SieB

Ralf Krömer und Gregor Nickel (Hrsg.) | **Band 7 • 2016**

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Mit Beiträgen von

K. Kuhlemann | N. Milkov | G. Nickel | M. Rathgeb | L. Schulte | H. Schwaetzer | Ch. Thiel | M. Wille

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

SieB

Siegener Beiträge
zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Band 7 (2016)

Mit Beiträgen von:

K. Kuhlemann | N. Milkov | G. Nickel | M. Rathgeb |

L. Schulte | H. Schwaetzer | Ch. Thiel | M. Wille

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN

Ralf Krömer
Fachgruppe Mathematik
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstraße 20
D-42119 Wuppertal
rkroemer@uni-wuppertal.de

Gregor Nickel
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 7 (2016)
Herausgeber: Ralf Krömer (Wuppertal) und Gregor Nickel (Siegen)

univer*si* – Universitätsverlag Siegen 2016

Umschlaggestaltung: Sebastian Schorcht
Druck: UniPrint, Universität Siegen

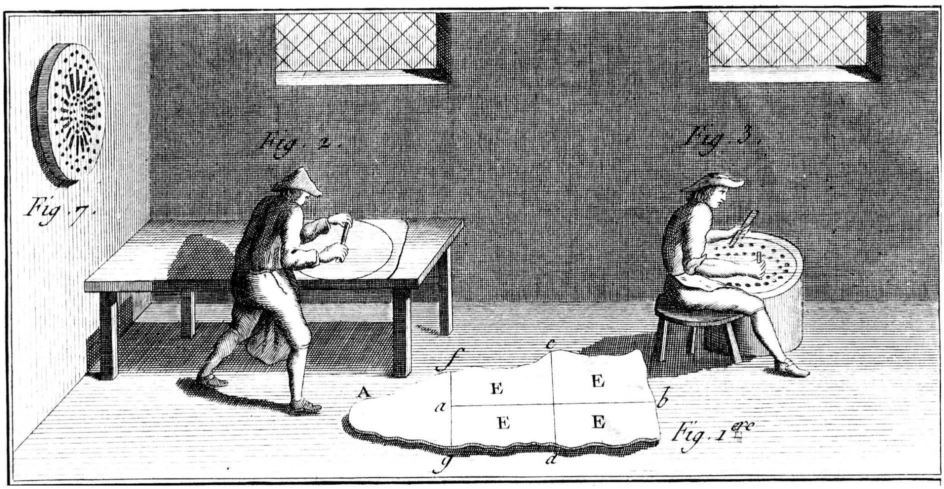
gedruckt auf holz- und säurefreiem Papier

ISSN: 2197-5590

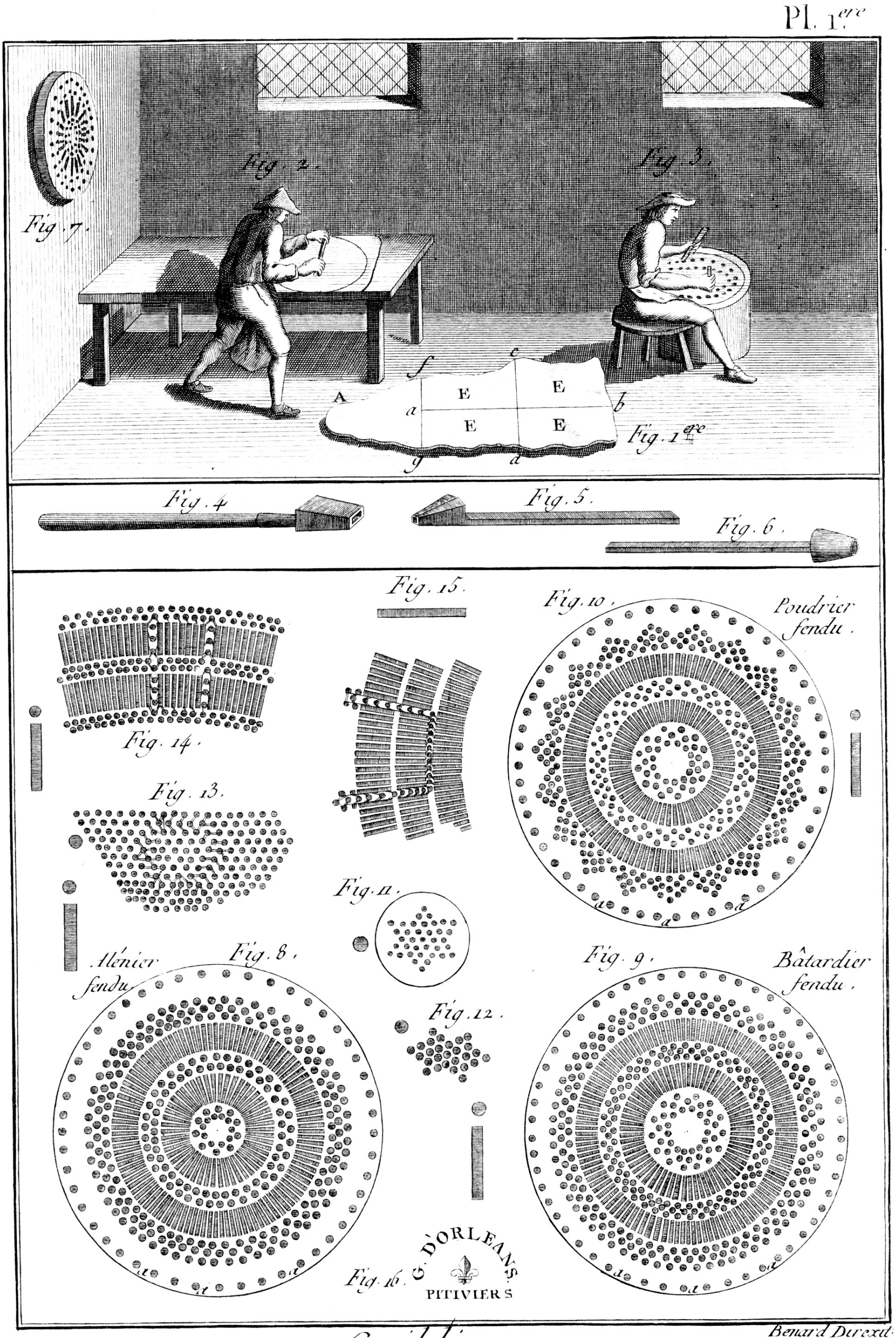
Vertrieb:
univer*si* – Universitätsverlag Siegen
Am Eichenhang 50
57076 Siegen
info@universi.uni-siegen.de
www.uni-siegen.de/universi

Vorwort

Die Konzeption und das Herausgeben einer Zeitschrift – z.B. die Siegener Beiträge – hat einige Parallelen zur Tätigkeit der Siebmacher, der *cribliers*, wie sie nachfolgend in einer Abbildung aus der *Encyclopédie méthodique par ordre des matières* des Verlegers Charles-Joseph Panckoucke (1736-1798) dargestellt sind:

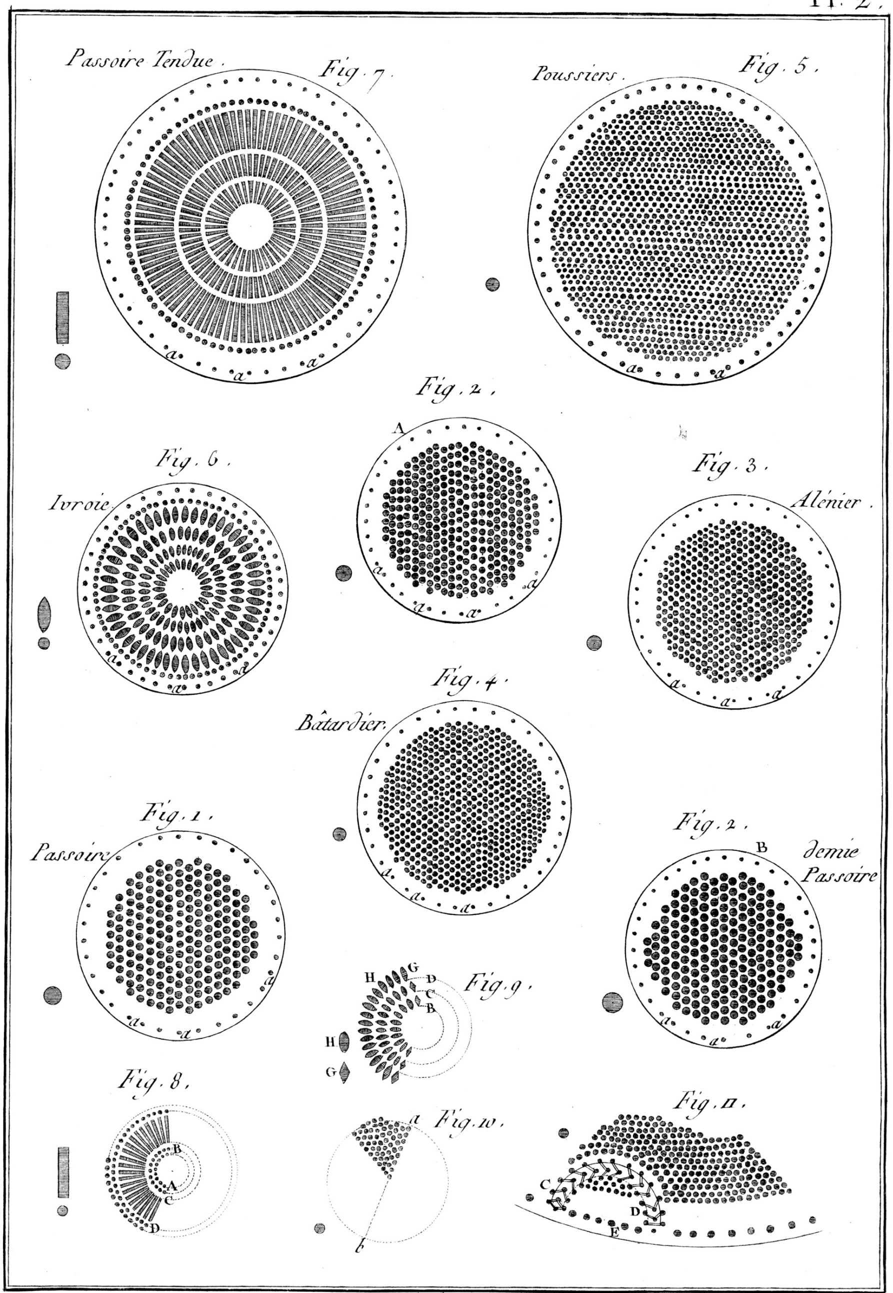


Ein mehr oder minder klares Muster im Hintergrund (vgl. Fig. 7), wird das vorhandene Material vermessen und bewertet (vgl. Fig. 1^ere^) und in unermüdlicher und kollegialer Handarbeit (Fig. 2 und Fig. 3) zu einem Produkt umgeformt. Wollte man nun aber schließen, dass die wesentliche Veränderung bzw. Verbesserung der eingereichten Manuskripte im Applizieren von Löchern bestünde, so wäre das Bild sicherlich überstrappaziert. Wechseln wir lieber die Analogie und vergleichen nun das handwerkliche Produkt der *cribliers*, das Sieb also, mit der Funktion des Herausgebers. Wie man sehr schön an den unterschiedlichen Lochgrößen und -formen sehen kann (vgl. die folgenden Pl. 1^ere^ und Pl. 2), gibt es die unterschiedlichsten Kriterien für die Passung zu einem Journal. Und diese Kriterien können wiederum graduell enger oder großzügiger ausgelegt werden.


Pl. 1.ere
Fig. 7.
Fig. 2.
Fig. 3.
A
f
c
a
E
E
E
E
b
g
d
Fig. 1.ere
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 15.
Fig. 10.
Poudrier fendu.
Fig. 14.
Fig. 13.
Fig. 11.
Alénier fendu
Fig. 8.
Fig. 9.
Bâtardier fendu.
Fig. 12.
Fig. 16.
G. D'ORLEANS.
PITIVIERS
Benard Direxit.

Criblier.

Pl. 2.



Cribliér.

Benard Direxit.

Ist – wie bei den Siegener Beiträgen – das thematische Spektrum breiter aufgefächert, so müssen vielleicht sogar verschiedene Siebe parallel eingesetzt werden. Im Unterschied zu einem materiellen Sieb, dessen Form und Größe ein für allemal fixiert ist, sind die Kriterien für das Akzeptieren eines wissenschaftlichen Beitrags allerdings deutlich variabler. Im gelingenden Falle werden sie sogar immer wieder neu für den jeweils vorliegenden Beitrag angepasst, ohne dass dabei die grundlegende Ausrichtung des Journals ins Beliebige abglitte.

In doppelter Weise sind die Herausgeber jedenfalls nach dem Anfertigen und Modifizieren ihrer Siebe auf anderer angewiesen: Zunächst darauf, dass überhaupt genügend interessante Beiträge eingereicht werden; was nützt das schönste Sieb, wenn damit nichts gesiebt werden kann? Ist dann aber ein neuer Band entstanden, das Sieb also mit reicher Beute gefüllt, so bleibt den Herausgebern nur zu hoffen, dass die Auswahl auch andere überzeugt, dass die Beiträge viele interessierte Leser finden.

Wenn im Vorstehenden ohnehin schon ein Blick in die *Encyclopédie* PANCKOUCKES geworfen wurde, so sei es gestattet, noch ein wenig zu verweilen. Denn auch in Hinsicht auf das gesamte Werk könnte man eine Parallel-Aktion – zumindest in gewissen Aspekten – bemerken. Die eigentliche und berühmteste Enzyklopädie ist natürlich die von DENIS DIDEROT und JEAN BAPTISTE LE ROND D'ALEMBERT herausgegebene *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, deren Druckrechte PANCKOUCKE 1768 erworben hatte. Im *Prospectus*, also der Werbeschrift um Subscribenten, beschrieb DIDEROT bereits 1750 das Konzept der *Encyclopédie*[1]:

> „Bei der lexikalischen Zusammenfassung alles dessen, was in die Bereiche der Wissenschaften, der Kunst und des Handwerks gehört, muss es darum gehen, deren gegenseitige Verflechtungen sichtbar zu machen und mithilfe dieser Querverbindungen die ihnen zugrunde liegenden Prinzipien genauer zu erfassen [. . .] es geht darum, die entfernteren und näheren Beziehungen der Dinge aufzuzeigen, [. . .] ein allgemeines Bild der Anstrengungen des menschlichen Geistes auf allen Gebieten und in allen Jahrhunderten zu entwerfen".

1. „En réduisant sous la forme de dictionnaire tout ce qui concerne les sciences et les arts, il s'agissait encore de faire sentir les secours mutuels qu'ils se prêtent; d'user de ces secours, pour en rendre les principes plus sûrs [. . .]; d'indiquer les liaisons éloignées ou prochaines des êtres [. . .] de former un tableau général des efforts de l'esprit humain dans tous les genres et dans tous les siècles [. . .]" DENIS DIDEROT: Prospectus (1750). In: Œuvres complètes de Diderot. Band XIII, S. 130. Übersetzung durch Irene Schwendemann (Hrsg.): Hauptwerke der französischen Literatur. Einzeldarstellungen und Interpretationen. 4. Auflage. München 1983, S. 191.

Auch wenn es den Siegener Beiträgen mit Blick auf den menschlichen Geist 'nur' um die Facette des Mathematischen geht, so kann doch die Intention, „gegenseitige Verflechtungen sichtbar zu machen", um vielleicht an der einen oder anderen Stelle sogar „zugrunde liegende Prinzipien genauer zu erfassen", durchaus in Anspruch genommen werden. Die extrem weitgespannte Ambition der Enzyklopädisten, Verknüpfungen aller Gegenstände der „Wissenschaften, der Kunst und des Handwerks" aufzuzeigen, scheint jedoch nicht nachhaltig umsetzbar gewesen zu sein. Jedenfalls zerlegte Panckoucke die (übrigens wirtschaftlich zunächst extrem erfolgreiche) Enzyklopädie in der Neubearbeitung, indem er Fachlexika, *dictionnaires*, zu anfangs 27, zuletzt mehr als 50 Sachgebieten auflegte. Die ersten Bände erschienen 1782, als Panckouckes Schwiegersohn Henri Agasse 1794 den Betrieb kaufte, waren es mehr als 100 Bände. Hier haben die Siegener Beiträge noch einiges aufzuholen...

Gerade heutzutage ist aber auch an eine weitere Motivation Diderots zu erinnern, die er 1762 seiner Freundin Sophie Volland gegenüber brieflich zum Ausdruck brachte[2]

> „Dieses Werk wird sicher mit der Zeit eine Umwandlung der Geister mit sich bringen, und ich hoffe, dass die Tyrannen, die Unterdrücker, die Fanatiker und die Intoleranten dabei nicht gewinnen werden. [...]"

Auch wenn Umfang und Ambitionen in keinster Weise vergleichbar sind, so möchten sich die Siegener Beiträge doch gern einreihen in die Bemühungen um einen vernünftigen Diskurs, um die Achtung des gegnerischen Argumentes und – vielleicht sogar – um die Bekehrung der „Fanatiker und Intoleranten".

Wir freuen uns jedenfalls, hiermit bereits den siebten Band der Siegener Beiträge vorlegen zu können. Ganz im Geiste der voranstehenden Gedanken dokumentiert er die Pluralität von Themen, Perspektiven und Methoden – und kann hoffentlich ein Anstoß für den erwünschten produktiven Diskurs sein. Den Autoren danken wir sehr herzlich für ihre Bereitschaft, daran mitzuwirken.

Unser Dank gilt darüber hinaus Sebastian Schorcht für die Gestaltung der Titelgraphik, Daniel Rompf für die LaTeX-Bearbeitung des Manuskripts sowie Kordula Lindner-Jarchow, Martin Schubert und Markus Bauer für die verlagsseitige Betreuung der Reihe.

Ralf Krömer Gregor Nickel

2. Denis Diderot: Lettres à Sophie Volland. In: J. Assézat, M. Tourneux (Hrsg.): Œuvres complètes de Diderot. XIX. Garnier, Paris 1876, S.140 (Brief vom 26. September 1762).

Inhaltsverzeichnis

Nichtstandard in der elementaren Analysis – Kröte oder Froschkönig?

Karl Kuhlemann

1 Standard und Nichtstandard

Die elementare Analysis wird heute sowohl in der Schule als auch an der Hochschule fast ausnahmslos auf der Basis des Weierstraß'schen Grenzwertformalismus gelehrt. Vor diesem Hintergrund scheint die Bezeichnung „Standardanalysis" aus heutiger Sicht gerechtfertigt. Der Gebrauch infinitesimaler Größen, wie er bis Ende des 19. Jahrhunderts in der Analysis üblich (also Standard) war – wenn auch umstritten –, wurde durch den Grenzwertformalismus entbehrlich, um den Preis eines zwar logisch einwandfreien, aber umständlicheren und weniger intuitiven Beweisens.

Die logischen Vorbehalte gegen den Gebrauch infinitesimaler Größen wurden in den 1960er Jahren mit der Entwicklung der Nichtstandardanalysis durch Schmieden, Laugwitz und Robinson ausgeräumt. Seitdem hat sich die Nichtstandardanalysis nicht nur in der Forschung etabliert, wo sie zum Beispiel in Funktionalanalysis, Stochastik oder Topologie Anwendung findet. Es gibt inzwischen zahlreiche Untersuchungen, die zeigen, wie Nichtstandard auch in der elementaren Lehre der Analysis gewinnbringend eingesetzt werden kann, um Herleitungen direkter und intuitiver zu gestalten. Dies betrifft vornehmlich den ersten Zugang zu den Grundbegriffen der Analysis.[1]

Diese Möglichkeit wird allerdings bislang kaum genutzt und ist anscheinend im Bewusstsein der Mathematikerinnen und Mathematiker wenig präsent. Als Be-

1. Eine Zusammenstellung von Artikeln und Literaturhinweisen sowie umfangreiches Material für den praktischen Einsatz im Unterricht findet man zum Beispiel auf www.nichtstandard.de.

gründung wird oft der logische Hintergrund genannt und der enorme Aufwand, den man betreiben muss, wenn man die Theorie systematisch aufbauen will. Dieser systematische Aufbau, den man meint, speziell der Nichtstandardanalysis vorschalten zu müssen, ist aber vielleicht nur ein Vorwand, um dem ungewohnten Nichtstandarddenken auszuweichen.

Bei einer unvoreingenommenen Betrachtung darf nicht vergessen werden, dass auch die Standardanalysis starker Voraussetzungen bedarf und das Ergebnis eines zähen Ringens um die Grundlagen der Analysis und der Mathematik insgesamt war. Das Ergebnis erscheint nur demjenigen vollkommen natürlich und vertraut, der (ausschließlich) eine Standardausbildung genossen und verinnerlicht hat.

In diesem Aufsatz greife ich exemplarisch einige Punkte auf, die mir geeignet erscheinen, das Standarddenken kritisch zu hinterfragen, und gebe einen kurzen Einblick in gängige elementare Einführungen in die Nichtstandardanalysis.

2 Rechnen mit Unendlich

Unendliche Mengen sind heute eine mathematische Selbstverständlichkeit. Schon in der Schule werden die Menge aller natürlichen, aller ganzen oder aller rationalen, ja sogar aller reellen Zahlen gebildet und mit den harmlos scheinenden Symbolen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bezeichnet. Es wird von unendlichen Dezimalbrüchen, Intervallschachtelungen oder unendlichen Punktmengen gesprochen, in der Regel, ohne dies als Problem zu thematisieren.

Aus der Arithmetik wird das Unendliche jedoch weitgehend verbannt. Zwar ist die Existenz nicht-archimedischer Körper jedem ausgebildeten Mathematiker bekannt, aber in der Schule oder in universitären Anfängervorlesungen spielen solche Körper kaum eine oder gar keine Rolle. Hierdurch entsteht leicht der Eindruck, das Rechnen mit unendlich großen (oder unendlich kleinen) Zahlen wäre etwas logisch Widersprüchliches oder zumindest etwas Verbotenes.

Ein einfaches Beispiel mag dies illustrieren: Als Begründung dafür, dass man nicht durch Null dividieren darf, wird von Schülern (vielleicht auch von Lehrern?) bisweilen angeführt, dass das Ergebnis unendlich sein müsste. Eine solche Begründung trifft in zweifacher Hinsicht nicht. Zum einen wäre ein unendlich großes Ergebnis keine arithmetische Unmöglichkeit. Zum zweiten wäre eine unendlich große Zahl eben nicht das multiplikative Inverse der Null (das wäre in der Tat widersprüchlich), sondern einer unendlich kleinen (aber positiven) Zahl.

Was spricht gegen die Existenz einer „neuen“ Zahl Ω, die per definitionem größer als alle natürlichen (und damit auch größer als alle reellen) Zahlen ist? Nichts.

Eine solche Zahl lässt sich problemlos an einen gegebenen Körper wie $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ adjungieren, und das Rechnen in diesem erweiterten Zahlbereich $\mathbb{Q}(\Omega)$ bzw. $\mathbb{R}(\Omega)$ kann sogar von Schülern erforscht werden. Auch die Fortsetzung rationaler Funktionen auf diese Erweiterungskörper bereitet keine Schwierigkeiten.

Der Einsatz infiniter (unendlich großer) und infinitesimaler (unendlich kleiner) Zahlen in der elementaren Analysis ist verlockend. Man könnte zum Beispiel, anknüpfend an die Ansätze der Pioniere der Analysis, unter Umgehung von Grenzwertüberlegungen, direkt mit Differentialquotienten rechnen, etwa für die Funktion $f(x) = x^2$ mit infinitesimalem $dx \neq 0$ und $dy = f(x + dx) - f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x + dx)^2 - x^2}{dx} = 2x + dx \approx f'(x)$$

und so (bis auf den infinitesimalen Fehler dx) die Ableitung $f'(x)$ erhalten. Das Zeichen $\approx$ steht hier und im Folgenden für einen infinitesimalen Unterschied.

Allerdings reicht für die Analysis der Erweiterungskörper $\mathbb{R}(\Omega)$ nicht aus, denn man will nicht nur rationale Funktionen, sondern auch Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen und andere transzendente Funktionen untersuchen. Und zur Behandlung von Reihen und Integralen braucht man Summationen mit unendlichen Summationsindizes. In $\mathbb{R}(\Omega)$ ist aber vollkommen unklar, was Ausdrücke wie $\sin(\Omega), 2^\Omega$ oder $\sum_{n=0}^{\Omega} \frac{1}{n!}$ bedeuten sollen, wenn man nur weiß, dass Ω größer als alle natürlichen Zahlen ist.

Für die Nichtstandardanalysis braucht man also einen umfangreicheren Zahlenbereich und weitere Festlegungen. Aber für eine erste Begegnung mit Nichtstandarddenken, für einen ersten experimentellen Umgang mit infiniten und infinitesimalen Zahlen eignet sich $\mathbb{R}(\Omega)$ sehr wohl.

3 Warum sollte man sich mit Nichtstandard befassen?

Detlef Laugwitz schreibt zu der Frage „Was ist Infinitesimalmathematik und wozu betreibt man sie?“: [2]

> Wozu also betreibt man irgendeine Mathematik. Ich sehe vor allem drei mögliche Rechtfertigungsgründe,

2. Laugwitz 1978, S. 10

1. den der Anwendung im weitesten Sinne, sei es in der Lösung von Problemen innerhalb und außerhalb der Mathematik, sei es durch die Neu- oder Weiterentwicklung von Methoden;

2. den des Unterrichts, sei es durch Beiträge zu den Inhalten oder durch eine Verbesserung der Vermittlung;

3. den der Reflexion auf die Mathematik selbst, seien es ihre Geschichte oder ihre Weiterentwicklung.

Inwieweit sind diese Gründe für die elementare Analysis relevant? Gehen wir die Punkte der Reihe nach durch.

Der erste Rechtfertigungsgrund ist eine wesentliche Triebfeder für den Einsatz von Nichtstandard in der Forschung. Nichtstandard ist eine echte Erweiterung von Standard. Das heißt, es gibt Sätze, die in der Nichtstandardanalysis beweisbar sind, aber nicht oder nur wesentlich komplizierter in der Standardanalysis. Der Vorteil von Nichtstandard liegt dabei oft darin, dass Objekte in der Nichtstandardwelt explizit konstruiert werden können, für die sonst nur die Existenz beweisbar ist, und dass kontinuierliche Probleme quasi wie endliche behandelt werden können.[3]

Letzteres spielt auch in der elementaren Analysis eine Rolle, wenn Integrale als sogenannte *hyperendliche* Summen berechnet werden. Ebenso kann das Rechnen mit „divergenten Reihen“ als methodische Bereicherung in der elementaren Analysis angesehen werden. Der Begriff ist in Anführungszeichen gesetzt, weil es in der Nichtstandardanalysis im eigentlichen Sinn keine divergenten Reihen, sondern nur Summen mit infinitem Ergebnis gibt. Mit diesen kann aber ganz normal arithmetisch gerechnet werden. Man betrachte dazu das folgende einfache Beispiel nach einem Ansatz von Johann Bernoulli (mit einer unendlich großen Zahl Ω). [4]

$$\sum_{n=1}^{\Omega} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\Omega} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\Omega} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\Omega} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\Omega} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{\Omega+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{\Omega+1} \approx 1$$

Die beiden Summen hinter dem zweiten Gleichheitszeichen sind infinit, wären also

3. Anwendungen aus Funktionalanalysis, Topologie und Stochastik findet man zun Beispiel in Väth 2007 bzw. Landers und Rogge 1994. Die übliche Konstruktion der Nichtstandardwelt mittels Ultrafilter enthält allerdings selbst ein nicht-konstruktives Element, da der verwendete Ultrafilter nicht explizit angegeben werden kann. Seine Existenz wird mit dem Auswahlaxiom bzw. dem Zorn'schen Lemma bewiesen.

4. Schmieden und Laugwitz 1958, S. 15

als unendliche Reihen in der Standardanalysis divergent. In der Nichtstandardanalysis sind das konkrete Zahlen, und als Ergebnis kommt (bis auf eine unendlich kleine Abweichung) der Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ heraus. Allerdings ist noch zu klären, was die Summation bis Ω bedeuten soll.

Der zweite Rechtfertigungsgrund ist für die Verwendung von Nichtstandard in der elementaren Analysis zentral, denn hier geht es vornehmlich um die Vermittlung von Ideen, von Grundbegriffen und Methoden der Analysis. Die folgende Aufzählung skizziert das Nichtstandardprogramm für die Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit von Standardfunktionen (also gewöhnlichen reellen Funktionen, die man sich auf den erweiterten Zahlenbereich fortgesetzt denkt) sowie für Häufungspunkte von Folgen. Der *Standardteil* einer Zahl ist dabei die infinitesimal benachbarte reelle Zahl. Wenn der Standardteil existiert, so ist er eindeutig bestimmt.

- Eine Standardfunktion ist stetig (an einer Stelle), wenn dort jede unendlich kleine Änderung dx des Arguments nur eine unendlich kleine Änderung dy des Funktionswerts bewirkt.

- Die Ableitung einer differenzierbaren Standardfunktion (an einer Stelle) ist der Standardteil des Differentialquotienten, also des Verhältnisses der Funktionswertänderung dy zu einer infinitesimalen Argumentänderung $dx \neq 0$. Anschaulich konstruiert man ein infinitesimales Steigungsdreieck. Die Differenzierbarkeit ist gegeben, wenn der Standardteil existiert und unabhängig von der infinitesimalen Argumentänderung ist.

- Das bestimmte Integral einer integrierbaren Standardfunktion über einem Intervall ist der Standardteil einer hyperendlichen Riemann'schen Summe zu einer infinitesimalen Zerlegung des Intervalls, anschaulich die Flächensumme von infinitesimal breiten Rechtecken mit der Höhe eines Funktionswertes in dem jeweiligen infinitesimalen Teilintervall. Die Integrierbarkeit ist gegeben, wenn der Standardteil existiert und unabhängig von der infinitesimalen Zerlegung ist.

- Die Häufungspunkte einer Folge sind die Standardteile der Folgenglieder mit unendlich großen Indizes (sofern die Standardteile existieren).

Voraussetzungen für die Durchführung dieses Programms, für das ich in Kapitel 6 verschiedene Ansätze vorstelle, sind der erweiterte Zahlenbereich, die Fortsetzung von Rechenoperationen, Funktionen und Relationen auf diesen Zahlenbereich, inklusive der hyperendlichen Summen.

Der Umgang mit den Grundbegriffen ist dann rein arithmetisch möglich ohne die für die Standardanalysis typischen ϵ-δ-Abschätzungen. Als Beispiel mag hier die Herleitung der Kettenregel genügen: Sind $y = f(x)$ und $z = g(y)$ differenzierbar, so ist nach der Kettenregel auch $h(x) = g(f(x))$ differenzierbar mit der Ableitung $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. In der Standardanalysis ist zum Beweis dieser Regel eine umständliche ϵ-Argumentation erforderlich. In der Nichtstandardanalysis kann man stattdessen direkt mit den Differentialen und Differentialquotienten rechnen. Mit infitesimalem $dx \neq 0$ sowie $dy = f(x + dx) - f(x)$ und $dz = g(y + dy) - g(y)$ erhält man durch Einsetzen der ersten in die zweite Gleichung und mit $f(x)$ für y

$$\begin{aligned} dz = g(f(x) + f(x + dx) - f(x)) - g(f(x)) &= g(f(x + dx)) - g(f(x)) \\ &= h(x + dx) - h(x) \end{aligned}$$

Da $\frac{dy}{dx} \approx f'(x)$ und $\frac{dz}{dy} \approx g'(y)$ ist, folgt die Kettenregel (für $dy \neq 0$) aus der simplen Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

(Für $dy = 0$ ist die Kettenregel trivialerweise auch erfüllt.)

Zum dritten Rechtfertigungsgrund: Wenn Mathematik ihrer Rolle als allgemeinbildendes Fach gerecht werden soll, gehört auch ein gewisses Maß an Selbstreflexion der Mathematik als einer sich entwickelnden Wissenschaft in den Unterricht. Leider wird dies oft weitgehend ausgeblendet, sodass Mathematik als ein im Prinzip fertig vorliegendes, Ehrfurcht gebietendes Gebäude ewiger Wahrheiten dasteht, in dem es zwar immer noch Neues zu entdecken gibt, das aber in seinen Grundfesten unverrückbar ist. Gerade das aktual Unendliche, das Kontinuum und der Zahlbegriff bieten für die Einbeziehung des historischen Kontextes immer wieder Gelegenheit und Anlass, denn die in der Geschichte aufgetretenen Widerstände gegen die heutige Auffassung dürften auch beim lernenden Individuum in der Regel nicht ausbleiben.

4 Wann sollte man sich mit Nichtstandard befassen?

Wann ist der richtige Zeitpunkt, um sich mit Nichtstandardanalysis zu befassen? Wenn man eine solide Universitätsausbildung in Standardanalysis absolviert hat? In den Anfängervorlesungen bei der Einführung in die Analysis? Oder bereits in der Schule? Genauer müsste man fragen: Wann sollte man sich wie weitgehend mit Nichtstandard befassen? Der früheste sinnvolle Zeitpunkt scheint mir dort zu liegen, wo die Real-Mathematik in die Vereinbarungs-Mathematik übergeht, denn mit dem Infiniten und Infinitesimalen begeben wir uns in einen Bereich der reinen Theorie, in einen Bereich, der der praktischen Erfahrung prinzipiell nicht mehr zugänglich ist. In diesen Bereich gehören aber auch unendliche Mengen und reelle Zahlen (siehe Abschnitt 5.1 bzw. 5.3).

Im Grunde beginnt die Vereinbarungs-Mathematik bereits noch früher, mit der Darstellung rationaler Zahlen durch unendliche Dezimalbrüche, welche nichts anderes als Grenzwerte sind. Die ewige Diskussion um die Frage, ob der unendliche periodische Dezimalbruch $0,999\ldots$ nun gleich 1 ist oder vielleicht doch kleiner, zeigt welche Schwierigkeiten entstehen, wenn Vereinbarungen als Tatsachen verkauft werden.[5]

Offenbar sind viele Schüler eher bereit, die Existenz einer unendlich kleinen positiven Zahl anzunehmen, als einen Unterschied zwischen $0,999\ldots$ und 1 zu leugnen.[6] Ist das Unverständnis oder Unvoreingenommenheit? In der Nichtstandardanalysis ist in der Tat

$$\sum_{n=1}^{\mu} \frac{9}{10^n} < 1$$

für jede infinite natürliche Zahl μ. Der Unterschied zu 1 ist infinitesimal. Warum sollte man die zwangsläufig auftretende Diskussion um $0,999\ldots$ nicht nutzen, um die Möglichkeit der Existenz unendlich kleiner und unendlich großer Zahlen zu thematisieren und den Vereinbarungscharakter der Interpretation unendlicher Dezimalbrüche im Bereich der rationalen oder reellen Zahlen offen anzusprechen?[7]

Bei der Einführung der reellen Zahlen kann ebenfalls die Existenz unendlich kleiner und unendlich großer Zahlen thematisiert werden. Die reellen Zahlen sind dann eben nicht alle, die man sich in einer linearen Anordnung denken kann. Die Zahlengerade wird „länger“ und „dichter“.

Bei der eigentlichen Einführung in die Analysis ergibt sich dann der in Kapitel 3 skizzierte infinitesimale Zugang ganz zwanglos. Standard- und Nichtstandarddefinitionen können dabei nebeneinander präsentiert und verglichen werden. Dies scheint auch aus dem Grund geboten, um Schülern den Anschluss an Kurse und den Zugang zu Literatur in der „Standardsprache“ zu erleichtern.

5. Siehe etwa Bedürftig und Murawski 2015, S. 388ff.
6. Siehe z. B. Bauer 2011.
7. In der Konstruktion der hyperreellen Zahlen (siehe Kapitel 6) werden hyperreelle Zahlen durch reelle Zahlenfolgen repräsentiert. Und $0,999\ldots$ (als Partialsummenfolge) repräsentiert eine Zahl, die infinitesimal kleiner als 1 ist. Die infinitesimale Differenz zu 1 wird repräsentiert durch die Differenzfolge $(0,1; 0,01; 0,001; \ldots)$.

5 Wie natürlich ist Standard?

Mengenlehre und die natürlichen Zahlen werden in der Analysis (sei es in der Schule oder an der Universität) von Anfang an gebraucht, allerdings nicht formal (auf der Basis von Axiomen) sondern informell, *naiv*. Auch die reellen Zahlen werden informell eingeführt, in der Schule zum Beispiel als Punkte einer Geraden (die dann Zahlengerade heißt) oder als unendliche Dezimalbrüche (mit der Periode-9-Besonderheit).

In den Anfängervorlesungen an der Universität werden die reellen Zahlen üblicherweise als „gegeben" vorausgesetzt und durch Axiome in ihren Eigenschaften festgelegt. Die Axiome werden dabei nicht in einer formalen Sprache, sondern umgangssprachlich, unter Verwendung der naiven Mengenlehre und der naiven natürlichen Zahlen formuliert.

Das für die reellen Zahlen zentrale Vollständigkeitsaxiom besagt zum Beispiel, dass jede Fundamentalfolge konvergiert. Dazu braucht man den Begriff der Folge, also einer Abbildung von $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, und damit sowohl die naiven natürlichen Zahlen als auch die naive Mengenlehre, um *alle* natürlichen Zahlen (gepaart mit ihren Bildern) zusammenfassen und die Folge als ein „fertiges" Objekt ansehen zu können.

Sind die Axiome der reellen Zahlen nun bloße Übertragungen der anschaulichen Sicht auf die Zahlengerade? Wie natürlich ist diese Sichtweise, wenn man geneigt ist anzunehmen, dass es nicht nur unendliche Mengen, sondern auch unendliche Zahlen gibt?

Wie natürlich sind Mengenlehre, die natürlichen, die reellen Zahlen?

5.1 Wie natürlich ist Mengenlehre?

Im Endlichen ist Mengenlehre wenig spektakulär (wenngleich der Begriff „endlich" sich als weniger trivial herausstellt, als es den Anschein hat)[8]. Dennoch sind bereits bei konkret angebbaren endlichen Mengen wie $\{1, 2, 3\}$ wesentliche Merkmale zu beachten, die dem Anfänger (Schüler oder Studienanfänger) unnatürlich vorkommen und daher Schwierigkeiten machen können.

8. In Bedürftig und Murawski 2001 wird in Kapitel 2 eine endliche (damit konsistente) Mengenlehre entwickelt, in der die Mengen genau die endlichen Mengen sind. Die echten Klassen, die „Unmengen" sind entsprechend unendlich (und keine Mengen). Auf dieser Basis wird in natürlicher Weise und intern „Endlichkeit" definiert (eine Menge heißt endlich, wenn man ihre Elemente „aufzählen" kann). Die Beziehung zu anderen Endlichkeitsbegriffen und die Rolle des Auswahlaxioms wird im Anhang A dargestellt.

Zum einen ist das die Abstraktion der Mengenbildung als solcher: Aus n Dingen wird *ein* neues Ding – die Menge der n Dinge – gedanklich erschaffen. Insbesondere die Bildung der leeren Menge $\emptyset$ macht aus nichts etwas.

Zum zweiten ist es die Extensionalität: Zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Alle eventuell bestehenden Beziehungen der Elemente untereinander werden bei der Mengenbildung abgestreift, es kommt nur auf die Zugehörigkeit zur Menge an.

Im Alltag liegen die Dinge in der Regel anders: Eine Maschine besteht aus Bauteilen, aber sie ist nicht die Menge ihrer Bauteile. In der Mathematik müssen bei einem mengentheoretischen Aufbau solche Beziehungen immer separat mitgegeben werden. Beispiel: Eine Gruppe ist ein Paar $(G, \circ)$, bestehend aus einer nicht leeren Menge G und einer inneren Verknüpfung $\circ$ (das heißt einer Teilmenge von $G \times G \times G$), sodass die Gruppenaxiome erfüllt sind.

In der transfiniten Mengenlehre kommt etwas hinzu, dessen Ungeheuerlichkeit heute kaum mehr spürbar ist. Ein offener Prozess soll etwas Abgeschlossenes erschaffen: eine aktual unendliche Menge. Zum Beispiel der offene Prozess des Zählens 1, 2, 3, ... die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ *aller* natürlichen Zahlen. Auf den mathematischen Laien muss dies (wie für fast alle Mathematiker vor Cantor) paradox wirken: Etwas nicht Endendes erschafft etwas Fertiges. Es *ist* ein Paradoxon, aber eines, an das Mathematiker sich gewöhnt haben.

Als eine Konsequenz der Verwendung aktual unendlicher Mengen muss das plausible euklidische Axiom „Das Ganze ist größer als der Teil“ geopfert werden, denn eine unendliche Menge kann bijektiv auf eine echte Teilmenge abgebildet werden, wie etwa $\{0, 1, 2, 3, \dots\} \to \{1, 2, 3, \dots\}$ per $n \mapsto n + 1$. Diese Eigenschaft wird bei Dedekind sogar zur Definition unendlicher Mengen.

Eine Menge heißt für gewöhnlich endlich, wenn sie bijektiv auf $\{0, \dots, n-1\}$ (für $n = 0$ soll das die leere Menge sein) mit $n \in \mathbb{N}_0$ abgebildet werden kann. Sie heißt Dedekind-endlich, wenn sie nicht bijektiv auf eine echte Teilmenge von sich selbst abgebildet werden kann. In der üblichen Mengenlehre sind beide Definitionen äquivalent, wobei für die Implikation „Dedekind-endlich $\Rightarrow$ endlich“ das Auswahlaxiom benötigt wird.[9]

Nach Cantor ist eine Menge jede beliebige Zusammenfassung von Dingen unserer Anschauung oder unseres Denkens (den Elementen der Menge). Die intuitiv naheliegende Mengenbildung durch Komprehension, also nach der Art $\{x \mid P(x)\}$ mit einem beliebigen Prädikat $P(x)$ führt zu Widersprüchen, wenn man etwa Prädikate wie $x = x$ oder $x \notin x$ für $P(x)$ verwendet.

9. Siehe z. B. Ebbinhaus 2003, S. 81.

Daher war es eine wesentliche Herausforderung bei der Axiomatisierung der Mengenlehre, solche Antinomien auszuschließen. ZFC (das Zermelo-Fraenkel'sches Axiomensystem mit Auswahlaxiom), ein verbreitetes Axiomensystemen der Mengenlehre, erlaubt mit dem Aussonderungsaxiom nur eine relative Komprehension der Art $\{x \in M \mid P(x)\}$, wobei M eine Menge ist, deren Existenz bereits gesichert ist.

Genauer gesagt, ist das Aussonderungsaxiom ein sogenanntes Axiomenschema, das zu jedem Ausdruck $\phi(x, y_1, \ldots, y_n)$ aus der formalen Sprache der Mengenlehre das Axiom enthält: Für alle z und für alle $y_1, \ldots, y_n$ gibt es die Menge $\{x \in z \mid \phi(x, y_1, \ldots, y_n)\}$.

In ähnlicher Weise ist das Schema der Ersetzungsaxiome aufgebaut, das Mengenbildungen der Art $\{F(x) \mid x \in I\}$, mit einer eindeutigen „Zuordnungsvorschrift“ F und einer Indexmenge I rechtfertigt.

In der heute üblichen Form beschreibt ZFC eine Mengenlehre ohne Urelemente, das heißt alle Gegenstände der Mengenlehre sind Mengen. Für einen mengentheoretischen Aufbau der Mathematik musste man daher für alle Gegenstände, die klassisch keine Mengen waren, einen mengentheoretischen Ersatz finden. Die natürlichen Zahlen werden zum Beispiel so definiert: $0 := \emptyset$ und $Sx := x \cup \{x\}$. Also $1 := \{0\}, 2 := \{0, 1\}, 3 := \{0, 1, 2\}$ und so weiter.

Wie aber kommt man zur Menge $\mathbb{N}_0$? Hierzu bedarf es eines Axioms, des Unendlichkeitsaxioms: Es gibt eine Menge, die 0 enthält und mit jedem x auch den Nachfolger Sx. Solche Mengen heißen *induktiv*. Dann zeigt man, dass es eine eindeutig bestimmte kleinste induktive Menge gibt, und nennt diese $\mathbb{N}_0$. Das heißt für jede induktive Menge M gilt $\mathbb{N}_0 \subseteq M$.

Mit dem Unendlichkeitsaxiom kommt also das aktual Unendliche in die Mengenlehre, aber mit dem Potenzmengenaxiom wird es schwindelerregend. Wie Cantor gezeigt hat, kann eine Menge nicht bijektiv auf ihre Potenzmenge (also die Menge ihrer Teilmengen) abgebildet werden. Die Potenzmenge ist stets *mächtiger* als die Menge selbst. Aber darf man überhaupt die Existenz der Menge *aller* Teilmengen einer beliebigen Menge voraussetzen? Auch hierzu bedarf es eines Axioms. Das Potenzmengenaxiom fordert, dass es zu jeder Menge die Potenzmenge gibt, ohne eine Konstruktionsanleitung anzugeben. Es ist eine bloße Existenzaussage. Indem es *alle* Teilmengen einer Menge zusammenfasst, nimmt das Potenzmengenaxiom Bezug auf ein bereits fertig beschriebenes Universum. Diese Besonderheit wird als *Imprädikativität* des Potenzmengenaxioms bezeichnet und ist der Hauptgrund für seine kritische Betrachtung.[10]

10. Siehe z. B. Ebbinghaus 2003, S. 35.

Das oben schon erwähnte Auswahlaxiom besagt: Zu jeder Menge M disjunkter Mengen gibt es eine Auswahlmenge, die aus jedem Element von M genau ein Element enthält. Wie das Potenzmengenaxiom ist das Auswahlaxiom nicht konstruktiv. Darüber hinaus gibt es aber noch nicht einmal eine verbindende Eigenschaft der Elemente der Auswahlmenge an. Es fordert einfach die Existenz einer willkürlich getroffenen Auswahl. Das Auswahlaxiom war besonders umstritten, bis Gödel 1938 zeigen konnte, dass es zumindest relativ konsistent zu den übrigen Axiomen ist.

Mit dem Potenzmengenaxiom, dem Auswahlaxiom oder dem Schema der Ersetzungsaxiome werden Aussagen, die für endliche Mengen selbstverständlich oder einfach zu zeigen sind, für beliebige Mengen postuliert. Ist es natürlich anzunehmen, dass diese Aussagen von endlichen Mengen auf unendliche übertragen werden können? Ehrlicherweise können wir nur eine pragmatische Antwort geben: Es ist für die Anwendbarkeit der Mengenlehre sehr praktisch, und es ist in gewisser Weise konsequent. Und solange keine Widersprüche entstehen, spricht zumindest aus formalistischer Sicht nichts dagegen.

Mathematiker sind es gewohnt, ein „Mengenuniversum“ als Hintergrund für ihre Arbeit anzunehmen und sich gleichsam wie in einer realen Welt darin zu bewegen. Aber Mengenlehre ist Theorie. Die Existenz einer Menge zu beweisen heißt, einen mit $\exists$ („Es gibt“) beginnenden Ausdruck aus ZFC (oder einem anderen Axiomensystem, auf das man sich verständigt hat) herzuleiten. Wir wissen nicht, ob die Mengenlehre widerspruchsfrei ist, und nach den Gödel'schen Unvollständigkeitssätzen können wir die Widerspruchfreiheit auch prinzipiell nicht beweisen.

Wie wenig man über das Mengenuniversum weiß, zeigt die Unentscheidbarkeit der Kontinuumshypothese, die behauptet, dass jede Teilmenge von $\mathbb{R}$, die mächtiger ist als $\mathbb{N}$, bereits genauso mächtig ist wie $\mathbb{R}$. Sowohl die Kontinuumshypothese, als auch ihre Negation sind jeweils für sich genommen mit ZFC verträglich (Gödel, Cohen).

Und dass ein Mengenuniversum, das den Axiomen von ZFC genügt, auch ganz ungewohnte Merkmale haben könnte, zeigen konsistente Erweiterungen von ZFC, zum Beispiel die Interne Mengenlehre von Nelson (siehe Abschnitt 6.4).

5.2 Wie natürlich sind die natürlichen Zahlen?

Die natürlichen Zahlen sind die ältesten, die wir kennen. Wir benutzen sie als Ordinalzahlen, um Dinge in eine Reihenfolge zu bringen, als Kardinalzahlen beim Zählen von Dingen oder einfach zum Rechnen.

Der Prozess des Zählens, der die natürlichen Zahlen hervorbringt, kann in einfachster Weise durch fortgesetzte Wiederholung eines bestimmten Zeichens (zum Beispiel Striche auf einem Blatt Papier oder Kerben auf einem Knochen) dokumentiert werden. Wählt man 0 als Symbol für die Null (die man zum Zählen selbst nicht braucht, die aber beim Rechnen praktisch ist) und S als Symbol für Nachfolger, so erhält man nacheinander die Zahlen $0, S0, SS0, SSS0$ und so weiter. Da es prinzipiell immer möglich ist noch ein weiteres S voranzustellen, kommt der Prozess prinzipiell nie zu einem Ende. Er ist *potentiell unendlich.* Die Zeichenketten $S \dots S0$ können als einfachste Darstellungen der naiven, potentiell unendlichen natürlichen Zahlen verstanden werden. Diese Zahlen sind nicht Objekte einer abstrakten Theorie, sondern haben gewissermaßen direkte Entsprechungen im menschlichen Handeln. Wir können die Zeichenketten $0, S0, SS0, SSS0, \dots$ effektiv hinschreiben, wenn auch praktisch nur sehr begrenzt.

Die naiven natürlichen Zahlen gebrauchen wir für metasprachliche Betrachtungen innerhalb der mathematischen Logik, etwa wenn wir bezogen auf eine formale Sprache von einem Ausdruck der Länge n, einem Ausdruck mit den freien Variablen $x_0, \dots, x_n$ oder einem Term $S \dots S0$ mit n-maligem S sprechen. Es geht dabei stets um Zeichenketten, die im Prinzip effektiv hingeschrieben werden könnten.

Problematisch wird es, wenn wir den Prozess des Zählens auf naive Weise als umfassend betrachten und so die Menge $\mathbb{N}_0$ *aller* natürlichen Zahlen bilden wollen, denn es ist nicht möglich, $\mathbb{N}_0$ eindeutig zu charakterisieren. Die folgenden Überlegungen stammen von Edward Nelson.[11] Nehmen wir etwa diese naheliegende Charakterisierung (Zahl steht hier abkürzend für natürliche Zahl):

1. Null ist eine Zahl.
2. Der Nachfolger einer Zahl ist eine Zahl.
3. Null ist nicht Nachfolger einer Zahl.
4. Verschiedene Zahlen haben verschiedene Nachfolger.
5. Etwas ist nur dann eine Zahl, wenn es dies ausschließlich aufgrund der Regeln 1 und 2 ist.

Die Regeln 3 und 4 sorgen dafür, dass der Zählprozess sich nicht wiederholt, sondern immer neue Zahlen produziert. Regel 5 sagt aus, dass wir allein mit den Regeln 1 und 2 schließlich alle Zahlen erwischen. Aber was bedeutet das genau? Was heißt „ausschließlich aufgrund der Regeln 1 und 2“? Es wäre offenbar zirkulär, wenn wir das als n-maliges Anwenden der Regeln 1 und 2 definieren würden mit

11. Siehe Nelson 2007.

einer gewissen Zahl n. Wir würden bereits das Konzept der Zahl gebrauchen, um den Begriff Zahl umfassend zu definieren.

Bietet die Mengenlehre hier einen Ausweg, indem wir Dedekind und Peano folgend die natürlichen Zahlen mengentheoretisch definieren? Wie in Abschnitt 5.1 erwähnt, kann in ZFC die Menge $\mathbb{N}_0$ eindeutig definiert werden. Weiterhin können in ZFC (mit $Sx := x \cup \{x\}$) leicht die folgenden Sätze bewiesen werden, die eine direkte Übertragung der Regeln 1 bis 4 sind:

1. $0 \in \mathbb{N}_0$.
2. Für alle x gilt: Aus $x \in \mathbb{N}_0$ folgt $Sx \in \mathbb{N}_0$.
3. Für alle x gilt: nicht $S(x) = 0$.
4. Für alle x, y gilt: Aus $S(x) = S(y)$ folgt $x = y$.

Was ist mit Regel 5? In ZFC gilt, dass jede induktive Menge die gesamte Menge $\mathbb{N}_0$ umfasst. Jede Menge, die 0 enthält und mit jedem x auch Sx, enthält alle Elemente aus $\mathbb{N}_0$. Trifft das die beabsichtigte Bedeutung von Regel 5 zur Charakterisierung der naiven natürlichen Zahlen? Wir können nicht fragen, ob es für jedes $x \in \mathbb{N}_0$ eine naive natürliche Zahl n mit $x = n$ gibt, denn das wäre eine Vermischung von Objektsprache und Metasprache. Wir müssen bei der Untersuchung der Frage beide Sprachebenen auseinanderhalten.

Fügt man der Sprache von ZFC noch ein undefiniertes einstelliges Prädikat ϕ hinzu und erweitert ZFC zu ZFC^ϕ durch die zusätzlichen Axiome

- $\phi(0)$,
- Für alle x gilt: Aus $\phi(x)$ folgt $\phi(Sx)$,

dann kann man für jeden Term $S \ldots S0$ (mit n-maligem S), ausgehend von $\phi(0)$, in n Schritten $\phi(S \ldots S0)$ beweisen.[12]

Damit drückt $\phi(x)$ in der Objektsprache aus, dass x eine Zahl ausschließlich aufgrund der Regeln 1 und 2 ist, denn außer den beiden neuen Axiomen, die genau den Regeln 1 und 2 entsprechen ist ja in ZFC^ϕ nichts über ϕ bekannt. Die entscheidende Frage lautet nun, ob man in ZFC^ϕ die Aussage „Für alle x gilt: Aus $x \in \mathbb{N}_0$ folgt $\phi(x)$“ beweisen kann. Die Antwort lautet: Nein (vorausgesetzt ZFC ist widerspruchsfrei).[13]

12. Wenn ZFC widerspruchsfrei ist, dann auch ZFC^ϕ, denn man kann $\phi(x)$ in einem Modell für ZFC zum Beispiel als $x = x$ interpretieren und so ein Modell für ZFC^ϕ erhalten.

13. Siehe Nelson 2007.

Die gleiche Überlegung gilt für jedes andere Axiomensystem für die natürlichen Zahlen, zum Beispiel die Peano-Arithmetik (sofern widerspruchsfrei).

Fazit: Die Elemente von $\mathbb{N}_0$ können nicht mit den naiven natürlichen Zahlen gleichgesetzt werden. Die aktual unendliche Menge $\mathbb{N}_0$ ist kein Objekt, das naiv erfasst werden kann. Es ist Gegenstand einer Theorie, zum Beispiel der ZFC-Mengenlehre.

Damit ist auch das naive, metasprachliche endlich („ein Term $S \dots S0$ der Länge n") vom theoretischen endlich („eine Menge, die sich bijektiv auf $\{1, \dots n\}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ abbilden lässt") zu unterscheiden.

5.3 Wie natürlich sind die reellen Zahlen?

Wenn man in der Mathematik heute von *dem* Kontinuum spricht, meint man meistens die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, aber dies ist eine relativ junge Sichtweise auf das Kontinuum, die sich erst Ende des 19. Jahrhunderts herausgebildet hat. Voraussetzung waren die Erfindung der Mengenlehre durch Georg Cantor und die Erfindung der reellen Zahlen, wesentlich durch Cantor und Dedekind. Bei Cantor sind reelle Zahlen Äquivalenzklassen von Fundamentalfolgen rationaler Zahlen (wobei zwei Folgen als äquivalent gelten, wenn sie sich nur um eine Nullfolge unterscheiden), bei Dedekind werden sie durch Schnitte in $\mathbb{Q}$ (also Zerlegungen von $\mathbb{Q}$ in einen unteren und einen oberen Teil) definiert.

Historisch betrachtet sind Kontinuum und Menge zwei einander ausschließende Konzepte. Eine Menge ist nach Cantor die Zusammenfassung *wohlunterschiedener* Objekte. Das klassische Kontinuum hingegen ist etwas Homogenes, in dem keine wohlunterschiedenen Objekte als Bestandteile des Kontinuums auszumachen sind. Klassisch werden Punkte (als Nicht-Kontinua) in ein Kontinuum *gesetzt*. Erst mit Cantor, Dedekind und Hilbert wird das Kontinuum zur Punktmenge erklärt und damit der Mengenlehre zugänglich gemacht. Dies ist aber ein entscheidender Wandel im Denken (siehe Bedürftig und Murawski 2015, Kapitel 3).

Schüler werden in der Regel, unter Ausblendung der historischen Entwicklung, vor vollendete Tatsachen gestellt. Nachdem man exemplarisch, durch das Abtragen der Diagonale des Einheitsquadrates eine Lücke auf der rationalen Zahlengerade identifiziert hat, definiert man die reellen Zahlen als diejenigen, die keine Lücke mehr auf der Geraden lassen. Abgesehen davon, dass hier die Transformation der anschaulichen Geraden zur Punktmenge stillschweigend vollzogen wird, ist dies keine Definition, wenn man nicht sagt, welche Punkte (als potentielle Lücken) es auf der Geraden gibt. Tatsächlich war die historische Reihenfolge genau andersherum. Die reellen Zahlen wurden mengentheoretisch definiert (als Dedekind'sche Schnitte oder als Äquivalenzklassen von Fundamentalfolgen) und die anschauliche Gerade zur reellen Zahlengeraden umdefiniert.

Die Problematik des aktual Unendlichen steckt dabei in jeder einzelnen reellen (zumindest in jeder irrationalen Zahl), selbst wenn eine konkrete Folge $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{Q}$ zu ihrer Definition angegeben werden kann. Wenn schon die Menge $\mathbb{N}_0$ nicht naiv erfasst werden kann, gilt das ebenso für jede irrationale Zahl. Bei der Definition von $\mathbb{R}$ als Zusammenfassung aller reellen Zahlen kommt noch die Imprädikativität des Potenzmengenaxioms als Problem hinzu, da dieses Axiom sowohl bei der Zusammenfassung aller rationalen Fundamentalfolgen, wie auch bei der Zusammenfassung aller Dedekind'schen Schnitte gebraucht wird.

Trotz ihres Namens sind die reellen Zahlen nichts, was man direkt mit der Realität in Zusammenhang bringen könnte, wie es etwa bei den naiven natürlichen Zahlen möglich ist. Reelle Zahlen sind Theorie. Keine noch so genaue physikalische Messung könnte jemals darüber entscheiden, ob das Verhältnis zweier Messgrößen rational oder irrational ist. Dies könnte allenfalls theoretisch entschieden werden.

Da die mengentheoretischen Konstruktionen Schülern nicht zumutbar sind, werden ersatzweise unendliche Dezimalbrüche oder Intervallschachtelungen zur Definition der reellen Zahlen herangezogen. Aber die Problematik bleibt bestehen und macht Schülern durchaus zu schaffen, etwa wenn ein offener Prozess (unendlicher Dezimalbruch, unendliche Interallschachtelung) als abgeschlossen betrachtet werden soll. Die Diskussion um die $0,999\ldots$-Frage wurde oben schon erwähnt.

Das Potenzmengenaxiom spielt im Hintergrund immer mit bei Formulierungen wie „alle unendlichen Dezimalbrüche“ oder „alle rationalen Intervallschachtelungen“. Man kann intuitiv nicht wirklich erfassen, über welchen Bereich von Dingen man hier redet. Auch die Erkenntnis, dass es sich um überabzählbare Mengen handelt, hilft nicht weiter. All diese Objekte und Begriffe sind Gegenstand der Mengenlehre und damit Theorie.

Aber haben die reellen Zahlen nicht doch einen direkten Bezug zur Anschauung? Ist es zum Beispiel nicht anschaulich einleuchtend, dass jede Intervallschachtelung nur einen Punkt auf der Geraden und damit genau eine reelle Zahl festlegt? Es kommt darauf an. Wenn man die Transformation von der anschaulichen Geraden zur Punktmenge nicht mitmacht, ist doch folgende Sichtweise viel näherliegend: Der Durchschnitt einer Intervallschachtelung ist ein unendlich kurzes Intervall. Und auf so einem Intervall, kann man nicht nur eine, sondern viele Zahlen unterbringen (die dann unendlich nahe beieinander liegen).

In der Standardanalysis werden solche infinitesimal benachbarten Zahlen durch die Konstruktion oder Axiomatik der reellen Zahlen ausgeschlossen. Jede Fundamentalfolge hat nach dem Vollständigkeitsaxiom einen Grenzwert, der nach dem archimedischen Axiom dann eindeutig bestimmt ist. Und damit enthält auch jede Intervallschachtelung genau eine reelle Zahl. Doch diese Situation ist durch die Konstruktion oder die Axiome erzwungen und nicht durch die Anschauung. Die Pioniere der Analysis von Newton und Leibniz bis Cauchy hatten eine andere Anschauung.

Spalt schreibt dazu:[14]

> Kurz: Die Standard-Analysis kann nur deshalb den schönen Satz sagen: „Die reellen Zahlen sind vollständig.“, weil sie mit dem Begriff „gleich“ schludert und das, was man zuvor zwei Jahrhunderte lange als einen „unendlich kleinen Fehler“ markierte, weitherzig einfach als „gleich“ tituliert.

Und das archimedische Axiom gilt in der Nichtstandardanalysis in folgender Weise: Für alle (möglicherweise infinitesimalen) $x, y > 0$ gibt es eine (möglicherweise infinite) natürliche Zahl n, sodass $nx > y$ ist.

6 Elementare Einführungen in Nichtstandard

Es gibt im Wesentlichen zwei verschiedene Wege der Einführung in die Nichtstandardanalysis: den konstruktiven und den axiomatischen. Das gilt grundsätzlich auch für elementare Einführungen, um die es hier gehen soll.

Beim konstruktiven Weg bewegt man sich in der gewohnten ZFC-Mengenlehre und konstruiert eine Erweiterung ${}^*\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$, die sich in ihren arithmetischen Eigenschaften als angeordneter Körper nicht von $\mathbb{R}$ unterscheidet. Als Untermenge von ${}^*\mathbb{R}$ findet man die entsprechende Erweiterung ${}^*\mathbb{N}_0$ von $\mathbb{N}_0$ und erweitert den Begriff endlich zu $*$-*endlich* (auch *hyperendlich*). Die in Abschnitt 6.1 vorgestellte Erweiterung von $\mathbb{R}$ zu ${}^\Omega\mathbb{R}$ verläuft im Prinzip ähnlich, die Übereinstimmung mit $\mathbb{R}$ bezüglich der Arithmetik geht jedoch bei ${}^\Omega\mathbb{R}$ nicht so weit wie bei ${}^*\mathbb{R}$.

Beim axiomatischen Weg gibt es wiederum unterschiedliche Möglichkeiten, je nach dem, ob die Axiome für den benötigten Zahlenbereich aufgestellt werden oder für die zugrunde gelegte Mengenlehre. Letzteres geschieht in der Internen Mengenlehre von Edward Nelson.

14. Siehe Spalt 2015, S 538.

In diesem Kapitel stelle ich jeweils zwei konstruktive und zwei axiomatische Ansätze unter folgenden Gesichtspunkten vor:

1. Wie wird der Zahlenbereich für die Nichtstandardanalysis eingeführt?
2. Wie werden Aussagen über den zugrunde gelegten Zahlenbereich begründet?

