numerische Simulation wird eine Laterallast  $F(t)$  am Lastort  $x_F^k = 4$  mit allen möglichen Kombinationen der Sensorposition, also  $x_{s,1}^k = i$  und  $x_{s,2}^k = j$  mit  $i, j \in \{1, 2, \dots, N^k\}$ , durchgeführt. Da üblicherweise die Leistung des Messrauschens unabhängig von der Sensorposition ist, wurde für alle Sensorpositionen ein Messrauschen von 5% der Standardabweichung der Messsignale für Auslenkung und Beschleunigung am Ort  $x_s^k = 27$ , wo der Beobachtbarkeitsindex  $i_{obs}$  am höchsten ist, gewählt. Abbildung 6.5 auf der folgenden Seite zeigt den relativen effektiven Fehler  $U_{eff}$  für alle Kombinationen aus Sensorpositionen.

In der numerischen Simulation ist die Sensorposition mit minimaler Unsicherheit die gleiche wie in den Ergebnissen einer optimalen Sensorposition aus der analytischen Betrachtung des Beobachtbarkeitsindex und der Kondition. Beim Vergleich der Abbildung 6.5 der Ergebnisse aus der numerischen Simulation mit Abbildung 6.4 links für die Ergebnisse der analytischen Betrachtung, lassen sich Unterschiede



**Abbildung 6.5:** Relativer effektiver Fehler  $U_{\text{eff}}$  für alle Kombinationen an Sensorpositionen, x: Kombination an Sensorpositionen mit minimaler Unsicherheit

in dem qualitativen Verlauf der Antwortfläche erkennen. Vereinfachungen in der analytischen Betrachtung führen zu diesen unterschiedlichen Ergebnissen. Eine Ursache ist z. B. der Einfluss höherer, nicht im mathematischen Modell berücksichtigter Moden. Wie schon aus den Untersuchungsergebnissen des Fallbeispiels 1 in Abschnitt 5.1 hervor geht, spielt insbesondere der Einfluss der niedrigsten, nicht im mathematischen Modell abgebildeten Mode einen Einfluss auf die Unsicherheit in der ermittelten Belastung. Dieser Einfluss wird in der analytischen Betrachtung nicht berücksichtigt, wohl aber in der numerischen Simulation.

---

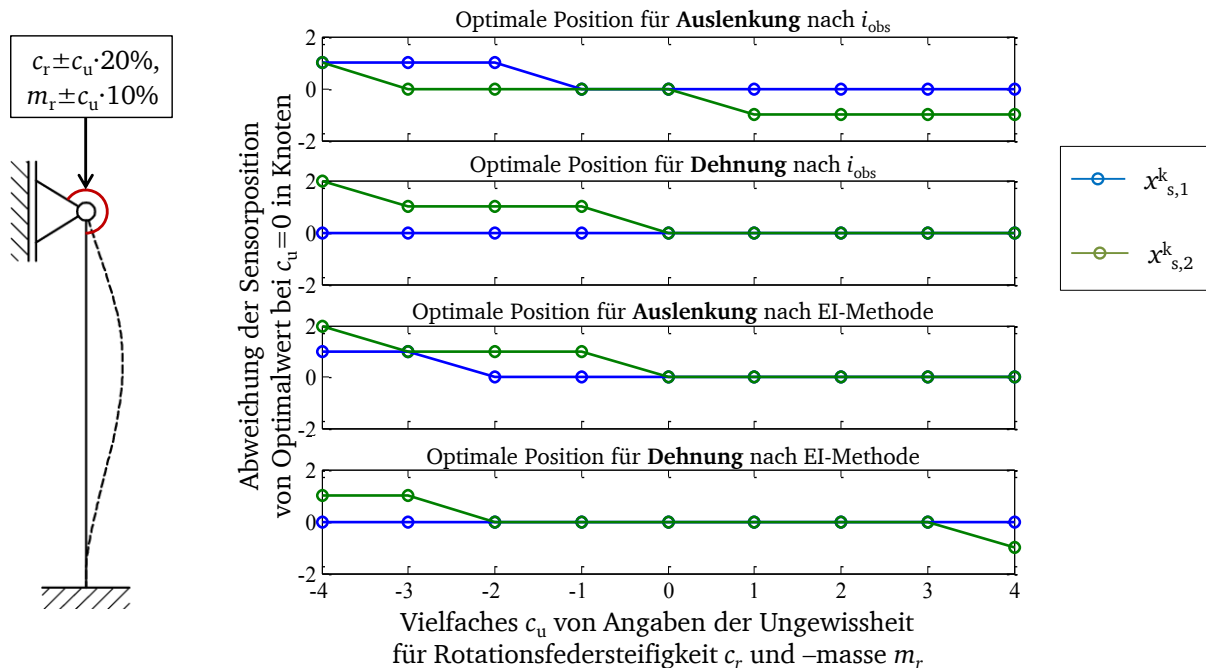
### 6.2.3 Robustheit der optimalen Sensorposition gegenüber Parameterunsicherheit

---

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Methoden zur Sensorpositionierung beruhen auf der Annahme, dass das mathematische Modell zur Beschreibung der Systemeigenschaften, insbesondere die Modalmatrix  $\Phi_r$ , vollständig und exakt bekannt ist. In der Praxis ist dies aber meist nicht gegeben. Üblicherweise wird ein Ingenieur, sodenn er ein numerisches Modell des lasttragenden Systems vorliegen hat, die Sensorpositionen durch Anwendung von Optimierungsstrategien am numerischen Modell ermitteln und festlegen. In der experimentellen Simulation wird er dann die Messsignale der Sensoren nutzen, um beispielsweise sein Modell anzupassen und so Parameterunsicherheit zu beherrschen. Ist die Parameterunsicherheit aber zu groß, kann es passieren, dass die Sensoren an einer 'schlechten' Stelle angebracht werden. Die Sensorposition wäre nicht robust gegenüber Parameterunsicherheit. Dieser Zusammenhang soll im Folgenden knapp untersucht werden.

Es werden für das Balkensystem die unsicheren Parameter der Rotationsfedersteifigkeit  $c_r$  und Rotationsfeder Masse  $m_r$  variiert und ihre Auswirkung auf die im vorherigen Abschnitt ermittelte optimale Sensorposition untersucht. Die Unsicherheit in der Rotationsfedersteifigkeit  $c_r$  des Festkörpergelenks an der oberen Einspannung ist in der Eigenschaftstabelle 3.1 als Ungewissheit mit Abweichungen von  $\pm 20\%$  angegeben, die Rotationsmasse  $m_r$  ebenfalls als Ungewissheit mit einer Abweichung von  $\pm 10\%$ . In einer Worst-Case-Betrachtung werden beide Abweichungen gleichzeitig und bei unterschiedlichem Vorzeichen

untersucht. Zur Verdeutlichung des Effekts wird ein Vielfaches  $c_u$  der angegebenen Ungewissheit angenommen. Die Auswirkung dieser Unsicherheit in den Randbedingungen auf die optimale Sensorposition ist in Abbildung 6.6 dargestellt. Die optimale Sensorposition weicht bei den angenommenen Vielfachen der Abweichungen maximal um 2 Knoten von der optimalen Sensorposition für  $c_u = 0$  ab. Für den betrachteten Fall ist also die Sensorposition robust gegenüber Ungewissheit in den angenommenen Randbedingungen des Festkörpergelenks.



**Abbildung 6.6:** Auswirkung eines Vielfachen  $c_u$  der Ungewissheit in den Annahmen der Masse und Steifigkeit des Rotationsgelenks auf die optimale Sensorposition

#### 6.2.4 Zusammenfassung zur optimalen Auswahl der Sensorpositionen

Im Allgemeinen erscheint die Effective-Independence-Methode als eine etablierte und wirkungsvolle Methode zur optimalen Sensorpositionierung, vgl. [20]. Für das Balkensystem konnte durch Vergleich mit dem Beobachtbarkeitsindex und mit Ergebnissen aus numerischen Simulationen gezeigt werden, dass die durch die EI-Methode gefundene Sensorposition diejenige ist, in der die Unsicherheit in der ermittelten Belastung, quantifiziert durch den relativen effektiven Fehler  $U_{eff}$ , am geringsten ist. Das Ergebnis dieser Untersuchung kann allerdings nicht direkt auf komplexere Strukturen übertragen werden. Auch wenn die EI-Methode für komplexere Strukturen Sensorpositionen derart finden wird, dass die Kondition der Übertragungsmatrix minimal ist, ist nicht gesagt, dass diese Sensorpositionen ähnlich robust gegenüber Unsicherheit in den angenommenen Eigenschaften des lasttragenden Systems sind, wie aus der Untersuchung am Balkensystem hervor geht.

Es sei angemerkt, dass der Anregungsort  $x_F$  ebenfalls die Kondition der Übertragungsmatrix beeinflusst und somit ebenfalls einen Einfluss auf die Unsicherheit in der ermittelten Belastung hat. Der Anregungs-

ort ist aber keine Steuergröße, er kann in vielen Fällen nicht frei gewählt werden, sondern ist durch die jeweilige Funktion des lasttragenden Systems festgelegt.

Zusätzlich sei angemerkt, dass zahlreiche Ansätze bestehen, die dieses Thema vertiefen. In [65] wird z. B. eine erweiterte Methode der EI-Methode vorgestellt, bei welcher gezielt der Einfluss einzelner Moden reduziert werden kann. Entropiebasierte Methoden, zu denen auch die EI-Methode gehört, können mit Hilfe der Bayesschen Wahrscheinlichkeitstheorie erweitert werden, um unsicherheitsminimale Sensorpositionen für Monitoring-Verfahren an unsicherheitsbehafteten Strukturen zu ermitteln, z. B. [41]. Nach den Erfahrungen des Autors in experimentellen Simulationen am Balkensystem spielt aber für dieses System der genaue Applikationsort der Sensoren im Vergleich zu anderen Unsicherheiten eine untergeordnete Rolle, wenn diese nach den vorgestellten Methoden zur unsicherheitsminimierenden Sensorpositionierung ausgewählt werden.

**Beitrag zur Beherrschung von Unsicherheit:** Durch die geeignete Auswahl der Sensorpositionen wird Unsicherheit beherrscht, indem die Auswirkung von Messrauschen auf die ermittelten Belastungen reduziert wird.

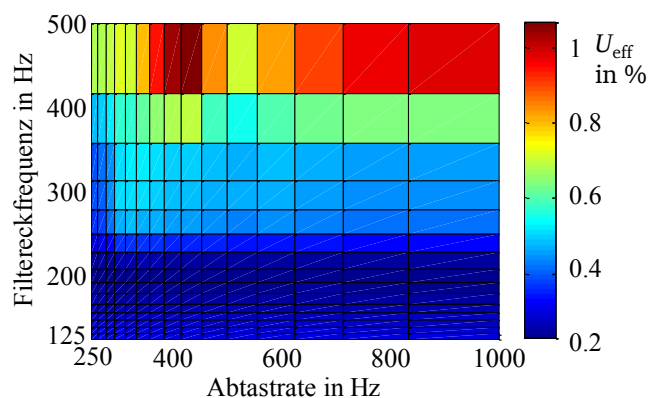
---

### 6.3 Unsicherheitsminimierende Auswahl von Parametern der digitalen Signalverarbeitung

---

Zwei Steuergrößen der digitalen Signalverarbeitung sind die Abtastfrequenz  $f_a$  und die Filtereckfrequenz  $f_c$ . In diesem Abschnitt wird untersucht, wie sich die Auswahl dieser beiden Variablen auf die Unsicherheit in der ermittelten Belastung am Balkensystem auswirkt.

Folgende Abbildung 6.7 zeigt das Ergebnis einer numerischen Simulation des am Anfang dieses Kapitels vorgestellten Balkensystems für die Variation der Abtastfrequenz  $f_a$  zwischen 250 Hz und 1000 Hz und der Filtereckfrequenz  $f_c$  zwischen 125 Hz und 500 Hz in 16 logarithmisch gestuften Schritten. Die Simulationsdauer  $t_s$  beträgt für eine Kombination aus Abtastfrequenz und Filtereckfrequenz 5 s. Es wurde ein rosa  $1/f$ -Rauschen als Belastung angenommen.



**Abbildung 6.7:** Einfluss von Filtereckfrequenz und Abtastrate auf den relativen effektiven Fehler  $U_{\text{eff}}$  in der numerischen Simulation

Die Antwortfläche in Abbildung 6.7 ist nicht glatt. Mit steigender Abtast- und Filtereckfrequenz steigt der Einfluss von Strukturschwingungen höherer, nicht im mathematischen Modell berücksichtigten Mo-

den unstetig zur Abtast- bzw. Filtereckfrequenz. Die Auswahl der Abtastrate hat nach Abbildung 6.7 kaum Auswirkung auf die Unsicherheit in der ermittelten Belastung, während durch geeignete Auswahl der Filtereckfrequenz die Unsicherheit verringert werden kann. Die Beobachtungen in diesem Abschnitt gehen einher mit den Diskussionen zum Einfluss von Modellunsicherheit durch höhere Moden in Abschnitt 5.1 und 6.2 sowie zur Wahl des Frequenzbereichs zum Lastmonitoring in Abschnitt 6.1.

Als Fazit lässt sich festhalten, dass die Filtereckfrequenz  $f_c$  etwas überhalb der höchsten Eigenfrequenz des mathematischen Modells zum Lastmonitoring liegen sollte. Dadurch werden Schwingungssignale, die aus Strukturschwingungen höherer Schwingungsmoden resultieren, gefiltert. Zur Erfüllung des NYQUIST-SHANNON-Abtasttheorems sollte die Abtastfrequenz  $f_s$  mindestens doppelt so hoch wie die Filtereckfrequenz  $f_c$  gewählt werden,  $f_s > 2f_c$ , [79]. Die konkrete Wahl der Abtastrate hängt von der weiteren Anwendung des ermittelten Belastungssignals ab. Soll dieses z. B. in Rainflow-Zählverfahren weiter verarbeitet werden, kann es sinnvoll sein die Abtastfrequenz höher zu wählen, da sonst ggf. Informationen über den zeitlichen Verlauf der ermittelten Belastung verloren gehen. Aus Sicht einer Online-Anwendung kann wiederum der numerische Berechnungsaufwand reduziert werden, indem die Abtastfrequenz niedrig gewählt wird.

**Beitrag zur Beherrschung von Unsicherheit:** Durch die geeignete Auswahl der Abtastrate und Filtereckfrequenz wird Unsicherheit beherrscht, indem der Einfluss von Strukturschwingungen höherer, nicht im mathematischen Modell abgebildeter Moden auf die Messsignale reduziert wird.

---

## 6.4 Auswahl von Sensorart, Sensoranzahl und der damit verbundenen Modellordnung

---

In diesem Abschnitt wird der Einfluss der Auswahl von Art und Anzahl von Sensoren und der damit verbundenen Modellordnung auf die Unsicherheit in der ermittelten Belastung untersucht. Ähnlich wie die Auswahl der Sensorpositionierung hat diese Einfluss auf die Auswirkung von Unsicherheit in den Messsignalen und somit der Unsicherheit der ermittelten Belastung. Ebenso wird man bestrebt sein, die Anzahl an Sensoren möglichst gering zu halten und somit die Kosten für die Messhardware zu reduzieren.

In der vorliegenden Arbeit wurden in experimentellen Simulationen Dehnungs- und Beschleunigungssensoren verwendet. Die Funktionsweise der verwendeten Dehnungsmesssensoren (DMS) basiert auf dem resistiven Effekt des Werkstoffs Konstantan. Der resistive Effekt resultiert aus der Änderung des Messwiderstands durch Gestaltänderung und Änderung des spezifischen Widerstands des Werkstoffs. DMS sind kostengünstig und können für Forschungszwecke flexibel und mit geringem zeitlichen Aufwand auf die lasttragende Struktur aufgeklebt werden. Für industrielle Anwendungen können durch moderne Verfahren DMS auch direkt auf die Struktur gedruckt werden. Im Gegensatz zu piezoelektrischen Sensoren können ohne zusätzlichen Aufwand statische Dehnungen gemessen und somit auch statische Belastungen ermittelt werden. Unsicherheit durch Temperatureinfluss lässt sich weitestgehend durch Realisierung einer Wheatstone'schen Brückenschaltung kompensieren [73]. DMS werden zudem häufig zur Ermittlung von Belastungen eingesetzt und können somit als etablierte Sensoren zum Lastmonitoring angesehen werden [24, 25, 54, 147]. Beschleunigungssensoren bieten Vorteile bei der Ermittlung kinetischer Belastungen [78]. Piezoelektrische Beschleunigungssensoren ermöglichen wegen ihrer hohen Verstärkungsfaktoren ein hohes Signal-Rauschverhältnis. Sie können ebenfalls flexibel auf der



untersuchten Struktur aufgebracht werden. Andere Sensorarten wie beispielsweise Faser-Bragg-Gitter-Sensoren, Halbleiter-DMS, ultraschall- oder laserbasierte Geschwindigkeitssensoren oder induktive Wegmessungen bieten sicherlich anwendungsspezifisch Vorteile, ändern aber nicht ihren grundlegenden Einfluss auf die Unsicherheit in den ermittelten Belastungen. In der vorliegenden Arbeit werden deshalb die Untersuchungen zur Sensorart auf DMS und Beschleunigungssensoren fokussiert.

Tabelle 6.2 zeigt die Ergebnisse einer Parameterstudie zur Sensorart und Sensoranzahl in der numerischen Simulation für ein rosa  $1/f$ -Rauschen als Belastungsspektrum. Dabei wurde Sensorart (nur DMS/DMS und Beschleunigungssensoren (BLS)), der Anzahl  $N_s$  an Messfreiheitsgraden (Mess-FHG) für eine Sensorart (2 bis 5) und der Modellordnung  $N_r$  (2 bis 3) variiert und jeweils das Unsicherheitsmaß  $U_{\text{eff}}$  berechnet. Die Sensorpositionen wurden nach der Effective-Independence-Methoden gewählt, vgl. Abschnitt 5.2. Die Effective-Independence-Methode liefert dabei nur sinnvolle Ergebnisse, wenn  $N_s = N_r$ . Für  $N_s > N_r$  werden durch die Methode weitere Sensorpositionen in der Nähe der ursprünglichen Sensorpositionen gefunden, da dieses ebenso einen hohen Beitrag zum Rang der Übertragungsmatrix nach (6.4) liefern. Es müssen zusätzlich Sensorpositionen nach anderen Gütekriterien gewählt werden. Für das vorliegende Beispiel wurde dazu der Beobachtbarkeitsindex verwendet. Für  $N_r = 3$  werden durch die Effective-Independence-Methode andere optimale Sensorpositionen als für  $N_r = 2$  ermittelt, da die Übertragungsmatrix eine andere Dimension und somit einen höheren Rang besitzt. Die Filtereckfrequenz  $f_s$  wird nach den Ergebnissen des letzten Abschnitts etwas überhalb der höchsten Eigenfrequenz des mathematischen Modells zur Belastungsermittlung gewählt. Die Simulationsdauer  $t_s$  beträgt für eine numerische Simulation 10 s.

**Tabelle 6.2:** Ergebnisse der Parameterstudie zur Sensorart und -anzahl

Anz. an Moden $N_r$	2			3		
	2	3	4	3	4	5
Sensorpos. DMS	1;27	1;27;15	1;27;15;3	1;22;30	1;22;30;27	1;22;30;27;15
Sensorpos. BLS	14;27	14;27;21	1;27;21;30	11;21;31	11;21;31;14	11;21;31;14;27
	Unsicherheitsmaß $U_{\text{eff}}$ in %					
nur DMS	1,6	0,7	0,4	1,8	0,8	0,5
DMS u. BLS	1,0	0,7	0,4	0,8	0,8	0,5

Aus Tabelle 6.2 geht hervor, dass für das Beispiel des rosa  $1/f$ -Rauschens als angenommenes Belastungsspektrum mit Beschleunigungssensoren geringere Unsicherheit  $U_{\text{eff}}$  erzielt werden, wenn  $N_s = N_r$ . Eine höhere Anzahl an Sensoren bewirkt, wie zu erwartet, eine geringere Unsicherheit  $U_{\text{eff}}$ . Dies ist darauf zurück zu führen, dass sich durch Ensemble-Mittlung durch die zusätzlich verfügbaren Messsignale Messrauschen geringer auf die ermittelten Belastungen auswirkt. Eine höhere Modellordnung  $N_r$ , verbunden mit einer entsprechend höheren Anzahl an Sensoren  $N_s$ , bewirkt hingegen für das untersuchte Beispiel eine höhere Unsicherheit. Durch die ebenso höhere Filtereckfrequenz  $f_s$  wird ein breiterer Frequenzbereich der tatsächlichen Belastungen ermittelt. Messrauschen hat aber mit zunehmender Frequenz einen höheren relativen Einfluss auf die ermittelte Belastung, da dieses konstant über

die Frequenz bleibt, das rosa Rauschen als Annahme für ein Belastungsspektrum aber mit zunehmender Frequenz geringere Amplituden aufweist. Der relative effektive Fehler  $U_{\text{eff}}$  steigt an.

Die Verwendung einiger, optimalerweise  $N_s = N_r$  Beschleunigungssensoren liefert im Allgemeinen höherwertige Messsignale (z. B. durch ein besseres Signal-Rauschverhältnis, durch Integration zur Ermittlung von Geschwindigkeiten und Auslenkungen aus Beschleunigungssignal statt – schlecht konditionierter – Differentiation zur Ermittlung von Geschwindigkeit und Beschleunigung aus wegproportionalem Messsignal, durch einen direkten Bezug zur Kraft über das zweite Newtonsche Gesetz). Dies geht auch aus den Erfahrungen des Autors aus eigenen experimentellen Simulationen und z. B. HWANG [78] hervor, der ebenfalls den Einfluss unterschiedlicher Sensorarten auf die Unsicherheit bei der Ermittlung von Belastungen mit Zustandsbeobachtern untersucht hat.

Eine Verwendung von  $N_s = N_r$  Dehnungs- und Beschleunigungssensoren scheint also insgesamt aus Sicht der Beobachtbarkeit, der Unsicherheit und der mit der benötigten Messtechnik verbundenen Kosten als guter Kompromiss zum Beitrag zur unsicherheitsminimalen Ermittlung von Belastungen, wenn der Lastort und das mathematische Modell vollständig bekannt sind. Zur Lösung unterbestimmter Inverser Probleme mit dem in Abschnitt 4.3 vorgestellten Projektionsansatzes ist die Anzahl der Sensoren entsprechend der Anzahl der zu ermittelnden Lastorte und erwarteten Anzahl der lokalen Systemeigenchaftsänderungen zu wählen.

**Beitrag zur Beherrschung von Unsicherheit:** Mit der geeigneten Auswahl von Sensorart, -anzahl und Modellordnung kann Unsicherheit beherrscht werden, indem die Auswirkung von Messrauschen auf die ermittelte Belastung durch höherwertige Messsignale und Ensemblemittlung reduziert wird.

---

## 6.5 Analytische, numerische und experimentelle Parameterstudie zur Auswirkung von Unsicherheit in der ermittelten Axiallast auf die ermittelte Laterallast

---

Ein großer Anteil der Parameterunsicherheit, beispielsweise in Folge nicht genau bekannter mechanischer Eigenschaften des betrachteten lasttragenden Systems, lässt sich durch eine Systemidentifikation beherrschen. Für den axial belasteten EULER-BERNOULLI-Balken hängen aber die Eigenfrequenzen des Systems nach (3.4) von der Axiallast  $P(t)$  ab. Die Axiallast  $P$  ist ein Parameter des mathematischen Modells zur Ermittlung der Laterallasten. Die Unsicherheit in der Kenntnis der Axiallast ist somit eine Parameterunsicherheit. In diesem Abschnitt werden Parameterstudien durchgeführt, um die Auswirkung von Unsicherheit in der ermittelten Axiallast  $P(t)$  auf eine ermittelte Laterallast  $F(t)$  zu bewerten.

Zunächst soll zur Erklärung des grundlegenden Ursache-Wirkzusammenhangs ein konkretes Beispiel zur Auswirkung der Parameterunsicherheit in der Axiallast  $P$  aufgeführt werden. Das Balkensystem wird mit einer Axiallast von  $P = 20$  N belastet, während das mathematische Modell für eine Axiallast von  $P = 22$  N gebildet wird. Es wird also die Auswirkung einer Parameterunsicherheit  $\Delta P = 2$  N auf die ermittelte Laterallast  $F(t)$  untersucht. Als Belastungsspektrum wird ein bandbegrenzt weißes Rauschen mit einer Bandbreite zwischen 1 Hz und 100 Hz verwendet, siehe Abbildung 6.8 auf der übernächsten Seite.

Zur Visualisierung des Einflusses der unsicheren Axiallast wird die spektrale Leistungsdichte des Fehlers zwischen der gemessenen und der ermittelten Belastung dargestellt. Er lässt sich neben der Spektralanalyse des Fehlers eines Belastungssignals im Zeitbereich, z. B. aus numerischen oder experimentellen

Simulationen, auch analytisch beschreiben durch die analytische spektrale Leistungsdichte  $S_{ee,a}(\Omega)$  des Fehlers. Für die Parameterunsicherheit in der Axiallast  $P$  lässt sich dieser schreiben als

$$\begin{aligned} S_{ee,a}(\Omega) &= \left( (H(\Omega, P = 22)^+ - H(\Omega, P = 20)^+) \cdot H(\Omega, P = 20) \cdot F(\Omega) \right)^2 \\ &= (H_{\text{err}}(\Omega, \Delta P = 2))^2 (F(\Omega))^2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

wobei  $H(\Omega, P)$  die von der Axiallast  $P$  abhängige Übertragungsmatrix des Systems darstellt, vgl. spektrale Leistungsdichte des Fehlers in (3.11) und Darstellung der Übertragungsmatrix in (4.6).  $H_{\text{err}}(\Omega)$  bezeichnet das Fehlerübertragungsmodell. Das skalare Unsicherheitsmaß  $U_{\text{eff}}$  lässt sich unter Verwendung des *Parsevalschen Theorems* ebenfalls analytisch berechnen. Dieses besagt, dass der Energieinhalt eines Signals im Frequenzbereich gleich seiner Energie im Zeitbereich ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\Delta F(t))^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E_T(\Omega)|^2 d\Omega, \quad (6.6)$$

wobei  $\Delta F(t) = F(t) - F_e(t)$  der Fehler zwischen der in der analytischen Betrachtung bekannten, tatsächlichen Belastung  $F(t)$  und der ermittelten Belastung  $F_e(t)$  und  $E_T(\Omega)$  die Fouriertransformierte des Fehlers  $\Delta F(t)$  ist. Weder im Zeitbereich noch im Frequenzbereich ist es praktisch möglich, von  $-\infty$  bis  $+\infty$  zu integrieren. Betrachtet man die mittlere Leistung der Signale und setzt voraus, dass die Signale nur in einem bestimmten Frequenzbereich bis  $\Omega_c$  zur Gesamtleistung des Signals beitragen, lässt sich (6.6) auch schreiben als

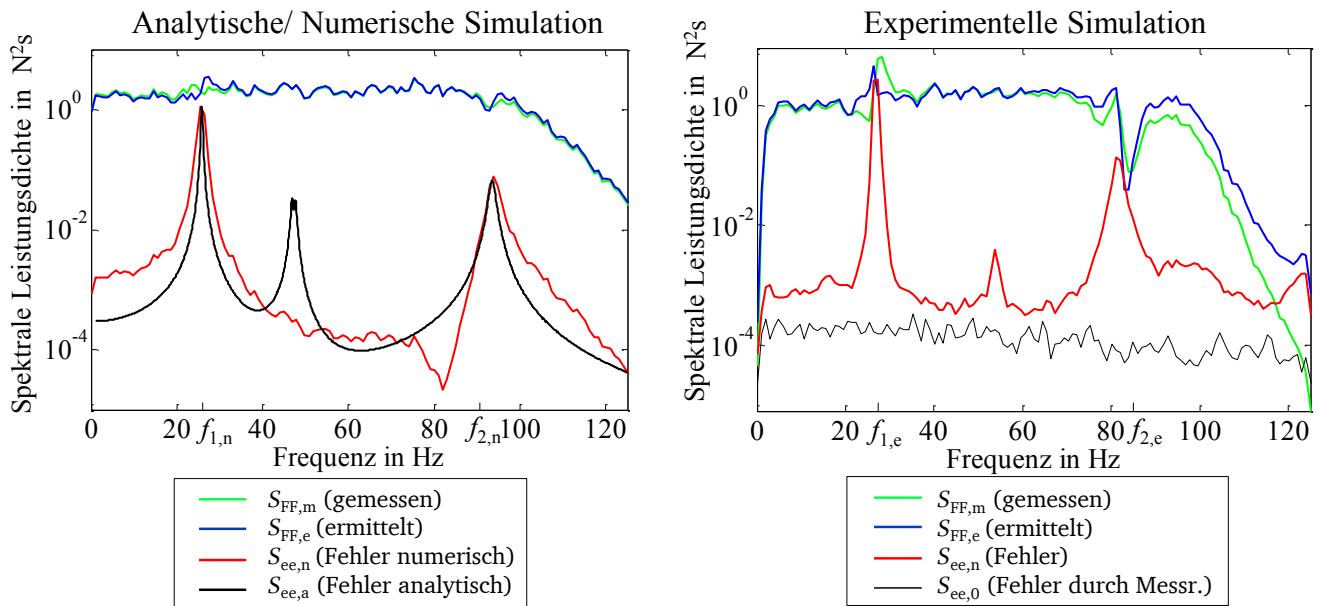
$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T (\Delta F(t))^2 dt &= \frac{1}{2\pi\Omega_c} \int_0^{\Omega_c} |E_T(\Omega)|^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi\Omega_c} \int_0^{\Omega_c} |H_{\text{err}}(\Omega)|^2 (F(\Omega))^2 d\Omega \end{aligned} \quad (6.7)$$

Auf beiden Seiten von (6.7) steht der mittlere quadratische Fehler der ermittelten Belastung. Das Unsicherheitsmaß  $U_{\text{eff}}$  nach (3.9) ist jedoch ein relatives Maß. Deshalb wird (6.7) durch den Effektivwert des Belastungssignals geteilt. Unter Verwendung partieller Integration und Division durch den Effektivwert des Belastungssignals erhält man aus (6.7) das skalare Unsicherheitsmaß  $U_{\text{eff,a}}$  aus analytischer Betrachtung des Fehlerübertragungsmodells  $H_{\text{err}}(\Omega)$  zu

$$U_{\text{eff,a}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi\Omega_c} \int_0^{\Omega_c} |H_{\text{err}}(\Omega)|^2 d\Omega}. \quad (6.8)$$

Abbildung 6.8 auf der folgenden Seite zeigt die Ergebnisse der analytischen Betrachtung und der numerischen und experimentellen Simulation im Frequenzbereich als spektrale Leistungsdichte. Tabelle 6.3 listet die ersten beiden Eigenfrequenzen des numerischen und experimentellen Modells und den relativen effektiven Fehler  $U_{\text{eff}}$  für den konkreten Fall einer Abweichung von  $\Delta P = 2$  N auf.

Aus Abbildung 6.8 geht sowohl für die analytische Betrachtung des Fehlers nach (6.5), als auch für die numerische und die experimentelle Simulation hervor, dass der Fehler  $\Delta F(t)$  im Wesentlichen in



**Abbildung 6.8:** Spektrale Leistungsdichte der gemessenen und ermittelten Belastung sowie deren Fehler für analytische, numerische und experimentelle Simulation bei einer Abweichung der axialen Last von  $\Delta P = 2N$

**Tabelle 6.3:** Eigenfrequenzen des Balkensystems in Hz und Unsicherheitsmaße  $U_{eff}$  in analytischer, numerischer und experimenteller Simulation für Parameterunsicherheit  $\Delta P$

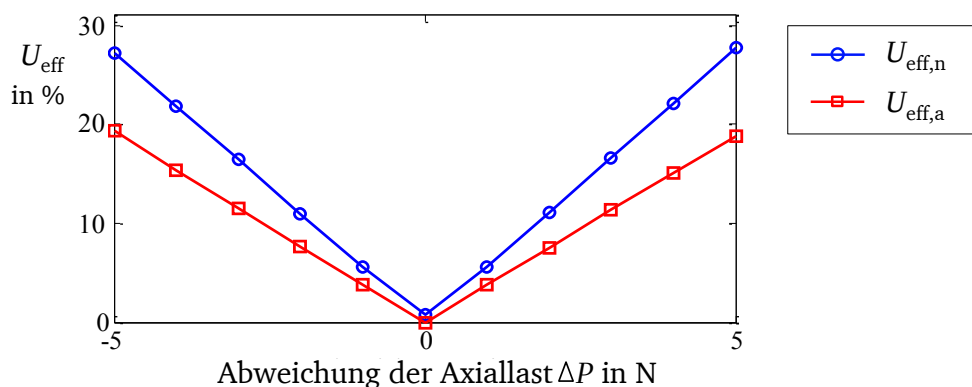
$\Delta P$ in N	Analytisch			Numerisch			Experimentell		
	$f_{1,a}$	$f_{2,a}$	$U_{eff,a}$	$f_{1,n}$	$f_{2,n}$	$U_{eff,n}$	$f_{1,e}$	$f_{2,e}$	$U_{eff,e}$
0	25,1	90,8	0	25,1	90,8	0,8%	27,4	83,6	15,9%
2	24,5	90,2	7,6%	24,5	90,2	12,3%	26,7	82,9	28,2%

Bereichen der Eigenfrequenzen auftritt. Kleine Abweichungen zwischen den tatsächlichen und den angenommenen Eigenfrequenzen des Systems führen in Bereichen der Eigenfrequenzen zu großen Fehlern in den ermittelten Belastungen. Die Sensitivität des Fehlers gegenüber Abweichungen in den Eigenfrequenzen ist hoch, vgl. eigene Arbeit in [91]. Die spektrale Leistungsdichte des Fehlers aus der analytischen und numerischen Simulation stimmt in Bereichen von Eigenfrequenzen weitestgehend überein, während bei der analytischen Betrachtung im Bereich zwischen der ersten und der zweiten Eigenfrequenz bei einer Frequenz von etwa 50 Hz ein zusätzlicher Peak resultiert. Für das betrachtete System mit den angenommenen Sensorpositionen liegt in diesem Frequenzbereich eine Nullstelle für die Übertragungsfunktion zwischen der Belastung am Lastort  $x_F$  und der Auslenkung bzw. Beschleunigung am Messort  $x_{s,1}$  vor. Die Sensitivität des Übertragungsverhaltens gegenüber Abweichungen ist in den Bereichen von Nullstellen aber ebenso wie in Bereichen der Eigenfrequenzen (oder Polstellen) des System hoch. In der numerischen Simulation spielt dieser Zusammenhang jedoch keine Rolle, da die Messsignale in diesem Frequenzbereich sehr klein sind. Der Zustandsbeobachter fasst die Abweichungen in diesem Frequenzbereich als Störsignale auf, wodurch diese statistisch gefiltert werden.

Für die experimentelle Simulation ist ein zusätzlicher Peak bei dem Zweifachen der ersten Eigenfrequenz  $f_{1,e}$  zu erkennen. Dieser ist auf Schwingungen zweiter Ordnung durch das nichtlineare Verhalten des Balkensystems zurück zu führen und resultiert somit aus der Modellunsicherheit durch die lineare Abbildung des real nichtlinearen Systems. Weitere Hinweise zu den nichtlinearen dynamischen Eigenschaften des Balkensystems finden sich in folgendem Abschnitt 6.6 und im Anhang A.

Für die experimentelle Simulation wurde zusätzlich das Störspektrum, also der Fehler im Frequenzbereich für das System ohne Belastung ermittelt. Dadurch wird erkennbar, welchen geringen Anteil das Messrauschen an dem Fehler in den ermittelten Belastungen hat. Dieser ist für das angenommene bandbegrenzte weiße Rauschen etwa 4 Dekaden kleiner als das eigentliche Belastungsspektrum.

Im nächsten Schritt wird das mathematische Modell weiterhin für die Axiallast  $P = 20$  N gebildet, während die tatsächlich auf das System wirkende Axiallast variiert wird. Abbildung 6.9 zeigt den Einfluss einer variierenden Parameterunsicherheit  $\Delta P$  im Bereich von  $\Delta P = -5$  N bis  $\Delta P = 5$  N auf den relativen effektiven Fehler  $U_{\text{eff},a}$  der analytischen Betrachtung nach (6.8) und  $U_{\text{eff},n}$  der numerischen Simulation nach (3.9). Mit steigendem Betrag der Parameterunsicherheit  $|\Delta P|$  steigt  $U_{\text{eff}}$  sowohl für die analytische als auch für die numerische Betrachtung linear an, wobei der Betrag von  $U_{\text{eff}}$  in der numerischen Simulation leicht höher als in der analytischen Simulation ist. In der numerischen Simulation wirkt zusätzlich die Modellunsicherheit durch die Modellreduktion, vgl. Abschnitt 5.1.



**Abbildung 6.9:** Auswirkung einer variierenden Parameterunsicherheit  $\Delta P$  auf den relativen effektiven Fehler  $U_{\text{eff}}$ , analytisch und numerisch

Als Fazit dieses Abschnittes lässt sich festhalten, dass sich Parameterunsicherheit in der Axiallast gut in analytischen oder numerischen Simulationen bewerten lässt. Die größten Fehler treten in Bereichen der Eigenfrequenzen auf. Es wurde gezeigt, daß der Fehler durch Parameterunsicherheit in der Axiallast auch durch analytische Betrachtungen gut abgebildet werden kann. Darüber hinaus wurde in diesem Abschnitt aber auch gezeigt, dass die Unsicherheit in der experimentellen Simulation, quantifiziert durch das Unsicherheitsmaß  $U_{\text{eff}}$ , höher als in der numerischen Simulation ist, wie zu erwarten war. In der experimentellen Simulation wirkt zusätzliche Modellunsicherheit, die nicht in numerischen Simulationen untersucht werden kann. Die Bewertung von Modellunsicherheit ist Thema des folgenden Abschnitts.

**Beitrag zur Beherrschung von Unsicherheit:** Durch die Bewertung von Parameterunsicherheit in der axialen Last  $P$  wird Unsicherheit beherrscht, indem deren Auswirkung auf die Unsicherheit in der ermittelten Laterallast bekannt gemacht wird.

---

## 6.6 Statistische Bewertung von Modellunsicherheit in der experimentellen Untersuchung

---

Bisher wurden einige unsicherheitsminimierende Maßnahmen vorgestellt und am Lastmonitoring des Balkensystem angewendet. Durch die vorgestellten Maßnahmen lässt sich die Auswirkung von Unsicherheit in Messsignalen und in den Parametern des mathematischen Modells auf die ermittelte Belastung durch analytische Betrachtungen oder numerische Simulationen beschreiben, bewerten und oftmals auch positiv beeinflussen. Modellunsicherheit hingegen kann nur in experimentellen Simulationen vollständig bewertet werden. Aus diesem Grund wird in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagen, am Ende einer Unsicherheitsbeherrschung in einem Lastmonitoring-System die Bewertung von Modellunsicherheit durchzuführen. Dies ist Gegenstand dieses Abschnitts.

---

### 6.6.1 Beschreibung des Verfahrens

---

Eine einfache und naheliegende Methode zur Bewertung von Modellunsicherheit ist die statistische Bewertung des Fehlers im Frequenzbereich. Es entsteht ein Fehlerübertragungsmodell zur Beschreibung einer Unsicherheitsregion, welche statistische Kenngrößen wie Nominalwert, Standardabweichung oder Konfidenzintervalle der betrachteten Größe berücksichtigt. Diese Vorgehensweise ähnelt den Methoden zur Unsicherheitsmodellierung in der robusten Regelung, vgl. Übersicht in [118] und Darstellung des Stands der Forschung in Abschnitt 2.1.2. Oftmals wird aber in der robusten Regelung nur Parameterunsicherheit oder parametrisierte Modellunsicherheit berücksichtigt und deren Auswirkung in der direkten Problemstellung bzw. im geregelten System bewertet. Dabei wird die experimentelle Ermittlung eines Fehlerübertragungsmodells für regelungstechnische Zwecke in der Literatur meist ausgeklammert [83]. Insbesondere für die inverse Problemstellung des Lastmonitorings und deren Lösung unter Verwendung von Zustandsbeobachtern lassen sich in der Literatur keine geschlossenen Vorgehensweisen zur Ermittlung eines Fehlerübertragungsmodells finden.

Es wird angenommen, dass sich der Zusammenhang zwischen der gemessenen Belastung  $F_m(\Omega_k)$  und der ermittelten Belastung  $F_e(\Omega_k)$  durch ein Fehlerübertragungsmodell  $H_{\text{err}}(\Omega_k)$  an den diskreten Frequenzstützstellen  $\Omega_k$  lokal beschreiben lässt mit

$$H_{\text{err}}(\Omega_k) = \frac{S_{F_e F_e}(\Omega_k)}{S_{F_e F_m}(\Omega_k)}, \quad (6.9)$$

wobei  $S_{F_e F_e}(\Omega_k)$  die reellwertige Autoleistungsdichte der ermittelten Belastung  $F_e$  und  $S_{F_e F_m}(\Omega_k)$  die komplexwertige Kreuzleistungsdichte zwischen der ermittelten und der gemessenen Belastung  $F_m$  darstellt, vgl. nichtparametrische Identifikation nach (4.27).

Gl. (6.9) beschreibt einen lokal-linearen und gemittelten Zusammenhang. Liegt beispielsweise eine Modellunsicherheit durch lineare Modellierung eines tatsächlich nichtlinearen Systems vor, würde die Verwendung von (6.9) zu einem gemittelten Fehlerübertragungsmodell führen. Das Fehlerübertragungsmodell ist aber abhängig von dem Effektivwert der tatsächlichen Belastung,

$$H_{\text{err}}(\Omega_k) = f(F_e(k), F_m(k), F_{\text{eff}}) \quad (6.10)$$

mit dem Effektivwert der tatsächlichen Belastung

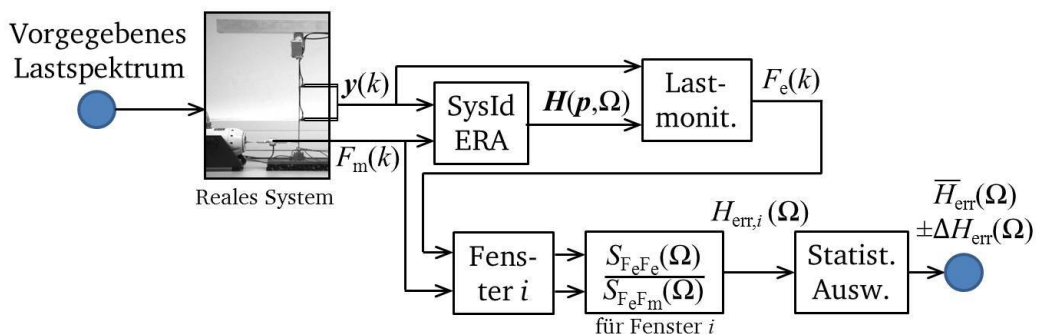
$$F_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (F_m(k))^2}, \quad (6.11)$$

wobei  $F_e(k)$  und  $F_m(k)$  die ermittelten und gemessenen Belastungen an den diskreten Zeitpunkten  $k$  beschreibt.

Eine Möglichkeit, die Auswirkung von  $F_{\text{eff}}$  auf das Fehlerübertragungsmodell  $H_{\text{err}}(\Omega_k)$  zu beschreiben, wäre die Berechnung von  $H_{\text{err}}(\Omega_k)$  für unterschiedliche  $F_{\text{eff}}$ . Dieses Vorgehen würde zu zahlreichen Modellen  $H_{\text{err}}(\Omega_k)$  führen. Diese in einen global beschreibbaren Zusammenhang zu fassen ist kaum möglich, das Vorgehen wäre somit nicht praxistauglich. Stattdessen wird folgendes Vorgehen zur Gewinnung möglichst repräsentativer statistischer Daten über die herrschende Modellunsicherheit vorgeschlagen.

Zur Systemidentifikation und Bewertung der Modellunsicherheit wird ein und dasselbe Belastungsspektrum verwendet. Das Belastungsspektrum sollte möglichst gut dem zu erwarteten Belastungsspektrum in der tatsächlichen Nutzung des lasttragenden Systems entsprechen, aber in jedem Fall eine mit der Zeit ansteigende Signalleistung besitzen. Dadurch wird das in diesem Abschnitt vorgeschlagene Verfahren realisierbar. Durch dieses Vorgehen wird zudem gewährleistet, dass für dieses Belastungsspektrum ein optimales Modell im Sinne eines minimalen Fehlers für das in der Nutzung erwartete Belastungsspektrum gefunden wird. Mit den in der experimentellen Simulation gewonnenen Messsignalen wird dann durch den Systemidentifikationsalgorithmus (in dieser Arbeit der Eigenvalue Realization Algorithm ERA, vgl. Abschnitt 4.2.1) ein Nominalmodell  $\mathbf{H}(\mathbf{p}_0, \Omega)$  mit den Parametern  $\mathbf{p}_0$  des Nominalmodells identifiziert. Dieses wird später als mathematisches Modell zum Lastmonitoring eingesetzt. Dieselben Messdaten werden anschließend verwendet, um offline die Belastungen durch das Lastmonitoring unter Verwendung des identifizierten Modells zu ermitteln. Es liegen nun gemessene Belastungen  $F_m(k)$  und ermittelte Belastungen  $F_e(k)$  vor.