6.1 Ω-Zahlen

Cantor hat die reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Fundamentalfolgen rationaler Zahlen definiert. Zwei solche Folgen sind äquivalent (das heißt, sie repräsentieren dieselbe reelle Zahl), wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist. Analog definiert Laugwitz seine Ω-Zahlen als Äquivalenzklassen über Folgen reeller Zahlen.[15] Die Unterschiede zu Cantors Definition sind, dass nicht nur Fundamentalfolgen, sondern alle Folgen betrachtet werden, und dass die Äquivalenzbedingung strenger ist. Zwei Folgen repräsentieren nur dann dieselbe Ω-Zahl, wenn sie sich nur an endlich vielen Stellen unterscheiden. Eine übliche Sprechweise hierfür ist „wenn sie *fast überall* übereinstimmen“. Somit repräsentieren zum Beispiel $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\frac{1}{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ zwei verschiedene Ω-Zahlen, die sich beide als infinitesimal herausstellen und von denen die erste doppelt so groß ist wie die zweite.

Zur Vereinfachung schreibe ich $[a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ oder $[a_n]$ für die durch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ repräsentierte Ω-Zahl. Ein besonderes Symbol erhält die für den Kalkül namensgebende Zahl $\Omega := [n] = [1, 2, 3, \dots]$ Laugwitz verwendet für die durch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ repräsentierte Ω-Zahl das Symbol a_Ω.

Die Menge aller Ω-Zahlen wird mit ${}^\Omega\mathbb{R}$ bezeichnet. $\mathbb{R}$ kann als Teilmenge von ${}^\Omega\mathbb{R}$ aufgefasst werden, indem jede reelle Zahl r mit der Ω-Zahl $[r]_{n\in\mathbb{N}}$ identifiziert wird.

Jede Untermenge D von $\mathbb{R}$ kann man zu einer Untermenge ${}^\Omega D$ von ${}^\Omega\mathbb{R}$ fortsetzen, die definitionsgemäß genau diejenigen $[a_n]$ enthält, für die fast alle $a_n \in D$ sind.

Es ist leicht zu zeigen, dass folgende Definitionen wohldefiniert sind, also nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängen:

- $[a_n] + [b_n] := [a_n + b_n]$
- $f([a_n]) := [f(a_n)]$
- $[a_n] < [b_n] :\Leftrightarrow a_n < b_n$ fast überall

15. Siehe Laugwitz 1978. Ursprünglich hatten Schmieden und Laugwitz ihren Ω-Kalkül für rationale Ω-Zahlen definiert (Schmieden und Laugwitz 1958).

Dabei ist f eine auf $D \subseteq \mathbb{R}$ definierte reelle Funktion. Die Fortsetzung (die der Einfachheit halber ebenfalls mit f bezeichnet werde) ist dann auf ${}^{\Omega}D$ definiert. Analog zu $+$ und $<$ kann man andere Rechenoperationen bzw. Relationen auf Ω-Zahlen fortsetzen (wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind, unter Beibehaltung der Bezeichnungen). Die Division $[a_n] : [b_n]$ ist nur dann definiert, wenn b_n fast überall ungleich 0 ist.

Aufgrund der Definition von $<$ ergibt sich zum Beispiel, dass Nullfolgen über $\mathbb{R}$, wie $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, infinitesimale Ω-Zahlen repräsentieren (fast alle Folgenglieder sind kleiner als jede vorgegebene reelle Zahl) und bestimmt divergente Folgen über $\mathbb{R}$, wie $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, infinite Ω-Zahlen (fast alle Folgenglieder sind größer als jede vorgegebene reelle Zahl).

Da reelle Zahlenfolgen nichts anderes als Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ sind, lassen auch diese sich zu Funktionen von ${}^{\Omega}\mathbb{N}$ nach ${}^{\Omega}\mathbb{R}$ fortsetzen. Aus einer reellen Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erhält man die Fortsetzung $(a_\nu)_{\nu\in{}^{\Omega}\mathbb{N}}$. Griechische Buchstaben im Index sollen andeuten, dass der Index auch ganze Ω-Zahlen als Werte annimmt.

Setzt man die Repräsentantenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Ω-Zahl $[a_n]$ auf ${}^{\Omega}\mathbb{N}$ fort, so erhält man insbesondere: $a_\Omega = [a_n]$ als Rechtfertigung für Laugwitz' Bezeichnungskonvention für Ω-Zahlen.

Der Zusammenhang mit der Standardtheorie der Folgen liegt in folgendem Umstand: Die Häufungspunkte einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind gerade die Standardteile der Folgenglieder a_ν für infinite ν (sofern die Standardteile existieren). Für eine konvergente Folge liegen somit alle a_ν mit infinitem ν in der Monade (also der infinitesimalen Umgebung) des Grenzwertes $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Beispiel: Mit $a_n = (-1)^n$ hat die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Häufungspunkte 1 und -1, und es ist $a_{2\Omega} = 1$ und $a_{2\Omega+1} = -1$.

Zur Behandlung von Integralen werden noch hyperendliche Summen gebraucht. Laugwitz führt hierzu die sogenannte *quasirationale Operation* $\sum$ ein (und das Analogon für Produkte).

$$\sum_{\nu=b_\Omega}^{c_\Omega} a_{\Omega,\nu} := \left[\sum_{\nu=b_n}^{c_n} a_{n,\nu}\right]_{n\in\mathbb{N}}$$

Dabei sind b_Ω und c_Ω ganze Ω-Zahlen mit $b_\Omega \leq c_\Omega$, und $(a_{\Omega,\nu})$ ist durch eine Doppelfolge reeller Zahlen $(a_{n,j})_{n\in\mathbb{N},j\in\mathbb{Z}}$ gegeben.

Mit dieser Vorbereitung kann das Programm der elementaren Analysis wie in Laugwitz 1978 durchgeführt werden. Darüber hinaus können sogar Nichtstandardfunktionen wie

$$x \mapsto \frac{\Omega}{\pi(1 + x^2\Omega^2)}$$

untersucht werden, als Beispiel für eine in der elementaren Standardanalysis unmögliche Dirac'sche Deltafunktion, die bei 0 unendlich groß sein, ansonsten für endliche x verschwinden und trotzdem ein endliches Integral besitzen soll.

Der große Vorteil der Ω-Zahlen für den Einstieg in die Nichtstandardanalysis liegt in der einfachen Konstruktion. Man braucht weder spezielle Vorkenntnisse aus der Logik noch aus der Mengenlehre. Die Konstruktion ist mit elementaren schulischen Mitteln direkt nachvollziehbar.

Es gibt allerdings auch gravierende Nachteile: Obwohl sich viele Eigenschaften der reellen Zahlen durch die Repräsentantenfolgen direkt auf die Ω-Zahlen übertragen (zum Beispiel: Aus $a_\Omega < b_\Omega$ und $b_\Omega < c_\Omega$ folgt $a_\Omega < c_\Omega$), sind $\mathbb{R}$ und ${}^\Omega\mathbb{R}$ algebraisch doch sehr verschieden. Insbesondere ist ${}^\Omega\mathbb{R}$ kein angeordneter Körper, ja noch nicht einmal ein Körper, sondern nur ein partiell geordneter Ring.

So ist etwa $[(-1)^n]$ weder positiv noch negativ noch gleich Null. Zwei beliebige Ω-Zahlen lassen sich also nicht immer bezüglich ihrer Größe vergleichen (${}^\Omega\mathbb{R}$ ist nicht *total geordnet*). Und es ist das Produkt $[1, 0, 1, 0, \ldots] \cdot [0, 1, 0, 1, \ldots] = 0$, obwohl keiner der beiden Faktoren Null ist. Das heißt ${}^\Omega\mathbb{R}$ enthält Nullteiler.

Der Kern des Problems dabei ist: Es gilt zwar für jede reelle Zahl entweder die Aussage A oder deren Negation $\neg A$, aber für die Repräsentantenfolge einer Ω-Zahl gilt nicht entweder A fast überall oder $\neg A$ fast überall.

Was die Frage der Eignung der Ω-Zahlen für einen Einstieg in die Nichtstandardanalysis angeht, sind die geschilderten Nachteile weniger störend beim Rechnen als bei der Veranschaulichung. Insbesondere durch die fehlende totale Ordnung kann man sich die Ω-Zahlen nicht linear geordnet auf einer Geraden veranschaulichen.

Man kann die Nachteile dadurch beheben, dass man die Äquivalenzbedingung für die Repräsentantenfolgen modifiziert und „fast überall" nicht als „überall bis auf endlich viele Ausnahmen" deutet, sondern etwas lockerer, sodass manchmal auch unendlich viele Ausnahmen zulässig sind. Genauer teilt man die Teilmengen von $\mathbb{N}$ in zwei Klassen ein, von denen die erste Klasse ($\mathcal{U}$ genannt) alle Teilmengen enthält, die als „fast überall" durchgehen sollen und die zweite Klasse den Rest (unter anderem alle endlichen Teilmengen). Wählt man die Aufteilung so, dass $\mathcal{U}$ noch ein paar zusätzliche Eigenschaften erfüllt[16] (insbesondere, dass für jede

16. $\mathcal{U}$ muss ein sogenannter *freier Ultrafilter* sein.

Teilmenge von $\mathbb{N}$ entweder die Menge selbst oder ihre Komplementärmenge zu $\mathcal{U}$ gehört), dann wird ${}^{\Omega}\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper, der in allen arithmetischen Eigenschaften mit $\mathbb{R}$ übereinstimmt (siehe Abschnitt 6.2). Statt ${}^{\Omega}\mathbb{R}$ wird dann meistens die Bezeichnung ${}^{*}\mathbb{R}$ verwendet.

$[(-1)^n]$ ist dann zum Beispiel entweder gleich 1 oder gleich -1, denn es gehört entweder die Menge aller geraden Indizes oder die Menge aller ungeraden Indizes zu $\mathcal{U}$.

Eine andere Alternative, den Nachteilen zu begegnen, besteht darin, nicht die Konstruktion und die zugrundeliegende Äquivalenzbedingung für Repräsentantenfolgen zu spezifizieren, sondern ein „Leibniz'sches Prinzip" zu postulieren, das angibt, wie man Aussagen von $\mathbb{R}$ nach ${}^{\Omega}\mathbb{R}$ übertragen kann (womit der konstruktive Weg verlassen wird). Beide Alternativen werden in Laugwitz 1986 vorgestellt und verglichen.

Den Namen für dieses Prinzip wählt Laugwitz aufgrund einer Formulierung aus einem Brief von Leibniz an seinen Förderer Varignon vom 2.2.1702: „Die Regeln des Endlichen gelten im Unendlichen weiter."

Leibniz'sches Prinzip Sei $A(.)$ eine Aussageform, formuliert in der Sprache von $\mathbb{R}$. Wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq n_0$ die Aussage $A(n)$ in der zugrundegelegten Theorie von $\mathbb{R}$ wahr ist, dann soll $A(\Omega)$ als wahrer Satz in die neue Theorie von ${}^{\Omega}\mathbb{R}$ aufgenommen werden.[17]

Am Beispiel $a_\Omega = [(-1)^n]$ heißt das: Da die Aussageform „$a_n = 1$ oder $a_n = -1$" in $\mathbb{R}$ für hinreichend große n gilt (in diesem Fall sogar für alle), gilt „$a_\Omega = 1$ oder $a_\Omega = -1$" in ${}^{\Omega}\mathbb{R}$.

6.2 Konstruktion der hyperreellen Zahlen

Die exakte Konstruktion der hyperreellen Zahlen mittels Ultrafilter übersteigt normalerweise die Möglichkeiten einer elementaren Einführung in der Schule oder in universitären Anfängervorlesungen. Der Ultrafilter selbst kann nicht konstruiert und seine Existenz nur mit weitergehenden Kenntnissen aus der Mengenlehre (unter Verwendung des Zorn'schen Lemmas) bewiesen werden.

In ihrem Buch *Analysis als Infinitesimalrechnung*[18], das zwar nicht als Schulbuch konzipiert ist, sich aber an Lehrkräfte richtet, unternehmen die Autoren dennoch

17. Siehe Laugwitz 1986, S. 88, dort allgemein für einen archimedischen Körper K statt $\mathbb{R}$ formuliert.
18. Siehe Wunderling et al. 2013.

den Versuch, die Konstruktion weitgehend darzulegen. Statt „fast überall“ verwenden sie die Formulierung „genügend oft“.

> Zwei Folgen reeller Zahlen beschreiben dieselbe hyperreelle Zahl oder sind genügend verwandt genau dann, wenn sie bei genügend vielen Indizes, d. h. genügend oft übereinstimmen.

und

> Jede Klasse genügend verwandter Folgen reeller Zahlen ist eine hyperreelle Zahl.

Mit hyperreellen Zahlen rechnet man, indem man die entsprechende Operation bei den beschreibenden Folgen gliedweise bei übereinstimmenden Indizes vornimmt.

Das folgende Transferprinzip beweisen die Autoren zwar nicht allgemein, aber zumindest für Spezialfälle. Statt $^*\mathbb{R}$ verwenden sie das Symbol $\mathbb{H}$ für die Menge der hyperreellen Zahlen.

Eingeschränktes Transferprinzip Jede Aussage bez. $\mathbb{R}$, in der neben reellen Zahlen und Variablen auch Funktionen f sowie $+,\ \cdot,\ \leq,\ |\,|$ und die Zeichen $=$, $\in,\ \wedge,\ \vee,\ \neg,\ \Rightarrow,\ \forall,\ \exists$ vorkommen, ist genau dann gültig bez. $\mathbb{H}$, wenn die reellen Zahlen durch hyperreelle Zahlen und die Funktionen f durch ihre Erweiterungen $^*f$ ersetzt werden.

6.3 Axiomatische Einführung der hyperreellen Zahlen

Keisler geht in seinem *Elementary Calculus*[19] (der nach eigenen Angaben für Analysis-Anfängervorlesungen und einen Zeitraum von drei bis vier Semestern konzipiert ist) von folgenden drei Prinzipien aus:

Fortsetzungsprinzip

1. Die reellen Zahlen bilden eine Untermenge der hyperreellen Zahlen und die Ordnungsrelation $x < y$ für reelle Zahlen ist eine Untermenge der Ordnungsrelation für hyperreelle Zahlen.
2. Es gibt eine hyperreelle Zahl, die größer als Null ist, aber kleiner als jede positive reelle Zahl.
3. Für jede reelle Funktion einer oder mehrerer Variablen gibt es eine zugehörige hyperreelle Funktion $^*f$ mit derselben Anzahl von Variablen. $^*f$ heißt die *natürliche Fortsetzung* von f.

19. Siehe Keisler 2000.

Transferprinzip Jede reelle Aussage, die für eine oder mehrere reelle Funktionen gilt, gilt für die hyperreelle natürliche Fortsetzung dieser Funktionen.

Einen reellen Ausdruck definiert Keisler dabei als eine Kombination von Gleichungen oder Ungleichungen über reellen Ausdrücken und Aussagen, die spezifizieren, ob ein reeller Ausdruck definiert ist oder nicht.

Standardteilprinzip Jede endliche hyperreelle Zahl liegt unendlich nahe bei genau einer reellen Zahl. Die einer hyperreellen Zahl b infinitesimal benachbarte reelle Zahl heißt Standardteil von b und wird mit $\mathrm{st}(b)$ bezeichnet.

Auf dieser Basis wird der Kalkül der Analysis aufgebaut. Die axiomatische Einführung von Keisler erscheint insbesondere für eine Nichtstandard-Einführung in der Schule geeignet, da dort vergleichbare Prinzipien auch bei der Fortsetzung von Funktionen (zum Beispiel Exponentialfunktionen) von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ angewendet werden.

6.4 Interne Mengenlehre

Die Interne Mengenlehre (IST = *Internal Set Theory*) von Edward Nelson[20] ist sicher der radikalste Ansatz zur Nichtstandardmathematik, denn er setzt direkt am Fundament der Standardmathematik an, der ZFC-Mengenlehre.[21] Die Sprache der Mengenlehre wird dazu um eine neues, undefiniertes Prädikat „standard" erweitert, und die Axiome von ZFC werden durch drei weitere Axiome (genauer Axiomenschemata) I, S und T ergänzt (siehe unten).

Dadurch, dass die Axiome von ZFC nicht modifiziert, sondern nur ergänzt werden, bleibt die gesamte klassische Mathematik im Prinzip unverändert gültig. So werden zum Beispiel die Mengen $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}$ in IST genauso definiert wie in ZFC.

Dennoch erscheinen die vertrauten Mengen in IST plötzlich reichhaltiger als in ZFC, denn man findet dort nun Standardelemente (für die das Prädikat standard gilt) und Nichtstandardelemente (für die standard nicht gilt). Die klassischen Objekte, wie die Zahlen $1, \frac{-2}{3}, \pi, i$ oder die Mengen $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{R}$ erweisen sich alle als standard, infinite und infinitesimale Zahlen ($\neq 0$) als nicht standard.

Man kann nicht sagen, dass die Nichtstandardobjekte in ZFC nicht existieren würden. Es gibt nur keine Möglichkeit in ZFC darüber zu entscheiden. Wenn man annimmt, Mathematik in einem Modell von ZFC zu betreiben (wie man es mit

20. Siehe Nelson 1977.
21. Einen Vergleich zwischen der Robinson'schen und der Nelson'schen Nichtstandardanalysis findet man zum Beispiel in Landers und Rogge 1994.

dem Mengenuniversum der „Hintergrundmengenlehre“ für gewöhnlich tut), dann könnte dieses Modell ebenso gut auch ein Modell von IST sein, denn IST ist eine konsistente Erweiterung von ZFC. Das heißt: Wenn ZFC widerspruchsfrei ist, dann auch IST.[22]

Ein Ausdruck in der Sprache von IST heißt *intern*, wenn er das Prädikat standard nicht enthält (direkt oder indirekt). Alle anderen Ausdrücke heißen *extern*. Nach dem Aussondungsaxiom von ZFC können interne Prädikate verwendet werden, um Untermengen einer vorgegebenen Menge zu bilden. Externe Prädikate dürfen nicht zur Mengenbildung verwendet werden (illegale Mengenbildung).

„Endlich“ ist ein internes Prädikat: x ist genau dann endlich, wenn es keine bijektive Abbildung von x auf eine echte Untermenge von x gibt. (Wie in ZFC sind auch in IST endlich und Dedekind-endlich äquivalent.)

Die Axiome, die ZFC hinzugefügt werden, sind die folgenden.

Idealisierungsaxiom (I): Sei $\phi(x, y)$ ein interner Ausdruck mit den freien Variablen x und y (und möglicherweise weiteren freien Variablen). Dann sind äquivalent:

1. Für jede endliche Standardmenge z gibt es ein x, sodass $\phi(x, y)$ für alle $y \in z$ gilt.
2. Es gibt ein x, sodass $\phi(x, y)$ für alle Standardelemente y gilt.

Standardisierungsaxiom (S): Sei $\chi(z)$ ein (interner oder externer) Ausdruck mit den freien Variablen x und y (und möglicherweise weiteren freien Variablen). Zu jeder Standardmenge x gibt es eine Standardmenge y, die genau die Standardelemente $z \in x$ mit $\chi(z)$ enthält.

Transferaxiom (T): Sei $\psi(x, y_1, \ldots, y_k)$ ein interner Ausdruck mit den einzigen freien Variablen $x, y_1, \ldots, y_k$. Dann gilt für alle Standardelemente $t_1, \ldots, t_k$: Aus $\psi(x, t_1, \ldots, t_k)$ für alle Standardelemente x folgt $\psi(x, t_1, \ldots, t_k)$ für alle x.

Deutet man die zweistellige Relation im Idealisierungsaxiom als „dominieren“ (man denke zum Beispiel an die Größerrelation $x > y$ in $\mathbb{N}$), dann besagt das Axiom I folgendes: Gibt es zu jeder endlichen Standardmenge ein (ihre Elemente) dominierendes Element, dann gibt es auch ein Element, das alle Standardelemente dominiert. Im konkreten Beispiel der Größerrelation in $\mathbb{N}$: Da es zu jeder endlichen Standardmenge $E \subseteq \mathbb{N}$ eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt, die größer als alle Zahlen aus E ist,

22. Siehe Nelson 1977.

gibt es auch eine Zahl in $\mathbb{N}$, die größer als alle Standardzahlen in $\mathbb{N}$ ist, eine *infinite* Zahl.

Zwei einfache, aber ungewohnte Konsequenzen aus den Axiomen sind:

1. Jede unendliche Menge enthält Nichtstandardelemente.
2. Es gibt eine endliche Menge, die alle Standardelemente enthält.

Der Vorteil der internen Mengenlehre ist, dass sie von vornherein sehr allgemein angelegt und somit nicht nur für die elementare Analysis geeignet ist, und dass sie recht schnell zu weitreichenden Ergebnissen kommt.

Von einem formalistischen Standpunkt aus könnte man also einfach sagen: Wenn IST für die Mathematik nützlich ist und konservativ (in Bezug auf die klassische Mathematik) und (relativ zu ZFC) konsistent, warum sollten wir IST dann nicht nutzen?

Aber wie steht es um die Plausibilität der neuen Axiome I, S und T? Sind diese Axiome nicht doch recht kompliziert und von Wunschdenken geprägt (speziell I und T)?

Umgekehrt könnte man auch fragen: Ist nicht das Unendlichkeitsaxiom in ZFC eine Art Idealisierungsaxiom und von Wunschdenken geprägt, indem es eine aktual unendliche Menge postuliert? Ist nicht das Aussonderungsaxiom (zusammen mit den anderen) eine unter pragmatischen Gesichtspunkten getroffene Einschränkung der allgemeinen Komprehension, zur Vermeidung von Widersprüchen, ähnlich wie das Standardisierungsaxiom? Sind nicht Vereinigungsmengen-, Ersetzungs- und Auswahlaxiom eine Art Transferaxiome und von Wunschdenken geprägt?

Alain M. Robert führt in Robert 2011 in die Interne Mengenlehre ein, ohne tiefere Kenntnisse in ZFC oder allgemein in axiomatischer Mengenlehre vorauszusetzen. Er richtet sich dabei an „advanced undergraduates“, die mit traditioneller Mathematik und intuitiver Mengenlehre vertraut sind. Gerade weil die Interne Mengenlehre eine ungewohnte Perspektive auf Gewohntes einnimmt, hält es Robert jedoch für geboten, die neuen Axiome I, S und T explizit an den Anfang zu stellen und zu besprechen, um auf „festem Grund“ zu starten. Dennoch wagt er im Vorwort auch folgenden Ausblick:

> However, it is quite possible that with a new mathematical generation, a naive and intuitive approach to NSA [Non-Standard Analysis] might be possible or even better. After all, so many illustrious mathematicians – Leibniz, Euler and Cauchy in particular – all seem to

> have considered this approach more natural than the (nowadays called) traditional one.[23]

7 Die Analysis der Zukunft?

Im Vorwort zur zweiten Auflage von Robinsons Buch *Non-Standard Analysis* von 1973 äußert sich Kurt Gödel folgendermaßen:[24]

> I would like to point out a fact that was not explicitly mentioned by Professor Robinson, but seems quite important to me; namely that non-standard analysis frequently simplifies substantially the proofs, not only of elementary theorems, but also of deep results. This is true, e.g., also for the proof of the existence of invariant subspaces for compact operators, disregarding the improvement of the result; and it is true in an even higher degree in other cases. This state of affairs should prevent a rather common misinterpretation of non-standard analysis, namely the idea that it is some kind of extravagance or fad of mathematical logicians. Nothing could be farther from the truth. Rather there are good reasons to believe that non-standard analysis, in some version or other, will be the analysis of the future. One reason is the just mentioned simplification of proofs, since simplification facilitates discovery. Another, even more convincing reason, is the following: Arithmetic starts with the integers and proceeds by successively enlarging the number system by rational and negative numbers, irrational numbers, etc. But the next quite natural step after the reals, namely the introduction of infinitesimals, has simply been omitted. I think, in coming centuries it will be considered a great oddity in the history of mathematics that the first exact theory of infinitesimals was developed 300 years after invention of the differential calculus.

Hat Gödel die Entwicklung falsch eingeschätzt? Immerhin ist seit Robinsons Non-Standard Analysis über ein halbes Jahrhundert vergangen. Andererseits ist ein halbes Jahrhundert in der Geschichte der Analysis seit Leibniz und Newton kein sehr langer Zeitraum, und die Durchsetzung der Standardanalysis hat auch mehrere Jahrzehnte in Anspruch genommen.

Außerdem hat sich seit Robinson durchaus etwas getan. Die Nichtstandardanalysis hat in der Forschung ihren festen Platz und dringt auch vereinzelt in die

23. Siehe Robert 2011, S. xii.
24. Siehe Robinson 1996.

Klassenzimmer vor, allerdings in der Regel aufgrund der Eigeninitiative einzelner Lehrkräfte, die sich für das Thema Nichtstandard interessieren und Spielräume in den Curricula nutzen – mit überaus positiven Erfahrungen.[25] Insgesamt ist zu vermuten, dass aufgrund der Biographie die Widerstände gegen Nichtstandard mehr bei den Lehrenden als bei den Lernenden zu finden sind.

Somit dürfte das Fehlen von Nichtstandard im Schulunterricht wesentlich auf das Fehlen von Nichtstandard in der universitären Lehre zurückzuführen sein. Gerade für die universitäre Lehre ist aber noch Arbeit zu leisten, um das Potential der Nichtstandardanalysis auszuschöpfen. Auf jeden Fall erscheint es mir nicht angemessen, die Nichtstandardanalysis in Oberseminaren zur Modelltheorie zu verstecken. Die Geschichte ist offen. Am Ende könnte sich die Einschätzung Gödels doch als zutreffend erweisen.

Literaturverzeichnis

Bauer, Ludwig. 2011. Mathematik, Intuition, Formalisierung: eine Untersuchung von Schülerinnen- und Schülervorstellungen zu $0,\overline{9}$. *Journal für Mathematik-Didaktik* 32 (1): 79–102.

Bedürftig, Thomas, und Roman Murawski. 2001. *Zählen: Grundlage der elementaren Arithmetik.* Hildesheim: Franzbecker.

———. 2015. *Philosophie der Mathematik.* Berlin Bosten: de Gruyter.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter. 2003. *Einführung in die Mengenlehre.* Spektrum Akademischer Verlag.

Keisler, H. Jerome. 2000. *Elementary Calculus – An Infinitesimal Approach.* 2. Aufl. University of Wisconsin.

Landers, Dieter, und Lothar Rogge. 1994. *Nichtstandard Analysis.* Berlin Heidelberg: Springer.

Laugwitz, Detlef. 1978. *Infinitesimalkalkül: Eine elementare Einführung in die Nichtstandard-Analysis.* Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut.

———. 1986. *Zahlen und Kontinuum.* Mannheim: Bibliographisches Institut.

25. Siehe z. B. Wunderling 1997. Das Heft steht zum Download auf www.nichtstandard.de zur Verfügung.

Nelson, Edward. 1977. Internal Set Theory: A New Approach to Nonstandard Analysis. *Bull. of the American Mathematical Society* 83, Nr. 6 (November): 1165–1198.

———. 2007. Hilbert's Mistake. `www.math.princeton.edu/~nelson/papers/hm.pdf`.

Robert, Alain M. 2011. *Nonstandard Analysis.* Dover Publications.

Robinson, Abraham. 1996. *Non-standard Analysis.* Revised edition. Princeton University Press.

Schmieden, Curt, und Detlef Laugwitz. 1958. Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung. *Math. Zeitschr.* 69:1–39.

Spalt, Detlef D. 2015. *Die Analysis im Wandel und Widerstreit.* Karl Alber.

Väth, Martin. 2007. *Nonstandard Analysis.* Basel Bosten Berlin: Birkhäuser Verlag.

Wunderling, Helmut, et al. 1997. *MU (Der Mathematikunterricht)* Heft 1.

Wunderling, Helmut, Peter Baumann, Angelika Keller und Thomas Kirski. 2013. *Analysis als Infinitesimalrechnung.* Berlin: DUDEN PAETEC.

The 1900 Turn in Bertrand Russell's Logic, the Emergence of his Paradox, and the Way Out

Nikolay Milkov

Abstract

Russell's initial project in philosophy (1898) was to make mathematics rigorous reducing it to logic. Before August 1900, however, Russell's logic was nothing but mereology. First, his acquaintance with Peano's ideas in August 1900 led him to discard the part-whole logic and embrace a kind of intensional predicate logic instead. Among other things, the predicate logic helped Russell embrace a technique of treating the paradox of infinite numbers with the help of a singular concept, which he called 'denoting phrase'. Unfortunately, a new paradox emerged soon: that of classes. The main contention of this paper is that Russell's new conception only transferred the paradox of infinity from the realm of infinite numbers to that of class-inclusion.

Russell's long-elaborated solution to his paradox developed between 1905 and 1908 was nothing but to set aside of some of the ideas he adopted with his turn of August 1900: (i) With the Theory of Descriptions, he reintroduced the complexes we are acquainted with in logic. In this way, he partly restored the pre-August 1900 mereology of complexes and simples. (ii) The elimination of classes, with the help of the 'substitutional theory',[1] and of propositions, by means of the Multiple Relation Theory of Judgment,[2] completed this process.

1. Cf. Landini (1998).
2. Cf. Milkov (2013).

1 Russell as a Mereologist

In 1898, Russell abandoned his short period of adherence to the Neo-Hegelian position in the philosophy of mathematics and replaced it with what can be called the 'analytic philosophy of mathematics', substantiated by the logic of relations. To be more exact, Russell took his first step in this direction after reading A N Whitehead's *A Treatise on Universal Algebra* in March 1898.

In contrast to his philosophy of mathematics, Russell's logic became predominantly analytical only after he read Cantor's *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* at the beginning of July 1899. This change is documented in the manuscript of 'Fundamental Ideas and Axioms of Mathematics' (1899), in which Russell adopted a full-blooded mereology for the first time. Now, he claimed that the relation of 'logical priority', understood as the relation between the whole and the part, is central in logic.

In Russell's part-whole logic, the logical consequence holds between both terms and propositions. Russell maintained that 'it is possible for simple concepts [i.e., not only propositions] to imply others' (1899, p. 293). In other words, at that point in time, what was later called the relationship of 'ontological dependence' played the central place in Russell's logic. He further argued that:

> 'A implies B' cannot mean 'A's truth implies B's truth'; for here a simpler case of implication is explained by one which is more complex. 'A implies B' implies 'A's truth implies B's truth' and also implies 'B's falsehood implies A's falsehood'. But 'A implies B' applies to A and B simply as propositions, and quite independently of their truth or falsehood.' (Ibid., p. 292)

Russell's mereological logic had three sources:

(i) His basic categories of whole and part were connected 'with Boole's logical system' (Moore, 1993a, p. xxiii). Indeed, in dropping 'any use of magnitude and studying objects defined by their laws of combination alone', Russell followed the spirit of Boole (see Bornet 1995, p. 238).

(ii) The 1899–1900 logic of Russell was inspired by G. E. Moore's Relational Theory of Judgment, as stated in Moore's paper 'The Nature of Judgment' (1899). It maintained that 'all concepts of a proposition are to be regarded at the same logical and ontological level, together with the "external" relations joining them, which must be seen as terms as real as the rest' (Rodríguez-Consuegra 1991, p. 32). In fact, this single-level logic was the archetype of Russell's logical explorations at the time.[3]

(iii) Another much older impulse to adopt mereology came directly from absolute idealism. Indeed, absolute idealism, both German and British, was essentially mereological.[4]

2 The Turn

In the first year of the new millennium (1900), Russell gradually adopted two novelties in his logic, developed in full first in *The Principles of Mathematics* (1903): the 'material implication' and the predicate logic in the form of the theory of denoting. Both, in particular, changed Russell's methods of constructing units.

2.1 Material Implication

Besides the relationship between the part and the whole, under the continuing influence of Moore's work in philosophical logic (especially of his paper 'Necessity', 1900) in the first few months of 1900, Russell embraced the view that there is another relationship, that of implication, which holds only between propositions, not between terms. Russell soon found out that this relation is logically more fundamental.

In fact, the idea of what was termed 'material implication' a year later, was already articulated in the manuscript 'The Principles of Mathematics, Draft of 1899–1900'. The material implication here is set out in Moorean terms: 'Whenever A implies B, we have also the following propositions: A's truth implies B's truth, and B's falsehood implies A's falsehood' (1900, p. 36). However, Russell still believed that a proposition can imply a term.

The radical and consequent turn against the part-whole logic was taken only after Russell became acquainted with the works of Peano. In October 1900, two months after the First International Congress of Philosophy held in Paris where Russell met Peano, he noted: 'I have been wrong in regarding Logical Calculus as having specially to do with whole and part. Whole is distinct from Class, and occurs

3. It so happened, however, that Russell was urged two times to substantially revise it (cf. § 6).

4. See Milkov (1997), i, pp. 82–3.

nowhere in the Logical Calculus' (1993b, plate II). A few weeks later, he wrote in an article on Peano:

> 'It has been one of the bad effects of the analogy with ordinary Algebra that most formal logicians (with the exception of Frege and MacColl) have shown more interest in logical equations than in implication' (1901a, p. 353).

Russell's argument for adopting material implication as a basic relationship in logic was that the part-whole relation, or the 'logical priority of A to B requires not only "B implies A", but also "A does not imply B"' (1903, § 134). In contrast, material implication is transitive. Consequently, this relation is rather simple than part-whole, and thus, more fundamental and more appropriate as a logical constant.

Be as it may, some remnants of the old mereology remained in Russell's logic. Thus, he continued to speak about logical summing of terms, and not only of propositions. By Peter Geach's account, '[t]o a contemporary logician the idea of a disjunction of proper names may well seem alien' (Geach 1962, p. 66). This case shows that in the second half of 1900, Russell did not embrace his new logical conception without reservation.

The acceptance of the material implication as the simplest relation in logic, with the help of which all pure mathematics can be deduced (see 1903, § 1), made Russell's logic intensional. Apparently, this turn towards intensional logic was also connected with his treatment of infinity, which we will discuss in the next subsection.

2.2 Theory of Denoting and Predicate Logic

In *The Principles of Mathematics*, Russell also formulated his Theory of Denoting (see 1903, Ch. V) which, in fact, can be seen as nothing but his interpretation of Frege's technique of quantification. The central point of the Theory of Denoting is that there are two kinds of denoting: intuitive (immediate) or proper, and symbolic or improper.[5] Things have proper meaning, and concepts, improper. This is the case because while things occur in a proposition as terms, concepts give rise to 'classes as one' (or class-concepts), which are combinations of terms. They differ from 'classes as many', which are merely aggregates of terms. In other words, in a class-concept, 'one predicate occurs otherwise than as a term' (§ 57). More particularly, it gives rise to denoting. 'A concept denotes when, if it occurs in a proposition, the proposition is not about the concept, but about the term connected

5. Incidentally, Husserl had already accepted this in 1894 (see Coffa 1991, pp. 101–2).

in a certain peculiar way with the concept' (§ 56).[6] It does not refer to the term directly, but in its interrelationship with other terms. In other words, Russell's Theory of Denoting employs what Michael Dummett later called 'Frege's context principle'. Typical examples of denoting concepts are phrases that are quantified, in particular, phrases that contain propositional functions.

To use Frege's words, denoting phrases put stress on the 'organic connection' of the propositional function (or concept) with the arguments (or objects) that fall under it. Functions are not just aggregates (heaps) of arguments (or objects, or individuals). This explains why a propositional function is valid for any argument that falls under it, and a concept defines every object (individual) that falls under it. In contrast, both mereologists and Boolean logicians completely disregard the distinction between function, or concept, and argument, or individual.

Moreover, predicate logic is the logic of many-orders (types). Its ontology embraces: (i) the order of individuals, (ii) that of functions (class-concepts), (iii) that of classes of classes, etc. It is true that the first-order predicate logic did not do obvious harm. The trouble became visible only when Frege introduced (in 'Function and Object', 1891) the notion of 'extension of concepts' that are objects themselves. Incidentally, in this way, Frege disparaged his own principle that logic has radically different orders—a mistake Russell tried to eliminate with his Theory of Types (more about this in § 7).

2.3 Theory of Denoting and the Treatment of Infinity

Russell was especially enthusiastic about his Theory of Denoting since it introduced a new technique for (intensively) treating infinite collections, including infinite numbers, with the help of a singular concept. Here is this story in short.

In his idealistic period, Russell, the Neo-Hegelian, was very sensitive to philosophical and logical paradoxes (cf. § 5). To be more exact, up to 1898, he believed that there are three paradoxes: of infinitesimals, of continuity, and of infinity. The latter has two forms: of actual infinity, and of infinite numbers.

After his Anti-Hegelian turn of 1898, he changed his mind. This change happened in three steps:

6. This conception gave rise to the fruitful ontology of ways, further explored by Wittgenstein (cf. Milkov 2017).

(i) In 1898, Weierstrass convinced him to banish the infinitesimals: There is no such thing as the 'next'. There are no infinitesimal moments, places, etc.[7] There are only elements of finite size that are ordered in different ways.

(ii) Russell eliminated the antinomy of continuity after embracing Cantor's set theory in 1899.

(iii) Based on Cantor's diagonal method, he also resolved the problem of the actual infinity.

Russell, however, did not adopt Cantor's treatment of infinite ordinal and cardinal numbers. More precisely, he did not accept their existence. As a consequence, he still believed that:

> 'Mathematical ideas are almost all infected with one great contradiction. This is the contradiction of infinity. All antinomies, I believe, so far as they are valid at all, will be found reducible to the antinomy of infinite number' (1900, p. 70).

Exactly at this point, Peano's logic helped Russell. Or rather, he tried to solve his 'great contradiction' via Peano's predicate logic.

A typical example of a denoting concept (phrase) is the infinite collection denoted by the concept 'all numbers' (the importance of this example will be discussed in § 3).[8] The point in question is that, having no direct connection with the referent, one denoting phrase can refer in the most precise way to many, including infinitely many, terms. In fact, one of Russell's reasons to introduce the denoting phrases thus understood was his endeavour to treat with their help infinite numbers without paradoxes. To be more exact, according to Russell's Theory of Denoting (1903), there are five possible forms of denoting, which are nothing but five different ways of referring to terms of constructed unities, or totalities. These are characterised by five words 'of constant occurrence in daily life': all, every, any, a, some. (i) All means a numerical conjunction ('Brown and Jones are two of Miss Smith's suitors'). (ii) Every means a propositional conjunction ('Brown and Jones are paying court to Miss Smith'). (iii) Any is a variable conjunction, which is something between conjunction and disjunction ('if it was Brown or Jones you met, it was a very ardent lover'). (iv) A gives rise to the variable disjunction ('if it was one of Miss

7. Russell thought of logic ontologically (he would say 'realistically'). He was strongly convinced that 'logic is concerned with the real world just as truly as zoology, though with its more abstract and general features' (1919, p. 169) (see § 5).

8. It deserves notice that already before the Paris Congress, Russell was conscious that the problem of totality, where all and any describe various forms of the permutations in a set, is indeed 'intimately connected' but nevertheless different from that of the whole and part. For example, he maintained that 'all cannot be defined numerically', but it nevertheless means a perfectly specified notion. (1900, p. 41).

Smith's suitors, it must have been Brown or Jones'). (v) Some gives rise to the constant disjunction ('Miss Smith will marry Brown or Jones').[9]

Of special interest are the two ways of referring to infinite unities: points 'i' and 'iv'. As already mentioned, at the centre of Russell's argument was the claim that there are two kinds of constructing wholes: aggregates and units. The aggregate 'is definite as soon as [all] its constituents are known' (1903, § 135). In contrast, the unit is intensional. In the aggregate, we have a 'numerical conjunction of terms', while in units, we have a 'variable disjunction'. The first is a simple summative class and the second is a class-concept, or predicate, or propositional function. Russell further claimed that the unit is logically more fundamental than the aggregate. Indeed, it is the unit that helps resolve the paradox of infinity number.

Two final remarks:

(i) Besides aggregates and units, in *The Principles of Mathematics*, Russell also held that there is a relation between subordinate aggregates (not between an aggregate and a term) that can be called a relation between the whole and the part proper. This means that in 1903, Russell did not completely disregard mereology.

(ii) Towards the end of his study of the forms of denoting, Russell found a sixth form of denoting, indicated by the definite article 'the'. Unfortunately, he had no time to make a precise analysis in *The Principles*. He did it two years later, in his famous Theory of Descriptions, in the paper 'On Denoting' (1905). This development, however, lies beyond the scope of this paper.

To sum up the results we achieved in this section: Russell was fascinated with the technique of the quantification of Frege and Peano because it allegedly resolved something of greatest importance to him—the paradox of infinite numbers. As a consequence, he started to consider unities (totalities) as theoretically more important than aggregates.

3 First Symptom that the Turn Produced Problems: the Paradoxes

So far, we have found that in an attempt to escape the paradox of infinity, in *The Principles of Mathematics*, Russell assumed that class-concepts (propositional

9. This analysis of compositionality is a good example of Russell using ordinary language as a compass in philosophy. Ironically enough, in the 1950s, he was strongly against this approach.

functions) and objects, or individuals (arguments) are radically opposite things. In this, he followed the new many-ordered logic of Peano, and ultimately of Frege, which embraced an opposition between class-concepts on the one hand, and individuals and terms on the other.

Unfortunately, as a by-product of this conception, another paradox emerged—that of classes. All this suggests, and this point shall be examined in a while, that Russell's Peano-Fregean turn[10] did not eliminate the paradox of infinity, but merely removed it from one realm into another—that is, from the realm of infinite classes to that of class-inclusion.

This point did not go unnoticed by commentators. According to one of them, Gregory Moore, all the three paradoxes Russell tried to resolve have the same structure. These paradoxes are: (i) that of an infinite ordinal number (discovered in July 1899), (ii) that of the largest cardinal number (discovered in November 1900), and (iii) Russell's paradox proper (his paradox of classes, discovered in May 1901). Apparently, 'this structure was presented in the back of his mind as a kind of template that could be unconsciously applied to Cantor's work on infinite number' (Moore 1995, p. 236). The rest of this section shall try to specify this template in more concrete terms.

Russell was convinced that in each contradiction, 'there is a common characteristic, which we may describe as self-reference or reflexiveness' (1908, p. 61). Again, in 1959, he wrote: 'in all the logical paradoxes there is a kind of reflexive self-reference which is to be condemned on the same ground: viz. that it includes, as a matter of totality, something referring to that totality which can only have a definite meaning if the totality is already fixed' (p. 63).

Contrary to this conception of the unity of logical paradoxes, after the discovery of Russell's paradox proper, the paradox of classes, philosophers were inclined to multiply paradoxes ad libitum. Frank Ramsey (1978, p. 171) made the decisive step in this direction, splitting the paradoxes up into semantic and syntactical paradox. However, as it was conclusively shown recently, these have one and the same structure (Priest 1994).

10. This section shall discuss 'Russell's Peano-Fregean turn' only figuratively. In fact, until June 1902, Russell had practically no knowledge of Frege. There are two reasons for using this figure: (i) The gist of Russell's turn from August 1900 was the assimilation of the philosophical consequences of Peano's theory of quantification. Today, however, it is widely accepted that Frege's theory of quantification decisively influenced Peano's theory of quantification (see Gillies 1982). This partly explains why, after assimilating Peano's conception, Russell so easily embraced the ideas of Frege. (ii) Russell was also impressed by Peano's elegant symbolism, which was developed 'partly under Frege's influence' (Moore 1998, p. 732a).

The self-reference is also characteristic of Russell's initial paradox of infinite numbers. Indeed, he conceived the paradox of infinite numbers in exactly the same form: 'There are many numbers; therefore, there is a number of numbers. [But] If this be N, N+1 is also a number; therefore, there is no number of numbers' (1899, p. 265). In truth, this was a proto-variant of Russell's paradox proper but formulated two years earlier. Apparently, the two paradoxes, of infinite numbers and of classes, were only two sides of this proto-paradox.

All this explains why, when the problem of infinite numbers was 'resolved' after August 1900 by way of (Peano's) treating the number of numbers as a single class-concept, immediately after Russell began to work on his newly moulded pure mathematics in detail in October 1900, he found, in November 1900, a 'mistake in Cantor' exactly on this point (the class of all classes). It later turned out to be the 'new contradiction': Whenever a greatest cardinal number is accepted, the number of classes is the largest number.

Apparently, in November 1900, Russell merely transformed the paradox of infinite ordinal numbers into a paradox of cardinal numbers (of the largest cardinal number). To be sure, 'Russell's antinomy of infinite number ... has precisely the same formal structure as the paradox of the largest cardinal' (Moore 1995, p. 226). Thus, 'it was not a new discovery, but a shift in how he perceived an argument which he already possessed' (ibid., p. 231).

Some months later, in May 1901, Russell reformulated his antinomy in terms of predicates not predicable of themselves, thus articulating his paradox proper. Only in his letters to Frege from June 16, 1902, however, did he formulate it in terms of classes. Now his problem was: Is the class of the classes that are not members of themselves a member of itself? Russell's official answer was that, in fact, it is of a type different from that of the other objects. To eliminate the possibility of type-confusion, he introduced the 'vicious circle principle', according to which '[w]hatever involves all of a collection must not be one of the collection' (1910, i, p. 37). As it shall be shown below, his real answer was rather different.

4 Theoretical Source of Russell's Paradox

The gist of this discussion is that in treating ordered collections of any kind, paradoxes are unavoidable. Apparently, the problems in such cases pertain to the 'limits to thought whose very notion is dialetheic' (Priest 1991, p. 369):[11] the problem of truth (aletheia) is not relevant to them. What can be done in such cases

11. Kant called them 'antinomies of pure reason'.

is to treat them not in an orderly fashion but analytically, and structurally—for example, via quantifiers. In other words, the irreversible order (and with this the infinity) in them can be put 'in brackets'; we can 'seal it off' and to proceed the calculation further.

Incidentally, Russell himself was conscious of the dialetheic limits of human thought. This is shown by the fact that the strategy he followed to resolve the problems of continuity and infinity was to go beyond conventional intuitions which presuppose an aletheic understanding of composing unities (totalities) with individuals (objects). To be more exact, following Cantor, he maintained that the problem of infinity can be only overcome if we banish a maxim of common sense:[12] the intuition that 'if one collection is part of another, the one which is a part has fewer terms than the one of which it is a part' (1901b, p. 373).

Ironically, the trouble with Russell's paradox was that he, just like Frege, did not banish the conventional intuition that led to his paradox: that we can quantify objects of any kind, without restriction. To be more exact, Russell failed to structuralise the notion of class-membership. Instead, he followed the common-sense belief that the including class can comprise everything that falls under it. From the beginning, he rejected the idea that there can be subclasses that are not susceptible to class-inclusion (see §5).

To be more specific, as it has already been mentioned (in §2.1), in 'The Principles of Mathematics, Draft of 1899–1900' (1900), Russell adopted Cantor's treatment of continuity (which developed some of Weierstrass's points), according to which there are no infinitesimals. The moments and places in his logical ontology were absolutely determined and finite (cf. n. 7). There are no intervals between them, no next moments or places. Between two moments (places), there are always other moments (places). Thus, 'next' was the first common-sense intuition that Russell, following Cantor, banished.[13]

This conception sees the world as an assemblage of structures. Indeed, in structures, there is no problem of neighbourhood; nor is there a topology of structures. This is because it is irrelevant where they are: they are mutually substitutive. With his turn of 1900—to be more exact, with the new, Peano-inspired treating of infinite numbers—Russell introduced another structuralist conception based on the

12. Wittgenstein put this matter in similar, yet clearly different terms. The problem of infinity is a product of certain (grammatical) misunderstandings, which have to be removed from the calculation (Wittgenstein 1956, IV, §6).

13. 'The banishment of the infinitesimal has all sorts of odd consequences, to which one has to become gradually accustomed. For example, there is no such thing as the next moment' (1901b, p. 371).

one-many relationship. What he achieved by adopting the technique of quantification was a new technique of 'putting' an infinite number into—rather, including it in—one concept or class-concept.

Despite his strong belief to the contrary, however, the problem of infinity was not 'resolved'. It appeared on the face of the new concept of class-inclusion. Indeed, Russell 'resolved' the antinomy of infinite numbers but only by transforming it into the antinomy of class-inclusion.

5 Motives for Asserting the Paradox of Classes

Apparently, the reason why Russell stuck to the paradoxes in the philosophy of logic and mathematics was his 'debt to German learning'.[14] Because of it, Russell was inclined to become infatuated with insolubilia,[15] so that when confronted with problems of this kind, he lost his ability to analyse—in this case, to analyse the composition of unities (totalities). Historians of analytic philosophy have already noticed that while Russell's official theory was that mathematics is free of paradoxes, deep in his mind, he continued to believe that mathematics is paradoxical (see Garciadiego 1992, p. 152). This explains why he was so sensitive to any sign of paradoxes in logic and mathematics.

Especially illuminating in this respect is the fact that it was Frege who made Russell's paradox a paradox. Indeed, as recent historical investigations reveal, '[t]he fact that Frege, whose logical work Russell admired intensely, found Russell's paradox devastating ... played a major role in convincing him of its fundamental importance' (Moore 1995, p. 235). Until Frege's reaction to Russell's problem in his historic letter of 22 June 1902, Russell's friends Couturat and Peano, as well as Whitehead, who shared most of his logical ideas, were not impressed with his trouble at all. This explains why, before communicating the 'contradiction' to Frege, Russell was uncertain 'as to how important his paradox actually was' (Moore 2013, p. xxxiii). But, why was that so?[16]

14. Cf. with the title of Russell's paper (1955). It is important that Russell himself insisted on the nationality of different schools of mathematics and logic (see, for example, 1901a).

15. Some authors have justly noted that 'in a neo-Hegelian vein—he [Russell] collected as many paradoxes as he could' (Grattan-Guinness 1986, p. 108).

16. Griffin (2004) tried to answer this question without referring to Frege. He was convinced that 'Russell was not the first person to find a paradox in set theory, but he was the first to make a really big fuss about it' (p. 349). As just seen, however, the first to 'make a big fuss about it' was Frege, not Russell. This point reveals an important difference between Griffin's (and that of some other mainstream historians of analytic philosophy) approach and the approach we follow in this paper. The former is fine-grained, going deep into formal details. Our approach, in contrast, tries to draw a more general logico-philosophical picture of the developments under review in

First of all, both Frege and Russell were more philosophically oriented than the aforementioned logicians. The trouble with Russell, in particular, was that, as we have already mentioned (in n. 7), he stuck to his philosophical realism. The ontology that underlined his logic consisted of realistic categories such like 'points' and 'moments'. Frege's problem was even greater. He was convinced that 'axioms should express truths and definitions should give the meanings. ... If the terms in the proposed axioms do not have meaning beforehand, then the statements cannot be true (or false), and thus they cannot be axioms' (Shapiro 1996, p. 161). And this is even more important since logic is the science of truth.

The philosophical realism both Frege and Russell stuck to explains why they used 'quantifiers as varying over everything in the universe' (Moore 2013, p. xxiv). Today, we know that the most important lesson from the spectacular failure of Frege's logicist programme was that 'we cannot uncritically assume the existence of universal domain of quantification' (Simons 2007, p. 238).[17] Peano, for one, did not share this belief. He also did not make use of propositional functions (cf. 1903, § 22). That also explains why he was not impressed with Russell's 'contradiction'.

The main point, which supports our thesis that Russell himself created his paradox, or, to be more accurate, that he remoulded an old paradox of his into his paradox of classes, is that, as already mentioned, many other logicians did not see a paradox here. Among them were also Stanislaw Leśniewski and Kurt Gödel. Their approach is especially telling from our perspective since they directed their attention to analysing Russell's concept of unity or totality. In particular, both criticised Russell's understanding of classes as class-concepts.

Gödel was especially clear on this point: '[O]ne may, on good grounds, deny that reference to a totality necessarily implies reference to all single elements of it' (Gödel 1944, p. 135). All is not necessarily an infinite logical conjunction. Indeed, we have already seen (in § 2.3) that Russell himself enumerated five different ways of constructing unities. Oddly enough, though he knew these alternatives, he stuck to one—point 'iv' in our notation.

Much before Gödel, however, Leśniewski had already suggested an extensive solution to Russell's paradox, pointing out that it rests on the same one-sided use of the concept of class. To eliminate it, Leśniewski discriminated between a collective and distributive conception of class. Something is a member of a distributive class if and only if it is ipso facto this class.[18] In contrast, a member of a collective

order to suggest the best explanation.

17. Simons refers here to Dummett (1973, p. 455 ff).

18. Leśniewski borrowed the very terminology of collective and distributive classes from Tadeusz Kotarbiński much later.

class need not be ipso facto that class (see Leśniewski 1927–31, p. 17). Russell's paradox would not have emerged had he assumed that all classes were distributive; in this case, there is no such object as the class of classes that are not members of themselves.

Of course, this was not the single possible way to face Russell's paradox. For example, David Hilbert and his acolytes in Göttingen followed an alternative venue. They (Ernst Zermelo, in particular) tried to 'reform logic' through axiomatizing set theory (see Peckhaus 2004, p. 510).

6 Russell's Main Trouble Inflicted by the Turn of 1900

George Santayana had once said that Russell 'was a failure'. Russell's task was to renew Frances Bacon's project for a great instauratio magna of all sciences. Instead, he was involved in exploring subjectivist epistemological problems. Hao Wang surmised that this failure was due to the harmful influence of Wittgenstein. This section will show that what occasioned Russell's 'failure' was, above all, Frege's influence on his logic, and not the influence of Wittgenstein alone. The latter simply transported Frege's influence to Russell.[19]

Russell himself felt dissatisfied with *The Principles of Mathematics* upon finishing it. On 2 August 1902, he wrote in a letter to Miss G. L. Dickinson: '. . . the proofs come occasionally, and seem to me very worthless; I have a poor opinion of the stuff when I think of what it ought to be' (Moore 1993b, p. xxxviii). Two and a half months before that, on 16 May, Russell wrote to his wife, Alys: 'This is not the true artistic conscience, but that is a luxury I can no longer afford for the present' (Moore 2013, p. xxx). And three days later, he wrote: '. . . the final product is not a work of art, as I had hoped it would be' (1992, p. 234).

So, what caused this disappointment?

Apparently, to Russell, the 'beauty' of his initial project (1898–August 1900) came with the ease with which it treated different problems by way of one and the same concept—the concept of order, elaborated with the help of the logic of relations.[20] The chapters of this project were: logical order (based on implication), the order of whole and part (based on the extensive class-inclusion), the order of numbers,

19. Cf. Milkov (2013).
20. Hager (1994) partly supports this view.

and spatial and temporal order.[21] Organized this way, the work really did promise to be 'as clear as a crystal'.[22]

This project was rooted in the one-order logic developed by Moore in 1899, which decisively influenced Russell's project to reform logic (cf. § 1 [ii], above). It was also closely connected with the method of reductive analysis, which can be especially well embedded in a kind of part-whole logic.

In contrast, Frege's philosophical logic assumed a deep, many-ordered, intensional logic that is fruitful, and in which the function is organically connected to all individuals who fall under it and so determines them.[23] It persuaded Russell to assume that logical terms are heteromorphic, divided into strata: terms, propositions, functions, propositional functions, and classes (terms and denoting phrases). This was the first lesson in logic Russell learned from Frege (cf. § 2.3).

This lesson had grave consequences for both Russell's logic and philosophy. As it can be seen in the next section (§ 7), between 1903 and 1910, Russell tried to mitigate the damages it induced in his programme of analysis. It also deserves notice at this point that, as it has been shown elsewhere (Milkov 2013), a second lesson in the logic of Frege that Russell learned through Wittgenstein in 1913 urged him to further revise his philosophy and logic.

In Russell's defence, it can be mentioned that he took this turn with hesitation, making many efforts to evade those elements in it that were alien to his authentic, extensional logical intuitions. As a result, his 'logic remained of a quite different character from [Frege's]' (Grattan-Guinness 1988, p. 77b).[24]

From the point of view of the mathematical logic, Russell's doubts can be explained by the fact that with his turn of August 1900, Russell tried to synthesize two traditions in it: First, the algebraic line launched by De Morgan and developed further by Boole, Peirce, Schröder, and Whitehead. Second, the programme to improve the rigour of mathematical analysis laid down by Cauchy and developed further by some continental mathematicians and logicians like Weierstrass, Peano and Frege. '[T]he algebraists (like Grassmann) used part-whole theory, whereas mathematical logicians used Cantorian set theory' (Grattan-Guinness 1996, p. 212).

21. In accepting the concept of order as central to his logic, Russell followed—directly or indirectly—Hermann Lotze (cf. Milkov 2008).
22. This was Wittgenstein's judgment on his *Tractatus*.
23. Milkov (2015) demonstrated that these ideas of Frege's logic were influenced by ideas of German Idealism.
24. A point often discussed in the newer literature (Mayer 1996, p. 135; Peregrin 2001; Beaney 2008).

From the point of view of philosophical logic, there were at least two symptoms to show how adopting the elements of Frege's logic alienated Russell from his authentic direction: (i) '[T]he recognition of denoting concepts was inconsistent with [Russell's metaphysical] monism' (Coffa 1991, p. 106) that was proclaimed with the acceptance of realism in 1898. Indeed, it introduced different layers of being. (ii) The adoption of propositional function in 1903

forced to some extent the readmission of the subject-predicate pattern (by means of propositional functions) and, therefore, the abandonment of the relational ontology that was implicit in Moore's theory of judgment (Rodríguez-Consuegra 1993, p. 80).

In contrast to Russell, Edmund Husserl, who was very well informed about the new developments in logic and mathematics, was convinced that the most important achievement in the logic of the *fin the siècle* period was the new mereology (not Frege's technique of quantification, with which Husserl was well acquainted), or the logic of terms. Philosophers had to follow it as well.

7 Russell's Way out—Theory of Descriptions and other Emendations

After years of heroic efforts, Russell found some tentative solutions to his paradox. First, his Ramified Theory of Types set aside some philosophical assumptions in logic he and Frege had made which clearly contradicted their many-ordered logic: that there is a universal (one-levelled) domain of quantification. It deserves notice, however, that Russell, even in (1919), was not so confident about how sound this solution was. He clearly felt that 'the theory of types emphatically does not belong to the finished and certain part of our subject: much of this theory is still inchoate, confused, and obscure' (p. 135). Russell simply believed in 'the need of some doctrine of types' (ibid.).

Much more successful in solving his paradox was the Theory of Descriptions (1905). In fact, Russell felt from the very beginning that his paradox can be resolved through a correct theory of descriptions.[25] Later, he remembered that after years of abortive efforts to solve the paradox, the first success came with his Theory of

25. In a letter to Jourdain on 14 March 1906, Russell wrote: 'In April 1904 I began working at the Contradiction again, and continued at it, with few intermissions, till January 1905. I was throughout much occupied by the question of Denoting, which I thought was probably relevant, as it proved to be' (quoted according to Grattan-Guinness 1977, p. 79).

Descriptions. 'This was, apparently, not connected with the contradictions, but in time an unsuspected connection emerged' (1959, p. 79).

But, what exactly was the connection between the solution of the paradoxes of self-reference and the Theory of Descriptions? First of all, with the introduction of objects of acquaintance as a legitimate part of logic, Russell also (re)introduced complexes we are acquainted with into his logic. In this way, Theory of Descriptions limited the competence of the propositional functions, and thus partly restored the realistic mereology of complexes and simples, embraced in 1898, but rejected in 1900.

Secondly, with the introduction of the concept of 'incomplete symbols', Russell also made two other emendations to his logic, both of which were directed at eliminating the splitting of logic into different levels:

(i) He first eliminated classes, and also relations, as entities. After 1905, he maintained that classes are only 'incomplete symbols' and hence, are not objects. To be more precise, Russell introduced the 'no class' theory in (1907, p. 45). There are no classes but also no propositions and no propositional functions (cf. § 4). 'A propositional function standing alone may be taken to be a mere schema, a mere shell, an empty receptacle for meaning, not something already significant' (1919, p. 157).

It is true that after 1907, with the introduction of the Ramified Theory of Types, Russell adopted a stratified language with ordered variables. But, he never spoke about orders of entities (objects) again. Only the constituents of judgements are stratified into individuals (particulars) and universals. In other words, now he maintained that there are types of classes (attributes), but these can be presented by only one type of variable. In other words, there is a hierarchy of classes but not of objects.

(ii) Also in 1907, Russell discovered that propositions and propositional functions produce paradoxes of their own. (Of course they do: they are unities.) In consequence, he came to maintain that there are no propositions. To be more exact, these were eliminated with the help of the Multiple Relation Theory of Judgment. According to it, propositions only receive meaning (i.e. unity) through the judging mind: 'Propositions are incomplete symbols that require the context of judging mind in order to achieve a meaning.'[26] It follows that the truth-bearers are judgements, not propositions. The ontology of *Principia Mathematica* is also based on this conception.

26. Stevens (2005, p. 79).

As a result, in *Principia Mathematica*, Russell adopted a full rehabilitation of the ontology of the complex and simple. Both classes and propositions were declared incomplete symbols. With this step, the many-order logic left ontology; now it was restricted to the logical language exclusively (Chihara 1972, pp. 262–3).

Incidentally, despite all the difference between their logics, at the beginning of the 1920s, towards the end of his days, Frege reached a similar conclusion: the only way to avoid paradoxes in logic is to refuse to use the concept of (intensive) class as totality (or class-concept). The adoption of this position was supported by the acceptance of explicit geometrism in logic. Frege realised that the assumption of classes cannot guarantee a convincing treatment of infinite unities (including infinite numbers); this can only be done by the spatial and temporal intuition (see Dummett 1981, p. 663). As it has been shown elsewhere (see Milkov 1999), Frege's change of heart was also helped by the fact that his logic was crypto-intuitive from the very beginning. In fact, his foremost preconception was that logical objects can be grasped and operated only via geometrical intuition.

8 Epilogue

Russell was a revolutionary philosopher who aimed at suggesting a clear programme to radically reform the philosophy of his time. In particular, he was convinced that the new techniques introduced in mathematics and mathematical logic can finally solve many obscure philosophical paradoxes. This was the gist of his 'scientific method in philosophy' which was to replace the dialectical method of the British Neo-Hegelians.[27]

The literature on Russell has so far mainly discussed the ways in which he abandoned the method of the Neo-Hegelians after he embraced his scientific method of analysis. The present paper follows another direction. Since Russell formed his philosophical intuitions in the context of German Learning, he cannot escape being influenced with Hegelian *topics* as well. This is true, in particular, about the problem how units (totalities) relate to their constituents, which was the central topic of Hegel's logic. Exactly this subject-matter gave also rise to Russell's paradox.

The conclusion we reached in this paper is that the elimination of classes, relations, propositional functions, and propositions from Russell's ontology was more efficient in solving the paradox of classes than the official device introduced for this purpose—his Ramified Theory of Types. In particular, Russell's eliminative

27. It was also to replace the dialectical method of the British Neo-Lotzeans (see Milkov 2008).

programme banished the many-levelled ontology he was prone to follow after its 1900 turn, which, in many ways, hampered his method of analysis.

Unfortunately, Russell did not clearly realise that his paradox emerged in connection with the problem of constructing unities (totalities) from individuals (objects, terms). That is why he never considered the solution of his paradox in the wake later followed by Leśniewski and Gödel.

Acknowledgements

Earlier versions of this paper were presented at: the 2nd European Congress of Analytic Philosophy (Leeds, England, September 5, 1996); the International Conference on Logic and Philosophy One Hundred Years of Russell's Paradox (Munich, June 2, 2001); the International Workshop Recent Studies in the History and Philosophy of Logic (University of Paderborn, June 25, 2010); the 8th Rheinisch-Westfälisches Seminar zur Geschichte und Philosophie der Mathematik (Universität Paderborn, July 11, 2014); and the 12th International Conference on Contemporary Logic (University of Sankt Petersburg, Russia, June 21, 2016). We are grateful to all colleagues who commented on it.

REFERENCES

Works of Russell

1899 'The Fundamental Ideas ans Axioms of Mathematics,' in 1990, 261–305.

1900 'The Principles of Mathematics, Draft of 1899–1900,' in 1993, 15–180.