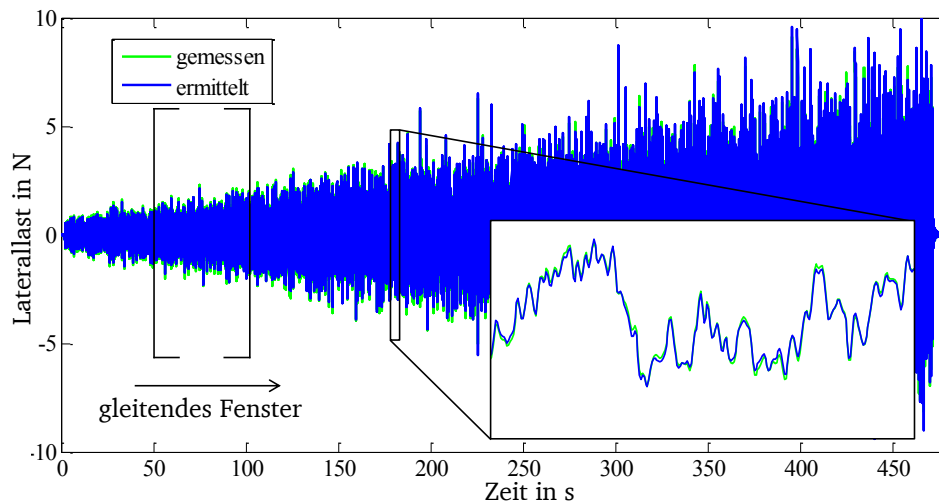
Im nächsten Schritt wird ein gleitendes Fenster verwendet, um einzelne Abschnitte der Zeitsignale von gemessener und ermittelter Belastung betrachten und auswerten zu können. Für jeden Abschnitt  $i$  wird nun ein Fehlerübertragungsmodell  $H_{\text{err},i}$  nach (6.9) ermittelt. Die einzelnen Fehlerübertragungsmodelle  $H_{\text{err},i}$  können dann nach ihren komplexwertigen statistischen Kenngrößen ausgewertet werden. Folgende Abbildung 6.10 visualisiert das vorgeschlagene Verfahren.



**Abbildung 6.10:** Schaubild zum Ablauf der Ermittlung des Fehlerübertragungsmodells

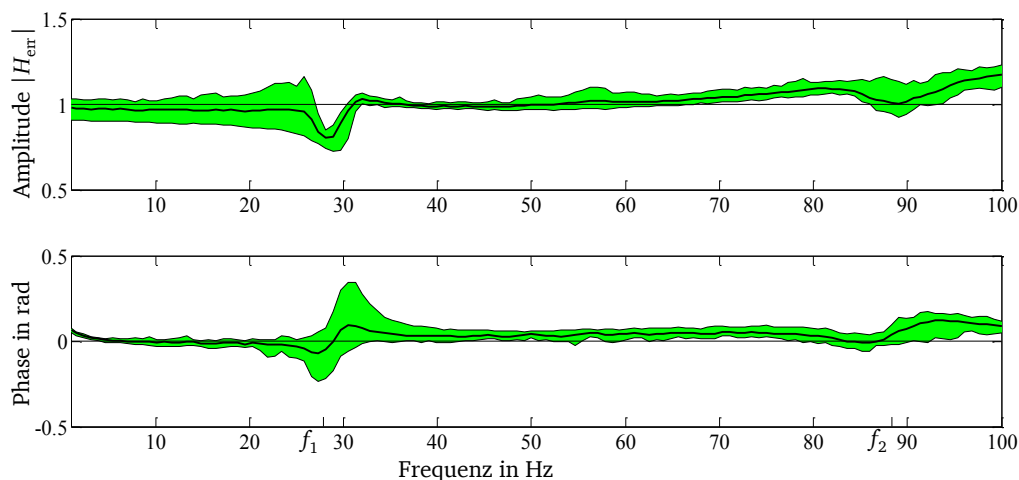
## 6.6.2 Anwendung des Verfahrens

Das vorgeschlagene Verfahren wird am Balkensystem in der experimentellen Simulation angewendet. Dazu wird als Belastungssignal ein rosa  $1/f$ -Rauschen mit einer Rampenfunktion multipliziert, sodass ein Signal mit zeitlich ansteigendem Effektivwert entsteht. Die Abtastfrequenz  $f_s$  beträgt 400 Hz, die Filtereckfrequenz  $f_c = 100$  Hz, die Axiallast  $P = 18$  N, die Simulationsdauer  $t_s = 470$  s und die Modellordnung  $N_r = 2$ . Folgende Abbildung 6.11 zeigt die gemessene und ermittelte Belastung im Zeitbereich.



**Abbildung 6.11:** Belastungssignal mit ansteigendem Effektivwert über Zeit und gleitendem Fenster

Die Länge des Fensters zur statistischen Auswertung einzelner Bereiche beträgt  $2 \cdot 10^4$  Samples, was einer zeitlichen Länge von 50 s entspricht. Das Fenster wird mit einer Überlappung von 90% verschoben, es stehen insgesamt die Berechnungsergebnisse aus 88 Fenstern zur statistischen Auswertung zur Verfügung. Global über die gesamte Simulationsdauer beträgt der relative effektive Fehler  $U_{\text{eff}} = 11,8\%$ . Folgende Abbildung 6.12 zeigt den Amplituden- und Phasengang des Fehlerübertragungsmodells  $H_{\text{err}}$  nach Mittelwert  $\bar{H}_{\text{err}}$  und seinem 98% Konfidenzintervall in grün.



**Abbildung 6.12:** Fehlerübertragungsmodell: Amplitudengang (oben) und Phasengang (unten)



Würde kein Fehler in den ermittelten Belastungen vorliegen, wäre die Amplitude des Fehlerübertragungsmodells eins, die Phase null (horizontale schwarze Linie in Abb. 6.12) und es gäbe keinen Streubereich. Dies ist für das dargestellte Fehlerübertragungsmodell – wie zu erwarten war – nicht der Fall. Dabei sind die systematischen Abweichungen und die Streuung in Bereichen der ersten Eigenfrequenzen  $f_1$  besonders hoch. So beträgt z. B. im Bereich der ersten Eigenfrequenz die systematische Abweichung zwischen der ermittelten und der gemessenen Belastungen etwa 20%.

---

### 6.6.3 Interpretation der Ergebnisse

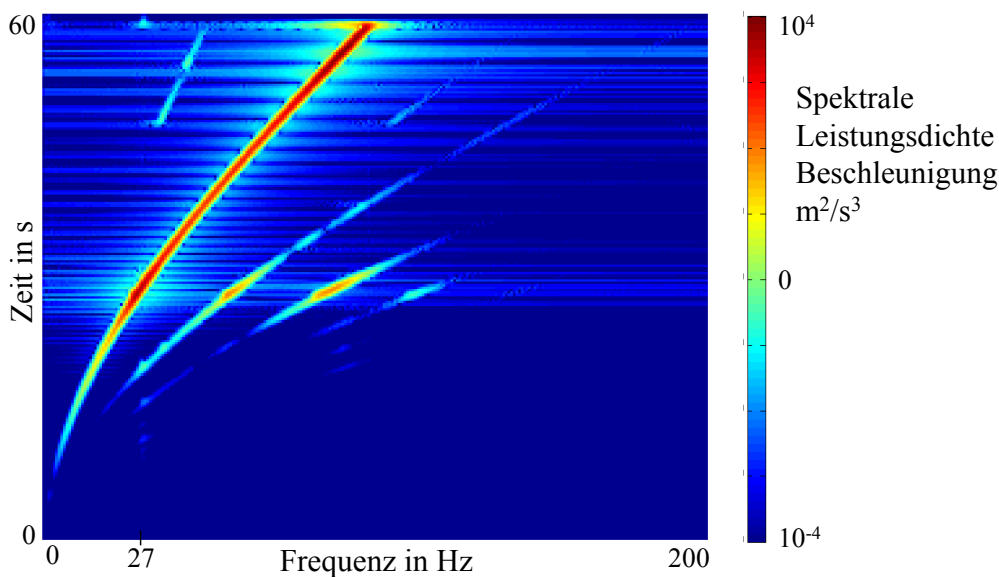
---

Zur Beantwortung auf die Frage der Ursache für diese Abweichungen können folgende, für das Balkensystem relevante Aspekte genannt werden.

1. Die Amplitude und Phase einer Übertragungsfunktion von schwach gedämpften Strukturen ist in Bereichen von Resonanzfrequenzen besonders sensitiv gegenüber Abweichungen zwischen den tatsächlichen und den angenommenen bzw. ermittelten Eigenfrequenzen. Dies wurde beispielsweise in Abbildung 6.8 in Abschnitt 6.5. gezeigt.
2. Gleiches gilt für Abweichungen zwischen tatsächlichen und ermittelten modalen Dämpfungsgraden.
3. Selbst bei der Verwendung moderner Systemidentifikationsalgorithmen zur experimentellen Ermittlung der Systemeigenschaften wie beispielsweise dem in dieser Arbeit verwendeten ERA-Algorithmus aus Abschnitt 4.2.1 werden die tatsächlichen Resonanzfrequenzen und tatsächliche Dämpfungseigenschaften der realen Struktur praktisch niemals den durch die Systemidentifikation ermittelten Eigenfrequenzen und ermittelten modalen Dämpfungsgraden entsprechen. Insbesondere zeigt jedes reale lasttragende System mehr oder weniger nichtlineares Verhalten, womit die linearisierten angenommenen modalen Eigenschaften in Abhängigkeit von der Schwingungsamplitude ständig variieren. Dies führt zu Abweichungen zwischen den als konstant angenommenen ermittelten modalen Parametern und den tatsächlichen dynamischen Eigenschaften des realen lasttragenden Systems und somit gemeinsam mit Punkt 1 und Punkt 2 zu den Streuungen insbesondere in Bereichen von Resonanzfrequenzen. Ursache für ein nichtlineares Systemverhalten können für das Balkensystem insbesondere geometrische Nichtlinearitäten wie im Anhang A.1 beschrieben, aber auch nichtlineare Eigenschaften der Randeinspannungen beispielsweise durch Fügestellen oder Materialnichtlinearitäten durch nichtlineare Dämpfung sein.
4. Ebenso kann unvermeidbare Unsicherheit in der digitalen Signalverarbeitung beispielsweise durch numerische Rundungs- oder Diskretisierungsfehler gemeinsam mit Punkt 1 und Punkt 2 einen Teil zu den beobachteten Streuungen beitragen.
5. Im analytischen und numerischen Modell zur Abbildung der Systemeigenschaften des Balkensystems liegen in dem betrachteten Frequenzbereich von 0 bis 100 Hz zwei Eigenfrequenzen vor. Das experimentell ermittelte Modell mit zwei Eigenfrequenzen bildet auch im Wesentlichen das dynamische Verhalten des realen Balkensystems ab. Dennoch kann der reale Versuchsstand nicht vollständig durch ein Modell mit zwei Eigenfrequenzen abgebildet werden. Beispielsweise beeinflussen nicht ideale Randbedingungen durch endliche Steifigkeiten des Prüfrahmens oder die Kabel der Sensoren die dynamischen Eigenschaften des Balkensystems, wodurch im genannten Frequenz-

bereich von 0 bis 100 Hz auch mehr als zwei Resonanzen des gesamten Versuchsstandes vorliegen können.

Einen wesentlichen Anteil der in der experimentellen Simulation auftretenden Unsicherheit in einem Lastmonitoring-System resultiert also aus der Modellunsicherheit, vorausgesetzt, dass die unsicherheitsminimierenden Maßnahmen in den vorherigen Abschnitten angewendet wurden. Eine detaillierte Quantifizierung der Ursachen von Modellunsicherheit konnte aber im Rahmen dieser Arbeit nicht erfolgen. Lediglich konnte schon im Fallbeispiel 1 in Abschnitt 5.1 gezeigt werden, dass die Abbildung des realen Systemverhaltens durch ein Modell mit einer endlichen Anzahl  $N_r$  an Moden einen Anteil an der Modellunsicherheit beiträgt. Der Versuch einer Modellierung der Nichtlinearitäten stellte sich im Rahmen dieser Arbeit als eine sehr komplexe Aufgabenstellung heraus. Das Ergebnis einer analytischen Modellierung findet sich im Anhang A. Mit einer experimentellen Parameteridentifikation auf Basis des analytischen nichtlinearen Modells mittels der *Prediction Error Methode* oder dem *Extended Kalman-Filter* könnte ein nichtlineares mathematisches Modell gewonnen werden. Gelänge es so, das nichtlineare dynamische Verhalten des realen Balkensystems abzubilden, könnte vorhergesagt werden, welchen Anteil die linearisierte Abbildung des nichtlinearen Balkensystems an der Modellunsicherheit beiträgt. Dass das System ein nichtlineares Verhalten aufweist, zeigt folgendes Spektrogramm in Abbildung 6.13 für die gemessene Beschleunigung an der Sensorposition  $x_{s,1} = 115$  mm aus einer experimentellen Simulation mit einem Belastungssignal als Gleitsinus von 1 Hz bis 100 Hz in einer Simulationszeit von  $t_s = 60$  s.



**Abbildung 6.13:** Spektrogramm: Zeitlicher Verlauf der spektralen Leistungsdichte des Beschleunigungssignals bei Belastung mit Gleitsinus zur Beschreibung des nichtlinearen Systemverhaltens.

Abb. 6.13 zeigt, dass bei einer harmonischen Anregung das System nicht nur in der Frequenz der Anregung schwingt, sondern auch harmonische Schwingungen höherer Ordnung auftreten. Dies ist ein deutlicher Hinweis auf ein nichtlineares Systemverhalten. So sind beispielsweise bei einer Anregung im Frequenzbereich der ersten Resonanzfrequenz von etwa 27 Hz deutliche Schwingungsanteile zweiter und dritter Ordnung von jeweils etwa 1% der Signalleistung, also 10% der Schwingungsamplitude zu erkennen.

Es lässt sich zusammenfassen, dass unvermeidbare Modellunsicherheit durch vereinfachende Abbildung des realen Systems zu Unsicherheit führen kann, die sich durch die in diesem Abschnitt vorgestellte Methode zur Ermittlung des Fehlerübertragungsmodells global bewerten lässt. Die so ermittelten systematischen Abweichungen lassen sich nachträglich offline aus den ermittelten Belastungen heraus rechnen. Zufällige Abweichungen werden durch einen Konfidenzintervall statistisch beschrieben. Die so gewonnenen Informationen über die Unsicherheit in der ermittelten Belastung lassen sich in der Produktauslegung verwenden, um Sicherheitsbeiwerte angemessen zu wählen.

**Beitrag zur Beherrschung von Unsicherheit:** Durch die statistische Bewertung des Fehlers zwischen der gemessenen und ermittelten Belastung wird Modellunsicherheit situationsspezifisch für ein vorab abgeschätztes Belastungsspektrum bekannt gemacht und für weitere Anwendungen beispielsweise zur Produktauslegung oder zur Schadensakkumulationsrechnung in Form eines Fehlerübertragungsmodells zur Verfügung gestellt.



---

## 7 Experimentelle Erprobung der Lastmonitoring-Methoden

---

In diesem Kapitel werden die in Kapitel 4 vorgestellten Methoden zur Ermittlung von Belastungen und Systemeigenschaftsänderungen in der experimentellen Simulation erprobt. In Abschnitt 6.5 bei der Parameterstudie zum Einfluss einer unsicherheitsbehafteten Axiallast oder Abschnitt 6.6 zur statistischen Bewertung von Modellunsicherheit wurden bereits Ergebnisse experimenteller Simulationen vorgestellt. In diesem Kapitel werden vier konkrete technologische Zielstellungen am Balkensystem untersucht:

- Ermittlung einer axialen und lateralen zeitvarianten Belastung bei bekanntem Lastort unter Verwendung eines experimentell ermittelten Zustandsraummodells im Zustandsbeobachter und kollokierte Dehnungs- und Beschleunigungsmessung an zwei Messstellen.
- Ermittlung einer stochastischen Belastung durch rosa  $1/f$ -Rauschen bei bekanntem Lastort unter Verwendung eines experimentell ermittelten Zustandsraummodells im Zustandsbeobachter und kollokierte Dehnungs- und Beschleunigungsmessung an zwei Messstellen.
- Ermittlung einer quasistatischen Last und des Lastortes unter Verwendung eines experimentell ermittelten statischen Nachgiebigkeitsmodells, Dehnungssensoren an drei Messstellen und des Projektionsansatzes.
- Ermittlung einer Systemeigenschaftsänderung durch eine Zusatzmasse auf dem Balken bei unbekannter Belastung unter Verwendung experimentell ermittelter Impulsantwort-Modelle, Dehnungssensoren an drei Messstellen und des Projektionsansatzes.

Vor der Durchführung der experimentellen Erprobung wurden hinsichtlich der jeweiligen Anwendung die Maßnahmen zur Reduktion von Unsicherheit nach Kapitel 6 genutzt. Insbesondere wurden:

- ein geeigneter Frequenzbereich zum Lastmonitoring und die damit verbundene Modellordnung, Filtereckfrequenz und Abtastrate gewählt,
- geeignete Sensorpositionen zur unsicherheitsminimierenden Ermittlung von Belastungen anhand der in Abschnitt 6.2 vorgestellten Bewertungsmaße festgelegt und
- die benötigten mathematischen Modelle durch experimentelle Modellbildung gebildet.

---

### 7.1 Der axial belastete Balken als Versuchsstand

---

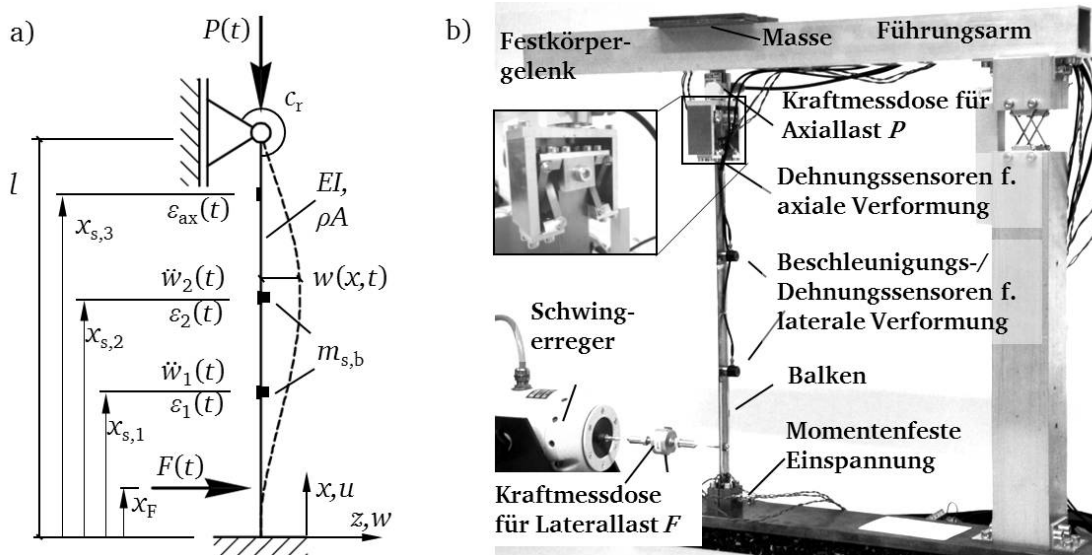
---

#### 7.1.1 Ermittlung einer axialen und lateralen zeitvarianten Belastung

---

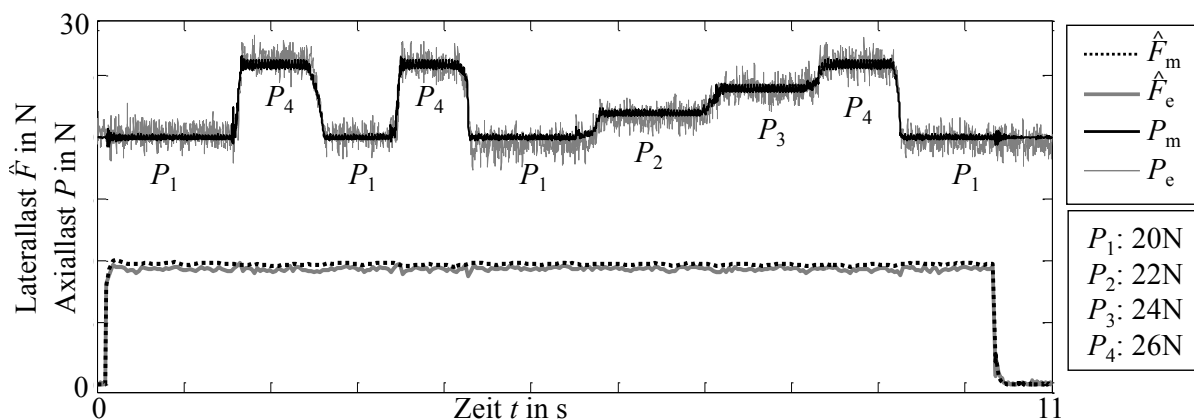
Ziel dieser Anwendung ist die Ermittlung einer axialen zeitvarianten Belastung  $P(t)$  und einer lateralen zeitvarianten Belastung  $F(t)$  bei bekanntem Lastort  $x_F = 30$  mm unter Verwendung eines experimentell ermittelten Zustandsraummodells im Zustandsbeobachter, kollokierte Dehnungs- und Beschleunigungsmessung an zwei Messstellen  $x_{s,1} = 110$  mm und  $x_{s,2} = 220$  mm und axialer Dehnungsmessung nahe der gelenkigen Lagerung am oberen Ende  $x = l$  des Balkens. Das untersuchte Balkensystem ist erneut in

Abbildung 7.1 dargestellt. Als einfacher Lastfall wurde eine harmonische Laterallast  $F(t) = \hat{F} \cdot \sin(2\pi f_e t)$  mit einer Amplitude  $\hat{F} = 10 \text{ N}$  und einer Erregungsfrequenz  $f_e = 15 \text{ Hz}$  simuliert. Die Axiallast  $P(t)$  wurde im Bereich von 20 N bis 26 N durch Auflegen von zusätzlichen Massen auf den Balken variiert. Die Abtastfrequenz betrug  $f_s = 250 \text{ Hz}$ , die Filtereckfrequenz betrug  $f_c = 100 \text{ Hz}$ .



**Abbildung 7.1:** Versuchsaufbau zum Lastmonitoring am axial belasteten Balken: a) mechanisches Ersatzschaubild, b) Versuchstand für experimentelle Simulation

Wie bereits in Abschnitt 3.1 beschrieben und in Abschnitt 6.5 diskutiert, beeinflusst die Axiallast  $P$  die dynamischen Eigenschaften des Balkensystems. Da die Steifigkeit des Balkens in axiale Richtung hoch im Vergleich zur lateralen Steifigkeit ist, lässt sich die Axiallast durch einen statischen Belastungs-Verformungsbezug aus der gemessenen axialen Dehnung  $\varepsilon_{ax}(t)$  ermitteln,  $P(t) = 1/h_{ax} \cdot \varepsilon_{ax}(t)$ , wobei  $h_{ax} = 1/EA$  die axiale Nachgiebigkeit des Balkens beschreibt. Das Zustandsraummodell zur Beschreibung der dynamischen Eigenschaften des Balkensystems wurde dann mit der ermittelten Axiallast nach (3.4) angepasst. Abbildung 7.2 zeigt den Vergleich gemessener und ermittelter Axial- und Laterallasten.



**Abbildung 7.2:** Gemessene und ermittelte Axiallast sowie Amplitude  $\hat{F}$  der harmonischen Laterallast  $F(t)$

Würde das Zustandsraummodell nicht an die ermittelte Axiallast angepasst werden, würde die ermittelte Amplitude der Laterallast  $\hat{F}$  mit veränderlicher Axiallast  $P(t)$  variieren. Dies ist nicht der Fall,

mit veränderlicher Axiallast bleibt die Amplitude  $\hat{F}$  annähernd gleich. In Abb. 7.2 ist die Streuung der ermittelten Axiallast  $P_e(t)$  durch Messrauschen deutlich zu erkennen. Sie resultiert aus den geringen gemessenen axialen Dehnungen  $\varepsilon_{ax} = 1,4 \cdot 10^{-6}$  bei einer Axiallaständerung von 6 N. Das resultierende Signal-Rausch-Verhältnis von etwa 15 dB ist im Vergleich z. B. zu einem Signal-Rausch-Verhältnis von etwa 42 dB für die gemessenen Beschleunigungen sehr niedrig.

Für die Laterallast  $F(t)$  ist der relative effektive Fehler für den hier untersuchten Belastungsfall einer harmonischen Belastung  $U_{eff} = 5,8\%$ . Für die Axiallast beträgt der relative effektive Fehler  $U_{eff} = 26,8\%$ . Dieser hohe Wert im Vergleich zu den anderen Ergebnissen des Lastmonitoring lässt sich auf das schlechte Signal-Rausch-Verhältnis zurück führen. Betrachtet man lediglich die Abweichungen der Mittelwerte, beträgt für eine Axiallast von  $P = 20$  N die Abweichung zwischen den ermittelten und den gemessenen Mittelwerte der Axiallast  $\Delta P = 0,4$  N, also etwa 2% der Axiallast.

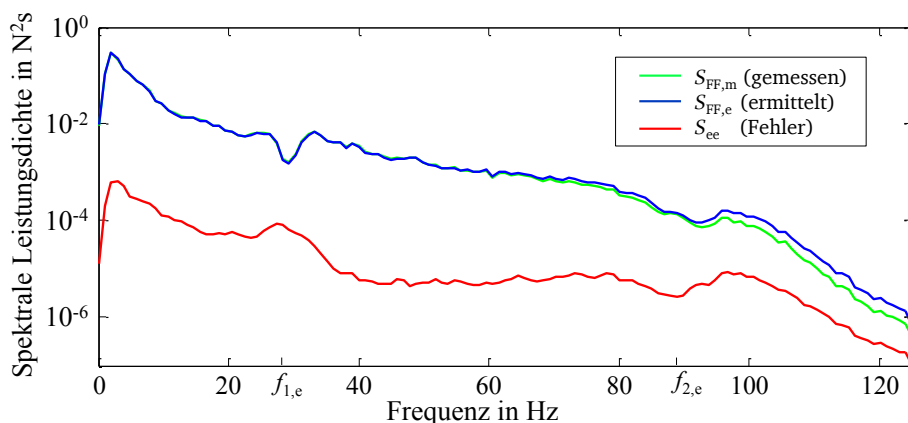
Der in Abschnitt 4.2.2 vorgestellte Zustandsbeobachter zur Ermittlung von Belastungen zeigt in diesem Abschnitt 7.1.1 sein Potential zur Belastungsermittlung. Insbesondere wird Unsicherheit in der ermittelten Laterallast durch die Anpassung des mathematischen Modells an eine ermittelte Axiallast beherrscht.

---

### 7.1.2 Ermittlung einer lateralen stochastischen Belastung

---

Ziel dieser Anwendung ist die Ermittlung einer lateralen stochastischen Belastung  $F(t)$  durch ein rosa  $1/f$ -Rauschen bei bekanntem Lastort  $x_F = 30$  mm unter Verwendung eines experimentell ermittelten Zustandsraummodells im Zustandsbeobachter, kollokierte Dehnungs- und Beschleunigungsmessung an zwei Messstellen. Das untersuchte Balkensystem entspricht dem im vorherigen Abschnitt 7.1.1. Die Axiallast ist 20 N, die Simulationsdauer beträgt  $t_s = 60$  s, alle anderer Systemparameter bleiben wie in Abschnitt 7.1.1 angegeben. Folgende Abbildung 7.3 zeigt die spektrale Leistungsdichte der gemessenen Belastung  $S_{FF,m}$ , der ermittelten Belastung  $S_{FF,e}$  und des Fehlers  $S_{ee}$  zwischen diesen.



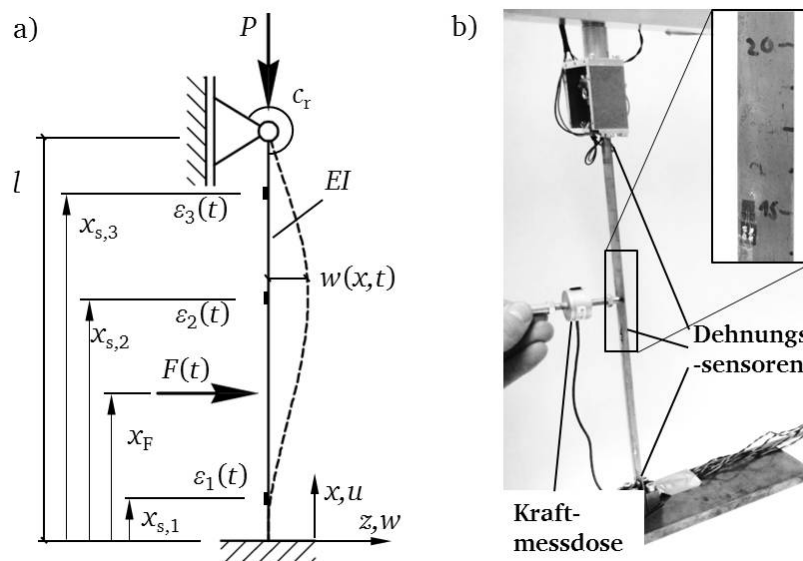
**Abbildung 7.3:** Spektrale Leistungsdichte der gemessenen und ermittelten Laterallast sowie des Fehlers zwischen diesen für rosa Rauschen

Die spektrale Leistungsdichte des Fehlers  $S_{ee}$  fällt mit zunehmender Frequenz ab, da sie von der Leistung des Belastungssignals abhängt. Im Bereich der ersten Resonanzfrequenz bei  $f_{1,e}$  ist erneut ein kleiner Peak in der spektralen Leistungsdichte zu erkennen. Insgesamt ist die Leistung des Belas-

tungssignals kleiner als bei den anderen experimentellen Simulationen in den Abschnitten 6.5 und 6.6. Dadurch nimmt der Einfluss von geometrischen Nichtlinearitäten auf die Unsicherheit in der ermittelten Belastung ab. So ist im Beispiel in Abschnitt 6.6 für die zeitlich ansteigende und insgesamt höhere Belastungsamplitude der relative effektive Fehler  $U_{\text{eff}} = 11,8 \%$ , für dieses Beispiel beträgt er  $U_{\text{eff}} = 6,3 \%$ .

### 7.1.3 Ermittlung von Lastort und Lasthöhe

Ziel dieser Anwendung ist die Ermittlung von Lastort und Lasthöhe einer quasistatischen Belastung mit variierendem Ort unter Verwendung eines experimentell ermittelten statischen Nachgiebigkeitsmodells, Dehnungssignalen an drei Messstellen und des Projektionsansatzes aus Abschnitt 4.3. Die drei Messstellen sind  $x_{s,1} = 15 \text{ mm}$ ,  $x_{s,2} = 150 \text{ mm}$  und  $x_{s,3} = 320 \text{ mm}$ . Die Axiallast  $P = 8 \text{ N}$  bleibt dabei konstant. Die Laterallast  $F(t)$  wird manuell an einem variierenden Lastort  $x_F$  auf dem Balken aufgebracht und mittels einer Kraftmessdose gemessen. Dadurch ist eine Variation des Lastortes ohne zusätzlicher, komplexer Versuchseinrichtung wie z. B. einer Führungsschiene möglich. Die Abtastrate beträgt  $f_s = 50 \text{ Hz}$  und die Filtereckfrequenz liegt mit  $f_c = 10 \text{ Hz}$  deutlich unter der ersten Eigenfrequenz des Balkens. So werden potentielle Resonanzschwingungen des Balkens am Beginn einer Belastung gefiltert. Folgende Abbildung 7.4 zeigt den Versuchsaufbau mit einer Laterallast mit variablem Lastort.

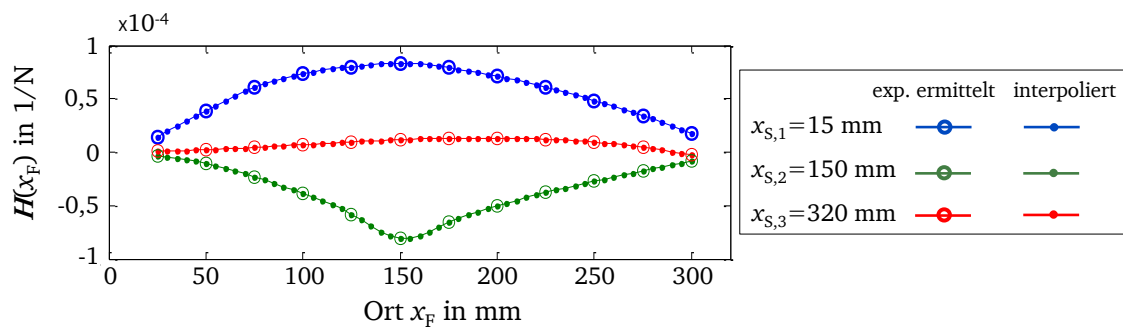


**Abbildung 7.4:** Versuchsaufbau zur Ermittlung von Lastort und Lasthöhe am axial belasteten Balken: a) mechanisches Ersatzschabild, b) Versuchsstand für experimentelle Simulation

Das zum Lastmonitoring benötigte mathematische Modell  $H(x_F)$  wurde in der experimentellen Simulation ermittelt. Dazu wurde hintereinander im Bereich von 25 mm bis 300 mm in äquidistanten Abständen von 25 mm an 12 Stellen auf dem Balken eine einzelne quasistatische Belastung aufgebracht. Aus den gemessenen Belastungen und an den drei Messorten gemessenen Dehnungen wurden die Nachgiebigkeiten, also die Dehnung des Balkens an den Messstellen bei einer Einheitsbelastung am Lastort  $x_F$ , für die einzelnen Lastorte ermittelt. Diese wurden mit einem Spline-Ansatz interpoliert, sodass im

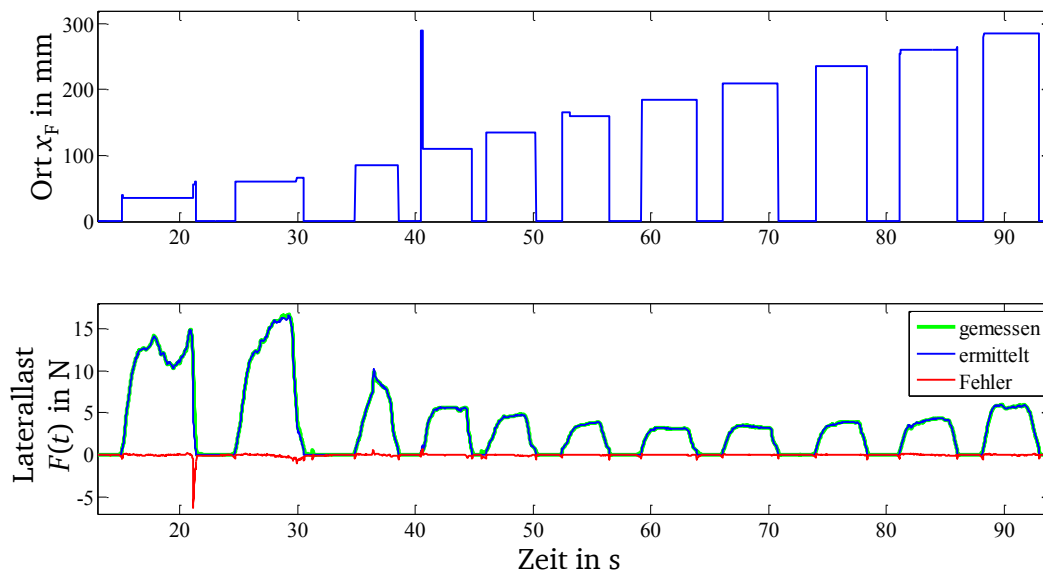


Modell  $H(x_F)$  die Nachgiebigkeit des Balkens in Abständen von 5 mm vorliegen. Folgende Abbildung 7.5 zeigt die Nachgiebigkeit in Abhängigkeit vom Lastort  $x_F$  für die drei Messstellen  $x_{s,i}$ .



**Abbildung 7.5:** Experimentell ermitteltes, interpoliertes Modell  $H$  zur Beschreibung des statischen Belastungs-Dehnungszusammenhangs

Das Modell  $H(x_F)$  wird verwendet, um aus dem Dehnungsvektor  $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = [\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t)]^T$  mit dem Projektionsansatz nach Abschnitt 4.3.1 zunächst den Lastort  $x_F$  und anschließend die Lasthöhe  $F(t)$  zu ermitteln. Als Lastorte wurden jeweils die Orte zwischen den zur Modellbildung verwendeten Lastorte verwendet, also bei  $x_F = (37,5 + n \cdot 50)$  mm mit  $n = 1, 2, \dots, 11$ . Dadurch wird eine Überanpassung (*overfitting*) verhindert, d. h. dass nur für die Belastungsfälle zur experimentellen Modellbildung verwendeten Lastorte der Lastort und die Lasthöhe ermittelt werden. Folgende Abbildung 7.6 zeigt das Ergebnis der Ermittlung des Lastortes und der Lasthöhe.



**Abbildung 7.6:** Ergebnis der experimentellen Validierung zur Lastortermittlung. Ermittelter Lastort (oben), gemessene und ermittelte Last sowie Fehler zwischen diesen (unten).

Wenn der Betrag der ermittelten Belastung kleiner als ein Grenzwert  $F_{\text{grenz}} = 0,5$  N ist, wird angenommen, dass keine Belastung vorliegt und der Lastort wird als 0 angenommen. Dadurch wird verhindert,

dass für sehr kleine Belastungen nahe Null durch den Algorithmus dennoch ein Lastort berechnet wird. Der Lastort wird für Bereiche zwischen der Belastung und der Entlastung des Balkens im Rahmen der Auflösung des Modells  $\mathbf{H}(x_F)$  für alle Orte richtig ermittelt. So wird z. B. für eine Belastung an  $x_F = 37,5$  mm der Lastort  $x_{F,e} = 35$  mm berechnet. Zu Beginn oder zu Ende einer Belastung resultieren teilweise Abweichungen in dem ermittelten Lastort. Diese können z. B. aus Schwingungen durch den Aufsetz- bzw. Abhebevorgang der Kraftmessdose resultieren. Der relative effektive Fehler der ermittelten Belastung  $F_e(t)$  beträgt für das durchgeführte Experiment  $U_{\text{eff}} = 4,1\%$ .

---

#### 7.1.4 Ermittlung einer Systemeigenschaftsänderung bei unbekannter Belastung

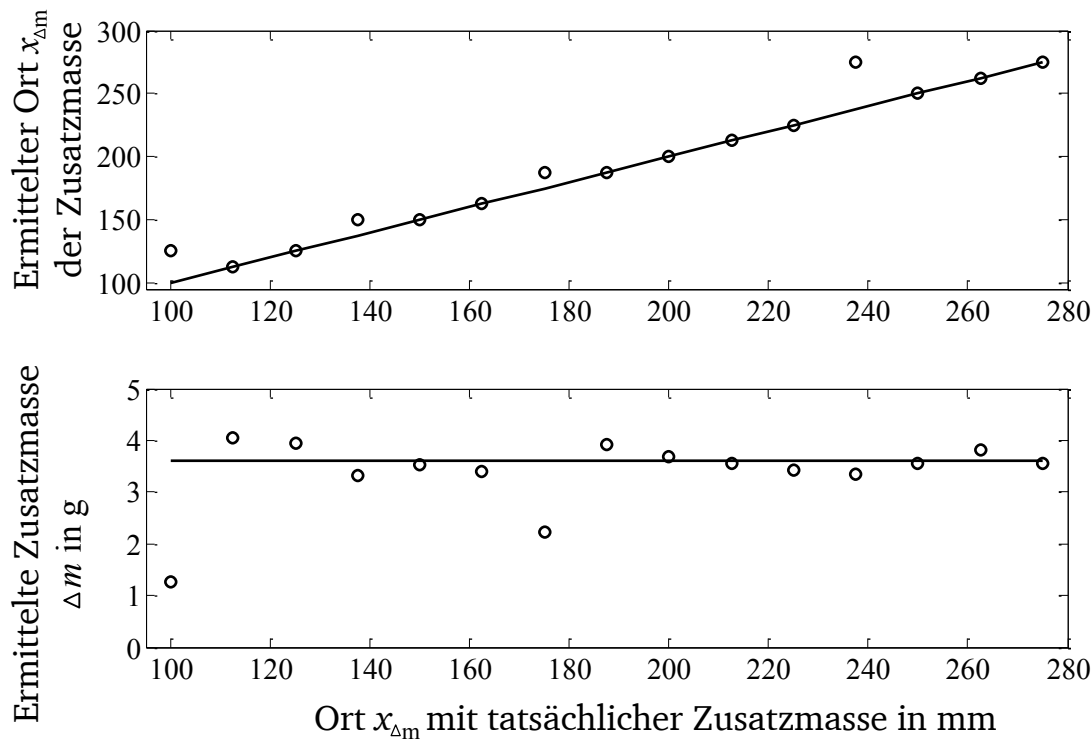
---

Ziel dieser Anwendung ist die Ermittlung einer Systemeigenschaftsänderung durch eine Zusatzmasse  $\Delta m$  auf dem Balken bei unbekannter Belastung  $F(t)$  an einem bekannten Lastort  $x_F$  mit der in Abschnitt 5.3 vorgestellten Methode. Dies erfolgt unter Verwendung eines experimentell ermittelten Impulsantwort-Modells, einer experimentell ermittelten Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{S}^e$  zur Beschreibung der Auswirkung der Zusatzmasse  $\Delta m$  an einem Ort  $x_{\Delta m}$  auf den Fehler  $\mathbf{e}_r$ , Dehnungsmessungen an drei Messstellen und des Projektionsansatzes aus Abschnitt 4.3. Die Axiallast  $P = 8$  N bleibt dabei konstant. Als Laterallast wird ein rosa  $1/f$ -Rauschen aufgebracht. Die Abtastfrequenz beträgt  $f_s = 1000$  Hz, die Filtereckfrequenz  $f_c = 500$  Hz. Das Impulsantwort-Modell wird unter Berücksichtigung von  $N_r = 10$  Moden gebildet, die zeitliche Dimension des Impulsantwort-Modells beträgt  $N_v = 1000$  Zeitschritte. Als Zusatzmasse wird ein Magnet mit einer Masse von  $\Delta m = 3,6$  g verwendet. Dies entspricht etwa 5% der Masse des Balkensystems inklusive dem Anteil der Kraftmessdose, welcher fest mit dem Balken verbunden ist und somit die Dynamik des Balkens beeinflusst. Die Zusatzmasse wird an 15 äquidistant verteilten Orten  $x_{\Delta m,i}$  im Vektor  $\mathbf{x}_{\Delta m} = [100, 112,5, 125, \dots, 275]^T$  mm auf dem Balken angebracht. Die Simulationsdauer bzw. Messdauer beträgt jeweils  $t_s = 30$  s für einen Fall der Zusatzmasse an einem Ort.

Als Sensoren werden drei Dehnungssensoren an den Messorten  $x_{s,1} = 15$  mm,  $x_{s,2} = 295$  mm und  $x_{s,3} = 320$  mm eingesetzt. Der Einsatz von Beschleunigungssensoren verspricht zwar im Vergleich zu Dehnungssensoren bessere Ergebnisse der Methode zur Ermittlung von Systemeigenschaftsänderungen, da diese in höheren Frequenzbereichen höherwertige Informationen über die dynamischen Eigenschaften des System liefern. Im Laufe der experimentellen Erprobung stellte sich jedoch heraus, dass die zusätzliche Masse durch die Beschleunigungssensoren Unstetigkeiten in der Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{S}_e$  hervor ruft. Ebenso wurde auf Dehnungssensoren in der Mitte des Balkens verzichtet, da der Magnet eine zusätzliche lokale Steifigkeit des Balkens hervorruft und so die Messsignale verfälscht. Abbildung 7.7 auf der folgenden Seite zeigt den Versuchsaufbau mit der Zusatzmasse  $\Delta m$  durch den Magneten.

Zunächst wird das Impulsantwort-Modell ohne Zusatzmasse experimentell ermittelt. Dieses dient als Basismodell und bleibt im Laufe der Ermittlung der Zusatzmasse unverändert. Die gemessenen Belastungen  $F_m(t)$  und gemessenen Dehnungen  $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = [\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t)]^T$  werden verwendet, um die Toeplitz-Matrix (4.23) des Impulsantwort-Modells zu ermitteln, vgl. 4.2.1. Im nächsten Schritt wird der Anteil der Modellunsicherheit an dem Bewertungsmaß  $\mathbf{e}_r$  nach (5.20) ermittelt. Dieser wird im Folgenden als Basisfehler  $\mathbf{e}_{r,\text{base}}$  bezeichnet. Er beträgt für das untersuchte System  $\mathbf{e}_{r,\text{base}} = [0.044, 0.067, 0.029]^T$  für die drei gemessenen Dehnungen.





**Abbildung 7.9:** Ermittlung des Ortes und der Höhe einer Zusatzmasse  $\Delta m$  in der experimentellen Simulation

Ähnlich der Ergebnisse aus der numerischen Simulation zu der vorgestellten Methode in Abschnitt 5.3 werden die meisten Orte  $x_{\Delta m}$  durch das Verfahren richtig ermittelt. Die Zusatzmasse  $\Delta m$  wird in den meisten Fällen mit einer Abweichung kleiner 15% der tatsächlichen Zusatzmasse von 3,6 g ermittelt.

Die prinzipielle Funktionstauglichkeit des vorgestellten Verfahrens wurde anhand der experimentellen Simulation in diesem Abschnitt aufgezeigt. Allerdings ist das untersuchte Fallbeispiel mit einer Zusatzmasse und 15 potentiellen Orten im Vergleich zu den Aufgaben der Schadenserkennung in praktischen Anwendungsbeispielen noch sehr überschaubar. Es sind aber, trotz der Einfachheit des Fallbeispiels, Abweichungen in ermitteltem Ort und Höhe der Zusatzmasse zu erkennen. Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Methode der virtuellen Verformungen großes Potential zur Lösung der gemischt-inversen Aufgabenstellung zur Ermittlung von Systemeigenschaftsänderungen bei unbekanntem Belastungen hat, wie bereits in 5.3 argumentiert und in der Veröffentlichung von ZHANG [152] gezeigt.