1901a 'Recent Italian Works on the Foundations of Mathematics', in 1993, 350–62.

1901b 'Recent Work on the Principles of Mathematics', in 1993, 363–79.

1903 The Principles of Mathematics, Cambridge: Cambridge University Press.

1907 'Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types' Proceedings of the London Mathematical Society 4: 29–53.

1908 'Mathematical Logic as Based on the Theory of Types', in 1956, 57–102.

1910 Principia Mathematica, together with A. N. Whitehead, 3 vols., Cambridge: Cambridge University Press.

1955 'My Debt to German Learning', in 1997, 106–9.

1956 Logic and Knowledge, ed. R. C. Marsh, London: George Allen & Unwin.

1959 My Philosophical Development, London: George Allen & Unwin.

1990 The Collected Papers of Bertrand Russell, vol. 2, Philosophical Papers: 1896–99, eds. N. Griffin, and A. C. Lewis, London: Routledge.

1992 The Selected Letters of Bertrand Russell, vol. 1, ed. N. Griffin., Allen Lane: The Penguin Press.

1993 The Collected Papers of Bertrand Russell, vol. 3, Towards the Principles of Mathematics, 1900–02, ed. G. H. Moore, London: Routledge.

1997 The Collected Papers of Bertrand Russell, vol. 11, Last Philosophical Testament, 1943–68, ed. G. Slater, London: Routledge.

2013 The Collected Papers of Bertrand Russell, vol. 3, Towards 'Principia Mathematica', 1905–08, ed. G. H. Moore, London: Routledge.

Works of Other Authors

Beaney, Michael. 2008. 'Function–Argument Analysis in Early Analytic Philosophy', in: P. Bernhard and V. Peckhaus (eds.), Methodisches Denken im Kontext, Paderborn: Mentis, pp. 203–215.

Bornet, G. 1995. 'George Boole's Linguistic Turn and the Origins of Analytical Philosophy', in Hintikka et al. (eds.), 236–48.

Chihara, C. S. 1972. 'Russell's Theory of Types', in: D. F. Pears (ed.) 1972. Bertrand Russell: A Collection of Critical Essays, Garden City (NY): Anchor Books, 245–89.

Coffa, A. 1991. The Semantic Tradition from Kant to Carnap, Cambridge: Cambridge University Press.

Dummett, M. 1973. Frege: Philosophy of Language, London: Duckworth.

——. 1981. The Interpretation of Frege's Philosophy, London: Duckworth.

Frege, Gottlob. 1891. 'Function and Object', in idem, Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy, ed. by B. F. McGuinness, 137–56.

——. 1979. Posthumous Writings, Oxford: Blackwell.

Garciadiego, A. R. 1992. Bertrand Russell and the Origins of the Set-theoretic 'Paradoxes', Basel: Birkhäuser.

Geach, P. T. 1962. Reference and Generality, Ithaca (NY): Cornell University Press.

Gillies, D. A. 1982. Frege, Dedekind, and Peano on the Foundations of Arithmetic, Assen: Van Gorcum.

Gödel, Kurt. 1944. 'Russell's Mathematical Logic', in Schilpp, P. A. (ed.), The Philosophy of Bertrand Russell, La Salle (Ill), 123–53.

Grattan-Guinness, I. 1977. Dear Russell – Dear Jourdain, New York: Columbia University Press.

——. 1986. 'Russell's Logicism versus Oxbridge Logic, 1890–1925', in Russell, 5: 100–31.

——. 1988. 'Living together and living apart. On the interactions between mathematics and logics from the French Revolution to the First World War', South African Journal of Philosophy, 7: 73–82.

——. 1996. 'Where Does Grassmann Fit in the History of Logic?', in G. Schubring (ed.), Hermann Graßmann (1809–1877): Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar, Dordrecht: Kluwer, 211–16.

Griffin, Nicholas. 2004. 'The Prehistory of Russell's Paradox', in G. Link (ed.), 349–71.

Hager, Paul. 1994. Continuity and Change in the Development of Russell's Philosophy, Dordrecht: Kluwer.

Hintikka, J. et al. (eds.). 1995. The British Tradition in 20th-century Philosophy, Vienna: Hölder–Pichler–Tempsky.

Irvine, A. D., and Wedekind, G. A., (eds.). 1993. Russell and Analytical Philosophy, Toronto: University of Toronto Press.

Landini, Gregory. 1998. Russell's Hidden Substitutional Theory, Oxford: Oxford University Press.

Leśniewski, S. 1927/31. 'On the Foundation of Mathematics' (1983), Topoi, 2: 3–52.

Link, Godehard. 2004. One Hundred Years of Russell's Paradox: Mathematics, Logic, Philosophy, Berlin: de Gruyter.

Mayer, Verena. 1996. Gottlob Frege, München: Beck.

Milkov, Nikolay. 1997. The Varieties of Understanding. English Philosophy since 1898, 2 vols., New York: Peter Lang.

——. 1999. 'The Latest Frege', Prima philosophia, 12: 41–8.

——. 2003. A Hundred Years of English Philosophy, Dordrecht: Kluwer.

——. 2008. 'Russell's Debt to Lotze', Studies in History and Philosophy of Science, Part A 39: 186–93.

——. 2013. 'The Joint Philosophical Turn of Russell and Wittgenstein and Its Demise', Nordic Wittgenstein Review, 2: 81–105.

——. 2015. 'Frege and the Philosophy of German Idealism', in: Dieter Schott (Hg.), Frege: Freund(e) und Feind(e), Berlin: Logos Verlag, pp. 88–104.

——. 2017. 'Wittgenstein's Ways", in: Bartłomiej Skowron (ed.), Topological Philosophy, Berlin: de Gruyter (to appear).

Moore, G. E. 1899. 'The Nature of Judgment', in idem, 1986, 59–80.

——. 1900. 'Necessity', in idem, 1986, 81–100.

——. 1986. The Early Essays, Philadelphia: Temple University Press.

Moore, G. H. 1993a. 'Introduction', in: Russell, B. 1993, xiii–xlviii.

——. 1993b. 'The Principles of Mathematics, Draft of 1899–1900', in Russell, B. 1993, 9–12.

——. 1995. 'The Origins of Russell's Paradox', in Hintikka et al. (eds.), 215–39.

——. 1998. 'Logic in the Early 20th Century', in E. Craig (ed.), Routledge Encyclopaedia of Philosophy, vol. 5, London: Routledge, pp. 729–38.

——. 2013. 'Introduction', in: Russell, B. 2013, xiii–xcii.

Peckhaus, Volker. 2004. 'Paradoxes in Göttingen', in G. Link (ed.), 501–15.

Peregrin, Jaroslav. 2001. ' "Fregean" Logic and "Russellian" Logic', Australasian Journal of Philosophy, 78: 557–75.

Priest, Graham. 1991. 'The Limits of Thought – and Beyond', Mind, 100: 361–70.

——. 1994, 'The Structure of the Paradoxes of Self-Reference', Mind, 103: 25–34.

Ramsey, F. P. 1978. Foundations, ed. Mellor, D. H., London: Routledge & Kegan Paul.

Rodríguez-Consuegra, F. A. 1991. The Mathematical Philosophy of Bertrand Russell, Basel: Birkhäuser.

——. 1993. 'The Origins of Russell's Theory of Descriptions', in Irvine and Widekind (eds.), 66–96.

Shapiro, Stewart. 1996. 'Space, Number and Structure: A Tale of Two Debates", Philosophia mathematica, 3d ser., 4:148–173.

Simons, Peter. 2007. 'What Numbers Really Are', in R. E. Auxier and L. E. Hahn (eds.), The Philosophy of Michael Dummett, Chicago: Open Court, 229–47.

Wittgenstein, L. 1956. Remarks on the Foundations of Mathematics, eds. G. E. M. Anscombe et al., Oxford: Blackwell.

Nicht nur nach den reifen Früchten greifen... — Mathematikgeschichte im Schulunterricht

Gregor Nickel

> Wer sich mit der Wissenschaft bekannt machen will, darf nicht nur nach den reifen Früchten greifen — der muß sich darum bekümmern, wie und wo sie gewachsen sind. JOHANN CHRISTIAN POGGENDORFF (1796-1877)

1 Orientierung in der und durch Geschichte

Geschichte — im Sinne einer *historia rerum gestarum*, also einer Erzählung von vergangenem Geschehen — gehört zu den fundamentalen Medien einer jeden persönlichen wie auch gesellschaftlichen Orientierung[1]. Dies gilt also ebenso auf der individuellen Ebene beim Verorten der eigenen Person innerhalb einer Lebens- oder Familiengeschichte wie auf der Ebene unterschiedlichster gesellschaftlicher Kollektive, etwa im Sinne einer 'Weltgeschichte', einer Geschichte von Nationen, von politischen Gruppierungen und Ideen, von (nationaler) Literatur, von einzelnen Wissenschaften und Wissenschaft überhaupt, von Kunst, Philosophie oder Religion. Die zeitliche Dimension reicht dabei von der (nur scheinbar) banalen Erinnerung und Rekapitulation der letzten Viertelstunde oder des verstrichenen Tages — wiederum persönlich oder kollektiv z.B. als Tagesrückblick der Nachrichten — bis zum gesellschaftlichen Gedächtnis vergangener Jahrzehnte oder Jahrhunderte. Die historische Rekonstruktion einer Thematik, die immer zugleich mehr und weniger ist als eine bloße Aneinanderreihung dazu passender 'gesicherter Fakten',

1. Die folgenden knappen Andeutungen zu Phänomen und Funktion der Geschichte müssen in unserem Kontext genügen; für einen Überblick aktueller philosophischer Positionen vgl. T. Zwenger *„Geschichte" — was ist das eigentlich?* Rathgeb et al. (2013), pp. 103-122.

umfasst inhaltlich und zeitlich genau den Bereich, für den zur Thematik passende (datierbaren!) Quellen oder — wenn die Vor- und Frühgeschichte einbezogen wird — auffindbare menschliche Artefakte zur Verfügung stehen. Betrachten wir den Extremfall, die Erzählungen der 'Naturgeschichte' oder gar der physikalischen Kosmogonie, so reicht hier der Horizont in zeitlicher Hinsicht so weit, wie überhaupt sinnvoll von einer (in diesem Falle naturwissenschaftlich) fassbaren Zeit gesprochen werden kann. Zugleich wird jedoch der Bereich der Geschichte im engeren Sinne verlassen.

Die Frage "wie bzw. warum kam es dazu?" ist für die Orientierung in fast jeder Sachfrage unumgänglich, die in einem umfassenderen Sinne verstanden bzw. 'geklärt' werden soll. Ohne eine historische Positionsbestimmung ist weder ein sinnvolles Beurteilen (der Gegenwart) noch ein verantwortetes Handeln (in die Zukunft) möglich. Nur ein Denken in geschichtlichen Zusammenhängen ermöglicht ein Bewusstsein, das Bestehendes als Resultat zwar nicht zufälliger, aber durchaus kontingenter — also auch anders möglicher — Entscheidungen zu bestimmen und damit zu beurteilen, zu rechtfertigen, aber auch zu kritisieren vermag. Dabei geht es gar nicht einmal in erster Linie um ein 'Lernen aus der Geschichte', das es ermöglichen soll, erwünschte Ziele besser zu erreichen oder 'Fehler' zu vermeiden. Es geht vielmehr darum, die eigene Position im zeitlichen, historischen Verlauf bestimmen und verstehen zu können als Vorbedingung dafür, überhaupt sinnvoll und verantwortet Ziele setzen zu können.

Unvermeidbar ist eine jede Geschichtsschreibung perspektivisch; sie spricht aus der Gegenwart heraus über eine Vergangenheit, die nicht (mehr) da ist, die also die über sie erzählte(n) Geschichte(n) nicht korrigieren kann. Zudem definiert jeder Geschichtsschreiber seine eigene Perspektive bereits durch den Horizont der jeweiligen Aufmerksamkeit, so dass sich die eine Geschichte, *res gestae*, im Spektrum vieler, teilweise sehr unterschiedlicher Geschichten, *historiae*, zeigt[2]. Zum Problem wird dies erst in zwei Extremfällen: Einerseits beschreibt eine unreflektierte (und in der Regel auch unexplizierte) Voreingenommenheit oder die Dominanz von spezifischen Interessen Geschichte als Einbahnstraße, die dann 'zufällig' just die eigene Ideologie rechtfertigt; abweichende Erzählungen lässt man gar nicht mehr gelten. Die nationale Geschichtsschreibung ist voll von entsprechenden Beispielen, aber auch an eine einseitig heroisierende Wissenschaftsgeschichte könnte man hier denken. Auf der anderen Seite lässt man eine jede Erzählung gelten, ohne noch in irgendeiner Weise auf eine Korrektur durch die historische Faktizität zu hoffen. Die Geschichtswissenschaften hatten seit jeher zu lernen, mit diesem Spannungs-

2. Für eine Palette verschiedener Perspektiven der Mathematikgeschichte vgl. M. Epple: *Genies, Ideen, Institutionen, mathematische Werkstätten: Formen der Mathematikgeschichte. Ein metahistorischer Essay.* Mathematische Semesterberichte **47** (2000), pp. 354-365.

feld umzugehen, und sie haben Methoden und Standards entwickelt, die in vielen Fällen durchaus einen argumentativ gestützten Vergleich zwischen mehr oder weniger adäquaten historischen Rekonstruktionen erlauben. Dass es immer wieder zu einem 'Historikerstreit' kommt, scheint unumgänglich; *wie* dieser geführt wird ist allerdings entscheidend.

In schärfstem Kontrast dazu scheint die Mathematik eine Ansammlung zeitloser Wahrheiten zu sein, dem Wandel der Zeiten und Perspektiven vollständig enthoben. Ist es nicht eine schlichte Tatsache, dass die Exponentialfunktion die einzige stetige Funktion ist, die die Funktionalgleichung $f(t+s) = f(t)f(s), f(0) = 1$ löst, war sie dies nicht schon immer und wird sie es nicht immer sein? Eine Geschichte hätte die Mathematik allenfalls im Sinne eines simplen, kumulativen Fortschritts im Erkennen und Ansammeln dieser Wahrheiten über unveränderliche Gegenstände. Und so ist sie in ihrer Gestalt als universitäre Disziplin in Lehre und Forschung tatsächlich im wesentlichen geschichtslos. Immerhin ist eine historische Verankerung in residualer Form auch im Forschungskontext präsent, wenn zu einer Publikation in der Regel die Referenz auf bereits geleistete Arbeit anderer Autoren erfolgt, wobei jedoch der zeitliche Horizont in der Regel nur wenige Jahre (maximal Jahrzehnte) reicht. Ob die Mathematik und ihre Gegenstände mit diesem Bild wirklich angemessen charakterisiert sind, können wir an dieser Stelle offen lassen (für eine weitergehende Diskussion vgl. Krömer 2015). Sicher ist jedenfalls, dass die Disziplin Mathematik 'nach innen' einer äußerst bewegten Geschichte unterliegt, welche Gegenstände wann und warum in den Fokus der Forschung und Praxis rücken und auf welche Weise, nach welchen Standards diese zu welchen Zwecken behandelt werden. Dabei ist die zeitliche Dimension dieser Geschichte und die Kontinuität der behandelten Themen unter den wissenschaftlichen Disziplinen unserer Tage einzigartig und eigentlich nur mit derjenigen der Philosophie vergleichbar. 'Nach außen' ist die Mathematik wiederum nicht nur für die Wissenschaftsgeschichte in massiver Weise prägend, sondern auch — und dies wird zumeist dramatisch unterschätzt — für die Kulturgeschichte. Hochkulturen und in verschärfter Weise moderne Gesellschaften werden durch Mathematik — indirekt via Technik, aber auch direkt durch mathematisch kodifizierte soziale Regeln (der demokratischen Wahlsysteme, Sozialversicherungs- und Rentensysteme, der Unterstützung oder gar Determination von Entscheidungen durch Statistiken etc.) — in extremer Weise bestimmt. Wer Mathematik also als — im weiteren Sinne — kulturgeschichtliches Phänomen verstehen möchte, muss diesen (wechselseitige) Einfluss wenigstens exemplarisch bzw. in Bezug auf einzelne Aspekte in den Blick nehmen. Und ebenso darf die historische Entwicklung nicht vergessen werden, wenn man ihr inneres Wesen verstehen will.

Als nötiges *caveat* sei nochmals vermerkt, dass man Mathematik selbstverständlich auch ohne jeden Bezug auf ihre Geschichte lernen, trainieren, betreiben und sogar meisterlich betreiben kann[3]; dass dies für den wissenschaftlichen Betrieb weitestgehend gilt, hatten wir ja bereits erwähnt. Ein solches Lernen und Ausüben belässt die Wissenschaft Mathematik allerdings auf der Ebene einer (teils heteronomen, teils autonomen) Technik. Wenn es jedoch gilt, Reichweite, Angemessenheit oder Bedeutung (und gesellschaftliche Einbettung bzw. Wirkung) dieser Technik zu beurteilen, dann sind die umfassenderen Fragen einer allgemeinen Orientierung nicht mehr abweisbar. Und auch insofern sich die Mathematik selbst als — auf Wahrheit bezogene — Wissenschaft versteht, ihre eigenen Fragestellungen, Standards und Methoden reflektiert, kann sie wohl kaum ausschließlich auf ein gedächtnisloses 'Weiter-so' setzen. Als Disziplin — wenn auch nicht in der Person jedes einzelnen ihrer forschenden Mitglieder — darf sie ihre Geschichte nicht ganz vergessen, will sie nicht vernunftlos werden.

Im folgenden steht nun freilich nicht die Wissenschaft Mathematik, sondern die schulische Bildung im 'Fach' Mathematik im Fokus. Von vornherein darf es also gar nicht nur um das Beherrschen einer Technik gehen (darum freilich auch), sondern um das 'Kennenlernen' eines Gegenstandes, einer Disziplin im Sinne der Allgemeinbildung. Und dann gilt das in Bezug auf eine historische Orientierung gesagte in besonderer Weise.

2 Geschichte der Mathematik im Mathematikunterricht — Bildungsziel oder Hilfsmittel?

> Ein wesentliches Hindernis der Verbreitung einer solchen naturgemäßen und wahrhaft wissenschaftlichen Unterrichtsmethode ist wohl der Mangel an historischen Kenntnissen, der sich so vielfach geltend macht. Um diesen zu bekämpfen, habe ich besonders gern zahlreiche historische Momente in meine Darstellung verflochten. Felix Klein (1849-1925)[4]

3. Bereits Aristoteles hatte bemerkt, dass es in der Mathematik junge Genies geben könne, weil — im Gegensatz zur (politischen) Klugheit und zu Fragen der Moral — eine reichhaltige Erfahrung mit Einzelfällen verzichtbar sei.

4. F. Klein: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Band I: Arithmetik, Algebra, Analysis. Berlin ^{4}1933, p. 289.

Wenn man einmal versuchsweise die Normen aktueller Lehrpläne und 'Bildungsstandards' und die Kenntnis der derzeitigen Situation des Mathematikunterrichts ausblendet, so erscheint es nach dem Vorstehenden selbstverständlich, dass zu einem jeden allgemeinbildenden Unterricht der Mathematik auch die Vermittlung und Diskussion ihrer Geschichte gehört. Wer etwas von Mathematik 'verstehen' will, muss ihre Geschichte kennen. Die typischerweise seltene Präsenz des Historischen im Mathematikunterricht wird dann erklärungs- bzw. rechtfertigungsbedürftig. Wir werden im Abschnitt 4 darauf zurückkommen.

Zumindest in Bezug auf ein etwas anspruchsvolleres Allgemeinbildungskonzept müsste die historische Facette in der Tat eine wichtige Rolle im Mathematikunterricht spielen. Als Probierstein für die normative Frage nach sinnvollen Inhalten des mathematischen Unterrichts könnte man einmal nach der 'mittleren Gruppe' fragen, also nach den Schülerinnen und Schülern, denen das Mathematische grundsätzlich nicht besonders schwer fällt, die sich jedoch auch nicht wirklich dafür begeistern können und die dann auch in ihren späteren Bildungs- und Berufszielen allenfalls am Rande in Berührung mit (Schul)Mathematik kommen. Was sollen sie in ihrem Mathematikunterricht erleben und was womöglich aus ihrem Mathematikunterricht mitnehmen? Legen wir etwa Hans Werner Heymanns Kriterien für Allgemeinbildung zugrunde (vgl. Heymann 1996), so würden zumindest drei Aspekte eine Integration der Geschichte nahelegen. Sein Begriff einer "Stiftung kultureller Kohärenz" (pp. 65) ist sicherlich das primäre Kriterium, das eine historische Orientierung notwendigerweise verlangt. Und tatsächlich nimmt Heymann selbst an dieser Stelle Bezug auf die Geschichte:

> In den zentralen Ideen eines Faches (...) verbindet sich der diachrone mit dem synchronen Aspekt der kulturellen Kohärenz: die zentralen Ideen sind historisch gewachsen, repräsentieren also eine Geschichte; und sie stehen für die Wechselwirkung zwischen Fach und außerfachlicher Kultur, transzendieren also die Grenzen des einzelnen Faches. (p. 78)

Aber auch sein Kriterium der "Weltorientierung" (pp. 79), was er in dem Sinne expliziert, dass Mathematik "Teil unserer Welt und zugleich in ihr verborgen" sei, kommt nicht ohne eine historische Komponente aus. Denn gerade die Selbstverständlichkeit, mit der naturwissenschaftliche Theorie auf Mathematik rekurriert, ist keineswegs naturgegeben, sondern das Resultat eines historischen Ereignisses, einer wissenschaftlichen Revolution von immenser Tragweite. Ebenso ist die mathematische Gestaltung moderner Gesellschaften und der persönlichen Lebenswelt historisch gewachsen und keineswegs alternativlos. Schließlich gehören zum "Denkenlernen und kritische[n] Vernunftgebrauch" (pp. 88) auch ein Kontingenz-

Bewusstsein, das die Gegenwart (eben auch historisch begründet) zu kritisieren weiß. Zudem heißt "Denkenlernen" sicherlich nicht nur das willige oder unwillige Trainieren einer ganz spezifischen Facette unserer geistigen Fähigkeiten (Rechnen, Konstruieren, Beweisen, In-den-Taschenrechner-Tippen...), sondern auch das Fragen nach Gründen, nach Sinn und Bedeutung — und solche Fragen verweisen nicht selten in den Bereich der Geschichte.

Ein kulturhistorisch orientierter Zugang zur Mathematik müsste also die — durchaus auch ambivalente — Rolle der Mathematik für die Kulturgeschichte der Menschheit präsentieren und diskutieren. Dies kann sicherlich nicht umfassend gelingen; ein an einzelnen Beispielen geschultes Grundverständnis stellt aber eine essentielle Anforderung für die Bildung zur (gesellschaftlichen) Urteilsfähigkeit dar. Zudem liefert ein historischer Zugang wesentliche Aspekte für eine Antwort auf die normative Frage nach Inhalten und Umfang des mathematischen Kanons für die allgemeinbildende Schule, die sich keineswegs nur aus dem allgemeinen Anwendungsbezug und der speziellen Wissenschaftspropädeutik beantworten lässt. Wer als verantwortlicher Pädagoge nicht zum lediglich ausführenden Befehlsempfänger staatlicher Normierungen werden will, sollte sich auch in der Mathematikgeschichte und in der Geschichte des Mathematikunterrichts orientieren (können)[5].

Nachdem im Vorstehenden für die Unverzichtbarkeit einer historischen Dimension im Mathematikunterricht plädiert wurde, und zwar als Lehrinhalt und -ziel eigener Dignität, sollen im Folgenden ihre die rein fachlichen Lehrziele unterstützenden Funktionen diskutiert werden. Sollte es doch bei diesem Plädoyer nicht darum gehen, den Unterricht der Mathematik vollständig durch einen Unterricht in Mathematikgeschichte zu ersetzen. Es ist also gut zu unterscheiden, ob die Geschichte als Hilfsmittel eingesetzt werden soll, die einer besser gelingenden Lehre des mathematischen Themas dient (und dabei nochmals genau zu differenzieren, in welchem Kontext und zu welchem genaueren Zweck dies geschieht, vgl. Allmendinger et al. 2015), oder ob sie als Selbstzweck unterrichtet wird, also als Bildungsziel eigenen Rechtes[6]. Auch ist selbstverständlich die Breite des historischen Bildungshintergrunds des Lehrenden zu unterscheiden vom Spektrum der Themen, die in einer gelingenden Schulbildung tatsächlich auftauchen sollen. Ob also die historischen Kenntnisse im Hintergrund bleiben oder explizite vorgestellt werden, ist

5. Die historische Entwicklung des mathematischen Unterrichts ist ein Thema für sich, das hier weitgehend ausgeblendet wird. Zumindest in dieser Fußnote soll jedoch betont werden, dass für die fachlich und pädagogisch angemessene Orientierung eines Lehrenden an einer allgemeinbildenden Schule innerhalb seiner Profession die im ersten Teil beschriebene historische Facette der Orientierung in besonderer Weise zum Tragen kommt.

6. Vgl. die entsprechende Unterscheidung von "tool" und "goal" bei U. Jankvist: *A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in mathematics education.* Educational Studies in Mathematics **71** (2009), 235-261.

wohl zu überlegen. Aber dies gilt *nota bene* auch für die rein fachliche (und auch die fachdidaktische) Bildung.

3 Dienende Funktionen der Mathematikgeschichte für den Mathematikunterricht — eine kleine Taxonomie

> Alle diese Gegenstände der Infinitesimalrechnung, die heute als kanonisierte Requisiten gelehrt werden, der Mittelwertsatz, die Taylorsche Reihe, der Konvergenzbegriff, das bestimmte Integral, vor allem der Differentialquotient selbst, und bei denen nirgends die Frage berührt wird: Warum so? Wie kommt man zu ihnen? Alle diese Requisiten also müssen doch einmal Objekte eines spannenden Suchens, einer aufregenden Handlung gewesen sein, nämlich damals als sie geschaffen wurden.
> Otto Toeplitz (1881-1940)[7]

Für einen gelingenden Unterricht ist die Fähigkeit kaum zu überschätzen, eine mathematische Thematik umfassend zu motivieren. In Verbindung von fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Perspektive bedeutet dies einerseits, die mathematische oder außermathematische Problemlage, dann die entsprechende mathematische Fragestellung und schließlich die darauf antwortende mathematische Begriffsbildung mit Definitionen, Axiomatik und zuletzt Theoremen und Kalkülen etc. zu entfalten. Andererseits geht es darum, u.a. auf die erstgenannte Weise die Lernenden *für* diese Thematik zu motivieren, also auch zu einer ausdauernden, frustrationstoleranten geistigen Arbeit. Es sei zugestanden, dass die Freude über eine mathematische Einsicht nicht unbedingt so weit reichen muss, wie es Diogenes Laertios über Thales berichtet[8]:

> In der Geometrie ein Schüler der Ägypter, hat er, wie Pamphile berichtet, zuerst das rechtwinklige Dreieck in den (Halb)kreis eingetragen und daraufhin einen Stier geopfert.

Gleichwohl ist es von entscheidender Bedeutung, dass die Lernenden zu einer *Wert*schätzung des Faches finden, zumindest aber zu einer begründeten *Ein*schät-

7. O. Toeplitz: *Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an höheren Schulen.* Jahresbericht der DMV **36** (1927), p. 88-100.

8. Diogenes Laertios: "Leben und Meinungen berühmter Philosophen. Bd. I, Hamburg 2008, p. 13.

zung. Und auch hierbei ist es oft unerlässlich, die Geschichte einer Problematik zu kennen.

In vielfältiger Weise kann eine Integration historischer Elemente die Lehre der fachlichen Inhalte unterstützen[9]. Hierbei soll nun das Augenmerk ganz bewusst auf eine Funktionalisierung der Mathematikgeschichte zum Zwecke einer besseren, fachlich und didaktisch angemessenen Lehre gerichtet sein. Eine Funktionalisierung für die Zwecke anderer Fächer ist der Mathematik selbst ja ohnehin nicht fremd, leistet sie doch für sämtliche Natur- und Ingenieurwissenschaften wie auch für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften als 'Grundlagenfach' einen unverzichtbaren 'Service', bei dem sie die eigenen wissenschaftlichen Standards weitgehend verleugnen darf (bzw. muss), um den jeweiligen Bedürfnissen der Anwendungsfächer Rechnung zu tragen. Die Mathematik wird allerdings bei diesem Unterfangen die eigene Wissenschaftlichkeit von ihrer rezeptartigen Anwendungsform klar abgrenzen. Ebenso sollte — bei aller zugestandenen Funktionalisierung — auch die Mathematikgeschichte von ihrer funktionalisierten Gestalt deutlich unterschieden bleiben.

Der vermutlich häufigste Gebrauch der Mathematikgeschichte ist **anekdotisch**; der als allzu trocken empfundene Stoff wird gelegentlich durch kleine Geschichten aus der Geschichte gewürzt, entsprechend dem Blaise Pascal zugeschriebenen Diktum, die Mathematik sei so ernst, dass man "keine Gelegenheit versäumen sollte, sie etwas unterhaltsamer zu gestalten." Das Anekdotische lebt vom Kontrast zur 'normalen' Präsentation; so liegt etwa die Betonung hier auf dem biographisch Persönlichen oder auf dem originellen Einzelfall, die sonst gar keine Rolle spielen. Prototyp für das Anekdotische ist die 'Geschichte vom kleinen Gauß', der als Elementarschüler seinen Lehrer durch die genial-einfache Lösung einer mühseligen Fleißaufgabe überrascht[10]. Die populärwissenschaftliche Literatur enthält eine große Zahl von weiteren Beispielen. Auch wenn es sich hierbei sicherlich um eine defizitäre Form des Historischen handeln mag, sollte die Möglichkeit einer produktiven Rolle des Anekdotischen nicht gering geachtet werden. Wie bei jeder Aufführung, müssen dazu jedoch die Pointen gekonnt gesetzt werden. Eine spezielle Variante des anekdotischen Gebrauchs ist der **tröstende**. Hierbei wird am Beispiel historischer Persönlichkeiten und langjährigen Entwicklungen verdeutlicht, dass die beim Lernenden auftauchenden, hartnäckigen Verständnisprobleme nicht nur (herablassend oder gütig) tolerierbar, sondern 'ganz natürlich' sind. Wenn sogar die größten Mathematiker ihrer Zeit über Jahrzehnte an der Lösung eines Problems

9. Dieser Abschnitt ist — leicht modifiziert — dem Aufsatz Nickel (2013) entnommen.

10. Daniel Kehlmann gewinnt dieser eigentlich etwas abgestandenen Anekdote auf überraschende Weise eine existentielle Tiefe ab, indem er die Situation des zum fachlichen und pädagogischen Offenbarungseid genötigten Mathematiklehrers ins Zentrum der Betrachtung rückt; vgl. Ders.: Die Vermessung der Welt. Reinbek bei Hamburg 2005.

haben arbeiten müssen, wenn es Jahrhunderte währender Forschung bedurfte, um zentrale mathematische Begriffe herauszuarbeiten, dann sollte der Anfänger nicht daran verzweifeln, dass er sich über Monate damit plagt die vorgelegte Lösung nachzuvollziehen.

Eine schon von Friedrich Nietzsche heftig kritisierte Variante des Historischen, die im Wesentlichen ein Übermaß an rein positivistischer Historie bedeutet, ist ihr **antiquarischer** Gebrauch. Hier sammelt und hortet der unreflektierte und unkontrollierte historische Sinn längst verstaubte Kuriositäten, schließt sich mit diesen in einem Museum ein und schließt gleichzeitig die Anfragen und Bedürfnisse der Gegenwart aus. Übertragen auf unser Thema würde dies heißen, dass die Arbeit am mathematischen Inhalt ersetzt wird durch die rein referierende Präsentation der Werke historischer Autoren. So würde etwa eine Lehrveranstaltung über (elementare) Arithmetik in einer Sammlung von Rechenmeistern des 14. und 15. Jahrhunderts aufgehen. Dabei geht allerdings sowohl der mathematische Gehalt unter als auch der historische. Zwei weitere hinderliche Varianten des Anekdotischen sollen an dieser Stelle kurz benannt werden. Zum einen können die historischen Bemerkungen als rein **monumentalische** Präsentation der großen Heroen der Mathematikgeschichte erfolgen; an eine eigenständige Produktivität wäre im Schlagschatten dieser Gestalten gar nicht zu denken. Die Kehrseite der monumentalischen Variante ist ein **jovialer** Umgang mit der Geschichte; aus der scheinbar überlegenen Position der Gegenwart wird mehr oder minder herablassend berichtet, was man damals 'schon wusste'. Selbst wenn dieser Bezug auf die Mathematikgeschichte dem mathematischen Lernziel neutral gegenüber stehen mag, so vermittelt er doch in aller Regel ein vollkommen unzutreffendes Bild der historischen Situation (wir werden im nächsten Abschnitt darauf zurückkommen).

Einen deutlich höheren Anspruch erhebt der **genetische** Gebrauch. Dabei stellt der historisch-genetische Zugang nur eine Facette eines umfassenderen Konzepts dar, das sich gegen eine 'deduktivistische' bzw. 'formalistische' Vermittlung der Mathematik wendet. Im Kontrast dazu sollen die abstrakteren Begriffe schrittweise, 'genetisch' aus den konkreteren entwickelt werden. Bereits Otto Toeplitz (1881-1940) propagiert einen solchen Zugang und schlägt vor, innerhalb des genetischen Gebrauchs der Geschichte zwei Varianten zu unterscheiden (vgl. die knappe Charakterisierung in Vollrath 1968): ein implizit historisch-genetisches Verfahren (Toeplitz spricht von einer indirekten genetischen Methode) baut zwar bei der Organisation der Lehre auf einer Kenntnis historischer Prozesse auf, stellt diese jedoch nicht explizit dar. Es geht also primär um die Sensibilisierung für — historisch und damit vermutlich auch individuell wirksame — Verstehenshindernisse und Prozesse ihrer Bewältigung. Ein explizit historisch-genetisches Vorgehen dagegen entwickelt die Inhalte parallel zu einer mehr oder weniger ausführlichen Darstellung ihrer historischen Genese. Die Komplexität der Mathematikgeschichte kann hierbei jedoch — gerade für die Lernenden — ausgesprochen verwirrend wirken. In diesem Sinne stimme ich den kurzgefassten Thesen Lutz Führers zu, wenn er einerseits feststellt, dass (explizit) historisch-genetisches Vorgehen "Beispiele zu denkbaren Erschließungsprozessen" liefert, andererseits jedoch nicht verabsolutiert werden darf[11],

> weil der ‚historische Weg' [...] sich in all seinen Erkenntnismotiven und Mühseligkeiten nicht ohne Verkürzungen vergegenwärtigen läßt, [...] weil es möglicherweise inzwischen leichtere, kürzere, einleuchtendere oder übertragbarere Wege zum jeweils angestrebten Wissen gibt.

Der genetische Gebrauch der Mathematikgeschichte geht also als Hilfsmittel leicht fehl und somit allenfalls in die Präsentation eines Lehrgegenstands eigenen Rechtes über, der im Kontrast zum Fachinhalt nochmals einen ganz eigenen Reiz besitzt, aber auch spezifische Schwierigkeiten hervorruft.

Insbesondere für das Lehramtsstudium ist der **verfremdendende Gebrauch** des Historischen hilfreich. Je weiter der eigene schulische Lernprozess zeitlich zurückliegt, desto eher entfällt eine (lebhafte) Erinnerung an eigene Schwierigkeiten – beispielsweise beim Erlernen der elementaren Arithmetik. Hier kann der historische Kontext die elementare Mathematik soweit verfremden, dass Studierende erneut die Erfahrung eigenen Lernens machen können bzw. müssen. Auch öffnet der Blick auf historisch realisierte Alternativen die Augen dafür, dass es keineswegs selbstverständlich und einfach ist, dass 'man' so notiert und rechnet, wie es heute üblich ist. Zudem kann der Wert einer (für den jeweiligen Zweck) gut geeigneten Notation überhaupt erst gewürdigt werden, wenn Erfahrungen mit Alternativen gemacht werden.

Ein **authentisch exemplarischer** Umgang mit der Mathematikgeschichte erlaubt schließlich eine ‚Erfahrung Mathematik' im — zwar nicht aktuellen, aber doch authentischen — Forschungskontext. Gerade im Kontrast zu dem derzeitigen Übermaß an grauenhaft artifiziellen 'Anwendungsaufgaben' können hier Erfahrungen mit echter Mathematik ermöglicht werden. Anstatt mit Mühe und zweifelhaftem Erfolg eine — wie auch immer geartete — Bedeutung in die mathematischen Lerninhalte hineinzulegen, kann man versuchen, direkt von denjenigen zu lernen, für die mathematische Begriffe unmittelbar bedeutsam waren. Dabei ist zu beachten, dass zwar einerseits mit zunehmendem Alter der Quelle die mathematischen Schwierigkeiten in der Regel abnehmen, dass jedoch andererseits die historische Fremdartigkeit deutlich zunehmen kann, so dass man beim exemplarischen Umgang in Bezug auf die historische Präzision wird Abstriche machen müssen. Und

11. L. Führer: Pädagogik des Mathematikunterrichts. Eine Einführung in die Fachdidaktik für Sekundarstufen. Wiesbaden 1997, p. 53.

nicht zuletzt ist es im Rahmen eines exemplarischen Umgangs möglich, **interdisziplinäre** Bezüge der Mathematik aufzuzeigen, die bei aktuellen Fragestellungen schnell den Rahmen des mathematisch Beherrschbaren sprengen. Dass in Deutschland Lehramtsstudiengänge in der Regel nicht nur *eine* Fachwissenschaft umfassen, eröffnet Chancen, die viel zu selten genutzt werden.

Ganz unabhängig von einem expliziten Einsatz der Mathematikgeschichte, wie er oben in Aspekten charakterisiert werden sollte, sei abschließend daran erinnert, dass die schulische Bildung in aller Regel nicht den aktuellen (inhaltlichen wie methodischen) Stand der den jeweiligen Fächern entsprechenden Wissenschaften umfasst[12]. In den Naturwissenschaften wird weitestgehend — in vereinfachter Form — der Stand vergangener Jahrhunderte unterrichtet (und das ist gut so!): grob gesagt, die Physik des 17. und 18. Jahrhunderts, die Chemie des 18. und 19. Jahrhunderts, die Biologie des späten 19. bis zur Mitte des 20. Jahrhunderts. Unternimmt man Ausflüge in die aktuelle Forschungslandschaft, so erfordert dies in der Regel drastische Vereinfachungen. Dementsprechend hat die schulische Mathematik von der ersten Klasse bis zum Abitur kaum etwas mit der aktuellen mathematischen Forschung gemein und berührt allenfalls Teile der Mathematik vergangener Jahrhunderte. In diesem Sinne war der Mathematikunterricht ohnehin (in der Regel unbewusst) schon immer implizit historisch. Nach dem 'Pisa-Schock' setzt man nun in zunehmendem Maße auf eine 'lebenspraktische Anwendbarkeit' der Themen und Methoden im Mathematikunterricht und schafft so einen eigentümlichen Bereich von angeblich angewandter Mathematik[13]. Diese eigens erfundene Schulmathematik hat in der Tat kaum noch eine Berühung mit 'realer Mathematik' — weder mit der der Gegenwart noch mit der vergangener Zeiten. Und sie vermittelt in Bezug auf Inhalt und Methodik kaum noch Aspekte der forschenden Disziplin Mathematik, aber auch nur eine blasse Karikatur der mathematischen Rechenkunst im Bereich der tatsächlichen Anwendungen. Als Gegenbewegung zum Bourbakismus der 1960er und 70er Jahre und getrieben durch die derzeit fast allgegenwärtige Ökonomisierung gesellschaftlicher Bereiche ist diese Überbetonung der Nützlichkeit der Mathematik zwar erklärbar, sie bezieht sich jedoch auf ein extrem defizitäres Bild der Mathematik. Zudem sind — analog zur meist armseligen Karikatur von for-

12. Auch werden in der Schule historische Kulturtechniken erlernt, die längst durch ihre mechanisierten und professionalisierten Analoga ersetzbar geworden sind. Der Existenz von Korrekturprogrammen und Datenbanken zum Trotz werden Orthographie und Vokabeln gelernt, trotz der Verfügbarkeit von Mopeds oder Elektrofahrrädern trainiert man den Fünftausendmeterlauf. Und in gleicher Weise bedeutet etwa die Fähigkeit zum Kopfrechnen eine Facette der Entfaltung menschlicher Freiheit — auch wenn dies Taschenrechner und Registrierkassen scheinbar mühelos, zuverlässig und viel schneller verrichten können.

13. Dem entspricht das schulische Training im Bedienen eines Gerätes, das praktisch nirgendwo sonst eingesetzt wird, das nur für den Schulgebrauch produziert wird und für das eigens Aufgabenformate konfektioniert werden — der (graphische) Taschenrechner.

maler Präzision und Mengenlehre im Rahmen von *new math* — die sogenannten Anwendungen fast immer im schlechtesten Sinne artifiziell, eigentlich nur mühselig und vielfach in mangelhafte Sprache eingekleidete Standardaufgaben. Ein solches Curriculum dient weder der Reinen Mathematik, die im Unterricht allenfalls in kaum noch erkennbaren Spuren vorkommt, noch der Angewandten Mathematik, die völlig unglaubwürdig präsentiert wird. Und selbst wenn ein konkreter Anwendungsbezug gelingt, so bleibt doch festzuhalten, dass Mathematik sehr viel mehr ist als eine 'Schlüsseltechnologie' für Naturwissenschaft und Technik! Sie ist eine mehr als 3500 Jahre alte menschliche Kulturleistung, sie ermöglicht auf besondere Weise eine Anschauung des Unendlichen und einen rechnerischen Umgang mit diesem, sie ist Paradebeispiel für das Wirken der menschlichen ratio und damit für exakte Wissenschaft, sie ist künstlerisch-architektonische Entfaltung geistiger Konstruktionen, sie ist spielerische Erkundung widerspruchsfreier Begriffswelten und vieles andere mehr. Schon aus diesem Grunde ist die derzeitige einseitige 'Anwendungsorientierung' der schulischen Curricula verfehlt. Und an dieser Stelle mag nun auch die Frage am Platze sein, warum man den Unterrichtsstoff nicht in einer authentischeren (wenn auch historischen) Gestalt kennenlernen darf.

4 Epilog: Mathematikgeschichte im Mathematikunterricht — eine lange Geschichte von gelingenden Ausnahmen und scheiterndem Alltag

> Die hohe Bedeutung geschichtlicher Forschungen in der Wissenschaft, wie insbesondere der große Wert, der in der Verwendung geschichtlicher Mitteilungen auch bei dem mathematischen Unterricht ruht, ist so allgemein anerkannt, daß es sich erübrigt, an dieser Stelle näher darauf einzugehen. Johannes Tropfke (1866-1939)[14]

Implizite wie explizite Möglichkeiten zu einer Integration der Mathematikgeschichte in den Mathematikunterricht sind inzwischen vielfältig beschrieben und auch erprobt. Dennoch bleibt es offenbar weitgehend bei (mehr oder minder konkreten) theoretischen Überlegungen und Modellversuchen; eine Umsetzung in den Normalverlauf schulischer Bildung scheint nahezu ausgeschlossen[15]. Die Geschichte der

14. J. Tropfke: Geschichte der Elementarmathematik. Erster Band. Rechnen. Berlin 1930, p.III.
15. Es sei gerade an dieser Stelle immerhin erwähnt, dass es deutschlandweit zumindest einige Hochschulen gibt, an denen die Mathematikgeschichte eine obligatorische Komponente des Lehramtsstudiums darstellt (vgl. etwa Beutelspacher et al. 2011).

Bemühungen um eine Integration der Mathematikgeschichte ist daher zugleich eine Geschichte gelingender Bildung im Modell und verpasster Chancen im Großen, aber auch eine Geschichte resignierter Kommentare über die Ignoranz der Umgebung. Hier sollen nur wenige dieser Stimmen exemplarisch zu Worte kommen. Vollrath etwa plädiert 1968 für eine direkte genetische Methode und verweist zugleich auf den Mangel an Zeit und historischer Bildung auf Seiten der Lehrenden:

> Die direkte genetische Methode erfordert natürlich viel Zeit im Unterricht. Sie setzt auch einen Lehrenden voraus, der selbst in der Entwicklungsgeschichte der Mathematik zu Hause ist. Darin sieht H. Behnke (1954) die Ursache dafür, daß diese Methode an der Hochschule kaum praktiziert wird. (...) Auch die Schule praktiziert kaum die genetische Methode. Sie vergeudet damit eine Quelle für Motivationen von der Sache her. (Vollrath 1968)

Mit Verweis auf andere Fächer beklagen Artman und seine Koautoren 1987, dass die Mathematik exzellente Chancen versäumt:

> Weder der Musiklehrer noch der Deutschlehrer lassen sich von den Schwierigkeiten abschrecken: Die Schüler lernen an erstklassigen Beispielen unserer kulturellen Tradition, ihren Geschmack zu bilden. Hier hat die Mathematik ein Defizit, in der Schule wie auch in weiten Bereichen des Hochschulunterrichts. (Artmann et al. 1987)

Tatsächlich ist die hier angesprochene Thematik einer Geschmacksbildung im Mathematikunterricht von größter Bedeutung; sie steht von vornherein und heilsam quer zur derzeit dominierenden Perspektive, Mathematik sei im wesentlichen eine nützliche (Kultur)technik, für die ästhetische Kriterien grundsätzlich irrelevant sind.

Jahnke und Koautoren stellen 1996 fast schon resignierend fest:

> History (...) has an indispensable role (...) However, in spite of these well-established reasons in favour of introducing history into the mathematics classroom, both in schools and universities, the idea has not been very successful, as yet. (...) Somehow, history is considered alien to everyday classroom work. (Jahnke et al. 1996, p. VIII)

Zusammenfassend resümieren schließlich im Jahr 2014 Mosvold und Koautoren mit Blick auf einen Aufsatz von Arcavi aus dem Jahr 1982:

> Furthermore, the role of history of mathematics in general mathematics education research appears equally limited today as it was back then. (Mosvold et al. 2014)

Es scheint also an der Zeit zu sein, nochmals prinzipiell die Frage zu stellen, warum die Mathematikgeschichte in ihrer Rolle für die Schulbildung in so dramatischer Weise unterschätzt wird. Warum ist es so plausibel für die meisten Mathematiker, aber auch für Mathematikdidaktiker und -pädagogen, von einem historischen Zugang vollständig abzusehen?

Eine erste Antwort wird auf die — wiederum historisch-kontingente — derzeitige Situation der universitären Wissenschafts- und insbesondere Mathematikgeschichte Bezug nehmen. In Deutschland gab es zumindest seit dem 19. Jahrhundert eine intensive und prominent besetzte Tradition in diesem Feld. Moritz Cantor (1829-1920) bekleidete seit 1860 die erste Professur für Mathematikbeschichte; seine vierbändige Mathematikgeschichte (Leipzig 1880-1908) galt lange Zeit als Standardwerk. Heute jedoch fehlt es dieser Disziplin nach einem längeren Auszehrungsprozess schon lange an den Ressourcen, die ein auch nur halbwegs facettenreiches und lebendiges wissenschaftliches Wirken ermöglichen würden (vgl. Purkert und Scholz 2009)[16]. Damit fehlen dann aber auch die Anwälte der Mathematikgeschichte im Bereich von Fachdidaktik, Lehramtsstudium und Kultuspolitik. Auch ist das Angebot an mathematikhistorischen Themen, Exkursen, Aufgaben in der aktuellen Schulbuchliteratur zwar mittlerweile überraschend reichhaltig (vorzugsweise im gymnasialen Bereich), in der Qualität allerdings selten überzeugend und in der thematischen Auswahl eher willkürlich[17].

Systematische Ursachen versucht Michael N. Fried (Fried 2001) aufzuzeigen, er stellt also die Frage, ob es überhaupt möglich sei, Mathematikunterricht und Mathematikgeschichte zu kombinieren. Nachdem er verschiedene in der Literatur diskutierte Gründe für eine solche Kombination referiert hat, verweist er auf das seines Erachtens schlichte, aber zentrale Problem des Zeitmangels im Mathematikunterricht, das zu einem grundsätzlichen Dilemma führe. Lehrende seien "committed to teaching modern mathematics, to teaching the kind of mathematics our students will need in their later study of mathematics, science, or engineering" (Allmendinger et al. 2015). 395]Fried. Da dieses Ziel Priorität besitze, müssten sich geschichtliche Aspekte unterordnen und würden stets nur als Mittel zu diesem Zweck erscheinen. Das mache jedoch den historischen Zugang notwendig anachronistisch, in grob verfälschender Weise nur auf den gegenwärtigen Zweck und die gegenwärtige Gestalt bezogen; Geschichte der Mathematik werde zu "Whig history". Am Beispiel der Geschichte des Funktionsbegriffs illustriert er dies Phänomen und resümiert:

16. Die an ganz wenigen Standorten in Deutschland noch immer auf hohem Niveau betriebene mathematikhistorische Forschung soll damit keineswegs gering geachtet werden, ganz im Gegenteil. Von den wenigen hier tätigen Personen kann allerdings nicht die (wissenschafts- und kultuspolitische) Vertretung einer ganzen Disziplin erwartet werden.

17. Vgl. Schulte (2016).

> (...) by assuming that Euler and Bernoulli's 'function' is like our function we miss Euler and Bernoulli's grave concerns and see only how their ideas fall short of our own. (Fried 2001, p. 397)

Ließe man sich aber tatsächlich auf eine historisch ordentliche Interpretation der Überlegungen etwa eines EULER ein, so würde dies dem Verständnis der Schülerinnen und Schüler für die moderne Konzeption gerade nicht helfen. In diesem Dilemma bleibt dem an einer Integration der Mathematikgeschichte interessierten Lehrenden nur die Wahl:

> either (1) remain true to one's commitment to modern mathematics and modern techniques and risk being Whiggisch, i.e., unhistorical in one's approach, or, at best, trivializing history, or (2) take a genuinely historical approach to the history of mathematics and risk spending time on things irrelevant to the mathematics one has to teach. (Fried 2001, pp. 397)

Für denjenigen, der die Geschichte der Mathematik ernsthaft unterrichten möchte, bleibe nur eine "radical accomodation", der Unterricht wird dem mathematikhistorischen Ziel radikal angepasst und wird so zu einem Lesen und Interpretieren der Originalquellen mit dem Anspruch, sie aus ihrer Zeit heraus zu verstehen. Das eigentliche Ziel des Mathematikunterrichts sei jedoch die Vorbereitung darauf, "to be competent scientists and engineers by teaching them to use matheamtics with some understanding of what they are doing" (Fried 2001, pp. 401) und hier empfehle sich eine "radical separation". Mathematikgeschichte bleibe also besser radikal getrennt vom 'eigentlichen' Mathematikunterricht, der sich auf "modern mathematical techniques" beziehen müsse. Das so vermittelte Mathematikbild sei dann jedoch in fataler Weise gespalten: Einerseits sei die Mathematik als gewachsene und veränderliche Kulturleistung tatsächlich verschieden in verschiedenen historischen Perioden, sie habe verschiedene Motivationen und Interpretationen ihrer grundlegenden Gegenstände — dieses Bild vermittle der mathematikhistorische Unterricht — andererseits sei sie zeitlos und absolut — so vermittelt im regulären Mathematikunterricht (vgl. Fried 2001, pp. 404). Auflösen lasse sich diese Schizophrenie nur, wenn man auch die moderne Mathematik nicht als zeitlos wahr betrachte und unterrichte, sondern als ein mächtiges für die heutigen Zwecke nützliches Hilfsmittel (vgl. Fried 2001, pp. 405); aus der "Geschichtsklasse" könne man dann zudem ein nützliches Kontingenzbewusstsein mitnehmen, dass Mathematik weiter veränderbar und entwickelbar sei.

Die hier nur sehr knapp skizzierten Überlegungen sind sicherlich bedenkenswert; das grunsätzliche Problem einer Funktionalisierung der Geschichte wird klar benannt und ebenso klar die Schwierigkeiten, wenn eine ernsthafte historische Diskussion den kognitiven Zielen im aktuellen Mathematikunterricht helfen soll. Wer sich dieser Problematik nicht stellt, wird vermutlich immer wieder auf vorprogrammierte Frustrationen auflaufen. Allerdings möchte ich hier abschließend — gerade auch in Bezug auf den schulischen Gebrauch — einige kritische Anfragen an die Position Frieds richten. Zunächst sei nochmals daran erinnert, dass die schulische Mathematik keineswegs moderne Mathematik ist und dass nur *eine* Facette schulischer Bildung in Mathematik die Vorbereitung auf ein Mathematikstudium, und *eine* weitere die auf ein Naturwissenschafts- oder Ingenieur-Studium ist. Mit Bezug auf die Klagen, Abiturienten seien nicht hinreichend auf das Studium technischer Fächer vorbereitet, möchte ich hinzufügen, dass die hierzu nötigen, spezifischen rechnerischen Fähigkeiten, die weder allgemeinbildenden Charakter haben noch der wissenschaftlichen Mathematik angehören, allemal später und fachspezifisch an den Hochschulen trainiert werden können und sollten. Die Opposition aktuelle Mathematik vs. Mathematikgeschichte scheint mir also für den Schulbereich gar nicht von grundlegender Relevanz zu sein. Darüber hinaus ist die dargestellte Frontstellung von hinderlicher Historie und gewinnbringender Geschichtsklitterung zwar erhellend und als Warnung ernstzunehmen, übersieht jedoch die vielen Kompromisse, die Schulbildung in Bezug auf Wissenschaftlichkeit ohnehin eingeht und eingehen muss. Den Graubereich, besser gesagt: die vielfarbige Palette der Mischungen und Kontrastierungen von historischem und systematischem Zugang sollte man nicht geringschätzen. Und schließlich darf die Frage gestellt werden, ob die von Fried bevorzugte anti-platonistische Haltung und der daraus resultierende Machtpositivismus — Mathematik ziele nicht auf Wahrheit, sondern auf Macht und Nutzen — wiederum nur *eine* Facette dieser Wissenschaft betont (die derzeit sicherlich stärker im Fokus ist als in früheren Zeiten) und ihr bildender Wert vielleicht auch darin bestehen kann, dass sie gerade auch einen Kontrast zu dieser Auffassung nahelegt (vgl. Nickel 2015).

Literaturverzeichnis

Allmendinger, H., G. Nickel und S. Spies. 2015. Original Sources in Teachers' Education. Possible Effects and Experiences. *Proceedings of the 7th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education:* 551–564.

Artmann, B., D. Spalt und W. Gerecke. 1987. Transzendenzbeweis für e gestern und heute. *Mathematische Semesterberichte* 34:187–219.

Beutelspacher, A., R. Danckwerts, G. Nickel, S. Spies und G. Wickel. 2011. *Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten.*

Fried, M. 2001. Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education* 10:391–408.

Heymann, H. W. 1996. *Allgemeinbildung und Mathematik.* Basel.

Jahnke, H.N., N. Knoche und M. Otte. 1996. *History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences.* Göttingen.

Krömer, R. 2015. Die Geschichte der Mathematik aus philosophischer Sicht. *Der Mathematikunterricht* 61 (6): 38–43.

Mosvold, R., A. Jakobsen und U. Jankvist. 2014. How mathematical knowledge for teaching may profit from the study of history of mathematics. *Science & Education* 23:47–60.

Purkert, W., und E. Scholz. 2009. Zur Lage der Mathematikgeschichte in Deutschland. *Mitteilungen der DMV* 17 (4): 215–217.

Rathgeb, M., M. Helmerich, R. Krömer, K. Lengnink und G. Nickel, Hrsg. 2013. *Mathematik im Prozess. Philosophische, historische und didaktische Perspektiven.*

Schulte, L. 2016. Eine Querschnittsanalyse zur Rolle der Mathematikgeschichte in aktuellen Schulbüchern. *Erscheint in: SieB — Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik* 7.

Vollrath, H.-J. 1968. Die Geschichtlichkeit der Mathematik als didaktisches Problem. *Neue Sammlung* 8:108–112.

Lewis Carroll, die Schildkröte und Achill. Ein unendlicher logischer Diskurs auf drei Seiten

Martin Rathgeb

1 Narration einer Paradoxie als Parabel

> „Lewis Carroll hat in dem Gespräch zwischen Achill und der Schildkröte auf schön vertrackte Weise vorgeführt, daß der betreffende subjunktive Satz die Geltung der Schlußregel nicht *begründet*, sondern bloß *artikuliert, und zwar unter der Voraussetzung* der Anerkennung bzw. der Berechtigung des *modus ponens* in bezug auf alle Subjunktions- bzw. ‘Implikations’sätze. [. . .] Kurz, die empraktisch in ihrem Gebrauch als beherrscht unterstellte Regel „*modus ponens*“ macht es allererst möglich, bedingte Schlußregeln in der Form von Subjunktionen satzartig zu artikulieren.“ (Stekeler-Weithofer 2000, 113f.)

Lewis Carrolls „neue Unendlichkeitsparadoxie [. . .] verdiente, weit besser bekannt zu sein“, darauf verweist Douglas R. Hofstadter in und mit seinem Kultbuch *Gödel, Escher, Bach* (1979), für das und in dem Carrolls Parabel konzeptionell und inhaltlich „eine wichtige Rolle spielt“ (Hofstadter 2003, 31). Dabei wurde Carrolls kaum mehr als zwei Seiten umfassender Artikel zwischenzeitlich, nämlich 1995 zu Ehren der 100. Jährung seiner Erstveröffentlichung, erneut in Mind abgedruckt, genauer: Er ist unter dem Titel „What the Tortoise said to Achilles“ erschienen in Mind (October 1895) IV (14): 278-280 und in Mind (October 1995) 104 (416): 691-693 – letzterenfalls begleitet von kommentierenden Artikeln.[1]

1. Veröffentlicht ist die Parabel auch in (Carroll 1939, 1104-1108). Eine deutsche Übersetzung von H. Thomas ist zugänglich unter `http://www.enterag.ch/hartwig/schildkroete.pdf`.

Ließ Zenon in einer seiner Bewegungs-Paradoxien den mythischen Helden Achilles in einem fiktiven, mutmaßlich nie endenden sportlichen Wettkampf gegen eine Schildkröte antreten, so verwickelt Carroll die beiden Kontrahenten in einen fiktiven, mutmaßlich nie endenden intellektuellen Schlagabtausch, einen Dialog übers Argumentieren: *einen unendlichen logischen Diskurs.* Neben oben zitiertem Votum von Pirmin Stekeler-Weithofer ist auch folgende Lesart der als Parabel gestalteten Paradoxie möglich:

> „Dass es keineswegs einfach, ja sogar unmöglich ist, einen intelligenten und gutwilligen, aber ‚formal-störrischen' Diskurs-Partner zum Anwenden des *Modus ponens* zu zwingen, zeigt Charles Lutwidge Dodgson, alias Lewis Carroll, in einem ebenso amüsanten wie tiefsinnigen und anregenden Aufsatz an Hand eines fiktiven Diskurses zwischen Achill und einer Schildkröte." (Nickel 2017, Abschnitt 4)

Carrolls Paradoxie in der Gestalt einer literarisch anspruchsvollen Parabel liegt im überraschenden, denn unerwarteten bzw. unangepassten Verhalten der Schildkröte, die sich im Dialog mit Achilles durchaus einfühlsam, weitsichtig und wortgewandt zu geben weiß, sich aber auch paradox verhält. Im Kern geht es dabei um ihr Verhalten gegenüber bestimmten Sätzen, die in einem mathematischen Kontext stehen: Als wahr akzeptiert sie zunächst die beiden geometrischen Sätze A und B und dann sukzessive auch noch weitere Sätze, genauer: hypothetische Satzgefüge, C, D, E etc., die allesamt nach einem offensichtlichen Schema gebildet sind:

A „Things that are equal to the same are equal to each other."

B „The two sides of this Triangle are things that are equal to the same."

C „If A and B are true, Z must be true."

D „If A and B and C are true, Z must be true."

E „If A and B and C and D are true, Z must be true."

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

Paradoxerweise akzeptiert die Schildkröte trotz alledem, hinsichtlich nur endlich vieler auf B folgender Sätze, den Schlusssatz Z (noch immer) nicht als wahr:

Z „The two sides of this Triangle are equal to each other."

Diese Unendlichkeitsparadoxie ist mittlerweile unter verschiedenen Namen bekannt, wie bspw. *Paradox der Schlussfolgerung*, *Inferenz-Paradoxie* und *Carroll-Paradoxie* und zudem in Aufsätzen und Büchern vielfach besprochen. So weisen von den 21 Seiten des Aufsatzes (Engel 2012) immerhin zwei Seiten Sekundärliteratur aus und es ließ sich sein Autor über eine Dekade lang vom Primärtext ein Forschungsthema vorgeben, nämlich an „einer Theorie der kausalen und rationalen Kraft unserer logischen Gründe“ zu arbeiten. Der Primärtext selbst kommt auf den 21 Seiten aber kaum zu Wort, zitiert werden ca. 4 Sätze. Das irritiert, insofern mehrere Drehungen und Wendungen im Text m. E. nicht adäquat berücksichtigt werden. Darauf, also auf den Primärtext selbst, will ich im Folgenden genauer eingehen als auf die Sekundärliteratur, will ihn präsentieren als begeisterndes, als anregendes einführendes Lehrstück (der Philosophie) philosophischer Logik, in dem zentrale logische Begriffe und Figuren sowie das Ineinandergreifen von Mathematik und Logik lebendig illustriert werden. Obwohl Lewis Carroll im vorletzten Absatz seiner Parabel der Schildkröte an Achill gerichtet die Bitte in den Mund legt: „considering what a lot of instruction this colloquy of ours will provide for the Logicians of the Nineteenth Century“ (Carroll 1995, 693), gilt mein Interesse nicht einer solchen heutzutage historischen Perspektive, sondern systematischen Fragestellungen zum Text aus heutiger Perspektive. Folgendem Votum über „Lewis Carrolls rätselhaftes Stück“ (Engel 2012, 1014) ist meines Erachtens kaum zu bestreiten:

> „Es scheint viele Fragen aufzuwerfen. [. . .] Es ist nicht leicht zu sagen, was die Bedeutung der Erzählung sein könnte. Es gibt mindestens vier Lehren, unabhängig davon, ob Carroll seine Geschichte selbst so verstanden wissen wollte.“ (Engel 2012, 1014)

Dabei sehe ich mich an Kants Votum erinnert, wonach *ästhetische Ideen*, gewisse Vorstellungen der Einbildungskraft, zwar zum Denken anregen, aber begrifflich nicht voll erfasst werden können; vgl. Immanuel Kant, *Kritik der Urteilskraft*, § 49:

> „Nun behaupte ich, dieses Prinzip [*Geist*, in ästhetischer Bedeutung; M.R.] sei nichts anders, als das Vermögen der Darstellung ästhetischer Ideen; unter einer *ästhetischen Idee* aber verstehe ich diejenige Vorstellung der Einbildungskraft, die viel zu denken veranlaßt, ohne daß ihr doch irgendein bestimmter Gedanke, d. i. *Begriff*, adäquat sein kann, die folglich keine Sprache völlig erreicht und verständlich machen kann. [. . .] Mit einem Worte, die ästhetische Idee ist eine einem gegebenen Begriffe beigesellte Vorstellung der Einbildungskraft, welche mit einer solchen Mannigfaltigkeit der Teilvorstellungen in dem freien Gebrauche derselben verbunden ist, daß für sie kein Ausdruck, der einen bestimmten Begriff bezeichnet, gefunden werden kann, die also zu einem

> Begriffe viel Unnennbares hinzu denken läßt, dessen Gefühl die Erkenntnisvermögen belebt und mit der Sprache, als bloßem Buchstaben, Geist verbindet."

Carrolls als Paradoxie erzählte Parabel ist dieserart kunstvoll und voller „Geist", nämlich anregend und nur durch Weglassung mancher „Teilvorstellungen" auf einen (nicht „adäquat[en]") „Begriff" zu bringen. Demgemäß fordert der Text immer wieder neu heraus und es lassen sich Philosophen von Rang, aber auch Eleven immer wieder neu auf den Dialog zwischen der Schildkröte und Achill ein.[2]

In (Engel 2012) werden zunächst vier Interpretations- bzw. Erklärungsansätze skizziert, die ich folgendermaßen pointieren, aber aneinander anschließend darstellen möchte: (1) Die Schildkröte vermag nicht zwischen Prämissen, hypothetischen Satzgefügen und Schlussregeln, insbesondere dem *Modus ponendo ponens*, zu unterscheiden; (2) sie vermag vielleicht oberflächlich betrachtet die Unterscheidung zu leisten und zu akzeptieren, versteht aber genau betrachtet nicht, wie den Schlussregeln oder der Schlussregel (erwartungs-)gemäß zu handeln wäre; (3) sie wüsste vielleicht, welches Handeln Achilles erwartet, verlangt von ihm aber eine Rechtfertigung (bzw. Einsicht bez.) der anzuwendenden Regeln, insbesondere des Modus ponendo ponens; (4) sie zeigt Achilles, eine gewisse Ohnmacht des logischen Zwangs.
In (Engel 2012) wird lediglich Ansatz (4) ausführlich behandelt. Auch guten Gründen – für solche wir logische zumeist halten – folgen wir nicht so zwangsläufig, dass wir dieses Folgen nicht auch aufschieben, in Frage bzw. zur Diskussion stellen, ihm also mit Skepsis begegnen könnten. Dabei mag es unser 'gutes Recht' sein, bspw. der Logik – so wir ihren Wink überhaupt verstehen – nicht einfach blindlings und unumkehrbar zu folgen, denn evtl. zeigt die ungewollte Konklusion, dass die Schlussregel(n) bzw. Prämisse(n) vorschnell akzeptiert waren. Aber: Wie können wir zu einer solchen 'Epoche' überhaupt fähig sein? Engel hält dies für erklärungsbedürftig und versucht diesbetreffend ein Zwei-Stufen-Modell, von zunächst kausaler und des Weiteren rationaler Disposition. Der oben aus (Nickel 2017) zitierte Erkläransatz ist unter Skizze (4) zu subsumieren, weist aber in eine andere Richtung als der von Engel; die aus (Stekeler-Weithofer 2000) zitierte ist Skizze (3) zuzurechnen, aber stark an Skizze (1) angebunden.
In (Engel 2012) fällt Skizze (1) besonders kurz aus. Sie ist es, bei der ich im folgenden Abschnitt den Ausgang für meine Beschäftigung mit Carrolls Text nehmen werde. Kurz gesprochen, gebe ich dabei zu bedenken: Mathematik und (mitunter deren) Logik mögen das mehr oder minder offensichtliche *Thema* der Parabel sein. Seiner Darstellung ist eine Analyse bzw. Interpretation des Textes allerdings

2. Bspw. C. S. Peirce, Q. V. O. Quine, B. Russell, G. Ryle u. v. a.; vgl. dazu (Engel 2012, 1015). Dagegen ist die Carroll-Paradoxie in (Inhetveen 2003) als Übungsaufgabe 5.11 gestellt.

erst dann gewachsen, wenn sie formale Logik (als philosophische Disziplin)[3] und informale Logik alias Argumentationstheorie (als rhetorische Disziplin)[4] gleichermaßen *methodisch* zu berücksichtigen versteht –, andernfalls nimmt sie nämlich unter Umständen eristisches Handeln und schelmische Ironie zu ernst.

2 Gefahr interpretativer Fehlleistungen

Wie angekündigt, zitiere ich nun, von den Literaturverweisen abgesehen, Engels Skizze (1) vollständig, um nachfolgend auf eine Gefahr aufmerksam zu machen, die jeder interpretativen Beschäftigung mit Carrolls Geschichte droht.

> „Die Tatsache, dass die Schildkröte den Konditionlsatz (C) als eine stützende Prämisse braucht, zeigt, dass sie nicht imstande ist, zwischen den Sätzen (A) und (B) auf der einen und der logischen Wahrheit (C) auf der anderen Seite zu unterscheiden, und allgemeiner, dass sie nicht unterscheidet zwischen einer Prämisse und einer Schlussregel. [...] Dies ist auch Carrolls eigene Diagnose, wie sie aus einer Erklärung seines Artikels dem Herausgeber von *Mind* gegenüber hervorgeht: »Mein Paradox beruht auf der Tatsache, dass in einem Konditionalsatz [*hypothetical*] die Wahrheit der Protasis, die Wahrheit der Apodosis und die *Gültigkeit der Sequenz* drei verschiedene Aussagen sind.« Anders formuliert können wir eine Schlussregel wie den Modus ponens (MP) weder als einen Konditionalsatz, noch als eine Prämisse behandeln. Sobald wir diese Unterscheidung beherzigen, kann Carrolls Regress nicht in Gang kommen.“ (Engel 2012, 1015)

Lewis Carroll legt seine Unendlichkeitsparadoxie in Gestalt einer kurzen Parabel vor: Eine logische Argumentation in zwei bzw. unendlich vielen Schritten auf weniger als drei Seiten. Die Parabel bzw. Paradoxie ist – typisch für Carroll – literarisch ansprechend und anspruchsvoll gestaltet. Mir geht es im Folgenden nicht darum, sämtliche Stilmittel aufzuweisen, auszubreiten und hinsichtlich des Inhalts auszulegen. Für eine Interpretation scheint mir allerdings wichtig, kritisch bzw. hellhörig zu überdenken, ob die Schildkröte, wie eben zitiert, tatsächlich „nicht im Stande“ sei, zu unterscheiden zwischen einer Prämisse und einer Schlussregel,

3. Vgl. dazu die explikative Definition in (Löffler 2008, 38f.): „Die *formale Logik* ist die philosophische Disziplin, die die formalen Eigenschaften von Aussagen untersucht, sowie die Beziehungen, die auf Grund der formalen Eigenschaften zwischen Aussagen bestehen.“

4. Vgl. dazu die explikative Definition in (Löffler 2008, 39): „Die *Argumentationstheorie* ist diejenige Disziplin, die die Struktur und rhetorische Wirksamkeit natürlichsprachlichen Argumentierens untersucht, unabhängig von dessen logischer Qualität.“

und ob sie sich, wie es später zwei Mal heißt, tatsächlich in einer „missliche[n] Lage“ (S. 1015, 1027) befindet. Auch in (Engel 2012) kommen zwischenzeitlich zwei andere Lesarten zu Wort: „Gemäß der gerade diskutierten Lesart des Paradoxes ist es die Absicht der Schildkröte, uns an diesen einfachen, aber sehr wichtigen Punkt zu erinnern“ (S. 1020) und „Das offensichtliche Problem an dieser Ansicht ist gerade jenes, an das die Schildkröte nach unserer gerade diskutierten Lesart der Geschichte Achilles erinnern soll“ (S. 1021). Es ist ‘eigentlich’ die Schildkröte, welche Achill in eine „missliche Lage“ bringt, indem sie ihm – listig und willentlich – ein X für ein U vormacht. In dieser Metapher gesprochen, könnte die Schildkröte das X durchaus kennen und präzise benennen können, gute Gründe dafür, sich der Regelanwendung berechtigterweise zu entziehen, vielleicht auch gute Gründe dafür, (logische) Regeln bei Bedarf bereitwillig anzuwenden, und eine Einsicht in die besondere Rolle, die der Modus ponendo ponens dabei spielt, zwischen einer Regel- und einer Satzlogik zu vermitteln. Doch sie verleitet Achill und leitet ihn listig auf einen Holzweg. Ja, die Schildkröte ist es, die erneut Achill voraus ist, der ihr brav, einfältig bzw. machtlos hinterher trottet, die das Wort führt und ihm im übertragenen und wörtlichen Sinne (ihre Ansichten) ‘diktiert’.

Diesbetreffend halte ich für bemerkenswert, wie wir unsere Perspektive auf den Text unnötig schwächen, wenn wir ihn nur mittels formaler Logik analysieren und interpretieren und nicht auch informale Logik alias die Argumentationstheorie hinzuziehen. So ist zu bemerken, dass Achill nicht auslotet, wie stark die ihm zugewiesene Position eigentlich ist: Die Schildkröte diktiert (im übertragenen Sinne) Achill die Aufgabe „force me, logically, to accept Z as true“. An welche Mittel ist hinsichtlich „logically“ zu denken? Nur Mittel der formalen Logik oder auch solche der informalen? Darf Achill Vorgaben der Schildkröte zurückweisen, darf er ihr Vorgehen als unlogisch ausweisen? Könnte er nicht auch den Versuch wagen, ihr den Elementarsatz Z unmittelbar zur Akzeptanz vorzulegen? Zugegebenermaßen ließe sich eine solche Akzeptanz kaum erwarten. Aber vieles wäre zu erproben und auszuhandeln. Im Hinblick auf ein solches Aushandeln stellt sich dann erneut die Frage: Welche Diskursregeln gelten? Kurz, mit welchen Mitteln darf Achill einen Griff der Logik an die Kehle der Schildkröte suggerieren:

> „Logic would take you by the throat, and force you to do it!“ (Carroll 1995, 693)

Im Nachgang zu dieser metaphorischen Rede möchte ich hinsichtlich der Narration der Paradoxie als literarisch ambitionierter Parabel auf Carrolls reichen Einsatz an Stilmitteln und erzähltechnischen Elementen immerhin sparsam hinweisen. Der Erzähler und gleichermaßen die beiden Protagonisten gebärden sich teils auktorial, insofern sie über ein Wissen über die Zukunft verfügen, nämlich bspw. zukünftige ‘Erfindungen’ wie „pockets“, Euklids *Elemente*, „shorthand“, „High School“ u. ä. Weiter wird durch „the narrator […] was obliged to leave the happy pair, and did not again pass the spot until some months afterwards“ (Carroll 1995, 693) ein zweiter Erzähler ersichtlich und mit der Rede von „thousand and one“ Schritten auf die bekannte Sammlung orientalischer Geschichten in einer orientalischen Geschichte verwiesen; dabei steht die Zahl selbst dort metaphorisch für ‘ungezählt’ bzw. (quasi) unendlich viele. Die Schildkröte aber nimmt sie wörtlich und setzt mit „There are several millions more“ da noch ‘eins’ drauf. Ihre nächste Anspielung gilt zwei Phänomenen im 19. Jahrhundert, von denen sie bereits weiß: zunächst dem Diskurs der Logiker, für welche ihr Diskurs mit Achill lehrreich sein werde, und erneut auf Literatur, nämlich mittels „my cousin the Mock-Turtle“ auf die „The Mock Turtle’s Story“ in Lewis Carrolls *Alice’s Adventures in Wonderland*. Dort heißt es:

> „Then the Queen left off, quite out of breath, and said to Alice, ’Have you seen the Mock Turtle yet?’
> ’No,’ said Alice. ’I don’t even know what a Mock Turtle is.’
> ’It’s the thing Mock Turtle Soup is made from,’ said the Queen. “ (Carroll 1939, 90)

Dieses logisch-semantisch durchaus interessante Wortspiel, wonach „Turtle Soup“ durch „Mock“ nicht etwa dahingehend negiert wird, dass ‘es’ zwar eine Suppe, aber nicht aus Schildkröten oder zwar keine Suppe, aber doch ein Schildkrötengericht oder schlichtweg irgendetwas, nur nicht eine Schildkrötensuppe sei, sondern spezifiziert wird als Suppe aus (der) „Mock-Turtle“. Gespielt wird hier also damit, welchen Anwendungsbereich das (negationsartige) „Mock“ hat, was als Substanz, was als Akzidenz gilt und dass die Mock-Turtle ein Individuum ist. Die (echte) Schildkröte jedenfalls schlägt am Ende des Dialogs Achilles vor, unter einer phonetischen Anspielung auf sie selbst zu firmieren, nämlich als „Taught-Us“; im Gegenzug schlägt Achill ihr vor, zu firmieren unter „A Kill-Ease“. Durch Annahme und Umsetzung dieser Vorschläge würde offenbar ein Rollentausch anklingen.

3 Engführung der Analyse zweier Szenen

Achill und die Schildkröte betrachten drei Sätze im Beweis von Proposition 1 in Buch 1 der *Elemente* Euklids, also das erste Argument in dem für die folgenden Jahrhunderte stilbildenden Werk antiker Mathematik.

> „Well, now, let’s take a little bit of the argument in that First Proposition — just *two* steps, and the conclusion drawn from them. Kindly

> enter them in your note-book. And in order to refer to them conveniently, let's call them A, B, and Z :—
> (A) Things that are equal to the same are equal to each other.
> (B) The two sides of this Triangle are things that are equal to the same.
> (Z) The two sides of this Triangle are equal to each other.
> Readers of Euclid will grant, I suppose, that Z follows logically from A and B, so that any one who accepts *A* and *B* as true, *must* accept *Z* as true?" (Carroll 1995, 691)

Bevor wir weiter Carrolls Dialog zwischen Achilles und der Schildkröte lauschen, sollen wir m. E. tatsächlich zu Lesern Euklids werden –, andernfalls könnte sich die Schildkröte erneut, doch diesmal unbemerkt, einen *Vorsprung* verschaffen, wie sie ihn schon in Zenons Bewegungsparadoxie eingeräumt bekam, wonach selbst der aus Homers *Ilias* als schneller bzw. stürmischer Läufer bekannte Achilles eine Schildkröte nicht einholen könne, also einen ihr gewährten Vorsprung aufholen, da sie sich sukzessive, während er den alten Vorsprung durchläuft, einen neuen Vorsprung erläuft; vgl. Aristoteles, Physik VI 9.239 b 14.[5]
Das Geschehen in Carrolls Text setzt im Anschluss an das Ende dieses (endlosen?) Wettlaufs ein. Wohlgemerkt: Die im Text von Achilles begonnene Begründung, wonach der Wettlauf ein Ende fand, da die unendlich vielen Teilstrecken ja immer kleiner geworden wären, wird von der Schildkröte – durch nachfolgende Gegenfragen – unsanft unterbrochen. Wie eben angedeutet, legt Carroll mit seinem Text keinen ernsthaften Versuch einer systematischen Auflösung der Paradoxie Zenons vor. Er lässt Achilles lediglich den Hinweis vortragen, den schon der Kyniker Diogenes von Sinope gab: „*Solvitur ambulando.*", und bricht dann den heutzutage kanonisch scheinenden, doch letztlich platten Hinweis auf die Möglichkeit der Konvergenz unendlicher Reihen ab. Denn hinsichtlich der mathematischen Modellierung von Bewegung ist damit nicht viel gesagt, worauf David Hilbert und Paul Bernays in ihren *Grundlagen der Mathematik* (1968, 16) lesenswert hinweisen, und auch nicht hinsichtlich deren philosophischer Bedeutsamkeit, insofern im Gedankenexperiment das Verstreichen der Zeit einzig durch die innere, sukzessive Taktung 'gemessen' wird und dieserart ungewiss bzw. unbestimmt bleibt, ob die unendlich vielen Teilstrecken 'von außen betrachtet' in endlicher Zeitspanne durchlaufen werden, wie Pirmin Stekeler-Weithofer in seiner *Philosophiegeschichte* (2006, 170-172) ausführt. Achilles also wird, wie bereits gesagt, von der Schildkröte durch folgende Gegenfragen unsanft unterbrochen:

> „But if they had been constantly *increasing*? [...] Well now, would you like to hear of a race-course, that most people fancy they can get to

5. Vielleicht ist es diesmal Achill, der einen unbemerkten Vorsprung hat; vgl. Abschnitt 8.

> the end of in two or three steps, while it *really* consists of an infinite number of distances, each one longer than the previous one?“ (Carroll 1995, 691)

Beziehen wir nun die beiden in diesem Abschnitt aus (Carroll 1995) zitierten Stellen aufeinander und berücksichtigen zudem noch die in Abschnitt 1 zitierten Sätze C, D, E etc., so lässt sich bereits Folgendes klären: Die Rennstrecke (race-course), von der nun die Rede sein soll, ist nicht die bereits durchlaufene Strecke, sondern eine Argumentation (argument): Ihr Ende (the end of) ist die Konklusion Z, unter die zwei bzw. drei Schritte (two or three steps) sind zumindest A und B zu zählen, wobei es hieß: „just *two* steps, and the conclusion drawn from them“. Mit dem dritten Schritt, der für gewöhnlich auch noch berücksichtigt wird bzw. Beachtung findet (most people fancy), ist m. E. nicht die Konklusion Z gemeint. Hält man sich an die im Text erwähnten Schritte, so darf C als der heiße Kandidat für den dritten Schritt gelten. Geht man allerdings auf der Suche nach dem Sinn des Textes über dessen Wortlaut hinaus, so muss der Modus ponendo ponens (alternativ: die Abtrennungsregel) als wesentlicher, als entscheidender Schritt erkannt werden: Wenn man diesbetreffend guten Willens auf den Text zurückblickt, so kann das hypothetische Satzgefüge C wohl als dessen verballhornte, als dessen geradezu unkenntlich entstellte Satzvariante gelten. Diese Schlussregel, nicht aber der Satz C selbst, erlaubt es dann, die „infinite number of distances“ simultan zu durchschreiten.

Ein Vergleich von *mathematischer Induktion* und *logischem Schließen* scheint instruktiv.[6] Hinsichtlich einer Aussageform $A(n)$ beweisen wir mittels Induktionsaxiom in *zwei* Schritten, Induktionsanfang und Induktionsschritt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ gilt. Im Induktionsschritt ist zu zeigen,[7] dass das subjunktive Schema $A(n) \to A(n+1)$ gilt, im Induktionsanfang, dass $A(1)$ gilt. Dann folgt aus $A(1)$ und der Instanz $A(1) \to A(2)$ mittels Abtrennungsregel $A(2)$, aus $A(2)$ und der Instanz $A(2) \to A(3)$ mittels Abtrennungsregel $A(3)$, aus $A(3)$ und der Instanz $A(3) \to A(4)$ mittels Abtrennungsregel $A(4)$ etc. Dem Induktionsaxiom gemäß können die unendlich vielen Anwendungen der Abtrennungsregel gewissermaßen instantan erfolgen; wohlgemerkt ist dabei die Länge der Subjunktionen konstant.

Dementsprechend lädt die Schildkröte mit ihrer Rede von einer unendlichen Zahl an Teilstrecken (distances), das sind nach A und B also insbesondere die Sätze C, D, E etc., die sich allesamt noch vor Z befänden/befinden, zur Sichtweise ein, dass auch beim logischen Schließen unendlich viele Strecken alias Beweiszeilen instantan

6. Vgl. (Wolff 2009, Anhang 2) und (Wolff 2006, §§ 103-105).

7. Vgl. (Schreiber 1979, 20f.) dafür, dass der Induktionsschritt bezogen auf das *Induktionsaxiom* eine Subjunktion ist, bezogen auf das *Induktionsprinzip* eine Folgerung.

und – vermutlich deswegen für gewöhnlich unbemerkt – durchlaufen werden. Die Abtrennungsregel bzw. deren adäquate Anwendung invisibilisiert all die subjunktiven Sätze, mit welchen aber die Schildkröte Achill konfrontiert. Wohlgemerkt werden dabei die unendlich vielen (Teil-)Strecken wie von der Schildkröte behauptet immer länger: „each one longer than the previous one“. Und es kann sogar ihre Formulierung „they had been constantly *increasing*“ wörtlich genommen werden, insofern die Strecken um eine *konstante* Länge anwachsen. Denn in der Zeilenfolge C, D, E etc. unterscheiden sich die Nachfolger von ihren Vorgängern jeweils um ein „and“ zzgl. der Bezeichnung des Vorgängers.

Insofern die Teilstrecken, die Achilles im Diskurs Schritt für Schritt zu Gesicht bekommt, obwohl sie laut Schildkröte allesamt schon von vornherein da seien, immer länger werden und damit insbesondere der jeweils noch mindestens zurückzulegende Weg immer länger wird, scheint ein Vorankommen letztlich unmöglich; genauer: Die unendlichen Mühen scheinen unsinnig, insofern er die Konklusion Z und damit das Ende der Rennbahn nicht wird erreichen können. Das erinnert an zwei weitere, drastischere Bewegungsparadoxa des Zenon, deren Formulierung ich auf den Wettlauf zwischen der Schildkröte und Achill hin anpasse. Im bislang besprochenen Gedankenexperiment eines Wettlaufs zwischen Achilles und der Schildkröte ist davon die Rede gewesen, dass Achilles die Schildkröte nicht wird einholen können, da er dafür iterativ zu ihrem jeweiligen Standort gelangen müsste. In der ersten Verschärfung, gelingt es ihm nicht einmal mehr, den ersten initialen Vorsprung zu bewältigen, da er dafür sukzessiv jeweils noch bis zur Hälfte der verbliebenen Reststrecke kommen müsste. In der zweiten Verschärfung, gelingt es ihm noch nicht einmal, seinen initialen Standort zu verlassen, denn dafür hätte er regressiv die Hälfte der zurückgelegten Strecke jeweils schon zurücklegen müssen.

4 Eine mathematische Argumentation

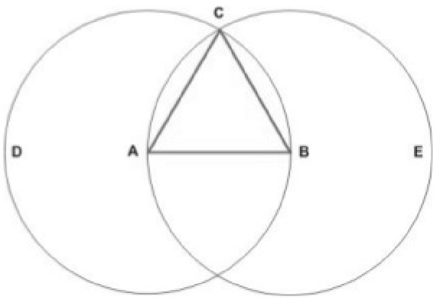
Proposition 1 von Buch I der Elemente des Euklid, auf das die Schildkröte zu sprechen kam, ist folgendes Problem:

> „*Auf einer gegebenen geraden Strecke ein gleichseitiges Dreieck errichten.*“ (Haller 2008, 3)

Dabei heißt gemäß Definition 20 ein Dreieck „gleichseitig, wenn es drei gleiche Seiten“ (Haller 2008, 1) hat und es gilt weiter nach Grundsatz 8: „Das was übereinstimmt [alias: sich deckt; M.R.] ist gleich.“ (Haller 2008, 2). Was aber ist mit der Rede von „drei gleiche[n] Seiten“ eigentlich präzise gemeint? Was ist diesbezüglich verlangt und wie kann dies gegebenenfalls gezeigt werden? Ist die Stelligkeit der

Gleichheits-Relation flexibel? Darf sie also insbesondere als dreistellig betrachtet werden? Oder ist die gemeinte Gleichheit in für uns gewohnter Weise eine *Äquivalenzrelation*, also *zwei*-stellig, reflexiv, symmetrisch und transitiv? Wohlgemerkt lautet Grundsatz 1: „Das was demselben gleich ist, ist unter sich gleich“ (Haller 2008, 1), und bezieht sich nicht nur auf Strecken. Demnach scheint Gleichheit als zweistellige Relation zu gelten und es folgt Gleichheit für zwei (vielleicht sogar $n-1$) Strecken, falls beide (bzw. $n-1$) Paarvergleiche mit einer dritten (bzw. n-ten) Strecke gelingen. Das „unter sich gleich“ bezieht sich unmittelbar nur auf die beiden (bzw. $n-1$) Strecken, mittelbar auf alle drei (bzw. n). Drei Seiten sind demnach einander gleich, falls alle drei Paarvergleiche gelingen, wofür notwendig und wegen Grundsatz 1 auch hinreichend ist, dass zwei der Paarvergleiche gelingen.

So weit zu unseren Vorüberlegungen, insbesondere Vorerwartungen, und Euklids Vorbereitungen, nun zu seinem Beweis von Proposition I.1:

> „Es sei die gerade Strecke AB gegeben. Es soll auf AB ein gleichseitiges Dreieck errichtet werden.
>
> Es ist um A mit Radius AB der Kreis BCD zu zeichnen und um B mit Radius BA der Kreis ACE. Vom Punkt C, in dem die Kreise sich schneiden, sind zu den Punkten A und B die Strecken CA und CB zu ziehen.
>
> 
>
>
> Da der Punkt A Mittelpunkt des Kreises CDB ist, ist AC gleich AB.
> Da wiederum B Mittelpunkt des Kreises CAE ist, ist BC gleich BA.
> Es wurde gezeigt, dass CA gleich AB ist, somit sind CA und CB gleich AB.
> Da dasjenige, das demselben gleich ist, auch unter sich gleich ist, ist CA gleich CB. Also sind CA, AB, BC gleich.
>
> Deshalb ist das Dreieck ABC gleichseitig und auf AB errichtet, was auszuführen war.“ (Haller 2008, 3)

Zu Anfang des Beweises wird also die Formulierung zunächst der *Voraussetzung*, dann der *Aufgabenstellung* wiederholt. Darauf folgt die eigentliche *Konstruktion*:

zunächst die Konstruktion zweier Kreise und dann die Konstruktion der beiden Strecken zwischen den Endpunkten A und B der gegebenen Strecke AB und dem bzw. einem – durch die Postulate letztlich nicht als existent und nicht als eindeutig verbürgten – Schnittpunkt C der beiden Kreise. Zwischen diesen Konstruktionen und dem *Resümee* am Ende des Beweises, wonach die Zielvorgabe erreicht ist, ist das Beweisstück zu finden, auf das die Schildkröte die Aufmerksamkeit von Achilles richtet, nämlich die rein diskursive *Argumentation*, der gemäß die drei Strecken AB, BC und CA (einander paarweise) gleich sind.

Der diskursiv-argumentative Teil des Beweises weist zunächst zwei kurze Argumente (vgl. „Da ...") dafür auf, dass „AC gleich AB" und „BC gleich BA" ist. Diese beiden Argumentationen erfolgen jeweils (subsumtiv) mittels Definition 15: „Ein Kreis ist eine ebene Figur innerhalb einer Linie, von deren Punkte zu einem besonderen Punkt innerhalb der Figur gleiche gerade Strecken zu ziehen sind"; kurz: Alle Radien eines Kreises sind (einander paarweise deckungs-)gleich.
Auf den erinnernden Einschub (vgl. „Es wurde gezeigt, ...") folgt die von Carroll bzw. der Schildkröte als Prämisse B zitierte zusammenfassende Aussage (vgl. „somit ..."), wonach „CA und CB gleich AB" sind. Die als Konklusion Z zitierte Aussage, wonach „CA gleich CB" ist, ist der dritte gelingende Paarvergleich auf Gleichheit; die drei erfolgreichen Paarvergleiche werden zusammengefasst (vgl. „Also ...") durch die Aussage, wonach die drei Strecken CA, AB, BC gleich sind. Die als Satz A zitierte Aussage ist Grundsatz 1; als Argument (vgl. „Da ...") im Beweis tritt der Grundsatz möglicherweise weniger als Satz denn als Regel auf.[8] Mit anderen Worten, gegen die Darstellung der Schildkröte könnte folgender kritische Einwand erhoben werden: Wer wie Achilles der Schildkröte zugesteht, die diskursive Argumentation im Beweis sei – im Stile formaler Beweise (vgl. Abschnitt 5) – durch die drei *isolierten* Sätze bereits adäquat reformuliert, der gewährt ihr damit im argumentativen Wettstreit der Carroll-Paradoxie wieder einen möglicherweise entscheidenden *Vorsprung.*[9] Euklids Leser bekämen/bekommen nämlich – dieser Lesart zufolge – keinen Schluss von zwei Prämissen, A und B, auf eine Konklusion, Z, zu lesen, einen Schluss, der einer Regel gemäß erfolgen würde, nach der erst noch zu fragen wäre, sondern Satz A alias Grundsatz 1 ist *Ausdruck des Schemas einer Schlussregel*, derzufolge die Konklusion Z aus der Prämisse B folgt:

> „Man kann offenbar Schluß- oder Folgerungsregeln $p_1, \ldots, p_n \Rightarrow q$ mit mehreren Prämissen generell durch die Verwendung einer Konjunktion

8. Vgl. (Nickel 2017, Abschnitt 4): „Im Rahmen der antiken Mathematik hatten wir bereits mit dem Euklidischen Axiom für die Gleichheit [D. i. Grundsatz alias Axiom 1; M.R.] eine Argumentationsregel gesehen, die explizit vorausgesetzt wird."

9. Vgl. den letzten Absatz in Abschnitt 3 für die Rede von einem Vorsprung im Wettlauf zwischen der Schildkröte und Achill und Abschnitt 8 für die Rede von einem Vorsprung in ihrem diskursiven Wettstreit.

> und des [Subjunktionspfeiles] als Sätze der Form $((p_1 \& p_2) \ldots \& p_n) \to q$ notieren und sich auf eine einzige Abtrennungsregel, den *modus ponens*, beschränken. Diese 'Erlaubnisregel' entspricht der folgenden Anweisung: Man darf von p und $p \to q$ zu q übergehen.“ (Stekeler-Weithofer 2000, 113)[10]

Gisbert Hasenjaeger nutzt in seiner *Einführung in die Grundbegriffe und Probleme der modernen Logik* für diesen Blickwechsel eine Metapher:

> „Die Terme *Satzlogik* und *Regellogik* zeigen also eigentlich nur zwei verschiedene Aspekte der Logik an. Sätze sind gewissermaßen *eingefrorene* Regeln und Regeln sind *aufgetaute* Sätze.“ (Hasenjaeger 1962, 78)

Die Folgerung von Z aus B mittels A könnte *gerechtfertigt* werden als *Subsumtion*, insofern nämlich B eine Instanz ist, welche die Anwendung von A als Schlussschema erlaubt; vgl. dazu S. 84. Der antike Leser Euklids argumentiert zwar nach explizit formulierten Axiomen alias Grundsätzen, die er auch als Grundregeln benutzt, seine Mathematik aber ist weder in formalen Syllogismen noch als strenge Satzlogik (v)erfasst. Wie aber könnte, was die Subsumtion so nahe legt, formal expliziert werden? Dafür muss ich etwas ausholen.

5 Eine logische Analyse

Im Folgenden gebe ich für eine satzlogische Lesart der bislang ausgeführten Szene Hinweise auf formale Lücken im diskursiv-argumentativen Teil des Beweises und insbesondere darauf, dass hinsichtlich des Dialogs die übliche Rede vom verweigerten Gebrauch des Modus (ponendo) ponens bzw. der Abtrennungsregel etwas vorschnell erfolgt: Skizziert wird ein *Beweissystem*, das der *Analyse des Beweises* dienen soll. Für meine Hinweise maßgeblich ist das von Alexander Prestel in *Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie* (1992), speziell: Kapitel 1.3, verabschiedete Konzept (formaler) Beweise aus einer vorausgesetzten Menge Σ von L-Formeln, die als zusätzliche (nicht-logische) Axiome verwendet werden dürfen; dabei verweist „L“ auf die vorab vereinbarte (formale) Sprache $L = (\lambda, \mu, K)$, d. h. bestimmte Grundzeichen, Terme, Formeln und Aussagen.

> „Eine Folge $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ von Formeln heißt ein *Beweis* (oder *Ableitung*) für φ_n *aus* Σ, falls für jedes φ_i (mit $1 \leq i \leq n$) gilt:

10. Wohlgemerkt kann auf die Konjunktion verzichtet werden, falls man iteriert subjungiert, es ist nämlich $(((p_1 \& p_2) \& p_3) \to q$ gleichbedeutend mit $p_1 \to (p_2 \to (p_3 \to q))$; vgl. S. 84, (Hasenjaeger 1962, 75f.) und (Wolff 2009, Anhang 2).

> **(1)** φ_i gehört zu Σ oder
>
> **(2)** φ_i ist ein *logisches Axiom* oder
>
> **(3)** φ_i ist durch Anwendung einer *logischen Regel* auf Folgenglieder mit kleinerem Index entstanden.
>
> Jede Formel φ_i nennen wir eine *Zeile* dieses Beweises.“ (Prestel 1992, 17)

Prestel vereinbart sukzessive drei Kategorien *logischer Axiome*, nämlich erstens die Instanzen *aussagenlogischer Tautologien*, zweitens zwei Schemata *quantorenlogischer Axiome* und drittens vier Schemata *identitätslogischer Axiome*.
Zum Zwecke der Analyse des Carroll-Dialogs möchte ich das erste quantorenlogische und das zweite identitätslogische Axiomenschema anführen. Seien also x irgendeine L-Variable, t irgendein L-Term und φ sowie ψ Mitteilungszeichen für L-Formeln:

> **(A 1)** $\forall x\varphi \to \varphi(x/t)$, falls t frei für x in φ
>
> **(I 2)** $x = y \to (x = z \to y = z)$

Als seine beiden *logischen Regeln* vereinbart Prestel die *Abtrennungsregel*, bei ihm – Frege und anderen folgend – Modus Ponens genannt (vgl. Abschnitt 7 bez. dieser Namensgebung), und die *Generalisierungsregel*, die ich beide anführe.

> „Der *Modus Ponens* ist eine logische Regel, die auf zwei Zeilen eines Beweises angewandt werden kann, falls eine Zeile die Gestalt $\varphi \to \psi$ und die andere Zeile die Gestalt φ hat [...]. Das Ergebnis der Anwendung ist dann die Formel ψ. Wir geben der Regel die folgende Form
>
> $$\frac{\begin{array}{c}\varphi \to \psi\\ \varphi\end{array}}{\psi} \qquad \text{(MP) [\dots]}$$
>
> Die *Generalisierungsregel* erlaubt es, von einer Zeile der Gestalt φ überzugehen zu einer Zeile $\forall x\varphi$, wobei x eine beliebige Variable ist. [...] Wir geben der Regel die folgende Form
>
> $$\frac{\varphi}{\forall x\varphi} \qquad (\forall)$$
>
> Damit ist endlich die Definition eines formalen Beweises (aus einer Axiomenmenge Σ) abgeschlossen.“ (Prestel 1992, 21)

Im Lichte dieser *Definitionen*, auf welche in Abschnitt 7 noch Erklärungen folgen werden, zeigt sich unschwer, dass die Schildkröte ohne weiteres, also bspw. ohne die Zeile C, allein mittels (MP) *nicht* von Zeile A und Zeile B auf Zeile Z schließen kann. Denn in der eben zitierten Version, die sich so auch in (Engel 2012) zzgl. der dort zitierten Literatur findet, ist die Abtrennungregel (MP) von aussagenlogischer Gestalt und garantiert *weder* den Schluss von Zeile A und Zeile B auf Zeile Z *noch* den Schluss von Zeile A und Zeile B und Zeile C auf die Zeile Z. Denn in Zeile C mag zwar ψ durch Z vertreten werden, doch gibt es im Beweis keine Zeile φ, in der die beiden Zeilen A und B schon mittels eines „and" verknüpft wären. In Prestels System für formale Beweise ist allerdings die Regel ($\wedge$) ableitbar, wonach ein Beweis mit den Zeilen φ und ψ um die Zeile $\varphi \wedge \psi$ verlängert werden darf (vgl. Prestel 1992, 24). Demgemäß dürfte und sollte Achill die Schildkröte auffordern, eine solche $\wedge$-Verknüpfung der Zeilen A und B als eine eigene Zeile C^* zu akzeptieren. Aus den Zeilen C und C^* kann dann die Zeile Z mittels der Abtrennungsregel abgeleitet werden. Dafür dürfen in der zusätzlichen Zeile C^* nicht die beiden *metasprachlichen* Bezeichner 'A' und 'B' der beiden Zeilen A und B mittels '$\wedge$' verkettet werden, sondern es müssen die mittels 'A' und 'B' bezeichneten *objektsprachlichen* Zeichenketten selbst verkettet sein. Dass in formalen Beweisen objektsprachlich präsentiert, nicht metasprachlich repräsentiert wird, ist nicht weiter verwunderlich und würde wohl auch von Achill so gehandhabt werden. Doch könnte sich die Schildkröte bereits gegenüber Euklids mathematischem Beweis und gegenüber Achills sich daran anschließender Argumentation als Syntax-Fetischist gerieren und die metasprachliche Rede von der objektsprachlichen strikt trennen. Gegebenenfalls ist ihr renitentes Verhalten verständlich, denn aus den in den hypothetischen Sätzen verwendeten Symbolen selbst, nämlich 'A', 'B', 'C', 'D', 'E' etc., folgt (alias ist ableitbar) weder das Symbol 'Z' noch die Zeile Z. Dafür muss man sich nämlich schon ein X für ein U vormachen lassen; genauer: Man muss statt der Bezeichner die bezeichneten Zeilen nehmen.[11]

Allerdings müsste, bei geeigneter Lesart der Zeilen A und B und Verwendung ableitbarer Regeln, das Zugeständnis von Zeile C nicht verlangt werden. Denn Zeile B ist durch die Zeichenkette $\mathrm{AB} = \mathrm{CA} \wedge \mathrm{AB} = \mathrm{CB}$ wohl adäquat symbolisiert, gleichermaßen Zeile A durch $(x = y \wedge x = z) \rightarrow y = z$. Werden die Generalisierungsregel ($\forall$) und die aus dem quantorenlogischen Axiom (A 1) mittels (MP) abgeleitete Regel ($\forall$B), wonach $\varphi(x/t)$ aus $\forall x\varphi$ abgeleitet werden kann, falls t frei für x in φ, alternierend dreifach angewandt, so lässt sich aus der Symbolisierung von Zeile A die Zeichenkette $(\mathrm{AB} = \mathrm{CA} \wedge \mathrm{AB} = \mathrm{CB}) \rightarrow \mathrm{CA} = \mathrm{CB}$ als neue Zeile gewinnen, deren Vorderglied die Symbolform der Zeile B ist und daher mittels (MP) abgetrennt werden kann. Demnach ergibt sich als neue Zeile die Zeichenket-

11. Vgl. Abschnitt 9 für Überlegungen, die weiter in diese Richtung gehen.

te CA = CB, also die Symbolform von Zeile Z.
Alternativ könnte Zeile A durch das identitätslogische Axiom (I 2) symbolisiert werden.[12] Mittels der Regeln (∀) und (∀B) könnte aus dieser Symbolisierung die Zeichenkette $\mathrm{AB} = \mathrm{CA} \to (\mathrm{AB} = \mathrm{CB} \to \mathrm{CA} = \mathrm{CB})$ abgeleitet werden. Aus ihr und den beiden aus Zeile B ableitbaren Zeichenketten AB = CA und AB = CB ließe sich mittels iteriertem (MP) ebenfalls die Zeile CA = CB, also die Symbolform von Zeile Z, ableiten.

Diese satzlogischen Optionen vor Augen geht es auch schlichter, nämlich mittels *regellogischer Subsumtion*: Dafür ist Zeile A zu lesen als das Folgerungsschema $(x = y, x = z) \prec y = z$, also als Ausdruck dafür, dass eine Instanz von $y = z$ aus einer Instanz der *einen* Prämisse $(x = y, x = z)$, die selbst eine Konjunktion ist, folgt, oder als das Schlussschema $x = y, x = z \prec y = z$, also als Ausdruck dafür, dass eine Instanz von $y = z$ aus Instanzen der *beiden* Prämissen $x = y$ und $x = z$ folgt.[13] Demnach folgt die Zeile Z als Anwendung der Regel A aus der Zeile B als deren Symbolform die Zeichenkette $(\mathrm{AB} = \mathrm{CA}, \mathrm{AB} = \mathrm{CB})$ bzw. $\mathrm{AB} = \mathrm{CA}, \mathrm{AB} = \mathrm{CB}$ gelten darf. Dieser Lesart gemäß hat Euklid regellogisch und diesbetreffend durchaus klar und deutlich argumentiert; auf die Abtrennungsregel konnte er in seiner Argumentation gut (und gerne) verzichten.

Wie in diesem Abschnitt behandelt, steckt in der eben ausgeführten regellogischen Subsumtion einiges an satzlogischem Aufwand.[14] Will die Schildkröte eine von Achill souverän beherrschte Formelsprache sehen, sich also lediglich objektsprachlich mit ihm verständigen? Insistiert sie lediglich dahingehend? Ich denke nicht, dass die Schildkröte dieserart sophistisch und zudem auf Satzlogik beschränkt ist. Sie gibt ihm immerhin keinen Hinweis darauf, dass sie von ihm verlangt, diese im Hinblick auf einen formalen (satzlogischen) Beweis bestehenden ‘Löcher’ zu stopfen, also die oben angesprochenen Zeilen zu ergänzen und die oben angesprochenen Regeln abzuleiten. Ihr Hinweis geht meines Erachtens tiefer. Vielleicht gibt sie sich durch ihr Verhalten als souverän gegenüber Mathematik und Logik zu erkennen; vgl. dazu Abschnitt 9.

12. Vgl. (Wolff 2006, 25): „Einen strengen Beweis, daß ein solcher Satz [›Wenn p, so wenn q, so r‹; M.R.] mit einem Satzgefüge der Form ›Wenn p und q, so r‹ gleichbedeutend ist, werde ich unten in *§ 67* vorstellen. Die beiden ›Wenn-so‹-Gefüge sind gleichermaßen geeignet, das Folgen von r aus p und q zum Ausdruck zu bringen. Sie sind miteinander gleichbedeutend.“

13. Vgl. (Wolff 2009, 183), wonach eine Folgerung aus mehr als einer Prämisse auch Schluss genannt werden darf.

14. Doch kann bei geeigneter Symbolisierung der Sätze A, B, C und Z als Aussagen A', B', C' und Z' ein formaler Beweis für Z' und damit für Z aus der Axiomenmenge $\Sigma := \{A', B', C'\}$ geführt werden. Vgl. (Prestel 1992, 26) für die Notation, wonach in der Axiomenmenge die Bezeichner der verwendeten Axiome stehen.

6 Drei Lesertypen im Vergleich

Nach ihrer Diskussion der Sichtweise eines trainierten „Readers of Euklid“ kommen Achilles und die Schildkröte auf zwei weitere Leser zu sprechen: Sie erwägen die Möglichkeit zweier weiterer Lesarten; genauer: Die Schildkröte schlägt sie vor und Achilles akzeptiert sie als durchaus *mögliche* Lesarten:

> „And if some reader had *not* yet accepted *A* and *B* as true, he might still accept the *sequence* as a *valid* one, I suppose? [...]
> And might there not *also* be some reader who would say 'I accept *A* and *B* as true, but I *don't* accept the Hpothetical'?“ (Carroll 1995, 691f.)

Wie gesagt, Achill akzeptiert beide Lesarten als möglich:

> „No doubt such a reader might exist. [...] Such a reader would do wisely in abandoning Euclid, and taking to football. [...]
> Certainly there might. *He*, also, had better take to football.“ (Carroll 1995, 692)

Wohlgemerkt formuliert Achilles bzw. Carroll hier in treffender Weise einen subtilen Unterschied. Die letztgenannten Leser sollten es beide gleichermaßen eher mit Fußball versuchen als – hierin ist der Unterschied auszumachen – mit Mathematik bzw. mit Logik. Damit ist implizit eine für die formale Logik grundsätzliche *begriffliche Unterscheidung* angesprochen, nämlich die zwischen deduktiv stichhaltigen und nur deduktiv gültigen Argumenten.

Zunächst handelt der zweite dieser Leser prima facie *unlogisch* – zumindest unlogisch im üblichen Sinne, also bezogen auf *formale* und bezogen auf mathematische Logik; obwohl sich die Schildkröte, so sie diesen Leser vertreten bzw. mimen wird, eher unangepasst als unvernünftig verhält, ihre Argumentation also durchaus nicht ohne Logik ist: So könnte sie insistieren, um eine Begründung zu verlangen, oder zwar keine Begründung verlangen, aber aufweisen wollen, wie 'schwach' logischer Zwang ist, und vielleicht werden wir dabei sogar darauf aufmerksam, dass das 'gut' ist: Es mag ein Zeichen menschlicher Freiheit sein, dass wir uns angeblicher Logik, dem logischen Zwang entziehen können, wir ihm den Gehorsam verweigern können. Das mag einerseits der Fall sein, wenn wir eine unliebsame Konklusion nicht unmittelbar akzeptieren, sondern stattdessen die Prämissen und Schlussregeln nochmals kritisch überdenken und möglicherweise korrigieren; das mag andererseits der Fall sein, wenn wir einen Schluss nicht vollziehen, an dessen Prämissen und Schlussregel wir keinen anderweitigen Fehler erkennen können, als dass seine Konklusion 'unmoralisch' ist/wäre. Die Schildkröte könnte sich allerdings auch 'einfach nur'

dem Konzept der hypothetischen Rede verwehren bzw. es gar nicht erst verstehen; vgl. dazu Abschnitt 7.
Dem ersten der beiden letztgenannten Leser, demjenigen der die Prämissen noch nicht als wahr akzeptiert, ist *kein logischer* Vorwurf zu machen: Denn er erachtet die Sequenz immerhin als deduktiv gültig; vgl. dazu folgende (explikative) Definition 3:

> „Ein Argument ist *deduktiv gültig* genau dann, wenn es aufgrund seiner Form unmöglich ist, dass zwar alle Prämissen wahr sind, die Konklusion aber falsch. Verwandte Redeweisen für denselben Zusammenhang sind, dass die Konklusion aus den Prämissen *folge*, dass sie eine *deduktive Konsequenz* der Prämissen sei, oder, dass sie *deduktiv* aus ihnen *ableitbar* sei." (Löffler 2008, 28)[15]

Wohlgemerkt lässt es die Definition dieses logischen Grundbegriffs offen, ob die Prämissen wahr oder falsch sind. Für deduktiv gültige Argumente gilt also nur der Wenn-dann-Satz: „*Wenn* sämtliche Prämissen wahr sind, *dann* ist sicher auch die Konklusion wahr." (ebd.) Formulieren wir dies nochmals etwas genauer: Ein solcher Leser aber, der die von der Schildkröte bzw. Caroll angeführten Prämissen nicht als wahr akzeptiert, verhält sich hinsichtlich der Euklidischen Geometrie als *unmathematisch*; der steigt – so simpel lässt sich das beschreiben – einfach nicht in dieses faszinierende (hypothetisch-deduktive) Spiel mit ein. Prämisse A ist – bez. auf die Geometrie Euklids – glaubwürdig, insofern sie als Grundsatz 1 *vorausgesetzt* wird, namentlich eine 'voraus'-gegangene 'Setzung' ist. Prämisse B ist in der Geometrie Euklids kein Grundsatz, sondern ein Ausdruck für zwei Aussagen über zwei Paare von Strecken: Die Aussagen sind aus Definition 15 gewonnen, die Strecken wurden konstruiert gemäß der Postulate 3 und 1 (Konstruierbarkeit von Kreis und Strecke) zzgl. einer Existenzannahme, die durch ein in Euklids *Elemente* zu ergänzendes Stetigkeits-Postulat abzusichern wäre. Kurz, Prämisse B ist (die Spielregeln wortwörtlich genommen) nicht gesichert, doch (eigentlich) unstrittig und damit glaubwürdig.
Der typische Leser Euklids dagegen erachtet dessen Argumentation, die wir nun, wie von der Schildkröte vorgeschlagen und in Abschnitt 5 in Bezug auf Prestels Beweissystem expliziert, als ein System von Sätzen alias als Satz-Sequenz A, B, Z lesen wollen, nicht nur als deduktiv gültig, sondern sogar als *deduktiv stichhaltig*; vgl. dazu die (stipulative) Definition:

> „Ein Argument ist *deduktiv stichhaltig* genau dann, wenn es deduktiv gültig ist und sämtliche seiner Prämissen wahr sind." (Löffler 2008, 34)

15. Vgl. Abschnitt 7: Dort wird *folgt logisch* als Sonderform von *folgt regelmäßig* definiert.

Im Englischen ist die hier formulierte Unterscheidung terminologisch etablierter: Die „deductively arguments“ sind die ‘deduktiv gültigen’, die „sound arguments“ die ‘stichhaltigen’. Wohlgemerkt sehen sich die antiken Mathematiker zu einer Begründung ihrer Voraussetzungen, also der explizierten Definitionen, Postulate und Grundsätze, nicht verpflichtet; vgl. folgende summarische Darstellung:

> „Die Mathematik der griechischen Antike kommt für ihre Prinzipien [. . .] nicht auf und ist dazu auch gar nicht verpflichtet[.] Es ist jedoch bemerkenswert, dass EUKLID und mit ihm die Tradition wissenschaftlicher Mathematik ihre Voraus-setzungen überhaupt so explizite formuliert. Während die Definitionen und Postulate eher die mathematischen Gegenstände und den ‘erlaubten’ Umgang, nämlich die geometrische Konstruktion, mit ihnen thematisieren, richten sich die Axiome, sofern es um die Verwendung der Gleichheit geht, bereits auf Regeln für die mathematische Argumentation. Die ‘logischen’ Argumentationsregeln werden allerdings über längere Zeit eher im Bereich philosophischer Sprachlehre diskutiert – beginnend mit PARMENIDES’ großem Lehrgedicht, in annähernder Perfektion ausgearbeitet im *Organon* des ARISTOTELES, ergänzt um den *modus ponens* durch die Stoa und in schulgerechte Form gebracht im Mittelalter“. (Nickel 2017, Abschnitt 2)[16]

7 Schematisch weitere Prämissen verlangen

Kommen wir nun wieder zurück auf Carrolls Parabel. Auf drei Seiten ist dort von drei Sätzen im Beweis von Proposition I.1. in Euklids *Elementen* die Rede und weiter von drei Lesern bzw. Lesarten dieser drei Sätze.

Der erste Leser, der Leser Euklids, akzeptiert A und B (als wahr) und damit auch Z (als wahr); genauer:[17] Ein solcher Leser würde zustimmen, dass Z aus A und B *logisch folge*, so dass einer/jeder, der A und B als wahr akzeptiert, auch Z als wahr akzeptieren *müsste*. Vgl. dazu (Wolff 2009, 182f.), wonach Z – im Hinblick auf eine Interpretation der Formeln bzw. grammatikalischen Sätze als Sätze, die einen der beiden Wahrheitswerte haben – genau dann aus A und B *regelmäßig folgt* (in Symbolform: $A, B \prec Z$), wenn es bezüglich dieser Interpretation unmöglich ist, dass jede der Prämissen und die Negation der Konklusion wahr sind, und Z genau

16. Der diesbetreffende Locus Classicus ist zweifelsohne die Gegenüberstellung mathematischer und dialektischer Wissenschaften im Liniengleichnis in Platons *Politeia* 510c-511d; vgl. dazu auch (Nickel 2017, Abschnitt 2).

17. Vgl. Abschnit 6: Dort wird *deduktiv stichhaltig* als Sonderform von *deduktiv gültig* (alias folgt) definiert; beide Unterscheidungen werden ‘innerhalb’ des *Folgens* getroffen und verlaufen ‘quer’ zueinander.

dann aus A und B *logisch folgt* (in Symbolform: $A, B \therefore Z$), wenn Z regelmäßig aus A und B folgt und „diese Folge allein auf der Definition der logischen Konstanten beruht", die in den beteiligten Sätzen vorkommen.[18] Nehmen wir getrost an, dass solche Leser Z nicht nur annehmen müssten, sondern Z (in notwendiger oder tatsächlicher Weise) annehmen: Das Argument ist ihres Erachtens deduktiv stichhaltig und zudem vollziehen sie den Schluss.

In dem Gespräch über den zweiten und dritten Leser wird allenthalben das kleine Wörtchen „if" ersichtlich bzw. hörbar, das zuvor nur ein einzelnes Mal verwendet wurde: Die Rede ist von nun ab nicht mehr von einem deduktiv stichhaltigen Schluss, der insbesondere vollzogen wird, sondern nur noch von deduktiv gültigen Schlüssen, deren bedingte Möglichkeit diskutiert wird. Kurz, die Rede wird hypothetisch:[19]

> „p ist ein *hypothetisches Satzgefüge*, d. h, gleich $H(q, r)$ – in Worten: *wenn* q, *so* r – genau dann, wenn für jede Interpretation, nach der q und r Sätze sind, die einen der beiden Wahrheitswerte haben, gilt: p ist genau dann wahr, wenn q mit Nr unverträglich ist (so daß r aus q regelmäßig folgt [in Zeichen: $q \prec r; M.R.$])." (Wolff 2006, 78)

Demnach ist p wahr genau dann, wenn der Schluss auf r aus q gültig ist. Die angesprochene ‘Unverträglichkeit’ ist die ‘Unmöglichkeit’ (alternativ: die ‘Notwendigkeit einer Negation’) der für regelmäßiges Folgen betrachteten Wahrheitswertverteilung zwischen den Prämissen und der – diesmal durch N angezeigten – Negation der Konklusion. Dabei ist zu beachten, dass das hypothetische Satzgefüge definitionsgemäß einen modallogischen Charakter hat, obwohl es nicht die *strikte Implikation* der Modallogik ist (vgl. Wolff 2006, § 44), und selbigen nur haben kann, insofern es zwischen den Prämissen und der Konklusion einen *Begründungszusammenhang* gibt. Das hypothetische Satzgefüge ist demnach – anders als eine Subjunktion – nicht wahrheitsfunktional, denn der Wahrheitswert der hypothetischen Satzverknüpfung ist nicht allein schon durch die Wahrheitswerte der Prämissen und der Konklusion bestimmt; vgl. dazu, wobei sich „solche Konditionalsätze" auf singuläre hypothetische Sätze bezieht:

> „Wir halten solche Konditionalsätze für akzeptabel, weil [bzw. falls; M.R.] wir den Übergang von der hypothetischen Annahme im Vorder-

18. In der genannten Literatur sind die beiden Definitionen – allgemeiner als obige Anwendung verlangt – einerseits für n (mit $n \geq 1$) Prämissen und andererseits sowohl für nicht-negierte als auch für negierte Konklusionen formuliert. Vgl. (Wolff 2006, § 45), wonach der Junktor ‘wenn-so’ alias ‘Nicht ist es möglich, dass die Prämissen wahr sind und zudem die Negation der Konklusion’ gleichbedeutend ist mit ‘Es ist notwendig, dass nicht die Prämissen wahr sind und zudem die Negation der Konklusion’.

19. Vgl. *Untersuchungen zur Theorie des hypothetischen Urteils* (1988) von Helmut Linneweber-Lammerskitten als diesbetreffend einschlägige Monographie.

> satz zu dem im Nachsatz Gesagten rechtfertigen können, indem wir uns auf bestimmte allgemeine Gesetzmäßigkeiten berufen [...]. Wir berufen uns also zur Begründung singulärer Konditionalsätze [...] auf bestimmte allgemeine Konditionalsätze, die Gesetzmäßigkeiten ausdrücken [...].“ (Tugendhat und Wolf 2001, 117)

Ist eine solche Gesetzmäßigkeit eine logische Wahrheit, so gibt das hypothetische Satzgefüge eine formallogische Folgerung wieder; andernfalls – bspw. bei physikalischen Gesetzmäßigkeiten oder alternativen Verlässlichkeiten – werden regelmäßige Folgerungen ausgedrückt. Dabei kann der innere Zusammenhang, der die Begründung erlaubt, formal durch ein *logisches Postulat* ‘erzwungen’ bzw. unterstellt werden, nämlich durch das *Prinzip der Beliebigkeit des zureichenden Grundes*; wird ein weiteres logisches Prinzip, nämlich das *Prinzip des ausgeschlossenen Dritten*, hinzugenommen, so folgen hypothetische Satzgefüge regelmäßig aus Subjunktionen und umgekehrt.[20] Hinsichtlich dieser Definitionen stellt sich die Frage: Versteht die Schildkröte die wenn-so-Sätze als nicht-wahrheitsfunktionale hypothetische Satzgefüge oder als wahrheitsfunktionale Subjunktionen. Letzterenfalls könnte sie den Begründungszusammenhang zwischen den beiden Teilsätzen vermissen, obwohl er durchaus da ist –, wenn man nicht nur auf die in den Sätzen verwendeten Bezeichner, sondern auch auf die bezeichneten Sätze achtet.

Wie zwischen hypothetischen Satzgefügen und Subjunktionen unterschieden werden sollte, so sollte auch zwischen Modus ponendo ponens und der Abtrennungsregel unterschieden werden:[21]

> „In Logikbüchern wird gewöhnlich nicht unterschieden zwischen $A, A \supset B \therefore B$ und $A, A \supset B \prec B$ [...]. Außerdem besteht die Gewohnheit, $A, A \supset B \therefore B$ bzw. $A, A \supset B \prec B$ mit dem *Modus ponendo ponens* zu verwechseln. Dabei wird der Unterschied übersehen, der zwischen $H(A, B)$ und $A \supset B$ besteht. Frege (siehe § 6 seiner *Begriffsschrift*) geht soweit, seine Ableitungsregel, [...], als „Modus ponens“ zu bezeichnen, als ob schließlich auch die Unterscheidung zwischen dem *Modus ponendo ponens* und dem *Modus tollendo ponens* unbeachtet bleiben dürfte.“ (Wolff 2009, 332)

Die klassischerweise *Modus ponendo ponens* genannte Ableitungsregel $A, H(A, B) \therefore B$ ist eine ‘formallogische Folgerungsregel’, die unter ihren Prämissen ein hypothetisches Satzgefüge hat. Dagegen hat die von Frege *Modus ponens* genannte

20. Vgl. dazu (Wolff 2006, § 69) und (Wolff 2009, Fußnote 12, §§ 30f., 39).
21. Im Zitat wird durch ‘$\therefore$’ *logisches Folgen* angezeigt, durch ‘$\prec$’ *regelmäßiges Folgen*, durch ‘$\supset$’ das wahrheitsfunktionale Bedingungsgefüge (sog. *Subjunktion*, materiale Implikation etc.) und durch ‘H’ das nicht-wahrheitsfunktionale Bedingungsgefüge (sog. *hypothetisches Satzgefüge*).

Ableitungsregel, die in Abschnitt 5 bereits verwendete Abtrennungsregel $A, A \supset B \prec B$, unter ihren Prämissen eine Subjunktion und ist lediglich eine 'regelmäßige Folgerungsregel'.

Auf die Vorgabe der Schildkröte hin, formuliert Achill – als Lesart des zweiten Lesers – das zweite hypothetische Satzgefüge im Text zzgl. nachfolgender Verdeutlichung des Kontrafaktischen: „*if* A and B be true, Z must be true; but, I *don't* accept A and B as true.“ Die Schildkröte schließt auch nach Akzeptanz von A und B nicht auf Z, woraufhin Achill sie bittet dieses hypothetische Satzgefüge zu akzeptieren. Nach Verschriftlichung des hypothetischen Satzgefüges als Satz C, nämlich

C „If A and B are true, Z must be true.“,

akzeptiert die Schildkröte zwar die Sätze A, B und C, doch schließt sie nicht auf Z. Stattdessen ringt die Schildkröte Achill wiederholt das Zugeständnis ab, dass er auf ihr Zugeständnis angewiesen sei. In Rede und Gegenrede geht es nacheinander um die Akzeptanz von Sätzen (to accept), die Wahrheit von Sätzen (to be true) und die Einsicht in die Wahrheit eines hypothetischen Satzgefüges (to see its truth); im Einzelnen (vgl. Carroll 1995, 692):

(i) „If you accept A and B and C, you *must* accept Z."

(ii) „If A and B and C are true, Z *must* be true.“

(iii) „[I]f I failed to see its truth, I might accept A and B and C, and *still* not accept Z, mightn't I?“

Dabei äußert Achill Satz (i) ungefragt, Satz (ii) dagegen als Antwort auf die Frage der Schildkröte, weshalb sie Z akzeptieren müsse. Darauf wiederholt die Schildkröte Satz (ii), fragt dann aber bei Achill an, ob dies nicht einerseits ein neues hypothetisches Satzgefüge sei und ob es nicht andererseits sein könne, dass sie dessen Wahrheit nicht einsehe und daher zwar A, B und C akzeptieren könnte, nicht aber Z. Achill bestätigt dies und gemeinsam vereinbaren sie als weitere Prämisse:

D „If A and B and C are true, Z must be true.“

Diesmal formuliert Achill ungefragt, dass die Schildkröte nun die Prämissen und „of course“ die Konklusion akzeptiere. Ohne weitere Frage und ohne von Wahrheit oder Einsicht zu sprechen, entgegnet die Schildkröte, dass sie die Prämissen akzeptiere, sich aber weigere die Konklusion zu akzeptieren. Die Gegenrede von Achill über Akzeptanz, „Now that you've accepted A and B and C and D, you *must* accept Z!“, wird als Rede über Wahrheit zu folgendem Satz E.

E „If A and B and C and D are true, Z must be true."

In diesem Stile gehen Rede und Gegenrede weiter, wodurch sukzessive neue Prämissen vereinbart werden. Dabei wiederholt sich von Mal zu Mal implizit, was bezüglich Satz (ii) explizit geschah. Die Schildkröte lässt Achill bestätigen, dass er mit „If A and B and C are true, Z *must* be true." ein neues (another) hypothetisches Satzgefüge formuliert habe, dessen Wahrheit sie möglicherweise nicht einsähe. Stimmt Achill ihr hierin vorschnell zu? Formuliert er ein hypothetisches Satzgefüge? Benötigt er es, um auf Z zu schließen? Was würde die Schildkröte benötigen, um auf Z zu schließen bzw. schließen zu können, so sie dies wollte?

8 Der neuerliche Vorsprung: Modus ponendo ponens als Artikulation- und Vollzugsgehilfe

Pirmin Stekeler-Weithofer weist zurecht darauf hin, dass die Abtrennungsregel der Vollzugsgehilfe im Wechsel zwischen Regel- und Satzlogik, zwischen (Audrücken für) Regeln und (Ausdrücken für) Subjunktionen ist.[22]

> „Man kann nämlich *implizite Prinzipien* des Schließens, also Schlußregeln, die zunächst nur in einer (je situativ wiedererkennbaren empraktischen) Gebrauchsform 'existieren', *explizit* machen, indem man sie in der Form subjunktiver Sätze artikuliert. [...] Man kann offenbar Schluß- oder Folgerungsregeln $p_1, \ldots, p_n \Rightarrow q$ mit mehreren Prämissen generell durch die Verwendung einer Konjunktion und des [Subjunktionspfeiles; M.R.] als Sätze der Form $((p_1 \& p_2) \ldots \& p_n) \Rightarrow q$ notieren und sich auf eine einzige Abtrennungsregel, den *modus ponens*, beschränken." (Stekeler-Weithofer 2000, 112f.)

Dabei weist dann die Abtrennungsregel die *Erlaubnis* an,[23] von Sätzen der Gestalt p und $p \to q$ zum Satz der Gestalt q übergehen. Diesbetreffend ist augenfällig, dass Achill zwar die Schildkröte wiederholt auffordert, Subjunktionen anzunehmen, nicht aber fordert er dies für die Abtrennungsregel selbst. Im Wettlauf hatte die Schildkröte einen Vorsprung gegenüber Achill, im diskursiven Wettstreit dagegen, so könnte man sagen, befindet sich Achill vor der Schildkröte: Sie sind um die

22. Wohlgemerkt diskutiert er zwar selbst den Unterschied zwischen *allgemeinen* und *speziellen* logischen Sätzen/Regeln, letztere werden eigens postuliert, nutzt dafür aber nicht die in Abschnitt 7 vorgeschlagenen terminologischen Unterscheidungen: hypothetische Satzgefüge vs. Subjunktionen, Modus ponendo ponens vs. Abtrennungsregel (alias Modus ponens).