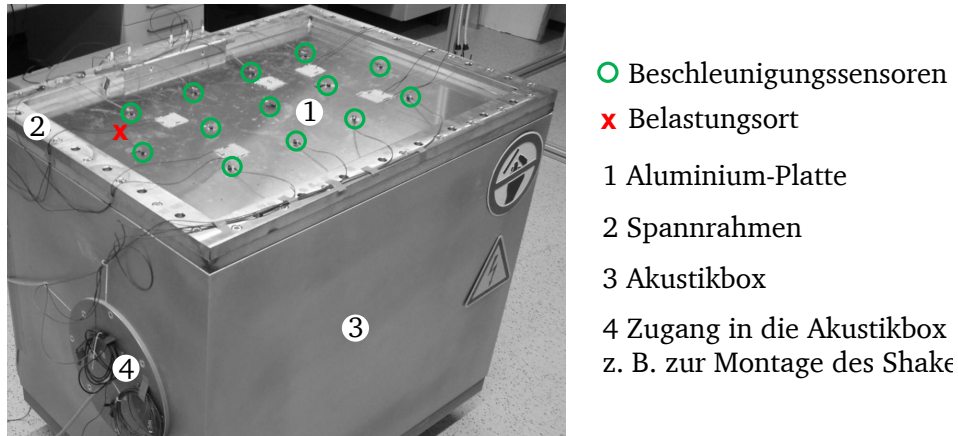
---

## 7.2 Die Rechteckplatte als Versuchsstand

---

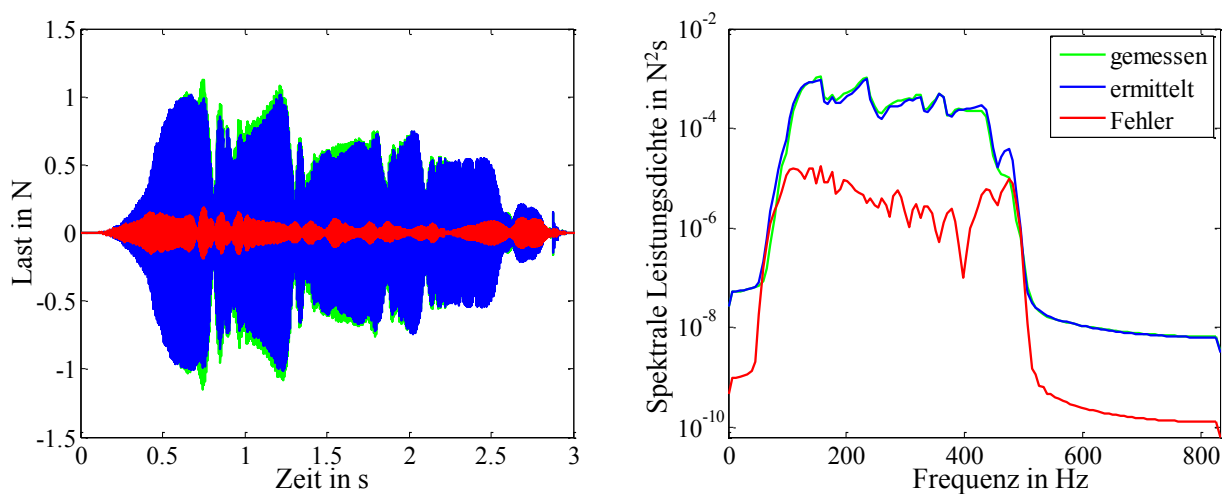
Als weiteres Beispiel zur experimentellen Validierung der Algorithmen zum Lastmonitoring wird die Realisierung einer Platte betrachtet. Die Rechteckplatte aus Aluminium mit einer Länge von 870 mm, einer Breite von 620 mm und einer Dicke von 4 mm ist über einem geschlossenen Raum aus massiven Holzplatten und Aluminium gespannt. Der Versuchsstand wurde ursprünglich zur Untersuchung akustischer Größen und Verfahren entwickelt. Eine nähere Beschreibung des Versuchsstandes findet sich in [87].

Abbildung 7.10 zeigt den Versuchsstand mit  $N_s = 13$  Beschleunigungssensoren und 5 Piezopatches zur aktiven Beeinflussung der Schwingungsdynamik der Platte. Die Piezopatches werden für die Untersuchung in dieser Arbeit nicht angesteuert. Der elektrodynamische Schwingerreger ist in der Akustikbox angebracht.



**Abbildung 7.10:** Versuchsstand zur Ermittlung von Belastungen an einer Platte

Als Belastung wurde ein Gleitsinus von 100 bis 500 Hz in einer Simulationszeit von  $t_s = 3$  s simuliert. Die Belastung wird in der Akustikbox des Versuchsstandes durch einen elektrodynamischen Schwingerreger aufgebracht und mit einer Kraftmessdose gemessen. Die Abtastrate  $f_s$  beträgt 1666,6 Hz, die Filtereckfrequenz  $f_c$  des Butterworth-Tiefpassfilters 8. Ordnung beträgt 500 Hz. Zusätzlich wurde ein Butterworth-Hochpassfilter 8. Ordnung mit einer Filtereckfrequenz von 100 Hz eingesetzt, um niederfrequente Störungen in den Beschleunigungssignalen zu filtern. Das mittels des in Abschnitt 4.2.1 skizzierten Verfahrens zur Systemidentifikation ermittelte Zustandsraummodell berücksichtigt  $N_r = N_s = 13$  Moden. Folgende Abbildung zeigt die gemessene und ermittelte Belastung im Zeit- und Frequenzbereich.



**Abbildung 7.11:** Gemessene und ermittelte Belastung an der Platte sowie Fehler zwischen diesen für Gleitsinus, Darstellung im Zeit- und Frequenzbereich

Der relative effektive Fehler für die Versuchsdauer beträgt  $U_{\text{eff}} = 12,5 \%$ . Das Ergebnis der Untersuchung zeigt, dass das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren zur Ermittlung von Belastungen auch für lasttragende Systeme geeignet ist, welche im betrachteten Frequenzbereich zum Lastmonitoring eine höhere Anzahl an Moden besitzen. Zudem zeigt der Versuch, dass eine Ermittlung dynamischer Belastungen auch unter Verwendung von ausschließlich Beschleunigungssensoren möglich ist. Statische Anteile in den zu ermittelten Belastungen werden dabei natürlich nicht berücksichtigt, können aber leicht durch andere Sensoren, z. B. Dehnungssensoren, ermittelt werden.

---

## 8 Zusammenfassung und Ausblick

---

---

### 8.1 Zusammenfassende Sichtweise zur Beherrschung von Unsicherheit im Lastmonitoring

---

In dieser Arbeit wurden zwei Ebenen der Beherrschung von Unsicherheit betrachtet:

1. Es wurden **Methoden zur Informationsgewinnung** über Belastungen und Systemeigenschaften vorgestellt. Die Funktionstauglichkeit der Methoden wurde in numerischen und experimentellen Simulationen aufgezeigt.
2. Unsicherheit, die in den Prozessen eines Lastmonitoring entstehen kann, wurde wie in Kapitel 5 gezeigt durch unterschiedliche **Maßnahmen zur Beschreibung, Bewertung und Beeinflussung von Unsicherheit** beherrscht.

In diesem zusammenfassenden Abschnitt werden die Beiträge aller in dieser Arbeit behandelten und untersuchten Methoden und Maßnahmen zur Beherrschung von Unsicherheit miteinander verglichen und diskutiert. So wird es möglich, wesentliche Hebel in der Beherrschung von Unsicherheit kenntlich zu machen. Es wird zunächst unterschieden, ob die jeweilige Methode oder Maßnahme einen qualitativen oder quantitativen Beitrag zur Beherrschung von Unsicherheit leisten.

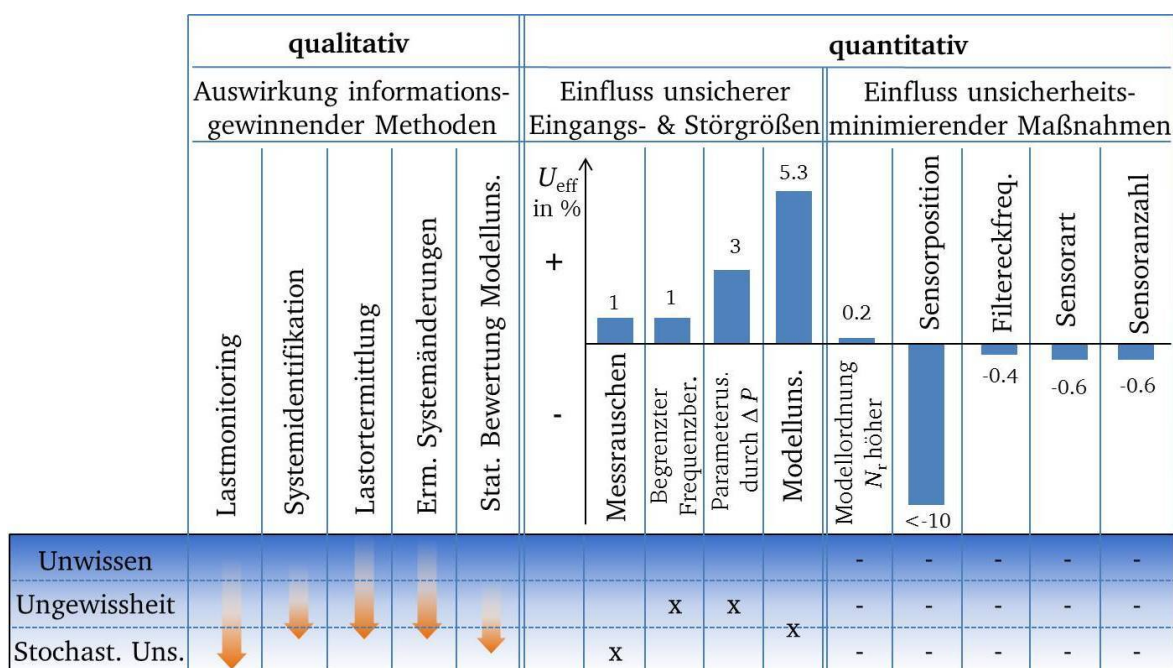
**Qualitativ** lässt sich der Beitrag einer Methode zur Beherrschung von Unsicherheit anhand des Unsicherheitsmodells mit seinen Unsicherheitskategorien 'Unwissen', 'Ungewissheit' und 'Stochastische Unsicherheit' bewerten. Durch den Anstieg an gesicherten, verfügbaren Informationen trägt eine Methode dazu bei, den Informationsgehalt einer betrachteten Größe von einer niedrigeren Unsicherheitskategorie in eine höhere Unsicherheitskategorie zu überführen. Beispielsweise liegt ohne Anwendung eines Lastmonitoring-Systems bezüglich der aktuellen Belastungen während der Nutzung Ungewissheit oder gar Unwissen vor, durch Anwendung der Methode des Lastmonitoring aber Stochastische Unsicherheit.

**Quantitativ** lässt sich der Beitrag einer Unsicherheit oder einer unsicherheitsminimierenden Maßnahme durch ihren Einfluss auf den relativen effektiven Fehler  $U_{\text{eff}}$  bewerten. Dabei wirkt sich die Unsicherheit in Eingangs- und Störgrößen im Allgemeinen negativ auf die ermittelten Belastungen aus und  $U_{\text{eff}}$  wird größer. Eine unsicherheitsminimierende Maßnahme durch geeignete Auswahl der Steuergrößen wirkt sich im Allgemeinen positiv auf die ermittelten Belastungen aus und  $U_{\text{eff}}$  wird kleiner. Eine konkrete quantitative Angabe des Beitrags einer einzelnen Unsicherheit oder einer einzelnen unsicherheitsminimierenden Maßnahme ist jedoch nicht immer sinnvoll und teilweise auch nicht möglich. So ist der Beitrag der Maßnahmen zur optimalen Sensorpositionierung an der Beherrschung von Unsicherheit auf den ersten Blick enorm hoch. Für die 'schlechteste' Sensorposition ist  $U_{\text{eff}} = 390\%$ , für die 'beste' Sensorposition aber nur  $U_{\text{eff}} = 0,4\%$ . Ein Vergleich dieser beiden Ergebnisse erscheint in diesem Beispiel so nicht sinnvoll. Es kann dennoch die Aussage getroffen werden, dass die Sensorposition einen hohen Einfluss auf die Unsicherheit in der ermittelten Belastung hat. Zudem lässt sich der Beitrag einer einzelnen Unsicherheit nicht oder nur schwer isoliert betrachten. Beispielsweise ist die Erprobung eines modellbasierten Lastmonitoring in einer experimentellen Simulation nicht ohne Messrauschen oder gar ohne

Modellunsicherheit möglich. In den allermeisten Fällen wirken sich unterschiedliche Unsicherheiten auf die ermittelten Belastungen gleichzeitig aus. Wechselwirkung im realen Betrieb des Lastmonitoring werden in dieser Arbeit zwar nicht untersucht. In der numerischen Simulation wurden aber in einer eigenen Arbeit [93] die Methoden der statistischen Versuchsplanung genutzt, um Wechselwirkungen von Unsicherheit in einem Lastmonitoring-System zu analysieren.

Der Vergleich einzelner Beiträge von Unsicherheit und unsicherheitsminimierender Maßnahmen, repräsentiert durch den relativen effektiven Fehler  $U_{\text{eff}}$ , kann also nur eine quantifizierte Abschätzung sein und nur im Vergleich aller anderen Beiträge erfolgen. Die zusammenfassende Ergebnisdarstellung kann nur für das in dieser Arbeit untersuchte Balkensystem mit den in den jeweiligen Untersuchungen angenommenen Variablen erfolgen und ist nur eingeschränkt auf andere lasttragende Systeme übertragbar. Insbesondere gelten die Ergebnisse für ein rosa  $1/f$ -Rauschen als angenommenes Lastspektrum.

Folgende Abbildung 8.1 zeigt eine zusammenfassende Darstellung aller qualitativen und quantitativen Beiträge der in dieser Arbeit untersuchten Methoden und Maßnahmen zur Beherrschung von Unsicherheit. **Qualitativ** wird die Auswirkung einer informationsgewinnenden Methode im SFB-Unsicherheitsmodell bewertet. **Quantitativ** wird unterschieden zwischen dem Einfluss einer unsicheren Eingangs- oder Störgröße des Lastmonitoring-Systems sowie deren Unsicherheitskategorie und dem Einfluss einer unsicherheitsminimierenden Maßnahme durch eine Wahl der Steuergrößen zur Reduktion der Auswirkung gegebener Unsicherheit. Für diese wird keine Unsicherheitskategorie angegeben, da die Steuergrößen deterministisch gewählt werden können.



**Abbildung 8.1:** Zusammenfassende Darstellung des Einflusses von unsicheren Größen und unsicherheitsbeherrschender Methoden und Maßnahmen für das Lastmonitoring-System am Balken.

Es folgt eine zusammenfassende Beschreibung aller in Abbildung 8.1 gezeigten und in dieser Arbeit untersuchten Unsicherheiten und unsicherheitsminimierenden Methoden und Maßnahmen.



Ein **Lastmonitoring** ermöglicht die Gewinnung von Informationen über den aktuellen Belastungszustand. Vor dem Einsatz eines Lastmonitoring-Systems liegt Unwissen oder Ungewissheit bezüglich des aktuellen Belastungszustands des lasttragenden Systems vor. Belastungen sind ggf. vorab abgeschätzt durch Normen, standardisierte Lastkollektive oder Messungen an Prototypen, vgl. 2.1.1. Durch Einsatz eines Lastmonitoring-Systems werden die aktuellen und produktindividuellen Belastungszustände in der Nutzung des lasttragenden Systems bekannt. Werden diese gespeichert, z. B. durch ein Rainflow-Verfahren [63], sind die Lastamplituden in ihrer Häufigkeitsverteilung bekannt. Es liegt Stochastische Unsicherheit vor.

Die **Systemidentifikation** ermöglicht die Gewinnung von Informationen über die Parameter des mathematischen Modells zur Abbildung des realen Systems, Abschnitt 4.2.1. Vor der Systemidentifikation können die Parameter des mathematischen Modells allenfalls aus numerischen Modellen abgeschätzt werden. Durch Verwendung geeigneter Systemidentifikations-Algorithmen werden die Parameter des mathematischen Modells derart ermittelt, dass die Messdaten möglichst gut durch das Modell beschrieben werden können. Allerdings werden bei den in dieser Arbeit verwendeten Verfahren zur Systemidentifikation nur die Nominalwerte der Parameter ermittelt. Die Häufigkeitsverteilungen bleiben unbekannt. Unsicherheit in den Modellparametern nach Durchführung einer Systemidentifikation kann also zwischen den Kategorien Ungewissheit und Stochastischer Unsicherheit eingeordnet werden.

Die in Abschnitt 5.2 vorgestellte Methode zur **Lastortermittlung** ermöglicht es, vorab unbekannte Lastorte zu ermitteln. Ohne dieses Verfahren wäre ein variabler Lastort einer Belastung völlig unbekannt, es läge Unwissen vor und es ließen sich allenfalls die äquivalenten Belastungen ermitteln. Das Verfahren ermittelt den Lastort als deterministischen Wert. Abweichungen zwischen dem tatsächlichen und dem ermittelten Lastort durch Unsicherheit in der Anwendung des Verfahrens lassen sich allenfalls durch eine experimentelle Erprobung beschreiben. Nach Anwendung des Verfahrens ist die Unsicherheit in der Kenntnis des Lastortes also zwischen Ungewissheit und Stochastische Unsicherheit einzuordnen.

Systemeigenschaften können sich im Laufe der Nutzung eines lasttragenden Systems ändern. Die Änderungen sind aber nicht bekannt, es liegen nur die Nominalwerte des unveränderten Systems vor. Es herrscht Unwissen bezüglich der Systemeigenschaftsänderung. Die Ursache einer Systemeigenschaftsänderung, in dieser Arbeit Ort und Höhe einer Zusatzmasse, können durch die in Abschnitt 5.3 vorgestellte Methode zur **Ermittlung von Systemeigenschaftsänderungen in der Nutzung** unabhängig von der Kenntnis der tatsächlichen Belastungen bekannt gemacht werden. Werden die ermittelten Systemeigenschaftsänderungen verwendet, um das Modell zum Lastmonitoring anzupassen, wird Unsicherheit in den ermittelten Belastungen reduziert. Nach Anwendung des Verfahrens ist die Unsicherheit in der Kenntnis der Systemeigenschaftsänderung wiederum zwischen Ungewissheit und Stochastische Unsicherheit einzuordnen.

Es ist bekannt, dass Modellunsicherheit wirkt, aber es ist nicht bekannt, wie hoch diese ist und wie sie über die Frequenz verteilt ist. Lediglich der relative effektive Fehler  $U_{\text{eff}}$  beschreibt die Modellunsicherheit pauschal und undifferenziert für das gesamte Lastspektrum. Es liegt Ungewissheit bezüglich der herrschenden Modellunsicherheit vor. Nach Anwendung der in Abschnitt 6.6 vorgeschlagenen Methode

zur **statistischen Bewertung von Modellunsicherheit** wird Modellunsicherheit durch die Quantifizierung systematischer und stochastischer Abweichungen im Fehlerübertragungsmodell bewertet. Dabei erfolgt die Bewertung des Streubereichs durch Konfidenzintervalle, die Häufigkeitsverteilung ist nahezu, aber nicht vollständig beschrieben. Es liegt Stochastische Unsicherheit vor.

---

### 8.1.2 Quantitativer Beitrag von Unsicherheit und unsicherheitsminimierender Maßnahmen

---

**Messrauschen** bewirkt stochastische Abweichungen zwischen der tatsächlichen Messgröße und dem Messsignal. Thermisches Messrauschen, wie es für Messungen mit DMS oder Beschleunigungssensoren vorliegt, ist mittelwertfrei, gaußverteilt und seine Standardabweichung ist leicht zu ermitteln. Es liegt Stochastische Unsicherheit vor. Messrauschen leistet im Vergleich zu anderen Unsicherheiten einen geringen Beitrag an  $U_{\text{eff}}$ , wenn die Sensorpositionen geeignet gewählt wurden. Für ein Messrauschen mit einer Standardabweichung von 5% der Standardabweichung des Messsignals, wie in dieser Arbeit für die numerischen Simulationen angenommen, resultiert bei Weg- und Beschleunigungsmessung ein relativer effektiver Fehler von etwa  $U_{\text{eff}} = 1\%$ , vgl. Abbildung 5.1 und Tabelle 6.2. Dieser Wert wird in etwa auch in der experimentellen Simulation erreicht, vgl. Abbildung 6.8.

Die Axiallast  $P$  ist für das vorgestellte Balkensystem nicht nur eine Belastung, sondern auch ein Parameter des mathematischen Modells zur Ermittlung der Laterallast. Unsicherheit in der Kenntnis der tatsächlichen Axiallast ist eine **Parameterunsicherheit**. In Abschnitt 6.5 wird der Zusammenhang zwischen einer Parameterunsicherheit und der daraus resultierenden Abweichung in der ermittelten Laterallast untersucht. Darin wird deutlich, dass diese Parameterunsicherheit einen hohen Einfluss auf die Abweichungen in den ermittelten Belastungen haben kann. Wird die Axiallast über einen statischen Belastungs-Dehnungszusammenhang unter Verwendung gemessener axialer Dehnungen  $\varepsilon_{\text{ax}}$  nach (??) ermittelt, sind bei einer Axiallast von  $P = 20 \text{ N}$  Abweichungen zwischen der gemessenen und der ermittelten Axiallast von  $\Delta P = 0,4 \text{ N}$  zu erwarten, Abschnitt 7.1.1. Dies resultiert nach den Ergebnissen der Untersuchung in Abschnitt 6.5 zu einem relativen effektiven Fehler von etwa  $U_{\text{eff}} = 3\%$ , vgl. Abbildung 6.9. Übergeordnet kann festgehalten werden, dass Parameterunsicherheit einen hohen Einfluss auf die ermittelten Belastungen haben kann, dass aber auch ausreichend Methoden und Maßnahmen zur Beherrschung dieser Unsicherheit zur Verfügung stehen, z. B. die Ermittlung der Parameter des Modells durch eine Systemidentifikation, die Ermittlung von Systemeigenschaftsänderungen in der Nutzung oder die Ermittlung der Axiallast  $P$  zur Adaption des Modells. Da die Abweichungen der Axiallast nicht genau bekannt sind, liegt Ungewissheit vor.