23. Vgl. (Stekeler-Weithofer 2000, 113): „Diese 'Erlaubnisregel' entspricht der folgenden Anweisung: [...]."

Abtrennungsregel nicht gleichauf. Dabei bleibt dahingestellt, ob die Schildkröte die Abtrennungsregel nicht kennt, nicht versteht, nicht vertraut oder die (geforderte) Erlaubnis einfach nicht nutzt. Sie könnte beispielsweise eine Rechtfertigung der Regel erwarten, die ihr Achill im Dialog schuldig bleibt:

> „Die Formulierung der Regel des *modus ponens* (also des Schemas $p, p \to q \Rightarrow q$) *als Satz* der Form „wenn p und wenn q, falls p, dann q" (bzw. $(p\&(p \to q)) \to q$) ist dann freilich vom Schluß- oder Folgerungsschema selbst zu unterscheiden." (Stekeler-Weithofer 2000, 113)

Demnach artikuliert Satz C des Dialogs zwar die Abtrennungsregel, begründet sie aber nicht. Einen Ansatz in Sachen Begründungsversuch könnte man darin sehen, dass zwischenzeitlich nicht mehr davon die Rede ist, ob die Sätze akzeptiert werden, sondern ob sie wahr sind. Eine geeignete Wahrheitstheorie könnte Gründe dafür liefern, die Sätze zu akzeptieren. Bemerkenswerterweise wird die Abtrennungsregel durch ihre Artikulation als Satz auch nur dann ersichtlich, wenn sie bereits als *das* 'implizite Prinzip des Schließens' (vgl. das eingerückte Zitat auf S. 91) beherrscht wird.

> „Lewis Carroll hat in dem Gespräch zwischen Achill und der Schildkröte auf schön vertrackte Weise vorgeführt, daß der betreffende subjunktive Satz die Geltung der Schlußregel nicht *begründet*, sondern bloß *artikuliert, und zwar unter der Voraussetzung* der Anerkennung bzw. der Berechtigung des *modus ponens* in bezug auf alle Subjunktions- bzw. 'Implikations'sätze[...] Kurz, die empraktisch in ihrem Gebrauch als beherrscht unterstellte Regel „*modus ponens*" macht es allererst möglich, bedingte Schlußregeln in der Form von Subjunktionen satzartig zu artikulieren." (Stekeler-Weithofer 2000, 113f.)

Dies ist eine tiefe Einsicht ins 'Räderwerk' des logischen Schließens! Der Modus ponendo ponens – als verallgemeinerte Variante der Abtrennungsregel – kann objektsprachlich formuliert werden, das nützt aber nur, falls er metasprachlich bereits beherrscht wird und akzeptiert ist. Hierin liegt, so eine weitere Moral der Parabel, wiederum auch ein Vertrauensvorschuss bzw. -vorsprung, der (in doppeltem Sinne) nicht eingeholt werden kann.

In einführenden Logikbüchern wird leider selten der Hinweis auf die *Pointe* gegeben, dass die Satzvariante einer Schlussregel nur vor dem Hintergrund des Modus ponendo ponens als der Schlussregel assoziiert erkannt werden kann. Obwohl in der Monographie (Wolff 2009, 191-194) eine Verquickung zwischen Modus ponendo ponens und hypothetischen Satzgefügen anhand historischer Bemerkungen ausgeführt wird, gibt der gleiche Autor in seinem Lehrbuch (Wolff 2006) dem Leser keinen diesbetreffenden Wink. Er betrachtet den Modus ponendo ponens als Beispiel für eine *formallogische Folgerungsregel*, deren Gültigkeit auf der Definition der aussagenlogischen Konstante 'wenn-so' beruht. Dabei gilt es zu bemerken, dass hypothetische Satzgefüge (mögliches) Folgern – hier: q aus p – für den Bedarfsfall artikulieren, deren Vollzug dann als Anwendung des Modus ponendo ponens erfolgt.

> „Die Bedeutung der logischen Konstante ›wenn ..., so ...‹ ist nach dem Sprachgebrauch, den ich oben beschrieben habe, so festgelegt, daß ›Wenn p, so q‹ für beliebige Aussagesätze p und q genau dann wahr ist, wenn q aus p folgt. Mit einer Prämisse ›Wenn p, so q‹ setzt man daher voraus, daß q aus p folgt. Verbinden wir diese Prämisse mit einer zweiten Prämisse ›p‹, d. h. mit der Annahme, p sei wahr, so folgt aus beiden Prämissen zusammengenommen – und zwar *allein aufgrund der Bedeutung von* ›wenn ..., so ...‹ –, daß q wahr ist. Ein Schluß der Form
>
> Wenn p, so q,
p,
also: q
>
> ist infolgedessen gültig unabhängig davon für welche Aussagesätze die Variablen p und q stehen. Für die Gültigkeit des Schlusses ist hier lediglich die *Schlußform* verantwortlich, die durch den Auftritt aussagenlogischen Vokabulars festgelegt ist. Diese Form allein ist das, was im vorliegenden Fall den Gebrauch von ›also:‹ in der Zeile der Konklusion legitimiert." (Wolff 2006, 26f.)

Er könnte und sollte m. E. durchaus die Pointe benennen, obwohl er eine Einführung in Logik und nicht in Philosophie der Logik vorlegen möchte, dass das Gelingen der Artikulation von Schlüssen und Schlussregeln mittels hypothetischer Satzgefüge nicht nur eine Angelegenheit der Definition ist. Just das von ihm betrachtete Beispiel eines logischen Schlusses ist dafür nämlich der springende Punkt!

> „Nachdem wir die Technik der Formulierung von Regeln der Form $p \Rightarrow q$ in der Form von Sätzen der Form $p \rightarrow q$ *modulo* der Grundregel *modus ponens* beherrschen, und wenn wir dann auch prämissenfreie Regeln der Formen $\Rightarrow p$ und $\Rightarrow$ non-p hinzunehmen, kann man jede Frage nach den (regel-)logisch oder strukturanalytisch gültigen, den formalanalytisch oder terminologisch gültigen, den material-begrifflich und empirisch gültigen *Schlußformen bzw. Folgerungen* in eine Frage nach der logischen, terminologischen, begrifflichen und empirischen

> Gültigkeit entsprechender (implikativer) *Sätze* (bzw. Aussagen) umformen. Man sollte dabei aber nicht vergessen, daß die Sätze praktisch immer als in Satzform gekleidete (Erlaubnis-)Regeln für das Folgern oder Schließen (mit oder ohne Prämissen oder Hypothesen) aufgefaßt werden können. Daher geht die Frage, was denn die Sätze 'wahr' macht, nicht (oder kaum) über die Frage hinaus, was uns zum Gebrauch einer Schlußregel (mit oder ohne Prämissen) berechtigt, bzw. welcher Übergang von Sätzen zu Sätzen als gültige Folgerung gewertet werden kann." (Stekeler-Weithofer 2000, 116)

9 Logik und Intuition: Eine notwendige Verwechslung

Michael Otte kommt in (Otte 1994) auf Carrolls Parabel unter der Kapitelüberschrift „Gegenstand und Methode im Zusammenhang – Mathematik als Beweisen" zu sprechen. Darin erfolgt eine Auseinandersetzung mit folgendem Phänomen:

> „Traditionell repräsentiert der Beweis in hervorstechender Weise ein charakterisierendes Merkmal der Mathematik, nämlich die Sicherheit ihrer Erkenntnisse. [...] Der Anspruch des Beweises, sicheres und wahres Wissen zu vermitteln, begegnet der Forderung, zu beweisen, daß dieser Anspruch des Beweises korrekt ist, und dann der Forderung, daß der Beweis des Beweises korrekt ist, usw. ad infinitum." (Otte 1994, 307)

In (Hofstadter 2003, 210) ist dies auf folgende Metapher gebracht, die *Beweisversion* der Carroll-Paradoxie: Wer ein – sprichwörtlich zerbrechliches – Ei transportieren will, der kann Vorsichtsmaßnahmen treffen. Doch können eigentlich Vorsichtsmaßnahmen getroffen werden, welche die Sicherheit des Transportguts garantieren? Nein, der größte anzunehmende Unfall ist unspezifisch und nicht kontrollierbar. Dabei setzt Carroll in seiner Parabel just den ersten Beweis im klassischsten Mathematikbuch aller Zeiten in ein kritisches Licht. Er trifft damit einen für das hypothetisch-deduktive System antiker Mathematik neuralgischen Punkt. Ein Versuch, dem Dilemma zu entkommen und Irrtümer im Denken auszuschließen, ist, das Denken anschaulich zu machen bzw. aus den 'Köpfen', dem 'Geist' o. ä. auszulagern und damit kontrollierbar zu machen: Mechanisierung, Formalisierung o. ä. *Regelungen* erfolgen; vgl. dazu Beweissysteme – wie in Abschnitt 5 betrachtet –, die unter anderem semantisches Folgen als syntaktisches Ableiten zu erfassen versuchen. Damit geraten letztlich die Ungewissheiten bzw. Probleme mit dem *Regelfolgen* und zudem die Frage in den Blick, ob Denken überhaupt Regeln folgt.[24]

> „Es gibt jedoch unabhängig von dieser Frage einen ganz anderen Einwand, der darin besteht, zu behaupten, hier liege eine Konfusion logischer Typen, eine Verwechslung des Vollzugs eines Gedankens mit seiner Beschreibung vor[. ...] Die Verwechslung der Beschreibung einer Sache mit der Sache selbst ist ein Beispiel der Verwechslung des Gebrauchs von use und mention. Auf dieser Konfusion ruht die Behauptung der zwingenden Kraft mathematisch-logischer Beweise.“ (Otte 1994, 307)

Zur Verdeutlichung seiner Ansicht, dass es zwischen einer *Anführung* (mention) und *Ausführung* (use) zu unterscheiden gilt, verweist Otte auf Carrolls Paradoxie: Eine Regel kann einerseits Thema, andererseits Rhema sein, also bspw. diskutiert oder befolgt werden. Otte weist weiter darauf hin, dass Logik – entgegen herkömmlicher Meinung – letzlich auf Intuition angewiesen ist.

> „Hier wird deutlich, daß der infinite Regreß nur zu überwinden ist, wenn der Gedanke identisch mit seinem Inhalt wäre. Gerade diese Lösung beansprucht die Intuition oder das intuitive Denken als Gegner der Logik für sich. Im berühmten »Heureka« oder Aha-Erlebnis der intuitiven Erkenntnis präsentiert sich ein Sachverhalt in intimer Identität mit der Feststellung seiner Wahrhaftigkeit. [...] Das Wissen und das Meta-Wissen, die Ebene des Wissens und die Ebene der Überprüfung und Sicherung der Objektivität des Wissens sind kurzgeschlossen. Um es anders zu sagen: Ein geistiges Urteil kommt, wie der Dialog zwischen Achill und der Schildkröte zeigt, nur zustande, wenn das Denken einen Gegenstand hat. Diese Gegenständlichkeit wird durch die Intuition repräsentiert.“ (Otte 1994, 308)

Rein logisch kommt man der Logik nicht auf die Schliche. Auf der einen Seite kann die *Regel* Modus ponendo ponens – als Satz – *angeführt* (mention), diskutiert und als akzeptabel ausgehandelt werden, auf der anderen Seite kann sie *ausgeführt* (use) werden. Dazu kann Achill die Schildkröte logisch nicht zwingen, sondern ist dbzgl. auf ihre Intuition und Bereitschaft angewiesen: Er ist es, der darauf ‘warten’ *muss*. Weiter sind die zusätzlich eingeforderten Prämissen als Versuch zu verstehen, den Beweis vom Beweis vom ... zu erbringen. Und es ist bereits ein intuitiver bzw. synthetischer, nicht ein logischer bzw. analytischer *Erkenntnis*-Akt,

24. Vgl. (Engel 2012, 1015f.) für Literaturhinweise zu diesem Aspekt.

dass der in Satz B beschriebene *Inhalt* unter den in Satz A beschriebenen fällt, also subsumiert werden kann.

Mathematik ist, so sie vom Menschen betrieben wird, weder trivial noch nur logisch. Selbst wenn es in der Mathematik die Behauptungen nur aus den Definitionen und den Voraussetzungen zu deduzieren seien, so wäre diese Analyse doch nicht ohne Synthese, nicht ohne reflektierende Urteilskraft möglich. Denn es ist wenigstens noch zum singulären der passende universale Fall zu finden, zwischen objektsprachlichen und metasprachlichen Zeichen passend (nicht) zu unterscheiden und in Verschiedenem Dasselbe zu erkennen, also die von Otte genannte Konfusion geeignet zu leisten.[25]

Der Autor dankt G. Nickel und A. Ghosh
für ihre freundschaftliche Unterstützung.

Literaturverzeichnis

Bernays, Paul, und David Hilbert. 1968. *Grundlagen der Mathematik.* Berlin u. a.: Springer.

Carroll, Lewis. 1939. *The Complete Works of Lewis Carroll.* London: Nonesuch Press.

———. 1995. What the Tortoise said to Achilles. *Mind* 104 (416): 691–693.

Engel, Pascal. 2012. Wie man einer Schildkröte widersteht. In *Welt der Gründe,* herausgegeben von Julian Nida-Rümelin und Elif Özmen, 1014–1034. Hamburg: Meiner.

Haller, Rudolf. 2008. *Euklid: Elemente (Euklides: Stoicheia).* Markgröningen: Edition Opera-Platonis, Online-Publikation. `http://opera-platonis.de/euklid/Buch1.pdf`.

Hasenjaeger, Gisbert. 1962. *Einführung in die Grundbegriffe und Probleme der modernen Logik.* Freiburg u.a.: Alber.

Hofstadter, Douglas R. 2003. *Gödel, Escher, Bach. Ein endloses geflochtenes Band.* München: Dt. Taschenbuch-Verl.

Inhetveen, Rüdiger. 2003. *Dialogische Logik. Eine dialog-orientierte Einführung.* Leipzig: Ed. am Gutenbergplatz.

25. Vgl. dazu Kapitel 14 und 15 in *Philosophie des Zeichens* (1989) von Josef Simon.

Löffler, Winfried. 2008. *Einführung in die Logik.* Stuttgart: Kolhammer.

Nickel, Gregor. 2017. Vorausgesetzt, ein Beweis überzeugt. Aspekte mathematischen Denkens.

Otte, Michael. 1994. *Das Formale, das Soziale und das Subjektive. Eine Einführung in die Philosophie und Didaktik der Mathematik.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Prestel, Alexander. 1992. *Einführung in die mathematische Logik und Beweistheorie.* Braunschweig u.a.: Vieweg.

Schreiber, Alfred. 1979. Über die vollständige Induktion und das sog. induktive Schließen. *Beiträge zum mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht* 35:20–31.

Stekeler-Weithofer, Pirmin. 2000. Schlüsse, Folgen und Begründungen. Eine regellogische Perspektive auf die Grundlagen begrifflicher und empirischer Wahrheit. In *Formen der Argumentation,* herausgegeben von Geert-Lueke Lueken, 107–127. Leipziger Universitätsverlag.

———. 2006. *Philosophiegeschichte.* Berlin u. a.: de Gruyter.

Tugendhat, Ernst, und Ursula Wolf. 2001. *Logisch-semantische Propädeutik.* Stuttgart: Reclam.

Wolff, Michael. 2006. *Einführung in die Logik.* München: Beck.

———. 2009. *Abhandlung über die Prinzipien der Logik. Mit einer Rekonstruktion der aristotelischen Syllogistik.* Frankfurt am Main: Klostermann.

Eine Querschnittsanalyse zur Rolle der Mathematikgeschichte in aktuellen Schulbüchern

Laura Schulte

1 Einleitung

Die Mathematikgeschichte ist in den letzten Jahren zunehmend in den Fokus mathematikdidaktischer Forschung gerückt (vgl. Hamann & Schmidt-Thieme, 2015, S. 63f.). Infolgedessen wird immer häufiger diskutiert, ob und wie die Mathematikgeschichte in den Mathematikunterricht und in die Lehrerbildung integriert werden sollte. Schulbücher sind damals wie heute ein wichtiges Medium des Mathematikunterrichts aller Schulformen. Sie stellen zudem ein Instrument der Verwirklichung von Kernlehrplänen und mehr oder weniger aktueller fachdidaktischer Konzepte dar. Daher drängt sich die Frage auf, ob sich die Mathematikgeschichte nicht nur im aktuellen fachdidaktischen Diskurs, sondern auch in der Gestaltung von Schulbüchern niederschlägt.
Wie die Autorin dieser Arbeit zeigen konnte, hat sich die Rolle der Mathematikgeschichte in *gymnasialen* Schulbüchern in den letzten Jahrzehnten deutlich gewandelt. Sowohl die Anzahl an mathematikhistorischen Informationstexten als auch die Anzahl an mathematikhistorischen Aufgaben ist seit den Achtzigerjahren bis zum Jahr 2010 kontinuierlich gestiegen (vgl. Schulte, 2014, S. 30f.). Es stellte sich jedoch die Frage, ob sich in *allen* aktuellen Schulbüchern eine Vielzahl von mathematikhistorischen Inhalten befindet oder ob diese eine Besonderheit der gymnasialen Schulbücher darstellen. Inwieweit werden Schülern[1] anderer Schulformen in ihren Schulbüchern mathematikgeschichtliche Inhalte präsentiert und

1. Aufgrund der Lesbarkeit werde ich im Folgenden durchgehend die maskuline Form verwenden. Gemeint sind stets Schülerinnen und Schüler, Lehrerinnen und Lehrer sowie Mathematikerinnen und Mathematiker.

gibt es qualitative Unterschiede zu gymnasialen Schulbüchern?
So wurden *alle* derzeit in Nordrhein-Westfalen zugelassenen Schulbücher dahingehend untersucht, ob sich bestimmte Teilgebiete der Mathematik oder sogar konkrete Themen häufen, ob sich strukturelle Merkmale bei mathematikhistorischen Inhalten wiederholen und ob die Intentionen ersichtlich werden, mit welchen die mathematikgeschichtlichen Inhalte dargeboten werden. Dabei wurde auch den Fragen nachgegangen, ob es qualitative Unterschiede zwischen den einzelnen Schulformen, Schuljahren und Schulbuchreihen gibt und ob allgemeingültige Tendenzen bezüglich der Rolle der Mathematikgeschichte in Schulbüchern der Primarstufe, Sekundarstufe I und Sekundarstufe II ersichtlich sind. Ausdrücklich nicht untersucht, diskutiert oder bewertet wurde der didaktische Sinn oder Unsinn der Mathematikgeschichte im Mathematikunterricht, sondern lediglich die generelle Rolle der Mathematikgeschichte in aktuellen Schulbüchern beleuchtet.
Da es sich hierbei um eine stark gekürzte Version der Originalarbeit handelt, möchte ich an dieser Stelle für Details der Analyse sowie alle Quellenanagaben auf die entsprechende Arbeit verweisen (vgl. Schulte, 2016).

2 Methodische Vorgehensweise der Analyse

Im Rahmen der Analyse wurden Schulbücher des Unterrichtsfaches Mathematik für die Grund-, Haupt-, Real- und Gesamtschulen und für das Gymnasium untersucht. Dabei habe ich mich einerseits auf das Bundesland Nordrhein-Westfalen und andererseits auf Schülerbücher beschränkt. Explizit ausgeschlossen ist somit jegliches Zusatzmaterial der jeweiligen Lehrmittel, auch wenn innerhalb des Schülerbuches direkt darauf verwiesen wird. Um eine möglichst repräsentative Querschnittanalyse zu erhalten, wurden alle aktuell durch das Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen zugelassenen Schulbücher hinsichtlich ihrer mathematikhistorischen Inhalte analysiert (vgl. Schulministerium NRW, 2016a). Da für die gymnasiale Oberstufe keine Auflistung der in Nordrhein-Westfalen zugelassenen Lernmittel existiert, wurden die aktuellen Werke der führenden Verlage Klett, Cornelsen und Schroedel analysiert. Konkret handelt es sich bei den insgesamt 285 untersuchten Schulbüchern um 137 Grundschulbücher, wobei auch einzelne Themenhefte als Schulbuch enthalten sind, 29 Hauptschulbücher, 47 Realschulbücher, 14 Schulbücher, welche ausschließlich an Gesamtschulen zum Einsatz kommen, 42 gymnasiale Schulbücher der Sekundarstufe I und 16 Schulbücher der Sekundarstufe II. Dabei ist die reale Anzahl der Real- und Gesamtschulbücher in der Analyse größer, da es mehrere Überschneidungen zwischen Haupt-, Real- und Gesamtschulbüchern gibt. Um die Entstehungssituation der jeweiligen Schulbücher hinreichend zu berücksichtigen, wurden die jeweiligen deutschlandweiten Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz sowie die aktuellen Kernlehrplänen des Landes Nordrhein-Westfalen herangezogen.

Wie einleitend bereits erwähnt, war das übergeordnete Ziel dieser Analyse die Rolle der Mathematikgeschichte in aktuellen Schulbüchern aller Schulformen und Klassenstufen zu untersuchen und so Unterschiede und Gemeinsamkeiten herauszufiltern. Um dieses Ziel zu erreichen, musste zunächst eine Vergleichbarkeit zwischen den einzelnen Lehrwerken geschaffen werden. Die grundsätzliche Strukturierungsdimension der Häufigkeitsanalyse war das Vorhandensein der Mathematikgeschichte in einer Aufgabe oder einem Informationstext. Der Begriff „Mathematikgeschichte“ umfasst im Folgenden eine Vielzahl verschiedener Themengruppen wie die „Problemgeschichte, Begriffsgeschichte, innermathematische Zusammenhänge“ und „Biographisches“ (Wußing, 2013, S. 1). Außerdem hat die Geschichte der Mathematik zahlreiche Berührungspunkte mit anderen Disziplinen, welche ebenfalls in die Kategorie „Mathematikgeschichte“ fallen. Hierzu zählen „Mathematik und Naturwissenschaften“, zum Beispiel die Untersuchungen Galileis zum Abrollen einer Kugel zur Einführung der lokalen Änderungsrate, historische Aspekte zur „Anwendung der Mathematik“ und „Mathematik als Bestandteil der Kultur“, beispielsweise Mathematik in der Kunst, wie Dürers Magisches Quadrat (Wußing, 2013, S. 1). Des Weiteren umfasst Mathematikgeschichte auch „Institutionen“ und „Organisationsformen“, wie mathematische Schulen, „Mathematik als Teil der Allgemeinbildung“, wie beispielsweise Schulmathematik in früheren Zeiten, und historische Quelltexte (ebd.). Damit ein Inhalt als mathematikgeschichtlich gewertet wurde, musste die Mathematikgeschichte auch für den Laien deutlich erkennbar sein.

Da nahezu jede Schulbuchreihe eigene Strukturen besitzt, wurden mathematikhistorische Inhalte zunächst in den beiden übergeordneten Kategorien „mathematikhistorische Informationstexte“ und „mathematikhistorische Aufgaben“ erfasst. Als mathematikhistorischer Informationstext gilt im Folgenden jeder Text, wobei auch Bilder und einzelne Worte als Text gewertet wurden, welcher eine im oben genannten Sinne mathematikhistorische Information vermittelt. Dass diese mathematikhistorische Information auch für Laien als solche erkennbar ist, kann beispielsweise durch die Nennung von Jahreszahlen oder Formulierungen wie „früher“ sichergestellt werden. Informationstexte haben dabei eine reine Informationsfunktion. Eine Aufgabe hingegen ist jegliche Form von Text, welcher eine Handlungsanweisung enthält. Als mathematikhistorische Aufgabe zählt jede Aufgabe, die selbst im bereits genannten Sinne mathematikhistorisch ist oder in deren unmittelbarerer Nähe sich ein entsprechender mathematikhistorischer Informationstext befindet. Die bloße Nennung eines Namens wie im Beispiel „Satz des Pythagoras“ ohne weitere Erläuterungen genügt nicht zur Einordnung einer Aufgabe in diese Kategorie.

Um Aussagen über das Gewicht der Mathematikgeschichte in einem Schulbuch treffen zu können, ist es elementar die Frage zu beantworten, wie viel Raum ihr zugestanden wird. Deshalb war das Ziel der quantitativen Analyse zum einen, die absolute Anzahl mathematikhistorischer Inhalte eines jeden Schulbuchs zu bestimmen und zum anderen herauszufiltern, ob es Häufungen an mathematikhistorischen Informationstexten oder Aufgaben in Schulbüchern bestimmter Schulformen, Jahrgangsstufen oder Schulbuchreihen gibt.

Neben der quantitativen Analyse gab vor allem die qualitative Analyse Aufschluss über die Rolle der Mathematikgeschichte in aktuellen Schulbüchern. Diese verfolgte sinnvollerweise die folgenden Fragestellungen:

(i) Inhalt: Welche Themen treten in Verbindung mit der Mathematikgeschichte auf? Gibt es Themengebiete oder sogar konkrete Themen, die besonders häufig vertreten sind?

(ii) Struktur: An welchen Stellen wird die Mathematikgeschichte in welcher Weise eingesetzt? Lassen sich innerhalb der beiden übergeordneten Kategorien „mathematikhistorische Informationstexte“ und „mathematikhistorische Aufgaben“ weitere Subkategorien aufgrund spezifischer struktureller Merkmale zusammenfassen?

(iii) Funktion und Intention: Mit welchen Intentionen wird die Mathematikgeschichte verwendet? Gibt es Regelmäßigkeiten bezüglich der (didaktischen) Funktion und den Intentionen der Autoren innerhalb der einzelnen Schulformen?

Im ersten Schritt der Analyse, der „Häufigkeitsanalyse“, wurden die vorhandenen Daten durch eine deduktive Kategorienanwendung strukturiert (vgl. Mayring, 2015, S. 65ff.), indem sie den Kategorien „mathematikhistorische Informationstexte“, „mathematikhistorische Aufgaben“ und „nicht mathematikhistorische Inhalte“ zugeordnet wurden, wobei letzte Kategorie verworfen wurde.

Im Anschluss daran erfolgten weitere statistische Analysen der im ersten Schritt gewonnenen Zähldaten, wie die Berechnung des arithmetischen Mittels der absoluten Häufigkeit an mathematikhistorischen Informationstexten und mathematikhistorischen Aufgaben innerhalb der Schulformen sowie innerhalb der jeweiligen Klassenstufen einer Schulform (vgl. Timischl, 2000, S. 50). Zusätzlich wurde jeweils die Standardabweichung als Maß für die Streuung der Daten herangezogen

(vgl. ebd., S. 51ff.). Im Rahmen der Analyse wurden alle zugelassenen Schulbücher einer Schulform betrachtet, sodass manche Lehrwerke sowohl bei Haupt- und Realals auch bei Gesamtschulbüchern aufgeführt werden.
Es folgte eine zweite, qualitative Inhaltsanalyse durch induktive Kategorienbildung (vgl. Mayring, 2015, S. 85ff.). Diese diente der Beantwortung der oben genannten Fragestellungen hinsichtlich Inhalt, Struktur und Intention mathematikgeschichtlicher Inhalte in Schulbüchern. Zuletzt gaben die relativen Häufigkeiten der Themengebiete und strukturellen Kategorien Aufschluss über die Anteile der einzelnen Subkategorien.
Für die Häufigkeitsanalyse war als Kodiereinheit eine zusammenhängende Aufgabe oder ein zusammenhängender Informationstext festgelegt, eine Kontexteinheit entsprach einem Schulbuch. Bei der zweiten qualitativen Inhaltsanalyse mit induktiver Kategorienbildung entsprach eine Kodiereinheit einer Teilaufgabe oder einem zusammenhängenden Abschnitt eines Informationstextes. Die Kontexteinheit blieb das Schulbuch. Aufgrund der Fragestellung der Analyse bildeten die Variablen „Inhalt“, „Struktur“ und „Funktion und Intention“ grundsätzliche Strukturierungsdimensionen der induktiven Kategorienbildung.

Die Variable „Inhalt“ umfasst die Hauptkategorien „Thema“ und „Themenbereich“. Dabei spiegelt der Themenbereich lediglich die grobe inhaltliche Einordnung entsprechend des Kernlehrplans wieder. Das Thema hingegen erfasst den mathematikhistorischen Inhalt eines Informationstextes oder einer Aufgabe so konkret wie möglich.
Die Variable „Struktur“ fasst alle strukturellen Merkmale mathematikhistorischer Inhalte zusammen. Darunter fallen zum einen alle „typographischen Merkmale“, welche „die äußere Textgestalt“ betreffen (Rezat, 2009, S. 87), wie beispielsweise jegliche Art der optischen Akzentuierung. Zum anderen sind „sprachliche Merkmale“, also „alle Eigenschaften [...], die sich auf charakteristische Formulierungsbesonderheiten [...] beziehen“, ein Bestandteil dieser Variable (ebd.). Außerdem ist auch der Bezug zu den weiteren Inhalten der Schulbuchseite, gewissermaßen die didaktische Funktion, ein Kriterium der Variablen „Struktur“. Hier ist von Bedeutung, inwieweit der mathematikhistorische Inhalt benötigt wird, um die Arbeitsaufträge der Seite zu bearbeiten. Des Weiteren ist die Platzierung des Elements im Schulbuch ein Bestandteil der Variable. Mithilfe dieser Merkmale waren 14 Hauptkategorien der Variable „Struktur“ erkennbar, welche durch alle Schulbuchreihen hinweg eine sehr ähnliche Ausprägung der verschiedenen Merkmale haben.
Bezüglich der mathematikhistorischen Informationstexte ergaben sich durch Anwendung der induktiven Kategorienbildung acht Hauptkategorien. **Einleitende Informationstexte am Seitenanfang** sind erarbeitende Informationstexte am Seitenanfang eines neuen Subkapitels oberhalb von Aufgaben. Sie sind vor allem

dadurch gekennzeichnet, dass sie Wissen vermitteln, welches die Schüler zur Bearbeitung der unterhalb des Textes platzierten Aufgaben benötigen. **Kurzinformationen am Seitenanfang** unterscheiden sich von der erstgenannten Kategorie darin, dass die transportierte Information nicht zur Bearbeitung der Seite benötigt wird, sondern lediglich thematisch einführend zu verstehen ist. Sprachlich und typographisch sind diese beiden Hauptkategorien sehr unterschiedlich gestaltet. Die dritte Kategorie besteht aus **Kurzinformationen am Seitenrand**. Diese sind kurze und prägnante Informationen in der Randspalte einer Seite. Sie sind lediglich ergänzend zu verstehen und nicht notwendig, um die Aufgaben der Seite zu bearbeiten. Die Hauptkategorie **integrierte Information** umfasst jegliche mathematikhistorische Information, welche in einen ansonsten ahistorischen Informationstext eingebunden ist. Diese integrierten Informationen sind zumeist nur einzelne Sätze mit einem kurzen mathematikhistorischen Hinweis und werden gelegentlich durch Kurzinformationen am Seitenrand begleitet. **Informationskästen** sind vor allem durch das typographische Element der Einrahmung und der damit einhergehenden optischen Hervorhebung gekennzeichnet. Dabei können sprachliche Merkmale und die Platzierung auf der Schulbuchseite sehr unterschiedlich sein. **Zusammenfassungen** befinden sich am Ende eines Kapitels, dienen der Sicherung des Gelernten und stellen eine sprachlich klar und knapp formulierte Übersicht der jeweiligen Subkapitel dar. Dementsprechend finden sich typographisch horizontal klar gegliederte Abschnitte der Subkapitel. Im Zusammenhang mit mathematikhistorischen Inhalten werden den Schülern in Zusammenfassungen beispielsweise komprimierte Sammlungen verschiedener Zahlzeichen bereitgestellt. Eine „Einführungsseite“ ist die erste Seite eines größeren Kapitels. Sie ist meist bunt, aufwendig und auffällig gestaltet und beinhaltet häufig Bilder, welche von kurzen Texten begleitet werden und auf das Thema einstimmen (vgl. Rezat, 2009, S. 96f.). Es werden zur weiteren Analyse Aufgaben und **Informationstexte auf Einführungsseiten** unterschieden. „Themenseiten“ sind optisch, meist durch auffällige Farben, hervorgehobene Zusatzseiten, welche in fast allen Schulbuchreihen zu finden sind. Als „Themenseite“ wird in der qualitativen Analyse jede fakultative Seite eines Kapitels gewertet. Dieses gilt auch, wenn die Seiten bedingt durch strukturelle Elemente des Schulbuchs „Projekt-, Methoden-, Exkursionsseiten“ oder anders genannt werden. Da diese Seiten fast immer die Eigenständigkeit der Schüler durch eine selbstständige Bearbeitung fördern sollen, sind sie zumeist durch zahlreiche Adjektive sprachlich ausgeschmückt. Auch in der Kategorie werden Aufgaben und **Informationen auf Themenseiten** unterschieden.

Neben den somit bereits beschriebenen Hauptkategorien **Aufgaben auf Einführungsseiten** und **Aufgaben auf Themenseiten**, bieten sich vier weitere Hauptkategorien hinsichtlich mathematikhistorischer Aufgaben an. Die Hauptkategorie **integrierte Übungsaufgaben** ist durch ihre Integration mathematikhistorischer Aufgaben in eine Reihe ahistorischer Aufgaben gekennzeichnet. Dabei können je nach Platzierung der Aufgabe vier weitere Kategorien unterschieden werden, welche in der Analyse nur dann berücksichtigt werden, wenn eine auffällige Häufung auftritt. Aufgaben *im Kasten* als die erste Subkategorie der integrierten Übungsaufgaben sind Aufgaben, welche zwar zwischen ahistorischen Übungsaufgaben platziert sind, jedoch optisch durch Einrahmung oder farbliche Hinterlegung hervorgehoben sind. Integrierte Aufgaben *unter Übungsaufgaben* sind zwischen Übungsaufgaben zu einem speziellen Subkapitel integriert. *Letzte* integrierte Übungsaufgaben sind Aufgaben, welche sich als finale Übungsaufgabe am Ende einer Reihe von Aufgaben befinden. Integrierte Aufgaben *unter vermischten Übungen* befinden sich in den gemischten Übungsaufgaben zu einem größeren Kapitel. **Übungsaufgaben** sind eigenständige Aufgabensammlungen zu einem Thema, wie beispielsweise mehrere zusammenhängende Aufgaben zu historischen Zahlensystemen. **Einstiegsaufgaben** sind zum einen durch ihre Platzierung am Anfang eines Kapitels oder Subkapitels und zum anderen durch ihre didaktische Funktion „auf das Thema [...] [hinzuführen]“ gekennzeichnet (Hayen, 1987, S. 336). **Testaufgaben** sind Aufgaben am Ende eines Kapitels und dienen der Überprüfung der im Kapitel gelernten Inhalte.

Eng mit dem Inhalt und der Struktur verbunden ist die Funktion des jeweiligen mathematikhistorischen Inhalts. Hier lauteten die Leitfragen der Analyse: Welche didaktische Funktion hat der Informationstext oder die Aufgabe und mit welchem Ziel bedienen sich die Autoren der mathematikhistorischen Inhalte? Vor allem in Hinblick auf die didaktische Funktion ist die Variable „Funktion und Intention“ eng mit den Kategorien der „Struktur“ verwoben, da die didaktische Funktion von Aufgaben und Informationstexten in den meisten strukturellen Kategorien bereits erfasst wird. Im Bereich der Aufgaben wird, wie oben bereits beschrieben, unter anderem zwischen Einstiegs-, Übungs- und Testaufgaben unterschieden. Unter Einstiegsaufgaben und Aufgaben auf Einführungsseiten sind dementsprechend nur „Aufgaben zum Erkunden“, welche an Präkonzepte anknüpfen und eher offen gestaltet sind, enthalten (Bruder u.a., 2015, S. 439). Testaufgaben sind „Aufgaben zum Überprüfen“ mit transparenten Leistungserwartungen, „valide[r] Operationalisierung“ und der Möglichkeit zur „Diagnose und Feedback“ (ebd.). Die weiteren Hauptkategorien enthalten sowohl „Aufgaben zum Üben“, welche die „Automatisierung und Reflexion“ fördern, „Wissensqualität“ erhöhen und „Transfer und Vernetzung“ fördern, als auch „Aufgaben zum Anwenden“, welche den „weite[n] Transfer“ stärken und „Kompetenzerleben“ ermöglichen (ebd.).
Hinsichtlich der didaktischen Funktion der Informationstexte treten vier verschiedene Kategorien auf, welche teilweise ebenfalls mit den Kategorien der Variable „Struktur“ verwoben sind. Thematisch einführende Informationstexte stimmen auf

das kommende Thema ein (Kurzinformation am Seitenanfang, Information auf Einführungsseite), erarbeitende Informationstexte stellen Wissen für kommende Aufgaben bereit (einleitender Informationstext am Seitenanfang), ergänzende Informationen vermitteln Zusatzwissen (Kurzinformation am Seitenrand) und zusammenfassende/sichernde Informationstexte fassen die Informationen eines Subkapitels zusammen (Zusammenfassung). Die mathematikhistorischen Inhalte der Kategorien, welche nicht ganzheitlich einer didaktischen Funktion zugeordnet werden können, wurden in der qualitativen Inhaltsanalyse gesondert betrachtet und gruppiert.
Neben der didaktischen Funktion wurde unter der Variablen „Funktion und Intention“ ebenfalls untersucht mit welchen Intentionen Schulbuchautoren mathematikgeschichtliche Inhalte einsetzten. Dabei handelt es sich in allen, bis auf den explizit gekennzeichneten, Fällen um die von der Autorin dieser Arbeit vermutete Intention der Autoren der jeweiligen Schulbücher, mathematikgeschichtliche Inhalte zu verwenden. Daneben überschneiden sich die Kategorien, sodass ein Inhalt in mehrere Kategorien fallen kann. Eine Bestimmung der relativen Häufigkeiten erschien daher für diesen Bereich nicht sinnvoll. Für den Bereich „Funktion der Mathematikgeschichte“ ergab sich als erste die Kategorie „Instrumentalisierung der Mathematikgeschichte“ zum Erreichen kognitiver Ziele. Hier werden mathematikhistorische Inhalte für die Vermittlung von prozess- und/oder inhaltsbezogenen Kompetenzen des jeweiligen Kernlehrplans genutzt. Die prozessbezogenen Kompetenzen sind strukturiert in die Bereiche Modellieren, Argumentieren, Problemlösen, Kommunizieren und Werkzeuge nutzen. In der Grundschule ersetzt „Darstellen von Mathematik“ den Bereich „Werkezeuge nutzen“ (vgl. KMK). Die prozessbezogenen Kompetenzen werden immer im Zusammenhang mit einer der inhaltsbezogenen Kompetenzen aus den Bereichen Zahlen und Operationen, Raum und Form, Muster und Strukturen, Größen und Messen und Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit an Grundschulen (vgl. ebd.) sowie Arithmetik/Algebra, Geometrie, Funktionen und Stochastik an weiterführenden Schulen erworben. Obwohl weder in den Beschlüssen der Kultusministerkonferenz für den Primarbereich, für den Hauptschulabschluss, für den mittleren Schulabschluss oder für die Allgemeine Hochschulreife, noch in den entsprechenden Kernlehrplänen Mathematik für das Bundesland Nordrhein-Westfalen ein expliziter Hinweis auf mathematikhistorische Inhalte zu finden ist, so nehmen die Kernlehrpläne der weiterführenden Schulen doch Bezug auf die drei Winterschen Grunderfahrungen eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts, wobei die zweite Grunderfahrung - „mathematische Gegenstände und Sachverhalte [...] als geistige Schöpfung, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art erkennen“ - eine historische Betrachtung zumindest rechtfertigen würde (Schulministerium NRW, S. 9). Die Kernlehrpläne des Schulministeriums NRW der Real- und Gesamtschule sowie der Kernlehrplan des Gymnasiums

und der Sekundarstufe II ergänzen, dass Schüler „Mathematik eine historisch gewachsene Kulturleistung“ kennen lernen sollen (S. 11).
Darüber hinaus wird die Mathematikgeschichte vielfältig unter affektiven Aspekten verwendet. Dabei beziehen sich affektive Lernziele „auf eine positive Einstellung (Attitude) der Schüler gegenüber dem Lernen im allgemeinen und dem Lernen von Mathematik im besonderen“ (Dormolen, 1978, S. 27). So kann eine „stärkere Berücksichtigung der Geschichte der Mathematik neben (oder wegen) der auflockernden Wirkung auch eine motivierende Wirkung auf die Schüler haben“ (Kronfellner, 1998, S. 43). Neben den Kategorien „Auflockerung“ und „motivationale Aspekte“ ist ein weiteres affektives Ziel der Abbau innerer, psychischer Barrieren. Hiermit ist die Entwicklung einer positiven Einstellung gegenüber der Mathematik im Allgemeinen verbunden, denn „[d]ie Erkenntnis, dass Mathematik von Menschen ‚gemacht‘ wurde, dass sie dabei zahlreiche Fehler begangen haben, uns nahe liegend erscheinende Weiterentwicklungen nicht erkannt haben, mag der oft als kühl und unmenschlich erscheinenden Mathematik ein menschlicheres Antlitz verleihen“ (ebd., S. 43f.). Dieses geschieht häufig anekdotisch, wobei „die Betonung hier auf dem biographisch Persönlichen oder dem originellen Einzelfall“ liegt (Nickel, 2013, S. 255f.).

Die dritte große Kategorie der Funktion der Mathematikgeschichte wird von den genuin historiographischen Zielen gebildet. Hierunter fallen metamathematische Lernziele, also „[d]ie Einbeziehung der historischen Entwicklung eines Begriffs oder eines Teilgebiets“ mit dem Ziel eines „besseren Verständnis dieses Begriffs beziehungsweise dieses Teilgebiets“ (Kronfellner, 1998, S. 39). Des Weiteren sind auch die Verknüpfung innermathematischer Inhalte mit ihrer Genese im Sinne eines genetischen Gebrauchs (vgl. Nickel, 2013, S. 257f.), das Aufzeigen historischer Anwendungen und die einfache Vermittlung historischer Fakten über Informationstexte oder Aufgaben genuin historiographische Ziele. Dabei kann und soll im schulischen „Mathematikunterricht [. . .] die globale Entwicklung der Mathematik nicht zum Gegenstand gemacht werden. Es kann nur um lokale, punktuelle Episoden gehen in der Absicht, einen Sinn für die historische Dimension der Mathematik zu entwickeln. Grundsätzlich verfährt Unterricht immer exemplarisch, auch bei mathematikgeschichtlichen Inhalten“ (Jahnke, 2008, S. 5). Wenn im Folgenden von einem Aufzeigen der Genese die Rede ist, sind damit immer nur einzelne Ausschnitte aus einem großen Ganzen gemeint. Außerdem ist die Schulung des Historizitätsbewusstseins eine weitere Kategorie. Dabei bezeichnet Historizitätsbewusstsein „das Wissen, daß [sic!] Personen, Dinge und Ereignisse sich in der Zeit verändern, aber auch, daß [sic!] bestimmte Dinge und Ereignisse sich nicht verändern – scheinbar in der kurzen Zeit der eigenen Lebensspanne unveränderlich sind“ (Pandel, 1987, S. 135).

Weiterhin sind auch „wissenschaftssoziologische Ziele“, bei welchen den Schülern klargemacht wird, dass die Entwicklungen der Wissenschaften „nicht unabhängig von den gesellschaftlichen Rahmenbedingungen verlaufen“ (Kronfellner, 1998, S. 40) und „kulturelle Ziele“, also das Wissen darum, dass „[a]uch Mathematik [. . .] Teil der Kultur [ist]“ und „die Vermittlung ihrer Geschichte [. . .] einen ebenso wertvollen Beitrag“ zu einer umfassenden kulturellen Allgemeinbildung leistet (ebd., S. 41), Kategorien der Variablen „Funktion und Intention“.

3 Ergebnisse der Häufigkeitsanalyse

Die folgenden Tabellen stellen die Ergebnisse der Häufigkeitsanalyse dar. Angegeben sind stets das arithmetische Mittel der absoluten Häufigkeit der mathematikhistorischen Informationstexte (vgl. Tab. 1) und Aufgaben (vgl. Tab. 2) sowie die zugehörige Standardabweichung in Klammern darunter.

Tabelle 1: Arithmetisches Mittel sowie Standardabweichung der absoluten Häufigkeit der mathematikhistorischen Informationstexte

Klassenstufe	**Grundschule**	**Hauptschule**	**Realschule**	**Gesamtschule**	**Gymnasium**	**Gymnasiale Oberstufe**
	($n = 137$)	($n = 29$)	($n = 59$)	($n = 46$)	($n = 41$)	($n = 16$)
1	0,03 (0,17)					
2	0,15 (0,43)					
3	0,41 (0,64)					
4	1,15 (1,32)					
5		2,6 (2,06)	7,1 (6,53)	7 (6,68)	7,13 (3,51)	
6		1,4 (1,36)	3,7 (3,44)	3,86 (3,56)	7,13 (4,4)	
7		0,8 (0,4)	2,58 (2,14)	2,25 (2,14)	4,88 (2,15)	
8		1,2 (0,75)	2,18 (1,11)	2,38 (0,48)	9,56 (3,74)	
9		1,67 (0,47)	6,13 (6,83)	3,89 (2,51)	8,88 (2,62)	
10/EF		2,33 (2,29)	3 (1,8)	2 (1,51)		5 (3,03)
GK						6,33 (1,25)
LK						8 (2)
Insgesamt	0,43	1,69	4	3,52	7,56	10,25

Tabelle 2: Arithmetisches Mittel sowie Standardabweichung der absoluten Häufigkeit der mathematikhistorischen Aufgaben

Klassenstufe	**Grundschule** ($n = 137$)	**Hauptschule** ($n = 29$)	**Realschule** ($n = 59$)	**Gesamtschule** ($n = 46$)	**Gymnasium** ($n = 41$)	**Gymnasiale Oberstufe** ($n = 16$)
1	0,14 (0,59)					
2	0,12 (0,4)					
3	2,26 (3,76)					
4	5,5 (5,82)					
5		12 (8,2)	21,8 (11,5)	23,14 (10,4)	21 (12,85)	
6		4 (3,1)	5,7 (4,58)	8,43 (6,67)	7,5 (4,8)	
7		1,4 (1,2)	2,75 (1,59)	2,25 (0,96)	6,5 (3,04)	
8		0,6 (0,49)	1,64 (1,72)	2,5 (2,06)	14,33 (7,55)	
9		2,33 (1,7)	9 (5,55)	5,89 (3,07)	13,25 (4,15)	
10/EF		2,83 (2,27)	5,13 (3,44)	4,43 (3,89)		4 (3,74)
GK						6,33 (5,56)
LK						7 (7)
Insgesamt	1,99	3,93	7,44	7,46	12,56	6,31

4 Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalyse

4.1 Die Grundschule: Integration der Mathematikgeschichte in den regulären Unterrichtsstoff zur Instrumentalisierung und Erreichung metamathematischer Lernziele

Im Bereich der Primarstufe sind 137 Schulbücher durch das Schulministerium zugelassen. Davon sind 35 Mathematikbücher und Themenhefte der ersten Klasse und jeweils 34 Schulbücher der zweiten, dritten und vierten Klassestufe zuzuordnen. Diese große Anzahl an verschiedenen Schulbüchern ist zum einen auf die enorme Menge von 19 verschiedenen Schulbuchreihen und zum anderen auf die Themenhefte zurückzuführen. Diese stellen ein Spezifikum der Grundschule dar und werden von den drei führenden Verlagen Cornelsen, Klett und Westermann angeboten. Ein Schuljahr wird in vier bis sechs Themenhefte zu den Bereichen Rechnen, Geometrie und Sachrechnen aufgespalten, die in der vorliegenden Analyse jeweils als eigenständiges Schulbuch betrachtet wurden. Trotz der Verschiedenheit der einzelnen Schulbuchreihen waren klare Trends bezüglich Quantität und Qualität mathematikhistorischer Inhalte erkennbar, die ich in den folgenden Abschnitten näher darlegen werde.

Im Primarbereich ist eine klare Tendenz zu mehr Informationstexten und mehr Aufgaben mit historischem Hintergrund mit steigendem Schuljahr zu erkennen, wobei dieser Trend im Bereich der Aufgaben stärker ist (vgl. Tab. 1 und 2). Besonders hervorzuheben ist, dass die Themenheftreihe „Flex und Flo“ die einzige Schulbuchreihe ist, die Mathematik vollkommen ahistorisch einführt. Bei näherer Betrachtung wird deutlich, dass nur zwei Schulbuchreihen Mathematikgeschichte in der ersten Klasse verwenden. Weitere vier Schulbuchreihen führen mathematikhistorische Inhalte in der zweiten Klasse ein, sieben machen dies in der dritten Klasse. Außerdem tauchen in fünf der 19 Schulbuchreihen erst in der vierten Klassenstufe mathematikhistorische Inhalte auf, wobei diese Schulbuchreihen allesamt in verschiedenen Verlagen erschienen sind.

Das Ziel des Mathematikunterrichts der Grundschule ist es, eine grundlegende und anschlussfähige mathematische Bildung zu entfalten und somit ein Fundament für weiteres Mathematiklernen zu legen (vgl. KMK; Schulministerium NRW). Daher scheint es nicht verwunderlich, dass die meisten mathematikhistorischen Inhalte in erster Linie inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen des Kernlehrplans fördern. Während die prozessbezogenen Kompetenzen sich nicht auf einen Bereich eingrenzen lassen, fallen fast alle inhaltsbezogenen Kompetenzen in den Themenbereich „Zahlen und Operationen“, zu dem beispielsweise die sehr häufig auftretenden historischen Zahlensysteme oder Rechenverfahren, wie die römischen

Zahlzeichen und das Rechnen mit dem Abakus, gehören. Die Thematisierung der Mathematikgeschichte geschieht dabei häufig auf Seiten, die mit einem einleitenden Informationstext und anschließenden Übungsaufgaben gänzlich der Mathematikgeschichte gewidmet und nicht auffällig als Zusatzstoff gekennzeichnet sind, was ein Spezifikum der Grundschulbücher ist. Auf diese Weise können sich die Schüler intensiver mit einem Themengebiet, wie unterschiedlichen Zahldarstellungen und Rechenverfahren, beschäftigen und neben historischen Aspekten auch die Vorteile des heutigen Zahlensystems und der heutigen Rechenverfahren kennen lernen. Insgesamt kann durch die im Durchschnitt geringe Anzahl solcher mathematikgeschichtlicher Inhalte pro Schulbuch jedoch allenfalls ein Fundament für das Historizitätsbewusstsein der Schüler gelegt werden. Die berühmten Mathematiker, die mit 28 Fundstellen die größte Gruppe unter den Informationstexten bilden, treten häufig in Verbindung mit ihren Entdeckungen auf und vermitteln ein „Flair von Authentizität", da „Fragestellungen und -lösungen personifiziert werden, also Probleme von berühmten Mathematiker mit Gesicht und Charakter dargestellt werden" (Gellert, 2000, S. 221). Als Beispiel sei hier Leonardo da Pisa (Fibonacci) angeführt, welcher mit sieben Nennungen der am häufigsten genannte Mathematiker ist und der fast immer im Zusammenhang mit den Fibonacci-Zahlen in Form von eigenständigen Übungsaufgaben auftritt. Auch der anekdotische Gebrauch ist unter dem Aspekt Authentizität einzuordnen. Durch ihn können auch affektive Ziele, wie eine Förderung der Motivation durch Auflockerung oder eine positive Beeinflussung der Einstellung der Schüler bezüglich der Mathematik angestrebt werden. Hier ist vor allem Carl Friedrich Gauß zu nennen, welcher der zweithäufigste genannte Mathematiker in der Grundschule ist und der nahezu immer in Verbindung mit Aufgaben rund um die „Anekdote des kleinen Gauß" auftritt. Die Schüler sollen an dieser Stelle immer die „Summe der ersten n natürlichen Zahlen" ausrechnen.

Neben berühmten Mathematikern, historischen Zahlensystemen und Rechenverfahren sind immer wieder Knobelaufgaben mit historischen Bezügen zu finden. So gibt es Informationstexte und Aufgaben zu magischen Quadraten, vor allem zu dem von Dürer, zu der Weizenkornlegende, nach der der indische König dem Erfinder des Schachspiels auf dem ersten Schachfeld ein Reiskorn und auf jedem weiteren je doppelt so viele wie auf dem davor versprach, historischen Knobelaufgaben von den berühmten Mathematikern. Die Mathematikgeschichte wird an diesen Stellen häufig anekdotisch gebraucht, was für die Schüler eine motivierende Wirkung haben kann. Neben diesen affektiven Zielen werden durch alle eingesetzten Knobelaufgaben prozessbezogene Kompetenzen, wie das Problemlösen und Argumentieren, gefördert.

Obwohl keines der Autorenteams in den von den Verlagen veröffentlichten Konzepten ihrer Schulbuchreihen explizit die Verwendung geschichtlicher Inhalte er-

wähnt, gibt es doch Regelmäßigkeiten innerhalb der Schulbuchreihen. So gibt es fünf Schulbuchreihen, die mit höchstens neun mathematikgeschichtlichen Inhalten sehr wenig Mathematikgeschichte enthalten. Zehn andere Schulbuchreihen bilden mit zehn bis zwanzig mathematikgeschichtlichen Inhalten das Mittelfeld und vier Schulbuchreihen enthalten mit insgesamt über 20 mathematikgeschichtlichen Informationstexten und Aufgaben sehr viel Mathematikgeschichte. Obwohl keiner der herausgebenden Schulbuchautoren dieser vier Schulbuchreihen eine offensichtliche Affinität zur Mathematikgeschichte zu haben scheint, lassen die Autoren der Schulbuchreihen „Fredo & co", „Einstern", „Spürnasen Mathematik" und „Mathematikus" sowohl berühmte Mathematiker und ihre Entdeckungen als auch historische Zahlzeichen, Rechenverfahren und weitere mathematikgeschichtliche Inhalte in ihre Schulbücher einfließen. Dabei treten vermehrt Seiten auf, die komplett von der Mathematikgeschichte geprägt sind.
Neben dem generellen Trend, die Mathematikgeschichte im Sinne der Kompetenzen des Kernlehrplans zu instrumentalisieren und metamathematische Lernziele zu verfolgen, gibt es demnach durchaus Unterschiede zwischen den einzelnen Schulbüchern.

4.2 Die Hauptschule: Der Einsatz der Mathematikgeschichte unter affektiven Aspekten

An nordrhein-westfälischen Hauptschulen sind insgesamt 29 verschiedene Schulbücher sechs verschiedener Schulbuchreihen zugelassen. Diese teilen sich wie folgt auf die verschiedenen Jahrgangsstufen auf: jeweils 5 Schulbücher der fünften, sechsten, siebten und achten Klasse, 3 Schulbücher der neunten und 6 Schulbücher der zehnten Klasse.
Der Mathematikunterricht in der Hauptschule verfolgt das Ziel einer mathematischen Grundbildung der Schüler (Schulministerium NRW, S. 9). „Mathematische Grundbildung meint die Fähigkeit, die Rolle zu erkennen, die Mathematik in der Welt spielt, mathematisches Wissen funktional, flexibel und mit Einsicht zur Bearbeitung vielfältiger kontextbezogener Probleme einzusetzen und begründete mathematische Urteile abzugeben" (ebd.). Betrachtet man die 29 zugelassen Schulbücher an Hauptschulen in Nordrhein-Westfalen zusammenfassend, so fällt in erster Linie auf, dass diese sehr oft die im Kernlehrplan festgelegten verbindlichen Kontexte der Berufsorientierung und Lebensplanung aufgreifen (vgl. ebd., S. 29). Dementsprechend treten historische Inhalte tendenziell eher ergänzend und mit affektiven Zielen auf, was man auch an einer verhältnismäßig hohen Anzahl an historischen Informationen und Aufgaben auf Themenseiten und Kurzinformationen erkennen kann.

Die weitaus meisten der mathematikhistorischen Inhalte sind mit einem Anteil von fast 70% im Themenbereich Arithmetik/Algebra zu finden. Es treten auch vereinzelt Inhalte des Themenbereichs Geometrie (23%), wie beispielsweise im Zusammenhang mit Pyramiden oder Platonischen Körpern, auf. Die Themenbereiche Stochastik und Funktionen werden in Hauptschulbüchern fast ausschließlich ahistorisch unterrichtet.
Die für Hauptschulbücher hohe durchschnittliche Anzahl mathematikgeschichtlicher Inhalte in Schulbüchern der fünften Klasse rührt von einer hohen Anzahl eigenständiger Übungsaufgaben im Bereich historische Zahlensysteme. Dabei benutzen die Schulbücher, die nur an Hauptschulen zugelassen sind, Themenseiten; die Schulbücher, die an mindestens einer weiteren Schulform zugelassen sind, integrieren historische Zahlensysteme in das Kapitel „natürliche Zahlen", erwähnen sie gar nicht oder widmen ihnen ein ganzes Kapitel. Das Schulbuch der fünften Klasse der Reihe „Mathewerkstatt" sticht durch ein ganzes historisches Kapitel besonders hervor. Hier können die Schüler historische Zahlensysteme erforschen und dabei prozessbezogene Kompetenzen und ein Historizitätsbewusstsein erwerben. Auch die Entwicklung der arabischen Ziffern, die in manchen Schulbüchern thematisiert wird, kann das Historizitätsbewusstsein schulen. In den meisten Fällen sind historische Zahlensysteme jedoch ergänzend, als Auflockerung, Abwechslung oder zur Motivation gedacht, bei der nur am Rande relevant ist, dass sich die Darstellung von Zahlen und die Mathematik im Laufe der Jahre verändert haben. Auch historische Rechenverfahren oder Aufgaben aus historischen Quellen werden vermutlich eher unter motivationalen Aspekten, zur Abwechslung und als Herausforderung genutzt, um die Schüler aus Denkroutinen zu lösen und nebenbei historische Anwendungen aufzuzeigen, Einblicke in die Genese zu gewähren und so teilweise auch die Beziehung zwischen Mathematik und Kultur anzudeuten. Dabei darf man jedoch nicht vergessen, dass häufig auch Kompetenzen des Kernlehrplans, wie beispielsweise den Satz des Pythagoras anzuwenden, lineare Gleichungssysteme zu lösen oder ähnliches, in einem mathematikgeschichtlichen Kontext gefördert werden.
Die vielen verschiedenen berühmten Mathematiker, die häufig als ergänzende Kurzinformation oder als ergänzende Information im Aufgabenkopf zu finden sind, treten fast immer mit ihrem Abbild sowie dem Namen, den Lebensdaten und der Herkunft in Form eines kurzen Textes und meistens in Verbindung mit einer hervorstechenden Leistung auf. Neben einer geringen Anzahl an Instrumentalisierung der Mathematikgeschichte, spielen hier vor allem affektive und historische Ziele eine Rolle, da man an dieser Stelle die Mathematiker nicht erwähnen müsste, um die jeweiligen kognitiven Ziele zu erreichen. Das Wissen um die Geschichtlichkeit oder zumindest das Alter des jeweiligen historischen Inhalts, ist somit zum einen ein eigenständiges Ziel, zum anderen kann dies aber auch motivierend wirken und eine

positive Einstellung fördern. Etwas mehr Informationen stellen die sehr vereinzelt auftretenden Informationskästen bereit. Neben den auch in den Kurzinformationen enthaltenen und oben bereits erwähnten Informationen werden hier weitere Informationen aus dem Leben der Mathematiker ergänzt. An dieser Stelle stehen dementsprechend nicht die affektiven Ziele im Mittelpunkt. Vielmehr werden schon historische Anwendungen von Mathematik vorgestellt und so vor allem das Wissen um die Geschichtlichkeit der Mathematik geschult.

Auch die Entwicklung der Zählzahlen, Längeneinheiten, Zahlungsmittel, Spiele, des Prozentzeichens sowie zahlreiche Einblicke in den Ursprung vieler mathematischer Themengebiete werden in den Hauptschulbändern auf verschiedene Weise thematisiert. All diese Informationstexte und Aufgaben sind als Einführung, Vertiefung oder Ergänzung zu den übrigen Inhalten des jeweiligen Kapitels zu sehen. Durch den Einblick in die Genese einzelner mathematischer Sachverhalte erhalten die Schüler die Möglichkeit, das jeweilige Themengebiet besser zu verstehen. Außerdem kann es sowohl interessant als auch motivierend für die Schüler sein, wenn mathematische Sachverhalte und Symbole nicht einfach vorgegeben werden, als wären sie irgendwann vom Himmel gefallen, sondern es ihnen ermöglicht wird nachzuvollziehen, warum beispielsweise ein Vollkreis 360 Grad hat oder warum das Prozentzeichen so aussieht, wie es aussieht. Neben diesen metamathematischen Lernzielen können derartige Inhalte zusätzlich zumindest in den Anfängen das Historizitätsbewusstsein fördern. Es gibt keine Regelmäßigkeiten innerhalb der Schulbuchreihen der Verlage. Ferner führt keiner der Verlage mathematikgeschichtliche Inhalte als Teil der Konzeption der Schulbuchreihen innerhalb des Vorwortes oder auf den entsprechenden Internetseiten der Schulbuchreihen auf. Dennoch gibt es große Unterschiede bezüglich Anzahl und Qualität mathematikhistorischer Inhalte zwischen den einzelnen Schulbuchreihen, die durch die gesamte Konzeption gestützt werden. So wirbt die Schulbuchreihe „Schnittpunkt Plus“, die sehr wenig Mathematikgeschichte enthält, mit einfacher Sprache und „grundlegenden Aufgaben zum Üben“ (Klett, 2016) und die Reihe „Mathewerkstatt“, welche verhältnismäßig viele mathematikhistorische Inhalte beherbergt, damit „aktuelle Forschungsergebnisse der Fachdidaktik“ aufzugreifen (Cornelsen, 2016). Abschließend ist jedoch festzuhalten, dass die Mathematikgeschichte in Hauptschulbüchern eher ergänzend, hauptsächlich unter affektiven, gelegentlich aber auch unter historischen Aspekten und zur Instrumentalisierung verwendet wird.

4.3 Die Realschule: Ein Kaleidoskop verschiedener Intentionen

Zum Zeitpunkt der Datenerhebung waren an Realschulen 59 verschiedene Mathematikbücher zugelassen, die in 12 unterschiedlichen Schulbuchreihen erschienen sind. Dabei gehören jeweils 10 Schulbücher zur fünften und sechsten Klasse, 12 Schulbücher zu der siebten, 11 Schulbücher zu der achten Klasse sowie jeweils 8 Schulbücher zu der neunten und zehnten Klasse (vgl. Schulministerium NRW, 2016a).
Eine Regelmäßigkeit bezüglich der Anzahl der mathematikhistorischen Inhalte bezieht sich auf die Zulassung der Schulbücher an den Schulbüchern. So beinhalten die Schulbücher, die an Haupt- und Realschulen oder an Haupt-, Real- und Gesamtschulen zugelassen sind, deutlich weniger mathematikhistorische Inhalte als die Schulbücher, die an nur Realschulen oder Real- und Gesamtschulen zugelassen sind. Hier scheint es zudem eine Regelmäßigkeit bezüglich der Autoren zu geben. So sind die Schulbuchreihen „Sekundo“ (Haupt-, Real- und Gesamtschule), „Sekundo Plus“ (Real- und Gesamtschule) und „Maßstab“ (Realschule) von den gleichen Autorenteams verfasst worden und alle Schulbuchreihen befinden sich im unteren Bereich der mathematikgeschichtlichen Inhalte.
Die Realschule fördert ein Zusammenspiel von „praktische[n] Fähigkeiten“ und „theoretischen Zusammenhängen“ und bietet somit sowohl eine „erweiterte allgemeine Bildung“ als auch „berufsorientierte Kompetenzen“ (Schulministerium NRW, 2016b). Die mathematische Grundbildung der Schüler ist somit auch in der Realschule ein wichtiges Ziel. Dessen Erreichen zeigt sich im vernetzten Verwenden der prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen, die im Kernlehrplan festgehalten sind. Realschulbücher enthalten zum einen deutlich mehr Mathematikgeschichte als Grund- und Hauptschulbücher, es gibt zudem aber auch einen qualitativen Unterschied, da deutlich vielfältigere Ziele mit den mathematikhistorischen Inhalten verfolgt werden.
Mathematikgeschichtliche Inhalte sind jedoch mit einem Anteil von 65% der mathematikhistorischen Inhalte auch in der Realschule vor allem im Themenbereich Arithmetik/Algebra zu finden. Es gibt zudem eine größere Anzahl mathematikhistorischer Inhalte im Themengebiet Geometrie, was einem Anteil von 24% entspricht. Stochastik und Funktionen werden fast ausschließlich ahistorisch behandelt.
Alle Schulbücher enthalten eine Vielzahl an Informationen und Aufgaben, die auf verschiedenste Weise berühmte Mathematiker und ihre Entdeckungen behandeln, wie beispielsweise François Viète und der Satz von Vieta. Ungeachtet der strukturellen Kategorie werden mit den ergänzenden Informationstexten meistens affektive Ziele verfolgt. Während die ganze Bandbreite an affektiven Zielen auftritt,

stehen bei den historiographischen Zielen vor allem die Schulung des Historizitätsbewusstseins und das Aufzeigen von Teilen der Genese eines Themengebiets und dem entsprechenden Beitrag des jeweiligen Mathematikers im Vordergrund. Die entsprechenden Aufgaben, die zumeist integrierte Anwendungsaufgaben sind, fördern verschiedene prozess- und inhaltsbezogene Kompetenzen des Kernlehrplans, was einer zusätzlichen Instrumentalisierung entspricht.
Im Sinne des Kernlehrplans ist, dass die Schüler erkennen, „dass Mathematik eine historisch gewachsene Kulturleistung darstellt“ (Schulministerium NRW, S. 11). Dies sieht man deutlich in den Schulbüchern, da sehr häufig genetische Aspekte mit in den regulären Stoff des Schulbuchs eingeflochten werden, was Realschulbücher von Grund- und Hauptschulbüchern unterscheidet. So werden beispielsweise Ausschnitte aus den Ursprüngen des schriftlichen Rechnens, ganzer Themengebiete oder Zahlenbereiche ergänzend oder als Einstieg dargestellt. Ferner werden historische Zahlensysteme deutlich gründlicher als in Grund- und Hauptschulbüchern behandelt. Historische Messgeräte und Längenmaße oder historische Anwendungen, wie das Zwölf-Knoten-Seil zur Konstruktion eines rechten Winkels über die Umkehrung des Satzes des Pythagoras, findet man ebenfalls immer wieder in verschiedenen Schulbüchern. Mit diesen Ausschnitten aus der Genese werden nicht nur genuin historiographische Ziele, wie das Aufzeigen eines Ausschnitts der Genese, die Vermittlung historischer Fakten, die Förderung des Historizitätsbewusstseins oder die Darstellung einer historischen Anwendung verfolgt, sondern auch metamathematische Lernziele, wie beispielshalber das heutige dezimale Positionssystem mit seinen Besonderheiten und Vorteilen gegenüber anderen Zahlensystemen besser zu verstehen, und affektive Aspekte, wobei hier das Motivieren der Schüler sowie die Herstellung einer positiven Einstellung im Vordergrund stehen.
Außerdem treten Instrumentalisierungen im Sinne des Kernlehrplans auf, in der die Mathematikgeschichte als Einkleidung verwendet wird, wie die Berechnung des Alters, Geburts- oder Sterbejahrs eines Mathematikers oder in Form der Weizenkornlegende sowie der magischen Quadrate.
Dass die Mathematikgeschichte in Realschulbüchern anders verwendet wird als in Grund- und Hauptschulbüchern sieht man auch daran, dass es erstmalig mehr integrierte Übungsaufgaben als Aufgaben auf Themenseiten und Übungsaufgaben gibt. Zusätzlich sieht man auch an den strukturellen Kategorien Informationstexten, dass die Mathematikgeschichte mehr eingebunden wird. Hier dominieren Informationskästen und Kurzinformation am Seitenrand.
Obwohl Instrumentalisierungen der Mathematikgeschichte durchaus auftreten, so kann doch zusammenfassend festhalten werden, dass affektive und genuin historiographische Ziele mit in den Vordergrund getreten sind.

4.4 Die Gesamtschule: Mathematikgeschichte als Spiegel der kombinierten Schulformen

An Gesamtschulen werden Schüler aller Leistungsstärken länger gemeinsam unterrichtet, um weitere Laufbahnentscheidungen möglichst lange offen zu halten und so die Erlangung jedes Schulabschlusses der Sekundarstufe I zu ermöglichen (vgl. Schulministerium NRW, 2016b). Dieser Umstand führt zu einer Vielzahl an Überschneidungen mit Schulbüchern der Haupt- und Realschule. Die Schulbuchreihe „Zahlen und Größen“ ist die einzige vollständige Schulbuchreihe, die nur an Gesamtschulen zugelassen ist (vgl. Schulministerium NRW, 2016a). Bei Eintritt in die siebte Jahrgangsstufe werden die Schüler im Fach Mathematik in Grund- und Erweiterungskurse eingeteilt, wobei jeweils zu Beginn des Schuljahrs entsprechend der Leistung zwischen den Kursen gewechselt werden kann (vgl. ebd.). Diese Differenzierung in Grund- und Erweiterungskurse spiegelt sich auch in den Schulbüchern wieder und wurde in der Analyse entsprechend berücksichtigt.
Bei der Analyse der Gesamtschulbücher wurden insgesamt 46 Schulbücher berücksichtigt, die an Gesamtschulen zugelassen sind. Davon sind jeweils 7 Schulbücher für Klasse Fünf und Sechs zugelassen, jeweils 8 Schulbücher für Klasse Sieben und Acht. In der neunten und zehnten Klasse differenzieren die Schulbuchverlage zwischen Grundkurs und Erweiterungskurs, sodass insgesamt 9 Schulbücher der neunten Klasse, 4 aus dem Grundkurs und 5 aus dem Erweiterungskurs, und insgesamt 7 Schulbücher der zehnten Klasse, davon 3 für den Grundkurs und 4 für den Erweiterungskurs, untersucht wurden. Auffällig hierbei ist, dass die Schulbücher für den Erweiterungskurs jeweils etwas mehr mathematikhistorische Inhalte als die des Grundkurses enthalten, wobei in der neunten Klasse mehr mathematikhistorische Inhalte vertreten sind als in der zehnten Klasse.
Die Schüler der Gesamtschule umfassen zwar ein größeres Leistungsspektrum, trotzdem sollen alle Schüler Mathematik als historisch gewachsene Kulturleistung begreifen (vgl. Schulministerium NRW). Dieses recht allgemein formulierte Ziel ist in den Schulbüchern erkennbar, die auch aufgrund zahlreicher Überschneidungen bis zur achten Klasse quantitativ und qualitativ den Realschulbüchern sehr nahe kommen. So sind auch in Gesamtschulbüchern mit einem Anteil von 63% die meisten mathematikhistorischen Inhalte im Themenbereich Arithmetik/Algebra und mit 27% im Bereich Geometrie zu finden. Somit spielen auch hier mathematikhistorische Inhalte im Themenbereich Funktionen oder Stochastik kaum eine Rolle. Außerdem gibt es sowohl die gleichen mathematikhistorischen Inhalte als auch eine Vielzahl verschiedener affektiver und instrumentalisierender, aber vor allem auch genuin historiographischer Ziele, wie das Aufzeigen einer Genese oder die Förderung des Historizitätsbewusstseins. Reine Gesamtschulbücher enthalten mit kulturellen Zielen außerdem Elemente, die sonst nur in gymnasialen Schulbüchern

vorkommen. Diese Tendenzen werden in der neunten und zehnten Klasse im Erweiterungskurs fortgeführt. In Schulbüchern des Grundkurses hingegen werden einerseits weniger mathematikgeschichtliche und mehr berufsorientierte Kontexte eingesetzt, andererseits ist der Anteil an affektiven Zielen bei der Verwendung von Mathematikgeschichte deutlich größer. Hier ergibt sich also tatsächlich eine Parallelität der mathematikhistorischen Inhalte zu den Abschlüssen, da die Schüler im Grundkurs, ebenso wie auf der Hauptschule, auf den Hauptschulabschluss und im Erweiterungskurs, ebenso wie auf der Realschule und in der gymnasialen Sekundarstufe I, auf den mittleren Schulabschluss vorbereitet werden.
Die strukturellen Kategorien haben sich im Vergleich zur Realschule leicht in Richtung der strukturellen Kategorien des Gymnasiums verschoben. Hier dominieren bei den mathematikhistorischen Informationstexten erstmals Kurzinformation am Seitenrand und bei den Aufgaben mit mathematikgeschichtlichem Hintergrund sind integrierte Übungsaufgaben nur noch die zweithäufigste strukturelle Kategorie, da Aufgaben auf Themenseiten deutlich vermehrt auftreten.

4.5 Das Gymnasium: Die Mathematikgeschichte ist omnipräsent mit multiplexen Zielen

Seit dem Jahr 2005 ist mit der Einführung des achtjährigen Gymnasiums die Sekundarstufe I auf dem Gymnasium in Nordrhein-Westfalen nur noch fünfjährig. Dementsprechend wurden in diesem Teil der Analyse nur Schulbücher bis zur neunten Klasse berücksichtigt. Insgesamt finden in der vorliegenden Analyse 42 Gymnasialschulbücher aus 8 verschiedenen Schulbuchreihen Berücksichtigung. Analysiert wurden jeweils 8 Schulbücher der Klassen Fünf, Sechs, Sieben und Neun und 9 Mathematikschulbücher der Klasse Acht.
In gymnasialen Schulbüchern dominiert ebenfalls der Themenbereich „Arithmetik/Algebra" mit 58% der mathematikhistorischen Inhalte. Mit 29% ist jedoch auch der Themenbereich „Geometrie" nicht zu vernachlässigen. Weit dahinter liegen die Bereiche Funktionen (8%) und Stochastik (5%).
Die Geschichte der Mathematik ist in gymnasialen Schulbüchern mit durchschnittlich 7,6 Informationstexten und 13,6 Aufgaben pro Schulbuch deutlich häufiger vertreten als in jeder anderen Schulform. Dabei hat die Straffung der Sekundarstufe I auf fünf Jahre zusätzlich eine Verschiebung der durchschnittlichen Anzahl der mathematikhistorischen Inhalte in den einzelnen Klassenstufen zur Folge. Beispielsweise werden die Kreiszahl π oder das pascal'sche Dreieck in der Haupt-, Real- und Gesamtschule in der neunten Klasse, auf dem Gymnasium jedoch bereits in der achten Klasse behandelt, was einen Anstieg der mathematikhistorischen Inhalte bereits in der achten Klasse zur Folge hat.

Berühmte Mathematiker und ihre Entdeckungen sind auch in gymnasialen Schulbüchern zahlreich und in verschiedenen strukturellen Kategorien vertreten. Neben der Vermittlung historischer Fakten, der Schulung des Historizitätsbewusstseins und verschiedenen affektiven Zielen spielen erstmals auch wissenschaftssoziologische Ziele eine Rolle. In den zugehörigen Anwendungs- und Übungsaufgaben zu den Entdeckungen, den Werken oder anderen Leistungen berühmter Mathematiker werden einerseits Kompetenzen des Kernlehrplans gefördert, andererseits auch historische Anwendungen aufgezeigt, historisches Wissen vermittelt und sämtliche affektive Ziele mit verschiedener Gewichtung verfolgt. Selbiges gilt für die zahlreichen Aufgaben aus historischen Quellen, die zusätzlich die Schüler aus ihren „mathematischen Denkgewohnheiten und Denkroutinen" lösen können (Weiss-Pidstrygach, 2014, S. 1295). Die Genese des heutigen Zahlensystems, einzelner mathematischer Teilgebiete und Zahlenbereiche und vielem mehr ist in gymnasialen Schulbüchern auffällig häufig zu finden. Neben metamathematischen Zielen, wie etwa ein verbessertes Verständnis des heutigen Zahlensystems, wird genuin historisches Wissen vermittelt. Eine ausschnittweise Kenntnis der Genese einzelner Gebiete sowie die Verknüpfung der Genese mit dem Unterrichtsstoff wird hier sicherlich als eigenständiges Ziel verfolgt. Neben den typischen mathematikhistorischen Inhalten, wie die Weizenkornlegende und Knobeleien aus der Geschichte, sind auch historische Anwendungen wieder vertreten. Zusätzlich wird die Anwendung der Mathematik in der Kultur, vor allem in der Kunst, in gymnasialen Schulbücher häufiger als in andere Schulformen explizit eingebunden und so auch teilweise das kulturelle Ziel, Mathematik als Teil der Kultur zu sehen, verfolgt. Dass die Mathematikgeschichte in gymnasialen Schulbüchern omnipräsent ist, sieht man zudem daran, dass gerade die strukturellen Kategorien, in denen die Mathematikgeschichte mit dem Unterrichtsstoff auf den regulären Seiten verwoben werden, wie die Kurzinformationen am Seitenrand und die integrierten Übungsaufgaben, besonders häufig sind.

Wenn man die mathematikhistorischen Inhalte der einzelnen Schulbuchreihen mittelt, so enthält die Reihe „MatheNetz" mit durchschnittlich 15,4 mathematikhistorischen Inhalten pro Schulbuch mit Abstand die meisten mathematikhistorischen Inhalte. Auch weisen die Autoren schon im Vorwort darauf hin, dass die Mathematik eine 5000 Jahre alte Wissenschaft ist. Außerdem gibt es ein eigenes Symbol für „Aufgaben mit historischen Bezügen" (Cukrowicz u.a., 2009, S. 5). Dieses Schulbuch wird allerdings nach Auskunft von Ulrike Jürgens, Geschäftsführerin Grundschule der Westermann Verlagsgruppe, in nordrhein-westfälischen Schulen nur noch sehr vereinzelt eingesetzt (persönliche Kommunikation, 09.05.2016). Interessanterweise sind die Schulbuchreihen „Lambacher Schweizer", „Mathematik Neue Wege" und „Elemente der Mathematik", die alle hinsichtlich der mathematikgeschichtlichen Inhalte im oberen Bereich liegen, die aktuellen Marktführer an nordrhein-westfälischen Gymnasien (persönliche Kommunikation, 09.05.2016). Abgesehen von dem „MatheNetz“ verweist jedoch keines der gymnasialen Schulbücher in seinen Vorworten oder den Konzeptionen auf mathematikhistorische Inhalte. Zusammenfassend kann das Ziel des Kernlehrplans, Mathematik als „historisch gewachsene Kulturleistung“ zu betrachten, in gymnasialen Schulbüchern noch eher erreicht werden, als in Schulbüchern anderer Schulformen (Schulministerium NRW, S. 11).

4.6 Die Sekundarstufe II: Verwendung mathematikhistorischer Inhalte unter motivationalen Aspekten und punktuelle Kenntnisse der Genese als kognitives Ziel

Die insgesamt dreijährige Sekundarstufe II, also die „gymnasiale Oberstufe an Gymnasien und Gesamtschulen“, ist „in eine einjährige Einführungsphase und in eine zweijährige Qualifikationsphase“ unterteilt (Schulministerium NRW, 2016b). Nach den Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife der Kultusministerkonferenz wird durch den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II „eine vertiefte Allgemeinbildung, allgemeine Studierfähigkeit sowie wissenschaftspropädeutische Bildung“ vermittelt (S. 11). In den Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans sind weder im Rahmen der prozessbezogenen Kompetenzen noch unter den inhaltlichen Schwerpunkten - Analysis, analytische Geometrie und lineare Algebra und Stochastik - mathematikhistorische Inhalte verankert (vgl. Schulministerium NRW).

In der vorliegenden Analyse wurden insgesamt 16 Schulbücher der Sekundarstufe II untersucht. Dabei teilen sich diese 16 Schulbücher in 5 Schulbücher der Einführungsphase und insgesamt 11 Schulbücher der Qualifikationsphase auf. Bei den Schulbüchern der Qualifikationsphase handelt es sich um 3 reine Grund- und 2 Leistungskursbände, 2 Bände ohne Zuweisung zu Grund- oder Leistungskurs, 1 CAS-Band und 3 Themenbände. Die Themenbände der Schulbuchreihe „Neue Wege“ beinhalten jeweils eines der Inhaltsfelder des Kernlehrplans: Analysis, analytische Geometrie und lineare Algebra oder Stochastik.

In der gymnasialen Oberstufe ist der Themenbereich Analysis mit 57% am häufigsten vertreten, gefolgt von den Themenbereichen Stochastik mit 30% und linearer Algebra und analytischer Geometrie mit 13 %.

Auch wenn es in der gymnasialen Oberstufe ebenso wenig direkte Vorgaben für mathematikhistorische Inhalte von politischer Seite wie in den anderen Schulformen gibt, so werden doch mit durchschnittlich 10,25 mathematikhistorischen Informationstexte und 6,3 Aufgaben mit historischem Hintergrund sehr viele mathematikgeschichtliche Inhalte integriert. Über Zweidrittel der Informationstexte und über 55% der Aufgaben beschäftigen sich mit einem berühmten Mathematiker und seiner Entdeckung oder Ähnlichem. In beiden Fällen werden einerseits vielfältige historische Fakten über Mathematiker, deren Leben und die Mathematik in ihrer Zeit vermittelt, was das Historizitätsbewusstsein der Schüler schulen kann, andererseits werden diese mathematikhistorischen Inhalte auch unter affektiven Aspekten, vor allem der Auflockerung, Abwechslung und Motivationsförderung, eingesetzt. Die zugehörigen Aufgaben sind häufig unter anderen integriert und dienen vor allem der Förderung der Kompetenzen des Kernlehrplans. Ausschnitte aus der Genese der drei großen mathematischen Teilbereiche Analysis, analytische Geometrie und Stochastik machen 20% der Informationstexte und 25% der Aufgaben aus. Hier werden immer wieder ergänzend zum Unterrichtsstoff Schlaglichter auf einzelne Entwicklungsschritte geworfen, was sicherlich auch ein besseres Verständnis dieses Stoffes nach sich ziehen kann. Die Regelmäßigkeit und vor allem auch die Qualität mit der dies in allen Schulbuchreihen geschieht, lässt jedoch vermuten, dass die Kenntnis der Genese sowie der Aufbau eines Historizitätsbewusstseins ein eigenständiges Anliegen der Schulbuchautoren ist. Die Biographien einzelner Schulbuchautoren untermauern diese Vermutung (vgl. Schulte, 2016, S. 76). Die restlichen Informationstexte und Aufgaben zeigen historische Anwendungen und Ähnliches. Die Mathematikgeschichte wird auch hier sehr häufig unter motivationalen Aspekten, zur Auflockerung und Kreieren einer positiven Einstellung genutzt. Die deutlich geringere Anzahl der strukturellen Kategorien unterstützt den allgemeinen Eindruck der Rolle der Mathematikgeschichte in der Sekundarstufe II: Die Mathematikgeschichte wird einerseits ergänzend genutzt, um Wissen über die Genese eines mathematischen Begriffs oder Teilgebiets zu vermitteln und andererseits wird sie immer wieder unter motivationalen Aspekten integriert, wobei die eigentliche Aufgabe eine Kompetenz des Kernlehrplans fördert.

5 Fazit und Ausblick

Die Ergebnisse der Häufigkeitsanalyse zeigen, dass Mathematik in der Grundschule fast ausschließlich ahistorisch eingeführt wird. Erst in der dritten und vierten Klasse sind mathematikhistorische Inhalte regelmäßiger vertreten, sodass sich eine mittlere Anzahl von 0,4 mathematikhistorischen Informationstexten und 2 mathematikhistorischen Aufgaben pro Schulbuch in der Grundschule ergibt. Beim Übergang zu den weiterführenden Schulformen gibt es unabhängig von der Wahl der Schulform eine Steigerung der mittleren Anzahl an mathematikhistorischen Inhalten. Dabei finden sich in gymnasialen Schulbüchern mit 7,6 Informationstexten und 12,5 Aufgaben mehr mathematikhistorische Inhalte als in Realschulbüchern (4 Informationstexte, 7,4 Aufgaben) und in Hauptschulbüchern (1,7 Informationstexte, 3,9 Aufgaben). Es zeigt sich somit ein positiver Zusammenhang zwischen den Schulformen und damit den angestrebten Schulabschlüssen der Schüler und den mathematikhistorischen Inhalten. Gesamtschulbücher enthalten mit 3,6 mathematikhistorischen Informationstexten und 7,5 Aufgaben mit historischem Hintergrund in etwa so viele mathematikgeschichtliche Inhalte wie die Realschulbände. Das hängt einerseits mit den zahlreichen Überschneidungen der Schulbücher beider Schulformen zusammen, andererseits stellt es sicherlich auch einen Kompromiss zwischen den einzelnen Schulformen, die an der Gesamtschule vereint werden, dar. In der gymnasialen Sekundarstufe II steigt die Anzahl der mathematikgeschichtlichen Informationstexte auf 10,25, die Anzahl der mathematikgeschichtlichen Aufgaben sinkt auf 6,3. Des Weiteren hat die Analyse ergeben, dass unabhängig von der weiterführenden Schulform die meisten mathematikhistorischen Inhalte jeweils in Klasse Fünf auftreten. In den anschließenden Klassen Sechs und Sieben sinkt die Anzahl der mathematikhistorischen Inhalte in den Schulbüchern verschiedener Schulformen um ungefähr den gleichen Anteil. Während sich dieser Trend in Klasse Acht der Haupt-, Real- und Gesamtschule fortsetzt, steigt die Anzahl der mathematikgeschichtlichen Inhalte in gymnasialen Schulbüchern bereits in Klasse Acht, um dann in Klasse Neun wieder leicht zu sinken. Auch diese Tendenz des leichten Anstiegs mit anschließendem Absinken verschiebt sich in Haupt-, Real- und Gesamtschulbüchern auf die Klassen Neun und Zehn. Wie viel Mathematikgeschichte in einem Schulbuch vorhanden ist, hängt außerdem stark von der Schulbuchreihe und den jeweiligen Autoren ab. Trotz des generellen Trends gibt es innerhalb jeder Schulform Ausreißer in beide Richtungen, sodass es von der konkreten Wahl der Schulbuchreihe abhängt, wie viel Mathematikgeschichte die Schüler im Unterricht präsentiert bekommen. Dieses kann am Beispiel der römischen Zahlzeichen illustriert werden: Innerhalb jeder Schulform gibt es mindestens eine Schulbuchreihe, die den historischen Zahlensystemen ein ganzes Kapitel widmet und eine Schulbuchreihe, die nicht einmal die römischen Zahlzeichen beinhaltet. Daraus ergibt sich weiterhin, dass die allgemeinen Tendenzen der Häufigkeitsanalyse eng mit den Inhalten und damit mit der qualitativen Analyse zusammenhängen. Während berühmte Mathematiker und deren Entdeckungen oder sonstige Leistungen durchgehend in allen Klassenstufen, häufig ergänzend oder anekdotisch unter affektiven Aspekten und zur Vermittlung einfacher historischer Fakten und je nach Schulform unterschiedlich häufig zu finden sind, gibt es ebenfalls Themen, welche die Mathematikgeschichte in bestimmten Klassenstufen prägen. Darüber hinaus prägen typische Inhalte der Klassen Drei und Vier zusätzlich die mathematikhistorischen Inhalte der fünften Klasse aller Schulformen. Hier sind historische Zahlensysteme das prägnanteste Beispiel, allerdings treten auch Ausschnitte aus der Genese der Maßeinheiten oder des schriftlichen Rechnens gehäuft auf, was die Akkumulation in Klasse 5 erklärt.

In Klasse Sechs zählen historische Inhalte rund um Primzahlen zu den immer wiederkehrenden Inhalten. Die zweite Häufung mathematikgeschichtlicher Inhalte in Klasse Neun der Haupt-, Real- und Gesamtschule beziehungsweise Acht des Gymnasiums hängt ebenfalls mit den Inhalten dieser Klassenstufen zusammen: Die Kreiszahl π, der Satz des Pythagoras und das pascal'sche Dreieck sorgen für einen Anstieg der mathematikhistorischen Inhalte zu diesen Zeitpunkten. Die Verschiebung der Tendenz am Gymnasium im Vergleich zu den anderen weiterführenden Schulformen hängt demnach mit der Straffung der gymnasialen Sekundarstufe I auf fünf Jahre zusammen. Die Anzahl an mathematikgeschichtlichen Inhalten wird somit nicht nur von der Schulform, sondern auch vom Thema des jeweiligen Unterrichtsstoffs beeinflusst. Dies verdeutlicht auch die Analyse der Themenbereiche in den einzelnen Schulformen, denn hier dominiert immer recht eindeutig der Themenbereich Arithmetik/Algebra beziehungsweise Zahlen und Operationen vor Geometrie, wobei diese Tendenz in gymnasialen Mathematikbüchern abgeschwächt ist. Die Themenbereiche Funktionen und Stochastik werden nur sehr vereinzelt mathematikhistorisch betrachtet. Die Frage nach den Ursachen dieser Vernachlässigung vermag an dieser Stelle nicht vollständig beantwortet zu werden. Es liegt jedoch die Vermutung nahe, dass einerseits das Alter und die Fülle an scheinbar interessanten Geschichten aus der Geschichte des jeweiligen Themengebiets eine Rolle spielen und andererseits eine vermeintlich bessere Zugänglichkeit der Mathematikgeschichte im Bereich Arithmetik/Algebra und Geometrie besteht. So erscheinen beispielsweise in nahezu jeder Schulbuchreihe Geschichten aus der Geschichte der Kreiszahl π, während die Geschichte des Funktionsbegriffs durchgehend ignoriert wird. Gerade im Hinblick auf die Wichtigkeit eines gesicherten Verständnisses des Funktionsbegriffs im Verlauf der Sekundarstufe I einer jeden Schulform und vor allem im Verlauf der gymnasialen Oberstufe, ist dieses Versäumnis verwunderlich. Wenngleich eine vollständig historisch-genetische Betrachtung mit Sicherheit deutlich zu weit ginge, so sind doch einzelne, sorgsam ausgewählte Ausschnitte der Genese des Funktionsbegriffs durchaus lohnenswert zu betrachten. So könnte beispielsweise ausschnittsweise verglichen werden, was man im Verlauf der letzten Jahrhunderte unter dem Begriff „Funktion" verstand (vgl. Greefrath u.a., 2016, S. 24). Momentan werden solche Ausschnitte allerdings lediglich in Schulbüchern der gymnasialen Oberstufe angeboten. In diesen werden sowohl die Geschichte des Funktionsbegriffs als auch die Genese der gesamten Analysis, der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der analytischen Geometrie recht gründlich aufgearbeitet. In der Sekundarstufe II des Gymnasiums dominiert der Themenbereich Analysis vor dem Themenbereich Stochastik, was auf die Schwerpunktsetzung der Schulbücher auf der Analysis zurückzuführen ist.

Ebenso wie die Wahl des Themengebiets, scheint auch die Wahl der Erwähnung eines Mathematikers sowie seiner Leistung mit der vermeintlichen Interessantheit

für Schüler zusammenzuhängen und nicht mit der tatsächlichen Bedeutung der Person oder des Ereignisses für die Mathematikgeschichte. So wird beispielsweise Leonardo von Pisa in zahlreichen Schulbüchern im Zusammenhang mit der Fibonacci-Folge und Carl Friedrich Gauß in unmittelbarem Zusammenhang mit der „Anekdote des kleinen Gauß“ erwähnt. Sicherlich stellen diese historischen Ausschnitte nette Geschichten mit für Schüler interessanten mathematischen Aufgaben und Herausforderungen dar, sie spiegeln jedoch nicht die mathematisch bedeutsamsten Leistungen von Carl Friedrich Gauß oder Leonardo von Pisa wider. Nichtsdestoweniger können solche Anekdoten und Knobelaufgaben jüngeren Schülern einen ersten Zugang zur Mathematikgeschichte eröffnen. In den nachfolgenden Schuljahren sollte das Bild des Mathematikers jedoch vervollständigt werden, was bislang nur sehr vereinzelt gelingt.
Obwohl sich die mathematikgeschichtlichen Themen in den Schulbüchern ähneln, sind die Art der strukturellen Integration und die jeweiligen Intentionen des Einsatzes mathematikgeschichtlicher Inhalte unterschiedlich. Auch wenn sicherlich in allen Schulformen bei Weitem nicht nur ein Ziel mit dem Einsatz mathematikhistorischer Inhalte verfolgt wird, so ergeben sich doch generelle Schwerpunkte für einzelne Schulformen. In der Grundschule werden mathematikgeschichtliche Inhalte in den regulären Unterrichtsstoff der jeweiligen Klassestufen integriert. Dieses geschieht mit Blick auf den Kernlehrplan einerseits zur direkten Förderung von Kompetenzen, andererseits werden metamathematische Lernziele angestrebt, um eine grundlegende und anschlussfähige mathematische Grundbildung zu erreichen. Durch die mathematikhistorischen Inhalte der Grundschulbücher kann lediglich ein Fundament für das Historizitätsbewusstsein der Schüler gelegt werden. Letzteres gilt auch für die Mathematikgeschichte in Hauptschulbüchern, welche hauptsächlich ergänzend und unter affektiven Aspekten eingesetzt wird, auch wenn durchaus Aufgaben auftreten, in denen die Mathematikgeschichte instrumentalisiert wird. In Real- und Gesamtschulen sowie auf dem Gymnasium in Sekundarstufe I und II sollen die Schüler laut Kernlehrplan Mathematik als historisch gewachsene Kulturleistung verstehen, was sich in einer Häufung genetischer Betrachtungen niederschlägt. Auch wenn keine konkreten Inhalte genannt werden, wirkt sich die Forderung des Kernlehrplans ebenfalls auf die Qualität der mathematikhistorischen Inhalte aus. Es werden in verschiedenen strukturellen Kategorien unterschiedliche affektive, aber auch zahlreiche genuin historiographische Ziele verfolgt. Zusätzlich sind Instrumentalisierungen der Mathematikgeschichte vertreten, sodass sich die Intentionen der Autoren in diesen Schulformen nicht näher eingrenzen lassen. Neben der Auflockerung des Unterrichtsstoffes, der Förderung der Motivation und einer positiven Einstellung der Schüler sowie des Abbaus psychischer Barrieren werden demnach zahlreiche historische Anwendungen und Ausschnitte der Genese verschiedenster Begriffe und Teilgebiete aufgezeigt, das Historizitätsbewusstsein

der Schüler geschult und metamathematische Lernziele verfolgt. Zwar schwingen häufig im Subkontext der Informationstexte und Aufgaben kulturelle Ziele mit, wie beispielsweise bei Dürers magischem Quadrat, jedoch treten in Gesamtschulen und vor allem an Gymnasien kulturelle und wissenschaftssoziologische Ziele hinter den mathematikgeschichtlichen Inhalten deutlicher hervor. Daraus lässt sich zusätzlich ableiten, dass die Gesamtschulbücher Elemente aus allen Schulformen beinhalten. In Schulbüchern der gymnasialen Oberstufe tritt die Kenntnis der historischen Genese eines Begriffs oder Teilgebiets als eigenständiges Ziel noch deutlicher hervor. Außerdem sind motivationale Aspekte ein häufiger Grund für den Einsatz mathematikhistorischer Inhalte in der Oberstufe.
Zusammenfassend lässt sich somit sagen, dass es zum einen Themen gibt, die in allen Schulformen auftauchen und zum anderen Themen, die typisch für bestimmte Schulformen sind. Außerdem unterstützen die strukturellen Kategorien die Intentionen der Autoren, sie spielen allerdings keine vordergründige Rolle. Darüber hinaus wird die Mathematikgeschichte in verschiedenen Schulformen mit unterschiedlichen Intentionen verwendet und die Anzahl der mathematikgeschichtlichen Inhalte steigt mit steigendem Niveau des Schulabschlusses.
Diese alters- und leistungsdifferenzierte Verwendung mathematikhistorischer Inhalte erscheint mit Blick auf die Verschiedenheit der Schüler möglicherweise plausibel. Sie lässt jedoch an zahlreichen Stellen Gelegenheiten für ein vertieftes Verständnis sowohl der mathematischen Inhalte und deren Entstehung als auch Mathematik als Wissenschaft sowie als ein Teil der Kultur verstreichen. Außerdem könnte eine regelmäßigere Verwendung mathematikhistorischer Beiträge auch mit wissenschaftssoziologischen und kulturellen Zielen wichtige Beiträge zur (kulturellen) Allgemeinbildung leisten. Auch wenn dies durchaus schon geschieht, so wäre es doch lohnenswert Mathematikhistoriker an der Gestaltung von Schulbüchern zu beteiligen.
Letztlich sei noch festgehalten, dass die Inhalte in den Schulbüchern lediglich angeboten werden. Inwieweit Lehrkräfte und Schüler die mathematikhistorischen Inhalte nutzen oder sogar weitere mathematikhistorische Inhalte in den Unterricht einbinden bleibt zunächst offen. Auch wenn die Methodik der Analyse sich im Rahmen dieser Arbeit als tauglich und wirkungsvoll erwiesen hat, so ließe sie sich doch für noch detaillierte Analysen ausbauen. Im Rahmen der Häufigkeitsanalyse könnten weiterführende Arbeiten beispielsweise auch die Anzahl der Teilaufgaben berücksichtigen. Ferner musste die qualitative Analyse dieser Arbeit auf eine Detailanalyse bestimmter Themen mit explizitem Vergleich der Darstellungen, wie beispielsweise zu den verschiedenen Darstellungen der Kreiszahl, aus Platzgründen verzichten. Sie bietet jedoch viel Potenzial für sich anschließende Arbeiten. Außerdem könnte die Prüfung auf historische Korrektheit aller Inhalte, welche den zeitlichen Rahmen dieser Arbeit bei Weitem überschritten hätte, ein interessan-

ter Ansatzpunkt sein. Auch ein Vergleich der Schulbücher Nordrhein-Westfalens mit den Mathematikbüchern anderer Bundesländer mit dementsprechend anderen Lehrplänen wäre in diesem Zusammenhang lohnenswert zu untersuchen.

6 Quellen- und Literaturverzeichnis

[Barzel u.a., 2014a] Barzel, B., Prediger, S., Hußmann, S. & Leuders, T. (Hrsg.). (2014). Mathewerkstatt 5. (1. Aufl.). Berlin: Cornelsen Schulbuchverlage.

[Bruder u.a., 2015] Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B. & Wiegand, H.-G. (Hrsg.). (2015). Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin: Springer Spektrum.

[Cornelsen, 2016] Cornelsen Schulverlage. (2016). Konzept Mathewerkstatt. Abgerufen von http://www.cornelsen.de/lehrkraefte/reihe/r-5635/ra-8653/konzept /back_link/ e70c30a7e2ce412f1c7e8807b03a5842

[Cukrowicz u.a., 2009] Cukrowicz, J., Theilenberg, J. & Zimmermann, B. (Hrsg.). (2009). MatheNetz 9. Gymnasium. (1. Aufl.). Braunschweig: Bildungshaus Westermann.

[Dormolen, 1978] Dormolen, J. (1978). Didaktik der Mathematik. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft.

[Gellert, 2000] Gellert, U. (2000). Zur mathematik-historischen Perspektive in der Lehrerbildung. In Neubrand, M. (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 34. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 28. Februar bis 3. März 2000 in Potsdam (S. 221-224). Hildesheim: Franzbecker.

[Geukes u.a., 2012] Geukes, G., Grimm, B., Hillebrand, P., Pongs, R., Rausche, P. & Zahn, P. (Hrsg.). (2012). Schnittpunkt Plus 5. Mathematik – Differenzierende Ausgabe Nordrhein-Westfalen. (1. Aufl.). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

[Greefrath u.a., 2016] Greefrath, G., Oldenburg, R. Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe. Berlin: Springer-Verlag.

[Hamann & Schmidt-Thieme, 2015] Hamann, T. & Schmidt-Thieme, B. (2015). Sektion: Mathematik. Unterricht. Geschichte. In Caluori, F., Linneweber-Lammerkitten, H. & Streit, C. (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 49. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 09.02.2015 bis 13.02.2015 in Basel. (S. 63-64). Münster: Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

[Hayen, 1987] Hayen, J. (1987). Planung und Realisierung eines mathematischen Unterrichtswerkes als Entwicklung eines komplexen Systems. Dokumentation und Analyse. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

[Jahnke, 2008] Jahnke, H. N. (2008). Geschichte der Mathematik. Vielfalt der Lebenswelten - Mut zu divergentem Denken. Mathematik lehren. Die Zeitschrift für den Unterricht in allen Schulstufen. Heft 151: Geschichte der Mathematik. S. 4-7.

[Klett, 2016] Ernst Klett Verlag. (2016). Schnittpunkt Plus – Sicher zum Hauptschulabschluss. Konzeption. Abgerufen von https://www.klett.de/lehrwerk/schnittpunkt/konzeption/lehrer/bundesland-10/schulart-6/fach-48

[KMK] Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik. www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/

[Kronfellner, 1998] Kronfellner, M. (1998). Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Eine didaktische Analyse mit unterrichtsspezifischen Beispielen. Schriftreihe Didaktik der Mathematik: Band 24. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

[Mayring, 2015] Mayring, P. (2015). Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken. (12. Aufl.). Weinheim: Beltz.

[Nickel, 2013] Nickel, G. (2013). Vom Nutzen und Nachteil der Mathematikgeschichte für das Lehramtsstudium. In Allmendinger, H., Lengnink, K., Vohns, A. & Wickel, G. (Hrsg.), Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung (S. 253-266). Wiesbaden: Springer Spektrum.

[Pandel, 1987] Pandel, H.-J. (1987). Dimensionen des Geschichtsbewusstseins – Ein Versuch, seine Struktur für Empirie und Pragmatik diskutierbar zu machen. In Geschichtsdidaktik, 12 (2) , S. 130-142.

[Rezat, 2009] Rezat, S. (2009). Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers. Eine Studie zur Schulbuchnutzung in den Sekundarstufen. (1. Aufl.). Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

[Schulministerium NRW] Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. Kernlehrpläne für die Schulen in Nordrhein-Westfalen. Mathematik. Abgerufen von http://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene

[Schulministerium NRW, 2016a] Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. (2016). Verzeichnis der zugelassenen Lernmittel. Abgerufen am 28.03.2016 von https://www.schulministerium.nrw.de/docs

/Schulsystem/Medien/Lernmittel/

[Schulministerium NRW, 2016b] Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. (2016). Schulformen. Abgerufen am 04.05.2016 von https://www.schulministerium.nrw.de/docs/Schulsystem/Schulformen

[Schulte, 2014] Schulte, L. (2014). Eine Längsschnittanalyse zur Rolle der Mathematikgeschichte in gymnasialen Schulbüchern seit 1950. (Nicht veröffentlichte Bachelorarbeit), Universität Siegen, Siegen.

[Schulte, 2016] Schulte, L. (2016). Eine Querschnittsanalyse zur Rolle der Mathematikgeschichte in aktuellen Schulbüchern. (Nicht veröffentlichte Masterarbeit), Universität Siegen, Siegen.

[Timischl, 2000] Timischl, W. (2000). Biostatistik. Eine Einführung für Biologen und Mediziner. (2. Aufl.). Wien: Springer-Verlag.

[Weiss-Pidstrygach, 2014] Weiss-Pidstrygach, Y. (2014). Verfremdung durch historische Perspektiven – Beispiele für. In Roth, J. & Ames, J. (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 48. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10. Bis 14. März 2014 in Koblenz. (S. 1295-1298). Münster: Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

[Wußing, 2013] Wußing, H. (2013). 6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise. I: Von den Anfängen bis Leibniz und Newton. Berlin: Springer-Verlag.

Mathematik und Anthropologie am Ende der Tage

Die Entwicklung eines Begriffs von Eigenzeitlichkeit in der Schrift „Coniectura de ultimis diebus“ des Nikolaus von Kues

Harald Schwaetzer

> „Obgleich unser gesamter Kosmos vom Willen des Allmächtigen abhängt, so dass kein Mensch, was dem Herrn im Sinn liegt, zu wissen vermag, wo doch schon das, was in des Menschen Begriff liegt, niemand außer des Menschen Geist weiß, und obgleich es auf diese Weise am allerwenigsten an uns liegt, die Momente der Zeit zu bestimmen, die ja in des Vaters Macht gelegt sind, weil allein dort uns alles Zukünftige auf unzeitliche Weise Gegenwärtiges ist, und obgleich wir, der Heiligkeit des Lebens und der Einsicht in die Schriften im Vergleich mit den Vätern freilich entbehrend, uns ganz besonders von der gelehrten Erforschung des Künftigen deswegen zurückhalten müssen, weil beinahe alle, die bisher etwas über den Sinn der Zeiten geschrieben haben, durch eine trügerische Vermutung getäuscht worden sind, glaube ich dennoch nicht, dass es tadelnswert ist, ohne alle Anmaßung und mit heiliger und aufbauender Untersuchung aus den Heiligen Schriften eine Vermutung über die Zukunft anzustellen, insoweit sie zu unserer Pilgerschaft eine tröstende Erquickung beiträgt.“[1]

Mit diesem Satz beginnt Nikolaus sein Werk „Coniectura de ultimis diebus“ / „Mutmaßung über die letzten Tage“. Die 1446 geschriebene Schrift fällt in eine wichtige Periode seines Schaffens.[2] Obgleich sie gegenwärtig recht wenig rezipiert

1. Coniectura (h IV n.123). – Die Schriften des Cusanus werden zitiert nach der kritischen Ausgabe: Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidem edita. Leipzig / Hamburg 1932 ff (h), mit römischen Bandzahlen. Die Stelle wird mit „n.“ gemäß den Numeri angeben oder, falls nicht vorhanden, mit „p.“.

2. Zur historischen Einordnung vgl. Müller, Tom: "ut reiecto paschali errore veritati insistamus". Nikolaus von Kues und seine Konzilsschrift De reparatione kalendarii. Münster 2010.

SieB 7 (2016), 131-143

wird,[3] kommt ihr doch eine nicht unbedeutende Stellung im Denken des Cusanus zu. Während er in den Jahren um 1445 seine neue Anthropologie des Menschen als einer „viva imago Dei“ vor allem unter räumlichen Metaphern, wie beispielsweise dem Spiegelgleichnis aus „De filiatione Dei“ beschrieben hatte, arbeitet er in der „Coniectura“ an einer dieser neuen Konzeption entsprechenden Philosophie der Zeit. Sie überführt frühere Überlegungen aus der Kalenderreform und dem astronomisch-astrologischen Fragment in die spätere Zeitphilosophie aus den Idiota-Dialogen oder „De aequalitate“. Der für die cusanische Entwicklung entscheidende Punkt dieser Zeitphilosophie, nämlich das Ringen um eine Eigenzeitlichkeit des Menschen, soll im Folgenden vorstellt werden.

Daniels 70 Wochen

Eine wichtige Nuance der cusanischen Überlegungen wird in dem bereits zitierten Eingangssatz deutlich. Während der Titel auf das Weltende verweist, will die Schrift, laut Eingangssatz, eine Vermutung über die Zukunft geben. Die erste Wendung ist theologisch und gehört in die Eschatologie, die zweite ist Teil einer Zeitphilosophie. Diese innere Differenz gilt es für das Folgende im Auge zu behalten.

Ausgangspunkt für die Überlegungen, die Cusanus anstellt, ist jedoch zunächst einmal eine Stelle aus dem Propheten Daniel. Dort heißt es im neunten Kapitel, Vers 24:

> „Siebzig Wochen sind verhängt über dein Volk und über deine heilige Stadt; dann wird dem Frevel ein Ende gemacht und die Sünde abgetan und die Schuld gesühnt, und es wird ewige Gerechtigkeit gebracht und Gesicht und Weissagung erfüllt und das Allerheiligste gesalbt werden.“

An dieser Stelle entzündet sich seit der Spätantike in der christlichen Theologie die Frage nach dem Datum des Weltendes. Diese Stelle bei Daniel ist geradezu leitmotivischer Ausgangspunkt von theologischem oder philosophischem Denken über Zeit. „Siebzig Wochen sind verhängt“, dann wird dem Frevel ein Ende gemacht. Wie lässt sich diese Aussage deuten?

Dass die Zahl der Theorien Legion ist, kann man sich denken, und schon Hieronymus notiert in seinem Kommentar zu Daniel mit Blick auf die Stelle, es hätten

3. In früheren Jahrhunderten gehörte die Schrift zu den am meisten gedruckten und übersetzten Schriften des Cusanus, vgl. Reinhardt, Klaus: Nicolás de Cusa sobre el fin del tiempo. In: Reegen, Jan G. J. ter et al. (Ed.): Tempo e Eternidade na Idade Média. Porto Alegre 2007, 137-143, bes. 137sqq. Vgl. auch: Meier-Oeser, Stephan: Die Präsenz des Vergessenen. Zur Rezeption der Philosophie des Nicolaus Cusanus vom 15. bis zum 18. Jahrhundert. Münster 1989.

sehr viele sehr gebildete Theologen ganz eigene Interpretationen dazu entwickelt, und da es nicht ungefährlich sei, angesichts einer solchen Vielfalt Stellung zu nehmen, wolle er sich lieber auf ein Referat der gängigen Positionen beschränken.[4] Dieser kleine Verweis auf einen prominenten Vorgänger macht deutlich, dass Cusanus andere Töne anschlägt. Sein langer Einleitungssatz hat auch deswegen mehr als rhetorisches Gewicht, weil er sich darin argumentativ gegen eine Position wie diejenige des Hieronymus stellt. Er geht die 70 Wochen Daniels bewusst mit einer eigenen These an. Auffällig ist dabei die Aufnahme des Titelbegriffs der „coniectura". Doch bevor wir uns den systematischen Implikationen der cusanischen These zuwenden, bleiben wir zunächst beim Daniel.

Ausgangspunkt aller Überlegungen zur Weltzeit ist die Zeitangabe der 70 Wochen. Schon seit der Antike gilt, dass es nicht um Wochen im eigentlichen Sinne geht, sondern um einen Rhythmus bzw. eine Periodisierung, welcher der Siebenzahl folgt. Um diesen Sachverhalt deutlich zu machen, kann man auf den großen Bezugstext für die Siebenzahl hinweisen: die Genesis. Dass die Schöpfungstage Tage im herkömmlichen Sinne sein sollen, war von jeher verworfen worden. Als ein mittelalterliches Beispiel sei auf Thomas von Aquin verwiesen. In der Quaestio 58 der Prima Pars seiner Summe der Theologie diskutiert Thomas die Erkenntnisarten der Engel. Im sechsten Artikel geht er der Frage nach, ob es eine Morgen- und Abenderkenntnis der Engel gebe, was er übrigens bejaht. Dabei ist aber zu klären, was „Morgen" und „Abend" bedeutet, und Thomas verweist dazu auf die Genesis. Im „Corpus articuli" heißt es eingangs:

> „Ich antworte, dass man sagen muss, dass dieses, dass gesprochen wird von einer Morgen- und Abenderkenntnis bei den Engeln, eingeführt worden ist von Augustinus, der wollte, dass die sechs Tage, in denen, wie man liest, Gott alles geschaffen hat, nicht so eingesehen werden, dass sie gewöhnliche Tage sind, die durch den Umlauf der Sonne vollendet werden, weil die Sonne, wie man liest, erst am vierten Tage erschaffen worden ist, sondern als ein Tag, nämlich als die englische Erkenntnis, die auf sechs Arten der Dinge repräsentiert wird."[5]

4. Hieronymus: Comm. in Dan. III c.9 (CCSL 75A, lin. 138sqq.): „scio de hac quaestione ab eruditissimis uiris uarie disputatum et unumquemque pro captu ingenii sui dixisse quod senserat; quia igitur periculosum est de magistrorum ecclesiae iudicare sententiis et alterum praeferri alteri, dicam quid unusquisque senserit, lectoris arbitrio derelinquens cuius expositionem sequi debeat." Zur Bedeutung des Daniel-Kommentares von Hieronymus innerhalb der Daniel-Deutung vgl. Courtray, Régis: Der Danielkommentar des Hieronymus. In: Katharina Bracht et al. (Hgg.): Die Geschichte der Daniel-Auslegung im Judentum, Christentum und Islam. Berlin u.a. 2007, 123-150.

5. Thomas von Aquin: STh I$^{\text{a}}$ q. 58 a. 6 co: „Respondeo dicendum quod hoc quod dicitur de cognitione matutina et vespertina in Angelis, introductum est ab Augustino, qui sex dies in quibus Deus legitur fecisse cuncta, Gen. I, intelligi vult non hos usitatos dies qui solis circuitu

Dass Thomas sich damit in der Engelerkenntnis ganz in die Tradition des Dionysius stellt, mag hier beiseitegelassen werden; in unserem Zusammenhang interessiert nur das Argument, dass Morgen- und Abenderkenntnis sich auf den ganzen Vorgang der Schöpfung beziehen und dass der Morgen der Beginn der Schöpfung und der Abend das Ende des sechsten Tages sind, weil im herkömmlichen Sinne von Tag und Nacht ja erst nach der Erschaffung der Sonne geredet werden kann.

Genau diese Argumentationsfigur gilt nun auch mutatis mutandis für die 70 Wochen in der damaligen Diskussion. Es ist folglich ausschlaggebend, dass man erstens überhaupt die Einteilung in einen Rhythmus a 7 teilt und dass man zweitens die Einheit „Woche" angemessen deutet.

Hier sind zwei kleine Zwischenbemerkungen einzufügen. Die erste besteht in dem Hinweis auf die Zusammensetzung von 70 als 7 x 10. 10 gilt seit der Antike, vor allem im pythagoreischen Kontext, als besondere Zahl der Vollkommenheit, weil die Summe der Tetraktys: $1+2+3+4 = 10$ ist. Eine 70er Periode kann damit als Vollkommenheit in der Zeit verstanden werden. Die zweite Bemerkung betrifft die zweite Art, die 7 in die Vollendung zu führen: mit der 8 beginnt eine neue Periode, die zugleich die alte in sich aufhebt – daraus erklärt sich beispielsweise im Christentum der Bezug der 8 auf Christus, wie er sich auch in Predigten des Cusanus findet. Ein besonderer Übergang dieser Art findet statt, wenn 7 x 7 Perioden verstrichen sind: Jeweils das 50. Jahr ist für das Alte Testament ein Jubeljahr als Jahr eines völligen Neubeginns (auch im rechtlichen und ökonomischen Sinne).

Was aus diesen Überlegungen gewonnen wird, ist die Idee eines zyklischen Zeitbegriffs.[6] Im Gegensatz etwa zu einer Linearzeit geht es im Zyklischen um sich wiederholende Rhythmen; am Ende des einen Rhythmus' steht die Wiederholung desselben. Dass die Zahl 7 Maß der zyklischen Zeit ist, gilt grosso modo für viele Theorien der Antike und auch noch des Mittelalters.[7] Nicht nur die sieben Tage der Woche, die Gliederung der Mondphase in 4 x 7 Tage und die Zählung des Jahres in 13 Mondmonate (2 x 7, - 1), wie wir sie etwa noch bei Censorinus in „De die natali"[8] finden, sondern auch die sieben Töne der musikalischen Tonleitern, die auf Apolls Harfe zurückgehen und anderes mag dafür stehen. Insbesondere ist es

peraguntur, cum sol quarto die factus legatur; sed unum diem, scilicet cognitionem angelicam sex rerum generibus praesentatam."

6. In der Terminologie orientiere ich mich an der Begrifflichkeit, wie sie beispielsweise Karen Gloy verwendet. Vgl. dies.: Zeit. Eine Morphologie. Freiburg / München 2006; dies.: Philosophiegeschichte der Zeit. Paderborn 2008.

7. Vgl. F. Fraidl: Die Exegese der siebzig Wochen Daniels in der alten und mittleren Zeit. Graz 1883. Roscher, Wilhelm: Über die Sieben- und die Neunzahl im Kultus und Mythos der Griechen. Leipzig 1904.

8. Vgl. Censorinus, De die natali. Betrachtungen zum Tag der Geburt. Ed. K. Sallmann. Stuttgart 1988.

natürlich die Lehre von der Entwicklung des Menschen in Jahrsiebten, die ihren prominenten Ausdruck in einem seit der Antike immer wieder zitierten Gedicht Solons[9] gefunden hat. Mit ihr steht auch der antike Mensch wie alle anderen lebendigen Naturwesen in einer von außen gegebenen gesetzmäßigen Entwicklung. Eine Eigenzeit im strengen Sinne, also eine individuelle biographische Entwicklung aus eigenem Antrieb, ist hier noch nicht denkbar. An dieser Stelle entsteht für den Cusanus der Jahre um 1445 ein Problem.

Doch auch für Cusanus ist die Lehre von der Siebenzahl, die Zeitgeschehen ordnet, zunächst einmal noch selbstverständlich. Das gilt auch für die „Coniectura de ultimis diebus“. Es heißt dort:

> „Aller Zeitenlauf kehrt in einem Siebenerrhythmus in sich zurück, nämlich in sieben Tagen, sieben Jahren und sieben mal sieben Jahren; das sind neunundvierzig. Deswegen ist das fünfzigste Jahr nach dem mühevollen Lauf der Zeit ein vollkommenes Sabbatjahr, in dem alle Sklaverei ruht und in Freiheit zurückkehrt.“[10]

Zitiert sei darüber hinaus eine Passage aus Sermo CLXX, gehalten in Innsbruck, am 1. Januar 1455. In ihm hält Nikolaus die Eigenzeitlichkeit des Menschen fest; aber gerade diese längere Beschreibung verweist auf ein Problem:

> „Jeder Mensch hat seine eigene Zeit, und sie reicht von seinem Entstehen bis zu seinem Vergehen. Denn wie es einen einzigen Lauf der Sonne gibt, deren Maß die Zeit ist, so ist darum die Zeit unter dem Lauf der Sonne, die der Mensch entweder vom Aufgange oder vom Mittag oder vom Untergange oder von der Mitternacht her zu zählen beginnt, und er benennt einen Tag von dem Moment an, wo die Sonne an einem der Punkte war, bis zu dem sie dann wieder zurückkehrt. Und weil sie nicht zu demselben Punkte genau zurückkehrt, betrachtet der Mensch, wann sie zurückkehrt, und er findet, daß dies in 365 Tagen und sechs Stunden etwa geschieht. [...]
>
> Aus diesem Grunde gibt es verschiedene Jahre: das der Sonne, des Mondes, Saturns, Jupiters, das des Mars, der Venus, des Merkur und der Sterne und so von allen. Nichts, was entsteht oder vergeht, ist ohne Zeit, weil sie das Maß der Bewegung ist. So ist die Zeit für die Vollendung des Fötus im Mutterleibe bei dem einen Lebewesen so, bei

9. Text und Testimonien bei: Iambi et Elegi Graeci ante Alexandrum Cantati. Editit M.L. West. Volumen II. Oxonii 1971 n.27 (p.155sqq.).

10. Coniectura (h IV n.127): „Omne enim tempus septenario revolvitur, septem scilicet diebus,septem annis et septies septem annis, qui sunt 49. Unde annus quinquagesimusest post laboriosam temporis revolutionem sabatissimus,in quo quiescit omnis servitus et redit in libertatem.“

> dem anderen anders, eine Periode bei dem einen, eine andere Periode bei dem andern. [...]
>
> Darum zählen wir in dieser Welt unter dem Lauf der Sonne Perioden. Aber weil die Sonne niemals an genau denselben Punkt zurückkehrt, entstehen auf lange Zeiträume gesehen große Verschiedenheiten, so daß sich Gebiete verändern und die Struktur der Orte und nichts stabil bleibt. Eine Kreisbewegung aber ist es, wenn sie zu ihrem Ursprung zurückkehrt, wie es bei der Acht der Fall ist. Wir erfahren dieses in der Harmonielehre der Musik, wo die Oktave mit der Prim einen Einklang bildet. In gleicher Weise kehrt der Sonntag am achten Tage zurück. Deshalb findet so die Bewegung im Siebenerzyklus ihre Vollendung. Es gibt sieben Tage, sieben Planeten etc. Darüber anderswo, nämlich wie durch Monate und Jahre im Siebenerzyklus in und außerhalb des Mutterleibes alles im Menschen sich vollzieht, und über das Jubeljahr, welches nach sieben mal sieben Jahren wiederkehrt etc.“[11]

Die Stelle macht deutlich, dass Cusanus die Struktur zeitlicher Entwicklung beim Menschen mit seiner Eigenzeitlichkeit und im Kosmos zusammenbindet, indem er eben die Entwicklung nach der Siebenzahl beidem zugrunde legt. Zugleich jedoch scheint der Begriff der „Eigenzeitlichkeit“ unterbestimmt. Denn die Auskunft, dass sie vom Entstehen bis zum Vergehen reicht, trifft alles Lebendige in gleicher Weise. Der zugrundeliegende Zeitbegriff scheint dadurch von den zyklischen Modellen, wie die Antike sie kennt, bestimmt zu sein. Wenn es auch nicht die einfache Wiederkehr des Gleichen ist, so kann man die Eigenzeitlichkeit doch zunächst einmal so lesen, dass sie nichts weiter als eine typische Rhythmisierung darstellt. Dagegen stehen aber die Bemerkung der je eigenen Zeit eines menschlichen Fötus. Hier deutet sich etwas wie eine Eigenzeitlichkeit im strengen menschlich-individuellen Sinne an. Aber die Idee einer spezifisch individuellen Entwicklung als Vorstellung einer Eigenzeitlichkeit, die aus der Kreativität des endlichen Bewusstseins heraus je und je gestaltet wird, ist mit diesem Modell zwar angelegt, aber nicht geklärt. Doch ist der Zeitbegriff des Cusanus mit der zyklischen Zeit nicht erschöpft.

Zyklisches, Lineares, Mathematisches

Ein anderes Zeitverständnis ist für die Frage nach dem Weltende gleichfalls konstitutiv. Es ist ein eher lineares Verständnis. Linearität freilich ist ein schwieriger Begriff. Die tatsächliche Anwendung eines aristotelisch-linearen Begriffs ist keineswegs eine Selbstverständlichkeit. Einen ersten Schritt geht Cusanus bereits 1425

11. Sermo CLXX (h XVIII n.2).

in seinem sogenannten astronomisch-astrologischen Fragment. Darin strukturiert er die gesamte Weltgeschichte nach den Rhythmen der Konjunktionen von Jupiter und Saturn. Solche Konjunktionen ereignen sich alle ca. 240 Jahre. Sie verschieben sich nach und nach im Tierkreis. Auf diese Art und Weise ergibt sich ein durchaus zyklisches Modell. Cusanus jedoch ist einer der ersten, der es rechnend in die Zukunft zu Ende denkt. Nach seinen Überlegungen ergibt sich ihm, dass im Jahre 2458 wiederum die Ursprungskonstellation, von welcher die Weltgeschichte ihren Ausgangspunkt genommen hat, erreicht ist. Er wundert sich darüber, dass „unsere Magister nichts darüber geschrieben haben“.[12]

Mit dieser rechnenden Umsetzung eines zyklischen Modells wird dieses auf einmal zugleich Teil eines linearen Prozesses verstreichender Zeit. Dadurch rückt etwas wie konkrete Zukunft – das Jahr 2458 – ins Bewusstsein. Wie untypisch eine solche Zeitauffassung für die Antike (aber auch für das Mittelalter noch) war, ersieht man übrigens daraus, dass sich Exegeten bis heute sehr schwer tun, ausgerechnet das Buch Daniel historisch zu begreifen. Die historischen Unstimmigkeiten sind ein wesentliches Argument, eine relativ späte Entstehungszeit desselben anzunehmen. Möglicherweise aber liegt dem Buch ein gänzlich anderes Verständnis von Zeit zugrunde.

Für Cusanus jedenfalls rückt eine historische Zukunft in den Blick, indem zyklische Zeit in einen rechnend-linearen Ablauf eingebunden wird. Dieser Gestus findet sich auch in der „Coniectura de ultimis diebus“. So gibt er in dieser Schrift als Endzeit den Zeitraum von 1700 bis 1734 an (n. 133). Ausdrücklich und unter Namensnennung bezieht sich Cusanus bei solchen Überlegungen auf das Buch Daniel (n.137).

Nun ist es aber keineswegs so, dass Nikolaus einen rein linearen Begriff von Zeit an die Stelle des zyklischen setzt. Er wird in den Jahren nach der „Coniectura“ den linearen Zeitbegriff nochmals stärken, etwa in der Schrift „Idiota de staticis experimentis“. Die neuzeitlich angelegten Versuche dieses Buches basieren auf einer quantitativ getakteten, nicht auf einer qualitativ rhythmisierten Zeit.

Dafür greift Nikolaus auf die aristotelische Zeitvorstellung zurück, nach der die Zeit die Zahl der Bewegung ist. Bei den Versuchen mit der Waage spielt die Trias von Messen, Wiegen, Zählen eine entscheidende Rolle.[13] Dabei ist der Begriff des Messens ganz wesentlich mit dem Messen von Zeit verbunden. So wird schon in dem einfachen Beispiel, Wasser fließen zu lassen, bis der Puls eines Menschen

12. Roth, Ulli: Die astronomisch-astrologische "Weltgeschichte" des Nikolaus von Kues im Codex Cusanus 212. Einleitung und Edition Weltgeschichte. MFCG 27 (2001), 1-29, hier: 23. Müller: „ut reiecto paschali“, 31.

13. Vgl. De staticis exerimentis (h V, p.222, lin.3sqq.).

100mal geschlagen hat, um dann den Puls vergleichen zu können, mit einer, modern gesprochen, sogenannten „objektiven“ Zeit indirekt auch eine subjektive Zeit mitgemessen. In gleicher Weise spielt auch bei den Fallexperimenten die getaktete Zeit eine Rolle; Cusanus stellt auch verschiedene Überlegungen zu Wasseruhren und Sanduhren an. Ganz offenkundig handelt es sich um einen experimentell fundierten Zeitbegriff, der auf gleichmäßige räumliche Bewegung und Veränderung gegründet ist.

Diese Zeit wird aber nur auf die Natur und die Gegenstandswelt bezogen, nicht auf den Menschen. Nikolaus weiß um den Nutzen, aber auch die Grenze dieses Zeitbegriffs. So verweist die Diskussion in der „Coniectura de ultimis diebus“ eigentlich auf etwas anderes.

Zeit, Ewigkeit, Moment

In der späten Schrift „De non aliud“ entwickelt Nikolaus nochmals einen Zeitbegriff. Er dient dazu, sich Gott aus der Perspektive der Welt anzunähern. In Anlehnung an die platonische Urbild-Abbild-Relation ist die Ewigkeit für Cusanus im Anschluss an die neuplatonische Philosophie Gottesattribut, die Zeit hingegen eine Ausprägung der Ewigkeit in der Welt. Bereits bei Platon ist die Zeit an die Veränderlichkeit der geschaffenen Welt gebunden, während die Ewigkeit ihr als Eigenschaft des ersten Ursprungs zu Grunde liegt. Innerhalb neuplatonischer Theorien, auf die sich Cusanus in „De non aliud“ explizit stützt, erfährt der platonische Zeitbegriff jedoch eine Erweiterung. Mit den Neuplatonikern konzipiert Nikolaus eine „Zeit der Zeiten“ zwischen Zeit und Ewigkeit. Sie ist eine vermittelnde Instanz zwischen Ewigkeit und Zeit dar und ist Ursprung der verfließenden Zeit in der Welt.

So versteht Nikolaus in „De non aliud“ „die Zeit der Zeiten“ in einer Interpretation der dionysischen Lehre als Aussage, die Gott als den Ursprung jeder zeitlichen Abfolge situiert, da er im Hinblick auf die Welt natürlich auch Urheber der Zeit ist. Der Gesprächspartner Ferdinand folgert daher, dass die Betrachtung der Zeit in Gott dem Wesen der Zeit entspricht, während Zeit in der Welt in Form der Veränderung auftritt. Obwohl Nikolaus diese dionysische Konzeption bestätigt, stellt er die weitergehende Frage, ob Gott auch als Zeitphase, Zeit, Tag und Augenblick bezeichnet werden könne. Darauf antwortet Ferdinand, dass die Zeit analog zum Nicht-Anderen als Urbild unveränderlich ist, aber in den untergeordneten Begriffen der Zeit mit deren Wesen identisch sei. Aus der Perspektive dieser einzelnen Dinge hätten diese jedoch jeweils an dem allgemeinen Wesen der Zeit teil.[14]

14. Vgl. dazu und zum Folgenden: Eisenkopf, Anke / Schwaetzer, Harald: Zeit. In: De non aliud. Nichts anderes. Herausgegeben von Klaus Reinhardt et al. Münster 2012.