**Modellunsicherheit** entsteht durch die vereinfachende Abbildung des realen Systems im mathematischen Modell. Für das untersuchte Balkensystem trägt diese Unsicherheit quantitativ den größten Anteil an den Abweichungen der ermittelten Belastungen bei. Mögliche Ursachen für Modellunsicherheit wurden in Abschnitt 6.6 diskutiert. Insbesondere beeinflussen nicht im mathematischen Modell berücksichtigte Moden und Nichtlinearitäten durch geometrische Einflüsse oder nichtlineare Randbedingungen die Unsicherheit in der ermittelten Belastung. In der experimentellen Validierung in Abschnitt 7.1.2 wurde trotz aller unsicherheitsminimierender Maßnahmen bei einer Belastung mit einem rosa  $1/f$ -Rauschen mit konstanter Leistung über der Zeit ein relativer effektiver Fehler in der ermittelten Belastung von  $U_{\text{eff}} = 6,3\%$  erreicht. Berücksichtigt man, dass etwa  $U_{\text{eff}} = 1\%$  aus Messrauschen resultiert und keine

Parameterunsicherheit durch eine potentielle Abweichung der Axiallast vorliegt, trägt die Modellunsicherheit einen großen Anteil von etwa  $U_{\text{eff}} = 5,3\%$  am relativen effektiven Fehler bei. Modellunsicherheit lässt sich durch das in Abschnitt 6.6 beschriebene Fehlerübertragungsmodell beschreiben, es liegt Ungewissheit bis Stochastische Unsicherheit vor.

Belastungen lassen sich nicht in einem unbegrenzten Frequenzbereich ermitteln. In Abschnitt 6.1 wurde gezeigt, wie der **Frequenzbereich eines zu ermittelnden Belastungssignals** angemessen gewählt werden kann und wie hoch der Anteil der Signalleistung des nicht betrachteten Frequenzbereichs an der Gesamtleistung des Belastungssignals ist. Dabei wurde für das Beispiel des rosa  $1/f$ -Rauschens festgestellt, dass etwa 98% der Leistung des Belastungssignals durch das Lastmonitoring erfasst werden können. Überträgt man diesen Wert auf den relativen effektiven Fehler, indem die nicht ermittelte Leistung auf ihren Effektivwert umgerechnet wird, erhält man durch den begrenzten Frequenzbereich einen Beitrag am relativen effektiven Fehler  $U_{\text{eff}}$  von etwa 1% für das angenommene Beispiel. Da diese Unsicherheit nicht näher durch statistische Größen beschrieben wird, liegt Ungewissheit vor.

Die Sensorposition beeinflusst maßgeblich die Unsicherheit in der ermittelten Belastung. Messrauschen wirkt sich für unterschiedliche Sensorpositionen unterschiedlich stark aus. In Abschnitt 6.2 wurde gezeigt, wie durch eine geeignete, **unsicherheitsminimierende Auswahl der Sensorposition** die Auswirkung von Messrauschen wesentlich verringert werden kann. Ein Vergleich des relativen effektiven Fehlers vor und nach der Anwendung der Maßnahme erscheint aber nicht sinnvoll, da das Ergebnis von der Vorabannahme einer Sensorposition abhängt. Eine Verringerung des relativen effektiven Fehlers  $U_{\text{eff}}$  von 10 Prozentpunkten und mehr durch die geeignete Positionierung der Sensoren kann aber durchaus erwartet werden.

Die **Auswahl der Filtereckfrequenz**  $f_c$  etwas oberhalb der höchsten Eigenfrequenz des mathematischen Modells resultiert nach Abschnitt 6.3 in einer geringeren Unsicherheit im Vergleich zu höheren Filtereckfrequenzen. Im Vergleich zu höheren Filtereckfrequenzen lässt sich so der relative effektive Fehler  $U_{\text{eff}}$  um etwa 0,4 Prozentpunkte verringern. Die Auswahl der Abtastrate beeinflusst hingegen den relativen effektiven Fehler kaum, kann aber von Bedeutung für die weitere Analyse der ermittelten Belastungen sein.

Eine **Erhöhung der Modellordnung**  $N_r$  bringt zwar einerseits mit sich, dass ein höherer Anteil der Signalleistung der Belastung ermittelt werden kann, andererseits sich aber der relative effektive Fehler  $U_{\text{eff}}$  erhöht, wie in Abschnitt 6.4 diskutiert. Ein Grund hierfür könnte sein, dass im Zustandsbeobachter bei höherer Modellordnung zusätzliche Zustände ermittelt werden müssen. Die vermeintlich unsicherheitsminimierende Wirkung einer höheren Modellordnung resultiert also tatsächlich in einer höheren Unsicherheit in den ermittelten Belastungen, allerdings nur mit einer Erhöhung des relativen effektiven Fehlers  $U_{\text{eff}}$  von etwa 0,2 Prozentpunkten, vgl. Abschnitt 6.4. Natürlich darf andererseits die Modellordnung für den ausgewählten Frequenzbereich auch nicht zu gering sein, da sonst nicht alle Moden erfasst werden können und so eine höhere Unsicherheit in der ermittelten Belastung resultieren kann.

Eine Erhöhung der **Anzahl an Sensoren** bringt durch die resultierende Ensemble-Mittlung eine geringere Unsicherheit, wie in Abschnitt 6.4 diskutiert. Bei einer Erhöhung der Anzahl an Sensoren von  $N_s = 2$  auf  $N_s = 4$  resultiert für Dehnungs- und Beschleunigungsmessung eine Verringerung des relativen effektiven Fehlers  $U_{\text{eff}}$  von etwa 0,6 Prozentpunkten, vgl. Abschnitt 6.4. Werden für  $N_r$  Moden im mathe-

matischen Modell  $N_s = N_r$  Sensoren verwendet, lässt sich der relative effektive Fehler durch Dehnungs- und Beschleunigungsmessungen im Vergleich zur ausschließlichen Dehnungsmessung ebenfalls um etwa 0,6 Prozentpunkte reduzieren.

---

## 8.2 Fazit und Ausblick

---

In der vorliegenden Arbeit wird erstmals die ganzheitliche und praxisorientierte Beherrschung von Unsicherheit in einem Lastmonitoring-System diskutiert und erprobt. Dazu werden einerseits bekannte und erweiterte Algorithmen zur echtzeitfähigen Ermittlung von Belastungen, von Lastorten sowie Änderungen von Systemeigenschaften entwickelt, beschrieben und am Balkensystem in numerischen und experimentellen Simulationen validiert. Andererseits ermöglicht eine Methodik, bestehend aus Methoden zur Beschreibung, Bewertung und Beeinflussung von Unsicherheit, die Beherrschung von Unsicherheit, die in den Prozessen des Lastmonitorings auftreten kann. Unsicherheit in einem Lastmonitoring-System kann in vier wesentliche Arten unterschieden werden: Parameterunsicherheit und Modellunsicherheit im mathematischen Modell zum Lastmonitoring sowie stochastische und systematische Abweichungen in den Messsignalen.

Die Beherrschung von Unsicherheit in einem Lastmonitoring-System ist durch Anwendung unterschiedlicher unsicherheitsminimierender Methoden und Maßnahmen möglich. Technologien zur Informationsgewinnung, z. B. das Lastmonitoring selbst oder Methoden zur Systemidentifikation, reduzieren Unsicherheit durch den Anstieg an verfügbarer Information über die tatsächlichen Betriebslasten und Systemeigenschaften. Maßnahmen zur Beeinflussung von Unsicherheit wie beispielsweise eine unsicherheitsminimierende Sensorpositionierung tragen dazu bei, dass die Abweichungen zwischen tatsächlichen und ermittelten Belastungen reduziert und somit die Güte der Information über die tatsächliche Produktnutzung steigt. Die Beiträge einzelner Methoden und Maßnahmen zur Beherrschung von Unsicherheit werden qualitativ durch das Unsicherheitsmodell und quantitativ durch den relativen effektiven Fehler beschrieben.

Eine neue Methode auf Basis eines Projektionsansatzes ermöglicht die grundlegende Lösung unterbestimmter Inverser Probleme. Sie beruht auf der realistischen Annahme, dass oftmals tatsächlich nur wenige Ursachen zu den beobachteten Wirkungen führen. Der Ansatz wird in zwei praxisrelevanten Beispielen zur a) Ermittlung von Lastort und zur b) Ermittlung von veränderlichen Systemeigenschaften bei unbekanntem Belastungen in der numerischen und experimentellen Simulation am Balkensystem erfolgreich validiert.

Der in dieser Arbeit verwendete Zustandsbeobachter für unbekanntem Eingangsgrößen unter Verwendung von Dehnungs- und Beschleunigungssignalen erscheint nach den Ergebnissen dieser Arbeit als ein zuverlässiger Ansatz zum Lastmonitoring. Er ermöglicht die numerisch effiziente und echtzeitfähige Ermittlung von statischen und dynamischen Belastungen unter optimaler statistischer Berücksichtigung unvermeidbarer Unsicherheit im Modell und in den Messsignalen. Darüber hinaus können die inneren Systemzustände zur Regelung oder zur Abschätzung des Verformungszustandes der gesamten Struktur verwendet werden.

Bei den Untersuchungen am Balkensystem und an der Platte wurden in experimentellen Simulationen für ein breitbandiges Belastungsspektrum eine relative effektive Abweichung  $U_{\text{eff}}$  von etwa 6% bis 12% in der ermittelten Belastung erreicht. Den wesentlichen Beitrag an dieser Abweichung leistet dabei die Modellunsicherheit durch unvollständige Abbildung des realen Systems beispielsweise durch Linearisierung oder Modellreduktion. Die Abweichungen lassen sich durch eine neue, in dieser Arbeit vorgestellten Methode zur Ermittlung eines Fehlerübertragungsmodells statistisch beschreiben und in weiteren Analysen beispielsweise in der Produktauslegung oder der Abschätzung der Restlebensdauer des lasttragenden Systems durch Schadensakkumulationsrechnung berücksichtigen.

Die vorliegende Arbeit bietet die Basis für weitere Untersuchungen zu Unsicherheit in der Nutzung lasttragender Systeme. Die Methodik und die verwendeten Begriffe können aus Sicht des Autors auf andere informationsverarbeitende Technologien wie z. B. aktive Systeme oder Methoden der Schadenserkennung übertragen werden.

Es ist zu erwarten, dass die Untersuchung von Unsicherheit in praxisnahen oder praktischen Aufgabenstellung des Lastmonitorings an komplexen lasttragenden Systemen, beispielsweise Flugzeugstrukturen und -fahrwerken, Windkraftanlagen oder Brücken, neue, in dieser Arbeit nicht berücksichtigte Unsicherheit hervor bringen wird. Insbesondere dürften Kontaktstellen und Gelenke zwischen einzelnen Bauteilen und deren nichtlineare und oftmals unbekannte Eigenschaften zu einer Erhöhung der Unsicherheit in der ermittelten Belastung beitragen. Die in dieser Arbeit vorgeschlagene Methodik kann dann nach Bedarf erweitert werden.

Zur Beschreibung und Bewertung von Unsicherheit und deren Wechselwirkung bieten Methoden der BAYESSchen Statistik sicherlich eine Vielzahl an Anwendungsmöglichkeiten. Zustände dynamischer Systeme können durch MARKOV-Prozesse stochastisch beschrieben werden. Gelingt es, ausreichend variable stochastische Modelle und passende Schätzalgorithmen zur Anpassung der Eigenschaften dieser stochastischen Modelle zur Verfügung zu stellen, können so eine Vielzahl unterschiedlicher ingenieurmäßiger Problemstellungen behandelt werden, wie andere Forschungsarbeiten bereits andeuten, z. B. von K. WORDEN oder R. ZHANG.

Statistische Versuchsplanung und die Verwendung von Metamodellen zur Bewertung der Auswirkung von Unsicherheit und deren Wechselwirkung in einem Lastmonitoring-System wurden in eigenen Arbeiten erprobt [93]. Letztendlich erfolgte aber in dieser Arbeit eine Zerlegung der Bewertung von Unsicherheit in Teilproblemstellung, da so einzelne Effekte besser untersucht und beschrieben werden können. Für komplexere Systeme bietet die statistische Versuchsplanung aus Sicht der Autors großes Potential zur Bewertung und letztendlich auch zur Beherrschung von Unsicherheit durch Anwendung von Methoden der Optimierung.

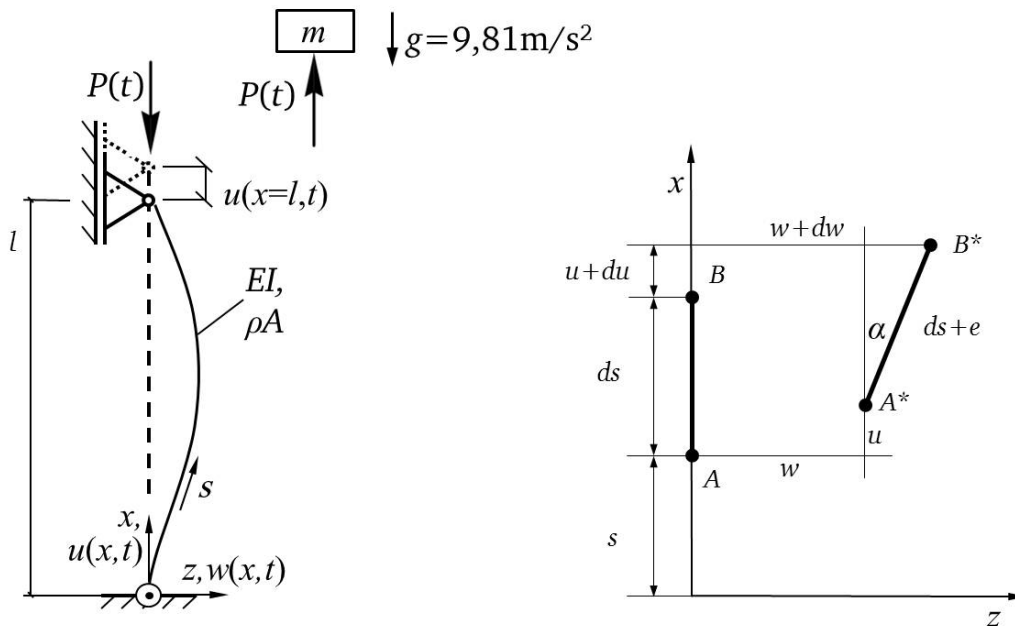
Die Ermittlung von Systemeigenschaftsänderungen ohne Kenntnis der Betriebslast ist immer noch eine große Herausforderung in der Forschung. Dabei hat diese Problemstellung für die Schadenserkennung lasttragender Leichtbaustrukturen eine hohe Praxisrelevanz. Die in dieser Arbeit vorgestellte Virtual Distorsion Method zur Lösung dieser gemischten Inversen Problemstellung beruht auf der Redundanz verfügbarer Informationen. Die Ausnutzung von Redundanzen in den verfügbaren Informationen

bietet generell ein breites Anwendungsfeld in der Ermittlung unbekannter Größen im Monitoring, wie in dieser Arbeit aufgezeigt wurde. Zur Verbesserung der Effektivität und Effizienz der Methode wurden am Ende von Abschnitt 5.3 bereits einige Aspekte genannt. Insbesondere sollte der in dieser Arbeit skalar formulierte Fehler zur Beschreibung der Auswirkung einer Systemeigenschaftsänderung auf den Fehler eines Sensorsignals im Zeitbereich in den Frequenzbereich übertragen werden. So liegen mehr Informationen zur Ermittlung der Systemeigenschaftsänderung vor. Darüber hinaus ermöglichen die Approximation des Impulsantwort-Modells und der Messsignale durch Polynomansätze oder Wavelets das Potential zur Reduktion des numerischen Berechnungsaufwandes [152]. Gegenbenenfalls bieten nicht-lineare und iterative Optimierungsmethoden weiteres Potential zur Verbesserung der Ergebnisse der Virtual Distorsion Methode. Darüber hinaus bieten die Methoden des COMPRESSED SENSING zur Lösung unterbestimmter, dünn besetzter linearer Gleichungssysteme ein hohes Potential zum Lastmonitoring bei unbekanntem Lastort [50] und ggf. auch zur Ermittlung von lokalen Systemeigenschaftsänderungen, vgl. [96].

## A Lineare und nichtlineare Bewegungsgleichungen des axial belasteten Balkens

In diesem Abschnitt werden Bewegungsgleichungen zur Beschreibung des linearen und nichtlinearen dynamischen Verhaltens des axial belasteten Balkens hergeleitet. Die Herleitung der linearen Bewegungsgleichungen beruht im Wesentlichen auf [55, 62, 109, 146]. Die Herleitung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen konnte in der in dieser Arbeit dargestellten Form nicht in der Literatur gefunden werden.

Das in dieser Arbeit untersuchte Balkensystem ist erneut in Abbildung A.1 dargestellt. Darin ist  $x$  die Balkenlängsrichtung,  $s$  die Bogenlänge,  $t$  die Zeit,  $P(t)$  die Axiallast,  $EI_y$  die konstante Biegesteifigkeit und  $\rho A$  die konstante Masseverteilung über den Balken,  $w(x, t)$  die Auslenkung des Balkens in  $z$ -Richtung und  $u(x, t)$  die Auslenkung des Balkens in  $x$ -Richtung. Für den schlanken Balken werden Schubverformungen und Drehträgheiten vernachlässigt. Ebenso wird die Dämpfung des Balkens in den Herleitungen in diesem Abschnitt vernachlässigt. Die Axiallast  $P(t)$  ist abhängig von der Masse, von der Erdbeschleunigung  $g$  und der Auslenkung  $u(x = l, t)$ . Rechts ist ein Balkenelement  $AB$  vor einer Verformung und  $A^*B^*$  nach einer Verformung und dessen geometrischer Zusammenhang dargestellt.



**Abbildung A.1:** Axial belasteter Balken und Absenkung  $u(x = l, t)$  der Masse  $m$  bei Auslenkung in  $z$ -Richtung und geometrischer Zusammenhang zwischen den infinitesimalen Abschnitten  $dx$ ,  $dw$  und  $ds$ .

Es werden zunächst nur geometrische Zusammenhänge betrachtet, die zeitliche Abhängigkeit der Variablen wird zunächst vernachlässigt. Nach der EULERSCHEN Balkentheorie erfährt ein Balkenelement  $AB$  der infinitesimalen Länge  $ds$  bei Belastung eine Dehnung  $\varepsilon$  und verformt sich zu dem Element  $A^*B^*$  mit

einer Länge  $ds + e$  und einem Verformungswinkel  $\alpha$ . Die Gesamtverformung  $e$  des Elements ergibt sich aus der Verschiebung  $u(s)$  in  $x$ -Richtung und der Verschiebung  $w(s)$  in  $z$ -Richtung zu

$$e = \sqrt{(ds + du)^2 + dw^2} - ds. \quad (\text{A.1})$$

Die resultierende Dehnung in axiale Richtung  $e/ds$  ist

$$\varepsilon_{\text{ax}} = \sqrt{(1 + u')^2 + w'^2} - 1. \quad (\text{A.2})$$

Eine TAYLOR-Reihenentwicklung von (A.2) um  $\varepsilon_{\text{ax}} = 0$  bis zu Gliedern 4. Ordnung liefert

$$\varepsilon_{\text{ax}} = u' + \frac{w'^2}{2} - \frac{w'^4}{8} - \frac{u'w'^2}{2}. \quad (\text{A.3})$$

Zusätzlich ergibt sich durch Rotation  $\alpha$  des Balkenelements mit

$$\tan(\alpha) = \frac{w'}{1 + u'} \quad (\text{A.4})$$

eine von  $z$  abhängige Dehnung

$$\varepsilon_z(s, z) = -z\kappa, \quad (\text{A.5})$$

wobei  $\kappa$  die Krümmung des Balkens

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{ds}{d(A^*B^*)} = \frac{(1 + u')w'' - u''w'}{((1 + u')^2 + w'^2)^{3/2}} \quad (\text{A.6})$$

ist [109]. Eine TAYLOR-Entwicklung um  $\varepsilon_z = 0$  bis zum 3. Glied liefert

$$\varepsilon_z(s, z) = -z \left( w'' - 2w''u' - w'u'' - \frac{3}{2}w'^2w'' \right). \quad (\text{A.7})$$

Der Zusammenhang zwischen der Dehnung und den Verformungen des Balkenelements unter Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearität lässt sich somit ausdrücken als

$$\varepsilon(s, z) = \underbrace{u'}_{\text{linearer Term}} + \frac{w'^2}{2} - \frac{w'^4}{8} - \frac{u'w'^2}{2} - \underbrace{z \left( w'' - 2w''u' - w'u'' - \frac{3}{2}w'^2w'' \right)}_{\text{linearer Term}}. \quad (\text{A.8})$$

Zur Herleitung der linearen partiellen Differentialgleichung werden nur die linearen Terme betrachtet. Es gilt die LAGRANGE-Gleichung

$$L = T - U \quad (\text{A.9})$$

mit der kinetischen Energie

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l (\dot{w}(s, t))^2 ds, \quad (\text{A.10})$$



der potentiellen Energie  $U = U^W + U^P$  infolge der Verformung des Balkens  $w(s, t)$  mit

$$U^W = \frac{1}{2}EI_y \int_0^l (w''(s, t))^2 ds \quad (\text{A.11})$$

und infolge der axialen Last  $P$  mit

$$U^P = Pu(x = l, t). \quad (\text{A.12})$$

Die Absenkung des Lagers ergibt sich zu

$$u(x = l, t) = l - \int_0^l \cos(\alpha) ds, \quad \text{wobei} \quad \alpha \approx \tan(\alpha) = w'. \quad (\text{A.13})$$

Mit einer TAYLOR-Reihenentwicklung von  $\cos(w')$  um  $w' = 0$  bis zu den quadratischen Gliedern ist die potentiellen Energie infolge der Axiallast somit

$$U^P = P \int_0^l \frac{(w'(s, t))^2}{2} ds. \quad (\text{A.14})$$

Die Variation nach dem HAMILTONSchen Prinzip lautet allgemein

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (\text{A.15})$$

wobei  $\delta$  die Variation bezeichnet. Einsetzen der Integrale (A.10), (A.11) und (A.14) in (A.9) und in (A.15) liefert

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{1}{2} \rho A (\dot{w}(s, t))^2 - \frac{1}{2} EI_y (w''(s, t))^2 + \frac{P}{2} (w'(s, t))^2 ds dt = 0. \quad (\text{A.16})$$

Vertauschen der Integrale, Anwendung der Kettenregel und der partiellen Integration [62] liefert

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \int_0^l \underbrace{\rho A \ddot{w}(s, t) + EI_y w^{IV}(s, t) + Pw''(s, t)}_{\text{Bewegungsgleichung}=0} \delta w ds - \underbrace{EI_y w'' \delta w'|_0^l + EI_y w''' \delta w|_0^l + Pw' \delta w|_0^l}_{\text{Randterme}=0} \right) dt = 0. \quad (\text{A.17})$$

Für kleine Verformungen gilt  $s \approx x$ . Die partielle Differentialgleichung zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens des axial belasteten Euler-Bernoulli-Balkens lautet somit [62]

$$EI_y w^{IV}(x, t) + \rho A \ddot{w}(x, t) + Pw''(x, t) = 0. \quad (\text{A.18})$$

Zur numerischen Berechnung des dynamischen Verhaltens des Balkens für beliebige Belastungen im Zeitbereich kann (A.18) ortsdiskretisiert werden. In dieser Arbeit dient ein Galerkin-Verfahren mit lokalen Ansatzfunktionen zur Beschreibung des linearen dynamischen Verhaltens in Abschnitt A.1. Zur Beschreibung des nichtlinearen dynamischen Verhaltens in Abschnitt A.2 wird ein Ritz-Verfahren mit globalen Ansatzfunktionen angewendet. Für beide Verfahren werden die Variablen  $x$  und  $t$  des Balkens getrennt in eine endliche Reihe mit

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^N W_i(x) q_i(t). \quad (\text{A.19})$$

Dabei sind  $W_i(x)$  die (vorzugebenden) lokalen oder globalen Ortsfunktionen und  $q_i(t)$  die (zu bestimmenden) Zeitfunktionen.

---

## A.1 Galerkin-Verfahren zur Beschreibung des linearen Systemverhaltens

---

Der Balken wird längs der  $x$ -Richtung in  $N$  (finite) Elemente der Elementlänge  $l^e = l/N$  aufgeteilt. Jedes Element besitzt zwei Knoten an den Rändern mit jeweils zwei Freiheitsgraden: die translatorischen Freiheitsgrade  $w_1^e$  und  $w_2^e$  und die rotatorischen Freiheitsgrade  $\varphi_1^e$  und  $\varphi_2^e$ . Diese werden im Element-Auslenkungsvektor

$$\mathbf{r}^e = [w_1^e, \varphi_1^e, w_2^e, \varphi_2^e]^T \quad (\text{A.20})$$

zusammengefasst. Für jedes Element gilt die LAGRANGE-Funktion

$$L^e = T^e - U^e, \quad (\text{A.21})$$

worin  $T^e$  die kinetische und  $U^e$  die potenzielle Energie des Elements sind. Die LAGRANGE-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^e}{\partial \dot{r}_n^e} - \frac{\partial L^e}{\partial r_n^e} = 0 \quad (\text{A.22})$$

liefert dann die jeweiligen Elementmatrizen wie folgt.

Als Formfunktionen  $W_i^e$  für die Verformung eines Elements werden ( $C^1$ -stetige) Hermite-Polynome 3. Ordnung verwendet mit [55]

$$\begin{aligned} W_1^e(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, & W_2^e(x) &= \left(\frac{x}{l}\right)\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2, \\ W_3^e(x) &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, & W_4^e(x) &= \left(1 - \frac{x}{l}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Die innere Element-Formänderungsenergie infolge der Krümmung des Balkens beträgt

$$U^e = \frac{1}{2}EI_y \int_0^l (w^{e''}(x, t))^2 dx, \quad (\text{A.24})$$

die potentielle Energie infolge der Axiallast  $P$  eines Element beträgt

$$U^{e,P} = \frac{1}{4}P \int_0^l (w^{e'}(x, t))^2 dx, \quad (\text{A.25})$$

und die kinetische Energie eines Elements beträgt

$$T^e = \frac{1}{2}\rho A \int_0^l (\dot{w}^e(x, t))^2 dx. \quad (\text{A.26})$$

Trennung der Variablen nach (A.19), Verwendung der LAGRANGE-Gleichung (A.22) und Integration ergeben die lokalen  $[4 \times 4]$  Steifigkeits-, Axiallasteinfluss- und Massematrizen  $K^e$ ,  $K^{e,P}$  und  $M^e$  zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^e &= \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}^{e,p} &= \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{M}^e &= \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.27}$$

Diese können zu den globalen Steifigkeitsmatrizen und der globalen Massematrix zusammengesetzt werden. Dabei lassen sich dann auch lokale Massen und Steifigkeiten, z. B. durch das Festkörpergelenk, mit berücksichtigen. Dies sei im Folgenden exemplarisch an der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  dargestellt. Zunächst wird die globale Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_i^{e,g} \in \mathbb{R}^{2N^k \times 2N^k}$  für das  $i$ te Element gebildet mit

$$\mathbf{K}_{i,lm}^{e,g} = \begin{cases} \mathbf{K}_{jk}^e & \text{für alle } j, k = \{1, \dots, 4\} \text{ und } l = 2 \cdot i \cdot j - 1, m = 2 \cdot i \cdot k - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{A.28}$$

Die diskrete Rotationsfedersteifigkeit  $c_r$  am Festkörpergelenk kann ebenfalls in globalen Koordinaten in der Matrix  $\mathbf{K}^{c_r,g} \in \mathbb{R}^{2N^k \times 2N^k}$  geschrieben werden als

$$\mathbf{K}_{ij}^{c_r,g} = \begin{cases} c_r & \text{für } i, j = 2N^k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{A.29}$$

Die globale Steifigkeitsmatrix bildet sich dann durch Aufsummation der in (A.28) und (A.29) formulierten Matrizen zu

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N^k} \mathbf{K}_i^{e,g} + \mathbf{K}^{c_r,g}. \tag{A.30}$$

Zur Berücksichtigung der Randbedingungen (translatorischer und rotatorischer Freiheitsgrad an der unteren Einspannung und translatorischer Freiheitsgrad an der oberen Einspannungen des Balkens gesperrt) werden die entsprechenden Zeilen und Spalten (jeweils die erste, zweite und vorletzte Zeile und Spalte) aus den Matrizen eliminiert [55].

Man erhält dann das lineare Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}^*\mathbf{r} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{K}^* = \mathbf{K} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{K}^p, \tag{A.31}$$

mit den globalen translatorischen und rotatorischen Verformungen an den Knoten im Vektor  $\mathbf{r}$ , vgl. (3.2).

---

## A.2 Ritz-Verfahren zur Beschreibung des nichtlinearen Systemverhaltens

---

Wie in Abschnitt 6.6 beschrieben, weist das reale Balkensystem ein nichtlineares Verhalten auf. Insbesondere treten höherharmonische Schwingungen zweiter Ordnung auf, was auf quadratische Terme in den Bewegungsgleichungen hin deutet. Geometrische Nichtlinearitäten z. B. beschrieben in (A.8) durch große Verformungen rufen aber nur höherharmonische Schwingungen ungerader Ordnung auf, welche durch kubische Terme in der Bewegungsgleichung entstehen können [109]. In der Literatur sind Ansätze zur Beschreibung des nichtlinearen Verhaltens eines axial belasteten Balkens zu finden, z. B. [109, 145]. Allerdings wird in den meisten Fällen davon ausgegangen, dass eine externe, nichtkonservative Axiallast auf den Balken wirkt. Tatsächlich liegt aber am realen Balkensystem in dieser Arbeit eine Masse auf dem Balken. Eine Verformung des Balkens bewirkt eine Absenkung der Masse. Die Verformungen sind aber im Allgemeinen abhängig von der Zeit. Somit erfährt die Masse eine Beschleunigung  $\ddot{u}(x = l, t)$ . Die aus der Masse resultierende Axiallast ist

$$P(t) = m(g - \ddot{u}(x = l, t)). \quad (\text{A.32})$$

Die dadurch entstehende Nichtlinearität kann, im Gegensatz zur geometrischen Nichtlinearität infolge großer Verformungen, als kinetische Nichtlinearität bezeichnet werden.

Zur Herleitung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen wird erneut die LAGRANGE-Funktion

$$L = T - U \quad (\text{A.33})$$

verwendet, worin  $T$  die kinetische und  $U$  die potenzielle Energie des Systems sind. Die LAGRANGESCHE Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0 \quad (\text{A.34})$$

liefert die homogene Bewegungsgleichung des Systems. Darin sind  $q_n$  die generalisierten Koordinaten des Systems. Im Folgenden werden zur Abbildung der kinetischen Nichtlinearitäten durch die Masse  $m$  die Verformungen  $u(x, t)$  in  $x$ -Richtung des Balkens mit in der LAGRANGE-Funktion berücksichtigt. Zur besseren Lesbarkeit wird, wenn nicht explizit benötigt, die zeitliche und örtliche Abhängigkeit der Variablen nicht ausgeschrieben, z. B. wird  $w(x, t)$  geschrieben als  $w$ . Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \dot{u}^2 + \dot{w}^2 dx + m\dot{e}^2 \quad (\text{A.35})$$

und die potenzielle Energie ist

$$U = \frac{1}{2} EA \int_0^L \left( u' + \frac{w'^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} EI \int_0^L w''^2 dx - mge \quad (\text{A.36})$$

wobei  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  und  $e = u(x = L)$  die Absenkung des oberen Lagers beschreibt. Sie beträgt

$$e = L - \int_0^L \cos(\alpha) dx. \quad (\text{A.37})$$

Für kleine Verformungen gilt

$$\alpha \approx \tan(\alpha) = w' \quad (\text{A.38})$$

und somit

$$e = L - \int_0^L \cos(w') dx. \quad (\text{A.39})$$

Die TAYLOR-Reihenentwicklung von (A.39) um  $e = 0$  liefert

$$e = L - \int_0^L 1 - w'^2/2 + w'^4/24 - w'^6/120 + \dots dx. \quad (\text{A.40})$$

Ein Abbruch nach dem quadratischen Glied  $-w'^2/2$  liefert

$$e = \int_0^L -w'^2/2 dx. \quad (\text{A.41})$$

Es wird eine Trennung der Variablen vorgenommen,

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^N W_i(x) \cdot q_i(t). \quad (\text{A.42})$$

Zur Berücksichtigung der Verschiebungen  $u(x, t)$  in  $x$ -Richtung wird ebenfalls eine Trennung der Variablen vorgenommen, allerdings nur mit einer Ansatzfunktion

$$u(x, t) = U(x)r(t), \quad (\text{A.43})$$

da für den schlanken Balken die erste Eigenfrequenz der Verformung des Balkens in  $x$ -Richtung deutlich größer als für die  $z$ -Richtung ist. Darin sind  $q_n(t)$  bzw.  $r(t)$  die zeitabhängigen generalisierten Koordinaten und  $W_n(x)$  bzw.  $U(x)$  die ortsabhängigen Ansatzfunktionen.

Zur besseren Lesbarkeit wird  $W_i(x) = W_i$ ,  $U(x) = U$ ,  $q_i(t) = q_i$  und  $r(t) = r$  geschrieben. Ebenso wird nach der EINSTEINSchen Summenkonvention z. B.  $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j y_i y_j$  als  $x_i x_j y_i y_j$  geschrieben.

Für die Absenkung  $e$  der Masse gilt

$$\begin{aligned} \dot{e}^2 &= \dot{e} \cdot \dot{e} = \left( \frac{d}{dt} \left( U'r + \frac{1}{2} W_i' W_j' q_i q_j \right) \right)^2 = \left( U'\dot{r} + \frac{1}{2} W_i' W_j' (\dot{q}_i q_j + q_i \dot{q}_j) \right)^2 \\ &= U'^2 \dot{r}^2 + \frac{1}{2} U' W_i' W_j' \dot{r} (\dot{q}_i q_j + q_i \dot{q}_j) + \frac{1}{4} W_i' W_j' W_k' W_l' \dot{q}_i q_j \dot{q}_k q_l \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Unter Verwendung der Trennung der Variablen nach (A.42) und (A.43) ist die kinetische Energie

$$\begin{aligned} T &= \underbrace{\frac{1}{2} \rho A \int_0^L U^2 dx}_{M^u} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \rho A \int_0^L W_i W_j dx}_{M_{ij}} \dot{q}_i \dot{q}_j + \underbrace{m \int_0^L U'^2 dx}_{p^u} \dot{r}^2 \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2} m \int_0^L U' W_i' W_j' dx}_{p_{ij}^{uw}} \dot{r} (\dot{q}_i q_j + q_i \dot{q}_j) + \underbrace{\frac{1}{2} m \int_0^L W_i' W_j' W_k' W_l' dx}_{M_{ijkl}} \dot{q}_i q_j \dot{q}_k q_l \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

und die potentielle Energie

$$\begin{aligned}
U = & \underbrace{\frac{1}{2}EA \int_0^L U'^2 dx}_{K^u} r^2 + \underbrace{\frac{1}{2}EI \int_0^L W_i'' W_j'' dx}_{K_{ij}} q_i q_j - \underbrace{mg \int_0^L U' dx}_{K^{u,m}} r \\
& + \underbrace{\frac{1}{2}EA \int_0^L U' W_i' W_j' dx}_{K_{ij}^{uw}} r q_i q_j + \underbrace{\frac{EA}{2} \int_0^L W_i' W_j' W_k' W_l' dx}_{K_{ijkl}} q_i q_j q_k q_l - \underbrace{\frac{1}{2}mg \int_0^L W_i' W_j' dx}_{K_{ij}^w} q_i q_j. \quad (\text{A.46})
\end{aligned}$$

Die Ausdrücke der LAGRANGE-Gleichung (A.34) ergeben dann mit den o.g. Substitutionen für die kinetische Energie T

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} = M_{ij}(\delta_{in} \dot{q}_j + \dot{q}_i \delta_{jn}) + P_{ij}^{uw} \dot{r} (q_j + q_i) + M_{ijkl}(\dot{q}_j \dot{q}_k q_l + q_j(\ddot{q}_k q_l + \dot{q}_k \dot{q}_l)) \quad (\text{A.47})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = 2M^U \dot{r} + 2P^U \dot{r} + P_{ij}^{uw}(\dot{q}_i q_j + q_i \dot{q}_j)$$

und mit den zeitlichen Ableitungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} = M_{ij}(\delta_{in} \ddot{q}_j + \ddot{q}_i \delta_{jn}) + P_{ij}^{uw}(\ddot{r}(q_j + q_i) + \dot{r}(\dot{q}_j + \dot{q}_i)) + M_{ijkl}(q_j \dot{q}_k q_l + \dot{q}_i q_j q_l) \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = 2M^U \ddot{r} + 2P^U \ddot{r} + P_{ij}^{uw}(\ddot{q}_i q_j + 2\dot{q}_i \dot{q}_j + q_i \ddot{q}_j)$$

und für die potentielle Energie

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial q_n} = & K_{ij}(\delta_{in} q_j + q_i \delta_{jn}) + K_{ijkl}(q_j q_k q_l + q_i q_k q_l + q_i q_j q_l + q_i q_j q_k) \\
& + K_{ij}^{uw} r (\delta_{in} q_j + q_i \delta_{jn}) - K_{ij}^w (\delta_{in} q_j + q_i \delta_{jn}) \quad (\text{A.49})
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 2K^U r + K_{ij}^{uw}(q_i q_j) - K^{U,m}$$

(Anmerkung zu (A.43) bis (A.45):  $\frac{\delta q_i q_j}{\delta q_n} = \frac{\delta q_i}{\delta q_n} q_j + q_i \frac{\delta q_j}{\delta q_n} = \delta_{in} q_j + q_i \delta_{jn}$  mit dem Kronecker-Delta  $\delta_{jn} = 1$ , falls  $j = n$ , sonst  $= 0$ ).

Zur Lösung der Integrale in (A.42) und (A.43) können als globale Ansatzfunktionen  $W_n(x)$  die aus der analytischen Lösung bekannten modalen Schwingformen für den Balken ohne Axiallast

$$W_n(x) = \cosh \kappa_n x - \cos \kappa_n x - \frac{\cos \kappa_n l + \cosh \kappa_n l}{\sin \kappa_n l + \sinh \kappa_n l} (\sin \kappa_n x - \sinh \kappa_n x). \quad (\text{A.50})$$

gewählt, wobei die Eigenwerte  $\kappa_n$  die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\tanh \kappa l - \tan \kappa l = 0 \quad (\text{A.51})$$

sind [62].

Aus den Gleichungen (A.45) bis (A.46) geht hervor, dass trotz der Annahme, dass *keine geometrischen Nichtlinearität* vorliegen (vgl. (A.8)), dennoch nichtlineare Terme vorliegen, die als *kinetische Nichtlinearität* bezeichnet werden können. Insbesondere existieren quadratische und kubische Terme hinsichtlich der Auslenkungen  $q_i$  und  $r$  sowie Terme, in denen Auslenkungen  $q_i$ , Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  und Beschleunigungen  $\ddot{q}_i$  gemischt vorliegen.

Die Lösung dieser Gleichungen zur Simulation des zeitlichen Verhaltens des nichtlinearen Balkensystems kann im Zeitbereich erfolgen, erfordert aber besondere Achtsamkeit. Insbesondere geht aus (A.45) hervor, dass eine üblicherweise vorgenommene Auflösung der Gleichung nach der Variablen mit der höchsten zeitlichen Ableitung, hier die Beschleunigung  $\ddot{q}_n$ , nicht möglich ist, da diese gemischt vorliegen. Es handelt sich also um eine implizite Differentialgleichung. Letztendlich konnte in diesem Abschnitt gezeigt werden, woher die quadratische kinetische Nichtlinearität im Balkensystem resultiert, ein quantitativer Vergleich mit den Ergebnissen der experimentellen Simulation war jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich.





---

## B Zustandsbeobachter für unbekannte Eingangsgrößen

---

Gegeben sei ein zeitdiskretes Zustandsraummodell der Form

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{q}_k + \mathbf{B}\mathbf{F}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{q}_k + \mathbf{D}\mathbf{F}_k + \nu_k,\end{aligned}\tag{B.1}$$

wobei  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  die System-, Eingangs-, Mess- und Durchgangsmatrix des Systems ist,  $\mathbf{q}_k \in \mathbb{R}^n$  der Zustandsvektor und  $\mathbf{q}_k$  der Messvektor zum Zeitpunkt  $k$ . Die Vektoren  $\mathbf{w}_k$  und  $\nu_k$  zur Beschreibung der Modellunsicherheit (Systemrauschen) und des Messrauschens werden als untereinander unkorrelierte, mittelwertfreie und normalverteilte Rauschsignale mit den bekannten Kovarianz-Matrizen  $\mathbf{Q} = \mathbb{E}\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T\}$  und  $\mathbf{R} = \mathbb{E}\{\nu_k \nu_k^T\}$  angenommen. Eine Ermittlung der Zustände  $\mathbf{q}_k$  und der Belastungen  $\mathbf{F}_{e,k}$  erfolgt für jeden Zeitschritt  $k$  durch die folgenden Bestimmungsgleichungen

*Eingangsgrößenschätzung:*

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_k &= \mathbf{C}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \\ \mathbf{S}_k &= (\mathbf{D}^T\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{D})^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{R}_k^{-1} \\ \mathbf{F}_{e,k} &= \mathbf{S}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\mathbf{q}_{k|k-1}) \\ \mathbf{P}_k^F &= (\mathbf{D}^T\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{D})^{-1}\end{aligned}\tag{B.2}$$

*Messgrößenaktualisierung:*

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_k &= \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{C}^T\mathbf{R}_k^{-1} \\ \mathbf{q}_{k|k} &= \mathbf{q}_{k-1} + \mathbf{T}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\mathbf{q}_{k-1} - \mathbf{D}\mathbf{F}_{e,k}) \\ \mathbf{P}_{k|k} &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{T}_k(\mathbf{R}_k - \mathbf{D}_k\mathbf{P}_k^F\mathbf{D}_k^{-1})\mathbf{T}_k^T \\ \mathbf{P}_k^{\text{Fx}} &= -\mathbf{T}_k\mathbf{D}^T\mathbf{P}_k^F\end{aligned}\tag{B.3}$$

*Zustandsaktualisierung:*

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{k+1|k} &= \mathbf{A}\mathbf{q}_{k|k} + \mathbf{B}\mathbf{F}_{e,k} \\ \mathbf{P}_{k+1|k} &= [\mathbf{A} \ \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_k^{\text{Fx}} \\ \mathbf{P}_k^{\text{Fx}T} & \mathbf{P}_k^F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B}^T \end{bmatrix} + \mathbf{Q}.\end{aligned}\tag{B.4}$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{q}_{k+1|k}$  den Prädiktorwert des Zustandes  $\mathbf{q}_{k|k}$ .  $\mathbf{S}_k$  und  $\mathbf{T}_k$  sind die Kalman-Matrizen und  $\mathbf{P}_k$ ,  $\mathbf{P}_k^F$  und  $\mathbf{P}_k^{\text{Fx}}$  sind die Kovarianzmatrizen des Schätzfehlers des Zustands, der Belastung und die Kovarianzmatrix zwischen den Schätzfehlern des Zustandes und der Belastung.  $\mathbf{R}_k$  bezeichnet die Kovarianzmatrix des Fehlers zwischen den gemessenen Signalen und den mit  $\mathbf{C}\mathbf{q}_{k|k-1}$  vorhergesagten Messsignalen.

Anmerkung zur Wahl der Kovarianzmatrizen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{R}$  in der experimentellen Simulation: Die Kovarianzmatrix des Messrauschens  $\mathbf{R}$  kann leicht durch eine Messung im Ruhezustand des realen Systems ermittelt werden. Für die Kovarianzmatrix des Systemrauschens wurde eine Diagonalmatrix gewählt, bei der alle Beträge auf der Diagonalen gleich sind,  $\mathbf{Q} = \gamma\mathbf{I}$ . Der Vorfaktor  $\gamma$  wurde derart gewählt, dass der Fehler zwischen gemessener und ermittelter Belastung minimal wird.



---

## Literaturverzeichnis

---

- [1] 14 FAR 25: Airworthiness Standards: Transportation Category Airplanes.
- [2] DIN 1319-1: Grundlagen der Messtechnik - Teil 1: Grundbegriffe.
- [3] DIN 2768: Allgemeintoleranzen.
- [4] DIN EN 982: Sicherheitstechnische Anforderungen an fluidtechnische Anlagen und deren Betrieb: Hydraulik.
- [5] ISO/IEC Guide 98-3:2008: Guide to the expression of uncertainty in measurement.
- [6] DIN 4118: Fördergerüste und Fördertürme für den Bergbau: Lastannahmen, Berechnungs- und Konstruktionsgrundlagen, Juni 1981.
- [7] DIN 15018: Krane: Grundsätze für Stahltragwerke, Berechnung, November 1984.
- [8] DIN 743-1: Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und Achsen: Teil 1, Oktober 2000.
- [9] DIN 1055-9: Einwirkung auf Tragwerke: Außergewöhnliche Einwirkungen, August 2003.
- [10] DIN 1055-3: Einwirkung auf Tragwerke: Eigenlasten und Nutzlasten, März 2006.
- [11] R. Adams und J. F. Doyle. Multiple Force Identification for Complex Structures. *Experimental Mechanics*, 42: 25–36, 2002.
- [12] J. Adamy. *Fuzzy Logic, Neuronale Netze und Evolutionäre Algorithmen*. Shaker Verlag, 2005.
- [13] J. Adamy. *Systemdynamik und Regelungstechnik 2*. Shaker Verlag, 2007.
- [14] J. Adamy. *Nichtlineare Regelung*. Springer, 2009.
- [15] AHP Merkle. ahp- informiert - Hilfreiche Hinweise zu Hydraulikzylindern. Online verfügbar: [http://de.ahp.de/uploads/media/ahp\\_informiert\\_DE.pdf](http://de.ahp.de/uploads/media/ahp_informiert_DE.pdf) , letzter Zugriff: 22.01.2013.
- [16] J. C. Asmussen. *Modal Analysis based on the Random Decrement Technique*. Dissertation, University of Aalborg, 1997.
- [17] J. S. Bald. *Grundlagen für die Anwendung von Risikoanalysen im Straßenwesen*. Dissertation, TU Darmstadt, 1991.
- [18] G. Balas. *Robust Control Toolbox 3 - User's Guide*. MatLab, 2007.
- [19] G. J. Balas. *Robust Control of flexible Structures: Theory and Experiments*. Dissertation, California Institute of Technology, 1990.
- [20] R. J. Barthorpe und K. Worden. *Sensor Placement Optimization*, chapter 70. *Encyclopedia of Structural Health Monitoring*. Wiley, 2009.
- [21] J. Biehounek, H. Grolik, und S. Herz. Chaos-Polynome in der probabilistischen Sicherheitsanalyse von Stabtragwerken. *Technische Mechanik*, 25: 133–147, 2005.

- [22] H. Birkhofer, R. Engelhardt, und A. Kästle. Unsicherheitsanalyse eines Wärmetauschers anhand der UMEA-Methodik. *Konstruktion*, 6: 69–70, 2012.
- [23] K. H. Bohle. *Sensitivitätsbasierte Methoden zur modellgestützten Schadensdiagnose mit Modaldaten*. Dissertation, Universität Siegen, 2005.
- [24] C. Boller und F. Stolze. Monitoring the ageless structure with smart technologies. In *4th World Conference on Structural Control and Monitoring*, 315, 2006.
- [25] M. Bäuerle-Mahler. *Lastdatenaufnahme und Ermüdungsfestigkeits- und Lebensdauervorhersage*. Books on Demand, 2008.
- [26] J. Ching und J. Beck. New Bayesian Model Updating Algorithm Applied to a Structural Health Monitoring Benchmark. *Journal of Structural Health Monitoring*, 3: 313–332, 2004.
- [27] M. Clyde und E. I. George. Model Uncertainty. *Statistical Science*, 19: 81–94, 2004.
- [28] J. Davila, L. Fridman, und A. Levant. Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *IEEE Transactions on automatic control*, 50:1 785–1789, 2005.
- [29] B. J. Debuschere, H. N. Najm, P. Pebay, O. Knio, R. Ghanem, und O. Maitre. Numerical Challenges in the use of polynomial chaos representation for stochastic processes. *SIAM Journal for Scientific Computation*, 26: 698–719, 2004.
- [30] S. Deng und T.-Y. Heh. The study of structural system dynamic problems by recursive estimation method. *International Journal for Advanced Manufacturing Technology*, 30: 195–202, 2006.
- [31] P. Deuffhard und A. Hohmann. *Numerische Mathematik 1*. de Gruyter, 4. edition, 2008.
- [32] L. Dugard, O. Sename, S. Aubouet, und B. Talon. Full vertical car observer design methodology for control applications. *Control Engineering Practice*, 20: 832–845, 2012.
- [33] T. Eifler, G.C. Enss, M. Haydn, L. Mosch, R. Platz, und H. Hanselka. Approach for a consistent description of uncertainty in process chains of load carrying mechanical systems. *Applied Mechanics and Materials*, 104: 133–144, 2011.
- [34] G. Ellis. *Observers in Control Systems: A practical guide*. Academic Press, 2002.
- [35] R. Engelhardt. *Uncertainty mode and effects analysis - heuristische Methodik zur Analyse und Beurteilung von Unsicherheiten in technischen Systemen des Maschinenbaus*. Dissertation, TU Darmstadt, 2013.
- [36] R. Engelhardt, T. Eifler, J. Mathias, H. Kloberdanz, H. Birkhofer, und A. Bohn. UMEA - A follow-up to analyse uncertainties in technical systems. In *Proceedings of ICED - International Conference on Engineering Design*, 2011.
- [37] R. Engelhardt, J. F. Koenen, M. Brenneis, H. Kloberdanz, und A. Bohn. An approach to classify methods to control uncertainty in load-carrying structures. *Applied Mechanics and Materials*, 104: 33–44, 2012.
- [38] R. A. Engelhardt, J. F. Koenen, G. C. Enss, A. Sichau, R. Platz, H. Kloberdanz, H. Birkhofer, und H. Hanselka. A Model to Categorise Uncertainty in Load-Carrying Systems. In *Proceedings of*

*MMEP2010 1st International Conference on Modelling and Management of Engineering Processes*, 53–64, 2010.

- [39] C. R. Farrar und K. Worden. An introduction to structural health monitoring. *Philosophical transactions of the royal society A*, 365: 303–315, 2007.
- [40] U. Fischer, Hrsg. *Tabellenbuch Metall*. Europa-Lehrmittel, 2002.
- [41] E. B. Flynn und M. D. Todd. A Bayesian approach to optimal sensorplacement for structural health monitoring with application to active sensing. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 24: 891–903, 2010.
- [42] G. F. Franklin, J. D. Powell, und M. L. Workman. *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, 1998.
- [43] A. Friedmann, D. Mayer, M. Koch, und T. Siebel. *Monitoring and Damage Detection in Structural Parts of Wind Turbines*, Kapitel 9, 207–232. InTech, 2011.
- [44] M. Fröhlich. *Ein robuster Zustandsbeobachter für ein semiaktives Fahrwerk*. Dissertation, TU München, 2007.
- [45] T-H. Gan, S. Soua, V. Dimlaye, und K. J. Burnham. Real-time monitoring system for defects detection in wind turbine structures and rotating components. In *Proc of 18th World Conference on Nondestructive Testing*, 2012.
- [46] R. Ghanem und P. D. Spanos. Polynomial Chaos in Stochastic Finite Elements. *Journal of Applied Mechanics*, 57: 197–202, 1990.
- [47] S. Gillijns. *Kalman Filter Techniques for System Inversion and Data Assimilation*. Dissertation, KU Leuven, 2007.
- [48] S. Gillijns und B. de Moor. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems with direct feedthrough. *Automatica*, 43: 934–937, 2007.
- [49] S. Gillijns und B. de Moor. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems. *Automatica*, 43: 111–116, 2007.
- [50] D. Ginsberg und C.-P. Fritzen. New approach for impact detection by finding sparse solution In *Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA2014)*, 2051–2064, 2014.
- [51] A. Gonzalez, C. Rowley, und E.J. O’Brien. A general solution to the identification of moving vehicle forces on a bridge. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75 (3): 335–354, 2008.
- [52] Y. Govers und M. Link. Stochastic model updating of an aircraft like structure by parameter covariance matrix adjustment. In *Proceeding of ISMA2010*, 2010.
- [53] S. Granger und L. Perotin. An inverse method for the identification of a distributed random excitation acting on a vibrating structure - Part 1: Theory. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13: 53–65, 1999.

- [54] Eric Groß. *Betriebslastenermittlung, Dimensionierung, strukturmechanische und fahrwerkstechnische Untersuchungen von Mountainbikes*. Dissertation, TU Hamburg-Harburg, 1997.
- [55] Gross, Hauger, Schnell, und Wriggers. *Technische Mechanik 4*. Springer, 2004.
- [56] K.-H. Grote und W. Beitz, Hrsg. *Dubbel: Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer, 20. edition, 2001.
- [57] D.-W. Gu, P. H. Petkov, und M. M. Konstantinov. *Robust Control Design in Matlab*. Springer, 2005.
- [58] R. J. Guyan. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, 3: 380ff, 1965.
- [59] Q. P. Ha, A.D. Nguyen, und H. Trinh. Simultaneous state and input estimation with application to a two-link robotic system. In *Proc. 5th ASCC Asian Control Conference*, 2004.
- [60] Q.P. Ha und H. Trinh. State and input simultaneous estimation for a class of nonlinear systems. *Automatica*, 40: 1779–1785, 2004.
- [61] J. Hadamard. *Lectures in the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*. Dover Publications, Inc., 1923.
- [62] P. Hagedorn und S. Otterbein. *Technische Schwingungslehre 2*. Springer, 1987.
- [63] E. Haibach. *Betriebsfestigkeit: Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung*. Springer, 2006.
- [64] S.-O. Han. *Varianzbasierte Sensitivitätsanalyse als Beitrag zur Bewertung der Zuverlässigkeit adaptiver Struktursysteme*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2011.
- [65] T. Hanis und M. Hromcik. Modal Sensors Placement Optimization. In *Proceedings of 17th International Conference on Process Control*, 2009.
- [66] H. Hanselka und R. Platz. Ansätze und Maßnahmen zur Beherrschung von Unsicherheit in lasttragenden Systemen des Maschinenbaus. *Konstruktion*, 6: 55–62, 2010.
- [67] M. Hanss. *Applied Fuzzy Arithmetic, An Introduction with Engineering Applications*. Springer, 2005.
- [68] M. Hanss und K. Willner. On Using Fuzzy Arithmetic to Solve Problems with Uncertain Model Parameters. *International Journal of Project Management*, 20: 235–240, 2000.
- [69] L. Harzheim. *Strukturoptimierung*. Harri Deutsch, 2008.
- [70] B. Heißing. *Fahrwerkhandbuch*. Vieweg, 2007.
- [71] P. Heuler und H. Klätschke. Generation and use of standardised load spectra and load-time histories. *International Journal of Fatigue*, 27: 974–990, 2005.
- [72] J. Hoffmann. *Taschenbuch der Messtechnik*. Hanser, 2011.
- [73] K. Hoffmann. *Eine Einführung in die Technik des Messens mit Dehnungsmessstreifen*. Hottinger-Baldwin-Messtechnik GmbH, 2000.
- [74] J. Holnicki-Szulc und J. Gierlinski. *Structural analysis, design and control by the virtual distortion method*. Wiley, 1995.

- [75] A. Van Horenbeek, J. Van Ostaeyen, J. R. Duflou, und L. Pintelon. Quantifying the added value of an imperfectly performing condition monitoring system - Application to a wind turbine gearbox. *Reliability Engineering and System Safety*, 111: 45–57, 2013.
- [76] C.-H. Huang. An inverse non-linear force vibration problem of estimating the external forces in a damped system with time-dependent system parameters. *Journal of Sound and Vibration*, 242(5): 749–765, 2001.
- [77] S. Hui und S.H. Zak. Observer Design for Systems with Unknown Input. *International Journal for Applied Mathematical Science*, 15-4: 431–446, 2005.
- [78] J.-S. Hwang, A. Kareem, und W.-J. Kim. Estimation of modal loads using structural response. *Journal of Sound and Vibration*, 326: 522–539, 2009.
- [79] E. C. Ifeachor und B. W. Jervis. *Digital Signal Processing*. Prentice Hall, 2002.
- [80] R. Isermann. *Identifikation dynamischer Systeme 1+2*. Springer, Berlin, 1992.
- [81] R. Isermann. *Mechatronische Systeme: Grundlagen*. Springer, 2007.
- [82] E. Jacuelin, A. Bennani, und P. Hamelin. Force reconstruction: analysis and regularization of a deconvolution problem. *Journal of Sound and Vibration*, 265: 81–107, 2003.
- [83] O. Janda und U. Konigorski. Stochastic Schemes for Control Oriented System Identification. In *Proceedings of the 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC)*, 2011.
- [84] J.-N. Juang. *Applied System Identification*. Prentice Hall, 1994.
- [85] D. C. Kammer. Sensor Placement for On-Orbital Modal Identification and Correlation of Large Space Structures. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 14: 251-259, 1991.
- [86] Y.-R. Kim und K.-J. Kim. Indirect input identification by modal filter technique. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13(6): 893–910, 1999.
- [87] T. B. Klaus, C. R. Sabirin, S. Herold, und O. Heuss. Noise reduction of a sound field inside a cavity due to an adaptive Helmholtz resonator. In *International Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA*, Belgien, September 2012.
- [88] W. Kleppmann. *Taschenbuch Versuchsplanung - Produkte und Prozesse optimieren*. Hanser, 2009.
- [89] M. Klinkov und C.-P. Fritzen. Wind Load Observer for a 5MW Wind Energy Plant. *Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*, 12: 712–726, 2011.
- [90] T. Knetsch. *Unsicherheiten in Ingenieursberechnungen*. Dissertation, Otto-von-Guericke-Universität, Magdeburg, 2003.
- [91] J. F. Koenen, G. Enss, S. Ondoua, R. Platz, und H. Hanselka. Evaluation and control of uncertainty in using an active column system. *Applied Mechanics and Materials*, 104: 187–195, 2012.
- [92] J. F. Koenen, R. Platz, und H. Hanselka. An Approach to Quantify the Influence of Uncertainties in Model-based Usage-Monitoring of Load-Carrying Systems. In *Proceedings of ISMA Int. Conference on Noise and Vibration Engineering*, 857–866, 2010.

- [93] J. F. Koenen, R. Platz, und H. Hanselka. General approach and possibility to evaluate uncertainty in estimating loads acting on a beam. In *Proceedings of ICEDyn International Conference on Engineering Dynamics*, 2011.
- [94] F. Koushanfar, M. Potkonjak, und A. Sagiiovanni-Vincentelli. On-line Fault Detection of Sensor Measurements. In *Proceedings of IEEE Conference on Sensors*, 2003.
- [95] K.-H. Laermann. Über das inverse Problem der Bestimmung des aktuellen Zustandes von Tragwerken aus Verformungsmessungen. *Technische Mechanik*, 18(1): 25–30, 1998.
- [96] K.-H. Laermann. *Inverse Problems in Experimental Structural Analysis*. Shaker Verlag Aachen, 2008.
- [97] W. Li und S. Shah. Structured residual vector-based approach to sensor fault detection and isolation. *Journal of Process Control*, 12: 429–443, 2002.
- [98] Y. Liu und W. S. Jr. Shepard. Dynamic force identification based on enhanced least squares and total least-squares schemes in the frequency domain. *Journal of Sound and Vibration*, 282: 37–60, 2005.
- [99] O. Loffeld. *Estimationstheorie 1+2*. Oldenbourg, 1990.
- [100] E.-M. Lourens, G. Lombaerd, und C. Papadimitriou. Joint input-response predictions in structural dynamics. In *IOMAC'11 - 4th International Operational Modal Analysis Conference*, 2011.
- [101] E.-M. Lourens, C. Papadimitrou, S. Gillijns, E. Reynders, G. De Roeck, und G. Lombaert. Joint input-response estimation for structural systems based on reduced-order models and vibration data from a limited number of sensors. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11: 310–327, 2012.
- [102] H. Lowak, D. Schütz, M. Höck, und W. Schütz. Standardisiertes Einzelflugprogramm für Kampfflugzeuge - FALSTAFF Technical report, LBF-Bericht Nr. 3045, 1976.
- [103] J. Lunze. *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. Springer, 2008.
- [104] J. Lunze. *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. Springer, 2010.
- [105] C.-K. Ma, J.-M. Chang, und D.-C. Lin. Input force estimation of beam structures by an inverse method. *Journal of Sound and Vibration*, 259(2): 387–407, 2003.
- [106] C.-K. Ma und C.-C. Ho. An inverse method for the estimation of input forces acting on non-linear structural systems. *Journal of Sound and Vibration*, 275: 953–971, 2004.
- [107] Y.M. Mao, X.L. Guo, und Y. Zhao. A state space force identification method based on Markov parameters precise computation and regularization technique. *Journal of Sound and Vibration*, 329: 3008–3019, 2010.
- [108] M. Martinez, B. Rocha, M. Li, G. Shi, A. Beltempo, R. Rutledge, und M. Yanishevsky. Load monitoring of aerospace structures using micro-electro-mechanical systems (MEMS). In *Proc. of the ASME 2012 Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems SMA-SIS2012*, 2012.



- [109] R. Masana und Mohammed F. Daqaq. Electromechanical Modeling and Nonlinear Analysis of Axially Loaded Energy Harvester. *Journal of Vibration and Acoustics*, 133: 011007 1–10, 2011.
- [110] G. Mocko und R. Paasch. Incorporating uncertainty in diagnostic analysis of mechanical systems. *Journal of mechanical design*, 127: 315–325, 2005.
- [111] H. G. Natke. *Modelle und Wirklichkeit*. UNSER Verlag, Hannover, 1999.
- [112] W. L. Oberkampf, S. M. DeLand, B. M. Rutherford, Diegert K. V., und K. F. Alvin. A new methodology for the estimation of total uncertainty in computational simulations. Technical Report AIAA-99-1612, American Institute of Aeronautics & Astronautics, 1999.
- [113] M. Olssen. On the fundamental moving load problem. *Journal of Sound and Vibration*, 145: 299–307, 1991.
- [114] B. Peeters und G. De Roeck. Stochastic System Identification for Operational Modal Analysis: A Review. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 123: 659–667, 2001.
- [115] R. Platz. *Untersuchungen zur modellgestützten Diagnose von Unwuchten und Wellenrissen in Rotor-systemen*. Dissertation, TU Darmstadt, 2004.
- [116] R. Preumont. *Vibration Control of Active Structures - An Introduction*. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [117] B.K.N. Rao. *Handbook of condition monitoring*. Elsevier Science Ltd, 1996.
- [118] W. Reinelt, A. Garulli, und L. Ljung. Comparing different approaches to model error modeling in robust identification. *Automatica*, 38(5): 787–803, May 2002.
- [119] W. Reinelt und L. Ljung. Model Error Modeling in Robust Identification. Technical report, Department of Electrical Engineering, Linköping University, 2001.
- [120] N. Rosenberg. Uncertainty and technological change. In *Conference series of Federal Bank of Boston*, 1996.
- [121] T. J. Ross. *Fuzzy Logic with Engineering Applications*. McGraw-Hill, 1995.
- [122] K. Runtmund und G. Müller. Bayesian approach for the skewed kalman filter applied to an elastically supported structure. In *Proceedings of the 21.th International Conference on Structural Dynamics and Modal analysis ISMA*, 2010.
- [123] A. Rytter. *Vibration based inspection of civil engineering structures*. Dissertation, Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, Denmark, 1993.
- [124] A. C. Sall, F. Thouverez, L. Blanc, und P. Lean. Stochastic behaviour of mistuned stator vane sectors: an industrial application. In *Proc. of International Conference on Structural Engineering Dynamics ICEDyn2011*, 2011.
- [125] A. Saltelli, K. Chan, und E. M. Scott, Hrsg. *Sensitivity Analysis*. Wiley, 2000.
- [126] G.I. Schueller und B. Goller. Modellunsicherheit im semiprobabilistischen Sicherheitskonzept. In *Tagungsband der 7. Grazer Holzbaufachtagung*, F1–F19, 2008.

- [127] D. Schütz, H. Klätschke, und P. Heuler. Standardized multiaxial load sequences for car wheel suspension components - car loading standard - CARLOS. Technical report, LBF-Bericht Nr. FB-201, 1994.
- [128] D. Schütz, H. Lowak, J.B. de Jonge, und J. Schijve. Standardisierter Einzelflug-Belastungsablauf für Schwingfestigkeitsversuche an Tragflächenbauteilen von Transportflugzeugen - TWIST. Technical report, LBF-Bericht Nr. FB-106, 1973.
- [129] K. Sepahvand, S. Marburg, und H.-J. Hardtke. Uncertainty representation in modal analysis using polynomial chaos. In *Proc. of the first International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics*, 131–136, 2007.
- [130] O. V. Shirayayev. *Improved structural health monitoring using random decrement signatures*. Dissertation, Wright State University, 2008.
- [131] J.-U. Sickert. *Fuzzy-Zufallsfunktionen und ihre Anwendung bei der Tragwerksanalyse und Sicherheitsbeurteilung*. Dissertation, TU Dresden, 2005.
- [132] R. E. Skelton und A. Hu. Modeling structures for control design. *Computers & Structures*, 20: 303–309, 1985.
- [133] H. Stachowiak. *Allgemeine Modelltheorie*. Springer, 1973.
- [134] A. D. Steltzner und D. C. Kammer. Input Force Estimation Using an Inverse Structural Filter. *Proceedings of IMAC*, 1999.
- [135] M. Strassberger. *Aktive Schallreduktion durch digitale Zustandsregelung der Strukturschwingungen mit Hilfe piezokeramischer Aktoren*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1997.
- [136] A. Streit, K. Dreißler, M. Speckert, J. Lichter, T. Zenner, und P. Bach. Anwendung statistischer Methoden zur Erstellung von Nutzungsprofilen für die Auslegung von Mobilbaggern, VDI-Berichte Nr. 2065, 65-77. Technical report, VDI-Verlag GmbH Düsseldorf, 2009.
- [137] M. Szmislawska, T. M. Laerkowski, und K. J. Burnham. Design of Unknown Input Reconstruction Algorithm in Presence of Measurement Noise. In *8th European Workshop on Advanced Control and Diagnosis*, 213–216, 2010.
- [138] K. M. Tay und C. P. Lim. Fuzzy FMEA with a guided rules reduction system for prioritization of failures. *International Journal of Quality & Reliability Management*, 23: 1047–1066, 2006.
- [139] A. N. Thiete und D.J. Thompson. Selection of response measurement locations to improve inverse force determination. *Journal of Applied Acoustics*, 67: 797–818, 2006.
- [140] S. P. Timoshenko und J. M. Gere. *Theory of Elastic Stability*. Dover Publications, Inc., 1961.
- [141] E. Turco. A strategy to identify exciting forces acting on structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64: 1483–1508, 2005.
- [142] H. Unbehauen. *Regelungstechnik 2: Zustandsregelungen, digitale und nichtlineare Regelsysteme*. Vieweg Verlag, 2000.

- [143] A. A. Usla, K. Y. Sanliturk, und M. Gül. Force estimation using vibration data. In *Inter-Noise 2007*, 2007.
- [144] D. Vandepitte und D. Moens. Approaches for assessment of non-determinism in different stages of engineering product design using finite element analysis. *Applied Mechanics and Materials*, 104: 23–32, 2012.
- [145] D. Wagg und S. Neild. *Nonlinear Vibration with Control*. Springer, 2010.
- [146] Q. S. Wang. Active buckling control of beams using piezoelectric actuators and strain gauge sensors. *Smart Materials and Structures*, 19: 1–8, 2010.
- [147] S. Weiland. *Laststandard zur betriebsfesten Auslegung und Optimierung von PKW-Anhängevorrichtungen bei Fahrradheckträgernutzung*. Dissertation, TU Darmstadt, 2007.
- [148] N. Wiener. The Homogeneous Chaos. *American Journal of Mathematics*, 60: 897–936, 1938.
- [149] K. Worden und J. J. Hensman. Bayesian inference and nonlinear system identification. In *Proceedings of International Conference on Structural Engineering Dynamics*, 2011.
- [150] L. A. Zadeh. Fuzzy-Sets. *Information and control*, 8: 338–353, 1965.
- [151] Q. Zhang, L. Jankowski, und Z. Duan. Identification of coexistent load and damage. *Structural Multidisciplinary Optimisation*, 41:243–253, 2010.
- [152] Q. Zhang, L. Jankowski, und Z. Duan. Simultaneous identification of excitation time histories and parametrized structural damages. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 33:56–68, 2012.
- [153] X. Q. Zhu und S. S. Law. Practical aspects of moving load identification. *Journal of Sound and Vibration*, 258:123–146, 2002.
- [154] X.Q. Zhu und S.S. Law. Orthogonal function in moving loads identification on a multi-span bridge. *Journal of Sound and Vibration*, 245(2):329–345, 2001.