Nikolaus weist Ferdinand dann, ganz platonisch, dezidiert auf den grundlegenden Charakter des Augenblicks hin, den er als die Substanz der Zeit definiert. Der Augenblick ist Nikolaus zufolge der unveränderliche und kleinste Bestandteil der veränderlichen Zeit, der daher nicht weiter teilbar ist und in seiner Unveränderlichkeit Anteil an der Ewigkeit als Urbild der Zeit hat. Nikolaus nennt demnach mit dem Augenblick, den er mit dem Jetzt (nunc) und der Gegenwart (praesentia) gleichsetzt, letztlich einen Begriff, welcher die zeitlose Zeit, die auf Gott zutrifft, auf die Welt überträgt. Er scheint sich in dieser Diskussion durchaus aristotelischen Positionen wieder zu nähern. Doch platonisch gesprochen, ist der Augenblick das Maß an Ewigkeit, das innerhalb der materiellen Welt gedacht und erreicht werden kann und im Anschluss an Platon und die Neuplatoniker im Konzept des exaiphnês Ewigkeit und Zeit verbindet.

Die Zeit und deren differenzierte Begriffe dienen Cusanus vor diesem Hintergrund als Veranschaulichung des Konzeptes vom Nicht-Anderen. Denn alle vorher genannten Begriffe, wie auch die von Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft spiegeln für Nikolaus in der neuplatonischen Tradition der Negativen Theologie die Unaussagbarkeit Gottes, da sie nur die Fülle der begrifflichen Annäherungen aufzeigen können, jedoch nicht die zugrundeliegende Struktur bezeichnen. Nur mittels des Nicht-Anderen wird deutlich, dass Gott niemals von einem Anderen unterschieden werden kann. Die Gegenwart als einziges Medium, durch welches das Vergangene und das Zukünftige gesehen werden, entspricht in Anlehnung an die auch bei Cusanus allgegenwärtige Zeittheorie des Augustinus dieser relationalen Struktur, die die menschliche Erkenntnis auf indirektem Weg zu Gott hinführt und das bestimmende Thema in „De non aliud“ ist.

Indem aber die Zeitkonzeption auf das „non aliud“ bezogen wird, wird unter der Hand eine Differenz zwischen dem Verhältnis Mensch – Gott und den übrigen Verhältnissen eingeführt. Dadurch ist die Sonderrolle des Menschen in Bezug auf die Zeit charakterisiert. Einige Jahre zuvor hatte Nikolaus sie in „De aequalitate“ bereits bestimmt erfasst.

Die zentrale Aussage zur Zeitphilosophie lautet in dieser Schrift dahingehend, dass die Seele intemporale tempus ist (n.11). Sie findet sich dadurch an der Schnittstelle zwischen Zeit und Ewigkeit, „im Horizont der Ewigkeit“. Begründet wird ihre Stellung damit, dass sie sich selbst als unvergänglich sieht; das erhebt sie über die Zeit. Ihre Unvergänglichkeit erfährt die Seele aber nicht aus der Perspektive der Ewigkeit, sondern in der Endlichkeit und Zeitlichkeit. Sie findet sich in der Zeit, und sie betätigt sich in der Zeit, indem sie zeitliche und vergängliche Organe zum Wahrnehmen und Schlussfolgern benutzt. Die menschliche Seele ist also actu nicht das, was sie sein könnte. In der Folge (n.12 und n.13) schließt Cusanus an die augustinische Zeitlehre an, welche die drei Zeitstufen von Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft postuliert, in denen er den Ternar memoria, intellectus, voluntas wiederfindet.

Diesen Abschnitt beschließend, sei ein kurzer Blick in die Zukunft der Zeitphilosophie nach Cusanus geworden. Die Konzeption, dass es eine Seele gibt, die zwischen Zeit und Ewigkeit angesiedelt ist und dass es in dieser Seele ein Ewiges ist, dass sie als stets unvergängliches Identitätsmoment im Prozess erfährt und dass drittens dieses Identische im endlichen Prozess der Zeitlichkeit und Veränderung erfahren wird, gemahnt konzeptionell an Schillers Briefe über die ästhetische Erziehung des Menschen, und zwar an den elften Brief mit der Unterscheidung von Person und Zustand im Menschen. Mit dieser Unterscheidung ist aber ein neuer Zeitbegriff gewonnen, der weder zyklisch noch linear, weder platonisch noch aristotelisch ist.

Eigenzeitlichkeit

Kehren wir nochmals zum Eingang der Schrift „Coniectura de ultimis diebus“ zurück. Dort hieß es, wie eingangs zitiert, die bisherigen Autoren, die den Vers bei Daniel interpretierten, seien durch eine „trügerische Vermutung“ irregeleitet worden. Der Terminus „coniectura fallax“ ist nur an dieser einen Stelle im Werk des Cusanus belegt. Zu diesem auffallenden Befund von „coniectura“ gehört ein zweiter. Cusanus schließt seine Schrift mit dem Satz:

> „Dennoch ist er von einer solchen Güte, dass er zulässt, dass wir Würmer über das nur ihm Bekannte aenigmatische Vermutungen aufstellen, welche er, wie es seiner Herrlichkeit gefällt, entweder als etwas durch sein Geschenk Taugliches oder ohne dasselbe als Nichtiges offenbart, damit alle Weisheit allein von ihm kommt, der in Ewigkeit gepriesen sei.“[15]

In diesem Schlusssatz fällt ein weiteres hapax legomenon. „Aengimatische Vermutungen“ / „coniecturas aenigmaticas“ ist ebenfalls nur einmal belegt. Nimmt man noch hinzu, dass Nikolaus die Schrift im Titel als „coniectura“ kennzeichnet, dann wird ersichtlich, wie sehr diese Schrift methodisch auf dem Gedanken der coniectura fußt. Man kann sich nun fragen, welchen Zeitbegriff eine Konjektur voraussetzt. Zunächst verweist die Definition, dass die Konjektur eine positive Aussage sei, die in der Andersheit an Wahrheit teilhabe,[16] sehr präzise auf den oben geschilderten Zusammenhang. Darüber hinaus aber verweist die coniectura auf den Prozess

15. Coniectura (h IV n.140).
16. De coniecturis (h III n.57): „coniectura igitur est positiva assertio, in alteritate veritatem, uti est, participans.“

der Erkenntnisgewinnung mit Blick auf das Subjekt, welches diese Erkenntnis gewinnt.[17] Erkenntnisgewinnung wird nicht rein vom Prozess des Erkennens, sondern vom Subjekt, das in diesen Prozess involviert ist, gedacht. Der Mensch wird durch Erkenntnis anders. Er erfährt, wie Erkenntnis auch methodisch auf ihn rückwirkt und ihn, in den Worten von „Über Gotteskindschaft" gesprochen, zu einem mehr oder minder klaren Spiegel macht. Diese Seite der Konjektur ist unter Zeitkonzeptionen weder linear noch zyklisch einzufangen. Es handelt sich einerseits um einen rein qualitativen Vorgang; deswegen ist er unter der reinen Perspektive einer linear quantitativ getakteten Zeit nicht erfassbar. Es handelt sich andererseits aber auch um einen solchen qualitativen Vorgang, dass dessen Eigenzeitlichkeit nicht naturgemäß gegeben ist, sondern vom Bewusstsein gestaltet wird. Insofern reicht ein rein zyklischer Begriff von Zeit, wie er aus dem kosmologischen Denken der Antike stammt, auch nicht aus.

Der Ansatz von Nikolaus in der „Coniectura de ultimis diebus" verlangt demzufolge einen Begriff von Zeitlichkeit, der die Eigenzeitlichkeit als individuelle Entwicklung des Menschen zu denken sich anschickt. Die Lösung, die Cusanus dafür findet, ist noch vorläufig, doch aufschlussreich mit Blick auf die Zeit und die Entwicklung des cusanischen Denkens selbst.

Denn in der Zeit, in der er zum ersten Mal seinen Begriff des Menschen als einer „viva imago Dei" denkt, ringt Nikolaus darum, für diese Konzeption des Menschen als eines kreativen Gestalters seiner Selbst ein Zeitverständnis zu finden. Dass dasselbe nicht rein subjektiv-individualistisch wird, sondern seine Rückgebundenheit an das Ganze behält, ist aus dem Charakter der „coniectura" und der „mens" einsichtig. So verwundert es auch nicht, dass der christliche Denker auf den Christus als einendes Band zurückgreift. Denn im ersten Teil der Schrift gibt Cusanus der Frage nach der Endzeit eine christologische Wendung. Die Einheit von Gott und Mensch in Christus Jesus und der Lebensweg Christi bilden für ihn als Christen das Urbild aller Entwicklung. Gerade weil die Ausdrücke und Überlegungen noch anfänglich sind, bleibt Cusanus sich hier treu und formuliert diesen Gedanken wiederum als Konjektur:

> „Weil es deshalb notwendig ist, zur urbildhaften Wahrheit hinzuschauen, äußern wir zu Recht die Vermutung, Christi Pilgerschaft werde in der Kirche entfaltet."[18]

Von hier aus gewinnt er seinen Ansatz, um das Weltenende zu berechnen:

17. Vgl. Bocken, Inigo: Die Kunst des Sammelns. Münster 2013.
18. Coniectura (h IV n.126): „Unde cum ad veritatem exemplarem inspicere necesse sit, Christi peregrinationem in ecclesia explicari recte coniectamus."

> „Wenn wir folglich auf den Tag Christi hinschauen, ist sein Tag derjenige des Sabbats, wenn wir auf das Jahr Christi hinschauen, dann ist sein Jahr dasjenige des Herrn- oder Jubeljahres.“

Die kritische Ausgabe weist keine Quelle für diesen Ansatz nach. Weniger diese historische Frage als vielmehr die systematische ist interessant. Wenn die Kirche der Pilgerfahrt Christi folgt, dann ist es ein Weg der Christusförmigkeit, den sie einschlägt. Und dieses Ziel ist bei Cusanus, das lehrt einer seiner kongenialen Interpreten, nämlich Albrecht Dürer, für den Menschen zugleich ein individuelles Ziel.[19] Im Ansatz der „Coniectura de ultimis diebus“ liegt so ein neuer Zeitbegriff von der Eigenzeitlichkeit eines Menschen, der von der geistigen Individualität der „viva imago“ in ihrem endlichen Leben her gedacht ist.

Das Argument, Cusanus denke in der „Coniectura de ultimis diebus“ auf einen neuen Zeitbegriff hin, stützt sich also auf folgende Beobachtung zum Eingang der Schrift: Cusanus verwendet als einen seiner Zeitbegriffe einen zyklisch-qualitativen, der Zeit im Siebenerrhythmus vom Kosmos her denkt. Cusanus kennt die Idee einer Eigenzeitlichkeit im Mikrokosmischen, wobei dabei zunächst noch nicht zwischen dem Menschen und übrigen Geschöpfen unterschieden ist. Die mathematische Durchdringung dieses Zeitbegriffes mit einem eher linear gedachten führt zur Erfassung einer Zukunftsperspektive als einem konkreten Ziel und Ende der Geschichte. Dieses Ziel und Ende der Geschichte wird christlich gedeutet als das Ende der Zeiten. Der Prozess auf dieses hin wird vom Gedanken der Inkarnation Christi her gewonnen; der Lebenslauf Christi wird zur Entwicklungsstruktur. Da der Mensch durch eben diese Inkarnation Christi als „viva imago Dei“ verstanden wird, ergibt sich die Notwendigkeit, für ihn im strengen Sinne eine eigene, individuelle Eigenzeitlichkeit zu denken. Im späteren Werk geschieht die Ausarbeitung dieses Projektes aus der „Coniectura de ultimis diebus“ durch den Begriff der Seele als „intemporale tempus“ mit seinen konjekturalen Implikationen.

Beschluss

Zum Abschluss sei auf die systematische wie historische Tragweite des Befundes geschaut. Auf die Nähe zu Schiller wurde bereits verwiesen. Schiller erläutert das Zusammenspiel von Person und Zustand an der Metapher der Pflanze.

> „Etwas muß sich verändern, wenn Veränderung sein soll; dieses Etwas kann also nicht selbst schon Veränderung sein. Indem wir sagen, die Blume blühet und verwelkt, machen wir die Blume zum Bleibenden in

19. Vgl. diverse Beiträge von Elena Filippi. Vor allem: Dürer als Philosoph. Münster 2013.

> dieser Verwandlung und leihen ihr gleichsam eine Person, an der sich jene beiden Zustände offenbaren.“[20]

Diese Stelle nimmt ein anderer später auf. In seiner Einleitung zur Geschichte der Philosophie behandelt Hegel zwei für seine Konzeption von Philosophiegeschichtsphilosophie[21] zentrale Begriffe: den des Konkreten und den der Entwicklung. Knapp notiert er, sehr dicht bei Schiller:

> „In die Existenz treten ist Veränderung und in demselben eins und dasselbe bleiben.“[22]

Dann geht er ebenfalls wie Schiller auf die Entwicklung der Pflanze ein. Auch er macht das Metaphorische des Vergleichs deutlich. Die Entwicklung vom Keim zur Pflanze hat dabei „das scheinbare Resultat, in zwei Individuen zu zerfallen; dem Inhalte nach sind sie dasselbe“.[23] In dem organischen Entwicklungsbegriff selbst ist noch keine Individualentwicklung im strengen Sinne zu erkennen. Eben darum ist sie für Hegel nicht auf den Menschen übertragbar.

> „Im Geiste ist es anders. Er ist Bewußtsein, frei, darum, daß in ihm Anfang und Ende zusammenfällt. [...] Die Entwicklung des Geistes ist Herausgehen, Sichauseinanderlegen und zugleich Zusichkommen.“[24]

Damit setzt Hegel für die Geschichte der Philosophie einen Begriff von Entwicklung, der eine Eigenzeitlichkeit des Individuums so denken kann, dass sich das Bewusstsein des Geistes nach und nach in die Lage versetzt, diese Eigenzeitlichkeit sich kreativ zu eigen zu machen. Es ist schade, dass Hegel mit Nikolaus von Kues nicht in der Weise vertraut gewesen ist, dass er dessen Rolle für die Begründung dieses idealistischen Konzepts hätte würdigen können.

---

20. Schiller: Über die ästhetische Erziehung des Menschen in einer Reihe von Briefen, SW 5, S. 602.
21. Vgl. dazu auch den Band 12 aus der Theorie-Ausgabe bei Suhrkamp. Ferner: Krijnen, Christian: Hegels Parallelitätsthese von Logik und Geschichte. Kritische Bemerkungen zur Philosophiegeschichtsphilosophie Windelbands und Spickers. In: Schwaetzer, Harald / Schweizer, Christian (Hgg.): Geschichte, Entwicklung, Offenbarung. Gideon Spickers Geschichtsphilosophie. 3. Gideon Spicker-Symposion. Regensburg 2005. 145-162. Ferner: Förster, Eckhart: Die 25 Jahre der Philosophie. Frankfurt 2011, 277sqq. (mit drei Kapiteln zur Konzeption der Geschichtsphilosophie bei Hegel mit einer sehr feinsinnigen Deutung von Goethes Naturwissenschaftsbegriff her).
22. Hegel: Geschichte der Philosophie. Suhrkamp: Theorie-Ausgabe, 18, 40.
23. Ebd. 41.
24. Ebd.

Oskar Becker und die Pyramiden

Christian Thiel

Die hier vorgelegte Studie fasst zwei Vorträge zusammen, die ich auf den „Oskar-Becker-Tagungen" in Hagen im Februar 2005 bzw. Februar 2007 gehalten habe. Ich versuche dabei, den Kontext der vier Aufsätze O. Beckers über die Maßverhältnisse der ägyptischen Pyramiden zu vergegenwärtigen, greife die für einen Neudruck dieser Texte wichtige Frage nach Beckers Motivation und seinen wechselnden Problemstellungen auf und formuliere, gelegentlich kommentierend, seine wichtigsten Thesen. Das bei den Vorträgen gezeigte reiche Bildmaterial konnte hier leider nicht wiedergegeben werden; lediglich zwei für das Verständnis des Textes unentbehrliche Abbildungen wurden aufgenommen.

Die vier Aufsätze Oskar Beckers, die sich ausdrücklich mit den ägyptischen Pyramiden beschäftigen, stammen aus den Jahren 1961 bis 1964 und sind durchwegs kurze Arbeiten (die letzten beiden sind nur 2 Seiten lang). Es handelt sich um die folgenden, sämtlich in der Zeitschrift *Praxis der Mathematik* erschienenen Texte:

1961 Über die Proportionen der ägyptischen Pyramiden I: Die klassischen Pyramiden des Alten Reiches. *Praxis der Mathematik* 3 (1961), 260–266.

1962 Über die Proportionen der ägyptischen Pyramiden II: Die späteren Pyramiden. *Praxis der Mathematik* 4 (1962), 57–63.

1963 Über die Proportionen der ägyptischen Pyramiden III: Die Pyramide von Meidum: Die Entwicklung der klassischen Pyramide aus der alten Stufenpyramide. *Praxis der Mathematik* 5 (1963), 175–76.

1964 Über die Proportionen der ägyptischen Pyramiden IV: Die Königskammer der Cheopspyramide. Zu den Abmessungen der sogenannten Königskammer im Inneren der Cheopspyramide. *Praxis der Mathematik* 6 (1964), 225–226.

Dabei ist Beckers Hinwendung zur vorgriechischen Mathematik neu, denn zu dieser gibt es von ihm neben den vier genannten Aufsätzen nur noch einen ihnen zeitlich unmittelbar vorausgehenden weiteren, nämlich den 1961 ebenfalls in der *Praxis der Mathematik* erschienenen Aufsatz über „Die Bedeutung des Wertes $3^1/_8$ für π in der babylonischen Mathematik". Keineswegs neu ist dagegen Beckers Befassung mit Mathematikgeschichte überhaupt: In den 1930er Jahren hatte er sich mit seinen „Eudoxos-Studien" einen hervorragenden Namen gemacht, in den 1950er Jahren verfasste er zusammen mit dem Mathematikhistoriker Joseph Ehrenfried Hofmann eine *Geschichte der Mathematik* (1951, in französischer Übersetzung 1956); 1954 gab er in der Reihe *Orbis Academicus* seine bekannte Sammlung *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung* heraus und veröffentlichte 1957 eine Monographie *Das mathematische Denken der Antike*. Auch wenn in diesen Arbeiten der 1930er und 1950er Jahre die Proportionenlehre eine wichtige Rolle spielt und auch die Harmonielehre berührt wird (allerdings mehr in der Musik als in der Architektur), so geht es doch überall um die *antike*, nicht um die vorgriechische Mathematik. Was also hat Becker auf diese geführt? Noch dazu in einem Zeitraum, in dem Becker von existenzphilosophischen Fragen bewegt wird und phänomenologische Ansätze mit ästhetischen und hermeneutischen zu verbinden versucht – 1958 erscheint sein Festschriftbeitrag für Erich Rothacker „Von der Abenteuerlichkeit des Künstlers und der vorsichtigen Verwegenheit des Philosophen", 1963 eine Sammlung seiner philosophischen Aufsätze unter dem Titel *Dasein und Dawesen*.

Nun ist es als solches noch nicht verwunderlich, wenn sich jemand, der in der Mathematikgeschichtsschreibung vor allem als Experte für die altgriechische Mathematik bekannt ist, auch mit der Vorgeschichte der antiken Mathematik beschäftigt, und weshalb sollte gerade er nicht miträtseln an den ägyptischen Pyramiden, die seit jeher ein Faszinosum besonderer Art gewesen sind? Nicht nur weil die Cheops-Pyramide mit ihren $2^1/_2$ Millionen Steinen das größte Einzelbauwerk in der Geschichte der Menschheit ist; das acht Kilometer südlich von Giseh und damit von Kairo gelegene Pyramidenfeld mit der Cheops-Pyramide, der Chefren-Pyramide, der Mykerinos-Pyramide und der Sphinx ist eindrucksvoll genug. Daneben gibt es andere, kleine und etwas anders gestaltete Pyramiden. Wie alt sie wohl sind, wie sie errichtet wurden und welchem Zweck sie dienten, sind Fragen, die sich aufdrängen, und für den Mathematiker mag die ausgezeichnete geometrische Form noch einen zusätzlichen Reiz haben.

Unabhängig von all dem scheint Becker aber auch sozusagen von außen besondere Anstöße zu der Befassung mit den Pyramiden erhalten zu haben, die weit hinausgehen über die Erwähnung der „Böschung", d. h. der Neigung z.B. der Seitenflächen von Pyramiden in der mit Hofmann verfassten *Geschichte der Mathematik* und in der *Orbis*-Sammlung. Und tatsächlich stoßen wir in dem im Philosophischen Archiv in Konstanz deponierten Teil von Beckers unveröffentlichtem Nachlass nicht nur auf sehr umfangreiche Studien, vor allem auf Berechnungen der Pyramidenmaße, sondern auch auf einschlägige Korrespondenz, u.a. mit Evert M. Bruins, dem großen Erforscher der babylonischen Mathematik, und mit Gustav Strobl, einem Bau-Ingenieur und Baurat, der sich (anscheinend hobbymäßig) mit den Maßen der ägyptischen Pyramiden beschäftigt und ein ca. 180 Seiten umfassendes Manu- oder Typoskript zu diesem Thema verfasst hatte, das er Becker für eine Zeitlang zur Verfügung stellte (der Verbleib dieses Textes oder auch Strobls selbst hat sich bislang nicht ermitteln lassen). Von Strobl und dem streitbaren Bruins dürften die Haupteinflüsse und Anregungen für Becker zu unserem Thema gekommen sein. Dies, aber auch der Ertrag der Beckerschen Arbeiten zum Thema wird bei der Edition dieser Texte zu berücksichtigen sein.

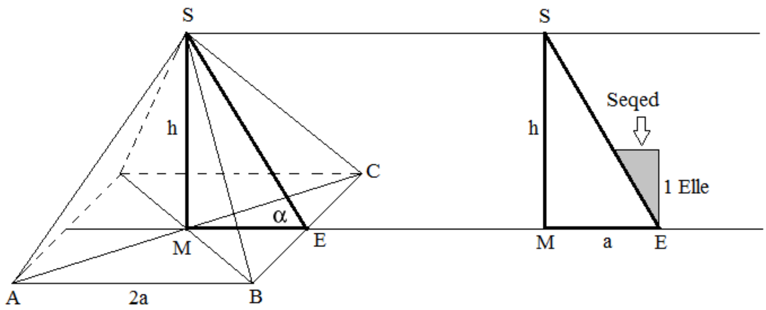
Becker war sich über eines sehr im Klaren: Wer sich nicht als Ägyptologe, aber doch als Vertreter einer anderen Disziplin mit wissenschaftlichen Ansprüchen zu den Pyramiden äußert, muss gleich zu Anfang für eine sichtbare Distanz zu einem Umfeld sorgen, das (nicht ohne Grund) allgemein als unseriös gilt. Auch Schweigen kann diese Distanz zum Ausdruck bringen, und so erwähnt Becker in seinen Einleitungsworten zu der Artikelserie erst gar nicht eines der einflussreichsten Werke der Pyramidenliteratur, Fritz Noetlings *Die kosmischen Zahlen der Cheopspyramide, der mathematische Schlüssel zu den Einheits-Gesetzen im Aufbau des Weltalls* (Stuttgart 1921), sondern verweist für eine „umfassende kritische Darstellung der mystischen und phantastischen Pyramidenliteratur“ (Becker 1961, 260 n) auf Jean-Philippe Lauers *Le Problème des Pyramides d'Égypte* (Paris 1948). Dort wird auch ältere Literatur dieser Gattung in einem Kapitel „Des prétendus secrets des pyramides“ diskutiert, insbesondere die Schriften des schottischen Royal Astronomer Piazzi Smyth von 1864 bzw. 1867, dessen Spekulationen in Deutschland vor allem durch eine Art Referat in dem Roman des Ingenieurs Max Eyth, *Der Kampf um die Cheopspyramide. Eine Geschichte und Geschichten aus dem Leben eines Ingenieurs* bekannt wurden (u.a. als 3. Band der *Gesammelten Schriften* Eyths; das Buch erlebte um 1913 schon die 72. Auflage!). Dänikens Bestseller waren noch nicht erschienen, aber schon seine Vorläufer fragten, ob es denn Zufall sein könne, „daß die Höhe der Cheopspyramide – mit einer Milliarde multipliziert – annähernd der Distanz Erde/Sonne entspricht? [...] daß die Grundfläche der Pyramide – geteilt durch die doppelte Höhe – die berühmte Ludolfsche Zahl Pi = 3,1416 ergibt?“ (Däniken 1968, 118f.). Auch ohne die neueren Beiträge zu diesem unvermeidbaren Umfeld ist leicht nachzuvollziehen, weshalb Becker seine erste Pyramidenstudie mit den vorsichtigen Worten beginnt (I, 260):

„Die Abmessungen der ägyptischen Pyramiden der IV. Dynastie sind der Gegenstand einer ausgebreiteten, vielfach phantastischen Literatur geworden, so daß das hier vorliegende Problem in Mißkredit geraten ist. Trotzdem sollte es nicht verschüttet werden; denn jene ungeheueren Bauten (vor allem bei Gise [Giza] in der Nähe von Kairo) sind so sorgfältig ausgeführt, daß ihre Abmessungen nicht unüberlegt oder willkürlich gewählt sein können.

Der Fehler jener phantastischen Literatur liegt nicht nur darin, daß sie in historisch zumeist sehr schlecht fundierter Weise eine mehr oder weniger willkürlich erdachte Symbolik in die Pyramiden hineingeheimnist, sondern auch darin, daß sie den Ägyptern des 3. Jahrtausends mathematische und astronomische Kenntnisse zuschreibt, die sie unmöglich gehabt haben können. Die folgenden Bemerkungen halten sich nicht nur von einer symbolischen Ausdeutung der sich aus den Maßen der Pyramiden ergebenden Zahlen fern, sondern es wird bei ihnen auch besonderes Gewicht darauf gelegt werden, nur solche mathematischen Beziehungen ins Spiel zu bringen, die den ägyptischen Baumeistern des Alten Reichs zugänglich gewesen sein könnten".

Zu seinem Hauptthema macht Becker die einen einheitlichen Kunststil bildenden, klassischen Pyramiden des Alten Reiches, datiert zwischen die noch tastenden Versuche der Frühzeit (III. Dynastie) und die ganz anders strukturierten Pyramiden des Mittleren und Neuen Reichs und Äthiopiens, also zwischen ca. 2600 und 1000 v. C. Die Maßverhältnisse der Pyramiden entnimmt Becker für seine Untersuchung vorwiegend den Tabellen von Noel W. Wheelers dreiteiligem Aufsatz „Pyramids and their Purpose" in *Antiquity* 9 (1935) sowie I.E.S. Edwards, *The Pyramids of Egypt* (1947 u.ö.). Dabei findet man als Neigungswinkel der Pyramidenseiten $51^\circ\,51'$, $53^\circ\,8'$ und $51^\circ\,10'$. Es gilt nun, „die erwähnten drei Neigungswinkel zu erklären. Denn in ihnen verkörpern sich offenbar drei ‚Lösungen' desselben architektonischen Problems, die später öfter wiederholt werden, also keinen zufälligen Charakter tragen" (I, 261). Der Neigungswinkel wird bei den ägyptischen Mathematikern und daher wohl auch bei den Baumeistern nicht als Winkel angegeben, sondern als Verhältnis von Höhe und halber Seitenlänge der Pyramidengrundfläche, nach heutiger Sprechweise als Cotangens des fraglichen Winkels α. Konkret wird allerdings auch nicht ein solches Verhältnis genannt, sondern der sog. „Rücksprung" der Pyramidenwand innerhalb einer Elle Höhe gegenüber einer Senkrechten.

„Seqed" oder „skt" oder „śkt" ist zusammengesetzt aus dem Kausativpräfix „ś" und dem Wort „kt" für „bauen", also vielleicht zu übersetzen als „zum bauen"; die Hieroglyphe für „bauen" zeigt vermutlich ein Werkzeug zur Kontrolle des beizubehaltenden Rücksprungs (eine „Schräglehre"). Für die Mathematik beruft sich Becker in diesem Bereich fast durchwegs auf die Standardliteratur: Neugebauer, van der

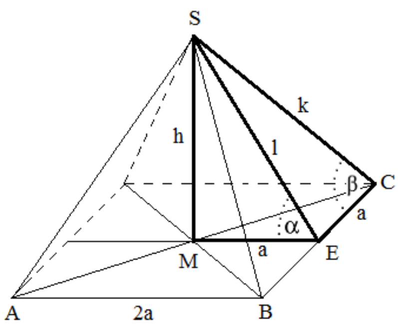


Waerden, Kurt Vogel, auch wenn diese in Beckers Briefwechsel mit Bruins von diesem oft heftig angegriffen und ihre Daten, Methoden und Folgerungen bezweifelt werden.

Bei der Chephren-Pyramide mit dem Neigungswinkel 53° 8′ sieht Becker den Cotangens von α als 3 : 4, so dass „die Hälfte des Querschnittsdreiecks der Pyramide das einfachste rationale Dreieck ist mit den Seitenverhältnissen a : h : s = 3 : 4 : 5. Das schrägliegende Seitendreieck hat also die Proportionen Basis : Höhe = 6 : 5, für die ganze Pyramide gilt

$$\text{Basis} : \text{Höhe} = 6 : 4 = 3 : 2.$$

Man könnte sich mit dem Aufweis dieser einfachen Zahlenverhältnisse zufriedengeben. Man darf jedoch nicht übersehen, daß sie sich bezüglich der Seitenlinie erst aus dem ‚pythagoreischen' Dreieck mit den Proportionen 3 : 4 : 5 ergeben, dessen Kenntnis bei den Pyramidenarchitekten also vorausgesetzt werden muß" (I, 262).



$\mathrm{ctg}\ \alpha = {}^{a}/_{h} = {}^{3}/_{4}$; $\mathrm{ctg}\ \beta = {}^{a}/_{l} = {}^{3}/_{5}$

Nun kommt Becker ohne Überleitung zu Herons *Metrica* I 18 und I 23, wo das sog. Bestimmungsdreieck des regulären Fünfecks (gebildet aus zwei Endpunkten einer Seite und dem Mittelpunkt O des Fünfecks) aus zwei rechtwinkligen Dreiecken der Proportion 3 : 4 : 5 zusammengesetzt wird, „so daß dieses Zentraldreieck ABO [...] genau dem Querschnittsdreieck der Chephren-Pyramide entspricht“ (ibid.). Allerdings ist im regulären Fünfeck der Winkel des Zentraldreiecks genau 54°, während der Neigungswinkel der Chephren-Pyramide nur $53°\,8'$ beträgt, so daß eine Differenz von $52'$ bleibt. „Indessen“, fährt Becker fort, „hatten die ägyptischen Baumeister des 3. Jahrtausends kaum eine andere Möglichkeit, das Fünfeck sich für ihre Zwecke rechnerisch gefügig zu machen“, und er fragt daher: „Durch welche Überlegung kamen nun wohl die Ägypter zu der beschriebenen Approximation für die Seite des Fünfecks?“ (ibid.). Für mich bleibt dabei die Frage, ob sich die Ägypter, die ja Heron nicht hatten lesen können, überhaupt das Fünfeck „gefügig“ machen wollten. Becker zeigt ja anschließend selbst, dass zur Kenntnis des Bestimmungsdreiecks des regulären Pentagons weder die Kenntnis des allgemeinen pythagoreischen Lehrsatzes, noch die spezielle Gleichung $3^2 + 4^2 = 5^2$ nötig war, sondern allein, dass beim Verhältnis der Dreieckseiten 3, 4 und 5 ein rechter Winkel entsteht, und das findet sich auch in sog. primitiven Kulturen, empirisch gefunden oder auf uns nicht bekannte andere Weise.

Bei der Cheops-Pyramide haben wir den Neigungswinkel $51°\,51'$ ($\mp 1'$), was einen Cotangens von $11/14$ ergibt. Mit dem archimedischen Näherungswert $22/7$ für π wäre das $\pi/4$, aber nach Becker ist es ganz ausgeschlossen, dass die Ägypter diesen Näherungswert schon gekannt haben. Ebenso merkwürdig ist, dass der $\cos\alpha$ für $\alpha = 51°\,50'$ gerade 0,6180 wird, was „eine sehr gute Näherung für das Verhältnis der stetigen Teilung $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) : 1$ darstellt“ (I, 263). Auch das tritt am regulären Fünfeck auf, nämlich als Verhältnis der Seite zur Diagonalen. Wiederum ist es jedoch für Becker „sehr unwahrscheinlich, daß die Ägypter eine so gute Approximation für das irrationale Verhältnis der stetigen Teilung besessen haben. Aber die geometrische Beziehung zum Fünfeck ist durchaus möglich; denn das Fünfeck ist schon seit sehr alten Zeiten in Ägypten bekannt. Das beweist die betreffende Hieroglyphe, die einen *fünfstrahligen* Stern darstellt“ (I, 264; wohl eher fragwürdig). „Auf jeden Fall ergibt sich aus dem Gesagten, daß das Querschnittsdreieck der Cheops-Pyramide und verwandter Bauten, wie etwa der Pyramide des Snofru in Meidum zur Basis die Seite und zu Schenkeln je eine halbe Diagonale des Fünfecks hat“.

Die ägyptischen Architekten hatten nur primitive mathematische Mittel; wie konnten sie die geometrischen Verhältnisse ihrer Pyramiden berechnet haben? Wie die ganze Antike, auch noch die Griechen in hellenischer Zeit, nahmen sie wohl das Verhältnis der stetigen Teilung als 5 : 8. Für das Verhältnis AM : MS der

Cheops-Pyramide ergibt sich dann 4 : 5, das Querschnittsdreieck hat die Proportion 20 : 25 : 32, was zwar nicht pythagoreisch ist, aber fast pythagoreisch, es ist nämlich $20^2 + 25^2 = 32^2 + 1$. Es ist also nicht genau rechtwinklig, doch ist „die Abweichung gering“ (ibid.).

Nach dem Nachweis der Berechenbarkeit stellt sich für Becker aber doch das Problem, dass „die tatsächlichen Abmessungen der Cheops-Pyramide [...] gar nicht den Proportionen des Dreiecks 20 : 25 : 32 mit auch nur einiger Genauigkeit [entsprechen]; vielmehr stimmen sie viel besser mit den von der Geometrie des Fünfecks geforderten Verhältnissen überein als jenes Dreieck. Wie ist das zu erklären?“ (I, 265). Beckers Lösung ist: die ägyptischen Baumeister haben einen rechnerisch sperrigen Seqed abgerundet und „damit *unbeabsichtigt* (!) eine bessere Annäherung an die wahren geometrischen Verhältnisse erzielt, als sie ihrer ursprünglichen Berechnung entsprach“ (ibid.).

All dies steht schon in dem ersten Beitrag Beckers, und in der Tat bringen die drei übrigen nicht viel Neues hinzu. Teil II gibt zunächst anhand von Tabellen eine Übersicht über die Maße der Pyramiden des Alten, Mittleren und Neuen Reiches sowie der äthiopischen Pyramiden und stellt für letztere und die Pyramiden des Alten Reiches sehr detaillierte Verhältnis-Berechnungen an. Dazwischen schiebt Becker eine „Zusammenfassende Schlußbemerkung“, auf deren Inhalt ich gleich komme, die aber auch nicht wirklich den Schluss der Überlegungen bildet. Noch in Teil II folgt ein Anhang zu den Stufenpyramiden sowie ein Nachtrag zur Konstruktion der sog. Knickpyramide des Snofru, vor allem aber kommen ja später noch ein dritter und ein vierter Teil hinzu. Von diesen ist Teil III dadurch interessant, dass Becker hier den Übergang von den Stufenpyramiden zur klassischen Pyramide gefunden zu haben meint. Die Stufenseiten sind nämlich nicht senkrecht, sondern in einem bestimmten Winkel geneigt, und Messung ergibt, dass die Breite der Stufe, „d. h. der von außen sichtbare Rücksprung der Stufe gegen die unmittelbar unter ihr liegende Stufe, die *Hälfte* der Höhe [...] der Stufe beträgt“ (III, 175). Bei einer Stufenhöhe von 14 Einheiten ergibt sich ein „Einzug“ der oberen Kante gegenüber der unteren von 11 Einheiten. Das heißt, folgt der Aufbau der *Stufen*pyramide dem Gesetz, dass der sichtbare Rücksprung der Stufen so tief ist wie deren halbe Höhe, dann ergibt sich für die Neigung der *verkleideten* Pyramide gerade der Wert 11/14. Becker zeigt sich erleichtert, jetzt bei den Ägyptern keine komplizierte numerische Mathematik mehr voraussetzen zu müssen, geschweige denn eine Näherung wie $11/14 = \pi/4$, und auch das vorher mit angestrengter Argumentation herangezogene Fünfeck erweist sich nun auf einmal als „überflüssig“.

In Teil IV schließlich denkt Becker über die Maße der sog. Königskammer (mit dem leeren Sarkophag) in der Cheops-Pyramide nach. Ihre Grundfläche hat die

Gestalt eines Doppelquadrats, also zweier aneinander gelegter Quadrate, ihre Höhe beträgt die Hälfte der Diagonale der Grundfläche. Becker stellt fest, dass bei einer Quadratseitenlänge von 10 Ellen die Diagonale der Stirnseite *genau* 15 Ellen und die Raumdiagonale der Kammer *genau* 25 Ellen misst, und zeigt dann, dass diese Raumdiagonale „mit sehr primitiven Mitteln ohne Voraussetzung von systematischen geometrischen Kenntnissen" (IV, 225) bestimmt werden kann. Das gleiche gilt für die Länge der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten 3 und 4, so dass Becker durch seine neue „nüchterne" Erklärung (III, 176) einige methodologische Gewissensbisse los ist und die Serie jetzt mit einer zweiten Schlussbemerkung wirklich beenden kann.

Auch ich komme zum Schluss, indem ich etwas zu den drei m. E. wichtigsten Äußerungen Beckers sage, die teils Thesencharakter haben, teils die von ihm verfolgten Absichten zeigen. Als 1. These könnte man die Feststellung aus I, 266 ansehen:

> „Sämtliche klassische Pyramiden erhalten ihre Gestalt vom Bestimmungsdreieck des regelmäßigen Fünfecks aus, das in verschiedener Weise bei der Konstruktion zuerst der Seitendreiecke, dann des Querschnitts verwendet wird".

Eine Art Motivation für diese These steht am Anfang von Teil II (57):

> „Wir versuchen die Neigungswinkel der Pyramiden verschiedener Zeitalter dadurch zu ‚erklären', daß wir sie mit geometrischen Figuren (regelmäßigen Polygonen) und mit ‚pythagoreischen' und ‚fast pythagoreischen' Dreiecken (bei denen die Gleichungen $a^2 + b^2 = c^2$ bzw. $a^2 + b^2 = c^2 \pm 1$ zwischen den Seiten a, b, c in ganzen Zahlen lösbar sind) in Beziehung setzen".

Diese Vergleiche führen Becker zu seiner 2. These:

> „Es stellt sich heraus, daß sich in fast allen Fällen derartige Beziehungen nachweisen lassen. In einzelnen Fällen sind sie vielleicht von den ägyptischen Baumeistern nicht beabsichtigt gewesen, im ganzen kann es sich nicht um bloßen Zufall handeln".

Herauszufinden, worin nun aber das „Nichtzufällige" besteht, wie sozusagen die „Rationalität" in die ägyptischen Pyramiden hineinkam, das hatte Becker schon am Anfang seiner Aufsatzserie als Motivation und Ziel genannt. Für diese gilt aber sicher auch allgemeiner, was er in seiner zweiten, endgültigen „Schlußbemerkung" über die Betrachtung der Königskammer sagt (IV, 226):

> „Unser Interesse [...] ist hier nicht archäologisch, sondern mathematikgeschichtlich. Das Datum der Erbauung der Cheopspyramide, etwa 2650 v. Chr., ist, mathematikgeschichtlich betrachtet, außerordentlich früh; denn die altbabylonischen mathematischen Keilschrifttexte (Aufgabentexte) sind frühestens auf 1900 v. Chr. zu datieren und ähnlich die Texte aus dem elamitischen Susa. Sie sind also 750 Jahre jünger als die Cheopspyramide. Wir haben so bei dieser die Gelegenheit, in ein außerordentlich frühes Stadium der Entwicklung der Geometrie hineinzublicken.
>
> Wenn wir mit unserer Rekonstruktion das Richtige getroffen haben, so zeigen die anfänglichen geometrischen Bemühungen der alten Ägypter des dritten Jahrtausends eine sehr bemerkenswerte Fähigkeit räumlicher Anschauung; es fehlt aber durchaus eine systematische mathematische Entwicklung von Sätzen, die aufeinander aufbauen".

Für die „merkwürdige, zunächst erstaunlich scheinende" (IV, 226) Geometrie der Königskammer und wohl auch der Pyramiden überhaupt meint Becker gezeigt zu haben, „daß begrifflich sehr einfache, anschauliche Betrachtungen völlig ausreichen". Das gibt ihm die am Ende der „ersten" Schlussbemerkung ausgedrückte Hoffnung, die Tragweite seiner Überlegungen könnte sich „über das besondere Problem der ägyptischen Pyramiden hinaus erstrecken und auf die schwierige Frage der gedanklichen Struktur der frühen Mathematik überhaupt ein Licht werfen" (II, 60).

Offensichtlich führt das in Überlegungen zur Methodologie der Wissenschaftsgeschichtsschreibung, und meine etwas kritische Einstellung zu Beckers Pyramidenarbeiten – die er ja in dem eben gebrachten Zitat selber als „Rekonstruktion" bezeichnet – ist immer noch dieselbe, die ich in meinem Festschriftbeitrag für Jürgen Mittelstraß unter dem als Frage formulierten Titel „Rekonstruieren, was es nie gab?" ausführlicher dargelegt habe (Thiel 2005). Auch da spielte Oskar Becker eine Rolle, dem 1936 eine Art mathematikhistorischen Durchbruchs gelungen war. Er befasste sich dort mit der Frage, weshalb am Ende des (arithmetischen) IX. Buches von Euklids *Elementen* nach dem berühmten Satz vom Nichtabbrechen der Primzahlenreihe (IX 20, mit selbst nur loser Verbindung zu den vorhergehenden Sätzen) auf einmal Sätze über die Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen von geraden und ungeraden Zahlen auftauchen, deren letzter ein ebenfalls berühmter Satz über vollkommene Zahlen ist – ein krasser Abbruch der vorausgehenden deduktiven Argumentation oder Herleitung. Becker fragte (Becker 1936, 534), „ob hier nicht eine Verdunkelung des ursprünglichen Gedankenaufbaus stattgefunden hat. [...] Sollte [...] nicht ursprünglich der Satz von den vollkommenen Zahlen das

Ziel und Ende der ‚Lehre vom Geraden und Ungeraden' gebildet haben?". Und als bejahende Antwort liefert er (ibid.) „eine Rekonstruktion des ursprünglichen Zusammenhangs der Sätze [Euklid] IX, 21–36 [...] mit der ferneren Absicht, ein Stück stilistisch sehr alter griechischer Mathematik wieder ans Licht zu ziehen".

Ich habe Beckers Arbeit über die altpythagoreische Lehre vom Geraden und Ungeraden zwar eine „Rekonstruktion" in Anführungszeichen genannt, aber auch gesagt, dass sie mehr ist als ein bloßes Kabinettsstückchen, insofern sie m.W. erstmals einen nachvollziehbaren Vorschlag zum Verständnis der beiden Stellen in Aristoteles' *Analytica priora* (41a26, 50a37) bietet, nach denen aus der Annahme der Kommensurabilität von Seite und Diagonale des Quadrats folgen würde, dass die geraden Zahlen den ungeraden Zahlen gleich seien, was absurd ist.

Das will ich hier natürlich nicht alles noch einmal ausführen. Aber ich möchte betonen, dass ich trotz erheblicher Bedenken gegen einige lose und manchmal geradezu inkonsistente Äußerungen in den vier Pyramidenaufsätzen Becker eine besondere, ganz bewusste Einstellung zu den Aufgaben der Mathematikgeschichtsschreibung zugestehe. Ich denke dabei freilich mehr an die Haltung, die Becker in seinem letzten Lebensjahr im Vorwort zu einem von ihm herausgegebenen Sammelband (Becker 1965, XIII f.) dokumentiert hat, wo er auf den Gegensatz, aber auch die gegenseitige Ergänzung von „sachlicher Aufklärung" und historisch-hermeneutischer Interpretation in der Mathematikgeschichtsschreibung hinweist und erklärt, dem schließe sich

> „eine weitere mögliche Fragestellung an, die allerdings vielleicht nicht mehr zur Mathematik-Geschichte im strengen Sinn zu rechnen ist, sondern eine Art weitergehender, jedoch unter Umständen sehr reizvoller Spekulation darstellt. Man kann nämlich manchmal fragen: Was hätte mit den in einem bestimmten Zeitpunkt nachweislich schon erworbenen Mitteln in einem bestimmten Felde erreicht werden können? Das kann man auch dann fragen, wenn keine oder auch nur eine sehr schwache Andeutung in dieser Richtung in unseren Quellen vorliegt".

Solche Spekulation kann man reizvoll finden und den belassenen großen Freiraum nutzen, um sich die unterschiedlichsten Szenarien auszudenken, wie dies z.B. auch Árpad Szabó für die voreuklidische Mathematik getan hat. Nur: Unter systematischem Gesichtspunkt, d.h. aus der Sicht einer Methodologie der Wissenschaftsgeschichtsschreibung bleiben „Rekonstruktionen" der erörterten Art problematisch. Darf sich der Mathematikhistoriker, um es scharf zu formulieren, der Gefahr aussetzen, etwas zu „rekonstruieren", was es möglicherweise niemals gegeben hat?

Becker war davon überzeugt, sogar in der zitierten (auch selbstkritischen) Äußerung von 1965, wo er mathematikhistorische Rekonstruktionen als Antworten auf die Frage begreift, was „mit den in einem bestimmten Zeitpunkt nachweislich schon erworbenen Mitteln in einem bestimmten Felde [hätte] erreicht werden können?“ (Becker 1965, XIII f.). Sicher kann es passieren, dass hin und wieder ein Beweis „rekonstruiert“ wird, der in Wahrheit an dieser gegenwärtigen Stelle zum ersten Mal geführt wird. Auch wenn die Rede von „Rekonstruktion“ oder „Wiederherstellung“ in einem solchen Falle das damit üblicherweise Gemeinte verfehlt, so sind solche Versuche wissenschaftlich doch keineswegs nutzlos. Sie haben nämlich eine wichtige heuristische Funktion (ein Aspekt, den ich andernorts einmal ironisch als „spekulative Hermeneutik“ bezeichnet habe, vgl. Thiel 1997), indem sie oft Wertvolles zum Entwurf eines historischen Gesamtbildes beisteuern, in dem ganz andere „Stellen“ einer Prüfung sehr wohl zugänglich sind und bei der angestrebten Bestätigung oder Widerlegung des Ganzen ihre Funktion haben. Für Beckers Pyramidenaufsätze muss ich freilich zugeben, dass hier der Kontext derart spärlich überliefert und das Quellenmaterial derart dürftig ist, dass man bei der Beantwortung der provokativen Frage wohl doch etwas vorsichtiger sein muss.

Literatur

Becker, Oskar: „Eudoxos-Studien I. Eine voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid“. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Abt. B: Studien, Band 2, Heft 4 (1933), 311–333.

——— „Eudoxos-Studien II. Warum haben die Griechen die Existenz der vierten Proportionale angenommen?“. *Ibid.*, 369–387.

——— „Eudoxos-Studien III. Spuren eines Stetigkeitsaxioms in der Art des Dedekind’schen zur Zeit des Eudoxos“. *Ibid.*, Band 3, Heft 2 (1936), 236–244.

——— „Eudoxos-Studien IV. Das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten in der griechischen Mathematik. *Ibid.*, Band 3, Heft 3 (1936), 370–388.

——— „Eudoxos-Studien V. Die eudoxische Lehre von den Ideen und den Farben. *Ibid.*, 389–410.

Becker, Oskar: *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*. Karl Alber: Freiburg/München 1954 (*Orbis Academicus. Problemgeschichten der Wissenschaft in Dokumenten und Darstellungen*, Band II/6); erweitert ²1964, TB Suhrkamp: Frankfurt a.M. 1975.

——— *Das mathematische Denken der Antike.* Vandenhoeck & Ruprecht: Göttingen 1957; ²1966.

——— „Von der Abenteuerlichkeit des Künstlers und der vorsichtigen Verwegenheit des Philosophen". In: Gerhard Funke (ed.), *Konkrete Vernunft. Festschrift für Erich Rothacker* (H. Bouvier & Co.: Bonn 1958), 25–38.

——— „Über die Proportionen der ägyptischen Pyramiden I: Die klassischen Pyramiden des Alten Reiches". *Praxis der Mathematik* 3 (1961), 260–266.

——— „Über die Proportionen der ägyptischen Pyramiden II: Die späteren Pyramiden". *Praxis der Mathematik* 4 (1962), 57–63.

——— „Über die Proportionen der ägyptischen Pyramiden III: Die Pyramide von Meidum: Die Entwicklung der klassischen Pyramide aus der alten Stufenpyramide". *Praxis der Mathematik* 5 (1963), 175–76.

——— *Dasein und Dawesen. Gesammelte philosophische Aufsätze.* Neske: Pfullingen 1963.

——— „Über die Proportionen der ägyptischen Pyramiden IV: Die Königskammer der Cheopspyramide. Zu den Abmessungen der sogenannten Königskammer im Inneren der Cheopspyramide". *Praxis der Mathematik* 6 (1964), 225–226.

Becker, Oskar (ed.): *Zur Geschichte der griechischen Mathematik.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft: Darmstadt 1965 (*Wege der Forschung*, Band XXXIII).

Becker, Oskar / Joseph Ehrenfried Hofmann: *Geschichte der Mathematik.* Athenäum: Bonn 1951. [Von Becker stammt der „I. Teil: Geschichte der antiken Mathematik", S. 13–96, samt der anschließenden „Literatur zur antiken Mathematik", S. 97–113]. Französische Ausgabe: *Histoire des mathématiques.* Lamarre: Paris 1956.

Däniken, Erich von: *Erinnerungen an die Zukunft. Ungelöste Rätsel der Vergangenheit.* Econ: Düsseldorf/Wien 1968.

Edwards, Iorwerth Eiddon Stephen: *The Pyramids of Egypt.* Penguin: West Drayton 1947 u.ö. [Pelican Books A 168].

Eyth, Max: *Der Kampf um die Cheopspyramide. Eine Geschichte und Geschichten aus dem Leben eines Ingenieurs.* [...] Carl Winter: Heidelberg 1902; DVA: Stuttgart/Berlin ⁷² ^[sic!]1913.

Lauer, Jean-Philippe: *Le problème des pyramides d'Égypte, traditions et légendes* [...]. Payot: Paris 1948.

Noetling, Fritz: *Die kosmischen Zahlen der Cheopspyramide, der mathematische*

Schlüssel zu den Einheits-Gesetzen im Aufbau des Weltalls. E. Schweizerbart'sche Verlagsbuchhandlung (Erwin Nägele): Stuttgart $^{2\text{-}5}$1921.

Piazzi Smyth, Charles: *Our Inheritance in the Great Pyramid* [...]. W. Isbister: London 1864

——— *Life and Work at the Great Pyramid* [...], I–III. Edmonton and Douglas: Edinburgh 1867.

Strobl, Gustav: *Die Maßverhältnisse der ägyptischen Pyramiden.* MS 1961; Verbleib unbekannt.

——— Briefe an Oskar Becker vom 22.–29.10.1962 und 4.1.1963; mit Annotationen Beckers. Nachlass Oskar Becker, Philosophisches Archiv der Universität Konstanz, Sign. OB 1–10–2.

Thiel, Christian: „Frege und die Frösche. Ein (fast) nutzloser Beitrag zur spekulativen Hermeneutik". In: Michael Astroh / Dietfried Gerhardus / Gerhard Heinzmann (eds.), *Dialogisches Handeln. Eine Festschrift für Kuno Lorenz* (Spektrum: Heidelberg/Berlin/Oxford 1997), 355–359.

——— „Rekonstruieren, was es nie gab? Gedanken über Phantasie und Methode in der Mathematikgeschichte". In: Gereon Wolters / Martin Carrier (eds.), *Homo Sapiens und Homo Faber. Epistemische und technische Rationalität in Antike und Gegenwart. Festschrift für Jürgen Mittelstraß* (Walter de Gruyter: Berlin/New York 2005), 3–15.

Wheeler, Noel W.: „Pyramids and their purpose". *Antiquity. A Quarterly Review of Archaeology* 9 (1935), I. The Pyramid Age, 5–21; II. The Pyramid of Khufu (The Great Pyramid), 161–189 mit Falttafel nach S. 188; III. Pyramid Mysticism and Mystification, 292–304.

Der Mann, der nicht nur die *Begriffsschrift* publizierte. Über den Verlag von Louis Nebert

Matthias Wille

Manch verlegerischer Triumph beginnt als wirtschaftliche Niederlage. So auch in diesem Fall. Der ehemalige Hallenser Verlagsbuchhändler Louis Nebert würde heute wahrscheinlich nur noch zum unbestimmt Mannigfaltigen der Vergangenheit gehören, wäre da nicht Gottlob Freges *Begriffsschrift*. In ihrem Gefolge konnten die bibliographischen Urkoordinaten nicht in Vergessenheit geraten. Ein halbes Jahrhundert stetiger Werkzitation hat Neberts Name im Kollektivgedächtnis des wissenschaftlichen Schrifttums fest eingeprägt. Die Publikation von Freges unzeitgemäßer Untersuchung erwies sich als eine verlegerische Großtat, doch kam dies erst zu Bewusstsein, als es Autor, Verleger und auch Verlag schon nicht mehr gab.

Es ist diese Konstellation, die aus dem bloß historisch Einzelnen das historiographisch Besondere werden lässt. Louis Nebert war nicht einfach ein kleiner örtlicher Unternehmer, dem sich einzig die Lokalgeschichte zu erinnern hätte, wenn sie es denn tun würde. Er war vielmehr der Verleger, der neben einer beachtlichen Anzahl mathematischer Schriften eines der bedeutsamsten Werke der gesamten Logikgeschichte der Öffentlichkeit zugänglich machte. Grund genug, sich einmal dem Verlag zu widmen, der nicht nur die *Begriffsschrift* publizierte.

1 Der archivarische Befund

Die Ernüchterung sogleich vorweg. Die biographischen Spuren des Verlages beschränken sich heute fast ausschließlich auf die Hinweise, die seine Resultate ber-

SieB 7 (2016), 159-182

gen, vor allem die bei ihm verlegten Bücher.[1] Weder im Landesarchiv Sachsen-Anhalt (Abteilung Merseburg) noch im Stadtarchiv Halle noch im Schroedel Produktionsarchiv des Georg Westermann Verlages (Braunschweig) finden sich Zeugnisse, die Auskunft über die Gründung, den Gründer oder das erste halbe Jahrhundert des Bestehens geben würden. Vor allem für die überaus bedeutsame Zeit zwischen dem Jahr der Verlagsgründung und der Jahrhundertwende, der Wirkungsphase Louis Neberts, findet sich an den benannten Orten kein einziges überliefertes Dokument. Dies kennzeichnet bedauerlicherweise auch die Faktenlage um die Biographie des Unternehmers. Weder die Lebensdaten noch Auszüge aus seinem vormaligen Werdegang konnten in Erfahrung gebracht werden. Lediglich in der „Sammlung der Geschäftsrundschreiben der Börsenvereinsbibliothek“ der Deutschen Nationalbibliothek am Standort Leipzig befindet sich ein einseitiges, von Louis Nebert persönlich unterzeichnetes Geschäftsrundschreiben aus Anlass der Eröffnung seiner Verlagsbuchhandlung, datiert auf den 1. Januar 1870.[2] Die einzige Ausnahme des gesamten Befundes.

Sofern das unternehmenseigene Firmenarchiv nicht sowieso zu den Kriegsschäden gezählt werden muss, so verliert sich seine Spur dennoch umgehend. Wäre es an seinem Ort erhalten geblieben, so müsste es heute im Besitz der Westermanngruppe sein, zu der unter anderem der Hermann Schroedel Verlag zählt, der wiederum Neberts Verlag Ende der 1920er Jahre von Albert Neubert kaufte, in dessen Eigentum sich das Unternehmen seit 1900 befand.[3] Doch innerhalb des Schroedel Produktionsarchives bzw. den Archivbeständen des Westermann Verlages gibt es keinen Nebert-Bestand.[4] Etwas besser sieht es im Landesarchiv Sachsen-Anhalt (Abteilung Merseburg) aus, bei dem die Firmenakten der Industrie- und Handelskammer Halle zu den örtlichen Betrieben archiviert sind. Der dort hinterlegte Aktenbestand zum Verlag umfasst allerdings bescheidene sechs Blatt[5], welche die 1938 geführte kurze Korrespondenz zwischen dem Schroedel Verlag und öffentlichen Stellen aus Anlass der Löschung aus dem Handelsregister wiedergeben.[6] Immerhin sind also die Umstände der Unternehmensauflösung gut dokumentiert.[7]

1. Ich danke Frau Verena Kleinschmidt vom Unternehmensarchiv und der Bibliothek des Georg Westermann Verlages, Herrn Roland Kuhne, dem Leiter der Zentralen Altregistratur des Stadtarchivs Halle, Frau Dr. Jana Lehmann vom Landesarchiv Sachsen-Anhalt (Abteilung Merseburg) sowie Frau Sylvia Schönwald von der Deutschen Nationalbibliothek (Standort Leipzig) für die freundliche Bearbeitung entsprechender Anfragen.

2. Louis Nebert, Geschäftsrundschreiben vom 1. Januar 1870. Deutsche Nationalbibliothek (Leipzig), Signatur Bö-GR/N/103. Datensatz-Link: http://d-nb.info/110737829X. Ein Faksimile von Neberts Unterschrift findet sich am Beschluss von Abschnitt 3.

3. Siehe 2.2.

4. Verena Kleinschmidt in einer Mail an den Autor vom 29. Juni 2016.

5. Siehe: http://recherche.landesarchiv.sachsen-anhalt.de/Query/detail.aspx?ID=598155, C 110 Halle, Nr. 906, Bl. 460-465 = Digitalisate Nr. 902-912.

6. Dr. Jana Lehmann in einem Brief vom 28. Juni 2016 an den Autor.

7. Siehe 2.3.

Darüber hinaus finden sich ebendort noch einige Archivalien zu „Albert Neubert, Buch- und Kunsthandlung“ aus dem Zeitraum 1909-1947[8], die vereinzelt marginale Informationen zum Nebert-Verlag bergen.

Im Stadtarchiv Halle finden sich einige Dokumente, die vornehmlich Albert Neubert, den zweiten Eigentümer des Verlages, betreffen.[9] So wird unter anderem in den Unterlagen des Amtes für Plünderungsentschädigung ein von Albert Neubert angezeigter Sachschaden 1920-1922 verzeichnet (PL 2697), während er in den Akten des Moritzburgmuseums mehrfach als Korrespondenzpartner und Lieferant erscheint. Schließlich finden sich im Familienarchiv Zeitungsberichte zu Albert und Curt Neubert aus dem Zeitraum 1937-1969 (FA 851). Daneben führt die Bibliothek des Stadtarchivs das Verzeichnis „Ü Louis Nebert“ mit einer Anzahl an Büchern, Schriften, Aufsätze etc., welche die Stadt Halle betreffen (Ca 61000, Halle 1865) sowie den 1908-1911 bei Neubert erschienenen Hallischen Universitätskalender. (Cp 19708 – Cp 19712). Vor Ort verfügbar sind auch einige bei Nebert bzw. Neubert erschienene Bücher mit einem vornehmlich regionalgeschichtlichen Bezug. Das ist es gewesen. Mehr ist wahrscheinlich nicht erhalten.

2 Der Verlag von Louis Nebert (1. Januar 1870 – 1. Dezember 1938)

Im Jahr vor der deutschen Reichsgründung geboren, erreichte der Verlag von Louis Nebert gerade einmal das Alter eines Menschen. Seine durchaus wechselvolle Biographie gliedert sich in drei Lebensabschnitte. Dabei erlangte er die größte Reife bereits in jungen Jahren.

2.1 Der vielversprechende Verlag für Mathematik (1870-1900)

In den ersten drei Jahrzehnten seines Bestehens gestaltete sich die Entwicklung des Verlages überaus vielversprechend, er befand sich auf dem besten Weg, langfristig zu einem der führenden Fachverlage für Mathematik zu werden. Das Haus von Louis Nebert hatte das Potenzial für eine akademische Institution.

8. Siehe: http://recherche.landesarchiv.sachsen-anhalt.de/Query/detail.aspx?ID=375537, C 110 Halle, Nr. 907, Bl. 1-19 = Digitalisate Nr. 4-41.

9. Roland Kuhne in einer Mail vom 13. Juli 2016 an den Autor.

Am 1. Januar 1870 empfiehlt er „meine Unternehmungen Ihrem geschätzten Wohlwollen“ und macht der deutschen Verlagswelt „die ergebene Mittheilung, dass ich am hiesigen Platze eine Verlags-Buchhandlung unter meinem Namen eröffnet habe“.[10] Der besondere Charakter der Firma zeigt sich sogleich im ersten Verlagsprogramm. Bereits durch „die in Kürze bei mir erscheinenden Novitäten“[11] tritt im Kleinen in Erscheinung, was das Unternehmen in den nachfolgenden 30 Jahren auszeichnen sollte. Ein exquisites Angebot an mathematischer Fachliteratur wird ergänzt um philosophisch inspirierte transdisziplinäre Studien und schließlich abgerundet durch Werke, mit einem lokalgeschichtlichen Kolorit. Im Gründungsprogramm wird der prospektive mathematische Schwerpunkt verheißungsvoll vertreten durch Johannes Thomaes *Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen*[12], ein Lehrbuch, das vor allem für das Begleitstudium zu universitären Vorlesungen über elliptische Funktionen konzipiert wurde. Ausgehend von der Aufbereitung grundlegender Sätze aus der allgemeinen Funktionentheorie werden die fundamentalen Eigenschaften der Thetafunktionen einer Veränderlichen entfaltet, wobei der von Thomae gewählte Zugang zum algebraischen Funktionenbereich und seinen Integralen über Riemannsche Flächen erfolgt. 1870 ein hoch modernes Lehrbuch und auch heute noch ein akademischer Lektüregenuss.

Den ersten Programmrepräsentanten für die transdisziplinären Studien liefert Wilhelm Bette (1808-?). Mit seinen *Unterhaltungen über einige Capitel der Mécanique céleste und der Kosmogonie*[13] setzt er sich mit der Leistungsfähigkeit der Astronomie bei der Lösung chronologischer Schwierigkeiten in historischen Dokumenten auseinander. Im Mittelpunkt steht hierbei vor allem die Zuverlässigkeit bei Datierungsfragen zur griechischen Mythologie. Im Fokus der Betrachtung steht also nicht das prognostische Potenzial von astronomischen Berechnungen, sondern deren retrodiktive Aussagekraft. Bettes Erörterung ist inspiriert durch Descartes, Newton und vor allem Laplace. Die regionalhistorische Note im 1870er Urprogramm setzt schließlich *Wie mir's erging. Autobiographische Skizzen.*[14] Der Autor August Wiegand (1814-1871) war zum Zeitpunkt der Veröffentlichung technischer Direktor der Lebensversicherungs-Gesellschaft „Iduna“ zu Halle a/S. Doch als ehemaliger Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaften an der lateinischen Hauptschule zu Halle, am Domgymnasium zu Naumburg a/S., an der hö-

10. Louis Nebert, Geschäftsrundschreiben vom 1. Januar 1870. Deutsche Nationalbibliothek (Leipzig), Signatur Bö-GR/N/103. Datensatz-Link: http://d-nb.info/110737829X. Siehe zudem Schulz (ed.), 255.
11. Louis Nebert, Geschäftsrundschreiben vom 1. Januar 1870. Deutsche Nationalbibliothek (Leipzig), Signatur Bö-GR/N/103. Datensatz-Link: http://d-nb.info/110737829X.
12. Thomae (1870).
13. Bette (1870).
14. Wiegand (1870).

heren Bürgerschule zu Halberstadt sowie an der Realschule zu Halle umfasst die Lebensgeschichte 40 Jahre, deren Mittelpunkt die umfangreichen Erfahrungen im Lehrerdienst darstellen. Nicht nur als eine Individual-, sondern als eine Standesgeschichte verfasst, machte der vormalige Abdruck einzelner Episoden in Journalen vor allem auf ehemalige Kollegen einen derart starken Eindruck, dass Wiegand nach eigener Auskunft zur monographischen Niederschrift der gesamten Geschichte bewegt wurde.[15]

Es hat fast den Anschein, als ob diese im Klein-Oktav-Format gedruckte Schrift die erste Publikation des Verlages überhaupt gewesen ist. Zumindest wird auf dem Rückdeckel von Bettes *Unterhaltungen* Wiegands Autobiographie als einziger Titel beworben, der „in demselben Verlage erschien". Thematisch hätte sich an dieser Stelle eine Anzeige zu Thomaes *Abriss* sogar eher angeboten, wenn es das Lehrbuch zu diesem Zeitpunkt bereits im Buchhandel gegeben hätte. Das scheint nicht der Fall gewesen zu sein, immerhin wird der gesamte Platz des abschließenden Buchdeckels von Bette überaus umfänglich auf *Wie mir's erging* verwendet, unter großzügiger Zitation aus den Rezensionen. Der Verlagserstling war also offensichtlich die bewegende Lebensgeschichte eines Mathematiklehrers. Ein Beginn mit rührender Note.

Diese sowie alle weiteren unter Neberts Ägide verlegten Schriften wurden entweder bei Erhardt Karras oder H. W. Schmidt hergestellt, beides ortsansässige Buchdruckereien. Die Verlagsauslieferung erfolgte über die Leipziger Buchhandlung von Friedrich Volckmar, die als buchhändlerischer Kommissionär im Auftrag, im Namen und für Rechnung Neberts tätig war.[16] Bereits in den ersten Jahren seines Bestehens besticht der Verlag durch die Publikation mathematischer Schriften mit einer hohen satztechnischen Qualität. Sukzessiv gewinnt er immer mehr Mathematiker als Autoren. Das mathematische Programmspektrum gestaltet sich mit der Zeit immer differenzierter und umfasst schließlich nicht nur Forschungspublikationen[17] und akademische Curricularwerke[18], sondern auch Lehrschriften für den Schulunterricht[19] sowie Veröffentlichungen mathematikhistorischen Zuschnitts.[20]

15. Wiegand (1870), IIIf.

16. Louis Nebert, Geschäftsrundschreiben vom 1. Januar 1870. Deutsche Nationalbibliothek (Leipzig), Signatur Bö-GR/N/103. Datensatz-Link: http://d-nb.info/110737829X. Vgl. zudem Schulz (ed.), 255.

17. Etwa Beau (1885); Enneper (1876); Frege (1879); Günther (1881); Hochheim (1874), (1875); Hofmann (1888); Macher (1878); Schobloch (1884); Thomae (1873), (1875b), (1877), (1879), (1894).

18. Etwa Clouth (1870); Dronke (1872); N.N. (1880); Odstrčil (1879); Radicke (1880); Rulf (1889); Thomae (1870), (1875a), (1876), (1880), (1890^3), (1898^2).

19. Etwa Köstler (1882), (1888^2), (1889^3), (1890^2).

20. Etwa Bette (1870); Enneper (1876); Günther (1877a), (1877b), (1878a), (1878b), (1878c), (1879); Karaǧī (1878).

Spätestens in den 1890er Jahren darf der Verlag von Louis Nebert zu den führenden mathematischen Fachverlagen im Kaiserreich – freilich hinter B. G. Teubner in Leipzig – gezählt werden.

In der Autorenliste treffen wir auf klangvolle Namen, die zum Teil während der Zeit ihres literarischen Schaffens für den Hallenser Verlag zu Ansehen gelangten oder bereits als renommierte Forscher den Weg zu Nebert fanden. So etwa der Gauß-Schüler und Göttinger Professor Alfred Enneper (1830-1885), der vor allem mit Beiträgen zur Differentialgeometrie, im Besonderen zur Flächentheorie, sowie zur Funktionentheorie hervorgetreten war, und der 1876 eine Anthologie eigener akademischer Vorträge zur Theorie und Geschichte der elliptischen Funktionen bei Nebert verlegte[21], die ebendort posthum zudem in zweiter Auflage erschien. Spätestens ab 1877 gehörte auch der junge Erlanger Privatdozent und spätere Münchener Professor Siegmund Günther (1848-1923) zum Autorenkreis. Der Ansbacher Gymnasialprofessor ist uns heute noch durch seine Beiträge zur Methodik des Mathematik- und Geographieunterrichts bekannt, zu denen unter anderem seine in Halle verlegten *Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie*[22] gehören. Von der Vielzahl seiner weithin beachteten Lehrbücher erschien bei Nebert immerhin *Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen*[23], mit der eine umfassende Aufbereitung der zur damaligen Zeit vor allem in Frankreich und Italien geschätzten Theorie der Hyperbelfunktionen geleistet werden sollte, um die Vorzüge ihrer Anwendung endlich auch im deutschsprachigen Raum zur Verbreitung zu bringen.

Schließlich gehört zum erlesenen Kreis der namhaften Nebert-Autoren der bereits erwähnte Freiburger und spätere Jenaer Professor Carl Johannes Thomae (1840-1921), dessen produktivste Schaffensphase aufs Engste mit dem Hallenser Verlagshaus verknüpft ist. Der Riemann-Schüler im Geiste, dessen Vielseitigkeit sich auch und gerade in seinen bei Nebert verlegten Monographien widerspiegelt, hat vor allem mit den Publikationen auf seinen Hauptarbeitsgebieten, der komplexen Funktionentheorie, Analysis und Geometrie, erheblich zum Erfolg des mathematischen Verlagsprogramms von Louis Nebert beigetragen. In der mathematischen Grundlagenforschung ist er nicht zuletzt durch ein kleines literarisches Denkmal in Erinnerung geblieben, auf das er gerne verzichtet hätte. Wie so manch anderer auch, wurde ebenfalls Thomae ein prominentes Opfer Fregescher Kritik, die sich in der Sache zwar meistens trefflich gestaltete, stilistisch indes häufig mit schonungsloser Ironie und bissiger Polemik einherging. Die Anfänge dieser Auseinandersetzung über Thomaes formale Arithmetik stammen aus dem Jahr 1884,

21. Enneper (1876).
22. Günther (1877a), (1877b), (1878a), (1878b), (1878c), (1879).
23. Günther (1881).

nachdem beide immerhin gut fünf Jahre einvernehmlich in Jena zusammengearbeitet hatten. Doch mit seiner „Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae“[24] gibt Frege nun auch „urbi et orbi“[25] zu erkennen, dass er den „schwächlichen Denker“[26] Thomae „für unfähig hält, seine tieferen Deduktionen zu begreifen“.[27] Nur gut, dass es hier für Louis Nebert nichts mehr zu schlichten gab.

Unter den Autoren des Verlages genießt Thomae noch einmal eine Sonderstellung. Er gehört nicht nur zu den Gründungsautoren der Firma, jener kleinen Gruppe von Personen, die mit publizistischen Kontributionen das Urprogramm des Verlages konstituiert haben. Thomae dürfte darüber hinaus auch der produktivste Autor des Verlages während der Nebert-Ära gewesen sein. Neun monographische Werke im Gesamtumfang von 12 Ausgaben erschienen im Zeitraum 1870-1898 in seinem Hallenser Stammverlag. Wie gravierend die Veränderungen im Verlag durch den Wechsel in der Geschäftsführung 1900 gewesen sein müssen, wird ebenfalls am Beispiel Thomaes deutlich. Der Jenaer Mathematikprofessor, der Louis Nebert 28 Jahre die Treue hielt, länger als jeder andere Autor des Verlages, verlässt nach dem Wechsel an der Firmenspitze den Verlag und publiziert seine neuen Bücher ab jetzt beim großen Konkurrenten aus Leipzig. Thomaes Expertise sowie sein schriftstellerisches Geschick als Mathematiker waren in Halle offenkundig nicht länger gefragt. Auch mag es zutreffen, dass ihn nach der Ära Nebert mit dem Verlag unter seinem neuen Eigentümer nicht mehr viel verband. Thomaes Abwanderung nach Leipzig ist gleichermaßen symptomatisch wie symbolträchtig für den Niedergang des einst vielversprechenden Fachverlages für Mathematik.

2.2 Im Dienste des Kunsthändlers (1900-1928)

Im Zeitraum zwischen 1900 und 1928 befand sich der Verlag von Louis Nebert im Besitz von Albert Neubert (2.1.1862[28] - $>$12.9.1940[29]). Neubert, ein entfernter Verwandter Neberts[30], gehörte mit der Übernahme der Pfefferschen Buchhandlung zum 1. Januar 1908 das, was wir heute eine kleine Unternehmensgruppe nennen würden. Den Anfang seiner Selbständigkeit markiert die Übernahme der ortsansässigen Buchhandlung von Ludwig Stock am 15. September 1890.[31] Die von Max Köstler am 25. November 1875 gegründete Buchhandlung, die in der Poststraße

24. Frege (1906).
25. Thomae (1906), 590.
26. Thomae (1906), 590.
27. Thomae (1906), 590.
28. Vgl. *Hallische Nachrichten* Nr. 1 vom 2. Januar 1937.
29. Vgl. *Hallische Nachrichten* Nr. 215 vom 12. September 1940.
30. Vgl. *Hallische Nachrichten* Nr. 215 vom 12. September 1940.
31. Vgl. *Hallische Nachrichten* Nr. 276 vom 25. November 1925.

9/10 angesiedelt war[32], stand 1890 kurz vor dem Konkurs, bevor sie durch den gerade einmal 28jährigen Jungunternehmer gerettet wurde. In den ersten 15 Jahren ihres Bestehens hatte die Buchhandlung bereits mehrere Eigentümer gesehen. Am 1. März 1883 ging das Buchsortiment und die Musikalienhandlung, nicht aber die Kunsthandlung, deren Eigentümer Köstler blieb, in den Besitz von Meyer & Stock über, die das Geschäft unter dem neuen Namen weiterführten.[33] 1885 trat Meyer als Teilhaber aus, an seine Stelle trat der Kaufmann Sturz. Bereits 1887 war der neue Name der Buchhandlung Stock & Sturz schon nicht mehr aktuell. Sturz schied aus und in den nachfolgenden gut drei Jahren war Stock der alleinige Inhaber des Geschäfts, bis er es, in einem wirtschaftlich schlechten Zustand, an Neubert verkaufte. Dieser nahm eine „zeitgemäße Umgestaltung“ vor und führte die Firma, „nachdem er ihr eine Kunsthandlung angegliedert hatte, nach Jahren schwerer Arbeit bis zur heutigen Blüte“.[34]

Mit Wirkung zum 6. Februar 1900[35] erwirbt er schließlich den Verlag von Louis Nebert und damit auch die bei ihm verlegten „wissenschaftlichen in der Hauptsache mathematischen Werke“.[36] Warum der Verlag überhaupt zum Verkauf stand, ist auf der Grundlage der verfügbaren Quellen nicht zu entscheiden. Wirtschaftliche Gründe können eine Rolle gespielt haben, eventuell verstarb Nebert und die Erben hatten kein Interesse an der Weiterführung des Geschäfts. Ebenfalls ist ungeklärt, warum der Hallenser Buch- und Kunsthändler Neubert, der nunmehr auch zum Verleger wurde, gerade dieses Unternehmen erwarb. Einen genuinen Bezug zum Profil von Neberts Verlag hatte er jedenfalls nicht. Die Entwicklung der Firma in den nachfolgenden Jahren belegt unmissverständlich, dass Neubert kein Interesse an der Pflege oder gar dem Ausbau des wissenschaftlichen Verlagsprogramms hatte. Der von Nebert über einen Zeitraum von drei Jahrzehnten aufgebaute Bestand erfuhr keine weitere Diversifizierung. Das mathematische Verlagsprogramm wurde nicht weitergeführt, sondern ausverkauft oder makuliert, und die von Nebert, zum Teil bereits vor Jahrzehnten als Autoren gewonnenen Mathematiker wanderten mit ihren neuen Werken ab, Johannes Thomae und Siegmund Günther etwa zu B. G. Teubner nach Leipzig.

Prominente Wissenschaftler suchten sich eine neue publizistische Heimat – ein erheblicher Verlust an intellektuellem Kapital, der den neuen Eigentümer offenkundig nicht sonderlich zu stören schien. Es entsteht daher nicht ganz unbegründet der

32. Vgl. *Hallische Nachrichten* Nr. 215 vom 12. September 1940.
33. Vgl. *Hallische Nachrichten* Nr. 215 vom 12. September 1940.
34. *50 Jahre Albert Neubert Buch- u. Kunsthandlung Halle/S. Poststraße 7. Weihnachts-Katalog 1925.* Landesarchiv Sachsen-Anhalt, Standort Merseburg, C 110 Halle, Nr. 907, Bl. 12 Albert Neubert, Halle, Buch- und Kunsthandlung, 1909-1947.
35. Katalog der Dt. Nationalbibliothek; Datensatz-Link: http://d-nb.info/gnd/1072998203.
36. Vgl. *Hallische Nachrichten* Nr. 215 vom 12. September 1940.

Eindruck, als ob Neubert einzig an der Infrastruktur des Verlages, seinen etablierten Distributionswegen sowie seinem technischen Equipment, nicht aber an seiner thematischen Ausrichtung interessiert gewesen wäre. Eventuell ist es darüber hinaus der etablierte Verlagsname, die Marke „Louis Nebert“, die Neubert für seine unternehmerischen Zwecke nutzbar machen möchte. Akademische Kleinstspuren finden sich gleichwohl. So werden unter Neberts Namen ab 1912 die *Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Halle a. d. S.* (Neue Folge) zwar nicht verlegt, immerhin aber in Kommission vertrieben.[37] Mit Theophil Silbermanns *Rätsel der Natur* trifft man 1917 sogar noch auf eine vereinzelte transdisziplinäre Untersuchung[38], die vollkommen zu Recht an den früheren Schwerpunkt erinnert, an das durch Bette, Sebastian Carl Cornelius[39], Paul Kramer[40] oder auch Paul Viktor Langer[41] mitgestaltete wissenschaftsphilosophische Programm. Dennoch wird der Verlag in den gut 28 Jahren seiner Zugehörigkeit zur Unternehmensgruppe von Neubert vor allem im Dienst des Kunsthändlers und der Kunsthandlung stehen.

Neubert festigt seine regionale Stellung, als er zum 1. Januar 1908 zudem die im 18. Jahrhundert als Schwetschkesche Sortimentsbuchhandlung gegründete Peffersche Buchhandlung hinzu erwirbt.[42] Die verzweigte Geschichte dieses alteingesessenen Unternehmens reicht bis zum 24. Oktober 1733 zurück, als der aus Thüringen stammende Buchdrucker Johann Justinus Gebauer die Stephan Orbansche Druckerei am Großer Berlin in Halle erwirbt. 1738 richtet er im Haus „Zu den drei Schwänen“ (Rannische Straße 15) einen Buchladen zum Vertrieb seiner Verlagswerke ein, doch das Buchhändlerprivileg wird ihm auf Jahrzehnte verwehrt.[43] Zu den großen Leistungen Gebauers zählt zweifelsohne die Herausgabe der Luther-Ausgabe von Johann Georg Walch sowie die Initiierung der erst 1813 abgeschlossenen monumentalen *Allgemeinen Welthistorie*. Im Verlaufe des 18. Jahrhunderts übernimmt Carl August Schwetschke nicht nur diese Druckerei und Buchhandlung, die unter dem Namen „Gebauer Schwetschke AG.“ weitergeführt werden, sondern auch die Buchhandlung des Klopstock-Verlegers Carl Hermann Hemmerde, nun „Hemmerde und Schwetschke“. Beide Unternehmen werden schließlich vereinigt und gehen am 1. Januar 1848 in das Eigentum von Carl Ernst Moritz Pfeffer über, einem ehemaligen Handlungsgehilfen von „C. A. Schwetschke & Sohn“. Mit Wirkung zum

37. So etwa die Abhandlungsbeiträge Schulz (1912), (1916), (1918).
38. Silbermann (1917).
39. Cornelius (1875).
40. Kramer (1877).
41. Langer (1878).
42. Ankündigung der Pfefferschen Buchhandlung vom 31. Dezember 1908. Landesarchiv Sachsen-Anhalt, Standort Merseburg, C 110 Halle, Nr. 907, Bl. 19 Albert Neubert, Halle, Buch- und Kunsthandlung, 1909-1947.
43. Zeitungsartikel aus „M. N. Z. Nr. 68“ vom 10. März 1938. Landesarchiv Sachsen-Anhalt, Standort Merseburg, C 110 Halle, Nr. 907, Bl. 5 Albert Neubert, Halle, Buch- und Kunsthandlung, 1909-1947.

1. Januar 1854 wird die Schwetschkesche Sortimentsbuchhandlung schließlich in „Pfeffersche Buchhandlung“ umbenannt.[44]

Mit der Übernahme dieses Unternehmens 1908 verfügt Neubert nunmehr über zusätzliche Verlagsstrukturen sowie eine weitere Buchhandlung, deren Geschäft er zum 2. Januar 1909 in sein Haus, Poststraße 7, verlegt.[45] In den nachfolgenden Jahren baut Neubert seine Buch- und Kunsthandlung sowie den in ihrem Dienst stehenden Verlag von Louis Nebert zu einem prosperierenden Unternehmen aus.[46] 1925 verfügt allein die Kunstabteilung der Buchhandlung über ein „Lager von ca. 1200 Original-Radierungen, ca. 1500 Reproduktionen aller Art und etwa 150 Original-Gemälden erster zeitgenössischer Künstler“.[47] Ende 1928 kommt schließlich noch ein Kunstsalon dazu[48], in dessen Räumlichkeiten Bilderausstellungen sowie Dichterabende stattfinden. Die vier, als Galerie angelegten Säle im ersten Obergeschoss seines Geschäftshauses in der Poststraße 7 füllen damit eine Lücke, die durch die Schließung des Hallenser Kunstsalons von Tausch & Große nach dem Tode des letzten Inhabers, Walter Tausch, entstanden war.[49]

In den fast drei Jahrzehnten seiner Geschäftsführung hält Neubert am Gründungsnamen der Firma fest. Das zeugt davon, dass der Name „Verlag von Louis Nebert“ vom neuen Eigentümer als Qualitätsmarke verstanden und konserviert wurde. Um jedoch den veränderten unternehmensspezifischen Bedingungen Rechnung zu tragen, wurde aus „Verlag von Louis Nebert“ schließlich „Louis Nebert's Verlag“ bzw. „Louis Nebert's Verlag (Albert Neubert)“. Für diesen sanft transformierten Verlagsnamen wurde in den nachfolgenden Jahren noch ein Logo eingeführt, das in einem besonderen Maße von den neuen verlegerischen Zeiten kündet. Hatte Nebert auf Derartiges gänzlich verzichtet, so ist die neue Firmengrafik mit den ineinander verschachtelten Buchstaben LNV nicht zu übersehen.

44. „Kulturarbeit einer Buchhandlung. 200jähriges Jubiläum des Hauses Albert Neubert – Eine Buchhandlung illustriert Stadtgeschichte – Gemäldeausstellungen und Dichterabende“, in *Hallische Nachrichten* Nr. 57 vom 9. März 1938.

45. Ankündigung der Pfefferschen Buchhandlung vom 31. Dezember 1908. Landesarchiv Sachsen-Anhalt, Standort Merseburg, C 110 Halle, Nr. 907, Bl. 19 Albert Neubert, Halle, Buch- und Kunsthandlung, 1909-1947.

46. „Kulturarbeit einer Buchhandlung. 200jähriges Jubiläum des Hauses Albert Neubert – Eine Buchhandlung illustriert Stadtgeschichte – Gemäldeausstellungen und Dichterabende“, in *Hallische Nachrichten* Nr. 57 vom 9. März 1938. Siehe zudem „1738 Albert Neubert Buchhandlung Adolf-Hitler-Ring 7“ *Hallische Nachrichten* Nr. 215 vom 12. September 1940.

47. *50 Jahre Albert Neubert Buch- u. Kunsthandlung Halle/S. Poststraße 7. Weihnachts-Katalog 1925.* Landesarchiv Sachsen-Anhalt, Standort Merseburg, C 110 Halle, Nr. 907, Bl. 12 Albert Neubert, Halle, Buch- und Kunsthandlung, 1909-1947.

48. Vgl. *Hallische Nachrichten* Nr. 208 vom 4. September 1928.

49. Vgl. *Hallische Nachrichten* Nr. 208 vom 4. September 1928.

Der Name bleibt, doch das Verlagsprofil ändert sich, zum Teil erheblich. Zunehmend mehr steht die Verlegertätigkeit im Dienste des Kunsthändlers, unter anderem durch den Kartendruck. Während des Ersten Weltkrieges vertreibt der Verlag wirtschaftlich überaus erfolgreich und in Millionenstückzahlen Karten, die den Frontverlauf dokumentieren. Neberts Verlag wird in dieser Zeit einer breiteren Öffentlichkeit vor allem durch die fortlaufende Folge der regelmäßig aktualisierten „Neberts Kriegs-Frontenkarte von allen Kriegsschauplätzen" („Neubertsche Frontkarten") bekannt, allerdings eben nicht mehr als wissenschaftlicher Verlag. Diese Zeiten sind vorbei und gehören Ende des Ersten Weltkrieges seit bereits fast zwei Jahrzehnten der Vergangenheit an. 1925, anlässlich des 50jährigen Bestehens der Buch- und Kunsthandlung, vermerkt die Familie Neubert stolz, „daß das Geschäft heute als eines der ersten Sortimente Mitteldeutschlands dasteht".[50] Das mag für das Gesamtportfolio der Unternehmensgruppe gelten, eventuell auch für die unter Neberts Namen publizierte Literatur zur Regionalgeschichte und Industriekultur, nicht jedoch für die Restbestände der verlegten wissenschaftlichen Werke.

2.3 Schattendasein (1928-1938)

1928 geht die Firma in das Eigentum des Hermann Schroedel Verlages über, der unter dem Namen Neberts in den nachfolgenden zehn Jahren jedoch einzig das noch verfügbare Sortiment weiter vertreibt. Neue Titel werden nun überhaupt nicht mehr aufgelegt, alte nicht nachgedruckt.

Am 27. September 1938 wandte sich die Industrie- und Handelskammer Halle in der Angelegenheit der Firmenauflösung erstmals an den Verlag mit Sitz in der Reichardtstraße 21. Da nach den vorliegenden Unterlagen der Gewerbebetrieb der Firma vollständig eingestellt sei, beabsichtigt die IHK gemäß ihrer gesetzlichen Aufgaben die Beantragung der Löschung aus dem Handelsregister beim zuständigen Amtsgericht.[51] Mit dem Schreiben wird dem Verlag die Möglichkeit eingeräumt, gegebenenfalls Gründe darzulegen, die gegen eine Löschung sprechen. Der Hermann Schroedel Verlag antwortet umgehend. Bereits am nachfolgenden Tag ersucht der Verlagseigner, von diesem Schritt abzusehen. Zwar wird eingeräumt, dass seit der Firmenübernahme 1928 keine neuen Werke unter dem Namen Neberts

50. *50 Jahre Albert Neubert Buch- u. Kunsthandlung Halle/S. Poststraße 7. Weihnachts-Katalog 1925.* Landesarchiv Sachsen-Anhalt, Standort Merseburg, C 110 Halle, Nr. 907, Bl. 12 Albert Neubert, Halle, Buch- und Kunsthandlung, 1909-1947.

51. Schreiben der IHK Halle/S. an Firma Louis Neberts Verlag vom 27. September 1938. Landesarchiv Sachsen-Anhalt, Standort Merseburg, C 110 Halle, Nr. 906, Bl. 460 Louis Nebert Verlag, Halle.

erschienen sind, doch die bereits gedruckten Bestände würden nach wie vor vertrieben werden, wenngleich „seit dieser Zeit natürlicherweise durch uns“[52], über die Infrastruktur sowie die Distributionswege des Schroedel Verlages. Darüber hinaus möchte der Eigentümer die Option wahren, den Namen „Verlag von Louis Nebert“ eventuell späterhin noch einmal für geschäftliche Zwecke zu verwenden. Eine Woche später fragt die IHK nach, in welcher Weise genau durch den Verlag von Louis Nebert noch ein Gewerbebetrieb ausgeübt wird.

> Die Tatsache, dass noch im Buchhandel Werke Ihres Verlages vertrieben werden, rechtfertigt nicht das weitere Bestehen der Firma. Es wäre hierzu erforderlich, dass die Firma selbst noch von ihr verlegte Werke vertreibt.[53]

Das war freilich nicht mehr der Fall. Gleichwohl fragt die IHK nach, ob der Schroedel Verlag mit einer späteren Wiederaufnahme des Gewerbebetriebes für den Nebert-Verlag rechnet und wann diese gegebenenfalls erfolgen soll. Von dieser Option möchte der Schroedel Verlag offensichtlich keinen Gebrauch machen, denn auf dem beim Verlag eingegangenen Exemplar des Schreibens wird durch einen autorisierten Vertreter des Unternehmens handschriftlich vermerkt, dass der Verlag von Louis Nebert bis zum 1. Januar 1939 (aus dem Handelsregister) gelöscht werden soll. Man lenkt gegenüber der IHK ein. Am 24. Oktober fordert indes die Abteilung 19 des Amtsgerichtes Halle/S. zur Klärung der „Handelsregistersache Louis Neberts Verlag“ formal unter der Geschäftsnummer „19 HRA 61“ Akten bei der IHK an.[54] In ihrem Antwortschreiben wenige Tage später unterrichtet die IHK das Amtsgericht darüber, dass der Schroedel Verlag selbst eine Löschung bis zum 1. Januar 1939 verfolgt, da auch der Eigentümer die Auffassung teilt, dass ein Gewerbebetrieb nicht mehr ausgeübt wird. „Wir bitten deshalb abzuwarten, ob der Löschungsantrag bis dahin gestellt wird. Sollte die[s] nicht geschehen sein, so bitten wir, die Firma Schroedel-Verlag zur Anmeldung der Löschung zu veranlassen“.[55] Offenkundig hat der Schroedel Verlag fristgerecht die Löschung beantragt, denn bereits am 1. Dezember 1938 informiert das Amtsgericht die IHK darüber, dass in

52. Schreiben des Hermann Schroedel Verlages an die IHK Halle/S. vom 28. September 1938. Landesarchiv Sachsen-Anhalt, Standort Merseburg, C 110 Halle, Nr. 906, Bl. 461 Louis Nebert Verlag, Halle.
53. Schreiben der IHK Halle/S. an den Hermann Schroedel Verlag vom 5. Oktober 1938. Landesarchiv Sachsen-Anhalt, Standort Merseburg, C 110 Halle, Nr. 906, Bl. 462 Louis Nebert Verlag, Halle.
54. Schreiben des Amtsgerichtes Halle/S. an die IHK Halle/S. vom 24. Oktober 1938. Landesarchiv Sachsen-Anhalt, Standort Merseburg, C 110 Halle, Nr. 906, Bl. 463 Louis Nebert Verlag, Halle.
55. Schreiben der IHK Halle/S. an das Amtsgericht Halle/S. vom 29. Oktober 1938. Landesarchiv Sachsen-Anhalt, Standort Merseburg, C 110 Halle, Nr. 906, Bl. 464 Louis Nebert Verlag, Halle.

der Abteilung A des Handelsregisters „bei der Firma Louis Nebert's Verlag, Halle a. Saale" (Nr. 61 des Registers) in Spalte 6 eingetragen wurde:

> Die Gesellschaft ist aufgelöst. Die Firma ist erloschen.[56]

Damit war der Verlag von Louis Nebert 68 Jahre und 334 Tage nach seiner Gründung endgültig Geschichte. Das Unternehmen, das als vielversprechender Fachverlag für Mathematik begann und welches im Alter von 30 Jahren abrupt in den Firmendienst eines ehrgeizigen Kunsthändlers gestellt wurde, persistierte in den letzten zehn Jahren seines Bestehens nur noch als juristische Person, nicht aber als lebendiger Verlag. Was zu dieser Zeit in Halle keiner ahnt, bahnt sich jenseits des Atlantiks an.[57] Der Name von Louis Nebert wird unter Logikern und Philosophen weltberühmt werden. Dank jener kleinen Schrift Freges, die ehemals für den Gründungsverleger alles andere als ein wirtschaftlicher Erfolg war, wird der Verlagsname in ihrem bibliographischen Gefolge in die Wissenschaftsgeschichte eingehen. Louis Nebert hatte bis zur Jahrhundertwende diverse Werke namhafter Mathematiker verlegt, doch sein größter Erfolg sollte sich erst als solcher zu erkennen geben, als es den Verlag gar nicht mehr gab. Unwissentlich, aber in guter Absicht veröffentlichte er ein epochales Werk, durch dessen Gehalte eine logikhistorische Singularität erster Ordnung entstehen sollte. Die Publikation der *Begriffsschrift* zählt zweifelsohne zu den akademischen Großtaten Louis Neberts.

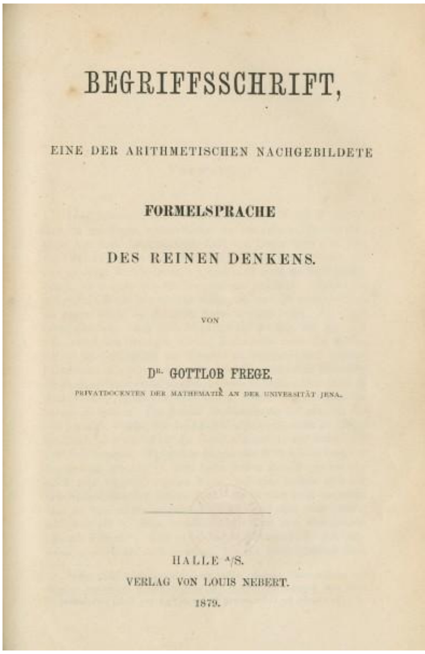
3 Louis Nebert und die *Begriffsschrift*

Der distinguierte Charakter des Gegenstandes gebietet die feierliche Vollständigkeit der Angaben. Um die Jahreswende 1878/79[58] erscheint mit dem offiziellen Publikationsjahr „1879" versehen im Verlag von Louis Nebert in Halle ^{A}/S., hergestellt in der ortsansässigen Buchdruckerei von Erhardt Karras, im Groß-Oktav-Format (gr. 8) sowie im Umfang von X+88 Seiten und zu einem Verkaufspreis von 3 Mark die

56. Schreiben des Amtsgerichtes Halle/S. an die IHK Halle/S. vom 1. Dezember 1938. Landesarchiv Sachsen-Anhalt, Standort Merseburg, C 110 Halle, Nr. 906, Bl. 465 Louis Nebert Verlag, Halle.
57. Ausführlich hierzu Wille (2015), 176-213 [*diese Zeitschrift*, Bd. 5]; erw. in ders. (2016), 151-215.
58. Vgl. Kienzler (2009), 49/112f.

Begriffsschrift,
eine der arithmetischen nachgebildete
Formelsprache
des reinen Denkens.
von
Dr. Gottlob Frege,
Privatdocenten der Mathematik an der Universität Jena.

Ob sie dabei gleich David Humes *Treatise* sogar als Totgeburt aus der Presse fiel, ohne auch nur ein leises Murren unter den Eiferern hervorzurufen[59], lässt sich nicht mit letzter Gewissheit sagen. Das wenige leise Murren ist zumindest 1881 schon wieder verstummt. Auch Louis Nebert dürfte darüber wenig erfreut gewesen sein.[60]


BEGRIFFSSCHRIFT,
EINE DER ARITHMETISCHEN NACHGEBILDETE
FORMELSPRACHE
DES REINEN DENKENS.
VON
Dr. GOTTLOB FREGE,
PRIVATDOCENTEN DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT JENA.
HALLE a/S.
VERLAG VON LOUIS NEBERT.
1879.

Wie es zur Zusammenarbeit zwischen Autor und Verleger kam, ist bis heute ungeklärt. Ein unvermitteltes Initiativanschreiben Freges bleibt möglich, wahrscheinlich ist aber eher eine Kontaktanbahnung durch eine dritte Person. Ob Johannes Thomae die Rolle des Vermittlers übernommen hat, scheint fraglich, obwohl er ab 1864 und bis zum Ende des Jahrhunderts eine Vielzahl von Schriften in Halle verlegte, während der Zeit zwischen 1870 und 1900 zweifelsohne einer der produktivsten Autoren des Verlages war und zudem für mehr als zwei Jahrzehnte zusammen mit Frege die Geschicke der Mathematik in Jena lenkte. Vor allem mit seinen Lehrbuchdarstellungen für das akademische Studium dürfte er zum wirtschaftlichen Erfolg des Hauses Nebert beigetragen haben. In Halle besaß er fraglos einen vorzüglichen Ruf, eine Empfehlung seinerseits hätte die Tür weit aufgestoßen. Da Thomae allerdings erst zum 1. Oktober 1879 nach Jena berufen wurde und ein vormaliger Kontakt mit Frege für den bis dato in Freiburg

59. Mates (1967), 241.
60. Die nachfolgende Abbildung des Vordertitels der Erstausgabe wurde entnommen: http://pw20c.mcmaster.ca/files/imagecache/wwiiccc-display/russell/RL0089.1.jpg.

i. Br. Wirkenden für den Augenblick nicht dokumentiert werden kann, fällt der persönliche Kontakt mit Frege wahrscheinlich erst in die Zeit nach der Publikation der *Begriffsschrift*.

Vor Ort in Jena gab es jedoch mindestens einen weiteren Nebert-Autor, mit dem Frege bereits vor 1879 in Kontakt stand und der sich aufgrund seines Profils als möglicher Vermittler geradezu anbietet. Der 1851 in Oppeln geborene Paul Viktor Langer habilitierte sich ein Jahr nach Frege an der Philosophischen Fakultät und war bis zu seinem Ausscheiden aus dem akademischen Dienst, an den sich eine Karriere als Gymnasiallehrer in Gotha und schließlich als Gymnasialdirektor in Ohrdruf anschloss, ebendort Privatdozent für Mathematik und Physik. Während die Habilitationsschrift entsprechend der erteilten Lehrbefugnis einen mathematisch-physikalischen Zuschnitt besaß[61], trat der vielseitig interessierte Langer zudem mit Untersuchungen zur Psychophysik hervor[62], für die nicht nur Wilhelm Wundt eine anerkennende, wenngleich kritische Besprechung verfasste[63], sondern durch die er im Kaiserreich auch als Philosoph wahrgenommen wurde.[64] Langer, der Mathematiker, Physiker und Philosoph. Von besonderem Interesse ist daher die 1878 bei Louis Nebert verlegte Schrift *Die Grundprobleme der Mechanik, eine kosmologische Skizze*, die weder als eine rein physikalische noch als eine ausschließlich philosophische Untersuchung verstanden werden darf. Als wissenschaftstheoretische Studie zu den Grundlagen der Mechanik, mit der im Besonderen der Unterschied zwischen den empirischen und hypothetischen Komponenten des Kraftbegriffes sowie des Begriffes des Trägheitswiderstands klar aufgezeigt werden sollte, nahm sie eine ähnliche methodische Stellung ein wie vormals Riemanns Habilitationsvortrag zur Geometrie.[65]

Die, Anfang Dezember 1877 fertiggestellte Schrift hatte sich damit einem Problem zu stellen, mit dem sich schließlich auch die *Begriffsschrift* ziemlich genau ein Jahr später auseinanderzusetzen hatte. Als weder rein fachwissenschaftliche Studie noch philosophische Abhandlung klassischen Zuschnitts ergab sich die Frage, welchen disziplinären Status sie genießt und welches Verlagsspektrum für sie überhaupt maßgeschneidert wäre. Louis Nebert trug offensichtlich keine Bedenken. Die unkomplizierte Veröffentlichung einer zwischen Physik und Philosophie anzusiedelnden Schrift dokumentiert die unvoreingenommene Haltung eines intellektuell offenen Verlegers und dürfte eventuell auch Frege hoffnungsvoll gestimmt haben, für seine, zwischen Mathematik und Philosophie operierende *Begriffsschrift*

61. Langer (1875).
62. Langer (1876), (1893).
63. Wundt (1877).
64. Eisler (1912), 384.
65. Vgl. Langer (1878), IIIf.

ebenfalls in Halle ein Zuhause zu finden. Mit dem Programmzweig der transdisziplinären Studien verfügte Nebert jedenfalls über den passenden Ort schlechthin. Für diese Überlegung spricht ein weiteres bemerkenswertes Detail, zu finden auf dem Rückdeckel einer Ausgabe jener Zeitschrift, in der Frege 1892 schließlich „Ueber Begriff und Gegenstand" publizieren sollte.

Für den dritten Band der noch jungen, aber bereits weithin rezipierten *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie* schaltete Louis Nebert 1879 eine kleine Werbeanzeige mit drei jüngst in seinem Haus erschienen Titeln. Neben Langers Studie wurde für die ebenfalls 1878 erschienene zweite unveränderte Auflage von Sebastian Carl Cornelius' Untersuchung *Ueber die Wechselwirkung zwischen Leib und Seele*[66] geworben. Mit dieser Arbeit leistete der Physiker Cornelius, der bis dato nicht nur mit fachwissenschaftlichen, sondern auch mit diversen Abhandlungen philosophischer Prägung in Erscheinung getreten war, einen wissenschaftstheoretisch inspirierten Beitrag zur fachwissenschaftlichen Fundierung der Psychologie, die in eben dieser Zeit ihre Emanzipation von der Philosophie anstrebte. Ebenso wie Langers Buch besitzt auch die Monographie von Cornelius keinen eindeutigen disziplinären Charakter, sondern operiert im Schnittbereich zwischen Philosophie und einer sich gerade erst erfindenden neuen Fachwissenschaft, der naturwissenschaftlich orientierten empirischen Psychologie. Dass diese Studie ebenfalls im Verlagsprogramm wiederzufinden ist, unterstreicht nachdrücklich die aufgeklärte und umsichtige Haltung des Verlegers. Doch das eigentlich Beachtliche dieser Werbeanzeige kommt erst zum Vorschein, wenn der dritte beworbene Titel erfasst ist:

> **Frege,** Dr. **G.**, **Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens**. gr. 8 . br. 3 Mark.[67]

Louis Nebert bewirbt die *Begriffsschrift* noch in ihrem Erscheinungsjahr, aber er bewirbt sie nicht an einem beliebigen Ort oder unter beliebigen Bedingungen. Er bewirbt Freges Abhandlung in einer aufstrebenden philosophischen Fachzeitschrift und er entscheidet sich beim dargebotenen, hochselektiven Programmausschnitt unter anderem für Frege, obwohl sich das Hallenser Unternehmen die überaus knappe Werbefläche mit solch renommierten Einrichtungen wie der Weidmannschen Buchhandlung (Berlin) sowie der Cottaschen Buchhandlung (Stuttgart) zu teilen hat und mithin für die eigene Verlagsanzeige nicht mehr als ein kleiner Streifen des hinteren Einbanddeckels zur Verfügung steht. Für das gesamte Jahr 1879 hatte Nebert in Richard Avenarius' Zeitschrift lediglich diese sieben Zeilen zur Verfügung, zwei von ihnen werden für die *Begriffsschrift* reserviert. Da Verleger üblicherweise mit besonders exponierten Titeln ihres Programms Werbung für

66. Cornelius (1875).
67. Man beachte die dezente Abwandlung des Titels infolge der veränderten Interpunktion.

das eigene Unternehmen betreiben, eröffnet diese kleine Anzeige bemerkenswerte Einsichten.

Nebert war also nicht nur von der Qualität der *Begriffsschrift* überzeugt, sondern er verband mit ihrer Publikation offenkundig auch so manche kleine Hoffnung, zumindest auf einen kleinen akademischen Achtungserfolg. Andernfalls hätte er sie nicht für die exklusiven Verlagsrepräsentanten im Avenarius-Periodikum vorgesehen. Darüber hinaus erkannte und schätzte er ihre disziplinäre Sonderstellung, denn mit der *Vierteljahrsschrift* bewarb er sie nicht in einem mathematischen, sondern in einem philosophischen Journal. In den Augen des Verlegers war die *Begriffsschrift* also nicht nur ein Werk mathematischen Inhalts, sondern gleichermaßen eines der Philosophie. Beworben wurde sie dennoch nicht nur bei den Philosophen, sondern unter anderem auch am besten Ort für Mathematiker, den *Mathematischen Annalen*. In den Jahren zwischen 1873 und 1879 zeigte der Unternehmer in dieser renommierten Fachzeitschrift regelmäßig Neuveröffentlichungen aus seinem Verlagsprogramm an, wenngleich in den Jahren danach die Werbeseiten fast ausschließlich für den führenden mathematischen Verlag B. G. Teubner aus Leipzig reserviert schienen. Den Hallenser Verlag sucht man in dieser Zeit jedenfalls vergebens in den *Mathematischen Annalen*. Im 4. Heft des XXVI. Bandes 1886 inseriert Nebert schließlich erneut und die eindrucksvolle, 21 Titel umfassende Werbung beinhaltet auch die *Begriffsschrift*. Die Anzeige rundet damit ab, was bereits 1880 auf dem Rückdeckel von Thomaes *Elementarer Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen*[68] begonnen hatte: das passgenaue Hinweisen auf Frege beim mathematischen Fachpublikum.

Der Unternehmer versucht sein Möglichstes, um beide Interessengruppen gezielt auf das Werk aufmerksam zu machen. Doch es ist vor allem die von ihm vorgenommene distinguierte Platzierung neben Langers und Cornelius' Abhandlungen in der *Vierteljahrsschrift*, die deutlich werden lässt, dass auch Freges Untersuchung in einem neu zu definierenden wissenschaftlichen Schnittbereich, hier zwischen zeitgenössischer Mathematik und Philosophie, anzusiedeln ist, der modernen formalen Logik. Buchbeschreibung und Verlagsprogramm führen diese Bezeichnung freilich noch nicht mit, aber der Sache nach verortet Louis Nebert die Schrift vollkommen korrekt. Damit ist er im Umgang mit dem Werk ungleich weiter als ausnahmslos alle Mathematiker und Philosophen der Zeit. Nicht einmal Freges prominenter Unterstützer Ernst Abbe erreicht die Beurteilungssensibilität, die Nebert durch sein verlegerisches Handeln zum Ausdruck bringt. Zweifellos war er ein Bewunderer der *Begriffsschrift*, vielleicht sogar der erste überhaupt.

Dieser verständnisvolle Umgang mit der Schrift durch den Hallenser Verleger lässt

68. Thomae (1880).

deutlich werden, dass Freges Werk im Verlag von Louis Nebert von Anfang an bestens aufgehoben war. Die Verlagswahl mag damit erklärt sein, nicht aber, wie der Kontakt zwischen Autor und Unternehmen zustande kam. Eine Kontaktvermittlung durch Freges Jenaer Kollegen Paul Langer bewegt sich uneingeschränkt im Bereich des Möglichen, beide kannten einander seit dem Wintersemester 1874/75 und bestritten schließlich gemeinsam den akademischen Alltag im kleinen Fach bis zu Langers Laufbahnwechsel mit Wirkung zum 1. Oktober 1878. Aus Anlass seines eigenen Habilitationsgesuchs vom 14. Juli 1875 hält er in seinem Lebenslauf explizit fest, dass er vielfach durch die Vorlesungen der Herren Snell, Schaeffer, Geuther, Eucken, Abbe und eben auch Frege angeregt wurde.[69] Im fraglichen Zeitraum kündigte Frege drei jeweils vierstündige Vorlesungen an, von denen zwei, „Analytische Geometrie nach neueren Methoden" (Wintersemester 1874/75) sowie „Algebraische Analysis" (Sommersemester 1875), auch stattfanden.[70] Da Langer als Student aus Leipzig gewechselt kam und erst am 23. März 1875 in Jena *cum laude* promoviert wurde[71], spricht wissenschaftsbiographisch vieles dafür, dass er sich in seiner Vita vor allem auf die Geometrievorlesung aus dem fraglichen Wintersemester bezogen hat, von der wir dank Richard Schröpfer sogar über eine partielle Nachschrift verfügen.[72] Gut möglich also, dass der in Göttingen geometrisch bestens unterwiesene Frege vor allem mit dieser Vorlesung Langer für dessen eigene Forschung zu inspirieren wusste, vielleicht sogar mit der einen oder anderen methodologischen Überlegung zu Riemann. Zwischen 1875 und 1878 waren beide die einzigen Privatdozenten für Mathematik in Jena, drei Jahre eines räumlich eng geteilten gemeinsamen akademischen Schicksals, in deren Verlauf das *Begriffsschrift*-Projekt nicht nur irgendwann aufkam, sondern in akademischer Nachbarschaft zu Langer auch definitiv reifte. Frege dürfte seinerseits die Publikation der *Grundprobleme der Mechanik* nicht entgangen sein und sicherlich hat sich der mündliche Kontakt zwischen beiden im Verlaufe dieser Jahre nicht nur auf die Abstimmung des akademischen Veranstaltungsplans beschränkt. Sollte es zutreffen, dass Langer bei einer dieser ungezählt vielen Gelegenheiten im Fürstengraben Frege mündlich dazu ermutigt hat, sich beherzt an Louis Nebert in Halle zu wenden, dann wäre diese Begebenheit gleichermaßen naheliegend wie kaum prüfbar.

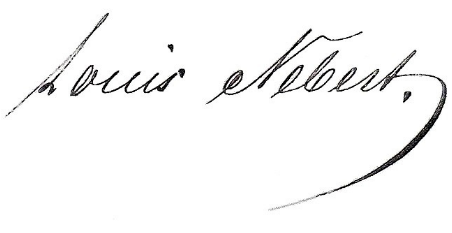
Was indes die vertraglichen Details zwischen Nebert und Frege vorsahen, wie groß die Auflage der *Begriffsschrift* war, wie es um die Verkaufszahlen bestellt war und wann genau die Restbestände makuliert wurden, darüber gibt es ebenfalls keinerlei gesicherte Informationen, bestenfalls plausible Vermutungen. Weder in Freges Nachlass noch in einem der eingangs genannten Archive finden sich relevante Do-

69. Vgl. Dörfel (2011), 211; Dathe (1997), 152.
70. Siehe Kreiser (2001), 280.
71. Vgl. Dörfel (2011), 211.
72. Kreiser (ed.), 347-364.

kumente. Gesichert scheint zumindest, dass das Werk unter der Verantwortung des Verlagsgründers nicht aus dem Programm genommen oder die verbliebenen Exemplare gar eingestampft wurden. Dafür spricht unter anderem der Umstand, dass sich auf dem hinteren Bucheinband zur zweiten Auflage von Johannes Thomaes *Elementarer Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen* aus dem Jahr 1898 eine Selbstanzeige des Verlages findet, auf der 22 bei Nebert verlegte Werke mathematischen Inhaltes beworben werden. Diese Programmauswahl wird beschlossen durch die Anzeige von Freges Werk.[73]

> **Frege,** Dr. G., **Begriffsschrift.** Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. gr. 8 geh. 3 Mark.

Da auszuschließen ist, dass der Verleger eine nicht mehr lieferbare Schrift bewirbt, war die *Begriffsschrift* also mindestens bis zu diesem Zeitpunkt im Buchhandel noch erhältlich und kostete in etwa den durchschnittlichen Tageslohn eines Arbeiters. Die Anzeige belegt darüber hinaus, dass der Verlag auch gut 20 Jahre nach Erscheinen des Büchleins für dieses unermüdlich geworben hat. Es scheint fast so, als ob Louis Nebert persönlich seine schützende Hand über diese wenig erfolgreiche Schrift gehalten hat, so lange er im Verlag zu entscheiden hatte.[74] Dies änderte sich erst mit der Firmenübernahme durch Neubert. Irgendwann nach 1900 wurde aus dem verlagsneu lieferbaren Buch ein bestenfalls antiquarisch gehandeltes. Das Werk verliert den Schutz seiner verlegerischen Heimat, weil der Wissenschaftsverlag selbst in der Auflösung begriffen ist. Als dieser final aus dem Handelsregister gelöscht wird, scheint das Ende erreicht, doch das Bewusstsein um den epochalen Charakter der *Begriffsschrift* bahnt sich da schon unbeirrbar seinen Weg. Mit ihr kommt zurück – beeindruckender als jemals zuvor – der Verlag von



73. Ich danke Herrn Prof. Dr. Christian Thiel (Erlangen) für diesen überaus aufmerksamen Hinweis.
74. Eine weitere entsprechende Werbeanzeige findet sich unter anderem auf der Beschlussseite von Thomae (1894).

Quellenverzeichnis

Konsultierte Werke aus dem Verlag von Louis Nebert

Beau, Otto (1885): *Analytische Untersuchungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen und der Fourier'schen Integrale.* Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage.

Bette, Wilhelm (1870): *Unterhaltungen über einige Capitel der Mécanique céleste und der Kosmogonie.*

Clouth, F. M. (1870): *Tafeln zur Berechnung goniometrischer Coordinaten / Tables pour le calcul des coordonnées goniométriques.* Weitere Auflagen 1871, 1906, 1919, 1922, 1926. Neu bearbeitet ab der dritten Auflage 1906.

Cornelius, Sebastian Carl (1875): *Ueber die Wechselwirkung zwischen Leib und Seele.* Zweite Auflage 1878.

Dronke, Adolf (1872): *Einleitung in die höhere Algebra.*

Enneper, Alfred (1876): *Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. Academische Vorträge.* Zweite neu bearbeitete Auflage 1890 (ed. v. F. Müller).

Frege, Gottlob (1879): *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.*

Günther, Siegmund (1877a): *Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie 1. Heft. Die Lehre von der Erdrundung und Erdbewegung im Mittelalter bei den Occidentalen.*

— (1877b): *Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie 2. Heft. Die Lehre von der Erdrundung und Erdbewegung im Mittelalter bei den Arabern und Hebräern.*

— (1878a): *Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie 3. Heft. Aeltere und neuere Hypothesen über die chronische Versetzung des Erdschwerpunktes durch Wassermassen.*

— (1878b): *Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie 4. Heft. Analyse einiger kosmographischer Codices der Münchener Hof- und Staatsbibliothek.*

— (1878c): *Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie 5. Heft. Johann Werner aus Nürnberg und seine Beziehungen zur Geschichte der mathematischen und physischen Erdkunde.*

— (1879): *Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie 6. Heft. Geschichte der loxodromischen Curve.*

— (1881): *Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen, theilweise auf Grund freier Bearbeitung von Laisant's „Essai sur les fonctions hyperboliques" und Forti's „Tavole logaritmiche" dargestellt.*

Herrmann, Emanuel (1872): *Miniaturbilder aus dem Gebiete der Wirthschaft.* Neue Ausgabe 1877, wohlfeile Ausgabe 1891.

Hochheim, Adolf (1874): *Ueber die Differentialcurven der Kegelschnitte.*

— (1875): *Ueber Pole und Polaren der parabolischen Curven dritter Ordnung.*

Hofmann, Fritz (1888): *Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen. Ein Uebungsbuch für den geometrischen Teil der Funktionentheorie.*

Karağī, Muḥammad Ibn-al-Ḥasan al- (1878): *Al Kâfî fîl Hisâb* (*Genügendes über Arithmetik*) *des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî* (bearb. v. Ad. Hochheim).

Köstler, Hermann Julius (1882): *Vorschule der Geometrie.*

— (1888^2): *Leitfaden der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten. 2. Heft. Lehre vom Flächeninhalt. Konstruktionslehre.* Zweite, teilweise umgearbeitete Auflage.

— (1889^3): *Leitfaden der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten. 1. Heft. Kongruenz.* Dritte, teilweise umgearbeitete Auflage.

— (1890^2): *Leitfaden der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten. 3. Heft. Die Ähnlichkeit der Figuren.* Zweite, teilweise umgearbeitete und vermehrte Auflage.

Kramer, Paul (1877): *Theorie und Erfahrung. Beiträge zur Beurtheilung des Darwinismus.*

Langer, Paul Viktor (1878): *Die Grundprobleme der Mechanik, eine kosmologische Skizze.*

Macher, Georg (1878): *Zur Integration der partiellen Differentialgleichung* $\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} = 0$.

N.N. (1880): *Repetitorium der analytischen Geometrie. Zusammenstellung der wichtigsten Sätze aus der analytischen Geometrie des Raumes über Puncte, Gerade, Ebenen, Oberflächen zweiten Grades, die Wellenfläche und die sphärische Trigonometrie.*

Odstrčil, Johann (1879): *Kurze Anleitung zum Rechnen mit den (Hamilton'schen) Quaternionen.*

Radicke, Eduard Albert (1880): *Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.*

Rulf, Wilhelm (1889): *Elemente der projectivischen Geometrie. Auf Grund neuer, vom Professor Carl Küpper herrührender Definitionen und Beweise leicht fasslich zusammengestellt.*

Schobloch, Anton (1884): *Ueber Beta- und Gammafunctionen.*

Schulz, August (1912): *Das Klima Deutschlands in der Pleistozänzeit I. Die Wandlung des Klimas Deutschlands seit der letzten Eiszeit* [= *Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Halle a. d. S.*, Neue Folge 1], im Selbstverlage der Gesellschaft in Kommission L. Nebert.

— (1916): *Die Getreide der alten Aegypter* [= *Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Halle a. d. S.*, Neue Folge 5], im Selbstverlage der Gesellschaft in Kommission L. Nebert.

— (1918): *Beiträge zur Kenntnis der Geschichte der Spelzweizen im Altertum* [= *Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Halle a. d. S.*, Neue Folge 6], im Selbstverlage der Gesellschaft in Kommission L. Nebert.

Schulze, Otto (1909): *Heimatbilder. Halle und Umgebung.*

Silbermann, Theophil (1917): *Das Rätsel der Natur. Weltanfang, Weltbild und Menschenpflicht. Gemeinverständlicher Entwurf einer naturwissenschaftlich ermittelten Weltauffassung.*

Thomae, Carl Johannes (1870): *Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen.*

— (1873): *Ebene geometrische Gebilde erster und zweiter Ordnung vom Standpunkte der Geometrie der Lage betrachtet.*

— (1873^2): *Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen.* Zweite vermehrte Auflage von Thomae (1870).

— (1875a): *Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale.*

— (1875b): *Ueber eine Function welche einer linearen Differential- und Differenzengleichung vierter Ordnung Genüge leistet.*

— (1876): *Sammlung von Formeln welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden.*

— (1877): *Ueber eine specielle Klasse Abel'scher Functionen.*

— (1879): *Ueber eine specielle Klasse Abel'scher Functionen vom Geschlecht 3.*

— (1880): *Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen.*

— (1890^3): *Abriss einer Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen und der Thetafunctionen.* Dritte, erheblich vermehrte Auflage von Thomae (1870).

— (1894): *Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung.*

— (1898^2): *Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen.* Zweite erweiterte und umgearbeitete Auflage von Thomae (1880).

Wiegand, August (1870): *Wie mir's erging. Autobiographische Skizzen.*

Weiterhin verwendete Literatur

Dathe, Uwe (1997): „[mit Annotationen versehene] Bibliographie", in G. Gabriel/W. Kienzler (ed.), *Frege in Jena. Beiträge zur Spurgensicherung*, Königshausen & Neumann, Würzburg, 149-159.

Dörfel, Günter (2011): „Vom geschichteten zum unsichtbaren elektrischen Licht. Der Mathematiker, Physiker und Erzieher Paul Victor Langer (1851–1925)", in *Zeitschrift für Thüringische Geschichte* 65, 209-227.

Eisler, Rudolf (1912): *Philosophen-Lexikon. Leben, Werke und Lehren der Denker*, verlegt bei Ernst Siegfried Mittler und Sohn, Berlin.

Frege, Gottlob (1906): „Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae", in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* XV(12), 586-590.

Kienzler, Wolfgang (2009): *Begriff und Gegenstand. Eine historische und systematische Studie zur Entwicklung von Gottlob Freges Denken*, Vittorio Klostermann, Frankfurt a.M.

Kreiser, Lothar (2001): *Gottlob Frege. Leben – Werk – Zeit*, Meiner, Hamburg.

— (ed.): „Anhang: Nachschrift einer Vorlesung und Protokolle mathematischer Vorträge Freges" (eingel. v. L. Kreiser), in G. Frege, *Nachgelassene Schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel. Erster Band: Nachgelassene Schriften* (bearb., eingel., m. Amn. vers. v. H. Hermes et al., ed.), Felix Meiner Verlag, Hamburg 1983^2, 325-388.

Mates, Benson (1967): „Rez. v. I. Angelelli *Begriffsschrift und andere Aufsätze*“, in *The Journal of Symbolic Logic* 32(2), 240-242.

Schulz, Hermann (ed.): *Adressbuch für den deutschen Buchhandel, den Antiquar-, Kolportage-, Kunst-, Landkarten- und Musikalienhandel sowie verwandte Geschäftszweige*, Verlag von Otto August Schulz, Leipzig 1880[42].

Thomae, Carl Johannes (1906): „Erklärung“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* XV(12), 590-592.

Wille, Matthias (2015): „‘Largely unknown’. Wie Gottlob Frege zu posthumem Weltruhm gelangte“, in: *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik* 5, 97-233.

— (2016): *›Largely unknown‹ Gottlob Frege und der posthume Ruhm*, mentis, Münster. Korrigierte, überarbeitete und erweitere Ausgabe von Wille (2015).

Wundt, Wilhelm (1877): „Rez. v. Langer *Die Grundlagen der Psychophysik*“, in *Jenaer Literaturzeitung* Nr. 3 vom 20. Januar 1877, 37-38.

Adressen der Autoren

Karl Kuhlemann
Fakultät für Mathematik und Physik
Gottfried Wilhelm Leibniz
Universität Hannover
Welfengarten 1
D-30167 Hannover
kus.kuhlemann@t-online.de

Nicolay Miklov
Institut für Humanwissenschaften:
Philosophie
Fakultät für Kulturwissenschaften
Universität Paderborn
Warburger Str. 100
D-33098 Paderborn
nikolay.miklov@upb.de

Gregor Nickel
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Martin Rathgeb
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
rathgeb@mathematik.uni-siegen.de

Laura Schulte
Gymnasium der Stadt Lennestadt
Am Biertappen 45
D-57368 Lennestadt
lschulte.lenhausen@t-online.de

Harald Schwaetzer
Institut für Philosophie
Cusanus Hochschule
staatlich anerkannte Hochschule in
freier Trägerschaft
Postfach 11 46
D-54461 Bernkastel-Kues
Harald.schwaetzer@cusanus-hochschule.de

Christian Thiel
Institut für Philosophie
Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg
Bismarckstr. 1
D-91054 Erlangen
thiel-erlangen@t-online.de

Matthias Wille
Institut für Humanwissenschaften:
Philosophie
Fakultät für Kulturwissenschaften
Universität Paderborn
Warburger Str. 100
D-33098 Paderborn
willem@mail.uni-paderborn.de

SieB
Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Die *Siegener Beiträge* bieten ein Forum für den Diskurs im Bereich von *Philosophie und Geschichte der Mathematik*. Dabei stehen die folgenden inhaltlichen Aspekte im Zentrum:

1. Philosophie und Geschichte der Mathematik sollen einander wechselseitig fruchtbar irritieren: Ohne Bezug auf die real existierende Mathematik und ihre Geschichte läuft das philosophische Fragen nach der Mathematik leer, ohne Bezug auf die systematische Reflexion über Mathematik wird ein Bemühen um die Mathematikgeschichte blind.

2. Geschichte ermöglicht ein Kontingenzbewusstsein, philosophische Reflexion fordert Kontextualisierungen heraus. Damit stellen sich u. a. Fragen nach der Rolle der Mathematik für die Wissenschaftsgeschichte, aber auch nach einer gesellschaftlichen Rolle der Mathematik und deren historischer Bedingtheit.

3. *Ein* spezieller Aspekt betrifft das (schulische) Lehren und Lernen von Mathematik und deren Wandel im historischen Verlauf; der reichhaltigen Zeitschriftenlandschaft im Bereich der mathematischen Fachdidaktik soll allerdings keine Konkurrenz gemacht werden.

Formelles:

1. Die Erscheinungsweise ist einmal jährlich.
2. Hauptziel ist eine Beförderung des fachlichen Diskurses; die Aufsätze werden nicht referiert, daher ist eine relativ schnelle Publikation möglich.
3. Publikationssprachen sind Deutsch (vorzugsweise), Englisch, Französisch, Italienisch.
4. Die Siegener Beiträge sind als Präpublikationsreihe konzipiert; alle Publikationsrechte verbleiben beim jeweiligen Autor.
5. Neben den regulären Ausgaben ist die Publikation von monographischen Bänden möglich.

SieB
Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

Bisher erschienen

Band 1 (2013), 155 S., kart, 13,– Euro

Mit Beiträgen von Gregor Nickel, Ingo Witzke, Anna-Sophie Heinemann, Matthias Wille, Philipp Karschuck, Ralf Krömer & David Corfield

Band 2 (2013), 278 S., kart., 22,– Euro

Susanne Spies:
Ästhetische Erfahrung Mathematik: Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler

Band 3 (2014), 207 S., kart., 22,– Euro

Henrike Allmendinger:
Felix Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte" aus: Eine Analyse aus historischer und mathematikdidaktischer Sicht

Band 4 (2014), 109 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Peter Ullrich, Nicola Oswald, Tanja Hamann, Sebastian Schorcht, Elena Ficara, Tim Räz & Tilman Sauer, Gregor Nickel

Band 5 (2015), 232 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Thomas Bedürftig, Alessa Binder, Martin Janßen, Elisabeth Pernkopf, Matthias Wille

Band 6 (2016), 311 S., kart., 22,– Euro

Martin Rathgeb:
George Spencer Browns *Laws of Form* zwischen Mathematik und Philosophie

ISSN 2197-5590 univer*si* – Universitätsverlag Siegen | www.uni-siegen.de/universi

Preis: 13,– Euro (Doppelnummer 22,– Euro)

SieB – Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Bd. 7 (2016)

Mit Beiträgen von

Karl Kuhlemann
Nichtstandard in der elementaren Analysis – Kröte oder Froschkönig?

Nikolay Milkov
The 1900 Turn in Bertrand Russell's Logic, the Emergence of his Paradox, and the Way Out

Gregor Nickel
Nicht nur nach den reifen Früchten greifen... – Mathematikgeschichte im Schulunterricht

Martin Rathgeb
Lewis Carroll, die Schildkröte und Achill. Ein unendlicher logischer Diskurs auf drei Seiten

Laura Schulte
Eine Querschnittsanalyse zur Rolle der Mathematikgeschichte in aktuellen Schulbüchern

Harald Schwaetzer
Mathematik und Anthropologie am Ende der Tage

Christian Thiel
Oskar Becker und die Pyramiden

Matthias Wille
Der Mann, der nicht nur die *Begriffschrift* publizierte

ISSN 2197-5590

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN