

Entwicklung und Anwendung eines virtuellen Mehrzwecklabors zur Untersuchung und Optimierung multifunktionaler Wandstrukturen

Von der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Universität Siegen genehmigte

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Ingenieurwissenschaften
(Dr.-Ing.)

vorgelegt von
Elias Perras, M.Sc.
geb. am 24.04.1986 in Gräfelting

Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. mult. Chuanzeng Zhang

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Ulrich Paul Schmitz

Tag der mündlichen Prüfung: 03.03.2020

Siegen, im März 2020

Kurzfassung

Zum Schutz vor Lärmeinwirkungen und hinsichtlich eines möglichst geringen Energieverbrauchs müssen im Bauwesen verwendete Wandstrukturen sowohl über eine gute Schalldämmung als auch über eine effiziente Wärmedämmung verfügen. Um diese beiden Vorgaben bestmöglich zu erfüllen, werden zur Optimierung der Schall- und Wärmedämmeigenschaften von Wandstrukturen üblicherweise experimentelle Messungen sowie analytische und numerische Untersuchungen durchgeführt. Während umfangreiche Messreihen teuer und zeitaufwändig sind, müssen für analytische Methoden starke Vereinfachungen bezüglich der möglichen Randbedingungen und dem geometrischen Aufbau vorgenommen werden. Durch die Anwendung geeigneter numerischer Näherungsverfahren können hingegen fast alle relevanten physikalischen Phänomene in der Berechnung berücksichtigt werden.

In der vorliegenden Arbeit wird ein virtuelles Mehrzwecklabor entwickelt, das in der Lage ist, die Schall- und Wärmedämmeigenschaften von geometrisch beliebigen Wandstrukturen zu ermitteln und zu optimieren. Zur Bestimmung der Schalldämmeigenschaften wird ein vollständig gekoppeltes Fluid-Struktur-Interaktionsproblem (FSI) im Frequenzbereich gelöst, wobei sich die numerische Näherungsrechnung am prinzipiellen Vorgehen bei einer Messung im Labor orientiert. Die im virtuellen Mehrzwecklabor berechneten Kennwerte der Schalldämmung sind daher gut mit experimentellen Versuchsergebnissen vergleichbar. Durch Lösung der Wärmeleitungsgleichung werden die Wärmedämmeigenschaften bestimmt. Für luftgefüllte Spalte und Hohlräume innerhalb der Struktur wird dazu ein äquivalenter Wärmeleitkoeffizient verwendet. Das virtuelle Mehrzwecklabor soll die Kennwerte der Schall- und Wärmedämmung für eine große Anzahl an Geometrieparametern der Wandstrukturen ermitteln. Um eine genaue und zeiteffiziente Berechnung zu gewährleisten, wird die Spektral-Elemente-Methode (SEM), eine fortschrittliche Variante der Finite-Elemente-Methode (FEM), verwendet. Die Effizienz der entwickelten SEM wird anhand von Konvergenzstudien diskutiert. Die im virtuellen Mehrzwecklabor ermittelten Kennwerte der Schall- und Wärmedämmung werden mit experimentellen Daten validiert und mit anderen Näherungsverfahren verglichen. Die Anwendung des virtuellen Labors zur Optimierung von Wandstrukturen wird für ausgewählte Beispiele demonstriert.

Abstract

A wall construction, used in civil engineering, requires not only good acoustic insulation to protect people from the harmful impact of noise exposure, but also efficient thermal insulation to minimize energy consumption. Experimental, analytical and numerical studies are usually conducted to analyze and optimize the acoustic and thermal properties of a wall structure. In general, experimental measurements are time-consuming and expensive, while analytical studies suffer from restrictions of the boundary conditions and geometry of the problem. By using appropriate numerical methods, however, all relevant physical phenomena can be included.

The present work develops a virtual multipurpose laboratory, which is capable to determine the acoustic and thermal insulation of a geometrically complex wall construction. A strongly coupled fluid-structure interaction problem (FSI) in the frequency domain is solved to determine the acoustic insulation. The simulation follows the conditions of an experimental setup. Therefore, the characteristic values for the sound insulation calculated by the virtual multipurpose laboratory are comparable to experimental measurements. The heat equation is solved to estimate the thermal insulation. In the case of structures including cavities and gaps filled with air, an equivalent thermal conductivity is used. The virtual multipurpose laboratory calculates the characteristic values of the acoustic and the thermal insulation for a large number of geometry parameters of the wall structure. To increase the accuracy and speed of the calculation, the spectral element method (SEM), which is an advanced finite element method (FEM), is used. Convergence studies are conducted to analyze the efficiency of the developed SEM. The characteristic values for the acoustic and thermal insulation, which are calculated in the virtual multipurpose laboratory are verified by experimental data and compared to the characteristic values derived by other estimation methods. Examples for the use of the virtual multipurpose laboratory in the optimization procedure of wall structures are given.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter von Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. mult. Chuanzeng Zhang am Lehrstuhl für Baustatik der Universität Siegen. Diesem gilt mein größter Dank für seine außerordentlich engagierte Hilfe und Unterstützung in allen Bereichen. Seine Leidenschaft für Forschung wirkte inspirierend, er hatte stets ein offenes Ohr für fachliche und private Probleme und durch die zahlreichen Forschungsaufenthalte im Ausland konnte ich ein differenzierteres Weltbild entwickeln.

Weiterhin danke ich vielmals Herrn Prof. Dr.-Ing. Ulrich Paul Schmitz für die Übernahme des Korreferats und Herrn Prof. Dr.-Ing. Peter Schmidt und Herrn Prof. Dr.-Ing. Claus-Peter Fritzen für ihr Mitwirken in der Promotionskommission.

Ich danke allen aktuellen und ehemaligen Mitarbeitern des Lehrstuhls, insbesondere Meike Stricker, Dipl.-Ing. Benjamin Ankay, Marius Mellmann M.Sc., Dr.-Ing. Pedro Villamil, für die sehr gute und kollegiale Zusammenarbeit. Ebenso danke ich Dr. Changjun Zheng und Dr.-Ing. Hui Zheng für die zahlreichen fachlichen und privaten Gespräche und richte meinen Dank auch an Dr. Jihao Chen vom CBMA in Peking.

Meiner Familie und meinen Freunden bin ich dankbar für die Unterstützung, die ich erhalten habe. Last but not least danke ich meiner Verlobten Astrid Pineda, die ich dank dieser Arbeit während eines Forschungsaufenthalts in Peking 2015 kennengelernt habe.

Siegen im Dezember 2019

Elias Perras

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen und Symbole	iv
1 Einleitung	1
1.1 Motivation und Stand der Forschung	1
1.2 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit	6
2 Theoretische Grundlagen	9
2.1 Grundgleichungen der Akustik	9
2.2 Grundgleichungen der Elastodynamik	12
2.3 Fluid-Struktur-Interaktionsprobleme	17
2.4 Grundgleichungen der Wärmeübertragung	18
3 Spektral-Elemente-Methode (SEM)	21
3.1 Numerische Methoden für Randwertprobleme	21
3.2 Grundlagen der SEM	24
3.2.1 Überblick über spektrale Näherungsverfahren	24
3.2.2 Interpolationsfunktionen	29
3.2.3 Numerische Integration	36
3.2.4 Kondition und Lösung des linearen Gleichungssystems	39
3.2.5 Zeitliche Diskretisierung	42
3.3 SEM für Akustik	45
3.4 SEM für Elastodynamik	49
3.5 SEM für Fluid-Struktur-Interaktionsprobleme	52
3.6 SEM für Wärmeleitungsprobleme	56
4 Validierungsbeispiele für die SEM	59
4.1 A priori Fehlerschätzung	59
4.2 Akustische Probleme	62
4.2.1 Beispiele im Frequenzbereich	62
4.2.2 Beispiele im Zeitbereich	72
4.3 Elastodynamische Probleme	76
4.3.1 Beispiele im Frequenzbereich	76
4.3.2 Beispiele im Zeitbereich	79
4.4 Fluid–Struktur–Interaktionsprobleme	80

4.4.1	Beispiele im Frequenzbereich	80
4.4.2	Beispiele im Zeitbereich	93
4.5	Wärmeleitungsprobleme	97
4.5.1	Stationäre Wärmeleitungsprobleme	97
4.5.2	Transiente Wärmeleitungsprobleme	97
5	Das virtuelle Mehrzwecklabor und seine Anwendungsgebiete	100
5.1	Konzept und Aufbau des virtuellen Mehrzwecklabors	100
5.2	Bestimmung des Schalldämm-Maßes	101
5.2.1	Ermittlung im realen Versuchslabor	101
5.2.2	Näherungen für monolithische und zweischalige Wände	103
5.2.3	Näherungen für geometrisch komplexe Wandaufbauten	108
5.2.4	Ermittlung der Schalldämmung im virtuellen Labor	110
5.3	Bestimmung der Wärmedurchgangszahl	114
5.4	Optimierung multifunktionaler Wandstrukturen	117
5.4.1	Bestimmung der Zielfunktion	117
5.4.2	Optimierung durch Parametervariation und genetischen Algorithmus	119
5.5	Einflussparameter des virtuellen Mehrzwecklabors	121
6	Ausgewählte Anwendungsbeispiele	129
6.1	Schalldämmung von Wandstrukturen	129
6.1.1	Schalldämmung von monolithischen und mehrschaligen Wänden . .	130
6.1.2	Schalldämmung der CBMA Designs	134
6.1.3	Schalldämmung von periodisch aufgebauten Wandstrukturen	137
6.2	Wärmedämmung von Wandstrukturen	143
6.3	Optimierung multifunktionaler Wandstrukturen	145
6.3.1	Doppelschalige Wand mit Hohlräumen	145
6.3.2	Wand mit sieben Schichten	148
7	Zusammenfassung und Ausblick	152
7.1	Zusammenfassung	152
7.2	Ausblick	154
A	Anhang	155
A.1	Fourier-Transformation	155
A.2	Analytische Lösung der Helmholtz-Gleichung mit Dirichlet- Randbedingungen	155
A.3	Numerische Lösung der Wärmeübertragung durch Wandstrukturen mit Hohlräumen	156

A.4 Berechnung der Dispersionsdiagramme von periodischen Strukturen	160
Literaturverzeichnis	163

Symbolverzeichnis

Abkürzungen und häufig verwendete Indizes

CGL	CHEBYSHEV-GAUSS-LOBATTO Nodalbasis
ED	Äquidistant verteilte Nodalbasis
EVZ	Ebener Verzerrungszustand
FEM	Finite-Elemente-Methode
GL	Elementmatrizen mittels GAUSS-LEGENDRE-Quadratur
GLL	GAUSS-LEGENDRE-LOBATTO Nodalbasis
LOB	Elementmatrizen mittels LOBATTO-Quadratur
SEM	Spektral-Elemente-Methode

Lateinische Großbuchstaben

A	Fläche
B	Ableitungsmatrix zur Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen
D, D_S	Elastizitätstensor, Elastizitätstensor in NYEscher Notation
E	Elastizitätsmodul
F	Lastvektor für Kontinuum
I	Einheitsmatrix
J	JACOBI-Matrix
$LA_{p,k}$	LAGRANGE-Polynom der Ordnung p und Knotennummer k
LO_p	LOBATTO-Polynom der Ordnung p
M	Massenmatrix
N, \mathbf{N}	Freiheitsgrade, Matrix der Formfunktionen
K	Steifigkeitsmatrix
Q	Lastvektor im Fluidbereich
R_w^{mod}	Modifizierter Einzahlwert der Schalldämmung
T	Temperatur
U	Wärmedurchgangszahl
V	Volumen
Z	Impedanz

Lateinische Kleinbuchstaben

c_0	Schallgeschwindigkeit in Luft
d	Dicke
f	Frequenz
i	Imaginäre Einheit
\mathbf{k}, k	Elementsteifigkeitsmatrix, Kreiswellenzahl, Wärmeleitkoeffizient
\mathbf{m}	Elementmassenmatrix
\mathbf{n}	Normalenvektor
p, \mathbf{p}	Ordnung, Druck, Vektor der Knotendrucke
q, \mathbf{q}	Wärmefluss, Wärmeflussvektor
r	Reflexionskoeffizient
\mathbf{t}	Spannungsvektor
\mathbf{u}	Vektor der Verschiebungen
$\mathbf{x}, (x, y, z)$	Kartesische Koordinaten im Raum

Griechische Großbuchstaben und Operatoren

Γ	Rand eines Gebiets
Δ	LAPLACE-Operator
Ω	Gebiet
$\nabla, \tilde{\nabla}$	Nabla-Operator, Matrizen-Differentialoperator

Griechische Kleinbuchstaben

δ	KRONECKER-Delta
$\varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_2, \varepsilon_{FS}$	Dehnung, Emissionsgrad, Verzerrungstensor, l_2 -Fehler, Fehlerschranke
η	Isotroper Verlustfaktor
κ	Konditionszahl
λ	Wellenlänge
ν	Querkontraktionszahl
$\boldsymbol{\xi}, \xi_1, \xi_2, \xi_3$	Koordinaten im Referenzraum
ρ, ρ_0	Dichte, statische Dichte
$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_S$	Spannungstensor, Spannungstensor in NYEscher Notation
φ_k	Formfunktion mit der Nummer k
ω	Kreisfrequenz

1 Einleitung

1.1 Motivation und Stand der Forschung

Im Bereich des Bauwesens müssen Wände als wichtige Bauteile neben ihrer Tragfähigkeit noch weitere Funktionen erfüllen. Die Bewohner müssen vor den störenden oder gar gesundheitsgefährdenden Auswirkungen von Lärm geschützt werden und die Innenraumtemperatur soll durch eine effiziente Wärmedämmung möglichst unabhängig von den Außenbedingungen sein. Zur Erfüllung der Teilziele einer möglichst guten Wärme- und Schalldämmung werden üblicherweise massive Beton- oder Ziegelwände mit Wärmedämmverbundsystemen (WDVS) ausgestattet. Dem Gedanken der regenerativen Kreislaufwirtschaft folgend werden jedoch auch innovative Materialien eingesetzt, die neben ihrer Verwendung als Baumaterial einem weiteren Zweck dienen. So stellt in der Volksrepublik China die Verbrennung von, in der Landwirtschaft unbrauchbaren, Pflanzenresten ein Umweltproblem dar, welches zur Luftverschmutzung beiträgt (Abb. 1.1).



(a) Abbrand eines Feldes



(b) Skyline von Suzhou, VR China

Abbildung 1.1: Umweltprobleme und Luftverschmutzung. (Quelle: Wikimedia Commons)

Aus diesem Grund wurden an der **China Building Materials Academy (CBMA)** in Peking, VR China, Wandaufbauten entwickelt, die zum Teil speziell verarbeitetes, gepresstes Stroh enthalten. Das Material besitzt zum einen gute Wärmedämmeigenschaften und senkt so den Energieverbrauch der Wohnhäuser und zum anderen wird so das überflüssige Abfallmaterial der Landwirtschaft einer neuen, sinnvollen Verwendung zugeführt. Zur Erfüllung der Anforderungen an die Schalldämmung werden auch herkömmliche Materialien wie Beton verwendet. Beispiele für die entwickelten Wandkonstruktionen sind in der Abb. 1.2 zu sehen.

Auch andernorts werden innovative Materialien und Techniken zur Verbesserung der Dämmeigenschaften eingesetzt. So wird in [8] bspw. Pflanzenbewuchs auf Außenwänden

eingesetzt, um deren akustische Eigenschaften zu verbessern. In [126] werden Papierabfälle zu Ziegeln mit guten Wärmedämmeigenschaften verarbeitet. Eine Optimierung des konstruktiven Aufbaus erfordert allerdings Erfahrung, die beim Umgang mit neuen Materialien oftmals noch nicht vorhanden ist. Eine iterative Verbesserung der Dämmeigenschaften durch wiederholte Messungen ist teuer und zeitaufwendig, weshalb oft ergänzend analytische und numerische Untersuchungen durchgeführt werden.



(a) Paneele



(b) Pressstrohfüllung

Abbildung 1.2: Beispiele für an der CBMA entwickelte Wände mit Pressstroheinlage. (Quelle: Eigene Anfertigung)

Im Rahmen dieser Arbeit soll ein Werkzeug, das *virtuelle Mehrzwecklabor*, entwickelt werden, das für mehrschichtige/mehrschalige und geometrisch komplexe Wandstrukturen effizient und akkurat die akustischen und thermischen Dämmeigenschaften ermitteln kann. Dazu wird die Wand in ein numerisches Modell überführt und die beschreibenden Differentialgleichungen werden unter Anwendung der Spektral-Elemente-Methode (SEM), einer weiterentwickelten Finite-Elemente-Methode (FEM), gelöst. Neben der SEM kommen für einfache Fälle auch analytische Lösungen und andere Näherungsmethoden zum Einsatz.

Die Vorhersage der Wärmedämmung ist für Wandaufbauten, in denen Energie lediglich durch Wärmeleitung übertragen wird, relativ einfach. Schwierigkeiten entstehen, falls der Aufbau auch Hohlräume und Spalte enthält, die mit einem Fluid gefüllt sind. Da die Energie dann auch durch Wärmestrahlung und natürliche Konvektion übertragen wird, ergibt sich ein gekoppeltes Problem, welches nur mit hohem numerischen Berechnungsaufwand gelöst werden kann. Schon früh wurde die Finite-Elemente-Methode von TAYLOR und IJAM [129] eingesetzt, um die natürliche Konvektion in Luftspalten zu berechnen. In neueren Arbeiten wird das gekoppelte Problem der Wärmeübertragung in Hohlräumen gelöst und Parameterstudien zum Einfluss unterschiedlicher Effekte wie den Hohlraumabmessungen oder deren Emissionsgrad durchgeführt [121, 127, 140].

Zur effizienten Berechnung der Wärmeübertragung durch Wandstrukturen verwendet das entwickelte virtuelle Mehrzwecklabor einen äquivalenten Wärmeleitkoeffizienten für luftgefüllte Hohlräume, dessen Ermittlung in der DIN EN ISO 6946 beschrieben wird [40].

Zur Ermittlung der Wärmedurchgangszahl einer Struktur muss dann lediglich die diskretisierte Wärmeleitungsgleichung gelöst werden, was den Berechnungsaufwand erheblich verringert. Dieses Vorgehen wird von verschiedenen Autoren bspw. verwendet, um die Wärmedämmung von Ziegeln zu untersuchen und zu optimieren [31, 126], oder den Einfluss von speziellen absorbierenden Beschichtungen zu analysieren [104].

Die akkurate und effiziente Ermittlung der Schalldämmung stellt eine deutlich größere Herausforderung dar. Eine Lösung der Schalldämmung monolithischer Wände lässt sich analytisch über die Plattengleichung bestimmen. Für mehrschichtige Wände kann die Übertragungsmatrix-Methode (englisch: *Transfer matrix method*, TMM) verwendet werden, wobei die Schichten auch aus porösem Material oder einem Fluid bestehen können [17, 132]. Die statistische Energie-Analyse (englisch: *Statistical energy analysis*, SEA) ermöglicht es, das dynamische Verhalten von relativ komplexen Strukturen zu untersuchen [25, 122]. Mithilfe der SEA kann auch die Übertragung von Schallenergie über die angrenzenden Wände oder über die Verbindungen zwischen mehreren Schalen einer Wand modelliert werden.

Sollen mehrere wesentliche Einflussfaktoren in der Untersuchung berücksichtigt werden, ist eine numerische Berechnung der Fluid-Struktur-Interaktion (FSI) notwendig. Diese ergibt sich, wenn eine Wandstruktur von einer in einem Fluidbereich erzeugten Schallwelle zu Schwingungen angeregt wird. Hierbei können geometrisch beliebig aufgebaute Strukturen untersucht werden und mehrere wesentliche Einflussgrößen, sowohl der Wand als auch der Fluidgebiete und deren Interaktion, werden erfasst. Da sich die Berechnung hierbei an den grundsätzlichen physikalischen Abläufen bei einer experimentellen Ermittlung orientiert, wird das gekoppelte FSI-Modell im Folgenden auch als virtuelles bzw. numerisches Labor bezeichnet. In einer experimentellen Messung trennt die zu untersuchende Wand einen luftgefüllten Senderraum, in dem sich eine Schallquelle befindet, von einem Empfangsraum, in dem sich ein Messmikrofon befindet, ab. Durch Messung der Differenz der Schalldruckpegel werden die akustischen Dämmeigenschaften der Wand bestimmt.

Grundsätzlich kann die Interaktion zwischen Fluid und Struktur durch eine schwache und eine starke Kopplung erfasst werden. Von schwacher Kopplung spricht man, wenn der wechselseitige Einfluss gering ist und das Problem partitioniert werden kann [58]. Es wird in diesem Fall zuerst das Schwingungsproblem der Struktur gelöst und die entsprechenden Größen als Randbedingungen auf das Fluid aufgebracht, und umgekehrt. Im Falle der starken Kopplung wird der wechselseitige Einfluss voll erfasst und ein Gesamtgleichungssystem der Problemstellung gelöst (sogenannter *monolithischer Ansatz*). Der Berechnungsaufwand ist hierbei im Allgemeinen wesentlich größer. Für den Fall der Schallübertragung durch eine Wand oder ein Paneel muss in der Regel ein monolithischer Ansatz verwendet werden [44, 1, 7].

Die verfügbare Literatur zum Thema der numerischen Vorhersage des Schalldämm-Maßes einer Wandstruktur durch Lösung der gekoppelten Fluid-Struktur-Interaktion ist relativ übersichtlich wie schon verschiedene Autoren festgestellt haben [6, 90]. Die FEM wird schon früher zur Berechnung der Schalldämmung komplexer Strukturen, bspw. Ziegelwände und geschichtete Wandaufbauten verwendet, wobei der Frequenzbereich bedingt durch die niedrige Rechnerleistung begrenzt war [105]. So wurden Studien über den Einsatz eines FSI-Modells zur Bestimmung des Schalldämm-Maßes von einschaligen und doppelschaligen Wänden im unteren Frequenzbereich durchgeführt [28, 27]. In jüngerer Zeit konnten durch die gestiegene Rechnerleistung geometrisch komplexe Strukturen auch für den hohen Frequenzbereich analysiert werden [106, 107].

FRANCK [46] untersuchte ausführlich die Anwendung der FEM auf unterschiedliche Problemstellungen der Raumakustik und widmete ein Unterkapitel seiner Arbeit der numerischen Vorhersage des Schalldämm-Maßes in der Bauakustik, wobei quadratische finite Elemente zur Vernetzung verwendet wurden. Betrachtet wurde hierbei lediglich der untere Frequenzbereich und die Wände wurden nicht als Kontinuum, sondern als Platten modelliert, wobei in der Arbeit das MINDLIN-Plattenmodell verwendet wurde.

In der Arbeit von CLASEN und LANGER [22] wurde der Einfluss der Einspannbedingungen und Flankenübertragung in einem FSI-Modell untersucht, wobei die Struktur durch Balkenelemente approximiert wurde.

In den Arbeiten von ACKERMANN [1] und POBLET-PUIG [101] wurde detailliert die Verwendung eines numerischen Labors zur Untersuchung der Schalldämmung untersucht. Dabei wurde ein Überblick über analytische Methoden gegeben und damit ermittelte Ergebnisse wurden mit den Lösungen aus der FSI-Simulation verglichen. Der Einfluss von Parametern wie Größe der Fluidgebiete, Einspannbedingungen und Absorptionsgrad der Begrenzungen sowie Einflüsse von Materialparametern der Wand wurden analysiert.

GIBBS und MALUSKI [48, 76] untersuchten in ihrem FSI-Modell für den niedrigen Frequenzbereich ebenfalls unterschiedliche Effekte wie die Absorption der Wände oder die Größe des numerischen Labors und andere Einflussfaktoren.

Jüngere Arbeiten versuchten das Schalldämm-Maß von geometrisch komplexen Strukturen auch im höheren Frequenzbereich bis 3550Hz zu berechnen. DEL COZ DÍAZ et al. [32] verwendeten ein numerisches Labor zur Vorhersage der Schalldämmung von Leichtbauziegeln. ARJUNAN et al. verwendeten ebenfalls ein numerisches Labor zur zweidimensionalen (2D) [5] und dreidimensionalen (3D) [6] Berechnung von doppelschaligen Wandaufbauten mit relativ hoher Genauigkeit. Ihre 3D Berechnung, durchgeführt mittels Einsatz von kommerzieller FEM-Software, benötigte jedoch minimal 35 Stunden Zeit.

Die Arbeiten von PAPADOPOULOS [89, 90] beschäftigten sich mit der Optimierung der

Geometrie des numerischen Labors, um den Einfluss von Eigenfrequenzen im unteren Frequenzbereich abzuschwächen.

Neben der FEM kommen auch gekoppelte numerische Methoden, wie bspw. die FEM-REM (REM: Randelementemethode; englisch: *Boundary element method*, BEM) zum Einsatz [131, 24], wobei die Struktur üblicherweise mittels der FEM diskretisiert wird und der Fluidbereich durch die REM approximiert wird. In den zuvor vorgestellten Arbeiten wurden nach Kenntnis des Autors lediglich die Standard-FEM eingesetzt, das heißt, es wurden lineare oder quadratische Formfunktionen zur Approximation der Druck- und Verschiebungsfelder verwendet.

Grundsätzlich ist ein FSI-Modell in der Lage fast alle auftretenden Effekte und Wellenarten zu erfassen [97]. Die Geometrie kann völlig beliebig sein und fast alle Einflussfaktoren wie unterschiedliche Parameter des Prüfstandes sowie der zu untersuchenden Wand werden daher berücksichtigt. So ist die Methodik prinzipiell in der Lage den Verlauf des Schalldämm-Maßes entsprechend der Prüfstandsmessung wiederzugeben [30]. Dies setzt allerdings voraus, dass die relevanten Parameter bekannt sind. Die Anwendung der FEM in einem FSI-Modell benötigt jedoch, insbesondere für den hohen Frequenzbereich und den 3D Fall, beträchtliche Rechnerleistung. Dem Autor ist auch keine Arbeit bekannt, in welcher eine Optimierung der Schalldämmeigenschaften unter Verwendung eines vollständig gekoppelten FSI-Modells durchgeführt wurde. Viele Arbeiten verwenden für ihre Untersuchungen kommerzielle Software, welche entweder keine Möglichkeit bieten, spezielle Formfunktionen zu verwenden oder diese Möglichkeit ist lediglich über Umwege zugänglich. Im Bereich der Wellenausbreitung ist die Verwendung der Standard-FEM mit verschiedenen Problemen behaftet. Einerseits ist die Anzahl der notwendigen Freiheitsgrade hoch. So werden für lineare Formfunktionen mindestens zehn und für quadratische Formfunktionen mindestens sechs Freiheitsgrade pro Wellenlänge verwendet, um ein brauchbares Ergebnis zu erhalten [77]. Soll die Genauigkeit gesteigert werden, müssen sehr viel mehr Freiheitsgrade verwendet werden. Dies erhöht die Größe des Systems und damit überproportional die Berechnungszeit. Andererseits besteht das Problem der numerischen Dispersion, welche die Anzahl der notwendigen Freiheitsgrade, insbesondere für den oberen Frequenzbereich, noch weiter erhöht. Eine Möglichkeit zur Erhöhung von Berechnungseffizienz und Genauigkeit stellt die Verwendung von fortschrittlichen numerischen Methoden, wie bspw. der SEM, dar.

Nach Wissen des Autors gibt es zum Zeitpunkt der Anfertigung der vorliegenden Arbeit keine Untersuchung zur Effizienz der SEM bei der Lösung eines FSI-Problems im Rahmen der Bauakustik und auch keine Arbeit, in der eine solche Problemstellung mittels einer verwandten spektralen Methode gelöst wird. Spektrale Methoden wie die p-FEM [14, 103], wellenbasierte FEM [72, 137, 60] und die in dieser Arbeit verwendete SEM [21, 137]

sind Gegenstand aktueller Forschung, insbesondere, um das Problem der numerischen Dispersion bei hohen Frequenzen zu lösen. Ein ausführlicher Literaturüberblick hierzu wird im Abschnitt 3.2.1 gegeben.

1.2 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der effizienten Berechnung der dynamischen Eigenschaften und der Schall- und Wärmedämmeigenschaften von multifunktionalen Wandstrukturen und Paneelen. Der Fokus liegt auf der Ermittlung der Schalldämmung von mehrschichtigen/mehrschaligen und geometrisch komplexen Wandkonstruktionen. Zur Berechnung wird ein FSI-Modell entwickelt, in welchem das prinzipielle Vorgehen bei der experimentellen Ermittlung simuliert wird. Es können hierbei fast alle Einflussfaktoren, wie bspw. die Einspannbedingungen oder die Interaktion zwischen Fluid und Struktur, im Detail abgebildet werden. Da sich für die komplexen Kopplungsmechanismen, die hierfür notwendig sind, und den geometrisch beliebigen Aufbau der Wand im Allgemeinen keine ausreichend exakten analytischen Lösungen herleiten lassen, müssen die beschreibenden Gleichungen numerisch gelöst werden. Da die Berechnung sowohl zeiteffizient als auch mit hoher Genauigkeit erfolgen soll, kommt hierfür die SEM zum Einsatz. Die bisherige Literatur befasst sich zwar ausgiebig mit dem Einsatz der SEM in der Elastodynamik und der Akustik, jedoch sind keine Arbeiten bekannt, die ausführlich die Effizienz der SEM für die Ermittlung des Schalldämm-Maßes von Wandstrukturen untersuchen. Ein Ziel dieser Arbeit ist es daher, diese Lücke zu schließen. Weiterhin soll ein Beitrag zur eher begrenzten Literaturlauswahl zum Thema der Ermittlung der Schalldämmung durch Lösung eines gekoppelten Fluid-Struktur-Interaktionsproblems geleistet werden, um die Effizienz und Genauigkeit der SEM zu demonstrieren. Während die Lösung eines Fluid-Struktur-Interaktionsproblems unter Anwendung der Standard-FEM in kommerziellen Berechnungsprogrammen sehr zeitintensiv abläuft, soll der entwickelte Algorithmus ausreichend effizient sein, um seine Anwendung für Parameterstudien und Optimierungsaufgaben zu ermöglichen.

Ein weiterer Schwerpunkt dieser Arbeit liegt darin, die Wärmedämmeigenschaften von geometrisch komplexen Wandaufbauten zu berechnen. Die numerische Lösung der Wärmeleitungsgleichung für ein Wärmeübertragungsproblem in einem Kontinuum ist im Allgemeinen nicht besonders schwierig. Sind jedoch auch luftgefüllte Hohlräume in der Struktur vorhanden, muss aufgrund des Wärmetransportes durch natürliche Konvektion und Strahlung ein komplexes gekoppeltes Problem gelöst werden. Für luftgefüllte Hohlräume gibt die DIN EN ISO 6946 eine Näherungslösung für rechteckige Hohlräume an. In dieser Arbeit wird diese Näherung verwendet und die Berechnung auch auf nicht-rechteckige Hohlräume erweitert. Das auf reine Wärmeleitung reduzierte Problem wird mittels der

SEM gelöst.

Zusammengefasst sind die Hauptziele dieser Arbeit:

- Entwicklung eines virtuellen Mehrzwecklabors zur numerischen Berechnung von Problemstellungen im Bereich der Akustik, Elastodynamik und gekoppelter FSI-Probleme im Frequenz- und im Zeitbereich sowie Berechnung der stationären und transienten Wärmeleitungsgleichung.
- Analyse der Genauigkeit und Effizienz des entwickelten virtuellen Mehrzwecklabors hinsichtlich der Rechenzeit.
- Untersuchungen der Einflüsse von Berechnungsparametern auf das Schalldämm-Maß und Beurteilung möglicher Vereinfachungen zur Effizienzsteigerung der Berechnung.
- Untersuchung und multikriterielle Optimierung verschiedener mehrschichtiger/mehrschaliger und geometrisch komplexer Wandstrukturen.

Neben dieser Einleitung besteht die Arbeit aus sechs weiteren Kapiteln. Die Bestimmungsgleichungen der Akustik, Elastodynamik und der FSI im Zeit- und Frequenzbereich werden in **Kapitel 2** hergeleitet. Dabei wird auch auf die Dämpfung in Fluiden und Festkörpern eingegangen. Zur Berechnung von Problemen der Wärmeübertragung werden die Gleichungen zur Beschreibung der Wärmeleitung in Festkörpern und Fluiden und Wärmestrahlung sowie die NAVIER-STOKES-Gleichungen zur Berücksichtigung von natürlicher Konvektion angegeben.

In **Kapitel 3** werden die Grundlagen der SEM dargestellt. Es werden die in der SEM verwendeten Formfunktionen hergeleitet und ihre numerischen Vorteile erläutert. Aufgrund der Bedeutung für die Anwendung der SEM werden unterschiedliche Möglichkeiten der numerischen Integration dargestellt. Die Diskretisierung der Gleichungen aus Kapitel 2 wird für den zeitunabhängigen und zeitabhängigen Fall ausführlich beschrieben. Für Berechnungen im Zeitbereich wird ein für die Anwendung der SEM besonders effizientes explizites Verfahren der Zeitintegration gezeigt.

Die entwickelte SEM wird in **Kapitel 4** anhand eines Vergleichs mit analytischen Lösungen und Referenzlösungen für strukturierte und unstrukturierte Vernetzung verifiziert. Die Konvergenz und Effizienz der SEM werden untersucht. Zur *a priori* Vorgabe der Genauigkeit der Berechnung der Schalldämmung dient ein 1D Fehlerschätzer, der sich an der Schallwellenlänge im Fluidbereich für eine gegebene Frequenz orientiert.

In **Kapitel 5** wird das entwickelte virtuelle Mehrzwecklabor detailliert erläutert. Es wird die Methodik zur Ermittlung des Schalldämm-Maßes von mehrschichtigen/mehrschaligen und geometrisch komplexen Wandstrukturen aufgezeigt. Für monolithische und zweischa-

lige Wände werden analytischen Lösungen für Vergleichszwecke hergeleitet. Es werden auch Untersuchungen zu den Einflüssen der unterschiedlichen Parameter (Größe, Genauigkeit der Berechnung, etc.) des virtuellen Labors vorgenommen. Weiterhin wird in dem Kapitel die Bestimmung der Wärmedurchgangszahl und der Ablauf der Optimierung der multifunktionalen Wandstrukturen erklärt.

In **Kapitel 6** wird die Anwendung des virtuellen Mehrzwecklabors anhand von repräsentativen Berechnungsbeispielen aufgezeigt. Zur Validierung der Methode wird dabei auch ein Vergleich mit experimentell ermittelten Werten für die Schall- und Wärmedämmung durchgeführt. Außerdem werden auch periodische Strukturen (bekannt als *Phononische Kristalle*, PC) in Hinblick auf deren Schalldämmeigenschaften untersucht. Zur Demonstration der hohen Effizienz des entwickelten Mehrzwecklabors werden Parameterstudien und Optimierungsaufgaben zur Bestimmung der optimalen Wärme- und Schalldämmung von ausgewählten Wandstrukturen durchgeführt. Zur Optimierung wird ein genetischer Algorithmus (GA) verwendet.

Abschließend werden die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit in **Kapitel 7** zusammengefasst und ein Ausblick auf die zukünftigen Forschungsarbeiten auf dem Gebiet wird dabei auch angegeben.

Der **Anhang** beschreibt die Überführung von zeitabhängigen Gleichungen in den Frequenzbereich durch FOURIER-Transformation und eine Methode zur analytischen Lösung von 2D Problemen der Akustik. Für die Wärmeübertragungsprobleme in luftgefüllten Hohlräumen wird ein Vergleich zwischen der Lösung einer vollständig gekoppelten Simulation und einer Lösung des Wärmeleitungsproblems mit einem äquivalenten Wärmeleitkoeffizienten angegeben. Außerdem wird gezeigt, wie sich das Dispersionsdiagramm für eine periodisch angeordnete Struktur ermitteln lässt und einige Beispiele vorgestellt.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Grundgleichungen der Akustik

Die Herleitung der akustischen Wellengleichung beruht auf den Voraussetzungen, dass das Fluid reibungsfrei ist, nur kleine und schnelle (damit näherungsweise adiabatische) Änderungen der Zustandsgrößen erfährt und das Geschwindigkeitsfeld $\text{rot } \dot{\mathbf{u}}_F = 0$ wirbelfrei ist. Die akustischen Grundgleichungen sind damit die Bewegungsgleichung

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_F(t)}{\partial t^2} + \nabla p(t) = 0, \quad (2.1)$$

die Kontinuitätsgleichung zur Erhaltung der Masse

$$\frac{\partial \rho_F(t)}{\partial t} + \rho_0 \nabla \frac{\partial \mathbf{u}_F(t)}{\partial t} = q_F(t) \quad (2.2)$$

und, abgeleitet aus der adiabatischen Zustandsgleichung für Gase, die konstitutive Gleichung

$$p(t) = c_0^2 \rho_F(t). \quad (2.3)$$

Hierbei bezeichnet ρ_0 die statische Dichte und $\rho_F(t)$ die dynamische Dichte, $\mathbf{u}_F(t)$ ist der Verschiebungsvektor, $p(t)$ ist der dynamische Druck und $q_F(t)$ ist die zugeführte Masse pro Volumeneinheit. Die erste Zeitableitung einer Variablen wird durch $\frac{d\bullet}{dt} = \dot{\bullet}$ und die zweite Zeitableitung durch $\frac{d^2\bullet}{dt^2} = \ddot{\bullet}$ gekennzeichnet. Im betrachteten Medium breiten sich die Druckwellen mit der Schallgeschwindigkeit c_0 aus.

Die Kontinuitätsgleichung (2.2) wird nach der Zeit abgeleitet und dann mit der konstitutiven Gleichung (2.3) in die Bewegungsgleichung (2.1) eingesetzt. Man erhält die inhomogene skalare Wellengleichung für den Schalldruck $p(t)$

$$\frac{\partial^2 p(t)}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 p(t) = \frac{\partial q_F}{\partial t}, \quad (2.4)$$

mit dem Nabla-Operator $\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]^T$. Nach deren Überführung in den Frequenzbereich mittels FOURIER-Transformation (siehe Anhang A.1) ergibt sich die skalare HELMHOLTZ-Gleichung

$$\nabla^2 p + k^2 p = q_F \quad (2.5)$$

mit der Kreiswellenzahl $k = \omega/c_0$ (oft nur als Wellenzahl bezeichnet) und einem, falls vorhanden, frequenzabhängigen Quellterm q_F . Dies ist eine elliptische partielle Differentialgleichung, die das Druckfeld für eine Erregung mit der Kreisfrequenz ω beschreibt. Die Kreisfrequenz ist über $\omega = 2\pi f$ mit der Frequenz f verknüpft. Die Wellenlänge λ berechnet sich über

$$\lambda = \frac{c_0}{f}. \quad (2.6)$$

Es sei noch kurz erwähnt, dass es auch möglich ist, die Wellengleichung für das skalare akustische Geschwindigkeitspotential ψ anzugeben. Für den homogenen Fall lautet die Wellengleichung dann

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.7)$$

Für die Herleitung von Gl. (2.7) wird auf die Literatur verwiesen [120, 111]. Diese Formulierung bewirkt, dass für ein gekoppeltes FSI-Problem nach der Diskretisierung im Rahmen der FEM das resultierende Gleichungssystem symmetrische Matrizen aufweist, während bei der Druckformulierung Gl. (2.4) die Systemmatrix nicht-symmetrisch wird. Auf den Unterschied wird im Abschnitt 3.5 eingegangen.

Dämpfung in Fluiden

Bei der Ausbreitung der Schallwelle in Fluiden wird diese bedingt durch innere Reibung und molekulare Absorption gedämpft. In Luft ist die Höhe der Dämpfung abhängig von der Frequenz der Schallwelle, der Temperatur T und der Luftfeuchtigkeit φ , wobei eine Zunahme der Frequenz dabei den maßgeblichen Anteil hat. So beträgt die Dämpfung für eine Luftfeuchtigkeit von $\varphi = 50\%$ und eine Temperatur von $T = 20^\circ\text{C}$ etwa 4.66dB/km für $f = 1\text{kHz}$ und 159dB/km für $f = 10\text{kHz}$ [71]. Bei der Modellierung von Schallausbreitung über kurze Distanzen im Hörbereich werden Dämpfungseffekte jedoch üblicherweise vernachlässigt. Da die Luftfeuchtigkeit zu Dispersion führt, wird deren Wert in der Bauakustik bei experimenteller Ermittlung des Schalldämm-Maßes angegeben. In der numerischen Modellierung kann die Dämpfung jedoch in den meisten Fällen vernachlässigt werden.

Akustische Randbedingungen

Im Allgemeinen unterscheidet man im Zusammenhang mit Randwertproblemen drei mögliche Randbedingungen.

- Bei der Vorgabe des Funktionswertes auf dem Rand des Definitionsbereichs wird die Randbedingung als DIRICHLET-Randbedingung bezeichnet.
- Bei der Vorgabe der Normalenableitung der Lösung auf dem Rand des Definitionsbereichs wird die Randbedingung als NEUMANN-Randbedingung bezeichnet.

bereichs wird die Randbedingung als NEUMANN-Randbedingung bezeichnet.

- Eine Zusammenführung der DIRICHLET-Randbedingung und NEUMANN-Randbedingung führt zu der sogenannten ROBIN-Randbedingung. Hierbei wird auf dem Rand des Definitionsbereichs der gewichteten Linearkombination aus dem Funktionswert der Lösung und deren Normalenableitung ein Wert zugewiesen.

Im Folgenden werden einige besonders wichtige Randbedingungen vorgestellt, die im Rahmen akustischer Problemstellungen vorkommen können.

Die *Impedanzrandbedingung* ist eine ROBIN-Randbedingung und gibt den Schalldruck auf einem Rand im Verhältnis zu seiner Normalenableitung vor. Sie kann verwendet werden, um den Reflexionskoeffizient einer Berandung zu definieren und erfüllt die Gleichung

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{n} \cdot \nabla p = -\frac{i\omega p}{Z_g}. \quad (2.8)$$

Der Reflexionskoeffizient r der Berandung wird berechnet über

$$r = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} \quad (2.9)$$

mit der spezifischen Impedanz Z_g und dem Wellenwiderstand des Fluides Z_0 . Sind die Wellenwiderstände der beiden Medien perfekt aneinander angepasst, beträgt der Reflexionskoeffizient $r = 0$. Auf diese Weise kann bspw. ein halbunendlich ausgedehnter Raum (Halbraum) beschrieben werden. Bei numerischen Berechnungen unter Verwendung der FEM kommt es jedoch dennoch zu nicht unerheblichen Reflexionen, weshalb andere Methoden in der Regel bevorzugt werden [11, 94].

Der Absorptionsgrad α einer Oberfläche beschreibt das Verhältnis zwischen absorbierter Energie und auftreffender Energie und ist mit dem Reflexionskoeffizient durch den Zusammenhang

$$\alpha = 1 - r^2 \quad (2.10)$$

verbunden.

Eine *schallharte Oberfläche* erfüllt die Gleichung

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p = 0. \quad (2.11)$$

Dies ist eine NEUMANN-Randbedingung. Der Reflexionskoeffizient beträgt $r = 1$ für die schallharte Grenzfläche. Eine einfallende Welle wird also vollständig reflektiert.

Eine *schallweiche Oberfläche* erfüllt die Gleichung $p = 0$. Da der Funktionswert auf dem Rand vorgegeben wird, stellt dies eine DIRICHLET-Randbedingung dar. Der Reflexions-

koeffizient der schallweichen Grenzfläche beträgt $r = -1$.

Eine Quelle, die Schallwellen gleichmäßig kugelförmig ausstrahlt, wird als *Monopolquelle* bezeichnet. Idealisiert verhält sich so ein im Raum befindlicher Lautsprecher bei niedrigen Frequenzen. Nähert sich der Radius der Kugelquelle dem Wert Null an, wird die Quelle als Punktstrahler bezeichnet. Im Frequenzbereich erfüllt der Punktstrahler die inhomogene HELMHOLTZ-Gleichung

$$\nabla^2 p + k^2 p = -4\pi e^{i\phi} \sqrt{\frac{2\rho\omega P}{(2\pi)^2}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (2.12)$$

mit der Phase ϕ , der längenbezogenen Leistung der Schallquelle P und der Delta-Funktion $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Der Ortsvektor ist \mathbf{x} und die Monopolquelle befindet sich bei $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.

2.2 Grundgleichungen der Elastodynamik

Der infinitesimale Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ beschreibt die Deformationen eines infinitesimalen Strukturelements und wird definiert durch

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left((\nabla \mathbf{u}_S)^T + \nabla \mathbf{u}_S \right) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

mit dem Verschiebungsvektor $\mathbf{u}_S = [u \ v \ w]^T$, wobei u die Verschiebung in x -Richtung, v die Verschiebung in y -Richtung und w die Verschiebung in z -Richtung ist. Der Verzerrungstensor ist symmetrisch, d. h. $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$, $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$ und $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$. Häufig werden statt der Verzerrungen auf den Nebendiagonalen die Gleitungen γ_{ij} verwendet, für die $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$, $\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{xz}$ und $\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz}$ gilt. Voraussetzung für die folgenden Ausführungen ist die Annahme kleiner Verformungen. Die Verzerrungen werden über das lineare Elastizitätsgesetz mit den Spannungen in einem Strukturelement verknüpft durch

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (2.14)$$

Hierbei wird die EINSTEINSche Summationskonvention verwendet, die besagt, dass über doppelt auftretende Indizes in einer Gleichung summiert wird. Der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ hat die Komponenten

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

mit den Normalspannungen in der Hauptdiagonale und den Schubspannungen in den Nebendiagonalen. Der Tensor D_{ijkl} wird als Elastizitätstensor bezeichnet. Dieser hat für den allgemeinen Fall der vollständigen Anisotropie 21 unabhängige Elastizitätskonstanten. Für den wichtigen Sonderfall eines isotropen Materials reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Konstanten auf zwei. Aufgrund der Symmetrie des Verzerrungs- und Spannungstensors ist auch der Elastizitätstensor symmetrisch. Es gilt:

- $D_{ijkl} = D_{jikl}$,
- $D_{ijkl} = D_{jilk}$,
- $D_{ijkl} = D_{klij}$.

Mittels der NYESchen Notation für symmetrische Tensoren kann dann der vierdimensionale Elastizitätstensor zu einer Matrix \mathbf{D}_S , der Spannungstensor zu einem Vektor $\boldsymbol{\sigma}_S$ und der Verzerrungstensor zu einem Vektor $\boldsymbol{\varepsilon}_S$ zusammengefasst werden. Das Elastizitätsgesetz lautet dann

$$\boldsymbol{\sigma}_S = \mathbf{D}_S \boldsymbol{\varepsilon}_S, \quad (2.16)$$

mit

$$\boldsymbol{\sigma}_S = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_S = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

und der Elastizitätsmatrix für ein isotropes Kontinuum

$$\mathbf{D}_S = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Die Gleichgewichtsgleichungen der linearen Elastizitätstheorie können durch Gleichgewichtsbetrachtungen an einem endlichen Teilkörper hergeleitet werden wie er in Abb. 2.1 dargestellt ist. An diesem Teilkörper wirkt eine Volumenkraft f_i und eine Oberflächenlast mit dem Spannungsvektor t_i . Damit der Körper sich im Gleichgewicht befindet muss gelten:

$$\int_A t_i \, dA + \int_V f_i \, dV = 0.$$

Dabei ist A die Oberfläche und V das Volumen des Körpers. Über die CAUCHYSche Formel ist jedem Normalenvektor n_i bei gegebenem Spannungstensor σ_{ji} ein Spannungsvektor t_i zugeordnet:

$$t_i = \sigma_{ij}n_j. \quad (2.19)$$

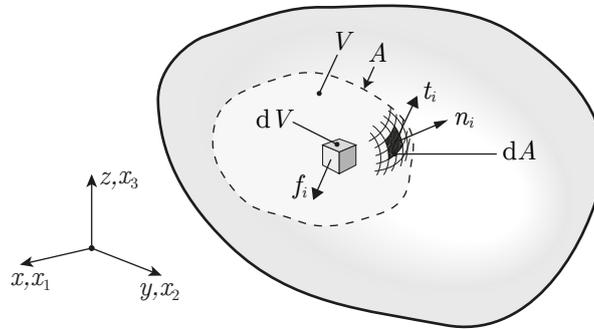


Abbildung 2.1: Teilkörper, an dem eine Volumenkraft f_i und eine Oberflächenlast t_i wirkt.

Nach Anwendung des GAUSSSchen Satzes [143] ergibt sich $\int_V (\sigma_{ji,j} + f_i) dV = 0$. Hierbei kennzeichnet der Index hinter dem Komma die Variable x_j , nach der differenziert wird: $f_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Der Ausdruck $\int_V (\sigma_{ji,j} + f_i) dV = 0$ ist nur für einen Integranden mit dem Wert Null erfüllt und die Gleichgewichtsgleichungen lauten somit

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (2.20)$$

und ausführlich geschrieben

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Einsetzen von Gl. (2.13) und Gl. (2.14) in Gl. (2.20) ergibt ein System von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Typ der LAPLACE-Gleichung. Sie beschreiben die Verformungen eines 3D Körpers aufgrund äußerer Belastungen. Durch Definition eines Matrizen-Differentialoperators

$$\tilde{\nabla}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

können die drei Gleichungen in 2.21 kompakt zusammengefasst werden als

$$\tilde{\nabla}^T \boldsymbol{\sigma}_S + \mathbf{f} = 0, \quad (2.23)$$

wobei der Spannungsvektor $\boldsymbol{\sigma}_S^T = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{yz}]^T$ verwendet wird. In der Elastodynamik wirkt zusätzlich die Trägheitskraft $\rho_S \frac{\partial^2 \mathbf{u}_S}{\partial t^2}$ mit der Massendichte ρ_S . Damit ergeben sich die Bewegungsgleichungen im Zeitbereich für ein Kontinuum als

$$\tilde{\nabla}^T \boldsymbol{\sigma}_S + \mathbf{f} = \rho_S \frac{\partial^2 \mathbf{u}_S}{\partial t^2}. \quad (2.24)$$

Nach Anwendung der FOURIER-Transformation auf Gl. (2.24) ergeben sich die Bewegungsgleichungen für ein Kontinuum im Frequenzbereich als

$$\tilde{\nabla}^T \boldsymbol{\sigma}_S + \mathbf{f} = -\rho_S \omega^2 \mathbf{u}_S. \quad (2.25)$$

Ebener Verzerrungszustand

Wenn in einer Struktur angenommen werden kann, dass die Verschiebung w in z -Richtung aufgrund einer geeigneten Lagerung behindert wird und dass die Verschiebungen u und v in x - und y -Richtungen nur von diesen Koordinaten abhängig sind, liegt ein ebener Verzerrungszustand (EVZ, englisch: *Plane strain*) vor. Ein derartiger Zustand tritt in Strukturen mit ausgedehnter und unveränderlicher Geometrie und unveränderlicher Belastung in z -Richtung auf. Typische Beispiele sind Staudämme und dickwandige Rohre, aus denen zur Untersuchung der Problemstellung dann eine Scheibe herausgeschnitten (Abb. 2.2) und auf eine vollständige 3D Berechnung verzichtet werden kann.

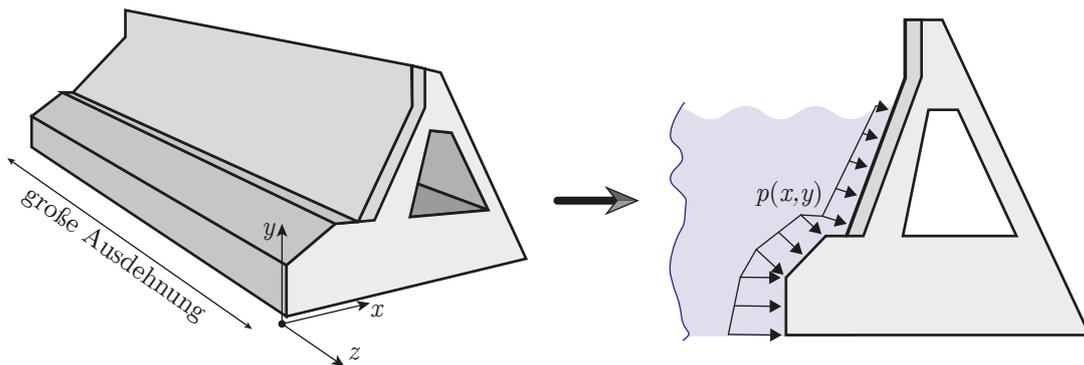


Abbildung 2.2: Approximation einer ausgedehnten Struktur, bspw. eines Staudamms, als 2D Struktur und durch ebenen Verzerrungszustand.

Im Verzerrungstensor Gl. (2.13) werden dann die Komponenten ε_{zz} , ε_{xz} , ε_{zx} , ε_{yz} und ε_{zy} gleich Null und damit auch die entsprechenden Einträge in Gl. (2.17). Es ergibt sich nach

Einsetzen in Gl. (2.16) dann aus der ersten, zweiten und vierten Zeile das Elastizitätsgesetz

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

und aus der dritten, fünften und sechsten Zeile erhält man

$$\sigma_{zz} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad \text{und} \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0.$$

Im ebenen Verzerrungszustand ist der Spannungszustand also dennoch dreidimensional. Der isotrope Elastizitätstensor \mathbf{D}_S ist dann

$$\mathbf{D}_S = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Strukturdämpfung

In realen Strukturen verlaufen Schwingungsvorgänge nicht verlustfrei. Die Mechanismen der Dämpfung enthalten unter anderem Energiedissipation aufgrund innerer Reibung, Reibung an angrenzenden Flächen oder auch Abstrahlung von Energie an das umgebende Medium. Eine einfache und im Bereich der Baudynamik verbreitete Möglichkeit der Implementierung von struktureller Dämpfung ist die Einführung eines komplexen Elastizitätsmoduls [44]

$$E \rightarrow E(1+i\eta). \quad (2.28)$$

Hierbei stellt η den Verlustfaktor dar, der den Anteil an Energie beschreibt, der pro Schwingung in Wärme oder andere Energieformen umgewandelt wird. Die Verlustfaktoren bewegen sich für viele Materialien üblicherweise in der Größenordnung von $\eta \approx 0.01$ [78]. Die Berücksichtigung der Strukturdämpfung über einen komplexen E -Modul ist nicht abhängig von der Erregerfrequenz. Dies stellt eine Vereinfachung gegenüber der Realität dar, in welcher die Dämpfungseigenschaften von Materialien und Oberflächen durchaus in unterschiedlichem Maße von der Frequenz abhängen [134, 5]. Kompliziertere Modelle, bspw. das Modell der viskosen Dämpfung oder das Modell der RAYLEIGH-Dämpfung, sind in der Anwendung jedoch nicht besonders weit verbreitet, was zum einen darin begründet liegt, dass bei den untersuchten Problemstellungen in der Baudynamik näherungsweise oft alle Schwingungsformen frequenzunabhängig gedämpft sind [1] und insbesondere zum anderen die benötigten Parameter für die Beschreibung von komplexen Modellen und Materialien oftmals unbekannt sind.

Randbedingungen in der Elastodynamik

Es werden kurz die wichtigsten Randbedingungen im Rahmen dieser Arbeit vorgestellt. Der Fall eines unverschieblichen Randes wird als *feste Lagerung* bezeichnet. Dies stellt eine DIRICHLET-Randbedingung dar, da die Funktionswerte der Verschiebung mit $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ vorgegeben sind. Ein *freier Rand* ist kräftefrei und erfüllt $\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

2.3 Fluid-Struktur-Interaktionsprobleme

Das Schallfeld in einem Fluidbereich bewirkt einen Druck auf die angrenzende Oberfläche einer Struktur, welche sich infolgedessen deformiert. Das dynamische Verschiebungsfeld der Struktur steht wiederum in Wechselwirkung mit dem Druck im angrenzenden Fluid. In der Abb. 2.3 sind die jeweiligen Bereiche, Oberflächen und deren Normalenvektoren definiert. Die Interaktion von Fluid und Struktur wird über die Kopplungsgleichungen berücksichtigt. In einem akustischen Fluid bewegen sich die Partikel an der Grenzfläche $\Gamma_{S,F}$ in Normalenrichtung (der Normalenvektor $\mathbf{n} = \mathbf{n}_F = -\mathbf{n}_S$ zeigt hierbei in den Strukturbereich) zusammen mit der Strukturoberfläche, d. h.,

$$\mathbf{u}_S \mathbf{n}|_{\Gamma_{S,F}} = \mathbf{u}_F \mathbf{n}|_{\Gamma_{S,F}}. \quad (2.29)$$

Der Schalldruck p bewirkt eine Oberflächenlast auf die Struktur in Normalenrichtung, d. h.,

$$\mathbf{t} = -p \mathbf{n}_S = p \mathbf{n}_F. \quad (2.30)$$

Daraus folgt aus Gl. (2.19) der Spannungstensor auf der Grenzfläche:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} = -p \mathbf{I}. \quad (2.31)$$

Hierbei ist \mathbf{I} die Einheitsmatrix.

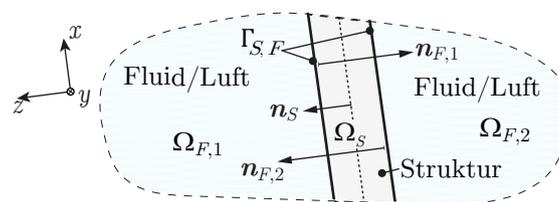


Abbildung 2.3: Definition der Normalenvektoren der Struktur und der Fluidgebiete.

2.4 Grundgleichungen der Wärmeübertragung

Der Wärmetransport in Festkörpern erfolgt lediglich durch Wärmeleitung. In Hohlräumen, die mit einem Fluid wie Luft gefüllt sind, erfolgt der Transport von Wärme durch die Mechanismen Wärmeleitung, natürliche Konvektion und auch durch Strahlung (Abb. 2.4). Auf die detaillierten Herleitungen der einzelnen Gleichungen wird hier verzichtet. Diese können gängigen Lehrbüchern entnommen werden, bspw. [12, 10].

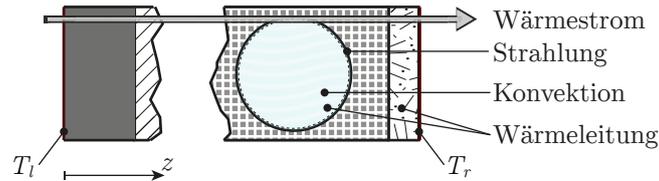


Abbildung 2.4: Wärmedurchgang durch eine Wandstruktur mit Hohlräumen.

Die beschreibende Gleichung für den Wärmetransport durch Wärmeleitung in Festkörpern und Fluiden ist gegeben durch

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla T + \nabla \cdot \mathbf{q} = Q \quad (2.32)$$

im Zeitbereich und mit dem zu Null gesetzten zeitabhängigen Term $\dot{T} = 0$ durch

$$\rho c_p \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla T + \nabla \cdot \mathbf{q} = Q \quad (2.33)$$

für den stationären Fall. Hierbei wird die Massendichte des Körpers oder des Fluids mit ρ bezeichnet, c_p ist die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck, T ist die Temperatur, $\dot{\mathbf{u}}$ ist das Geschwindigkeitsfeld, Q ist die Wärmequelle und k ist der Wärmeleitkoeffizient eines isotropen Materials. Der Vektor \mathbf{q} beschreibt den Wärmefluss, der über das FOURIER'sche Gesetz wie folgt bestimmt wird:

$$\mathbf{q} = -k \nabla T. \quad (2.34)$$

Der Energietransport durch die Strahlung zwischen zwei Oberflächen wird beschrieben durch

$$-\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = \varepsilon (G - \sigma T^4). \quad (2.35)$$

Hierbei ist \mathbf{n} der Normalenvektor, \mathbf{q} ist der Strahlungswärmefluss, ε ist der Emissionsgrad der Oberfläche und G ist der Wärmefluss durch einfallende Strahlung. Die BOLTZMANN-Konstante hat den Wert $\sigma \approx 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{mK}^4}$.

Obwohl der Transport von Wärme in Fluiden auch durch Wärmeleitung erfolgt, bewirkt der erhöhte Massenfluss durch natürliche Konvektion eine erhöhte Rate des Energietrans-

ports. Der Massenfluss, die Partikelbewegungen und die Temperaturänderung des Fluides werden durch die folgenden NAVIER-STOKES-Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \dot{\mathbf{u}}) &= 0, \\ \rho \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t} + \rho (\dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{u}} &= \nabla \cdot [-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}] + \mathbf{f}, \\ \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla) T \right) &= -(\nabla \cdot \mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{S} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \bigg|_p \left(\frac{\partial p}{\partial t} + (\dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla) p \right) + Q. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Hierbei ist p der Druck, $\boldsymbol{\tau}$ ist der viskose Spannungstensor, \mathbf{f} ist die Volumenkraft und \mathbf{S} ist der Formänderungsgeschwindigkeitstensor. Für natürliche Konvektion kann die BOUSSINESQ-Näherung angewandt werden. Diese besagt, dass die Dichteunterschiede vernachlässigbar sind, sofern sie nicht zum statischen Auftrieb beitragen [10]. Desweiteren verringert sich der Berechnungsaufwand massiv, wenn davon ausgegangen werden kann, dass es sich nicht um eine turbulente, sondern um eine laminare Strömung handelt. Um abschätzen zu können, ob die Strömung laminar oder turbulent ist, kann für den speziellen Fall der natürlichen Konvektion die GRASHOF-Zahl Gr wie folgt berechnet werden:

$$Gr = \frac{\beta g \Delta T L^3}{\nu^2}. \quad (2.37)$$

Dabei ist β der Wärmeausdehnungskoeffizient, welcher für Luft den Wert $\beta = 1/T$ annimmt, g ist die Erdbeschleunigung, ν ist die kinematische Viskosität und L ist die charakteristische Länge, bspw. die Höhe des Luftspalts. Für eine ebene Fläche in vertikaler Ausrichtung erfolgt der Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung typischerweise bei einer GRASHOF-Zahl von $Gr > 10^9$. Eine analytische Lösung für zeitabhängige und stationäre Probleme der Wärmeleitung ist nur in seltenen Fällen möglich [19]. In der Regel sind für komplexe Geometrien und gekoppelte Probleme numerische Näherungsverfahren notwendig. Die Wärmedurchgangszahl kann numerisch für eine Wandstruktur bestimmt werden, indem die Temperaturen T_l und T_r in Abb. 2.4 festgelegt werden und der resultierende mittlere Wärmestrom q in Richtung der Wandflächennormalen ermittelt wird. Die Wärmedurchgangszahl U ergibt sich dann aus

$$U = \frac{|q|}{T_r - T_l}. \quad (2.38)$$

Für 1D geschichtete Paneele mit den Schichtdicken d_i und den jeweiligen Wärmeleitkoeffizienten k_i kann die Wärmedurchgangszahl U aus

$$1/U = \sum_i d_i/k_i \quad (2.39)$$

bestimmt werden. Die Wärmeübergangswiderstände zwischen dem umgebenden Fluid und der Wand werden hierbei nicht berücksichtigt. Im Abschnitt 5.3 wird gezeigt, wie sich über ein in der DIN EN ISO 6946 beschriebenes Verfahren eine Näherungslösung für den Energietransport mittels Strahlung und Konvektion in luftgefüllten Hohlräumen ermitteln lässt [40]. Bei Anwendung des Verfahrens muss zur Berechnung der Wärmedurchgangszahl lediglich die Wärmeleitungsgleichung gelöst werden. Für geometrisch komplexere Strukturen ist hierbei eine numerische Berechnung notwendig.

3 Spektral-Elemente-Methode (SEM)

In diesem Kapitel werden zum einen die grundsätzlichen Prinzipien der FEM erläutert und darauf aufbauend die Formulierung und Vorteile der SEM dargestellt. Die Diskretisierung der Bestimmungsgleichungen werden im Rahmen der SEM für Problemstellungen der Akustik, Elastodynamik, Fluid-Struktur-Interaktion und Wärmeleitung detailliert beschrieben.

3.1 Numerische Methoden für Randwertprobleme

Ein bekanntes Verfahren zur numerischen Lösung von partiellen und gewöhnlichen Differentialgleichungen ist die GALERKIN¹-Methode. Das Verfahren basiert im Wesentlichen auf der Minimierung des Residuums einer durch eine Ansatzfunktion angenäherten Lösung einer Differentialgleichung. Die folgende Darstellung des Verfahrens basiert auf [56].

Gegeben ist eine Differentialgleichung, hier beispielhaft eine gewöhnliche Differentialgleichung, der Form

$$-(p(x) y'(x))' + q(x) y(x) - r(x) = 0, \quad (3.1)$$

mit den Randbedingungen $y(a) = 0$ und $y(b) = 0$. Das Residuum dieser Differentialgleichung ist gegeben durch $R(y) := -(p(x) y'(x))' + q(x) y(x) - r(x)$. Eine Näherungsfunktion für die Lösung der Differentialgleichung wird bestimmt, indem ein Ansatz der Form

$$w(x) = \sum_{i=1}^{i_{\max}} a_i v_i \quad (3.2)$$

eingeführt wird, der in das Residuum substituiert wird. Die Parameter a_i sind dann so zu bestimmen, dass das innere Produkt des Residuums mit den Testfunktionen v_i verschwindet. In diesem Fall stehen die Testfunktionen orthogonal zum Residuum, d. h.,

$$\{[-(p(x) \cdot w'(x))' + q(x) \cdot w(x) - r(x)], v_i\} = 0. \quad (3.3)$$

Das innere Produkt wird berechnet, indem das Produkt der beiden Funktionen, der Ansatzfunktion und der Testfunktion, integriert wird. Es ergeben sich i Gleichungen der

¹Entwickelt 1915 von B.G. GALËRKIN (1871–1945), sowjetischer Ingenieur und Mathematiker.

Form

$$\int_a^b [-(p(x) w'(x))' + q(x) w(x) - r(x)] v_i dx = 0. \quad (3.4)$$

Dies ergibt ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösung die Parameter a_i sind. Einsetzen von a_i in die Ansatzfunktion Gl. (3.2) ergibt die Näherungslösung der Differentialgleichung. Für den Fall einer unendlichen Anzahl an Testfunktionen, welche alle orthogonal zum Residuum sind, ergibt sich als einzig verbleibende orthogonale Funktion die Nullfunktion. Das Residuum beträgt also Null und $w(x)$ ist damit die exakte Lösung der Differentialgleichung. Die Ansatzfunktion muss hierbei, im Gegensatz zur Methode der Finiten Elemente, die Randbedingungen erfüllen. Die Testfunktionen, aus denen die Ansatzfunktion aufgebaut wird, müssen linear unabhängig sein und außerdem differenzierbar sein. Die Anforderungen an die Ansatzfunktion können abgeschwächt werden, wenn die betrachtete Differentialgleichung in die schwache Form überführt wird. Die Ordnung der vorkommenden höchsten Ableitung wird im Zuge der Überführung um eins gesenkt. Um die schwache Form der Differentialgleichung zu erhalten, wird die Differentialgleichung (3.1) mit einer Testfunktion multipliziert und integriert:

$$\int_a^b [-(p(x) y'(x))' + q(x) y(x) - r(x)] v(x) dx = 0. \quad (3.5)$$

Unter Berücksichtigung der Regel für die partielle Integration

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b f(x) g'(x) dx \quad (3.6)$$

und der Randbedingungen kann die schwache Form der Differentialgleichung (3.5) umgeschrieben werden in

$$\int_a^b p(x) y'(x) v' + q(x) y(x) v(x) dx = \int_a^b r(x) v(x) dx. \quad (3.7)$$

Im mehrdimensionalen Fall muss hierbei das GREEN-GAUSSsche Theorem

$$\int_{\Omega} \phi \nabla \mathbf{q} dV = \int_{\Gamma} \phi \mathbf{q}^T \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} (\nabla \phi)^T \mathbf{q} dV \quad (3.8)$$

angewandt werden, wobei hier Ω ein Gebiet mit dem Rand Γ ist. Für den hier gezeigten allgemeinen 3D Fall bezeichnet V das Volumen des Gebiets und S die Oberfläche des Randes, \mathbf{n} ist der Normalenvektor auf der Oberfläche, \mathbf{q} ist ein stetig differenzierbares

Vektorfeld und ϕ ein stetig differenzierbares Skalarfeld [87, 143].

Es wird kurz angemerkt, dass eine weitere Möglichkeit, um zu einer identischen Näherungslösung der Gl. (3.1) zu gelangen, darin besteht, die Differentialgleichung in eine Variationsformulierung zu überführen. Diese Methode wird häufig auch als Verfahren von RITZ bezeichnet [62, 124, 139].

Während beim globalen Verfahren von GALERKIN oder RITZ die Ansatzfunktionen die Lösung der Differentialgleichung über das globale Berechnungsgebiet annähern, wird bei der FEM das Lösungsgebiet zuerst in eine endliche Anzahl von Elementen diskretisiert. Die Ansatzfunktionen, meist auch *Formfunktionen* (englisch: *Shape functions*) genannt, nähern die Lösung innerhalb ihres zugehörigen Elementes an. Außerhalb dieses Elementes nehmen sie den Wert Null an. Durch die Diskretisierung und die hohe geometrische Flexibilität der Elemente, so sind neben polygonal berandeten Elementen auch krummlinig berandete Elemente möglich, können auch geometrisch komplex aufgebaute Strukturen berechnet werden. Dies ist ein wesentlicher Vorteil gegenüber anderen numerischen Verfahren wie der Finite-Differenzen-Methode.

Auch wenn zahlreiche andere Verfahren wie die REM (hierbei wird im Gegensatz zur FEM lediglich die Berandung eines Gebietes diskretisiert) oder neuere netzlose Methoden in gewissen Spezialfällen vorteilhaft sein können, hat die klassische FEM in Forschung und Entwicklung einen hohen Reifegrad erreicht, der sich auch durch die große Anzahl von verfügbaren Software-Produkten zeigt. Bekannte Berechnungsprogramme, die für eine Vielzahl von Problemstellungen eingesetzt werden können, sind unter anderem ABAQUS der Firma Dassault Systèmes, ANSYS von Ansys Inc. und COMSOL Multiphysics von COMSOL AB. Letzteres wurde für Teile dieser Arbeit eingesetzt. Eine kommerzielle Berechnungssoftware ist in der Regel für eine Vielzahl von Problemstellungen mit hoher geometrischer und physikalischer Komplexität einsetzbar. Da jedoch gleichzeitig der Anspruch erhoben werden soll, dass die Software nicht nur von Experten im Bereich der Numerik verwendet werden kann, werden in der Regel Kompromisse zwischen höchstmöglicher Berechnungseffizienz und benutzerunabhängiger Automatisierung gesucht.

Für viele Problemstellungen in der Ingenieurwissenschaft können die Berechnungsgeschwindigkeit und die Genauigkeit der Lösung maßgebend sein. Zur Beurteilung der Genauigkeit kann der prozentuale Fehler einer numerisch berechneten Lösung p^{SEM} gegenüber einer Referenzlösung p^{ref} , bspw. einer analytischen Lösung oder einer Lösung mit hoher Genauigkeit, unter anderem in der relativen l_2 -Norm angegeben werden. Der Fehler

ist dabei wie folgt für eine Anzahl von $n = 1, 2, \dots, N$ Datenpunkten definiert:

$$\varepsilon_2 = 100 \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^N (p_n^{SEM} - p_n^{ref})^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^N (p_n^{ref})^2}}. \quad (3.9)$$

Alternativ dazu kann die integrale Fehlernorm L_2 verwendet werden [62]. Da jedoch hier nur der qualitative Verlauf des Fehlers von Interesse ist und der Berechnungsaufwand zur Ermittlung des Fehlers in der L_2 -Norm in der Regel deutlich größer ist, wird darauf verzichtet. Zur Bestimmung des Fehlers wird eine hohe Anzahl von Auswertungspunkten benötigt, wobei mittels Konvergenzuntersuchungen sichergestellt werden kann, dass die nötige Anzahl an Auswertungspunkten minimal gehalten wird, um den Rechenaufwand zu reduzieren.

3.2 Grundlagen der SEM

3.2.1 Überblick über spektrale Näherungsverfahren

Der Begriff der SEM wird in der Literatur für zwei grundsätzlich unterschiedliche Techniken verwendet. Beide Methoden basieren auf der Zerlegung des Gebiets in kleinere Substrukturen, die Berechnungsmethodik unterscheidet sich ansonsten allerdings sehr stark.

Die dieser Arbeit zugrunde liegende SEM basiert auf dem Ansatz von PATERA [92], welche eigentlich eine fortschrittliche FEM darstellt, die Interpolationspolynome hoher Ordnung und spezieller nodaler Basis zur Annäherung der Lösung verwendet. Daraus ergeben sich sehr gute *spektrale* Konvergenzeigenschaften. Der prinzipielle Aufbau des Gleichungssystems lautet wie in der FEM

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{F} \text{ im Zeitbereich} \\ &\text{und} \\ \mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} - \omega^2\mathbf{M}\bar{\mathbf{u}} &= \bar{\mathbf{F}} \text{ im Frequenzbereich.} \end{aligned}$$

Für den Frequenzbereich wird dabei der Ansatz $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}e^{i\omega t}$ und $\mathbf{F}(t) = \bar{\mathbf{F}}e^{i\omega t}$ gemacht (die Überführung einer zeitabhängigen Größe in den Frequenzbereich wird im Anhang A.1 erläutert). Die Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{K} sind jeweils die Massenmatrix und die Steifigkeitsmatrix, deren Herleitung in diesem Kapitel noch detailliert erläutert wird.

Ebenfalls als SEM wird ein Verfahren bezeichnet, bei welchem eine zeitabhängige Pro-

blemstellung in den Frequenzbereich überführt wird, wobei dann für die jeweiligen Teilstrukturen analytische Lösungen der Differentialgleichung im Frequenzbereich verwendet werden. Der grundsätzliche Aufbau des Gleichungssystems ist hierbei gegeben durch

$$\mathbf{K}_{dyn}(\omega) \bar{\mathbf{u}}(\omega) = \bar{\mathbf{F}}(\omega),$$

mit einer frequenzabhängigen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{dyn}(\omega)$. Aus der Lösung im Frequenzbereich kann mittels inverser FOURIER-Transformation die Lösung im Zeitbereich konstruiert werden. Wesentliche Verbreitung erfuhr die Methode insbesondere durch die Arbeiten von DOYLE und Mitarbeitern in den 90er Jahren und führte zu einem Standardwerk der SEM [43]. Da die Methode selbst bei sehr hohen Frequenzen in vielen üblichen Anwendungen, bspw. bei der Untersuchung der Wellenausbreitung in Rahmenstrukturen [145], nur eine sehr geringe Anzahl an Freiheitsgrade benötigt, ist die Berechnungseffizienz sehr hoch. Der Nachteil ist hierbei jedoch, dass nur für wenige Problemstellungen analytische Lösungen im Frequenzbereich bekannt sind und die Methode daher auf relativ einfache Problemstellungen begrenzt ist. In der vorliegenden Arbeit kann die Methode nicht verwendet werden, da für das komplexe gekoppelte Problem der FSI keine analytischen Lösungen existieren. In der Arbeit von PALACZ [88] wurde ein übersichtlicher Vergleich beider Varianten der SEM dargestellt.

Während in der Standard-FEM nur Formfunktionen niedriger Ordnung, zumeist höchstens quadratische Formfunktionen, verwendet werden, besteht das zentrale Merkmal der in dieser Arbeit verwendeten SEM in der Verwendung von LAGRANGE-Formfunktionen höherer Ordnung p zur Erreichung von spektraler Konvergenz der Lösung. Um den negativen Einfluss auf die Kondition des Gleichungssystems, und damit auf die spektrale Konvergenz, zu vermeiden, müssen diese Formfunktionen noch speziellen Anforderungen genügen. Erst wenn die SEM mindestens kubische Formfunktionen, unter Verwendung der GAUSS-LEGENDRE-LOBATTO-Nodalbasis („GLL-Nodalbasis“), verwendet, ergibt sich gegenüber der Standard-FEM ein Vorteil bezüglich der Kondition des Gleichungssystems. Die Berechnung der GLL-Nodalbasis wird im Abschnitt 3.2.2 gezeigt.

In der sogenannten p-FEM wird ebenso der Grad p der Formfunktionen gesteigert, um spektrale Konvergenz zu erreichen. Üblicherweise wird hierbei jedoch keine nodale Basis, sondern eine hierarchische Basis zur Konstruktion der Formfunktionen verwendet [103]. Eine Genauigkeitssteigerung der Lösung wird dann, wie in der SEM, über eine Erhöhung des Grades p der Formfunktionen erreicht, jedoch müssen hierbei die Elementmatrizen nicht vollständig neu berechnet werden, sondern es werden lediglich die Einträge berechnet, die infolge der Erhöhung von p neu hinzugekommen sind. Dem Vorteil der Zeitersparnis bei der Berechnung der Elementmatrizen steht jedoch der Nachteil gegenüber, dass die hinzugefügten Freiheitsgrade die Bandstruktur der Matrix sehr stark negativ beeinflussen

und sich damit die Berechnungszeit des linearen Gleichungssystems wieder erhöht [139].

Im Folgenden soll ein kurzer Literaturüberblick über die SEM und andere FE-Methoden mit spektraler Konvergenz gegeben werden.

In mehreren Arbeiten wurde die SEM in der Seismologie verwendet [118, 117, 65, 63, 64, 66]. Es konnten hierbei durch die Verwendung der SEM genau die Variationen der Wellengeschwindigkeiten und Dichten untersucht werden, wobei auch parallelisierte Berechnungen auf Supercomputern zum Einsatz kommen könnten [115, 116]. In der Arbeit von WIRASAET et al. [138] wurden Untersuchungen zur Genauigkeit der SEM unter Verwendung von rechteckigen Elementen, Dreieckselementen und verzerrten Viereckselementen im Zeitbereich vorgenommen. Es wurde gezeigt, dass die Verwendung von rechteckigen und auch verzerrten Viereckselementen zu einem niedrigeren Fehler als die Verwendung von Dreieckselementen führt und Teile der Berechnung effizienter unter Verwendung von viereckigen Elementen sind. Weiterhin sinkt der Fehler spektral mit der verwendeten Ordnung der Formfunktionen ab. SCHULTE [114] verwendet die SEM zur effizienten Berechnung im Rahmen der Zustandsüberwachung (auch: *Structural Health Monitoring*). Es sollten hierbei Schäden, bspw. Risse oder Delamination, in dünnwandigen Schalen detektiert werden, wobei sich die SEM aufgrund ihrer hohen Sensitivität sehr gut eignet. Dabei verwendete der Autor kommerzielle Software zur Erstellung des Netzes und arbeitete anschließend selbst erstellte spektrale Schalenelemente in dieses ein. Zur Untersuchung der Wellenausbreitung in dünnwandigen Strukturen hat sich die SEM auch bei anderen Autoren bewährt [67, 55, 137, 54].

Ein Problem, das bei numerischer Berechnung der Wellenausbreitung auftritt, ist der sogenannte *Pollution-Fehler* (englisch für *Verschmutzung*). Vereinfacht ausgedrückt bewirkt der Hauptanteil des Pollution-Fehlers eine numerische Dispersion, also eine Änderung der Wellenlänge der numerischen Lösung gegenüber der exakten Lösung. Der Fehler der numerischen Lösung ε ist abhängig von der Wellenzahl k , der Elementgröße h und der Ordnung der Formfunktion p und kann nach

$$\varepsilon \leq C_1 \left(\frac{kh}{2p} \right)^p + C_2 k \left(\frac{kh}{2p} \right)^{2p}$$

a priori abgeschätzt werden [49, 61], wobei C_1 und C_2 dabei Konstanten sind. Der zweite Term gibt den Fehler durch numerische Dispersion an und wächst mit der Wellenzahl k an. BABUŠKA und SAUTER [9] haben nachweisen können, dass es für 2D und 3D Problemstellungen keine Möglichkeit gibt die numerische Dispersion gänzlich zu vermeiden. Für 1D Problemstellungen konnten sie eine Methodik, *stabilized Galerkin method* genannt, entwickeln, die unabhängig von der Frequenz ist und keine numerische Dispersion aufweist. Da der Gesamtfehler der verwendeten numerischen Methode bei hohen Frequenzen

vom Pollution-Fehler dominiert wird, wurde eine Vielzahl von Studien durchgeführt, um die Auswirkungen der numerischen Dispersion auf die Wellenausbreitungsprobleme zu analysieren und zu minimieren. So untersuchten BÉRIOT et al. die Effizienz der p-FEM für Wellenausbreitungsprobleme mit bewegtem Medium [13] und in großskaligen 3D Problemstellungen der Akustik [14]. In der Arbeit von OBERAI und PINSKY [86] wurde die klassische GALERKIN-FEM mit einer von den Autoren entwickelten Methode verglichen, die einen niedrigeren Fehler durch numerische Dispersion hat. Unterschiedliche Methoden wurden entwickelt, um die Effizienz der numerischen Berechnung von Wellenausbreitungsproblemen zu erhöhen und den Pollution-Fehler zu reduzieren. Neuere Entwicklungen verwenden hierbei zwar eine Vernetzung analog der klassischen FEM, jedoch wird die Lösung innerhalb eines Elementes durch eine Anzahl von ebenen Wellen, also prinzipiell Lösungen des Wellenausbreitungsproblems, approximiert. Zu diesen Methoden gehört bspw. die *Partition of Unity FEM* (PUFEM) und die *ultra-weak variational formulation* (UWVF). HUTTUNEN et al. [60] untersuchten die Verwendung der UWVF in der FSI, wobei hier als Modellproblem ein im Wasser befindlicher Zylinder verwendet wurde. Nach Angabe der Autoren verursachte bei der Methode die Formulierung der Kopplungsbedingungen Herausforderungen. DEY et al. [34, 35] untersuchten die Verwendung der p-FEM in der Elasto-Akustik und FSI. Es wurden detaillierte Genauigkeitsvergleiche zwischen der klassischen FEM mit Genauigkeitssteigerung über Erhöhung der Elementanzahl und Erhöhung der Ordnung dargestellt. CHRISTODOULOU et al. [21] verglichen die SEM mit der PUFEM in Hinblick auf ihre Effizienz. Für die PUFEM wurde die notwendige Anzahl von Freiheitsgraden pro Wellenlänge, selbst für hohe Frequenzen, mit lediglich zwei angegeben. LIEU et al. [72] verglichen für ein HELMHOLTZ-Problem die p-FEM unter Verwendung von LOBATTO-Polynomen mit der *discontinuous Galerkin method* (DGM), einer Methode, die ebenfalls auf der Verwendung von lokalen Lösungen als Formfunktionen des Wellenausbreitungsproblems basiert. Es wurde dabei insbesondere auf die Notwendigkeit der Knotenkondensation bei der Verwendung der p-FEM hingewiesen, um die Anzahl von Freiheitsgraden und damit die Berechnungszeit des linearen Gleichungssystems gering zu halten und die Kondition des Gleichungssystems zu verbessern. Allerdings werden dabei dann im Anschluss weitere Berechnungen notwendig. Für die wellenbasierten Methoden wurde die Abhängigkeit des Fehlers vom Einfallswinkel angegeben. Sowohl die PUFEM, die UWVF als auch die DGM leiden an inhärenter schlechter Kondition des linearen Gleichungssystems. LIEU et al. gaben an, dass die maximal erzielbare Genauigkeit bei Verwendung der DGM aufgrund der schlechten Kondition begrenzt ist. Obwohl intuitiv erwartet werden könnte, dass wellenbasierte Formfunktionen bei den Wellenausbreitungsproblemen deutliche Vorteile gegenüber Formfunktionen, die auf Polynomen basieren, bieten, gaben die Autoren an, dass die letzteren gleichwertige und teilweise sogar bessere Ergebnisse bezüglich Effizienz und Genauigkeit liefern. WILLBERG et al. [137] verglichen die SEM

mit der p-FEM und der N-FEM für die Simulation von LAMB-Wellen im Zeitbereich. Die N-FEM basiert auf der Verwendung von NURBs (*Non-Uniform Rational B-Splines*), spezieller Kurven bzw. Flächen, welche eine realitätsnahe Wiedergabe der Geometrie von Strukturen ermöglichen und auch gute numerische Eigenschaften für die Verwendung als Formfunktionen besitzen. In der untersuchten Problemstellung benötigten diese auch die geringste Anzahl von Freiheitsgraden. Die Autoren hoben für die Anwendung der p-FEM und N-FEM die zwingend erforderliche aufwändige Rückrechnung in eine physikalische Lösung hervor, die bei der SEM aufgrund der physikalischen Bedeutung der Stützknotten nicht notwendig ist. Falls man also lediglich an den Werten an den Stützknotten interessiert ist, kann eine Rückrechnung auch entfallen. Zur numerischen Untersuchung der Wellenausbreitung wurden, insbesondere in jüngerer Zeit, häufig auch die BERNSTEIN-Polynome als Formfunktionen verwendet, die ebenfalls sehr gute numerische Eigenschaften aufweisen. PETERSEN et al. [99] verglichen diese in ihrer Arbeit mit anderen unterschiedlichen Formfunktionen, die in der SEM und p-FEM Verwendung finden.

Es wird an dieser Stelle ein Auszug der umfangreichen Literatur zur Verwendung spektraler Methoden zur numerischen Näherung von Wellenausbreitungsproblemen dargestellt. Es kann zusammenfassend hervorgehoben werden, dass es keine allgemeingültige beste Methode gibt. Vielmehr ist die Auswahl der Methodik und der Formfunktionen abhängig von der jeweiligen Problemstellung, der gewünschten Genauigkeit und Flexibilität. Ein kleiner Auszug der umfangreichen Auswahl an Formfunktionen kann der Tab. 3.1 entnommen werden.

Tabelle 3.1: Verschiedene Formfunktionen, die in der FEM und verwandte Methoden verwendet werden können (Auszug aus [130]).

JACOBI-Polynome: $\varphi_j(r) = \frac{(-1)^j}{2^j j! (1-r)^\gamma (1+r)^\delta} \frac{d^j}{dr^j} ((1-r)^{j+\gamma} (1+r)^{j+\delta})$ $r \in [-1, 1], \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad \gamma, \delta > -1$	CHEBYSHEV-Polynome (1. Art): $\varphi_j(r) = \cos(j \arccos(r))$ $r \in [-1, 1], \quad j = 1, 2, \dots, N$
BERNSTEIN-Polynome: $\varphi_j(r) = \frac{(N-1)!}{(j-1)!(N-j)!} r^{j-1} (1-r)^{N-j}$ $r \in [0, 1], \quad j = 1, 2, \dots, N$	CHEBYSHEV-Polynome (2. Art): $\varphi_j(r) = \frac{\sin((j+1) \arccos(r))}{\sin(\arccos(r))}$ $r \in [-1, 1], \quad j = 1, 2, \dots, N$
LAGUERRE-Polynome: $\varphi_j(r) = \frac{1}{j! e^{-r}} \frac{d^j}{dr^j} (r^j e^{-r})$ $r \in [0, +\infty[, \quad j = 1, 2, \dots, N$	HERMITE-Polynome: $\varphi_j(r) = (-1)^j e^{r^2} \frac{d^j}{dr^j}$ $r \in]-\infty, +\infty[, \quad j = 1, 2, \dots, N$

3.2.2 Interpolationsfunktionen

Als Formfunktionen zur Konstruktion der Näherungslösung werden in der SEM die LAGRANGE-Polynome verwendet, die sich über folgende Gleichung berechnen lassen:

$$LA_{p,\beta}(\xi) = \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \beta}}^{p+1} \frac{\xi - \xi_\alpha}{\xi_\beta - \xi_\alpha}. \quad (3.10)$$

Die $(p+1)$ LAGRANGE-Polynome vom Grad p werden über die Stützstellen (auch: Knoten oder englisch: *nodes*) α und β konstruiert, wobei ξ_α und ξ_β die Positionen der Stützstellen in der Koordinate ξ sind. $LA_{p,\beta}(\xi)$ nimmt dabei den Wert Eins an der Stützstelle β an und den Wert Null bei allen Stützstellen α , d. h.,

$$LA_{p,\beta}(\xi_\alpha) = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha = \beta \\ 0 & \text{falls } \alpha \neq \beta \end{cases}. \quad (3.11)$$

In der SEM führt diese Eigenschaft dazu, dass Lösungswerte des linearen Gleichungssystems gleichzeitig physikalische Lösungen, bspw. Verschiebungen oder Druck, an den entsprechenden Stützstellen sind. Dies wird auch *nodale Basis* genannt. Im Gegensatz dazu ist bei einer *modalen Basis* eine numerisch aufwendige Rückrechnung zwingend erforderlich, da die Lösungswerte der Freiheitsgrade im Allgemeinen keine physikalischen Lösungen der Problemstellung sind.

In dieser Arbeit werden die 1D, 2D und 3D Formfunktionen mit φ_k bezeichnet, wobei k die zugehörige Stützstelle ist, an welcher die Formfunktion den Wert Eins annimmt. Die Ordnung der Formfunktionen wird, falls notwendig, im Text angegeben.

Die Abb. 3.1 zeigt die fünf Formfunktionen der Ordnung $p = 4$ für äquidistant verteilte Stützstellen im Intervall $[0; 1] := \{0 \leq \xi \leq 1\}$. Hierbei ist anzumerken, dass in gängiger Literatur die Formfunktionen zumeist im Intervall $[-1; 1]$ definiert sind, während in dieser Arbeit, ohne speziellen Grund, das Intervall $[0; 1]$ verwendet wird. Eine Transformation vom Intervall $[0; 1]$ in das Intervall $[-1; 1]$ ist im 1D Fall über die Abbildungsvorschrift

$$\xi_{[-1,1]} \rightarrow 2\xi_{[0,1]} - 1 \quad (3.12)$$

möglich. Werden die LAGRANGE-Polynome mittels äquidistant verteilter Stützstellen („ED-Stützstellen“ für *evenly distributed*) konstruiert, kommt es bei steigender Polynomordnung zu Oszillationen, dem sogenannten RUNGE-Effekt, an den Rändern des Definitionsintervalls. Bei hoher Ordnung der Interpolationspolynome nehmen die Funktionswerte dort sehr große Werte an, was unter Umständen einen negativen Einfluss auf die Genauig-

keit der Interpolation hat. Dieses Verhalten wird in Abb. 3.2 ersichtlich, in welcher die LAGRANGE-Polynome der Ordnung $p = 11$ mit äquidistant verteilten Knoten abgebildet sind.

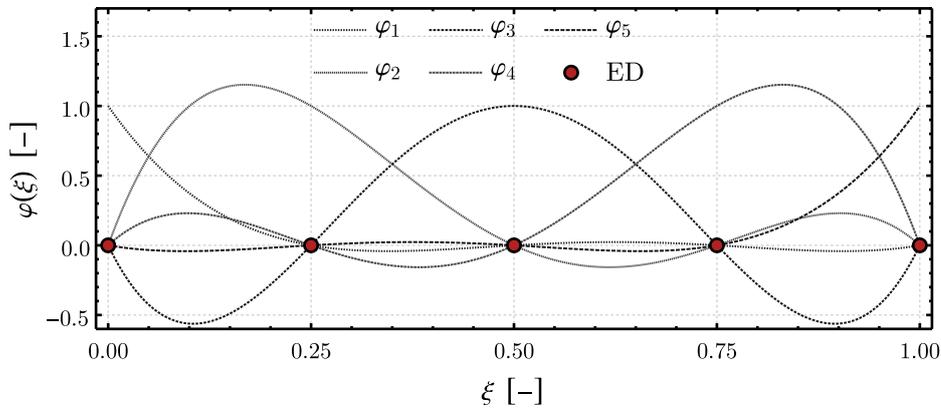


Abbildung 3.1: LAGRANGE-Formfunktionen der Ordnung $p = 4$, konstruiert mit äquidistanter Verteilung der Stützstellen (ED).

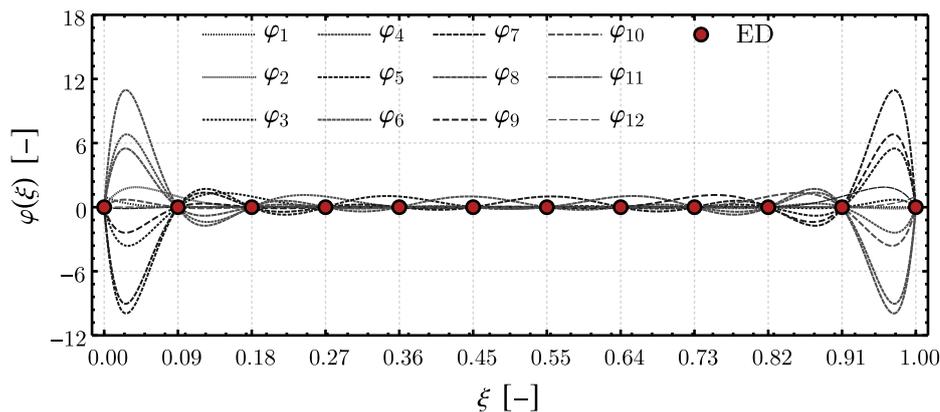


Abbildung 3.2: LAGRANGE-Formfunktionen der Ordnung $p = 11$, konstruiert mit äquidistanter Verteilung der Stützstellen (ED).

Gauss-Legendre-Lobatto-Nodalbasis

Eine beliebige Funktion $f(\xi)$ kann durch das LAGRANGE-Polynom des Grades p interpoliert werden als

$$P(\xi) = \sum_{i=1}^{p+1} f(\xi_i) LA_{p,i}(\xi). \quad (3.13)$$

Hierbei sind ξ_i die zur Konstruktion der LAGRANGE-Polynome verwendeten Stützstellen. Werden jedoch äquidistant verteilte Stützstellen verwendet, verbessert sich dabei nicht zwangsläufig die Interpolationsgüte mit steigender Ordnung p . Bei speziellen Funktionen,

wie bspw. der RUNGE-Funktion

$$f(\xi) = \frac{1}{1 + 25(2\xi - 1)^2}, \quad \xi \in [0; 1], \quad (3.14)$$

kommt es an den Rändern zu Oszillationen des Interpolationspolynoms. Durch spezielle nicht-äquidistante Verteilung der Stützstellen kann der RUNGE-Effekt verhindert und dadurch die Interpolation der Funktion verbessert werden (siehe Abb. 3.3). Die inneren $p - 1$ Stützstellen müssen dazu auf den Nullstellen der LOBATTO-Funktion LO_{p-1} liegen, die beiden äußeren Knoten liegen auf den Endpunkten des Definitionsintervalls.

Die LOBATTO-Funktion $LO_n(\xi)$ wird wie folgt aus dem LEGENDRE-Polynom $L_n(\xi)$ berechnet:

$$LO_n(\xi) = \frac{dL_{n+1}(\xi)}{d\xi}, \quad L_n(\xi) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n - 2k)!}{(n - 2k)! (n - k)! k! 2^n} \xi^{n-2k}, \quad (3.15)$$

$$\text{mit der GAUSSKlammer } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ gerade} \\ \frac{n-1}{2}, & n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

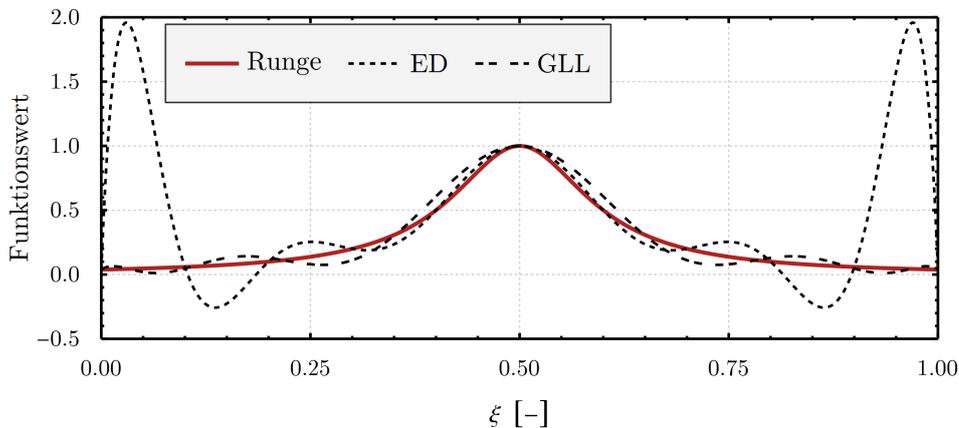


Abbildung 3.3: Interpolation der RUNGE-Funktion (Gl. (3.14)) durch LAGRANGE-Polynome (Gl. (3.13)) mit äquidistant verteilten Stützstellen (ED) und GAUSS-LEGENDRE-LOBATTO Stützstellen (GLL). Die Ordnung der Interpolation ist $p = 10$.

Die so verteilten Stützstellen werden GAUSS-LEGENDRE-LOBATTO Stützstellen genannt („GLL-Stützstellen“). Die über diese Stützstellen konstruierten LAGRANGE-Formfunktionen bilden eine nodale Basis, die GAUSS-LEGENDRE-LOBATTO Nodalbasis genannt wird („GLL-Formfunktionen“). Eine Alternative ist die Verwendung der CHEBYSHEV-GAUSS-LOBATTO Stützstellen („CGL-Stützstellen“). Diese wurden in der Arbeit von PATERA [92] verwendet, der damit die SEM begründet hat. Da im Rahmen dieser Arbeit jedoch die GLL-Nodalbasis verwendet wird, soll dies lediglich aufgrund der Vollständigkeit

kurz gezeigt werden. Die Berechnungsvorschrift zur Berechnung der CHEBYSHEV-GAUSS-LOBATTO Stützstellen lautet:

$$\xi_{i,CGL} = -\cos\left(\frac{\pi(i-1)}{p}\right) \text{ mit } i = 1, 2, \dots, p+1. \quad (3.16)$$

Die Stützstellen der LAGRANGE-Interpolationspolynome nach der GLL-Verteilung und CGL-Verteilung im Intervall $[-1; 1]$ sind in der Tab. 3.2 dargestellt.

Tabelle 3.2: GLL- und CGL-Stützstellen zur Konstruktion der LAGRANGE-Polynome.

GAUSS-LEGENDRE-LOBATTO Stützstellen $\xi_{i,GLL}$						
Ordnung	Stützstellen					
$p = 1$	$\xi_1 = -1$	$\xi_2 = -\xi_1$				
$p = 2$	$\xi_1 = -1$	$\xi_2 = 0$	$\xi_3 = -\xi_1$			
$p = 3$	$\xi_1 = -1$	$\xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\xi_3 = -\xi_2$	$\xi_4 = -\xi_1$		
$p = 4$	$\xi_1 = -1$	$\xi_2 = -\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\xi_3 = 0$	$\xi_4 = -\xi_2$	$\xi_5 = -\xi_1$	
$p = 5$	$\xi_1 = -1$	$\xi_2 \approx -0.7651$	$\xi_3 \approx -0.2852$	$\xi_4 = -\xi_3$	$\xi_5 = -\xi_2$	$\xi_6 = -\xi_1$
CHEBYSHEV-GAUSS-LOBATTO Stützstellen $\xi_{i,CGL}$						
Ordnung	Stützstellen					
$p = 1$	$\xi_1 = -1$	$\xi_2 = -\xi_1$				
$p = 2$	$\xi_1 = -1$	$\xi_2 = 0$	$\xi_3 = -\xi_1$			
$p = 3$	$\xi_1 = -1$	$\xi_2 = -\frac{1}{2}$	$\xi_3 = -\xi_2$	$\xi_4 = -\xi_1$		
$p = 4$	$\xi_1 = -1$	$\xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\xi_3 = 0$	$\xi_4 = -\xi_2$	$\xi_5 = -\xi_1$	
$p = 5$	$\xi_1 = -1$	$\xi_2 \approx -0.8090$	$\xi_3 \approx -0.3090$	$\xi_4 = -\xi_3$	$\xi_5 = -\xi_2$	$\xi_6 = -\xi_1$

In der Abb. 3.4 sind alle 1D Formfunktionen der Ordnung $p = 4$ mit GLL-Verteilung der Stützstellen und die Stützstellen selbst dargestellt. Ebenso ist die vom Intervall $[-1; 1]$ auf das Intervall $[0; 1]$ transformierte LOBATTO-Funktion $LO_3(\xi)$ eingezeichnet. Bei der Verwendung der GLL-Nodalbasis ergibt sich für alle Formfunktionen bei allen Polynomgraden ein maximaler Funktionswert von Eins (Abb. 3.5, vgl. auch Abb. 3.2). Aufgrund dieser Eigenschaft werden die Oszillationen an den Rändern unterdrückt, was die maximalen Werte der globalen Interpolationsfunktion begrenzt, den numerischen Fehler verringert und dadurch sehr hohe Ordnungsgrade der Formfunktionen ermöglicht. Die Stützstellen weichen bei Verwendung der CGL-Verteilung geringfügig von der GLL-Verteilung ab. Dies hat zur Folge, dass die maximalen Funktionswerte bei CGL-Formfunktionen etwas größer als Eins werden können. Für die Ordnung $p = 15$ ergibt sich bspw. $\max(\varphi_2) = \max(\varphi_{15}) \approx 1.0308$.

Es wird an dieser Stelle noch explizit darauf hingewiesen, dass die höhere Interpolations-

tionsgüte der LAGRANGE-Polynome mit GLL-Verteilung der Stützstellen keinen Einfluss auf die näherungsweise Lösung der HELMHOLTZ- oder LAPLACE-Gleichung hat. Da sich unter Verwendung der generalisierten VANDERMONDE-Matrix $\mathbf{V}_{I,II}$ Formfunktionen mit unterschiedlicher Knotenverteilung I und II durch die lineare Transformation $\mathbf{N}^I = \mathbf{V}_{I,II} \cdot \mathbf{N}^{II}$ ineinander überführen lassen (die Formfunktionen werden dazu in einem Vektor $\mathbf{N}^T = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{p+1}]$ zusammengefasst), hat die verwendete Knotenbasis keinen direkten Einfluss auf die Ergebnisse [103]. Jedoch haben die bessere Kondition der Systemmatrix bei Verwendung von Elementen mit GLL-Nodalbasis, sowie die höhere Ordnung der Formfunktionen einen unter Umständen erheblichen Einfluss auf die Genauigkeit und Effizienz der Lösung. Auf die sich ergebenden Berechnungsvorteile wird in Kapitel 4 ausführlich eingegangen. Zur Verkürzung der Schreibweise wird in den nachfolgenden Kapiteln ein finites Element, welches auf LAGRANGE-Formfunktionen mit GLL-Verteilung basiert, mit „GLL-Element“ abgekürzt. Für eine äquidistante Verteilung der Stützstellen wird das finite Element als „ED-Element“ bezeichnet.

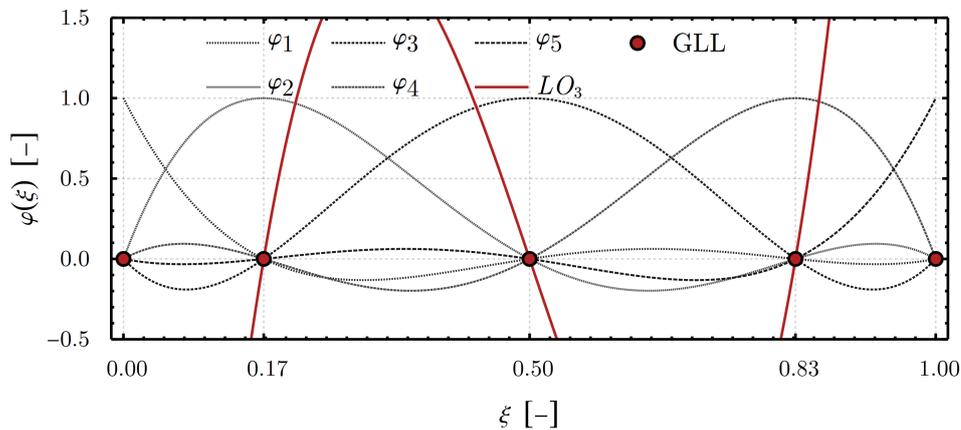


Abbildung 3.4: Die fünf LAGRANGE-Formfunktionen der Ordnung $p = 4$, konstruiert mit GLL-Stützstellen (GLL).

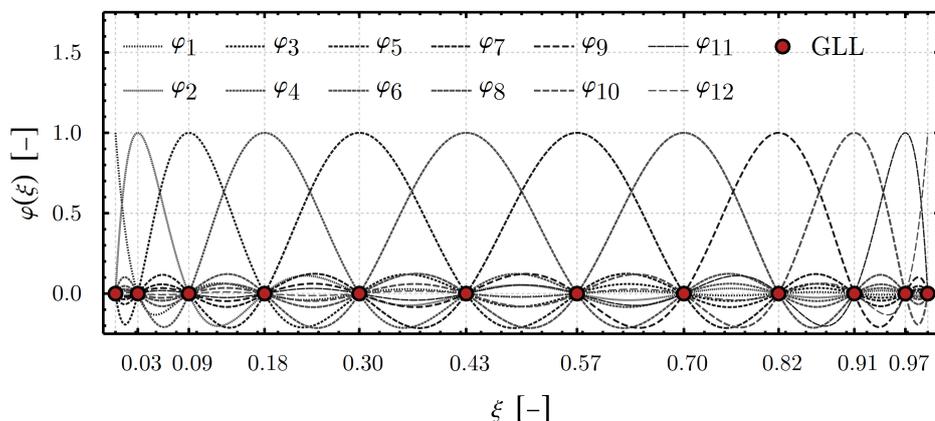


Abbildung 3.5: LAGRANGE-Formfunktionen der Ordnung $p = 11$, konstruiert mit GLL-Verteilung der Stützstellen (GLL).

Interpolationspolynome in höheren Dimensionen

Für Vierecks- und Hexaederelemente können die Interpolationspolynome besonders leicht über ein Produkt der 1D Interpolationspolynome berechnet werden. Es spielt hierbei keine Rolle, ob die Verteilung der Stützknöten äquidistant oder über eine andere Verteilung vorgenommen wurde. Für den 2D Fall ergibt sich $\varphi_k(\xi_1, \xi_2) = \varphi_i(\xi_1) \varphi_j(\xi_2)$, wobei hier ξ_1 und ξ_2 die jeweiligen Koordinatenrichtungen sind. In der Abb. 3.6 ist ein Beispiel zur Ermittlung dargestellt, für das sich die folgende Formfunktion ergibt:

$$\varphi_{i=2}^{1D}(\xi_1) = \frac{7}{6} \left(7 + \sqrt{21} - 14\xi_1 \right) (\xi_1 - 1) \xi_1 (2\xi_1 - 1),$$

$$\varphi_{j=3}^{1D}(\xi_2) = \frac{16}{3} (\xi_2 - 1) \xi_2 (1 + 7\xi_2 (\xi_2 - 1)),$$

$$\begin{aligned} \varphi_{k=12}^{2D}(\xi_1, \xi_2) &= \varphi_{i=2}^{1D}(\xi_1) \varphi_{j=3}^{1D}(\xi_2) \\ &= \frac{56}{9} \left(7 + \sqrt{21} - 14\xi_1 \right) (\xi_1 - 1) \xi_1 (2\xi_1 - 1) (\xi_2 - 1) \xi_2 (1 + 7\xi_2 (\xi_2 - 1)). \end{aligned}$$

Die Anzahl k der Formfunktionen ist durch die Ordnung der verwendeten Formfunktionen gegeben: $k = (p + 1)^2$ im 2D Fall. Die Vorgehensweise ist für 3D Elemente analog.

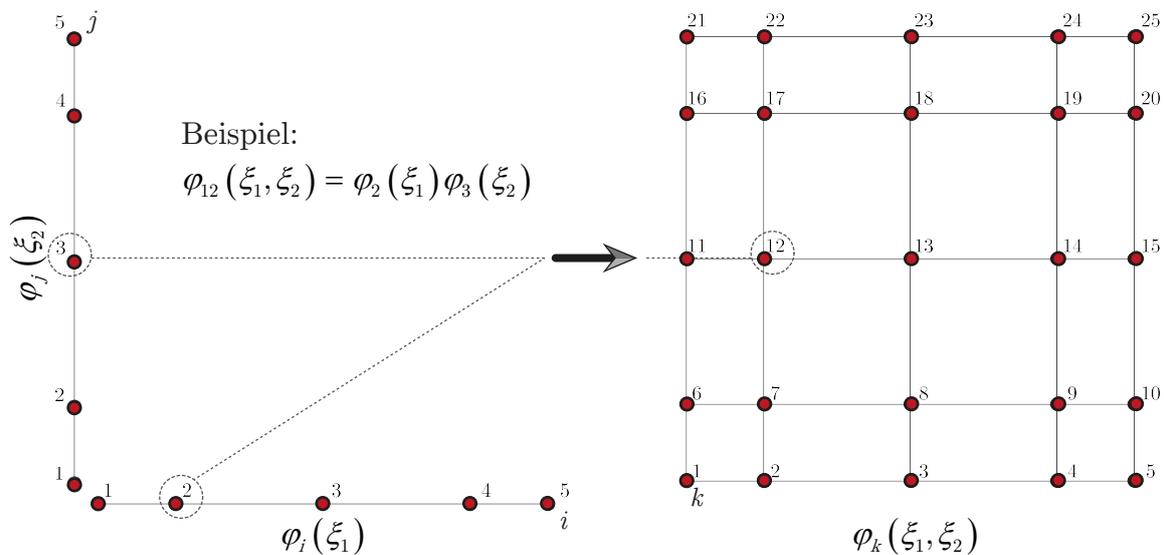


Abbildung 3.6: Konstruktion von 2D Formfunktionen durch Produktbildung.

Es hat sich bei der vorliegenden Arbeit als besonders zweckmäßig für die Programmierung erwiesen, die Nummerierung k der Knoten auf die in der Abb. 3.6 gezeigte Weise durchzuführen. Die zugrundeliegende Methodik der sukzessiven Nummerierung der Knoten in Richtung der natürlichen Koordinaten des finiten Elements erleichtert die Vernetzung der Geometrie für hohe Grade von p . Grundsätzlich kann hier jedoch beliebig vorgegangen werden.

In den Abb. 3.7 und 3.8 sind ausgewählte LAGRANGE-Formfunktionen vierter Ordnung und zehnter Ordnung für äquidistante (ED) und GLL-Verteilung der Stützstellen gezeigt. Die an den Rändern auftretenden Oszillationen bei ED-Formfunktionen sind deutlich sichtbar, während die Funktionswerte für die GLL-Formfunktionen auf Eins begrenzt sind.

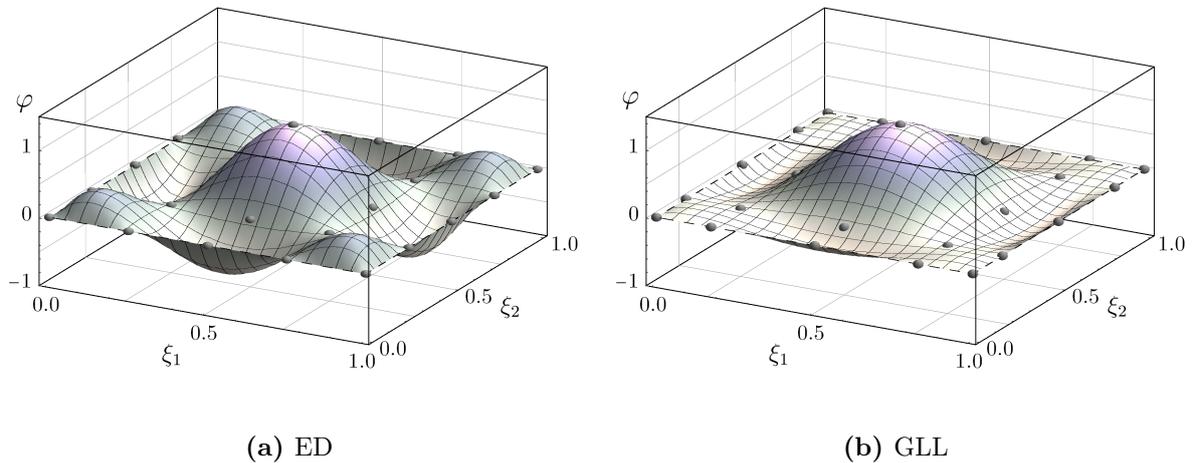


Abbildung 3.7: Vergleich der LAGRANGE-Formfunktion φ_{13} mit ED- und GLL-Verteilung der Stützstellen (kleine Kugeln) für $p = 4$.

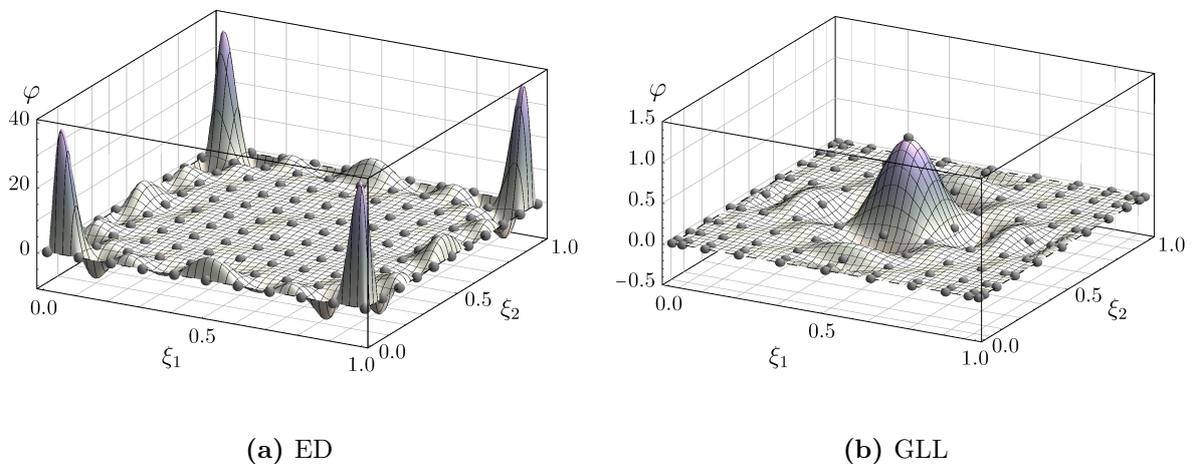


Abbildung 3.8: Vergleich der LAGRANGE-Formfunktion φ_{61} mit ED- und GLL-Verteilung der Stützstellen (kleine Kugeln) für $p = 10$.

Der Grad p der Formfunktionen muss nicht zwangsläufig in jeder Koordinatenrichtung übereinstimmen. So ist es möglich Formfunktionen zu definieren, die eine unterschiedliche Anzahl von Stützknotten in ξ_1 - und ξ_2 -Richtungen haben (siehe Abb. 3.9). Diese Methode wurde in der Arbeit von HENNINGS et al. [55] zur effizienten Berechnung der Wellenausbreitung bei hohen Frequenzen für dünnwandige Strukturen verwendet. In der vorliegenden Arbeit werden derartige Elemente zur effizienten Berechnung von dünnwandigen

Platten verwendet, um die Anzahl von Freiheitsgraden ohne Genauigkeitsverlust so niedrig wie möglich zu halten. Der höhere Ansatzgrad wird dabei in dieser Arbeit mit p_g bezeichnet, der niedrigere Ansatzgrad mit p_k .

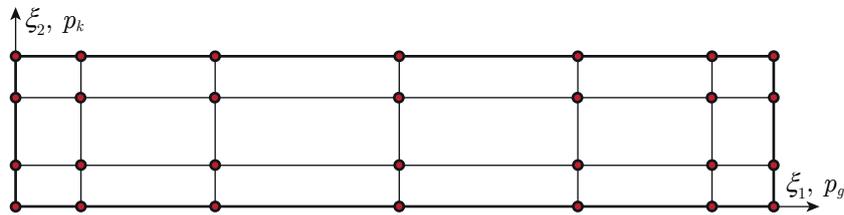


Abbildung 3.9: Element mit $p_g = 6$ und $p_k = 3$.

3.2.3 Numerische Integration

Die bei der Berechnung der Elementmatrizen auftretenden Integrale lassen sich nur in Ausnahmefällen analytisch exakt auswerten. Im Allgemeinen müssen diese numerisch berechnet werden. Dazu stehen prinzipiell mehrere Methoden zur Verfügung. Werden hierbei bekannte Funktionswerte des Integranden zur Berechnung herangezogen, wird die numerische Integration als *Quadratur* bezeichnet. Insbesondere in der numerischen Mathematik sind die Quadraturen nach GAUSS-LEGENDRE und LOBATTO üblich [62, 103, 143].

Numerische Quadratur nach Gauss-Legendre

Die grundlegende Idee der numerischen Quadratur nach GAUSS-LEGENDRE („GL-Quadratur“) ist es, den Integranden durch die LAGRANGE-Polynome $LA_{p,i}(\xi)$ auszudrücken und die sich ergebende Näherungsfunktion analytisch exakt zu integrieren. Die näherungsweise Berechnung lautet

$$\int_0^1 f(\xi) \, d\xi \simeq \int_0^1 \sum_{i=1}^n f(\xi_i) LA_{p,i}(\xi) \, d\xi = \sum_{i=1}^{n=p+1} w_i f(\xi_i), \quad (3.17)$$

wobei die n Stützstellen ξ_i die Nullstellen des LEGENDRE-Polynoms $L_n(x)$, die sogenannten *Gauss-Punkte*, sind. Die Integrationsgewichte w_i lassen sich durch die Integration der durch die Stützstellen ξ_i (siehe Tab. 3.3) definierten LAGRANGE-Interpolationspolynome im entsprechenden Intervall, hier $\xi \in [0; 1]$, wie folgt berechnen:

$$w_i = \int_0^1 LA_{p,i}(\xi) \, d\xi.$$

Die numerische Integration mittels GAUSS-LEGENDRE-Quadratur ist exakt für Polynome bis zum Grad $(2p + 1)$. Das bedeutet insbesondere, dass die Einträge der Elementstei-

figkeitsmatrix und Elementmassenmatrix im Rahmen der SEM exakt berechnet werden können. Obwohl das Integrationsintervall hier aus Gründen der Einheitlichkeit innerhalb der vorliegenden Arbeit durch das Intervall $[0; 1]$ in Gl. (3.17) definiert wird, lässt sich die näherungsweise Integration jeder beliebigen Funktion auch innerhalb eines beliebigen Intervalls nach einer entsprechenden Variablentransformation durchführen.

Tabelle 3.3: Integrationsstützstellen und Integrationsgewichte für GAUSS-LEGENDRE-Quadratur im Intervall $\xi \in [0; 1]$.

Ordnung	Stützstellen		Gewichte	
$p = 1$	$\xi_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\xi_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$w_1 = \frac{1}{2}$	$w_2 = w_1$
$p = 2$	$\xi_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\xi_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}$	$w_1 = \frac{5}{18}$	$w_3 = w_1$
	$\xi_2 = \frac{1}{2}$		$w_2 = \frac{4}{9}$	
$p = 3$	$\xi_1 \approx 0.0694$	$\xi_3 = 1 - \xi_2$	$w_1 \approx 0.1739$	$w_3 = w_2$
	$\xi_2 \approx 0.3300$	$\xi_4 = 1 - \xi_1$	$w_2 \approx 0.3261$	$w_4 = w_1$

Numerische Quadratur nach Lobatto

Bei der numerischen Quadratur nach LOBATTO („LOB-Quadratur“) werden zur Erstellung der LAGRANGE-Interpolationspolynome die GLL-Stützstellen verwendet (siehe Tab. 3.4). Die Integrationsgewichte werden analog zur GAUSS-LEGENDRE-Quadratur durch Integration der Interpolationspolynome über das Integrationsintervall berechnet. Die numerische Integration mittels LOBATTO-Quadratur ist lediglich exakt für Polynome bis zum Grad $(2p - 1)$, das heißt, dass die in der Massenmatrix vorkommenden Funktionen nicht exakt integriert werden können. Bei Verwendung der GLL-Formfunktionen ergibt sich mit LOBATTO-Quadratur eine diagonal konzentrierte Massenmatrix, was insbesondere für transiente Problemstellungen eine enorme Steigerung der Berechnungseffizienz bedeuten kann. So lässt sich bei diagonalen Massenmatrix ein explizites Verfahren für die zeitliche Diskretisierung implementieren, was die aufwendige Lösung eines linearen Gleichungssystems in jedem Zeitschritt vermeidet. Im Frequenzbereich reduziert sich bei Verwendung der LOBATTO-Quadratur die Anzahl von Matrix-Operationen zur Assemblierung der Koeffizientenmatrix des FE-Gleichungssystems, was bei einer großen Anzahl von zu berechnenden Frequenzen zu deutlicher Effizienzsteigerung führen kann. Zur Veranschaulichung wird die Elementmassenmatrix

$$\mathbf{m} = \int_0^1 \varphi_i(\xi) \varphi_j(\xi) \, d\xi$$

numerisch mittels LOBATTO- und GAUSS-LEGENDRE-Quadratur berechnet. Verwendet

werden GLL-Formfunktionen der Ordnung $p = 3$, welche lauten

- $\varphi_1 = 1 - 6x + 10x^2 - 5x^3$,
- $\varphi_2 \approx 8.09x - 19.27x^2 + 11.18x^3$,
- $\varphi_3 \approx -3.09x + 14.27x^2 - 11.18x^3$,
- $\varphi_4 = 1x - 5x^2 + 5x^3$.

Es ergibt sich mittels GAUSS-LEGENDRE-Quadratur näherungsweise die Lösung als

$$\mathbf{m}_{GL} \approx \begin{bmatrix} 0.071 & 0.027 & -0.027 & 0.012 \\ 0.027 & 0.357 & 0.060 & -0.027 \\ -0.027 & 0.060 & 0.357 & 0.027 \\ 0.012 & -0.027 & 0.027 & 0.071 \end{bmatrix}$$

und mittels LOBATTO-Quadratur ergibt sich die diagonale Matrix als

$$\mathbf{m}_{LOB} \approx \begin{bmatrix} 0.083 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.417 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.417 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.083 \end{bmatrix}.$$

Tabelle 3.4: Integrationsstützstellen und Integrationsgewichte für LOBATTO-Quadratur im Intervall $\xi \in [0; 1]$.

Ordnung	Stützstellen		Gewichte	
$p = 1$	$\xi_1 = 0$	$\xi_2 = 1$	$w_1 = \frac{1}{2}$	$w_2 = w_1$
$p = 2$	$\xi_1 = 0$	$\xi_3 = 1$	$w_1 = \frac{1}{6}$	$w_3 = w_1$
	$\xi_2 = \frac{1}{2}$		$w_2 = \frac{2}{3}$	
$p = 3$	$\xi_1 = 0$	$\xi_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}$	$w_1 = \frac{1}{12}$	$w_3 = w_2$
	$\xi_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}$	$\xi_4 = 1$	$w_2 = \frac{5}{12}$	$w_4 = w_1$

Numerische Integration in höheren Dimensionen

Die im 2D Fall auftretenden Doppel-Integrale lassen sich numerisch approximieren, indem zuerst das innere Integral ausgewertet wird und danach das äußere Integral, d. h.,

$$\int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \eta) \, d\xi d\eta = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \tag{3.18}$$

mit den Stützstellen ξ_i und η_j in die jeweiligen Koordinatenrichtungen (Abb. 3.10). In

der praktischen Anwendung lassen sich die jeweiligen Integrationsgewichte w_i und w_j zusammenfassen, um die Effizienz der Berechnung zu erhöhen. Die Berechnung ist hier ebenfalls exakt, falls die höchste im Integrand vorkommende Ordnung einer Variablen

- $(2p + 1)$ für Quadratur nach GAUSS-LEGENDRE
- $(2p - 1)$ für Quadratur nach LOBATTO

nicht übersteigt. Im 3D Fall wird analog verfahren.

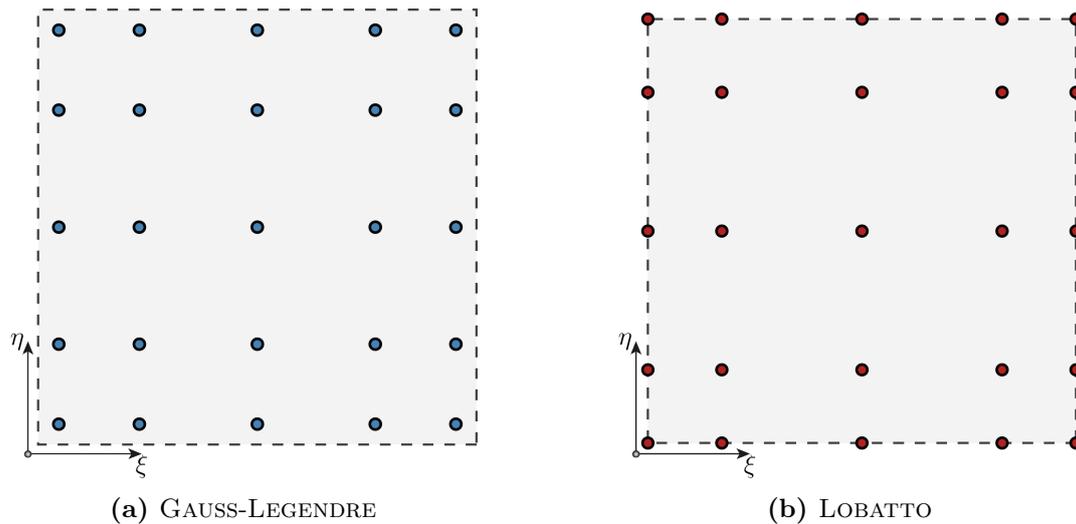


Abbildung 3.10: Vergleich der Stützstellen bei GAUSS-LEGENDRE-Quadratur und LOBATTO-Quadratur.

3.2.4 Kondition und Lösung des linearen Gleichungssystems

Eine Annäherung an die exakte Lösung eines Problems lässt sich grundsätzlich entweder über eine Erhöhung der Anzahl der finiten Elemente (bekannt als *h-Refinement*) erreichen oder über eine Erhöhung des Grades der Formfunktionen (bekannt als *p-Refinement*). In beiden Fällen erhöht sich mit der gesteigerten Genauigkeit auch die Anzahl der Freiheitsgrade und damit die Berechnungsdauer zur Lösung des dazugehörigen linearen Gleichungssystems. Die Steigerung der Genauigkeit ist bei Erhöhung der Elementzahl bei gleichbleibender Ordnung der Formfunktionen jedoch algebraisch, während bei Erhöhung der Ordnung der Formfunktionen bei gleichbleibender Anzahl der Elemente die Genauigkeit mit geometrischer bzw. *spektraler* Rate zunimmt (siehe Abb. 3.11b). Dies ist der Grundgedanke der SEM, wobei die Verwendung der GLL-Verteilung hohe Ordnungen p der LAGRANGE-Formfunktionen überhaupt ermöglicht. Dass eine Interpolation mit Formfunktionen höherer Ordnung zu wesentlichen Genauigkeitssteigerungen führen kann, ist offenkundig, da komplexere Funktionsverläufe mit identischer Anzahl von Stützknöten besser approximiert werden können (siehe Abb. 3.11a).

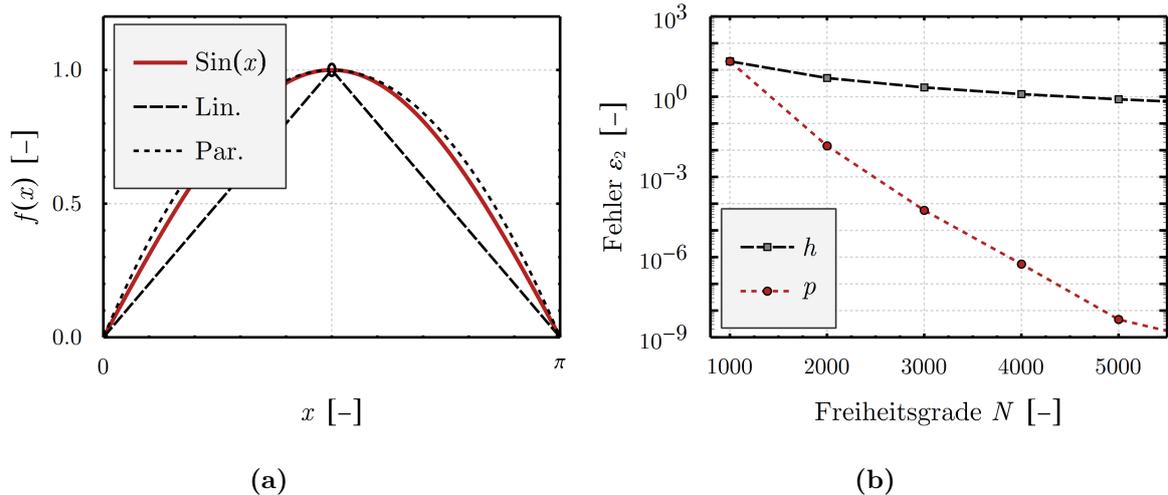


Abbildung 3.11: (a) Lineare (Lin.) und parabolische (Par.) Interpolation einer Funktion. (b) Vergleich von h - und p -Refinement zur Steigerung der Genauigkeit.

Bei einer numerischen Berechnung mit doppelter Präzision nach der IEEE 754, hierbei belegt eine Zahl 64 Bit Speicherplatz, kann eine maximale Genauigkeit von etwa 16 signifikanten Stellen erreicht werden. Ein Maß für den Verlust an Genauigkeit bei der Lösung linearer Gleichungssysteme ist die Konditionszahl κ der Koeffizientenmatrix \mathbf{A} . Diese beschreibt in welchem Maß die bei numerischen Berechnungen naturgemäß vorhandenen Ungenauigkeiten der Eingangsdaten sich auf die Lösung auswirken. Als Abschätzung beträgt der Verlust im ungünstigsten Fall $\log_{10}(\kappa)$ Stellen an signifikanter Genauigkeit bei der Berechnung des linearen Gleichungssystems zusätzlich zum Fehler der verwendeten numerischen Methode. Bei Konditionszahlen um 10^{16} kann der Berechnungsalgorithmus folglich unter Umständen keine ausreichend genaue Lösung mehr liefern und man spricht dann von einem schlecht konditionierten Problem (englisch: *ill-conditioning*). Es ist daher notwendig, die Kondition bei der Berechnung zu überprüfen oder Konvergenzuntersuchungen vorzunehmen, um sicherzustellen, dass die Genauigkeit der Lösung ausreichend ist. Die Konditionszahl der Koeffizientenmatrix wird wie folgt berechnet [62]:

$$\kappa(\mathbf{A}) := \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|. \quad (3.19)$$

Hierbei ist $\|\mathbf{A}\|$ die Matrixnorm von \mathbf{A} . Als Matrixnorm kann unter anderem bspw. die durch die Euklidische Vektornorm induzierte Matrixnorm verwendet werden, was zur sogenannten *spektralen Konditionszahl* führt. Für eine symmetrische, positiv definite Matrix wird diese durch

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A})}{\lambda_{\min}(\mathbf{A})}$$

berechnet, wobei λ_{\max} und λ_{\min} der kleinste bzw. der größte Eigenwert der Matrix \mathbf{A} ist. Da die exakte Berechnung der Konditionszahl einer Matrix numerisch sehr aufwändig ist, wird zur Abschätzung der Konditionszahl in der Praxis ein Näherungsalgorithmus,

bezeichnet mit κ_1 , verwendet. Derartige Näherungsalgorithmen sind in den meisten Programmen zur Lösung von linearen Gleichungssystemen enthalten, um die Kondition effizient abschätzen zu können. Dies ist ausreichend, da lediglich die Größenordnung der Konditionszahl von Interesse ist.

Im Rahmen einer numerischen Berechnung können unterschiedliche Einflussfaktoren Auswirkungen auf die Kondition der Koeffizientenmatrix haben. Unter anderem können die verwendeten Formfunktionen, Berechnungsparameter oder auch die Randbedingungen die Kondition ungünstig beeinflussen. Eine ausführliche Darstellung der Auswirkungen unterschiedlicher nodaler Basen auf die Kondition der Systemmatrizen in 1D und 2D POISSON-Problemen ist in der Arbeit von PENA [93] zu finden. Die darin dargestellten Ergebnisse stimmen grundsätzlich mit den Ergebnissen dieser Arbeit überein. Bei den Wellenausbreitungsproblemen kommt es in der Nähe zu einer Eigenfrequenz des Systems zu einer Verschlechterung der Kondition der Koeffizientenmatrix. Den gleichen Effekt haben auch gewisse Materialparameter wie bspw. die Querkontraktionszahl. Die DIRICHLET-Randbedingungen eines Problems werden durch Anpassung der Systemmatrix in das SEM-Gleichungssystem eingebaut. Falls keine Anpassung der verwendeten Einheiten vorgenommen wird, unterscheiden sich dann die Einträge der Systemmatrix stark in der Größenordnung, was üblicherweise zu hohen Konditionszahlen der Systemmatrix führt. Dies gilt jedoch nicht zwangsläufig, wie nachfolgend gezeigt wird. In einem Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sind die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} und der Vektor \mathbf{b} auf der rechten Seite gegeben durch:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10^6 \\ 0 & 10^6 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10^7 \\ 10^7 \end{bmatrix}.$$

Für die Koeffizientenmatrix ergibt sich eine Konditionszahl von $\kappa \approx 10^6$. Da sich die Lösung des Gleichungssystems nicht ändert, wenn man die linke und die rechte Seite der Gleichungen mit einer Konstanten multipliziert, kann man die erste Zeile der Koeffizientenmatrix \mathbf{A} und des Vektors \mathbf{b} mit 10^6 multiplizieren. Die Konditionszahl der neuen Koeffizientenmatrix beträgt dann lediglich $\kappa \approx 1$, ohne dass die Lösung des Gleichungssystems davon beeinflusst würde.

Solche und komplexere Operationen werden im Rahmen der Vorkonditionierung des Gleichungssystems vorgenommen, wobei dies der verwendete Löser (englisch: *Solver*), meistens automatisiert ohne notwendige Nutzereingriffe, erledigt. In dieser Arbeit wird lediglich für 1D Beispiele die Konditionszahl angegeben. Für mehrdimensionale Problemstellungen und FSI-Probleme wird für einen Vergleich zwischen der Verwendung von Elementen mit ED- und GLL-Nodalbasis lediglich der Unterschied in der Größenordnung der Konditionszahl $\log_{10}(\kappa_{1,ED}) - \log_{10}(\kappa_{1,GLL})$ in der Darstellung verwendet, um den Informationsgehalt auf

das Wesentliche zu beschränken.

Prinzipiell kann zur Lösung des linearen Gleichungssystems zwischen direkten und indirekten Methoden unterschieden werden. Während die direkten Methoden das Gleichungssystem exakt (allerdings mit numerischem Fehler) lösen, verbessern die indirekten Methoden, ausgehend von einer ersten Start-Approximation, das Ergebnis iterativ bis eine vorgegebene Fehlerschranke unterschritten wird. Die direkten Methoden basieren auf der Zerlegung der Matrix in eine obere und untere Dreiecksmatrix (LU -Zerlegung, L für *Lower* und U für *Upper*, bzw. ihrer unterschiedlichen Varianten davon). Ein Nachteil der direkten Methoden ist der hohe Bedarf an Arbeitsspeicher. Die indirekten Methoden benötigen weniger Arbeitsspeicher und sind daher in der Lage auch Probleme mit einer hohen Anzahl von Freiheitsgraden berechnen zu können. Sie basieren im Wesentlichen auf dem Verfahren der konjugierten Gradienten (auch: CG-Verfahren für *conjugate gradients*) bzw. einem prinzipiell ähnlichem Verfahren. Ein Nachteil ist die Abhängigkeit der Effizienz der indirekten Methoden von der jeweiligen Problemstellung und der Kondition der Matrix. Es kann zur Oszillation des Fehlers kommen und eine Lösung für die Problemstellung kann unter Umständen nicht gefunden werden.

Für sämtliche Problemstellungen, die in dieser Arbeit diskutiert werden, wird die Lösung des linearen Gleichungssystems durch den direkten Löser PARDISO (*Parallel Sparse Direct and Multi-Recursive Iterative Linear Solvers*) berechnet [112, 100]. Der Löser ermöglicht die Lösung von symmetrischen und unsymmetrischen dünnbesetzten Matrizen durch parallelisierte LU -Zerlegung und verwandte Verfahren. Eine detaillierte Übersicht über direkte und iterative Methoden zur Lösung des linearen Gleichungssystems im Rahmen akustischer Simulationen wurde in [46] gegeben. Umfangreiche Tests haben gezeigt, dass der PARDISO-Solver auf der verwendeten Rechnerkonfiguration bei den betrachteten Problemstellungen, insbesondere bei einer höheren Anzahl von Freiheitsgraden, die Beste der zur Verfügung stehenden Varianten ist.

3.2.5 Zeitliche Diskretisierung

Zur Berechnung transienter Problemstellungen wird eine Zeitintegrationstechnik benötigt. Die räumliche Diskretisierung wird, analog zum statischen Fall, über die SEM vorgenommen. Die Zeitableitungen der abhängigen Variable \mathbf{u} in der diskretisierten Wellengleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t)$$

werden durch den zentralen Differenzenquotienten approximiert, d. h.,

$$\ddot{\mathbf{u}} \rightarrow \frac{\mathbf{u}^{(t+1)} - 2\mathbf{u}^{(t)} + \mathbf{u}^{(t-1)}}{\Delta t^2}.$$

Hierbei ist Δt die Zeitschrittweite. Um ein gewichtetes Schema zu erhalten, wird $\mathbf{K}\mathbf{u}$ durch die Linearkombination

$$\mathbf{K}\mathbf{u} \rightarrow \sigma\mathbf{K}\mathbf{u}^{(t+1)} + (1 - 2\sigma)\mathbf{K}\mathbf{u}^{(t)} + \sigma\mathbf{K}\mathbf{u}^{(t-1)}$$

ersetzt, wobei σ der Gewichtungsfaktor ist. Hierbei sei angemerkt, dass die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} für den Fall zeitabhängiger ROBIN-Randbedingungen gegebenenfalls zeitabhängig sein kann. Für Details wird auf die Literatur verwiesen [62].

Das zu lösende Gleichungssystem hat für die homogene Wellengleichung dann die Form

$$(\mathbf{M} + \sigma\Delta t^2\mathbf{K})\mathbf{u}^{(t+1)} = (2\mathbf{M} - (1 - 2\sigma)\Delta t^2\mathbf{K})\mathbf{u}^{(t)} - (\mathbf{M} + \sigma\Delta t^2\mathbf{K})\mathbf{u}^{(t-1)}. \quad (3.20)$$

Für jeden folgenden Zeitschritt $\mathbf{u}^{(t+1)}$ werden die bereits bekannten Werte des Lösungsvektors $\mathbf{u}^{(t-1)}$ und $\mathbf{u}^{(t)}$ verwendet.

Für $\sigma = 0$ ergibt sich ein explizites Schema, in welchem lediglich die Massenmatrix in der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems vorkommt:

$$\mathbf{M}\mathbf{u}^{(t+1)} = (2\mathbf{M} - \Delta t^2\mathbf{K})\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{M}\mathbf{u}^{(t-1)}. \quad (3.21)$$

Zur Lösung der diskretisierten transienten Wärmeleitungsgleichung

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{F}$$

wird analog verfahren. Die Zeitableitung von \mathbf{T} wird durch den vorwärtigen Differenzenquotienten ersetzt

$$\dot{\mathbf{T}} \rightarrow \frac{\mathbf{T}^{(t+1)} - \mathbf{T}^{(t)}}{\Delta t}$$

und $\mathbf{K}\mathbf{T}$ durch die Linearkombination

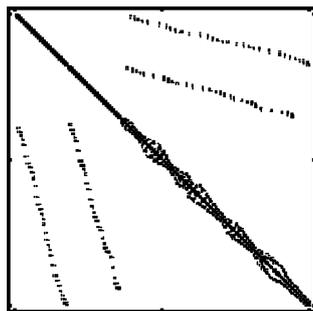
$$\mathbf{K}\mathbf{T} \rightarrow \sigma\mathbf{K}\mathbf{T}^{(t+1)} + (1 - \sigma)\mathbf{K}\mathbf{T}.$$

Auch hier ergibt sich für $\sigma = 0$ ein explizites Verfahren. Aus $\sigma = 0.5$ folgt das für transiente Wärmeleitungsprobleme häufig verwendete *Crank-Nicolson-Schema*.

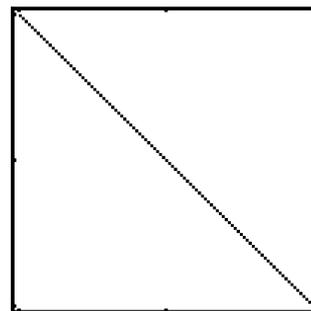
Ein explizites Schema wird in der Standard-FEM nur für hochdynamische Problemstellungen (bspw. Crash Simulation in ANSYS LS-DYNA) verwendet, da es bei Überschreitung der Zeitschrittweite um einen Mindestwert instabil wird. Dieser Mindestwert hängt von

der Elementgröße ab und bewirkt, dass zur Lösung unter Verwendung eines expliziten Schemas eine hohe Anzahl an Zeitschritten notwendig ist. Da in jedem Zeitschritt ein Gleichungssystem gelöst werden muss, ist die Berechnungsdauer entsprechend hoch. In der SEM ergeben sich jedoch erhebliche Effizienz-Vorteile bei der Berechnung mittels der expliziten Zeitintegration. Wie im Abschnitt 3.2.3 erwähnt, ergibt sich eine diagonale Elementmassenmatrix, falls die darin auftretenden Integrale mittels LOBATTO-Quadratur ermittelt werden. Bei einem Problem in der Akustik oder der Kontinuumsmechanik ergibt sich, nach Assemblierung aller Elemente, dann eine diagonale Systemmassenmatrix falls keine, wie auch immer geartete, Kopplung unterschiedlicher, unabhängiger Teilsysteme vorliegt. In der Abb. 3.12 ist vergleichend die Systemmassenmatrix für ein 2D Problem in der Strukturmechanik dargestellt, in welcher die Elementmassenmatrizen mittels GAUSS-LEGENDRE-Quadratur und mit LOBATTO-Quadratur berechnet wurden. Zur Berechnung wurden hierbei die GLL-Elemente der Ordnung $p = 3$ verwendet. Mit LOBATTO-Quadratur ist nur die Hauptdiagonale der Massenmatrix mit Werten ungleich Null belegt. In jedem Zeitschritt kann der Vektor der unbekanntenen Knotenwerte $\mathbf{u}^{(t+1)}$ dann durch simple Division, anstatt der zeitaufwendigen Lösung eines linearen Gleichungssystems, ermittelt werden.

Neben den hier vorgestellten Verfahren gibt es im Allgemeinen noch weitere explizite und implizite Methoden zur Lösung zeitabhängiger Problemstellungen. Die expliziten RUNGE-KUTTA-Verfahren benötigen zwar innerhalb eines Zeitschrittes einen größeren Rechenaufwand, jedoch kann dafür die Zeitschrittweite größer gewählt werden, ohne dass die Berechnung instabil wird. Bekannte implizite Verfahren sind das WILSON- Θ -, HOUBOLT- und NEWMARK-Verfahren [51].



(a) GAUSS-LEGENDRE-Quadratur



(b) LOBATTO-Quadratur

Abbildung 3.12: Aufbau der Systemmassenmatrix bei einem 2D HELMHOLTZ-Problem mit unstrukturiertem Netz und unterschiedlicher numerischer Integration der GLL-Elementmassenmatrizen.

3.3 SEM für Akustik

Ausgehend von der akustischen Wellengleichung (2.4) soll hier detailliert die Überführung der partiellen Differentialgleichung in die schwache Form und anschließende Diskretisierung als finites Element dargestellt werden. Dabei wird auch auf die Transformation des Elementes eingegangen.

Für eine finite Elemente Formulierung wird die Gl. (2.4) mit einer Testfunktion v_F multipliziert und über das Volumen des Gebiets Ω_F integriert:

$$\int_{\Omega_F} v_F \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 p - c_0^2 \frac{\partial q_F}{\partial t} \right) dV = 0.$$

Durch Anwendung des GAUSSSchen Integralsatzes nach Gl. (3.8) kann die obige schwache Form umgeschrieben werden als

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_F} v_F \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dV + c_0^2 \int_{\Omega_F} (\nabla v_F)^T \nabla p dV \\ &= c_0^2 \int_{\Gamma_F} v_F (\nabla p)^T \mathbf{n}_F dA + c_0^2 \int_{\Omega_F} v_F \frac{\partial q_F}{\partial t} dV. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Das Druckfeld p wird über die Formfunktionen \mathbf{N}_F und die dazugehörigen Knotengewichte \mathbf{p} , bei der Verwendung von LAGRANGE-Polynomen sind dies die Werte für den Druck an den Knotenpunkten, approximiert durch

$$p = \mathbf{N}_F \mathbf{p}. \quad (3.23)$$

Als Testfunktionen werden ebenfalls die Formfunktionen \mathbf{N}_F verwendet. Eingesetzt in die Gl. (3.22) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left(\int_{\Omega_F} \mathbf{N}_F^T \mathbf{N}_F dV \right)}_{\text{Massenmatrix}} \ddot{\mathbf{p}} + \underbrace{\left(c_0^2 \int_{\Omega_F} (\nabla \mathbf{N}_F)^T \nabla \mathbf{N}_F dV \right)}_{\text{Steifigkeitsmatrix}} \mathbf{p} \\ &= c_0^2 \int_{\Gamma_F} \mathbf{N}_F^T \nabla p \mathbf{n}_F dS + c_0^2 \int_{\Omega_F} \mathbf{N}_F^T \frac{\partial q_F}{\partial t} dV, \end{aligned} \quad (3.24)$$

wobei der Normalenvektor \mathbf{n} aus dem Fluidbereich zeigt. Die Elementmassenmatrix \mathbf{m}_F , Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{k}_F und der Elementlastvektor $\mathbf{f}_s + \mathbf{f}_q$ werden im Rahmen der

SEM gemäß der Gl. (3.24) berechnet, wobei

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}_F &= \int_{\Omega_F} \mathbf{N}_F^T \mathbf{N}_F \, dV, \\
 \mathbf{k}_F &= c_0^2 \int_{\Omega_F} (\nabla \mathbf{N}_F)^T \nabla \mathbf{N}_F \, dV, \\
 \mathbf{f}_q &= c_0^2 \int_{\Omega_F} \mathbf{N}_F^T \frac{\partial q_F}{\partial t} \, dV, \\
 \mathbf{f}_s &= c_0^2 \int_{\Gamma_F} \mathbf{N}_F^T \nabla p \mathbf{n}_F \, dS
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

ist. Nach Berechnung aller Elementmatrizen werden diese in einem späteren Schritt zum Gesamtsystem assembliert, die Randbedingungen eingearbeitet und das resultierende Gleichungssystem

$$\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_F \mathbf{p} = \mathbf{F}_q + \mathbf{F}_s \tag{3.26}$$

gelöst [62, 103]. Hierbei ist \mathbf{M}_F die Systemmassenmatrix, \mathbf{K}_F ist die Systemsteifigkeitsmatrix und $\mathbf{F}_q + \mathbf{F}_s$ ist der Systemlastvektor. Der Index F kennzeichnet, dass es sich um die Systemmatrizen des Fluidbereichs handelt. Der Großteil der vorliegenden Arbeit behandelt akustische Probleme im Frequenzbereich. Daher wird die Gl. (2.5) diskretisiert und es ergibt sich schließlich:

$$(\mathbf{K}_F - \omega^2 \mathbf{M}_F) \mathbf{p} = \mathbf{F}_s - \mathbf{F}_q. \tag{3.27}$$

Die zu berechnenden Elementmatrizen ergeben sich aus der Gl. (3.25), wobei ein eventuell vorhandener zeitabhängiger Quellterm in \mathbf{f}_q ebenfalls in den Frequenzbereich überführt werden muss. Im Rahmen der SEM wird zur effizienten numerischen Berechnung eine Transformation der Elemente vom Realraum in den Referenzraum Ω_E vorgenommen. Als Realraum wird das \mathbf{x} -Koordinatensystem bezeichnet, in welchem die Problemstellung und die physikalischen Größen definiert sind. Unter Referenzraum, mit den natürlichen Koordinaten $\boldsymbol{\xi}$, wird der Raum verstanden, in welchem nach Abschnitt 3.2.2 die Formfunktionen definiert sind (Abb. 3.13).

Die Elementsteifigkeitsmatrix in Gl. (3.25) kann umgeschrieben werden in

$$\mathbf{k}_F = c_0^2 \int_{\Omega_E} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \det(\mathbf{J}) \, dV. \tag{3.28}$$

Die Ableitungsmatrix \mathbf{B} enthält die Ableitungen der Formfunktionen unter Beachtung

der Transformation, d. h.,

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{N} = (\mathbf{J}^T)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \mathbf{N}, \quad (3.29)$$

wobei auf den Index F für den Vektor der Formfunktionen \mathbf{N} hier und im folgenden Abschnitt zur Vereinfachung der Darstellung verzichtet wird. Über die JACOBI-Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

wird die Transformation des Elements durchgeführt. Hierbei wird zur einfacheren Notation $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$ und $x_3 \equiv z$ verwendet. Die Berechnung der Einträge der Matrix \mathbf{J} erfolgt über die Gl. (3.34) und wird weiter unten in diesem Abschnitt erläutert. Der Vektor \mathbf{N} enthält die Formfunktionen. Die Anzahl der Formfunktionen entspricht der Anzahl der Knoten des Elements abhängig von der in der SEM verwendeten Ordnung der Formfunktionen p . Im 3D Fall enthält der Vektor \mathbf{N} gleich $(p+1)^3$ Formfunktionen:

$$\mathbf{N} = \left[\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_{(p+1)^3} \right]. \quad (3.31)$$

Für $p = 10$ werden also $11^3 = 1331$ Formfunktionen zur Interpolation des Druckfeldes eines 3D Fluidelements verwendet. Da die Matrix \mathbf{B} die Dimension $3 \times (p+1)^3$ hat, ergibt sich die Größe der Elementmatrix zu $(p+1)^3 \times (p+1)^3$.

Die Elementmassenmatrix in Gl. (3.25) kann nun umgeschrieben werden in

$$\mathbf{m}_F = \int_{\Omega_E} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \det(\mathbf{J}) \, dV. \quad (3.32)$$

Für den 2D Fall lauten die Ableitungsmatrix \mathbf{B} und die JACOBI-Matrix \mathbf{J} :

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{N} = (\mathbf{J}^T)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \mathbf{N}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Der höchste vorkommende Index der Formfunktionen im \mathbf{N} -Vektor ist im 2D Fall $(p + 1)^2$.

In dieser Arbeit werden bilineare Viereckselemente im 2D Fall bzw. Hexaeder im 3D Fall verwendet, für welche die Transformationsgleichungen linear sind. Allerdings sind grundsätzlich auch isoparametrische Elemente mit krummliniger Berandung möglich (Abb. 3.14).

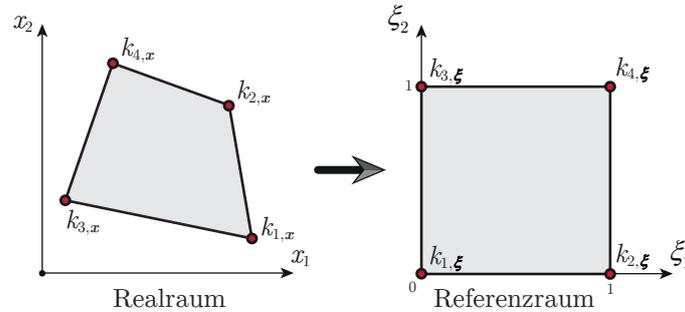


Abbildung 3.13: Transformation vom Realraum in den Referenzraum zur numerischen Integration der Elementmatrizen.

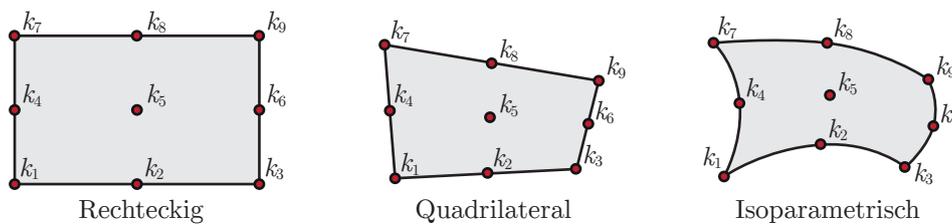


Abbildung 3.14: Verschiedene Viereckselemente mit geradliniger und krummliniger Berandung.

Zur Transformation eines bilinearen Viereckselements können die Eckpunkte des quadrilateralen Elements (in Abb. 3.13 als $k_{\alpha,x}$ im Realraum und $k_{\alpha,\xi}$ im Referenzraum eingezeichnet) unter Verwendung der folgenden Transformationsbeziehungen zwischen dem Realraum und Referenzraum überführt werden:

$$\mathbf{x}_T(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} x_{1,T}(\boldsymbol{\xi}) \\ x_{2,T}(\boldsymbol{\xi}) \\ x_{3,T}(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} = \sum_{\alpha=1}^8 \begin{bmatrix} x_1^\alpha \\ x_2^\alpha \\ x_3^\alpha \end{bmatrix} \varphi_{1,\alpha}(\boldsymbol{\xi}). \quad (3.34)$$

Hierbei bezeichnet α die Nummer der dem Eckpunkt zugeordneten linearen Formfunktion φ_α . Der Eckpunkt hat die Realraum-Koordinaten $x_1^\alpha, x_2^\alpha, x_3^\alpha$. Im 2D Fall erfolgt die Transformation analog. Hierbei werden aber vier Eckpunkte und vier zugeordnete lineare Formfunktionen verwendet. Die linearen Formfunktionen sind LAGRANGE-Polynome und können über die im Abschnitt 3.2.2 gezeigte Methodik berechnet werden. Sie lauten für den Referenzraum $\xi_1 \in [0; 1]$, $\xi_2 \in [0; 1]$ im 2D Fall:

- $\varphi_1 = (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)$,

- $\varphi_2 = \xi_1 (1 - \xi_2)$,
- $\varphi_3 = (1 - \xi_1) \xi_2$,
- $\varphi_4 = \xi_1 \xi_2$.

Die sich ergebenden Transformationsgleichungen $\mathbf{x}_T(\boldsymbol{\xi})$ werden in x_i der JACOBI-Matrix in Gl. (3.30) bzw. Gl. (3.33) substituiert und nach der entsprechenden Koordinate ξ_i abgeleitet. Die transponierte Inverse der JACOBI-Matrix $(\mathbf{J}^T)^{-1}$ in Gl. (3.29) enthält im Allgemeinen gebrochene rationale Funktionen. Die Integration der Gl. (3.28) über den Referenzraum kann daher in der Regel nicht mehr analytisch durchgeführt werden. Aus diesem Grund muss sie numerisch integriert werden (siehe Abschnitt 3.2.3). Nach Berechnung der Einträge der Steifigkeitsmatrizen und Massenmatrizen aller Elemente werden diese zu der Systemsteifigkeitsmatrix und Systemmassenmatrix assembliert. Im Anschluss werden die Randbedingungen eingearbeitet und das Gleichungssystem nach den unbekanntenen Knotenwerten für den Druck gelöst. Über die Beziehung in Gl. (3.23) kann das Druckfeld im Element durch die Formfunktionen ausgedrückt werden.

Schallharte Berandungen, schallweiche Berandungen, Impedanzrandbedingungen und vorgegebene Drücke und Schallschnellen werden im Rahmen der SEM entsprechend eingearbeitet [62, 103]. Die Einarbeitung der Monopolquelle, Gl. (2.12), ist trivial. Aufgrund der Eigenschaft $\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$ der Delta-Funktion kann der Term $-4\pi e^{i\phi} \sqrt{\frac{2\rho\omega P}{(2\pi)^2}}$ im Rahmen der SEM einfach gemäß der geometrischen Position des Punktstrahlers an der entsprechenden Stelle des Systemlastvektors addiert werden. Es ist dabei allerdings anzumerken, dass das Schalldruckfeld in der unmittelbaren Nähe der Monopolquelle stark von der Vernetzung, also der Netzdichte und dem Grad der Formfunktionen, abhängig ist. Weiterhin verschlechtert die Monopolquelle die Kondition des linearen Gleichungssystems [23].

3.4 SEM für Elastodynamik

Analog der Darstellung im Abschnitt 3.3 wird die Gl. (2.24) mit einer Testfunktion $\mathbf{v}_S = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ multipliziert, integriert und anschließend unter Nutzung des GREEN-GAUSSSchen Theorems (3.8) in die folgende schwache Form überführt:

$$\int_{\Omega_S} \mathbf{v}_S^T \rho_S \frac{\partial^2 \mathbf{u}_S}{\partial t^2} dV + \int_{\Omega_S} (\tilde{\nabla} \mathbf{v}_S)^T \boldsymbol{\sigma}_S dV - \int_{\Gamma_S} (\mathbf{v}_S)^T \mathbf{t} dS - \int_{\Omega_S} \mathbf{v}_S^T \mathbf{f} dV = 0. \quad (3.35)$$

Mit der Interpolation des Verschiebungsfeldes \mathbf{u}_S und der Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_S$ durch die Formfunktionen \mathbf{N}_S und die Knotenverschiebungen \mathbf{u} sowie, analog zur Diskretisierung

des Fluidgebiets, unter der Verwendung der Formfunktionen als Testfunktionen

$$\mathbf{u}_S = \mathbf{N}_S \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_S = \tilde{\nabla} \mathbf{N}_S \mathbf{u} \quad (3.36)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left(\rho_S \int_{\Omega_S} \mathbf{N}_S^T \mathbf{N}_S \, dV \right)}_{\text{Massenmatrix}} \ddot{\mathbf{u}} + \underbrace{\left(\int_{\Omega_S} (\tilde{\nabla} \mathbf{N}_S)^T \mathbf{D}_S \tilde{\nabla} \mathbf{N}_S \, dV \right)}_{\text{Steifigkeitsmatrix}} \mathbf{u} \\ &= \int_{\Gamma_S} \mathbf{N}_S^T \mathbf{t} \, dS + \int_{\Omega_S} \mathbf{N}_S^T \mathbf{f} \, dV. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{k}_S , die Elementmassenmatrix \mathbf{m}_S und der Elementlastvektor $\mathbf{f}_f + \mathbf{f}_b$ werden dann aus den folgenden Gleichungen berechnet:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_S &= \rho_S \int_{\Omega_S} \mathbf{N}_S^T \mathbf{N}_S \, dV, \\ \mathbf{k}_S &= \int_{\Omega_S} (\tilde{\nabla} \mathbf{N}_S)^T \mathbf{D}_S \tilde{\nabla} \mathbf{N}_S \, dV, \\ \mathbf{f}_f &= \int_{\Gamma_S} \mathbf{N}_S^T \mathbf{t} \, dS, \\ \mathbf{f}_b &= \int_{\Omega_S} \mathbf{N}_S^T \mathbf{f} \, dV. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Der Index S kennzeichnet den Strukturbereich. Nach der Assemblierung resultiert das Gleichungssystem zu

$$\mathbf{M}_S \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_S \mathbf{u} = \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_b \quad (3.39)$$

im Zeitbereich und

$$(\mathbf{K}_S - \omega^2 \mathbf{M}_S) \mathbf{u} = \mathbf{F}_f - \mathbf{F}_b \quad (3.40)$$

im Frequenzbereich.

Für ein beliebig transformiertes Hexaederelement ergibt sich die Elementsteifigkeitsmatrix aus

$$\mathbf{k}_S = \int_{\Omega_E} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_S \mathbf{B} \det(\mathbf{J}) \, d\Omega_E. \quad (3.41)$$

Bei der Diskretisierung elastodynamischer Probleme wird die Ableitungsmatrix \mathbf{B} als Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix bezeichnet. Jedem Knoten des Elements

wird eine mögliche Verschiebung in x -, y - und z -Richtung zugeordnet (Abb. 3.15). Das Verschiebungsfeld in die drei Raumrichtungen wird durch die Formfunktionen approximiert, welche als Matrix wie folgt zusammengefasst werden können, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit fortan auf den Index S verzichtet wird:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \dots & \varphi_{(p+1)^3} & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & \dots & 0 & \varphi_{(p+1)^3} & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & \dots & 0 & 0 & \varphi_{(p+1)^3} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

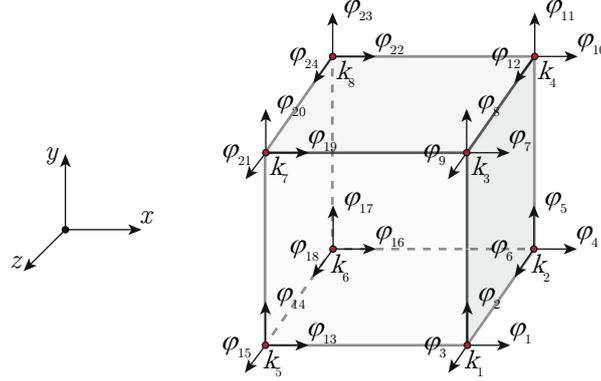


Abbildung 3.15: Knotennummerierung für ein 3D Kontinuumsselement.

Die Größe der Matrix \mathbf{N} ist $3 \times 3(p+1)^3$ und durch die Ordnung p der Formfunktionen festgelegt. Das Verschiebungsfeld eines 3D Kontinuumsselements zehnter Ordnung wird also durch $3 \times 11^3 = 3993$ Formfunktionen interpoliert. Die Elementmatrizen haben damit $3993^2 \approx 1.6 \times 10^7$ Einträge und sind entsprechend aufwendig zu berechnen. Für die Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix \mathbf{B} ergibt sich unter Nutzung des Differentialoperators $\tilde{\nabla}$, definiert in Gl. (2.22), die folgende Gleichung:

$$\mathbf{B} = \tilde{\nabla} \mathbf{N}. \quad (3.43)$$

Um die Transformation des Elements durchzuführen, werden die jeweiligen Ableitungen im Matrizendifferentialoperator $\tilde{\nabla}$ durch die folgenden Beziehungen substituiert:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = (\mathbf{J}^T)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Die Vorgehensweise zur Bestimmung der Einträge der JACOBI-Matrix \mathbf{J} (Gl. (3.30)) erfolgt analog der Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix des akustischen Fluidelements.

Die Elementmassenmatrix des Kontinuumslements kann aus

$$\mathbf{m}_S = \rho_S \int_{\Omega_E} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \det(\mathbf{J}) \, d\Omega_E \quad (3.45)$$

bestimmt werden.

Ebenes Scheibenelement

Die Elementsteifigkeitsmatrix und die Elementmassenmatrix eines 2D isotropen Scheibenelements im ebenen Verzerrungszustand werden gemäß den Gleichungen (3.41) und (3.45) berechnet. Es wird dabei jedoch die Elastizitätsmatrix aus Gl. (2.26) verwendet und die Matrix der Formfunktionen wird abgeändert in

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \dots & \varphi_{(p+1)^2} & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & \dots & 0 & \varphi_{(p+1)^2} \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Der Differentialoperator $\tilde{\nabla}$ in Gl. (3.43) wird zu

$$\tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = (\mathbf{J}^T)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

mit der JACOBI-Matrix \mathbf{J} aus der Gl. (3.33). Der ebene Spannungszustand (ESZ) lässt sich im Übrigen durch die Verwendung der entsprechenden Elastizitätsmatrix berücksichtigen [87].

3.5 SEM für Fluid-Struktur-Interaktionsprobleme

Wird $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_S$ in Gl. (3.38), unter Verwendung der Beziehung aus Gl. (2.31), eingesetzt, ergibt sich für den Lastvektor \mathbf{f}_f des Kontinuumslements

$$\mathbf{f}_f = \int_{\Gamma_{S,F}} -\mathbf{N}_S^T \mathbf{p} \mathbf{I} \mathbf{n}_S \, dS = \int_{\Gamma_{S,F}} \mathbf{N}_S^T \mathbf{n} \mathbf{p} \, dS. \quad (3.48)$$

Das akustische Druckfeld auf der Grenzfläche wird durch die Formfunktionen \mathbf{N}_F und die Knotendrucke \mathbf{p} approximiert und es ergibt sich schließlich die Kopplungsmatrix:

$$\mathbf{f}_f = \int_{\Gamma_{S,F}} \mathbf{N}_S^T \mathbf{n} \mathbf{N}_F \, dS \mathbf{p}. \quad (3.49)$$

Um die Kopplungsmatrix für das akustische Druckfeld zu ermitteln, wird das Verhältnis zwischen dem Druckgradienten und der Beschleunigung der Fluidpartikel $\nabla p = -\rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_F$ in die Gl. (2.29) eingesetzt. Daraus erhält man:

$$\mathbf{n}^T \nabla p|_{\Gamma_{S,F}} = -\rho_0 \mathbf{n}^T \ddot{\mathbf{u}}_F|_{\Gamma_{S,F}} = -\rho_0 \mathbf{n}^T \ddot{\mathbf{u}}_S|_{\Gamma_{S,F}}.$$

Der Term \mathbf{f}_S in Gl. (3.25), der die Quellen an der Berandung des akustischen Fluids beschreibt, kann so über die Beschleunigung der Grenzfläche der Struktur dargestellt werden:

$$\mathbf{f}_S = -c_0^2 \int_{\Gamma_{S,F}} \mathbf{N}_F^T \mathbf{n}^T \nabla p \, dS = -\rho_0 c_0^2 \int_{\Gamma_{S,F}} \mathbf{N}_F^T \mathbf{n}^T \mathbf{N}_S \, dS \, \ddot{\mathbf{u}}. \quad (3.50)$$

Wird eine Kopplungsmatrix

$$\mathbf{h} = \int_{\Gamma_{S,F}} \mathbf{N}_S^T \mathbf{n} \mathbf{N}_F \, dS \quad (3.51)$$

eingeführt, können Gl. (3.49) und Gl. (3.50) auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_F &= \mathbf{h} \mathbf{p}, \\ \mathbf{f}_S &= -\rho_0 c_0^2 \mathbf{h}^T \ddot{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Die Vektoren \mathbf{N}_S und \mathbf{N}_F enthalten die Formfunktionen für die Interpolation des Verschiebungsfeldes und Druckfeldes auf dem Kopplungsrand. Es werden jeweils die gleichen Interpolationsansätze für das Fluidgebiet und das Strukturgebiet verwendet. Für eine 2D Kopplungsfläche eines 3D Fluidgebiets mit einer 3D elastischen Struktur (siehe Abb. 3.16) lauten die Vektoren \mathbf{N}_S und \mathbf{N}_F :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_F &= \left[N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_{(p+1)^2} \right], \\ \mathbf{N}_S &= \left[0 \quad 0 \quad N_3 \quad 0 \quad 0 \quad N_6 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad N_{3(p+1)^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Die Flächennormale der Grenzfläche zwischen Fluid und Struktur zeigt hierbei in z -Richtung. Da lediglich Normalenauslenkungen einen Druck im Fluid bewirken, werden in der Gl. (3.53) die Formfunktionen in Transversalrichtung zu Null gesetzt. Eine Rotation der Kopplungsebene kann durch eine Transformationsmatrix $\mathbf{h}_t = \mathbf{G}^T \mathbf{h}$ berücksichtigt werden [111]. Die Kopplungsmatrizen aller Elemente auf dem Rand $\Gamma_{S,F}$ werden zu einer Gesamtkopplungsmatrix \mathbf{H} assembliert.

Das vollständige Gleichungssystem für ein Fluid-Struktur-Interaktionsproblem lautet somit im Zeitbereich

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & 0 \\ \rho_0 c_0^2 \mathbf{H}^T & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & -\mathbf{H} \\ 0 & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

und im Frequenzbereich:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S - \omega^2 \mathbf{M}_S & -\mathbf{H} \\ \omega^2 \rho_0 \mathbf{H}^T & \mathbf{K}_F - \omega^2 \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Der Übersicht halber werden hierbei die Lastvektoren für das Fluidgebiet und das Strukturgebiet zu \mathbf{Q} bzw. \mathbf{F} zusammengefasst. Für den in Abb. 2.3 gezeigten Fall eines Fluid-Wand-Fluid-Systems ergibt sich im Frequenzbereich das Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{F_1} - \omega^2 \mathbf{M}_{F_1} & -\rho_{F_1} \omega^2 \mathbf{H}_1^T & 0 \\ \mathbf{H}_1 & \mathbf{K}_S - \omega^2 \mathbf{M}_S & -\mathbf{H}_2 \\ 0 & \rho_{F_1} \omega^2 \mathbf{H}_2^T & \mathbf{K}_{F_2} - \omega^2 \mathbf{M}_{F_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Beispielhaft ist in Abb. 3.17 die Struktur des Gleichungssystems dargestellt. Die Kopplungsmatrizen gehen unterschiedlich in die Systemmassenmatrix und die Systemsteifigkeitsmatrix ein, weshalb die Systemmatrix zwar dünnbesetzt, jedoch nicht symmetrisch ist.

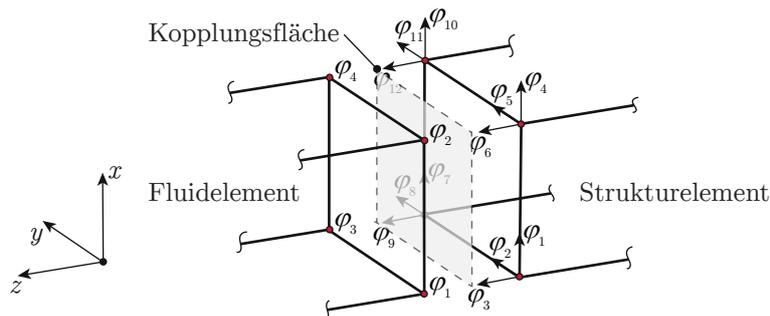


Abbildung 3.16: Kopplung von Fluid- und Strukturelementen.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{F_1} - \omega^2 \mathbf{M}_{F_1} & -\rho_{F_1} \omega^2 \mathbf{H}_1^T & 0 \\ \mathbf{H}_1 & \mathbf{K}_S - \omega^2 \mathbf{M}_S & -\mathbf{H}_2 \\ 0 & \rho_{F_1} \omega^2 \mathbf{H}_2^T & \mathbf{K}_{F_2} - \omega^2 \mathbf{M}_{F_2} \end{bmatrix}$$

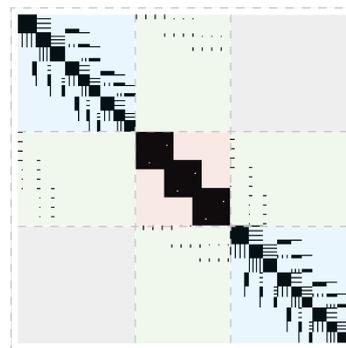


Abbildung 3.17: Struktur des Gleichungssystems eines Fluid-Struktur-Interaktionsproblems.

Alternative Formulierung des gekoppelten Systems

Da das Gleichungssystem in Gl. (3.55) bzw. Gl. (3.56) nicht symmetrisch ist, können die Vorteile von direkten Lösern, die auf der Symmetrie des Gleichungssystems beruhen, nicht

ausgenutzt werden. Eine Formulierung des akustischen Fluids für das Geschwindigkeitspotential gemäß Gl. (2.7) hat hier einen wesentlichen Vorteil, da somit für das gekoppelte FSI-Problem dennoch das folgende symmetrische Gleichungssystem erzielt werden kann:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & 0 & 0 \\ 0 & \rho c^{-2} \mathbf{K}_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & 0 & -\mathbf{H} \\ 0 & 0 & c^{-2} \mathbf{K}_f \\ -\mathbf{H}^T & c^{-2} \mathbf{K}_f & -(\rho c^2)^{-1} \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \psi \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}.$$

Für die Herleitung des obigen Gleichungssystems sei bspw. auf [120, 111] verwiesen. Dieses Gleichungssystem ist zwar symmetrisch, hat jedoch ebenfalls gewisse Nachteile, wie die deutlich höhere Anzahl von Freiheitsgraden, was die Größe des Gleichungssystems und damit die Berechnungszeit erhöht. Die Massenmatrix ist in diesem Fall nicht länger positiv definit, was weiterhin zu numerischen Problemen [120] führen kann. In der vorliegenden Arbeit wird daher nur, wie in den vorangegangenen Abschnitten ausgeführt, die Druckformulierung für das akustische Fluid verwendet.

Alternative Methoden zur Kopplung von Fluid- und Strukturbereich

Falls die Knoten des Fluidbereichs und der Struktur an den Kopplungsrändern nicht übereinstimmen (bspw. tritt dies für unterschiedliche Elementgrößen oder Ordnungen für den Fluidbereich und den Strukturbereich auf), muss eine andere Methode der Kopplung gewählt werden. Mögliche Kopplungsansätze sind die *Consistent Interpolation Method* [45], die *Mortar Method* [136, 18] oder die Methode der *Localized Lagrange Multipliers* (LLM-Methode) [109, 108]. In der Abb. 3.18 ist die letztgenannte Kopplungsmethode veranschaulicht. Der Informationsaustausch zwischen den einzelnen Schichten erfolgt hier nicht direkt, sondern mittels einer eingebrachten Kopplungsschicht.

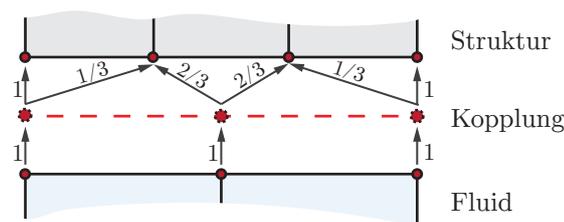


Abbildung 3.18: Kopplung von Struktur- und Fluidbereichen mittels der LLM-Methode nach Ross et al. [108].

3.6 SEM für Wärmeleitungsprobleme

Die Berechnung des gekoppelten Wärmeleitungsproblems, beschrieben durch die Gleichungen (2.32), (2.35) und (2.36), ist nur in Ausnahmefällen stationär (die zeitabhängigen Terme werden zu Null gesetzt) lösbar. In den meisten praktischen Fällen konvergiert die Lösung aufgrund der nichtlinearen Gl. (2.36) nicht, was eine Berechnung im Zeitbereich notwendig macht. Jedoch ist auch im Zeitbereich eine Konvergenz der Lösung teilweise schwierig und die Zeitschrittweite muss sehr niedrig gewählt werden, was die Berechnungsdauer zur Bestimmung der Wärmedurchgangszahl erhöht. Zur Berechnung von Problemstellungen wird in dieser Arbeit daher lediglich die Wärmeleitungsgleichung verwendet, wobei für fluidgefüllte Hohlräume im Abschnitt 5.3 ein approximierter Wärmeleitkoeffizient hergeleitet wird. Der Berechnungsaufwand des Temperaturfeldes ist dann auch für eine hohe Anzahl von Freiheitsgraden sehr niedrig.

Das FOURIERSche Gesetz 2.34 wird in Gl. (2.32) eingesetzt. Die schwache Form für einen Festkörper, ohne Berücksichtigung des Geschwindigkeitsfeldes, lautet dann

$$\begin{aligned} & \rho c_p \int_{\Omega_T} v_T \frac{\partial T}{\partial t} dV + k \int_{\Omega_T} (\nabla v_T)^T \nabla T dV \\ & = k \int_{\Gamma_T} v_T (\nabla T)^T \mathbf{n}_T dA + k \int_{\Omega_T} v_T Q dV. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Das Temperaturfeld wird durch $T = \mathbf{N}_T \mathbf{T}$ in Ω_T approximiert und die Formfunktionen werden als Testfunktionen verwendet. Es ergibt sich dann aus Gl. (3.57)

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left(\rho c_p \int_{\Omega_T} \mathbf{N}_T^T \mathbf{N}_T dV \right)}_{\text{Massenmatrix}} \dot{\mathbf{T}} + \underbrace{\left(k \int_{\Omega_T} (\nabla \mathbf{N}_T)^T \nabla \mathbf{N}_T dV \right)}_{\text{Steifigkeitsmatrix}} \mathbf{T} \\ & = k \int_{\Gamma_T} \mathbf{N}_T^T \nabla T \mathbf{n}_T dS + k \int_{\Omega_T} \mathbf{N}_T^T Q dV. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Die einzelnen Elementmatrizen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_T &= \rho c_p \int_{\Omega_T} \mathbf{N}_T^T \mathbf{N}_T dV, \\ \mathbf{k}_T &= k \int_{\Omega_T} (\nabla \mathbf{N}_T)^T \nabla \mathbf{N}_T dV \end{aligned} \quad (3.59)$$

und die Elementlastvektoren sind

$$\mathbf{f}_{qt} = k \int_{\Omega_T} \mathbf{N}_T^T \frac{\partial q_F}{\partial t} dV,$$

$$\mathbf{f}_{st} = k \int_{\Gamma_T} \mathbf{N}_T^T \nabla p \mathbf{n}_T dS.$$

Der Index T steht hierbei für das Temperaturfeld. Das FOURIER'sche Gesetz, Gl. (2.34), lautet für den allgemeinen Fall eines anisotropen 3D Materials

$$\mathbf{q} = -\mathbf{D} \nabla T.$$

Die Wärmeleitfähigkeitsmatrix \mathbf{D} eines anisotropen Materials lautet im 3D Fall

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix},$$

und man erhält für den isotropen Fall mit gleicher Wärmeleitfähigkeit k in alle Richtungen

$$\mathbf{D} = k\mathbf{I} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}.$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix für ein 3D Element ist dann gegeben durch

$$\mathbf{k}_T = \int_{\Omega_E} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det(\mathbf{J}) dV. \quad (3.60)$$

Die Ableitungsmatrix \mathbf{B} der Formfunktionen wird mittels den Gl. (3.29) und (3.30) berechnet wobei

$$\mathbf{N}_T = \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_{(p+1)^3} \end{bmatrix}$$

ist. Die Elementmassenmatrix kann aus der folgenden Gleichung bestimmt werden:

$$\mathbf{m}_T = \rho c_p \int_{\Omega_E} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \det(\mathbf{J}) dV. \quad (3.61)$$

Für den 2D Fall wird analog verfahren. Das Gleichungssystem lautet schließlich

$$\mathbf{M}_T \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}_T \mathbf{T} = \mathbf{F}_T \quad (3.62)$$

für den transienten Fall und

$$\mathbf{K}_T \mathbf{T} = \mathbf{F}_T \tag{3.63}$$

für den stationären Fall mit dem Lastvektor \mathbf{F}_T und den Knotengewichten \mathbf{T} .

4 Validierungsbeispiele für die SEM

In diesem Kapitel werden zahlreiche numerische Beispiele zur Validierung der im Kapitel 3 entwickelten SEM dargestellt. Dabei werden getrennt für den Frequenz- und den Zeitbereich 1D, 2D und 3D Anwendungsbeispiele aus der Akustik, der Elastodynamik und der FSI gezeigt. Anschließend wird auch die Verwendung der SEM zur Berechnung der Wärmeleitungsprobleme für den stationären und transienten Fall diskutiert. Dabei soll schon an dieser Stelle erwähnt werden, dass die Verwendung von Formfunktionen hoher Ordnung bei den stark oszillierenden Lösungen von Wellenausbreitungsproblemen weit größere Vorteile bietet als bei den relativ glatten Lösungsverläufen der Wärmeleitungsprobleme. Durch die unterschiedlichen Validierungsbeispiele sollen insbesondere die Konvergenz, die Genauigkeit und die Effizienz der in dieser Arbeit entwickelten SEM diskutiert werden.

4.1 A priori Fehlerschätzung

Um den Fehler bei der Verwendung von Formfunktionen der Ordnung p und Elementen mit Seitenlänge L abschätzen zu können, wird ein 1D Fehlerschätzer verwendet [14]. Dieser ermöglicht die *a priori* Abschätzung des Fehlers der Näherungslösung und wird auch in Kapitel 5 und Kapitel 6 verwendet, um die notwendige Diskretisierung für eine gewünschte Genauigkeit der Berechnung abschätzen zu können.

Gegeben sei das HELMHOLTZ-Problem:

$$\Delta p + k^2 p = 0 \tag{4.1}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \nabla p(0) n + ikp(0) &= 1, \\ \nabla p(L) n + ikp(L) &= 0. \end{aligned}$$

Die inhomogene ROBIN-Randbedingung bei $x = 0$ erzeugt eine akustische Welle, die aufgrund der homogenen ROBIN-Randbedingung bei $x = L$ das Gebiet $x \in [0; L]$ ohne Reflexion verlässt. Die analytische Lösung für das Problem ist

$$p(x, k) = -\frac{ie^{ikx}}{2k}. \tag{4.2}$$

Es ist ersichtlich, dass die analytische Lösung aufgrund des reflexionsfreien Randes bei

$x = L$ unabhängig von der Länge L ist. Für eine hohe Anzahl von Kombinationen von kL und Ordnungen p wird der sich daraus ergebende ε_2 -Fehler berechnet. Hierbei wird der Fehler in der l_2 -Norm nach Gl. (3.9) verwendet. Für die gewünschte Fehlerschranke ε_2 und Ordnung p kann dann der entsprechende Wert kL ermittelt werden. Die Tab. 4.1 zeigt, beispielhaft für einige Ordnungen p und Fehlerschranken ε_2 , die sich ergebenden Werte von kL . Daraus kann die nötige Diskretisierungsdichte zur Einhaltung einer Fehlerschranke bei einer bestimmten Frequenz abgeleitet werden (siehe Abb. 4.1).

Tabelle 4.1: Werte von kL für unterschiedliche Ordnungen p und Fehlerschranken ε_2 .

Ordnung p	1	2	3	6	10	15	20
$\varepsilon_2 = 0.05\%$	0.06	0.23	1.13	4.33	10.20	17.63	25.25
$\varepsilon_2 = 0.5\%$	0.19	0.72	1.93	5.73	11.90	20.50	29.50
$\varepsilon_2 = 2\%$	0.38	1.50	2.62	7.05	14.10	22.50	31.50
$\varepsilon_2 = 15\%$	1.16	3.40	5.64	10.18	17.30	26.75	36.38

Bei der Anwendung des Fehlerschätzers ist zu beachten, dass dieser nur Hinweise auf die nötige Diskretisierung und Ordnung der Elemente geben kann. Zum einen baut sich der, im Abschnitt 3.2.1 angesprochene, Pollution-Fehler erst über mehrere Wellenlängen auf, wird also unter Umständen erst bei vielen Elementen relevant, zum anderen haben auch andere Einflussfaktoren, bspw. die Nähe zu einer Eigenfrequenz, Einfluss auf den Fehler. Somit sollten tendenziell eher eine höhere Vernetzungsdichte und/oder eine höhere Ordnung der Elemente gewählt werden.

Aus der Tab. 4.1 lässt sich die notwendige Anzahl von Knoten pro Wellenlänge für eine gegebene Fehlerschranke und eine gegebene Ordnung herleiten (siehe Abb. 4.1 auf der N/λ -Ordinate) und die Anzahl von Freiheitsgraden des Gesamtsystems abschätzen (beispielhaft für $k = 55\text{m}^{-1}$ in der Abb. 4.1 auf der $N_{k=55}/l^3$ -Ordinate).

Insbesondere für eine niedrige Fehlerschranke ergibt sich eine starke Reduzierung der benötigten Freiheitsgrade. Gerade für 2D bzw. 3D Probleme bedeutet dies einen wesentlich geringeren Bedarf an Speicherkapazität. Aus der Abb. 4.1 ist jedoch auch ersichtlich, dass sich die Verwendung allzu hoher Grade von Formfunktionen nicht lohnt. Dem geringen Zuwachs an Genauigkeit der Lösung steht dann ein überproportionaler Aufwand zur Berechnung der Elementmatrizen und Rückrechnung der Lösung gegenüber. Dies deckt sich mit Aussagen der Literatur, in welcher üblicherweise ein Effizienz-Optimum für Formfunktionen von $p = 6$ für eine in Ingenieursanwendungen ausreichende Fehlerschranke angegeben wird. In [3] wurden weitere detaillierte Untersuchungen vorgestellt, in denen sich für eine deutlich niedrigere Fehlerschranke von $\varepsilon_2 = 0.01\%$ bezüglich der Gesamtberechnungsdauer ein Optimum von $p = 10$ ergab. Aus dem *a priori* Fehlerschätzer lässt sich die generelle

Empfehlung ableiten, dass für hohe Genauigkeit eine hohe Ordnung der Formfunktionen und für niedrige Genauigkeit eine niedrige Ordnung der Formfunktionen angebracht ist. Dies beschränkt sich nicht nur auf die Verwendung der LAGRANGE-Polynome, sondern gilt auch für andere FE-Methoden, die bspw. auf hierarchischen Formfunktionen basieren [49]. Ein Vergleich zwischen h-, p- und hp-Varianten wurde in der Arbeit von MITCHELL vorgenommen, in der die Ordnung bis zu einem Maximum von $p = 21$ gesteigert wurde [82]. Auch in dieser Arbeit wurde die Empfehlung gegeben, bei niedrigen Genauigkeitsanforderungen nur Formfunktionen niedriger Ordnung zu verwenden und, falls notwendig, eher die Anzahl der Elemente zu erhöhen. Für hohe Genauigkeitsanforderungen sollte die p-Variante verwendet werden. Der Autor gab für eine Fehlerschranke von $\varepsilon = 10^{-2}$ unter Berücksichtigung der Berechnungszeit eine optimale Ordnung von $p = 4$ und für $\varepsilon = 10^{-6}$ eine optimale Ordnung $p = 12$ an. Qualitativ ähnliche Schlussfolgerungen ergeben sich auch für die in dieser Arbeit untersuchten Problemstellungen.

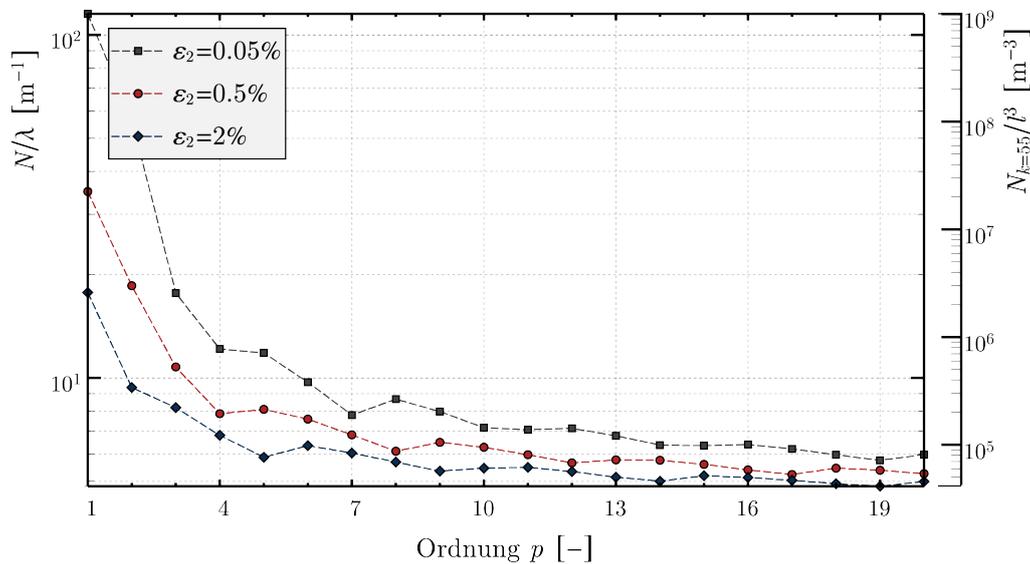


Abbildung 4.1: Anzahl der benötigten Freiheitsgrade pro Wellenlänge $\frac{N}{\lambda}$ in Abhängigkeit der Ordnung für jeweilige Fehlerschranke. Außerdem sind für den 3D Fall die Anzahl an Freiheitsgraden pro Volumen, $l^3 = 1m^3$, für eine Wellenzahl von $k = 55m^{-1}$ in logarithmischer Skalierung aufgetragen.

4.2 Akustische Probleme

4.2.1 Beispiele im Frequenzbereich

Der nachfolgende Abschnitt befasst sich mit Problemstellungen der skalaren HELMHOLTZ-Gleichung in 1D und 2D. Zur Validierung der SEM werden analytische Lösungen verwendet. Es wird der Einfluss der Eigenfrequenzen und die damit verbundene Verschlechterung der Kondition des Gleichungssystems auf die Genauigkeit der Lösung gezeigt und Empfehlungen gegeben, wie die SEM hierbei vorteilhaft angewendet werden kann.

1D akustisches Problem

Gegeben sei das 1D Modellproblem, beschrieben durch

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (4.3)$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} p(0) &= p_0, \\ p(L) &= p_L. \end{aligned}$$

Die analytische Lösung für das Problem lautet

$$p(x) = p_0 \cos(kx) + \sin(kx) (p_L \csc(kL) - p_0 \cot(kL)). \quad (4.4)$$

Die n -te Eigenkreisfrequenz des Problems ist durch $\omega_n = n\pi$ gegeben. In der Abb. 4.2a sind die Konditionszahlen der Systemmatrix ($\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$) für das Problem dargestellt. Die hierbei verwendeten Parameter sind $k = \frac{89\pi}{6} \text{m}^{-1}$ und $L = 3\text{m}$. Für $c = 340 \text{ms}^{-1}$ ergibt sich also $f = \frac{7565}{3} \text{Hz}$. Die Anzahl der Elemente wird variiert, so dass die Anzahl der Freiheitsgrade konstant gehalten wird. In der nebenstehenden Abb. 4.2b wird die Abhängigkeit der l_2 -Fehlernorm von der Ordnung p der Formfunktionen dargestellt. Es ist die spektrale Konvergenzrate ersichtlich. Der numerische Berechnungsfehler wächst bei der Verwendung von LAGRANGE-Formfunktionen mit äquidistant verteilten Stützstellen (ED-Verteilung) wesentlich schneller an und führt ab einer bestimmten Ordnung der Formfunktionen zu inakzeptablen Abweichungen. Das Verhalten kann bei der Verwendung der GLL-Verteilung eingedämmt werden, so dass weit höhere Ordnungen der Formfunktionen verwendet werden können, um eine genauere Lösung erhalten zu können. Der Zusammenhang zwischen Kondition der Systemmatrix und der resultierenden maximal erreichbaren Genauigkeit ist hier gut nachvollziehbar. So ergibt sich bspw. bei der Verwendung von ED-Formfunktionen zwölfter Ordnung ($p = 12$) eine Konditionszahl der Systemmatrix von $\kappa_1 \approx 10^8$, was die Anzahl von signifikanten Stellen auf etwa Acht begrenzt.

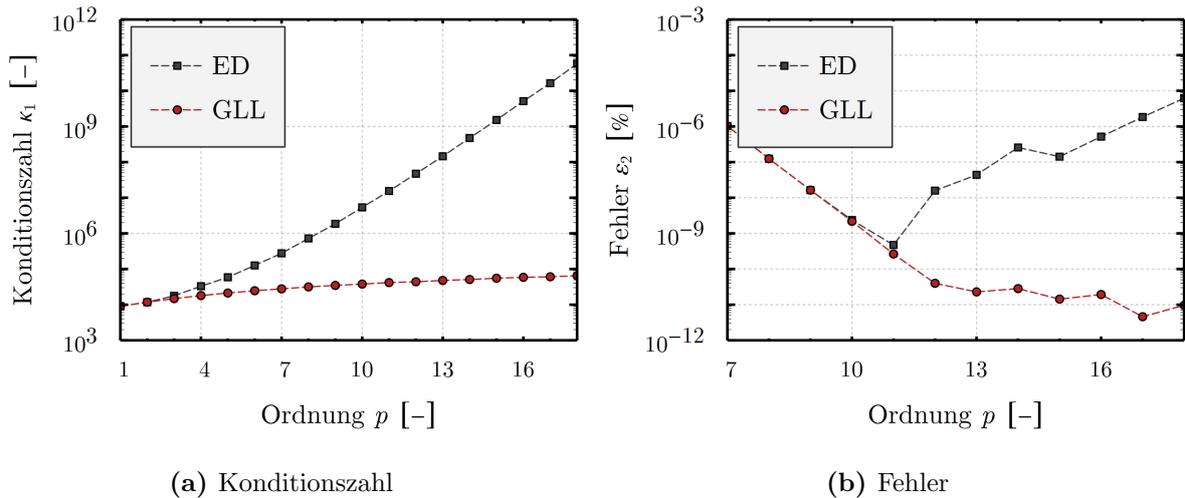


Abbildung 4.2: Konditionszahl und ε_2 -Fehler in Abhängigkeit von der Ordnung der Formfunktionen p .

Für 1D akustische Problemstellungen mit hoher Anzahl von Elementen kann es aufgrund der dabei auftretenden schlechten Kondition der Systemmatrix zu unzureichender Genauigkeit der Ergebnisse kommen [53]. Die Kondition der Systemmatrix verschlechtert sich dabei annähernd quadratisch mit der Anzahl der Freiheitsgrade und schon bei verhältnismäßig geringer Anzahl von Elementen ist das Gleichungssystem schlecht konditioniert. Die Anwendung von GLL-Formfunktionen kann hier aufgrund der besseren Kondition die Anzahl der möglichen Elemente erhöhen und ermöglicht so eine höhere Genauigkeit der Lösung. In der Abb. 4.3 ist erkennbar, dass für das betrachtete Problem mit konventionellen ED-Elementen eine niedrigere Fehlerschranke als $\varepsilon_2 \approx 10^{-7}\%$, trotz der Erhöhung der Anzahl an Freiheitsgraden, nicht möglich ist und die erzielbare Genauigkeit bei Verwendung von GLL-Formfunktionen deutlich höher ist.

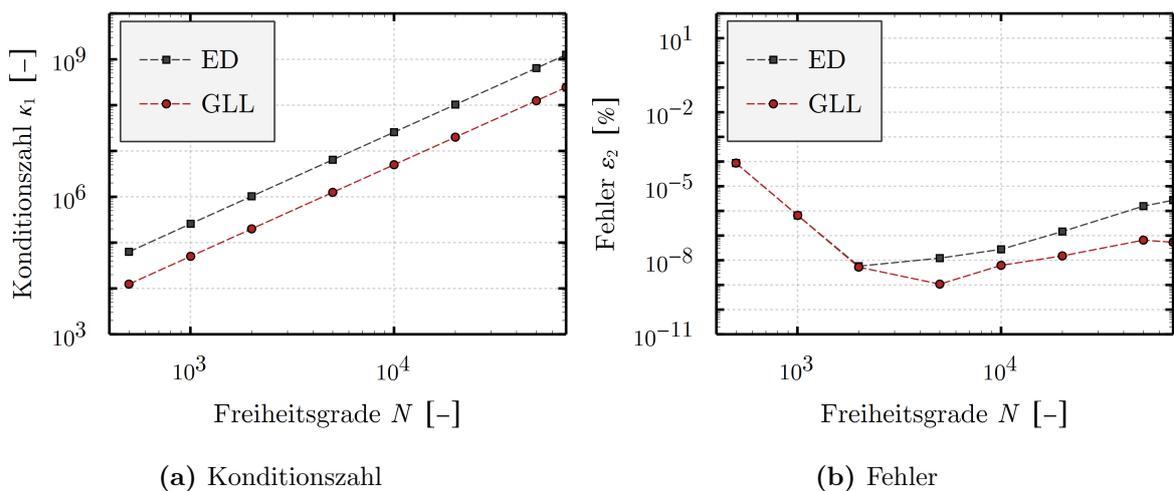


Abbildung 4.3: Konditionszahl und ε_2 -Fehler in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade N für $p = 6$. Die Erregerfrequenz $f = \frac{7565}{3}$ Hz befindet sich nicht in der Nähe von Eigenfrequenzen.

Dies kann insbesondere bei Problemstellungen mit ohnehin schlechterer Kondition, wie bspw. in der unmittelbaren Nähe von Eigenfrequenzen, entscheidende Vorteile bringen (Abb. 4.4). Für Problemstellungen in höheren Dimensionen sind die Auswirkungen einer hohen Anzahl von Elementen im Allgemeinen nicht relevant, da sich die Kondition hierbei in wesentlich geringerem Maße mit der Anzahl der Freiheitsgrade erhöht als in 1D.

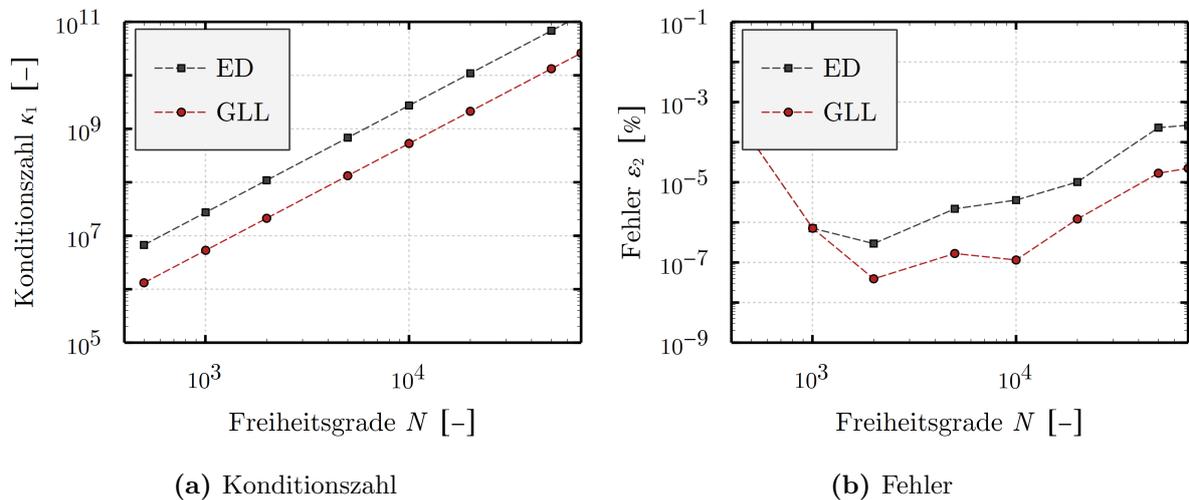


Abbildung 4.4: Konditionszahl und ε_2 -Fehler in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade N für $p = 6$. Die Erregerfrequenz $f = \frac{25517}{10}$ Hz befindet sich in unmittelbarer Nähe einer Eigenfrequenz.

Bei der numerischen Berechnung der Wellenausbreitungsprobleme mit der FEM ist darauf zu achten, dass eine Mindestzahl von Knoten pro Wellenlänge eingehalten werden soll, die von den gewählten Formfunktionen abhängt. Für quadratische Formfunktionen sollten als Mindestmaß sechs Freiheitsgrade pro Wellenlänge gewählt werden [77]. Wird diese Schwelle unterschritten, kommt es zu beträchtlichen Abweichungen. Die notwendige Knotendichte erhöht sich, wenn sich die Kreisfrequenz ω in der Nähe einer Eigenfrequenz befindet. Eine Verwendung von Formfunktionen höherer Ordnung verringert die notwendige Anzahl von Freiheitsgraden. Die Lösung des untersuchten Problems zwischen zwei Eigenfrequenzen und in unmittelbarer Nähe einer Eigenfrequenz ist in Abb. 4.5 dargestellt. Hierbei werden jeweils acht Knoten pro Wellenlänge verwendet. Während die Lösung mit $p = 2$ insbesondere in der unmittelbaren Nähe der Eigenfrequenz stark von der analytischen Lösung abweicht, liefert die SEM-Berechnung mit $p = 6$ eine sehr gute Übereinstimmung.

Der Einfluss der numerischen Dispersion kann durch Verwendung von Formfunktionen hoher Ordnung begrenzt werden. Um dies zu demonstrieren, wird die Problemstellung in Gl. (4.3) für unterschiedliche Wellenzahlen gelöst. Die berechneten Wellenzahlen liegen jeweils zwischen zwei Eigenfrequenzen und die Konditionszahlen liegen für alle Ordnungen, auch für die höchste Wellenzahl und entsprechend hoher Anzahl an Elementen, deutlich

unter $\kappa_1 < 10^6$. Der Einfluss der Kondition des Gleichungssystems ist somit sehr gering. Die Anzahl an Elemente wird derart gewählt, dass für einen niedrigen Wert von kL ein Fehler von $\varepsilon_2 = 0.1\%$ resultiert. Der tatsächliche l_2 -Fehler in Abhängigkeit der Wellenzahl ist in der Abb. 4.6 dargestellt. Während die Verwendung von linearen Formfunktionen in einem sehr hohen Fehler von $\varepsilon_2 \approx 67\%$ für $k \approx 500\text{m}^{-1}$ resultiert, beträgt der Fehler für $p = 10$ lediglich $\varepsilon_2 \approx 0.4\%$.

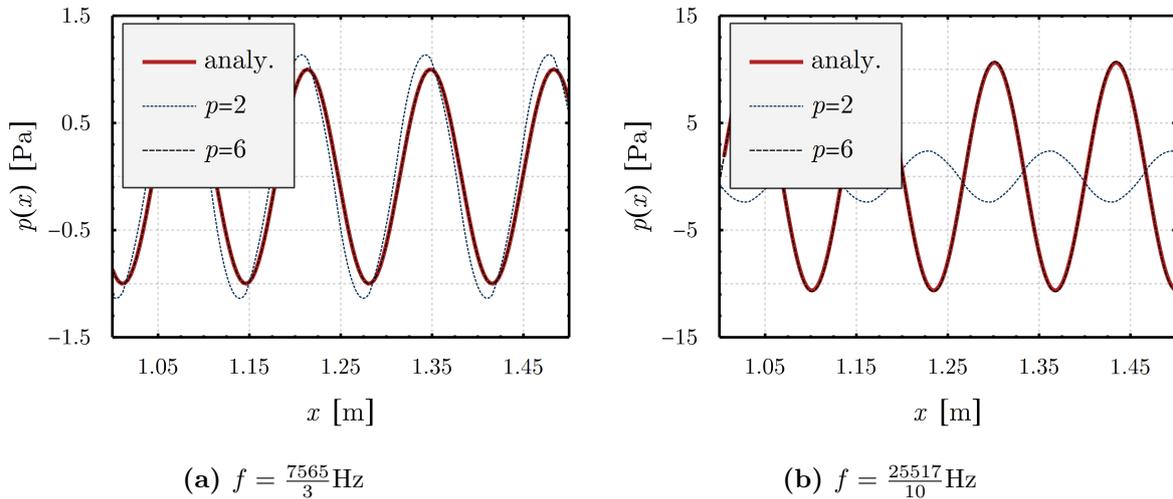


Abbildung 4.5: Druckverlauf für die FEM ($p = 2$) und die SEM ($p = 6$) bei gleicher Anzahl an Freiheitsgraden für eine Erregerfrequenz zwischen zwei Eigenfrequenzen ($f = \frac{7565}{3}$ Hz) und in unmittelbarer Nähe einer Eigenfrequenz ($f = \frac{25517}{10}$ Hz). Die analytische Lösung (analy.) wird mit der Gl. (4.4) berechnet.

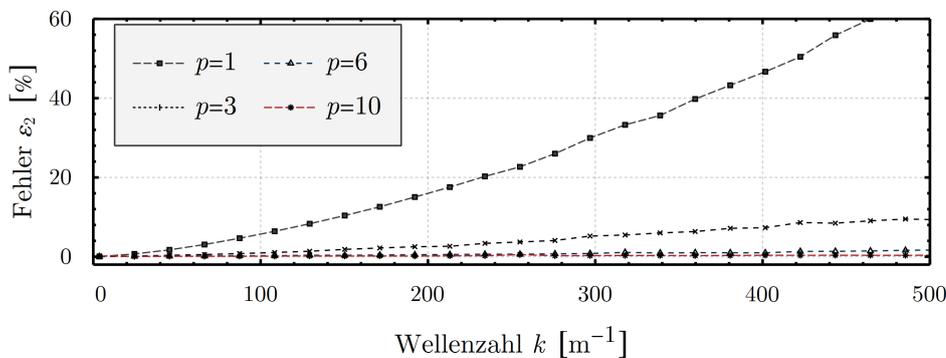


Abbildung 4.6: Auswirkungen der numerischen Dispersion für unterschiedliche Ordnungen p . Anhand des 1D Modellproblems soll abschließend noch verdeutlicht werden, dass die Verteilung der Stützstellen keine inhärent bessere Interpolation der Lösung zur Folge hat. Wird das betrachtete Problem in Gl. (4.3) nämlich mittels der SEM bzw. FEM diskretisiert und das sich ergebende Gleichungssystem analytisch exakt (also unter Verwendung von Bruchzahlen ohne numerische Fehler) gelöst, ergibt sich, unabhängig davon, ob ED- oder GLL-Elemente verwendet werden, das gleiche Ergebnis. Die verwendeten Formfunktionen müssen dazu ebenfalls analytisch exakt berechnet worden sein. Der Grund besteht

darin, dass sich die Elementmatrizen, und damit die Systemmatrizen, die unter Verwendung der ED- bzw. GLL-Formfunktionen erstellt werden, ineinander überführen lassen. Dies soll kurz an einem Beispiel demonstriert werden. Für eine Frequenz von $f = 100\text{Hz}$, $p(0) = 1$ und $p(3) = 0$ werden zwei gleichlange Elemente mit $p = 3$ zur Approximation der Lösung verwendet. Eine analytische Berechnung ist bspw. mit der Software WOLFRAM MATHEMATICA von Wolfram Research möglich [69], wenngleich die Berechnungsdauer natürlich um viele Größenordnungen höher ist als bei der numerischen Berechnung mit Maschinenpräzision.

Die VANDERMONDE-Matrix $\mathbf{V}_{I,II}$ lautet in diesem Fall

$$\mathbf{V}_{I,II} = \begin{bmatrix} \varphi_1^I(\xi_1^{II}) & \cdots & \varphi_1^I(\xi_{p+1}^{II}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{p+1}^I(\xi_1^{II}) & \cdots & \varphi_{p+1}^I(\xi_{p+1}^{II}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{100}(5+\sqrt{5}) & \frac{1}{100}(5-\sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \frac{9}{100}(5+3\sqrt{5}) & -\frac{9}{100}(-5+3\sqrt{5}) & 0 \\ 0 & -\frac{9}{100}(-5+3\sqrt{5}) & \frac{9}{100}(5+3\sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{100}(5-\sqrt{5}) & \frac{1}{100}(5+\sqrt{5}) & 1 \end{bmatrix},$$

wobei I die ED-Basis und II die GLL-Basis kennzeichnet, φ_i sind die jeweiligen Formfunktionen, und ξ_i sind die Koordinaten der Stützstellen der jeweiligen nodalen Basis. Die Elementsteifigkeitsmatrizen lauten mit $a_1 = 3\sqrt{5} + 5$ und $a_2 = 3\sqrt{5} - 5$:

$$\mathbf{k}_{ED} = \begin{bmatrix} \frac{37}{15} & -\frac{63}{20} & \frac{9}{10} & -\frac{13}{60} \\ -\frac{63}{20} & \frac{36}{5} & -\frac{99}{20} & \frac{9}{10} \\ \frac{9}{10} & -\frac{99}{20} & \frac{36}{5} & -\frac{63}{20} \\ -\frac{13}{60} & \frac{9}{10} & -\frac{63}{20} & \frac{37}{15} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{GLL} = \begin{bmatrix} \frac{26}{9} & -\frac{5a_1}{18} & \frac{5a_2}{18} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{5a_1}{18} & \frac{50}{9} & -\frac{25}{9} & \frac{5a_2}{18} \\ \frac{5a_2}{18} & -\frac{25}{9} & \frac{50}{9} & -\frac{5a_1}{18} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5a_2}{18} & -\frac{5a_1}{18} & \frac{26}{9} \end{bmatrix}.$$

Mittels dem Zusammenhang

$$\mathbf{k}_{ED} = \mathbf{V}_{ED,GLL} \mathbf{k}_{GLL} \mathbf{V}_{ED,GLL}^T \text{ bzw. } \mathbf{k}_{GLL} = \mathbf{V}_{GLL,ED} \mathbf{k}_{ED} \mathbf{V}_{GLL,ED}^T$$

lassen sich die beiden Elementsteifigkeitsmatrizen ineinander überführen. Für die Elementmassenmatrizen gilt der gleiche Zusammenhang. Während also die Wahl von bspw. wellenbasierten Formfunktionen durchaus eine bessere Approximation der exakten Lösung des betrachteten Problems in Gl. (4.3) liefern kann, ist es bei analytischer Berechnung unerheblich, ob ED- oder GLL-Formfunktionen verwendet werden. Bei näherungsweise Berechnung ergeben sich aufgrund der weit besseren numerischen Eigenschaften der GLL-Formfunktionen jedoch die vorher bereits genannten Vorteile.

2D akustisches Problem mit Dirichlet-Randbedingungen

Im Folgenden wird ein 2D Problem der Akustik unter DIRICHLET-Randbedingungen be-

trachtet und die numerische Lösung mit der analytischen Lösung verglichen. Das Problem wird durch die HELMHOLTZ-Gleichung mit DIRICHLET-Randbedingungen auf allen Rändern (Abb. 4.7) beschrieben:

$$\begin{aligned}
 \Delta p + k^2 p &= 0 && \text{in } \Omega, \\
 p &= f_w(y) && \text{auf } \Gamma_w, \\
 p &= f_e(y) && \text{auf } \Gamma_e, \\
 p &= f_s(x) && \text{auf } \Gamma_s, \\
 p &= f_n(x) && \text{auf } \Gamma_n.
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Das Problem kann mittels einer von TADI [128] entwickelten semi-analytischen Methode, die auf der Verwendung orthogonaler Funktionen basiert, mit hoher Genauigkeit gelöst werden. Der Lösungsweg wird im Anhang A.2 skizziert.

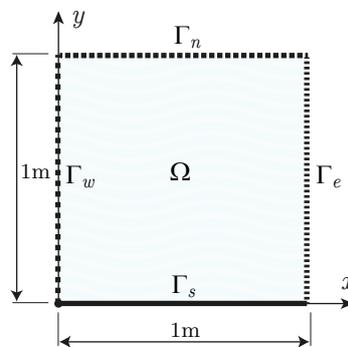


Abbildung 4.7: Modellproblem mit DIRICHLET-Randbedingungen.

Zur Ermittlung der numerischen Näherungslösung wird das Gebiet strukturiert vernetzt (siehe Abb. 4.8). Eine strukturierte Vernetzung mit rechteckigen Elementen erlaubt nicht nur eine effiziente Netzgenerierung, sondern hat, unter der Voraussetzung eines Seitenverhältnisses der Elemente nahe Eins, auch vorteilhafte Auswirkungen auf die Kondition der Systemmatrix. Jedoch ist eine strukturierte Vernetzung nur in Ausnahmefällen möglich. So wird ein verhältnismäßig einfach aufgebautes Gebiet zur Vernetzung vorausgesetzt und freie und kommerzielle Software erlauben oftmals keine strukturierte Vernetzung, obwohl diese prinzipiell möglich wäre. So erlaubt der Netzgenerator der FEM-Software COMSOL Multiphysics 5.1 lediglich eine strukturierte Vernetzung mit Viereckselementen in 2D, während eine strukturierte Vernetzung oder die Verwendung von Hexaederelementen in 3D nicht möglich ist. Für die Berechnungen in dieser Arbeit werden auch in 3D Hexaederelemente verwendet und, wenn möglich, eine strukturierte Vernetzung vorgenommen. Im Übrigen ist die Verwendung von Viereckselementen im Allgemeinen auch vorteilhaft gegenüber der Verwendung von Dreieckselementen [138].

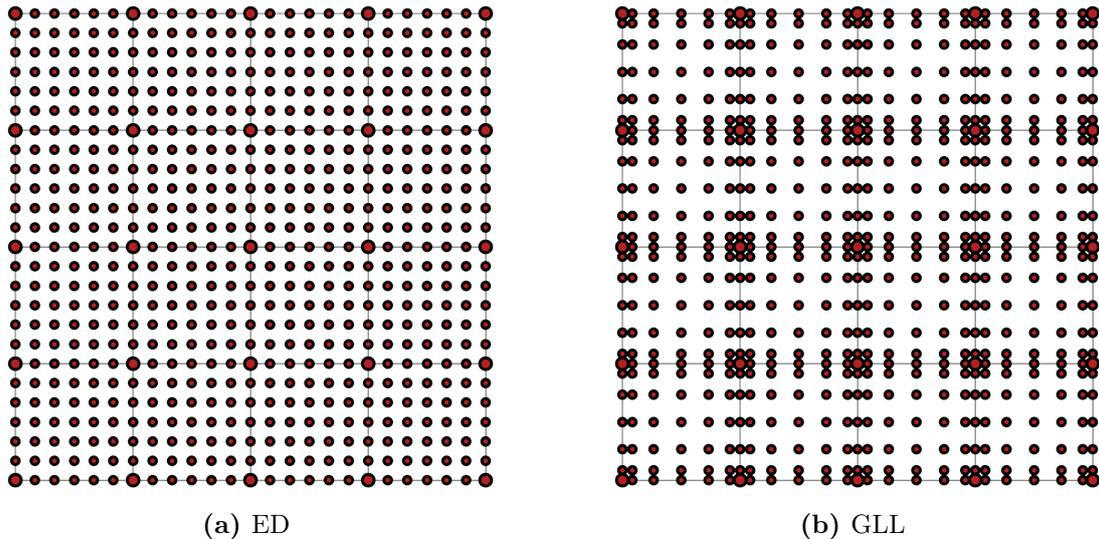


Abbildung 4.8: Strukturiertes Netz mit ED- und GLL-Elementen.

In der Abb. 4.9 ist die für hohe Ordnungen p der Formfunktionen wesentlich bessere Kondition der Systemmatrix bei Verwendung von GLL-Elementen gegenüber der Verwendung von ED-Elementen dargestellt. So ist mit der Verwendung von ED-Formfunktionen der Ordnung $p = 10$ mit einem zusätzlichen Verlust der Genauigkeit von etwa vier signifikanten Stellen zu rechnen. Die Anzahl der Freiheitsgrade, hier etwa 2.5×10^5 , hat jedoch vernachlässigbaren Einfluss. So verbessert sich die Kondition, sowohl für ED- als auch GLL-Elemente, bei geringerer Anzahl von Freiheitsgraden nur unwesentlich. In der Abb. 4.10 ist der zugehörige Fehler für eine Wellenzahl $k = 37\text{m}^{-1}$ in Abhängigkeit von der verwendeten Ordnung und Anzahl von Freiheitsgraden dargestellt und in der Abb. 4.11 die benötigte Berechnungszeit für das lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit des Fehlers. Die angegebenen Zeiten werden auf einer Workstation mit Dual Intel Xeon E5-2637 CPUs und 64 GB Hauptspeicher gemessen. Der Fehler verringert sich erwartungsgemäß exponentiell mit steigender Ordnung der Formfunktionen p . Für eine konstante Fehlerschranke $\varepsilon_2 = 10^{-3}\%$ wird für die Ordnung $p = 2$ eine um zwei Größenordnungen höhere Anzahl von Freiheitsgraden benötigt. Der Vorteil erhöht sich, erkennbar an der unterschiedlichen Steigung der Fehlergeraden, mit sinkender Fehlerschranke. Die Berechnungszeit verringert sich insbesondere bei einer niedrigen Fehlerschranke sehr stark durch die Verwendung von GLL-Formfunktionen höherer Ordnung ($p = 8$ oder $p = 10$). Darüber hinaus verringert sich durch die geringere Anzahl notwendiger Freiheitsgrade auch der Speicherbedarf für die Berechnung. Für eine im Ingenieurwesen ausreichende Fehlerschranke ergibt sich jedoch kein signifikanter Effizienzvorteil bei der Verwendung von Ordnungen größer als $p = 6$. Es ist hier lediglich die Berechnungszeit für die Lösung des linearen Gleichungssystems angegeben. Die Berechnung der Elementmatrizen und die eventuell benötigten Transformationen sind jedoch bei Formfunktionen höherer Ordnung weit zeitaufwendiger. Daher ergibt sich nicht zwangsläufig eine Steigerung der Berechnungseffizienz, da die even-

tuellen Vorteile bei der Lösungsdauer des linearen Gleichungssystems unter Umständen überkompensiert werden können. Bei der Verwendung von strukturierten Netzen, in denen die Elementmatrizen identisch sind, entfällt jedoch die Neuberechnung der Elementmatrizen und es kann durch die Verwendung höherer Ordnung auch die Gesamteffizienz der Berechnung erhöht werden.

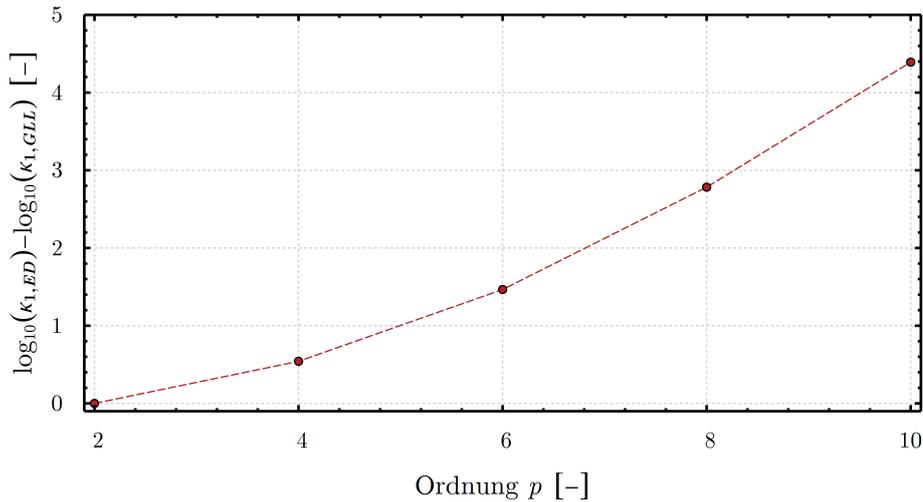


Abbildung 4.9: Differenz der Konditionszahl bei Verwendung von ED- und GLL-Elementen. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist konstant $N \approx 250000$.

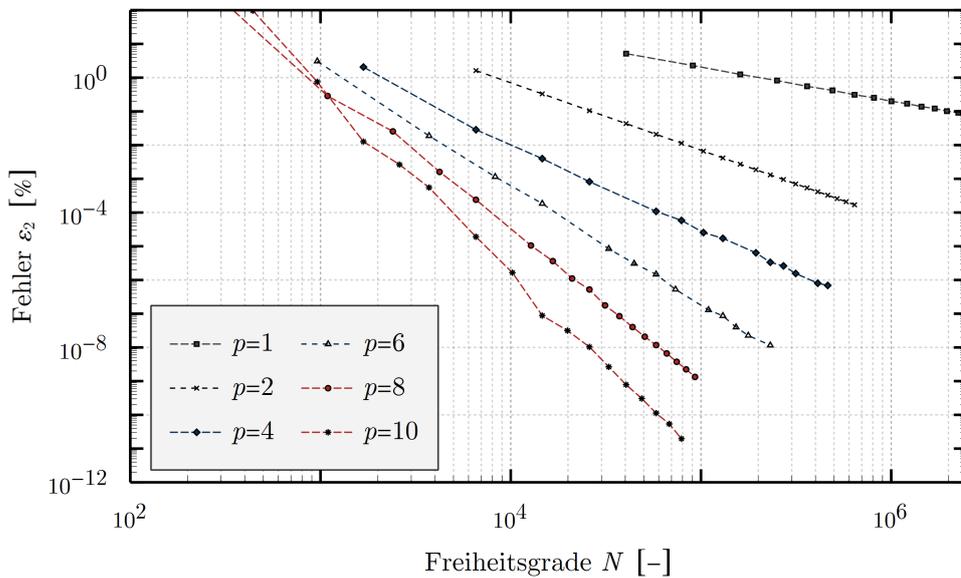


Abbildung 4.10: Fehler der SEM gegenüber semi-analytischer Lösung in Abhängigkeit von dem Polynomgrad p und den Freiheitsgraden N .

Für die untersuchte Problemstellung in Gl. (4.5) soll noch ein Vergleich mit der kommerziellen FEM-Software COMSOL Multiphysics vorgenommen werden. In der Abb. 4.12 ist der Verlauf des Fehlers für $y = 0.5\text{m}$ in Abhängigkeit der x -Koordinate für eine Wellenzahl von $k = 18.7\text{m}^{-1}$ dargestellt. Die Lösung wird mit der SEM für unterschiedliche Ordnungen

p und der Software `COMSOL Multiphysics` bei einer Variation der Elementzahl berechnet. Hierbei ist die Anzahl der SEM-Elemente konstant $N_e = 16$ und die Ordnung der Formfunktionen in `COMSOL Multiphysics` ist $p = 2$. Der Fehler der SEM mit $p = 10$ liegt mehrere Größenordnungen unter dem Fehler von `COMSOL Multiphysics` mit $N_e = 160000$ Elementen. Die Anzahl von Freiheitsgraden für die SEM-Berechnung beträgt $N = 1681$ für $p = 10$, in der FEM-Berechnung mit $N_e = 160000$ jedoch $N = 641501$. Bei ähnlichem Fehlerverlauf sind also 350 mal mehr Freiheitsgrade in der FEM-Berechnung notwendig.

Der Fehler ist hierbei definiert über

$$\Delta p = 100 \times \left| \frac{p_{ref} - p_{SEM,FEM}}{p_{ref}} \right|, \quad (4.6)$$

wobei p_{ref} die analytische Referenzlösung ist.

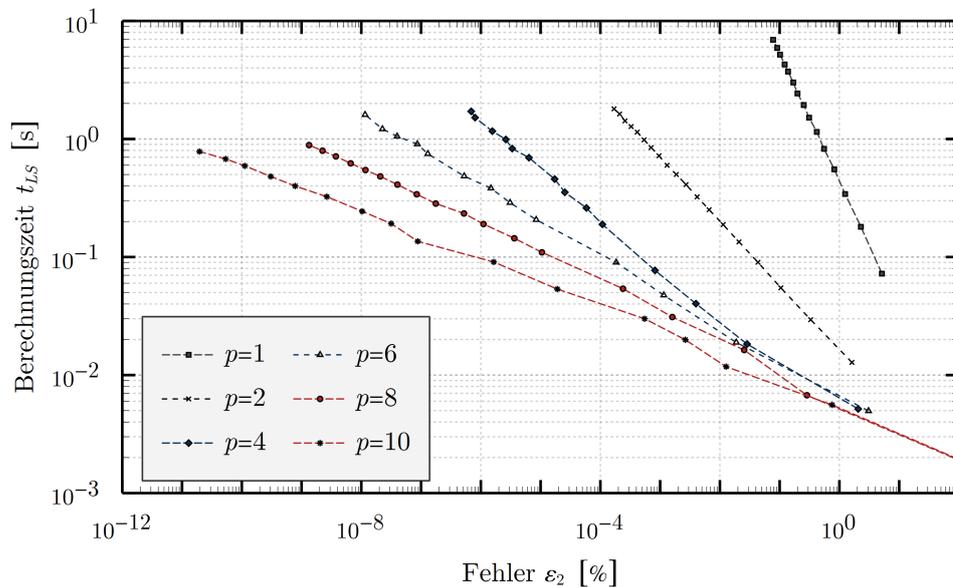


Abbildung 4.11: Berechnungszeit des linearen Gleichungssystems der SEM in Abhängigkeit von dem Polynomgrad p und dem Fehler.

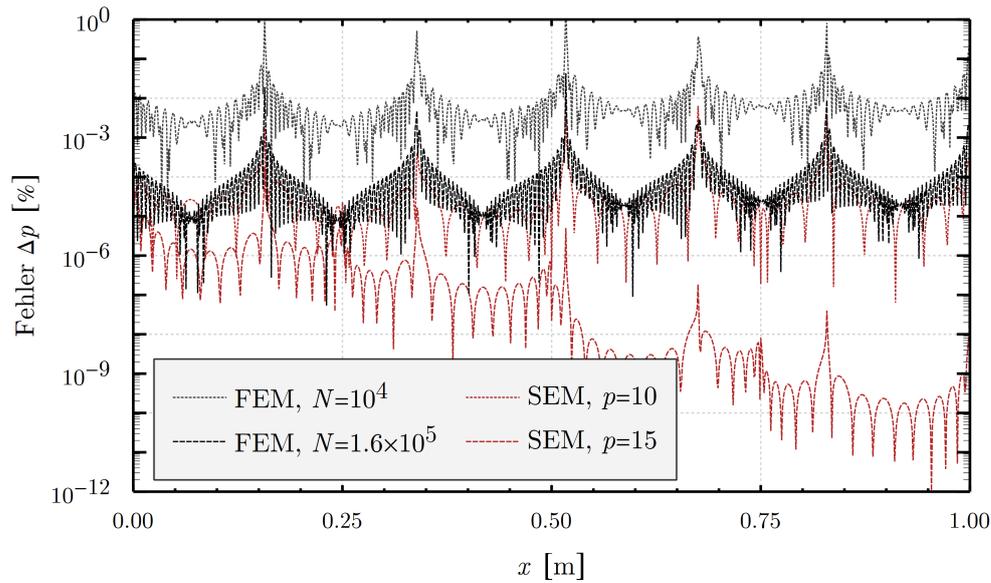


Abbildung 4.12: Vergleich zwischen SEM und kommerzieller Software COMSOL Multiphysics mit $p = 2$.

2D akustisches Problem mit Neumann-Randbedingungen

Prinzipiell gibt es für ein 2D akustisches Problem mit DIRICHLET-Randbedingungen und NEUMANN- bzw. ROBIN-Randbedingungen keine Unterschiede bezüglich der Effizienz der SEM. Bei praxisrelevanten Problemen der Innenraumakustik kommen DIRICHLET-Randbedingungen üblicherweise nicht vor, sondern Wände werden oft als schallhart angenommen. Daher wird zur Verifizierung der SEM noch das in der Abb. 4.13 dargestellte Modellproblem untersucht, das durch die folgende HELMHOLTZ-Gleichung und die Randbedingungen beschrieben wird:

$$\begin{aligned}
 \Delta p + k^2 p &= 0 && \text{in } \Omega, \\
 p &= p_0 && \text{auf } \Gamma_s, \\
 \nabla p &= 0 && \text{auf } \Gamma_n.
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

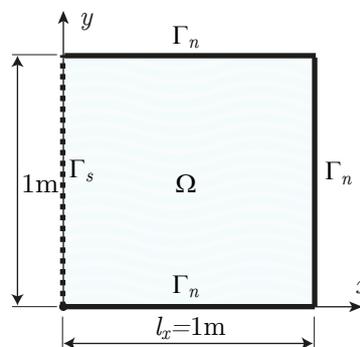


Abbildung 4.13: Modellproblem mit NEUMANN-Randbedingung auf Γ_n .

Die analytische Lösung für die Verteilung des Schalldrucks in einem Rechteck mit schallharter Begrenzung auf den Rändern Γ_n kann direkt aus dem 1D Problem $\Delta p + k^2 p = 0$ mit den Randbedingungen $p(0) = p_0$ und $\frac{dp}{dx}|_{x=l_x} = 0$ abgeleitet werden:

$$p(x, y) = p_0 \cos(kl_x - kx) \sec(kl_x). \quad (4.8)$$

Bezüglich der Kondition der Systemmatrix gibt es keine prinzipiellen Unterschiede zur vorherigen Problemstellung. Gleiches gilt für den Verlauf der Fehlerkurven in Abhängigkeit von der Ordnung und Anzahl von Freiheitsgraden. Anhand des Modellproblems in Gl. (4.7) wird der Vorteil der Verwendung der GLL-Formfunktionen bezüglich der erreichbaren Genauigkeit in der Abb. 4.14 verdeutlicht. So ist diese bei der ED-Verteilung der Stützstellen der Formfunktionen aufgrund der schlechteren Kondition der Systemmatrix niedriger und der Fehler kann einen Schwellenwert trotz steigender Anzahl von Freiheitsgraden nicht unterschreiten. Die Ergebnisse decken sich hier qualitativ mit denen aus der Literatur [93]. Bei den GLL-Formfunktionen ergibt sich bei Ordnungen $p < 10$ für die meisten Problemstellungen kein signifikanter Zugewinn an Genauigkeit gegenüber der Verwendung der ED-Formfunktionen. Bei Problemstellungen jedoch, die eine inhärent schlechte Kondition der Systemmatrix aufweisen, führt das bessere numerische Verhalten der GLL-Formfunktionen zu einer genaueren Lösung.

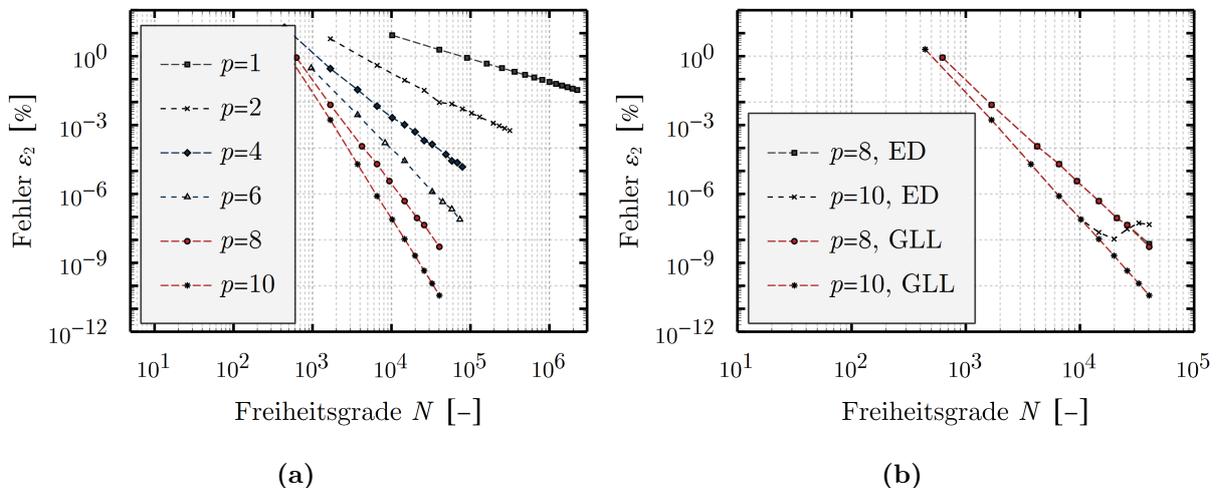


Abbildung 4.14: (a) Fehler der Berechnung gegenüber semi-analytischer Lösung in Abhängigkeit von der Ordnung p (GLL-Formfunktionen) und den Freiheitsgraden für eine Wellenzahl $k = 27.7\text{m}^{-1}$. (b) Vergleich des Fehlers bei Verwendung von ED- und GLL-Formfunktionen.

4.2.2 Beispiele im Zeitbereich

Wie im Abschnitt 3.2.3 und Abschnitt 3.2.5 erläutert, können sich für die SEM gewisse Vorteile hinsichtlich der Effizienz der Berechnung bei Verwendung eines expliziten Zeit-

integrationsverfahrens ergeben. Voraussetzung hierfür ist, dass eine Berechnung der Elementmassenmatrizen mittels LOBATTO-Quadratur erfolgt. Durch die Unterintegration entsteht zwar ein Fehler gegenüber der exakten GAUSS-LEGENDRE-Quadratur, dieser ist jedoch in üblichen Problemstellungen des Ingenieurwesens vernachlässigbar.

Generell ist die Einhaltung der Stabilitätsbedingung für ein explizites Zeitintegrationsverfahren, also die Wahl eines hinreichend kleinen Zeitschritts Δt , zwingend notwendig, damit die Lösung nicht instabil wird und über alle Grenzen wächst. Dennoch kommt es auch bei hinreichend kleinen Zeitschritten zu Effekten der numerischen Dispersion und die Lösung wird im Zeitverlauf verschmiert. Die Wahl von Formfunktionen hoher Ordnung in der SEM verbessert dieses Verhalten und es kann eine niedrigere Anzahl von Freiheitsgraden gewählt werden, ohne dass die Lösung verschmiert wird. In der Abb. 4.15 sind die Ergebnisse für verschiedene Zeitschritte bei der Lösung der 1D skalaren Wellengleichung im Zeitbereich

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0 \quad (4.9)$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$p(0, t) = p_Q(t), \quad p(l, t) = 0, \quad p(x, 0) = 0, \quad \dot{p}(x, 0) = 0$$

sowie einem Erregersignal

$$p_Q(t) = \begin{cases} p_0 \sin(\omega t) & \text{falls } t \leq \frac{2\pi}{\omega} \\ 0 & \text{falls } t > \frac{2\pi}{\omega} \end{cases} \quad (4.10)$$

dargestellt. Die Schallgeschwindigkeit beträgt $c = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und die Erregerfrequenz beträgt $f = 1000 \text{ Hz}$. Die numerische Lösung bleibt dabei für höhere Ordnungen p der Formfunktionen deutlich stabiler, während die Lösung bei der Verwendung linearer und quadratischer Formfunktionen in der Standard-FEM bei der gewählten Anzahl von Freiheitsgraden völlig unbrauchbar wird. Die Anzahl von Freiheitsgraden ist dabei für jedes p identisch, die notwendige Zeitschrittweite muss mit steigender Ordnung jedoch etwas gesenkt werden.

Der Vorteil der SEM gegenüber der Standard-FEM wird in der Abb. 4.16 nochmals verdeutlicht. Während für $p = 1$ und $p = 2$ die Amplituden im zeitlichen Verlauf immer kleiner werden, bleiben diese bei Verwendung der SEM weitgehend konstant. Weiterhin sind die unphysikalischen Oszillationen außerhalb der akustischen Welle deutlich geringer.

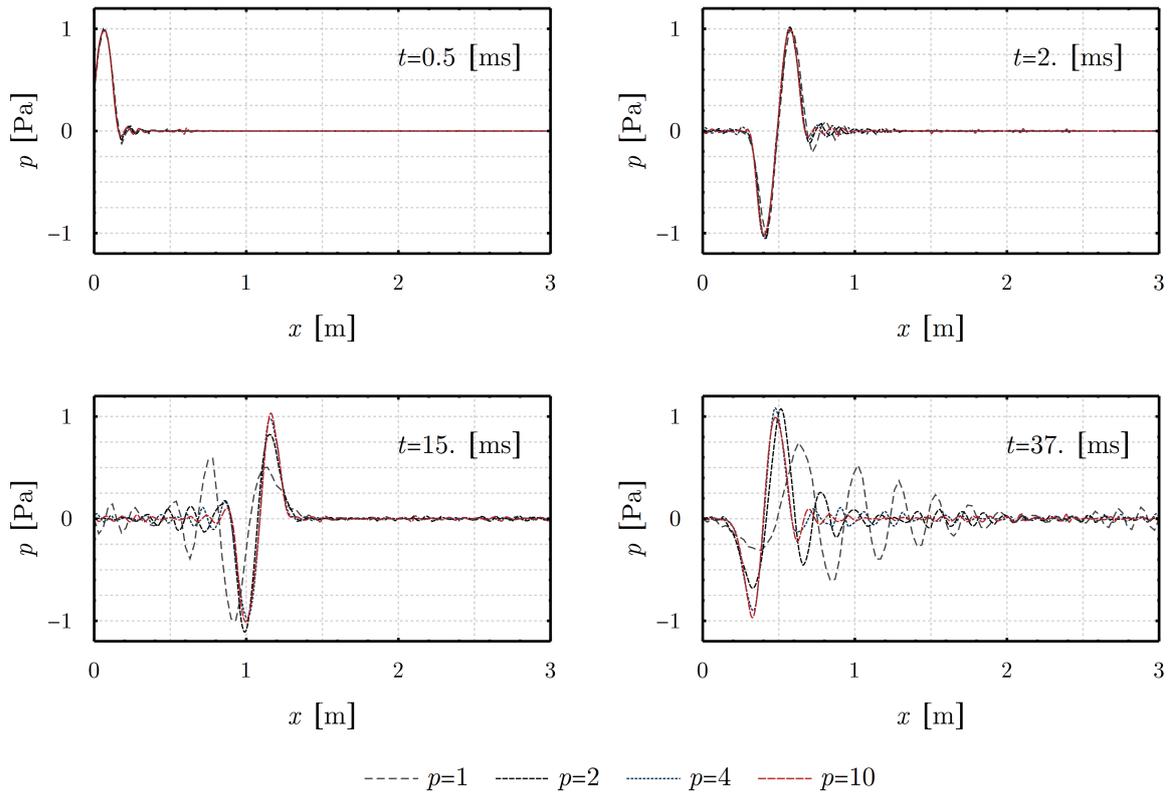


Abbildung 4.15: Vergleich der Lösungen im Zeitbereich für verschiedene Ordnungen der Formfunktionen für explizites Zeitintegrationsverfahren und unterschiedliche Zeitpunkte t .

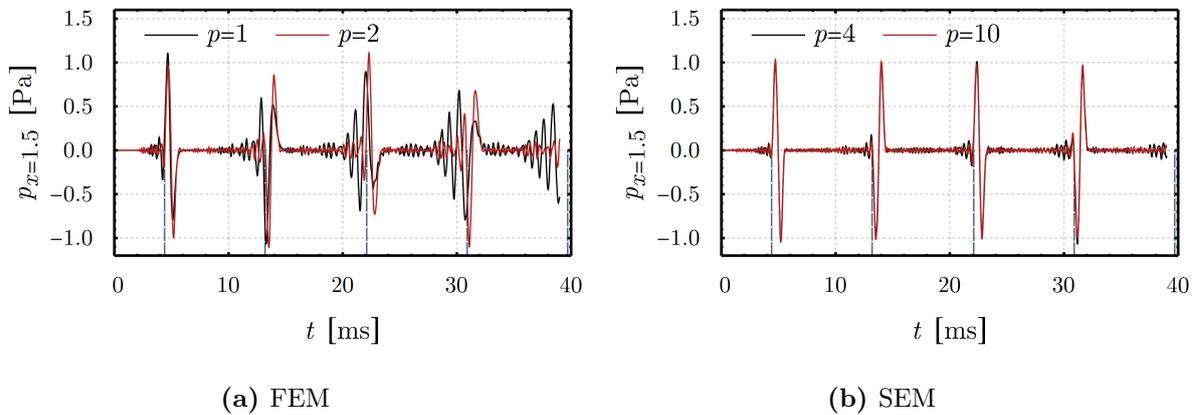


Abbildung 4.16: Der Druckverlauf bei $x = 1.5$ m bei Berechnung mit der (a) FEM und (b) SEM. Die blau gestrichelten Linien markieren die Zeitpunkte, zu denen die Welle jeweils den Ort $x = 1.5$ passiert.

Es wird nun das 2D Problem aus Abb. 4.13, allerdings mit $\nabla p = 0$ auf Γ_s , betrachtet. Die Anfangsbedingungen sind $p(0) = 0$ und $\dot{p}(0) = 0$ in Ω . Die Schallgeschwindigkeit im Fluid beträgt $c = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. In der Mitte des quadratischen Gebiets wird ein Impuls der Form von Gl. (4.10) mit einer Frequenz $f = 5000 \text{ Hz}$ als Erregung verwendet. Die Abb.

4.17 zeigt die berechnete Druckverteilung für einige Zeitpunkte der Berechnung.

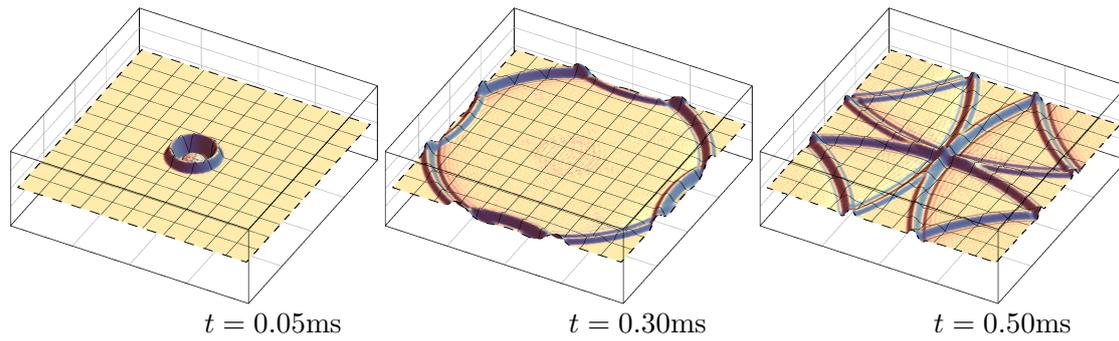


Abbildung 4.17: Druckverteilung für verschiedene Zeitpunkte.

Die numerische Integration mittels LOBATTO-Quadratur führt dazu, dass sich bei ungekoppelten Problemstellungen der Lösungsvektor des nächsten Zeitschritts $\mathbf{u}^{(t+1)}$ in Gl. (3.21) durch einfache Division lösen lässt, da lediglich die Hauptdiagonale der Koeffizientenmatrix mit Nicht-Null-Einträgen belegt ist. Darüber hinaus ergeben sich durch die hohe Anzahl von Null-Einträgen in der Systemmassenmatrix auch gewisse Effizienzvorteile bei der Einarbeitung der Randbedingungen, sowie bei der Berechnung des Vektors $(2\mathbf{M} - \Delta t^2 \mathbf{K}) \mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{M} \mathbf{u}^{(t-1)}$, da weniger numerische Operationen durchgeführt werden müssen. Ein direkter Vergleich für die Ordnungen $p = 3$ und $p = 10$ ist beispielhaft in der Tab. 4.2 angegeben. Hierbei sind t_{LS} , t_{RHS} und t_{RB} jeweils die Zeit zur Lösung des Gleichungssystems, zur Berechnung der rechten Seite des Gleichungssystems und zur Einarbeitung der Randbedingungen.

In der Abb. 4.18 wird in Abhängigkeit von der Anzahl an Freiheitsgraden N die Zeit zur Lösung des Gleichungssystems t_{LS} unter Verwendung der GAUSS-LEGENDRE-Quadratur und LOBATTO-Quadratur der Elementmassenmatrizen verglichen. Für einige Werte der Freiheitsgrade der Berechnung wird darüber hinaus für die GAUSS-LEGENDRE-Quadratur der prozentuale Anteil von Nicht-Null-Einträgen (englisch: *Nonzero entry, NZE*) angegeben. Da mit der LOBATTO-Quadratur nur die Hauptdiagonale der Systemmatrix belegt ist, ergibt sich die Anzahl von Nicht-Null-Einträgen aus $1/N$.

Tabelle 4.2: Berechnungszeiten in einem Zeitschritt für GAUSS-LEGENDRE-Quadratur (GL) und LOBATTO-Quadratur (LOB).

	Δt [s]	t_{LS} [s]	t_{RHS} [s]	t_{RB} [s]	Δt [s]	t_{LS} [s]	t_{RHS} [s]	t_{RB} [s]
	$p = 3, N = 5.9 \cdot 10^3$				$p = 10, N = 6.2 \cdot 10^4$			
GL	$3.0 \cdot 10^{-7}$	0.0461	0.0007	0.026	$5.0 \cdot 10^{-8}$	2.759	0.028	1.453
LOB	$5.0 \cdot 10^{-7}$	0.0005	0.0004	0.002	$5.0 \cdot 10^{-8}$	0.007	0.015	0.027

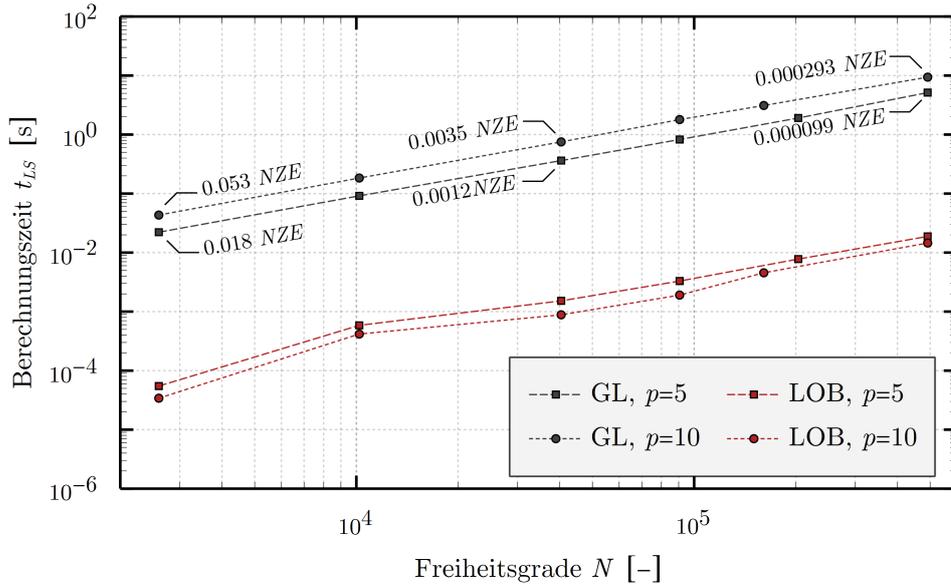


Abbildung 4.18: Zeitdauer t_{LS} zur Lösung des linearen Gleichungssystems eines ungekoppelten akustischen Problems bei der Verwendung von GAUSS-LEGENDRE Quadratur (GL) und LOBATTO-Quadratur (LOB).

4.3 Elastodynamische Probleme

4.3.1 Beispiele im Frequenzbereich

Für die numerische Berechnung der Wellenausbreitung in einem elastischen Festkörper werden die Ergebnisse der SEM durch einen Vergleich mit der kommerziellen Software COMSOL Multiphysics verifiziert. Das betrachtete Modellproblem, ein fest eingespanntes 2D Gebiet (Werkstoff Beton, $E = 25\text{GPa}$, $\rho = 2300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\nu = 0.2$) mit kreisrunden Aussparungen im ebenen Verzerrungszustand, ist in der Abb. 4.19 dargestellt. Die Bestimmungsgleichungen und Randbedingungen lauten:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \omega^2 \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_e, \\
 \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{auf } \Gamma_u, \\
 \mathbf{f} &= \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_f.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Eine zeitabhängige Verschiebung $\hat{u}_0 e^{i\omega t}$ entspricht hierbei der dynamischen Verschiebung u_0 im Frequenzbereich (siehe Anhang A.1). In der Abb. 4.21b ist die Lösung im Frequenzbereich für $f = 1000\text{Hz}$ und $u_0 = 0.001\text{m}$ dargestellt. Damit keine Verwechslung mit einer statischen Problemstellung entsteht, ist die Verschiebung als zeitabhängige Größe eingetragen. Während bei der 2D akustischen Problemstellung im Abschnitt 4.2 ein struktu-

riertes Netz verwendet wurde, wird das Gebiet hier wegen der komplexen Geometrie unstrukturiert vernetzt. Zur Erstellung des Netzes wird die Software **COMSOL Multiphysics** verwendet, die das Gebiet in Viereckselemente zerlegt. Das Netz kann dann in die SEM importiert werden, wobei die Koordinaten der Eckpunkte der Elemente als *Masterknoten* die lineare Berandung der Elemente definieren. Innerhalb der Elemente werden dann die inneren *Slaveknoten* nach der GLL-Verteilung generiert (Abb. 4.21). Eine ähnliche Vorgehensweise wurde in der Arbeit von SCHULTE [114] verwendet, um die SEM zur effizienten Berechnung der Ausbreitung von LAMB-Wellen in dünnwandigen Schalen einzusetzen.

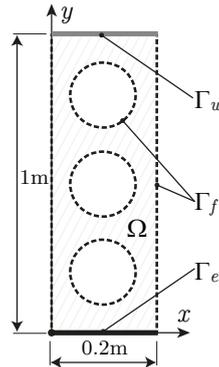


Abbildung 4.19: Modellproblem für elastische Wellenausbreitung.

Auch bei unstrukturiertem Netz und einer Problemstellung in der Elastodynamik ergibt sich erwartungsgemäß eine exponentielle Verringerung des Fehlers bei steigender Ordnung der Formfunktionen (siehe Abb. 4.20b). Die Anzahl der Freiheitsgrade ist nicht für jede Ordnung konstant, da das gleiche Netz verwendet wird, um mögliche Einflüsse der Vernetzung auf den Berechnungsfehler auszuschließen. Ebenfalls ist in Abb. 4.20a die bessere Kondition der Systemmatrix bei der Verwendung der GLL-Elemente dargestellt.

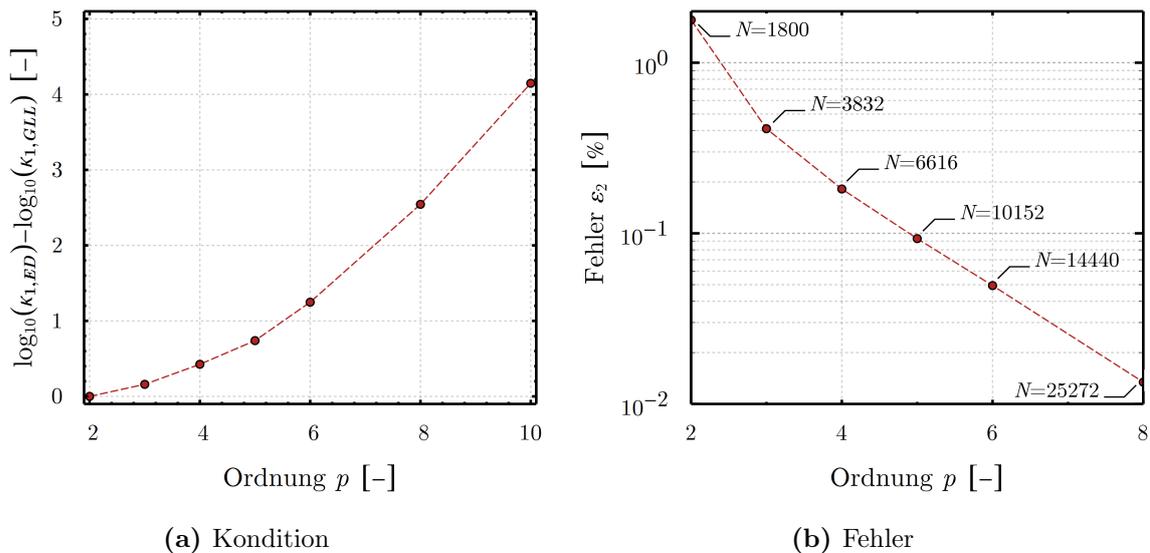


Abbildung 4.20: (a) Kondition der Systemmatrix bei ED- und GLL-Elementen. (b) Verlauf des Fehlers mit der Variation von p . Die Anzahl an Freiheitsgraden N ist ebenfalls eingetragen.

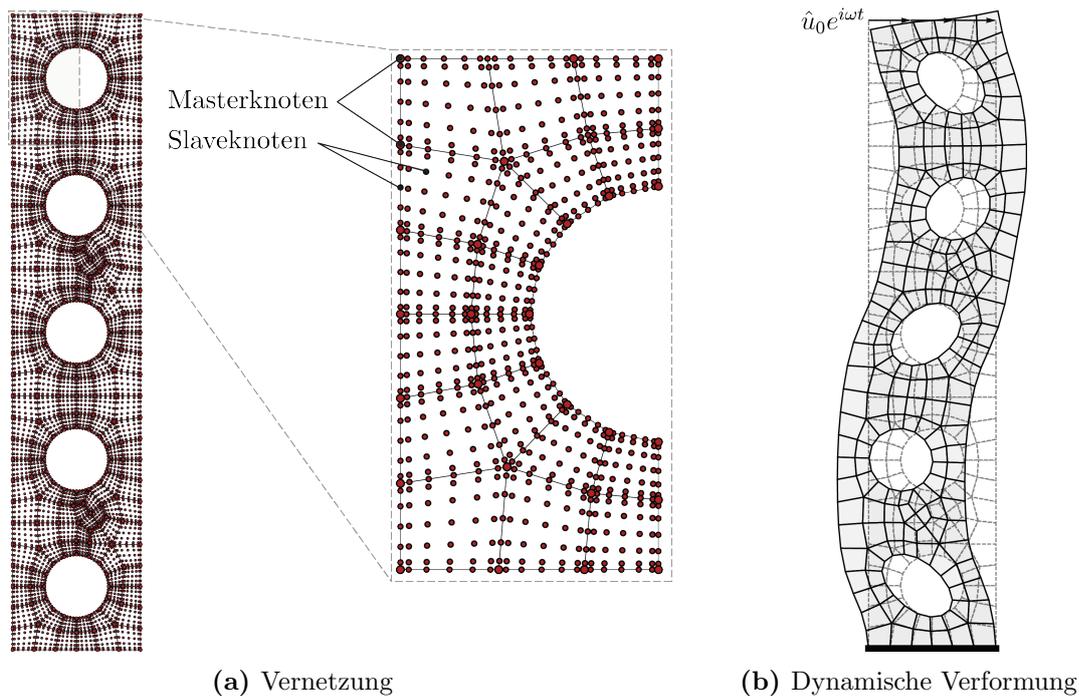


Abbildung 4.21: (a) Viereckselemente (schwarze Umrandung) mit eingefügten Stützknoten (rote Punkte) nach der GLL-Verteilung zur Erstellung eines SEM-Netzes sechster Ordnung. (b) Verformung der Struktur unter Einwirkung einer dynamischen Verschiebung am oberen Rand mit der Frequenz $f = 1000\text{Hz}$.

Berechnung der Eigenfrequenzen einer Struktur

Neben der Berechnung der Schalldämmung über die FSI, kann die Schalldämmung für einfache Strukturen auch direkt über die dynamische Plattendifferentialgleichung bestimmt werden. MEHRA [79] hat dazu ein Verfahren entwickelt, das das Schalldämm-Maß für einschalige homogene Bauteile mit endlichen Abmessungen und verschiedenen Randbedingungen berechnen kann. Das Verfahren basiert auf der Ermittlung der Eigenschwingungen einer Platte nach der KIRCHHOFF'schen Plattentheorie, welche mittels der FEM bestimmt werden. Ein ähnlicher Weg wurde in der Arbeit von AOKI et al. [4] verwendet, wobei hier geriffelte Paneele untersucht wurden. Um zu zeigen, dass auch bei derartigen Verfahren die Anwendung der SEM gewisse Vorteile bezüglich der Genauigkeit der ermittelten Eigenfrequenzen bringen kann, werden hier beispielhaft die Eigenfrequenzen einer 3D Struktur mit der SEM ermittelt.

Werden für eine Struktur die äußeren Lasten zu Null gesetzt, ergibt sich die Eigenwertgleichung

$$(\mathbf{K}_S - \omega^2 \mathbf{M}_S) \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (4.12)$$

Die i Eigenkreisfrequenzen ω_i lassen sich dann aus der Bedingungsgleichung

$$\det(\mathbf{K}_S - \omega^2 \mathbf{M}_S) = 0$$

ermitteln, wobei die Anzahl der Eigenkreisfrequenzen im Allgemeinen der Anzahl der Freiheitsgrade entspricht.

Es wird ein Hexaeder untersucht, der strukturiert vernetzt wird. Eine Fläche der Struktur ist unverschieblich gelagert, alle anderen Flächen sind frei. In der Abb. 4.22 ist der prozentuale Fehler gegenüber einer Referenzlösung für die ersten hundert Eigenkreisfrequenzen mit unterschiedlicher Ordnung der Formfunktionen dargestellt. Die Anzahl der Freiheitsgrade beträgt für alle Ordnungen $N = 3993$. Die Referenzlösung wurde mit der kommerziellen Software COMSOL Multiphysics mit sehr hoher Genauigkeit ($N = 3.2 \times 10^5$) erstellt. Der Fehler für die jeweilige Eigenfrequenz sinkt spektral mit steigender Ordnung der Formfunktionen ab und liegt für die GLL-Strukturelemente mit der Ordnung $p = 5$ etwa drei Größenordnungen unter dem Fehler, der sich bei der Verwendung von Formfunktionen mit der Ordnung $p = 1$ ergibt. Die Berechnungszeit erhöht sich jedoch aufgrund der dichter besetzten Matrizen.

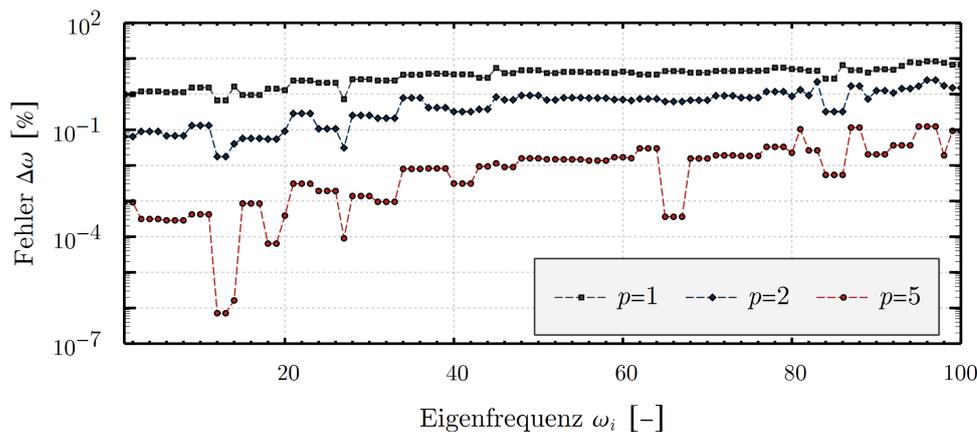


Abbildung 4.22: Fehler der mittels SEM ermittelten Eigenfrequenzen gegenüber der Referenzlösung.

4.3.2 Beispiele im Zeitbereich

Betrachtet wird die in der Abb. 4.23a dargestellte mehrschichtige 2D Struktur mit kreisförmigen Aussparungen im ebenen Verzerrungszustand. Das Problem wird beschrieben durch Gl. (2.24) und den Randbedingungen in Gl. (4.11), jedoch wird auf Γ_u eine harmonische Verschiebung $\mathbf{u}(t) = [u_0 \ 0]^T \sin(\omega t)$ vorgegeben. Die Anfangsbedingungen sind $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$ und $\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}$ in Ω . In den Abb. 4.23b und 4.23c sind die unstrukturierte Vernetzung und das Verschiebungsfeld für einige Zeitpunkte dargestellt. Die durch die Schichtung bedingten unterschiedlichen Charakteristiken der Wellenausbreitung in den einzelnen Materialien werden hier anschaulich dargestellt [96]. Derartige Problemstellungen und auch Probleme der Innenraumakustik lassen sich mit der SEM unter Verwendung einer expliziten Zeitintegration besonders effizient berechnen. Während die Größe der Gleichungssysteme

in der Standard-FEM durch den verfügbaren Arbeitsspeicher begrenzt ist, können in der SEM Probleme mit einer deutlich höheren Anzahl an Freiheitsgraden effizient berechnet werden. Wie bereits erläutert ist das Stabilitätskriterium bei der Wahl eines expliziten Zeitintegrationsschemas unbedingt einzuhalten. Hieraus ergibt sich dann eine wesentlich größere Anzahl von Zeitschritten als bei einem impliziten Verfahren. In der Arbeit von HENNINGS et al. [55] wurde für die untersuchte Problemstellung der Wellenausbreitung in dünnwandigen Strukturen angegeben, dass die Wahl des expliziten Verfahrens dennoch nur etwa lediglich die Hälfte der Berechnungszeit eines impliziten Verfahrens benötigt. SCHULTE [114] vergleicht die Berechnungszeit bei unterschiedlicher Wahl der Ordnung der Formfunktionen. Da sich bei hoher Ordnung die Knoten an den Rändern konzentrieren und die notwendige Zeitschrittweite daher stark absinkt, soll nach der Darstellung des Autors die Ordnung $p = 10$ nicht überschritten werden. Im Allgemeinen wird eine Ordnung von $p \leq 6$ empfohlen.

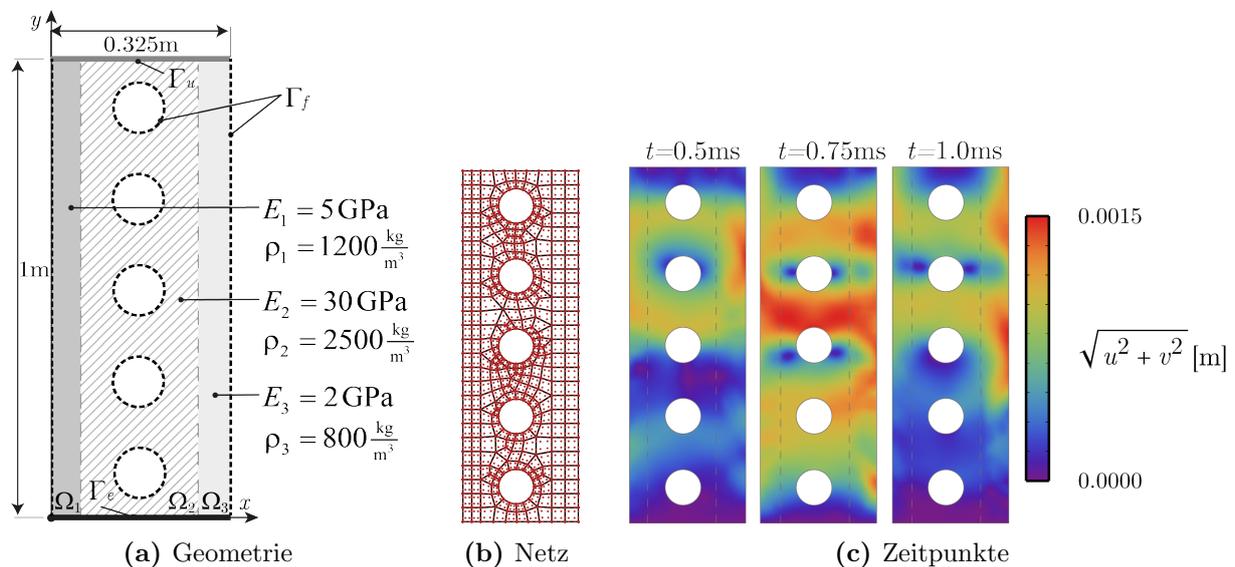


Abbildung 4.23: Geometrie, Vernetzung (beispielhaft für $p = 3$) und Verschiebungsfeld $\sqrt{u^2 + v^2}$ für verschiedene Zeitpunkte ($u_0 = 0.001 \text{ m}$, $f = 2000 \text{ Hz}$).

4.4 Fluid–Struktur–Interaktionsprobleme

4.4.1 Beispiele im Frequenzbereich

Nachfolgend werden die generellen Vorteile bezüglich der Genauigkeit und Effizienz der SEM für Problemstellungen der FSI erläutert. Da analytische Lösungen für FSI-Probleme in der Bauakustik im Allgemeinen nicht existieren, wird die SEM durch die mit COMSOL Multiphysics erstellten Referenzlösungen verifiziert.

Es wird ein 2D FSI-Problem (siehe Abb. 4.24) betrachtet, welches durch die folgenden

Gleichungen beschrieben wird:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} + k^2 p(\mathbf{x}) &= Q \quad \text{in } \Omega_F, \\
 \tilde{\nabla}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} &= -\rho \omega^2 \mathbf{u} \quad \text{in } \Omega_S, \\
 \mathbf{u}_S \mathbf{n}|_{\Gamma_{S,F}} &= \mathbf{u}_F \mathbf{n}|_{\Gamma_{S,F}} \\
 \text{und} \\
 \mathbf{t} = -p \mathbf{n}_S &= p \mathbf{n}_F \quad \text{auf } \Gamma_{S,F}.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Zwei Fluidbereiche (links der *Senderraum*, Index L , und rechts der *Empfangsraum*, Index R), auf deren Rändern Γ_I die Impedanzrandbedingung vorgegeben ist, werden durch eine Struktur voneinander getrennt. Im linken Bereich befindet sich eine Monopolquelle Q . Die elastische Struktur überträgt die Schallwelle in den rechten Fluidbereich und es stellt sich im stationären Zustand ein frequenzabhängiges Schalldruckfeld in beiden Bereichen ein. Die Struktur befindet sich im ebenen Verzerrungszustand und die Verschiebungen auf Γ_E sind zu Null gesetzt. Für die elastische Struktur ergibt sich das dynamische frequenzabhängige Verschiebungsfeld als Lösung des gekoppelten FSI-Problems. Die SEM-Berechnung wird mit einem strukturierten Netz vorgenommen (Abb. 4.25b). Das Fluid ist Luft ($c = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\rho = 1.21 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) und die Struktur besteht aus dem Werkstoff Beton und hat eine Dicke von $d = 0.2\text{m}$. Der Sende- und Empfangsraum haben jeweils die Abmessungen $L_x = L_y \approx 1.5\text{m}$.

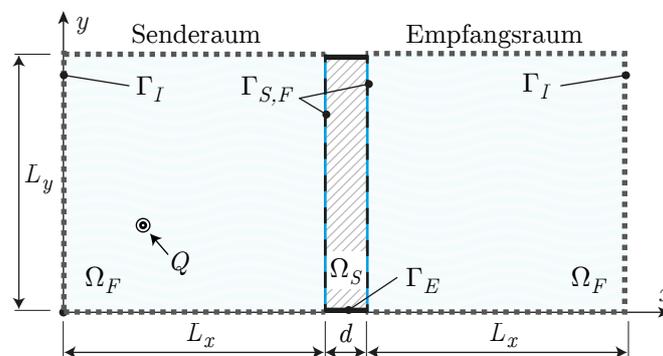


Abbildung 4.24: FSI-Problem.

In der Abb. 4.25a ist der Unterschied in der Kondition der Systemmatrizen unter der Verwendung von ED- und GLL-Elementen bis zur Ordnung $p = 18$ dargestellt. Derart hohe Ordnung führt bei der GLL-Verteilung zwar noch nicht zu einer schlecht konditionierten Systemmatrix, der Fehler sinkt aber nur noch schwach ab (vgl. dazu auch Abb. 4.1). Der Aufwand der Berechnung der Elementmatrizen sowie der Rückrechnung ist zu hoch, so dass der geringe Zuwachs an Genauigkeit überkompensiert wird. Zwar ist die Berechnung der Systemmatrizen auf einem strukturierten Netz auch für hohe Ordnungen effizienter, allerdings wird der Aufwand der Berechnung bzw. Speicherung der Formfunktionen nicht

durch den leicht reduzierten Fehler gerechtfertigt (Abb. 4.26). Außerdem ist zu beachten, dass die Zeit zur Lösung des linearen Gleichungssystems mit der Ordnung der Formfunktionen zunimmt. Für strukturierte Netze führt die günstige Knotennummerierung der entwickelten SEM zu einer schmalen Bandbreite der einzelnen Systemmatrizen. Dies bewirkt eine reduzierte Berechnungsdauer des linearen Gleichungssystems. Beim CHOLESKY-Verfahren lässt sich bspw. der Einfluss der Bandbreite b auf die Berechnungsdauer T_{LS} folgendermaßen angeben:

$$T_{LS} \sim 1/2Nb^2 (1 - (2b)/3n)$$

mit der Anzahl der Freiheitsgrade N [124].

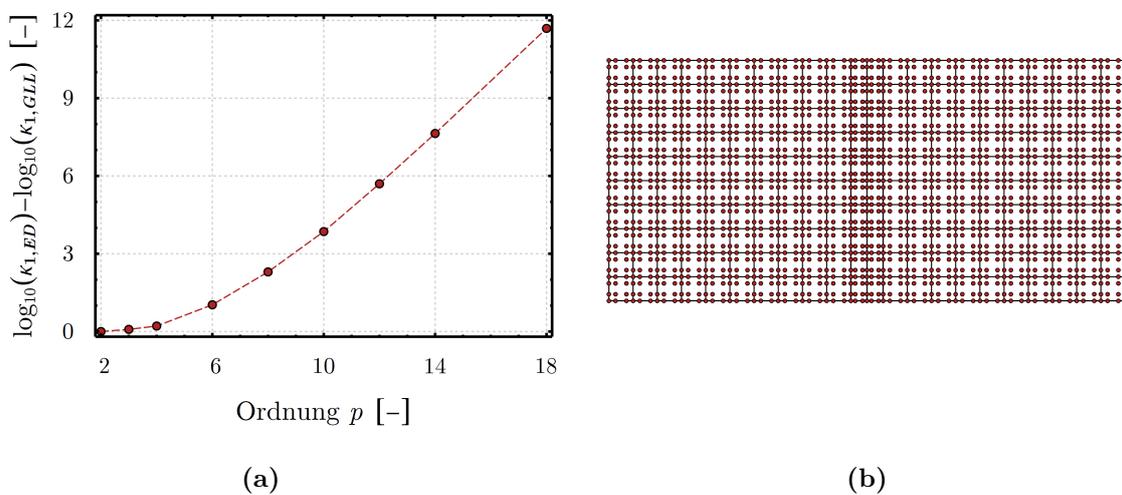


Abbildung 4.25: (a) Vergleich der Konditionszahlen für ED- und GLL-Nodalbasis für $f = 1600\text{Hz}$. (b) Strukturierte Vernetzung für $p = 3$ und GLL-Elemente.

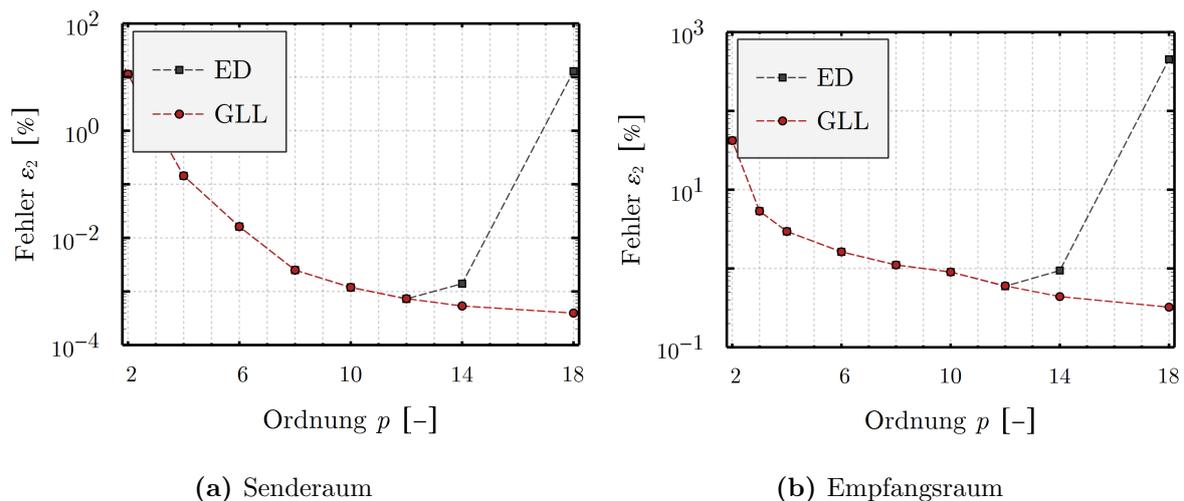


Abbildung 4.26: Fehler für Sende- und Empfangsraum für $f = 1600\text{Hz}$ mit der Variation von p und konstanter Anzahl von etwa $N \approx 20000$ Freiheitsgraden.

In der Abb. 4.27a ist der Bedarf an Hauptspeicher angegeben, der zur Lösung des linearen

ren Gleichungssystem unter der Verwendung des direkten PARDISO-Lösers benötigt wird. Weiterhin ist in der Abb. 4.27b auch der prozentuale Anteil der Nicht-Null-Einträge NZE der Systemmatrix ersichtlich, was unabhängig von der PC-Konfiguration einen Hinweis auf die Berechnungsdauer des linearen Gleichungssystem gibt. Bei der Beurteilung des Hauptspeicherbedarfs muss allerdings beachtet werden, dass die Genauigkeit bei der gleichen Anzahl von Freiheitsgraden bei der Verwendung höherer Formfunktionen wesentlich höher ist. Es wird also bei gleicher Genauigkeit weniger Hauptspeicher bei der Verwendung von Formfunktionen hoher Ordnung benötigt als bei der Verwendung von Formfunktionen niedriger Ordnung.

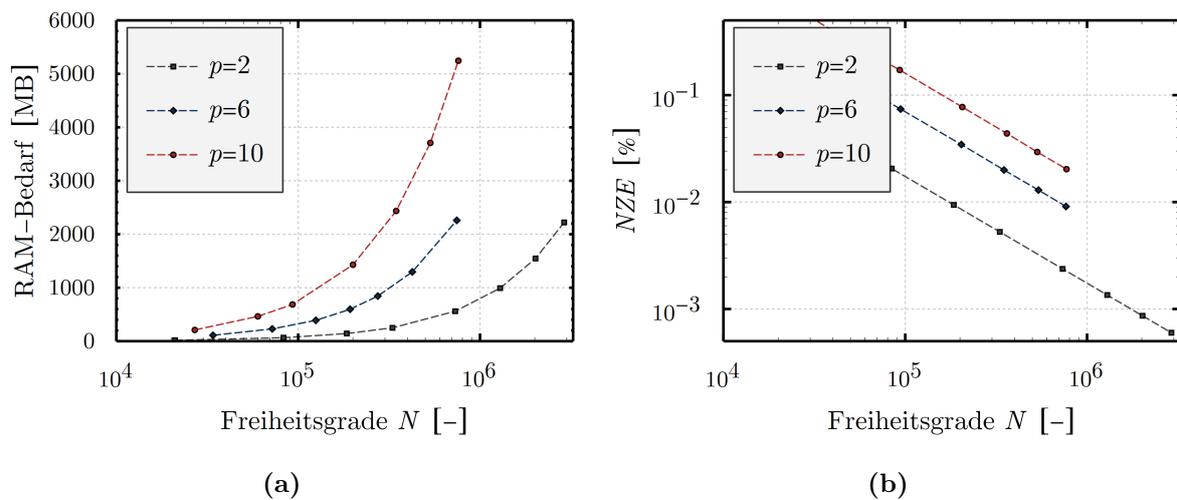


Abbildung 4.27: (a) Hauptspeicherbedarf (RAM-Bedarf) in Megabyte (MB) zur Lösung des linearen Gleichungssystem. (b) Nicht-Null-Einträge (NZE) der Systemmatrix.

In der Abb. 4.28 sind die Fehlerkurven der SEM-Berechnung in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade und der Ordnung der Formfunktionen für die Frequenzen 500Hz, 1500Hz und 3500Hz dargestellt. Die linke Seite der Abbildung gibt hierbei den Fehler des linken Raums gegenüber einer Referenzlösung an, die rechte Seite der Abbildung den Fehler des rechten Raums. Die Referenzlösung wurde mit der SEM mit einer sehr hohen Genauigkeit ermittelt. Die Korrektheit der Referenzlösung wurde außerdem mit **COMSOL Multiphysics** überprüft. Für den Verlauf der Fehlerkurven ergibt sich ein qualitativ ähnliches Bild wie in den vorangegangenen Abschnitten. Der Fehler sinkt prinzipiell trotz der gleichen Anzahl von Freiheitsgraden spektral mit steigender Ordnung der verwendeten Formfunktionen ab (vgl. Abb. 4.10). Jedoch führt die Unterschreitung einer gewissen frequenzabhängigen Fehlerschranke für alle Ordnungen zu einem Verlust an Genauigkeitssteigerung bei der Zunahme der Anzahl von Freiheitsgraden, erkennbar an der veränderten Steigung der Fehlerkurve. Der Fehler nimmt insbesondere bei hoher Frequenz im rechten Raum bedeutend zu. Tendenziell ist die relative Zunahme des Fehlers ausgeprägter bei hoher Frequenz und hoher Ordnung der Formfunktionen. Für eine Fehlerschranke von $\varepsilon_2 \approx 0.5\%$ ist der Fehler für die Ordnung $p = 6$ im rechten Raum etwa 600 mal höher,

aber für $p = 2$ hingegen nur 20 mal höher. Allerdings sind für den Fall $p = 2$ für die gleiche Fehlerschranke auch etwa zehn mal mehr Freiheitsgrade notwendig. Da bei dem gleichen Fehler bei Verwendung einer höheren Ordnung die Anzahl an Kopplungspunkten pro Wellenlänge abnimmt, könnte die verwendete Methode der direkten Kopplung von Fluidgebiet und Strukturgebiet dieses Verhalten begründen. Da der Fehler dennoch ausreichend niedrig ist, werden andere alternative Kopplungsmethoden im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter untersucht. Für die Bestimmung des Schalldämm-Maßes ist der Fehler für den rechten Raum relevant. Für die, in der Abb. 4.28 dargestellte, höchste Frequenz von $f = 3500\text{Hz}$ ist die Verwendung von Formfunktionen hoher Ordnung zur Begrenzung der notwendigen Freiheitsgrade sinnvoll, um eine Fehlerschranke von $\varepsilon_2 = 1.0\%$ einzuhalten. Es muss jedoch an der Stelle festgehalten werden, dass sich der Fehler auf die jeweilige Schalldruckverteilung der gegebenen Frequenz bezieht und der Fehler des Schalldämm-Maßes R , bedingt durch die Mittelung, sowohl für die jeweilige Frequenz, als auch für den in Terzen gemittelten Frequenzverlauf unter Umständen bedeutend niedriger sein kann.

Der größere Teil der Berechnungszeit bei der Bestimmung des Schalldämm-Maßes einer Struktur entfällt auf die Lösung der linearen Gleichungssysteme für die einzelnen Frequenzen. Die angegebenen Zeiten wurden auf einer Workstation mit Dual Intel Xeon E5-2637 CPUs und 64 GB Hauptspeicher gemessen. Sie beziehen sich auf die Lösungszeit des linearen Gleichungssystems einer einzelnen Frequenz, welche unter der Verwendung des direkten Lösers PARDISO parallel auf allen acht Kernen der CPUs berechnet wird.

Zur Minimierung der Berechnungszeit des linearen Gleichungssystems ist zum Erreichen einer hohen Genauigkeit eine hohe Ordnung der Formfunktionen zu wählen, wobei die Effizienzvorteile mit der Frequenz, und damit der Anzahl von Freiheitsgraden, zunehmen. Dies liegt vermutlich unter anderem daran, dass die Verwendung höherer Grade der Formfunktionen die numerische Dispersion begrenzt [49]. Die Berechnungszeiten skalieren näherungsweise mit k^2 , wie es in 2D Problemstellungen zu erwarten ist [72]. In der Abb. 4.29 ist ersichtlich, dass für die Frequenzen $f = 1500\text{Hz}$ und $f = 3500\text{Hz}$ die optimale Ordnung bei $p = 10$ liegt. Die Unterschiede in der Berechnungszeit gegenüber den Ordnungen $p = 6$ und $p = 8$ sind augenscheinlich relativ gering. Es ist dabei jedoch die logarithmische Skalierung der Abszisse zu beachten. Für einen Fehler von $\varepsilon_2 = 0.2\%$ bei der Frequenz $f = 3500\text{Hz}$ beträgt bspw. die Berechnungszeit 7.43s für $p = 6$ und 5.73s für $p = 10$. Für niedrige Genauigkeit und niedrige Frequenzen ist die Verwendung von Formfunktionen mittlerer Ordnung effizient. Die Berechnungszeit der FEM mit linearen und quadratischen Formfunktionen ist auch bei relativ hoher Fehlerschranke generell weit höher als bei der SEM. Außerdem ist die Anzahl der notwendigen Freiheitsgrade unter Umständen so hoch, dass der Hauptspeicher nicht ausreicht, um die Berechnung effizient durchführen zu können.

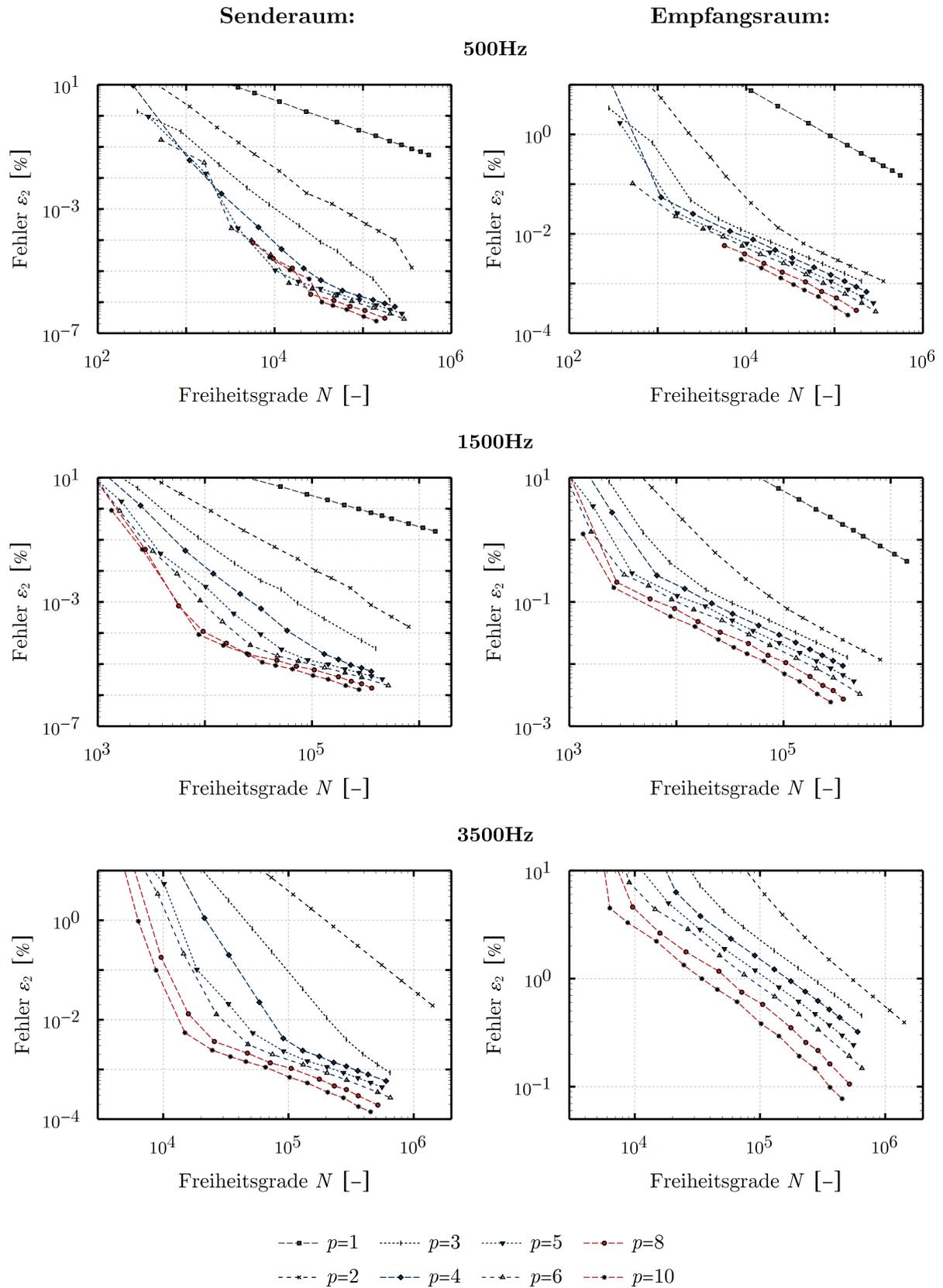


Abbildung 4.28: Fehler des Druckfeldes des FSI-Problems in Abhängigkeit von den Freiheitsgraden.

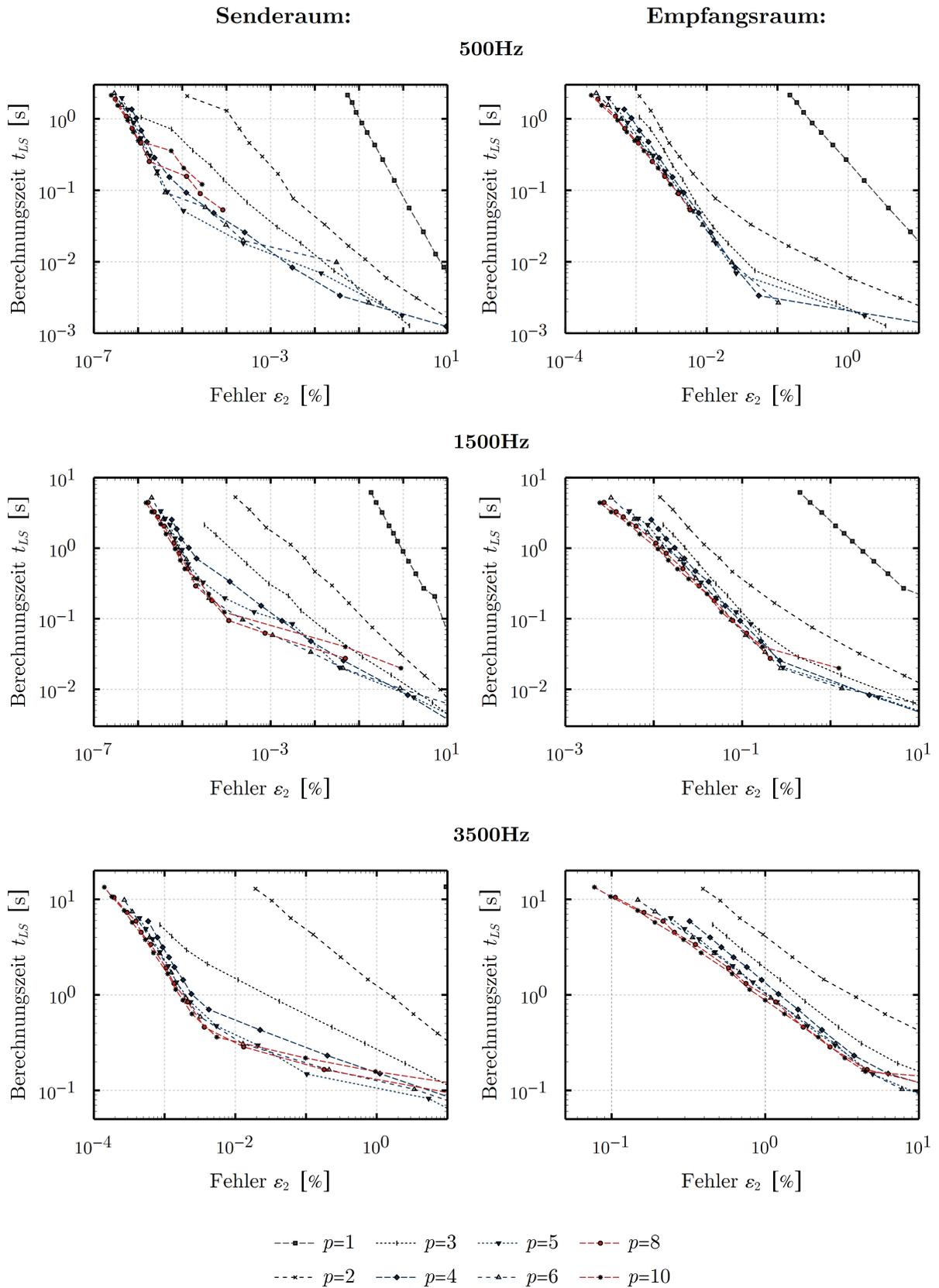


Abbildung 4.29: Berechnungszeit des Druckfeldes des FSI-Problems in Abhängigkeit des Fehlers.

Vergleich mit der kommerziellen Software COMSOL Multiphysics

In den Abb. 4.30 und 4.31 werden der Realteil und der Imaginärteil des Schalldruckfeldes in den Fluidbereichen sowie das Verschiebungsfeld der elastischen Struktur für eine Erregerfrequenz von $f = 1000\text{Hz}$ dargestellt. Die Ränder der Fluidbereiche haben einen Reflexionskoeffizient von $r = 0.95$, welcher durch die Impedanzrandbedingung Gl. (2.8) mit $Z_g \approx 16000$ für Luft festgelegt wird. Der relative Fehler ist definiert als

$$\Delta p = 100 \times \left| \frac{p_{\text{SEM}} - p_{\text{COMSOL}}}{p_{\text{COMSOL}}} \right|,$$

wobei p_{COMSOL} eine mit **COMSOL Multiphysics** erstellte Referenzlösung ist. Die mittleren Fehler liegen sowohl für den Real- als auch für den Imaginärteil bei unter 0.005% für den Senderraum und 0.05% für den Empfangsraum (Abb. 4.32 und 4.33). Die größten Fehler befinden sich bei den Nulldurchgängen und werden bei feinerer Diskretisierung kleiner. Ist statt der Impedanzrandbedingung ein schallharter Rand vorgegeben, sind lediglich sehr kleine Fehler, ab etwa der achten signifikanten Stelle, feststellbar. Für praktische Belange sind die beiden numerischen Lösungen für eine hinreichend feine Diskretisierung identisch.

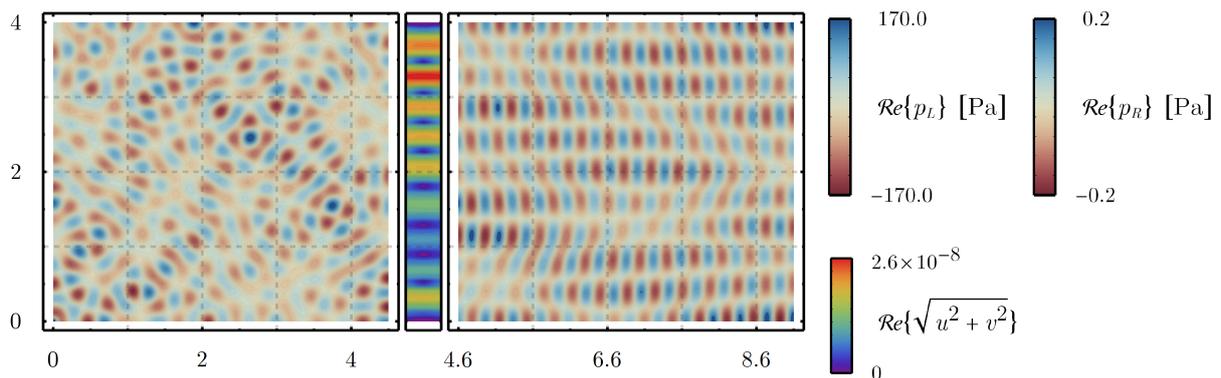


Abbildung 4.30: Realteil des Schalldruckfeldes.

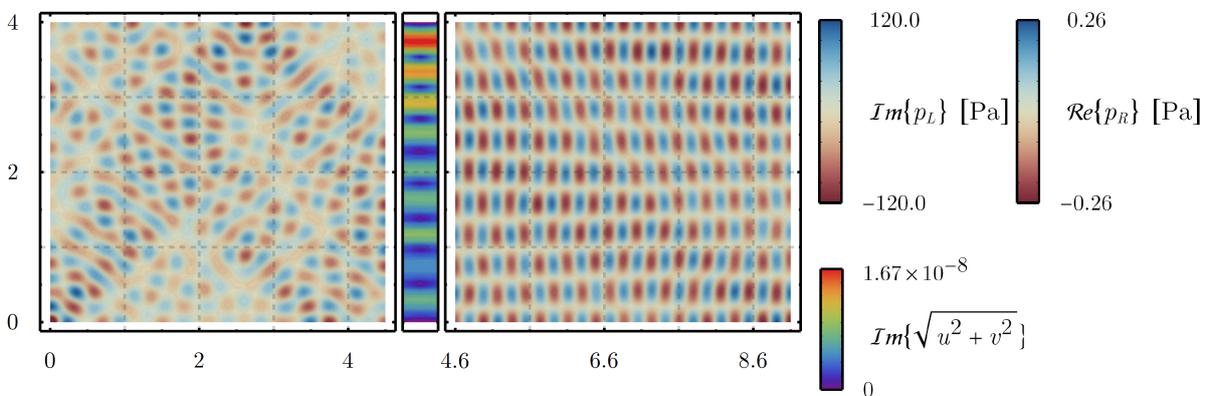


Abbildung 4.31: Imaginärteil des Schalldruckfeldes.

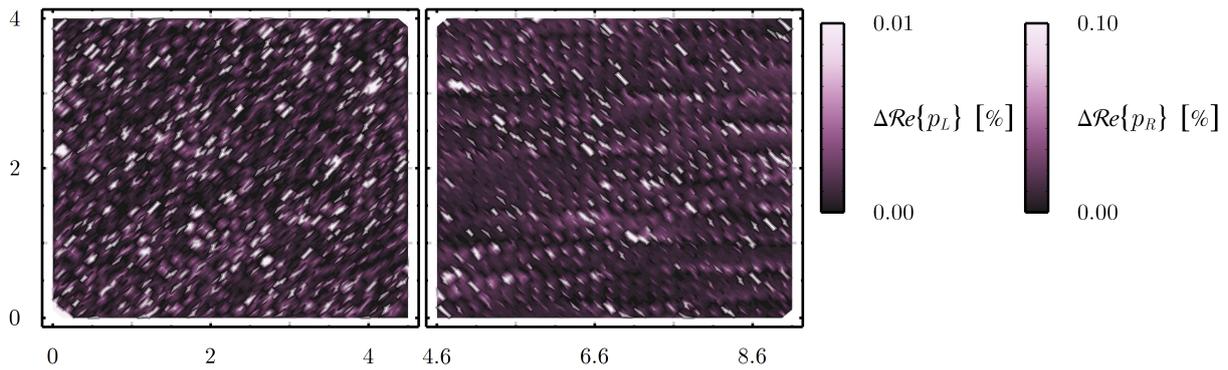


Abbildung 4.32: Fehler des Realteils des Druckfeldes.

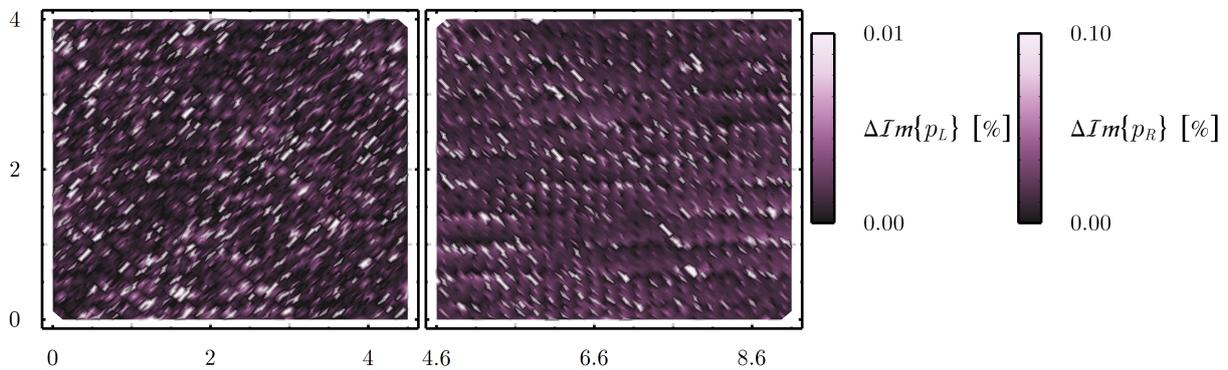


Abbildung 4.33: Fehler des Imaginärteils des Druckfeldes.

3D FSI-Problem

Die Anzahl der Freiheitsgrade wächst im 2D Fall quadratisch und im 3D Fall kubisch mit den Abmessungen. Die Anwendung der SEM ist daher insbesondere für 3D FSI-Problemstellungen sehr effizient, da die Anzahl der notwendigen Freiheitsgrade pro Wellenlänge wesentlich niedriger als in der Standard-FEM ist.

Im folgenden 3D Modellproblem (siehe Abb. 4.34) soll dies demonstriert werden. Die Problemstellung ist durch die folgenden Gleichungen definiert:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} + k^2 p(\mathbf{x}) &= Q_F \quad \text{in } \Omega_F, \\
 \tilde{\nabla}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} &= -\rho \omega^2 \mathbf{u} \quad \text{in } \Omega_S, \\
 \mathbf{u}_S \mathbf{n}|_{\Gamma_{S,F}} &= \mathbf{u}_F \mathbf{n}|_{\Gamma_{S,F}} \\
 \text{und} \\
 \mathbf{t} = -p \mathbf{n}_S = p \mathbf{n}_F &\quad \text{auf } \Gamma_{S,F}.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Die Wand ist fest gelagert mit $\mathbf{u} = 0$ auf Γ_E , als Schallquelle wird jedoch statt einer Monopolquelle ein dynamischer Druck $p = p_0$ auf Γ_Q vorgegeben. Vereinfacht werden die

Laborwände als schallhart mit $\mathbf{n} \cdot \nabla p = 0$ auf Γ_S angenommen.

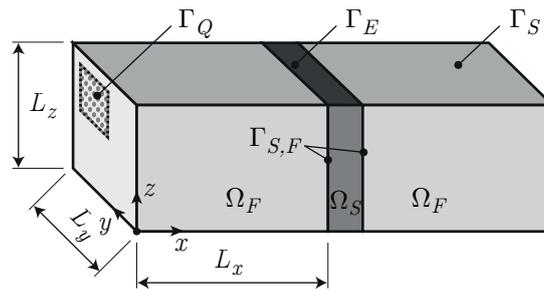


Abbildung 4.34: Problemstellung in 3D.

Die Längen der Fluidgebiete betragen in dieser Untersuchung $L_x = L_y = L_z = 1\text{m}$. Die Abmessungen sind so gewählt, dass die Anzahl der Freiheitsgrade, und damit die Berechnungsdauer, auch für lineare und quadratische Formfunktionen nicht übermäßig hoch ist. Die Referenzlösung wurde mit sehr hoher Genauigkeit erstellt. Auf eine detaillierte Untersuchung des Fehlers wird an dieser Stelle verzichtet. Aus der Abb. 4.35 geht hervor, dass die Abweichungen für die betrachteten Ordnungen der Formfunktion vergleichbar sind. Dargestellt ist dabei der Druckverlauf über die x -Achse für $y = z = 0.5\text{m}$. Die Tab. 4.3 gibt die Anzahl der dazu notwendigen Freiheitsgrade an. Gegenüber der Verwendung von linearen Formfunktionen ist bei $p = 8$ selbst bei einem relativ hohen Fehler nur ein Zehntel der Freiheitsgrade notwendig. Für eine niedrigere Fehlerschranke ist der Effizienzvorteil noch wesentlich höher (vgl. auch mit Abb. 4.1).

Tabelle 4.3: Freiheitsgrade für 3D FSI-Problem.

Ordnung p	1	2	4	6	8
Freiheitsgrade N	2.8×10^5	6.8×10^4	4.1×10^4	2.1×10^4	1.8×10^4

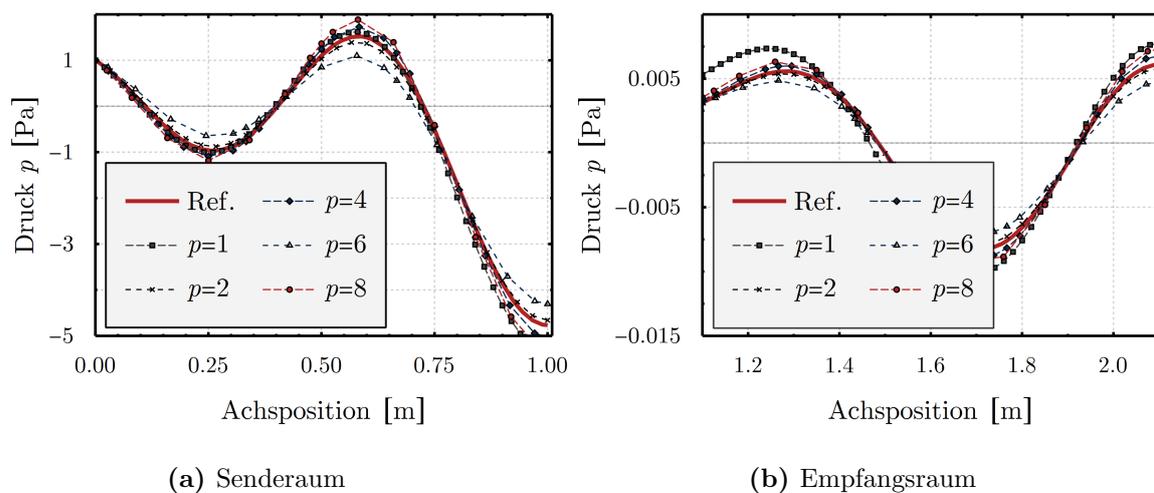


Abbildung 4.35: Druckverlauf über die x -Achse für den Sende- und den Empfangsraum. Die Referenzlösung (Ref.) hat eine hohe Genauigkeit.

In der DIN EN ISO 10140 werden die Richtlinien zur Durchführung experimenteller Messungen des Schalldämm-Maßes einer Struktur angegeben [38]. Demnach soll das Volumen von Sende- und Empfangsraum jeweils ca. $V = 50\text{m}^3$ betragen. Eine numerische Umsetzung der Richtlinien führt bei der Verwendung der Standard-FEM, insbesondere bei hohen Frequenzen, zu einer sehr hohen Anzahl von Freiheitsgraden und damit einem hohen Berechnungsaufwand. Die Verwendung von Formfunktionen höherer Ordnung im Rahmen der SEM führt hier zu einer Steigerung der Berechnungseffizienz und ermöglicht unter Umständen die Berechnung auch auf üblichen Workstations. Weiterhin ist auch der Speicherplatzbedarf der Lösung wesentlich geringer.

Im Folgenden werden für den Sende- und Empfangsraum die Abmessungen $L_x = 4\text{m}$, $L_y = 5\text{m}$ und $L_z = 2.5\text{m}$ angenommen. Die Wände sind als schallhart idealisiert und die Wand besteht aus Beton der Dicke 0.1m . Für eine Erregerfrequenz von 3150Hz , Formfunktionen der Ordnung $p = 5$ und eine untere Grenze von etwa vier Knoten pro Wellenlänge ergeben sich $N = 7.9 \times 10^6$ Freiheitsgrade. Ein Vergleich der Berechnungsdauer für unterschiedliche Ordnungen p kann nicht angegeben werden, da die Berechnungen unter der Verwendung von Formfunktionen niedrigerer Ordnung aufgrund des zu geringen verfügbaren Arbeitsspeichers der verwendeten Workstation nicht durchgeführt werden können.

In der Abb. 4.36 wird die Schalldruckverteilung in der x - y -Ebene für $z = 0.625\text{m}$ bei einer Frequenz $f = 3150\text{Hz}$ gezeigt.

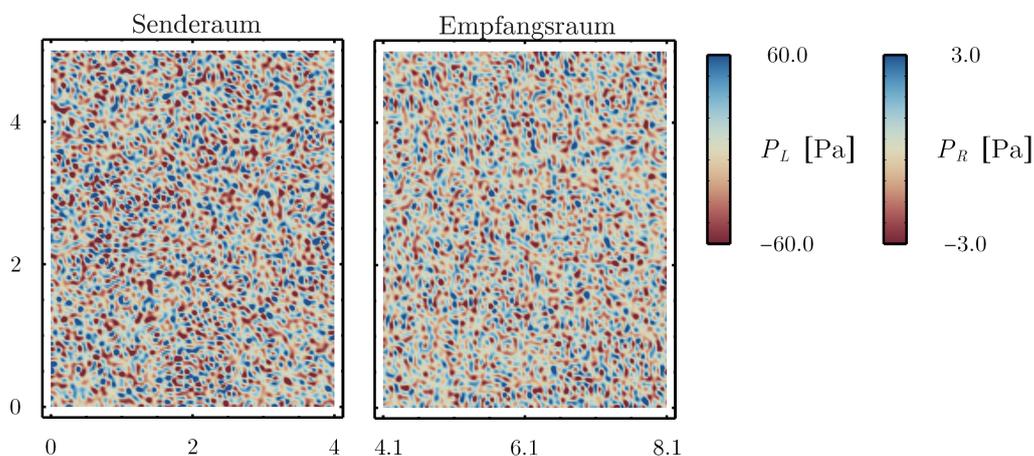


Abbildung 4.36: Verteilung des Schalldrucks für die Ebene bei $z = 0.625\text{m}$.

Effizienzvorteile der SEM in der Berechnung

Bei einer numerischen Ermittlung der Schalldämmung einer Wand durch die SEM muss das Druckfeld im Sende- und Empfangsraum für eine hohe Anzahl an unterschiedlichen Frequenzen berechnet werden. Da in der Abb. 4.29 lediglich die Zeit zur Lösung des line-

ren Gleichungssysteme angegeben ist, wird an dieser Stelle noch gezeigt, welche weiteren Effizienzvorteile sich durch den Einsatz der SEM bei der Berechnung einzelner Frequenzen und des gesamten Frequenzspektrums ergeben.

Wie bereits im Abschnitt 3.2.2 gezeigt, werden Formfunktionen verwendet, die unterschiedliche Ordnungen in die jeweiligen Raumrichtungen besitzen. Diese Elemente werden zur Berechnung dünner Schichten der Wandstruktur eingesetzt und haben die Ordnung p_g in Längsrichtung und p_k in Normalenrichtung der Schicht (vgl. Abb. 3.9). Konkret werden die folgenden $p_g \times p_k$ -Elemente verwendet: 6×3 , 8×4 und 10×5 . Auf niedrigere Ordnungen von p_k wird verzichtet, da die spektralen Konvergenzeigenschaften der SEM sonst nicht mehr zum Tragen kommen. Die Erhöhung der Effizienz bei der Verwendung beruht auf der geringeren Anzahl an Freiheitsgraden. Bei der Berechnung von Wänden mit einer hohen Anzahl an dünnen Schichten, wie bspw. die periodischen Wandstrukturen im Abschnitt 6.1.3, führt die Verwendung der $p_g \times p_k$ -Elemente zu einer deutlichen Reduktion der Berechnungszeit von einzelnen Frequenzen und auch des Frequenzspektrums. Tendenziell ist die Effizienzsteigerung bei der Verwendung höherer Ordnungen (10×5) größer als bei niedriger Ordnung (6×3). Die Auswirkungen auf den l_2 -Fehler gegenüber einer hochgenauen Referenzberechnung sind, zumindest für die Fehlerschranken $\varepsilon_2 \geq 0.001\%$, sehr gering und haben keine praktische Relevanz. Die Verwendung der $p_g \times p_k$ -Elemente verkleinert im Übrigen auch die Konditionszahl der Systemmatrix des linearen Gleichungssystems.

Die im Abschnitt 3.2.3 beschriebene LOBATTO-Quadratur zur Berechnung der Elementmassenmatrizen kann auch im Frequenzbereich verwendet werden, um die Effizienz der Berechnung zu erhöhen. Dies ist darin begründet, dass bei der Assemblierung der Systemmassenmatrix weniger Rechenoperationen benötigt werden, da die diagonalen Elementmassenmatrizen deutlich weniger Nicht-Null-Einträge enthalten. Die Assemblierung der Systemmassenmatrix ist für einen Berechnungsdurchlauf nur einmal pro Terz notwendig. Weiterhin ist jedoch auch die Anzahl der notwendigen Operationen zur Berechnung der Systemmatrix $\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$ für jede Frequenz niedriger, da zur Berechnung der Systemmatrix des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{F_1} - \omega^2 \mathbf{M}_{F_1} & -\rho_{F_1} \omega^2 \mathbf{H}_1^T & 0 \\ \mathbf{H}_1 & \mathbf{K}_S - \omega^2 \mathbf{M}_S & -\mathbf{H}_2 \\ 0 & \rho_{F_1} \omega^2 \mathbf{H}_2^T & \mathbf{K}_{F_2} - \omega^2 \mathbf{M}_{F_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}$$

weit weniger Elemente der Massenmatrizen \mathbf{M}_{F_1} , \mathbf{M}_{F_2} und \mathbf{M}_S mit ω^2 multipliziert werden müssen und die hohe Anzahl der Null-Einträge nicht beachtet wird. Der sich durch die Unterintegration ergebende Fehler ist, zumindest für die Fehlerschranken $\varepsilon_2 \geq 0.001\%$, so gering, dass er praktisch keine Auswirkung auf die numerische Lösung hat.

Die Effizienzvorteile, die sich aus der Verwendung der $p_g \times p_k$ -Elemente und der LOBATTO-Quadratur ergeben, werden an einem praktischen 2D Beispiel demonstriert. Es wird dazu eine monolithische dünne Wand der Dicke 10mm untersucht und die Größe von Sende- und Empfangsraum beträgt jeweils $A \approx 10\text{m}^2$. Der Aufbau entspricht der Abb. 4.24. Innerhalb des Frequenzspektrums von 90Hz bis 3550Hz werden insgesamt 688 Durchläufe ausgeführt, in denen das Druckfeld in den beiden Räumen bei der jeweiligen Frequenz ermittelt wird. Um die Berechnungszeit zu minimieren wird bei einer Frequenz von $f = 90\text{Hz}$ ein grobes Netz verwendet und dann nach jeweils 43 Frequenzen eine Netzverfeinerung durchgeführt. Für jedes Netz wird die maximale Elementgröße abhängig von einer vorgegebenen Fehlerschranke ε_2 durch den *a priori* Fehlerschätzer aus dem Abschnitt 4.1 ermittelt. Die benutzte Rechnerkonfiguration verwendet eine Intel i7-7700K CPU mit 32Gb Arbeitsspeicher. Nachfolgend ist in Abb. 4.37 ein Vergleich der Dauer der gesamten Berechnung für unterschiedliche Fehlerschranken bei Variation der Ordnung der Formfunktionen dargestellt.

Auch ein Vergleich mit der FEM-Software COMSOL Multiphysics wird durchgeführt, wobei hier die gleiche Ordnung der Formfunktionen verwendet wird und die Anzahl der Freiheitsgrade annähernd identisch zur SEM-Berechnung ist. Zur Lösung des linearen Gleichungssystems wird für die SEM und COMSOL Multiphysics der PARDISO-Solver verwendet, so dass die Effizienz der Berechnung direkt vergleichbar ist. Eine Verwendung von Formfunktionen größer als $p = 5$ sowie der GLL-Elemente ist in COMSOL Multiphysics (Version 5.1) nicht möglich.

Ein Optimum stellt sich bei der Berechnung mittels der SEM mit der Ordnung $p = 4$ für eine hohe Fehlerschranke und $p = 10$ für eine niedrige Fehlerschranke sowie hohe Frequenzen ein. Die dazwischenliegenden Ordnungen sind zur Verbesserung der Übersichtlichkeit nicht dargestellt, sind in allen Fällen jedoch nicht optimal. Für den Fall „SEM“ in der Abb. 4.37 werden keine $p_g \times p_k$ Elemente verwendet und die Elemente werden durch GAUSS-LEGENDRE Quadratur berechnet. Für den Fall „SEM, optimiert“ werden $p_g \times p_k$ Elemente verwendet und die Elementmassenmatrizen werden durch LOBATTO-Quadratur berechnet. Für höhere Frequenzen, und damit Anzahl der Freiheitsgrade, sowie niedrigere Fehlerschranken sind die Vorteile der entwickelten SEM noch deutlicher.

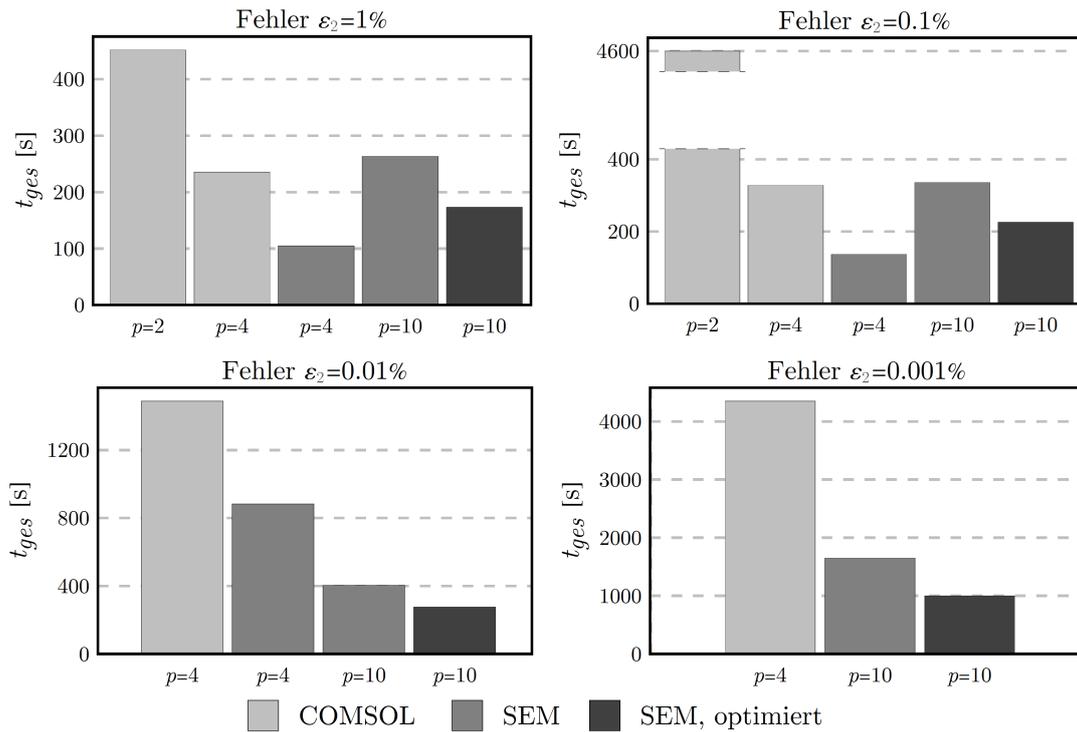


Abbildung 4.37: Vergleich der Berechnungsdauer mittels SEM und COMSOL Multiphysics (Man beachte die Ordinate für $\varepsilon_2 = 0.1\%$ und $p = 2$).

4.4.2 Beispiele im Zeitbereich

Betrachtet wird nun ein FSI-Problem im Zeitbereich. Die Problemstellung (siehe Abb. 4.24) wird durch die folgenden Bestimmungsgleichungen mit den dazugehörigen Randbedingungen beschrieben:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 p(t)}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 p(t) &= \frac{\partial q_F}{\partial t} \quad \text{in } \Omega_F, \\
 \tilde{\nabla}^T \boldsymbol{\sigma}_S + \mathbf{f} &= \rho_S \frac{\partial^2 \mathbf{u}_S}{\partial t^2} \quad \text{in } \Omega_S, \\
 \mathbf{u}_S \mathbf{n}|_{\Gamma_{S,F}} &= \mathbf{u}_F \mathbf{n}|_{\Gamma_{S,F}} \\
 \text{und} \\
 \mathbf{t} = -p \mathbf{n}_S &= p \mathbf{n}_F \quad \text{auf } \Gamma_{S,F}.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Als weitere Randbedingungen sind die feste Lagerung $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ auf Γ_E und der schallharte Rand $\mathbf{n} \cdot \nabla p = 0$ auf Γ_I vorgegeben. Die Anfangsbedingungen der Problemstellung sind $p(0) = 0$ und $\dot{p}(0) = 0$ für die Fluidbereiche sowie $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$ und $\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}$ für den Strukturbereich. Als Schallquelle Q wird ein Impuls nach Gl. (4.10) verwendet. Zur Berechnung

wird das explizite Zeitintegrationsverfahren aus dem Abschnitt 3.2.5 verwendet.

Das lineare Gleichungssystem der Problemstellung lautet im Zeitbereich

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{F_1} & -\rho_0 c_0^2 \mathbf{H}_1^T & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_S & 0 \\ 0 & \rho_0 c_0^2 \mathbf{H}_2^T & \mathbf{M}_{F_2} \end{bmatrix}}_{\text{Systemmassenmatrix}} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}}_1 \\ \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{p}}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{F_1} & 0 & 0 \\ -\mathbf{H}_1 & \mathbf{K}_S & -\mathbf{H}_2 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{F_2} \end{bmatrix}}_{\text{Systemsteifigkeitsmatrix}} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Im Gegensatz zu den ungekoppelten Problemstellungen der Abschnitte 4.2.2 und 4.3.2 ist die Systemmassenmatrix bei der Verwendung der LOBATTO-Quadratur nun nicht mehr nur diagonal belegt, da nun auch die Einträge der Kopplungsmatrizen $-\rho_0 c_0^2 \mathbf{H}_1^T$ und $\rho_0 c_0^2 \mathbf{H}_2^T$ vorkommen (siehe Abb. 4.38). Da die Systemmassenmatrix jedoch sehr dünn belegt ist, ist die Effizienz der Lösung des linearen Gleichungssystems gegenüber der Quadratur nach GAUSS-LEGENDRE stark erhöht.

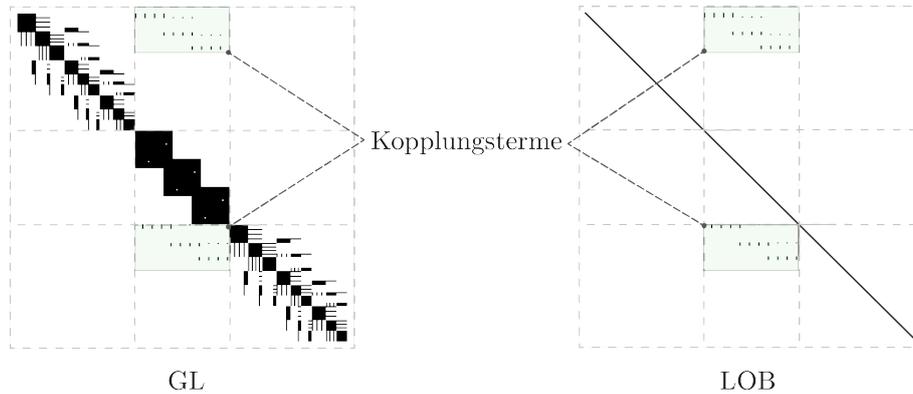


Abbildung 4.38: Aufbau der Systemmassenmatrix bei 2D FSI-Problem. Die GLL-Elementmassenmatrizen werden jeweils mit GAUSS-LEGENDRE-Quadratur (GL) und LOBATTO-Quadratur (LOB) berechnet.

Zur Lösung wird das explizite Zeitintegrationsschema nach Gl. (3.21) verwendet. Das Druckfeld im Sende- und Empfangsraum ($L_x = L_y = 2\text{m}$) für verschiedene Zeitpunkte wird in der Abb. 4.40 gezeigt. In der Abb. 4.39 ist die Berechnungszeit des linearen Gleichungssystems mit dem PARDISO-Solver bei Verwendung der GAUSS-LEGENDRE-Quadratur und LOBATTO-Quadratur dargestellt. Es ist eine deutliche Reduktion der Berechnungszeit ersichtlich, falls die Massenmatrizen durch LOBATTO-Quadratur ermittelt werden. Außerdem ist ersichtlich, dass die Zeitdauer zur Lösung des Gleichungssystems für die Ordnungen $p = 5$ und $p = 10$ (LOBATTO-Quadratur) nahezu identisch ist, da sich die Anzahl der Nicht-Null-Einträge der Systemmatrix für unterschiedliche Ordnungen der Formfunktionen kaum unterscheidet. Es soll aufgrund der abnehmenden Zeitschrittweite allerdings maximal eine Ordnung von $p = 10$ gewählt werden [114].

Auch hierbei ergeben sich gewisse Effizienzvorteile in der Einarbeitung der Randbedingungen und Berechnung der rechten Seite des Gleichungssystems. Insbesondere für eine große Anzahl von Freiheitsgraden zeigen sich, wie auch bei ungekoppelten akustischen Problemen, deutliche Vorteile in der Berechnungseffizienz.

Die Berechnung der Inversen der Massenmatrix des gekoppelten Systems ist aufgrund der diagonalen Massenmatrizen der Struktur \mathbf{M}_S und des Fluids \mathbf{M}_F relativ einfach. Obwohl die Lösung eines linearen Gleichungssystems unter der Verwendung der Inversen der Systemmatrix aufgrund der starken Verschlechterung der Konditionszahl und dem Aufwand zur Berechnung der Inversen in der Regel nicht sinnvoll ist, kann dies unter der Verwendung der SEM sinnvoll sein [83]. Es müssen dann zur Lösung des linearen Gleichungssystems in jedem Zeitschritt lediglich Matrizen-Vektor-Multiplikationen ausgeführt werden. Bei der vorliegenden Problemstellung hat sich die Lösung des linearen Gleichungssystems unter der Verwendung des PARDISO-Lösers jedoch als zeiteffizienter erwiesen, da die Anzahl der Nicht-Null-Einträge sehr gering ist.

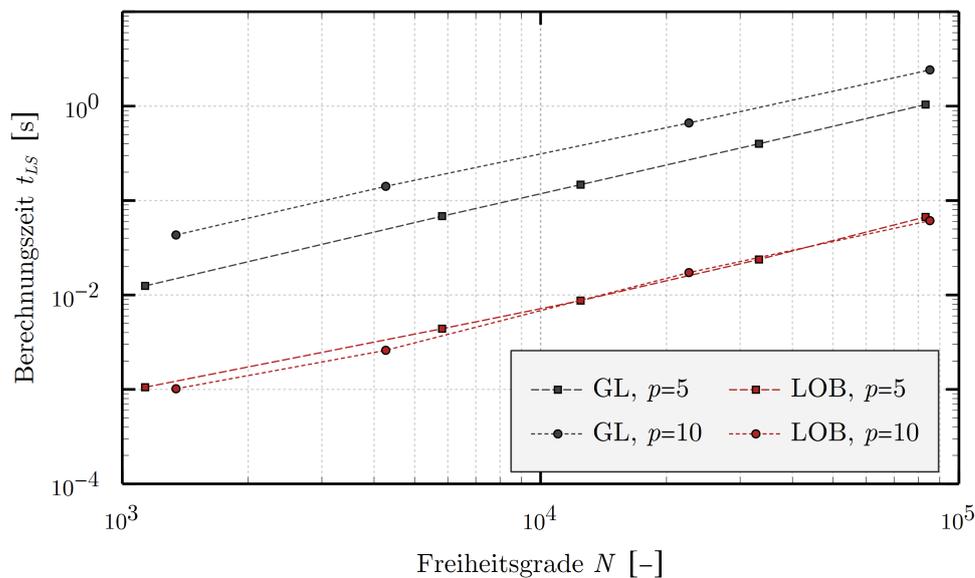


Abbildung 4.39: Zeitdauer t_{LS} zur Lösung des linearen Gleichungssystems eines 2D FSI-Problems bei der Verwendung von GAUSS-LEGENDRE Quadratur (GL) und LOBATTO-Quadratur (LOB).

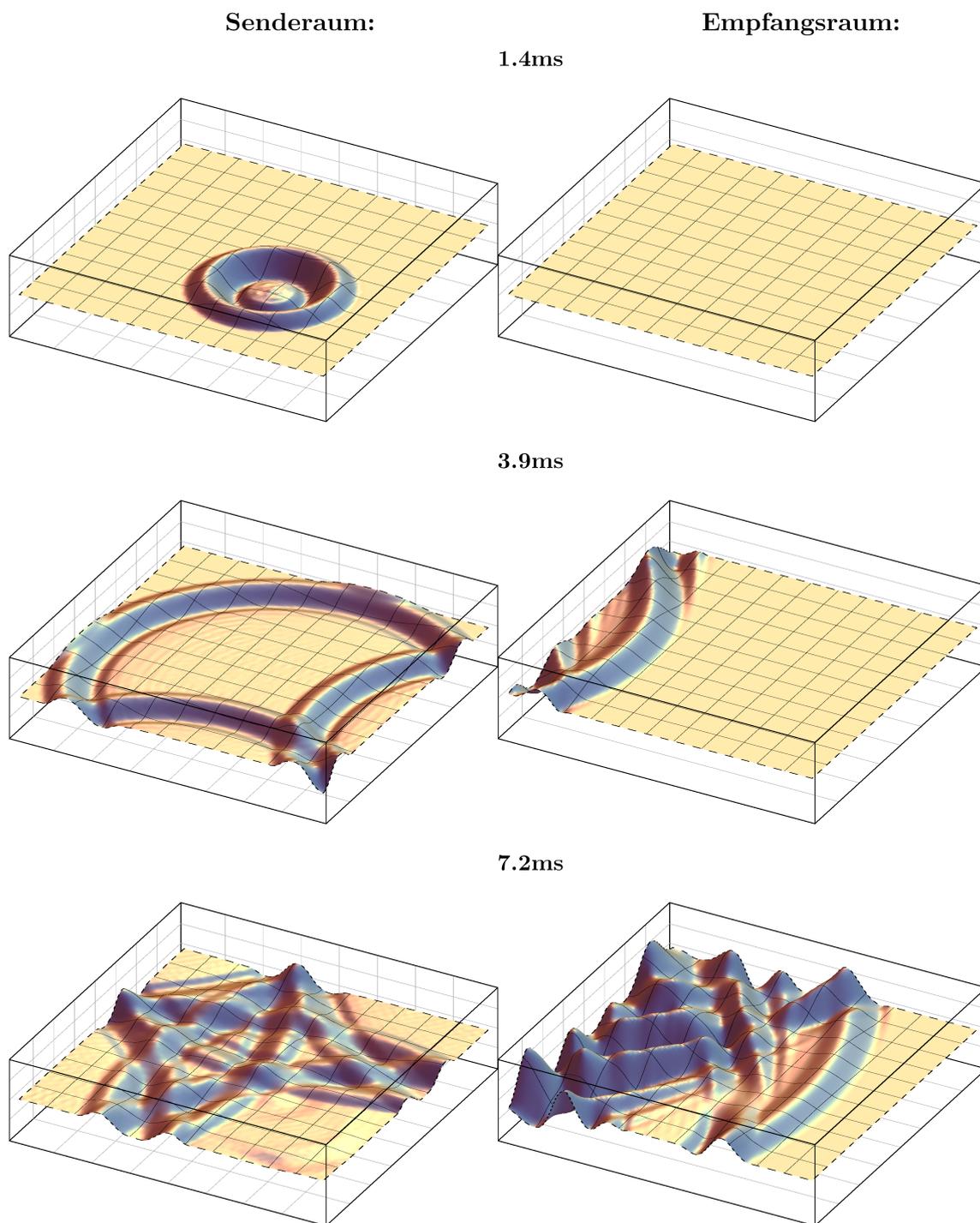


Abbildung 4.40: Akustische Wellenausbreitung in Sende- und Empfangsraum für $f = 1000\text{Hz}$.

4.5 Wärmeleitungsprobleme

4.5.1 Stationäre Wärmeleitungsprobleme

Da in dieser Arbeit die Wärmedämmungseigenschaften einer Wandstruktur ein Optimierungsziel im Rahmen der multikriteriellen Optimierung darstellen, wird die Anwendung der SEM auch in diesem Bereich gezeigt. Sowohl die stationäre als auch die instationäre Lösung eines Wärmeleitungsproblems nach Gl. (2.32) und Gl. (2.33) kann generell unter der Verwendung relativ grober Vernetzung durch Formfunktionen niedriger Ordnung gut interpoliert werden. Da die Lösung bei praktischen Problemstellungen in der Regel keine Oszillationen, wie diese in akustischen und elastischen Wellengleichungen vorkommen, aufweist, ist der Fehler auch bei der Verwendung linearer Formfunktionen sehr gering.

Dennoch wird in Abb. 4.41a kurz das Konvergenzverhalten bei der numerischen Lösung der stationären Wärmeleitungsgleichung (2.33) mit $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ angegeben. Als Randbedingungen für den unteren und oberen Rand werden die vorgegebenen Temperaturen $\Gamma_u = 293\text{K}$ und $\Gamma_o = 273\text{K}$ aufgebracht. Für die Ränder Γ_f gilt $\nabla T = 0$. Es wird dabei für die in Abb. 4.41b dargestellte Vernetzung der Grad der Formfunktionen p erhöht. Es zeigt sich auch hier eine schnelle Konvergenz der numerischen Lösung. Die Referenzlösung wurde hierbei wiederum mit hoher Genauigkeit mittels COMSOL Multiphysics erstellt.

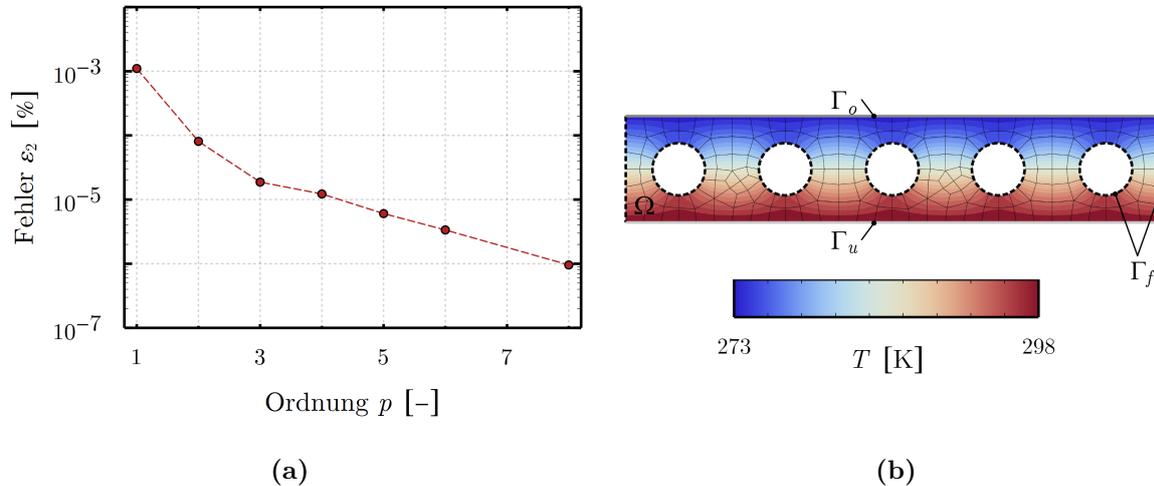


Abbildung 4.41: (a) Fehler der SEM-Lösung in Abhängigkeit von der Ordnung p . (b) Geometrie und Temperaturfeld.

4.5.2 Transiente Wärmeleitungsprobleme

Betrachtet wird nun die Lösung der transienten Wärmeleitungsgleichung (2.32) in einem dreischichtigen Paneel mit den Randbedingungen $\nabla T = 0$ auf Γ_f und den in Abb. 4.42a dargestellten vorgegebenen festen Temperaturen T_l und T_r an den Rändern des

Panels. Als Anfangsbedingung wird in allen Gebieten Ω_1 , Ω_2 und Ω_3 die Temperatur $T(t=0) = 293\text{K}$ vorgegeben. In der Abb. 4.42b sind die berechneten Temperaturfelder zu verschiedenen Zeitpunkten bis zum stationären Zustand dargestellt.

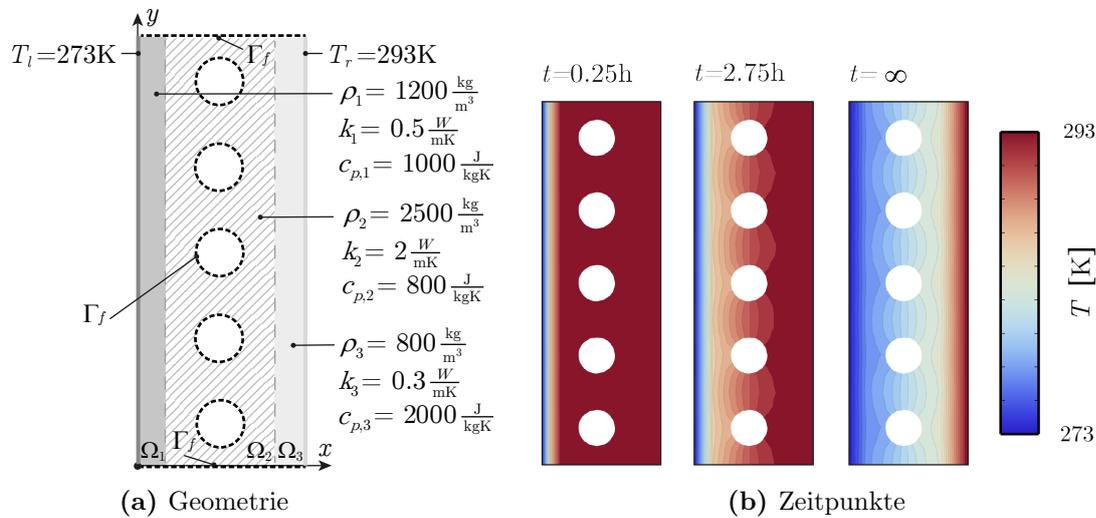


Abbildung 4.42: Geometrie und Temperaturverteilung zu verschiedenen Zeiten für ein 2D Wärmeleitungsproblem mit vorgegebenen Temperaturen am linken und rechten Rand. Die Zeitschritte sind in Stunden (h) angegeben, der stationäre Zustand ist $t = \infty$.

Die Anwendung der SEM bietet bei der Verwendung eines expliziten Zeitintegrationsverfahrens prinzipiell die gleichen Vorteile (bspw. die diagonale Massenmatrix), wie in Problemstellungen der Akustik und Elastodynamik, daher wird hierauf nicht weiter eingegangen. Von praktischer Relevanz sind die Materialkonstante der Wärmespeicherkapazität bei konstantem Druck c_p und die Dichte ρ des Materials, welche die Zeitdauer bis zum Erreichen des stationären Zustands beeinflussen. Je größer die beiden Werte (oft auch als *thermische Masse* bezeichnet) sind, desto mehr Wärmeenergie wird in der Struktur gespeichert und umso länger beträgt die Dauer bis ein stationärer Zustand erreicht wird. Weiterhin wird die Struktur in diesem Fall weniger stark von Temperaturschwankungen gestört. Dies ist bspw. im Bereich der Wärmedämmung von Außenwänden relevant, da bei größerer thermischer Masse die Temperaturschwankungen der Tag-Nacht-Zyklen oder auch längere Zeitintervalle weniger Einfluss auf die Temperatur im Gebäudeinneren haben. Aus diesem Grund wird oftmals auch eine Optimierung hinsichtlich der thermischen Masse der Wandstrukturen durchgeführt [110, 2, 26].

In der Abb. 4.43a ist der Verlauf der Temperatur $T(x, t)$ über die in der Abb. 4.43b angegebene Linie für einige Zeitpunkte dargestellt. Bei Verringerung der thermischen Masse der einzelnen Schichten nähert sich das Temperaturfeld im Übrigen schneller seinem stationären Zustand an.

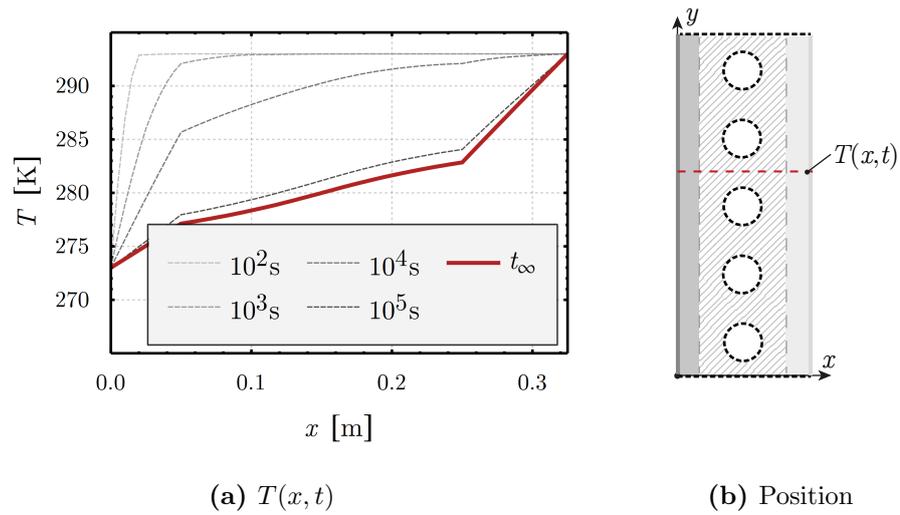


Abbildung 4.43: Verlauf der Temperatur für $y = 0.6$ m (gestrichelte rote Linie in (b)) und einige Zeitpunkte. Für t_∞ ist der stationäre Zustand erreicht.

Zeitdauer zur Berechnung von FSI-Problemen und Wärmeleitungsproblemen ermöglicht die Anwendung des virtuellen Labors zur Optimierung der Schalldämmung und Wärme-dämmung von Wandstrukturen mit einer hohen Anzahl an Durchläufen.

In der Abb. 5.1 sind schematisch die Einsatzzwecke und verwendeten Werkzeuge des virtu-ellen Labors dargestellt. Die Implementierung der SEM und die verwendeten analytischen Methoden werden in diesem Kapitel detailliert beschrieben. In der Demonstration der An-wendung in Kapitel 6 wird dabei vorausgesetzt, dass die statischen Anforderungen an die untersuchten Wandstrukturen bereits erfüllt sind.

5.2 Bestimmung des Schalldämm-Maßes

5.2.1 Ermittlung im realen Versuchslabor

Die Messung des Schalldämmvermögens einer Struktur ist grundsätzlich eine komplexe Aufgabe. Die Vorgehensweise bei der experimentellen Ermittlung ist in der DIN EN ISO 10140 geregelt [38]. Der grundsätzliche Aufbau der Messung ist in der Abb. 5.2 dargestellt. Die Lautsprecher im Senderraum dienen als Schallquelle und über Mikrofone wird der mittlere Schalldruck in den beiden Räumen gemessen. Üblicherweise wird die Messung in 16 Terzbändern zwischen 100 und 3150 Hz vorgenommen, wobei als Schallquelle ein akustisches Rauschen entsprechender Bandbreite verwendet wird. In der Tab. 5.1 sind die Terzmittenfrequenzen $f_{t,m}$ sowie deren jeweilige untere und obere Grenzfrequenz $f_{t,u}$ und $f_{t,o}$ angegeben.

Tabelle 5.1: Terzmittenfrequenz $f_{t,m}$ und untere und obere Grenzfrequenz $f_{t,u}$, $f_{t,o}$ in [Hz].

$f_{t,m}$	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150
$f_{t,o}$	112	140	180	224	280	355	450	560	710	890	1120	1410	1800	2240	2800	3550
$f_{t,u}$	90	112	140	180	224	280	355	450	560	710	890	1120	1410	1800	2240	2800

Zur Beschreibung der Stärke des Schalldrucks ist der logarithmische Schalldruckpegel L_p gebräuchlich. Dieser wird aus dem quadratischen Mittelwert des Schalldrucks $p_{qmw} = \frac{p}{\sqrt{2}}$ durch

$$L_p = 20 \log_{10} \frac{p_{qmw}}{p_0} \quad (5.1)$$

berechnet. $p_0 = 20 \times 10^{-6} \text{Pa}$ ist dabei der Bezugsschalldruck [32]. Zur Bewertung der akustischen Dämmeigenschaften einer Wand wird das frequenzabhängige Schalldämm-Maß R verwendet, welche durch die folgende Gleichung definiert ist:

$$R = 20 \log_{10} \frac{p_{qmw,l}}{p_0} - 20 \log_{10} \frac{p_{qmw,r}}{p_0} + 10 \log_{10} \frac{S}{A_e}. \quad (5.2)$$

Dabei bezeichnet $p_{qmw,l}$ und $p_{qmw,r}$ den quadratischen Mittelwert des Schalldrucks jeweils im Senderraum (Index l) und Empfangsraum (Index r). Der Einfluss der Dämpfung über die Oberflächen des Empfangsraums wird über den letzten Term berücksichtigt, in dem S die Fläche des Prüfkörpers und A_e die äquivalente Absorptionsfläche ist, die durch die folgende Gleichung bestimmt wird:

$$A_e = \sum S_n \alpha_n, \quad (5.3)$$

mit den Teilflächen der Laborwände S_n und deren jeweiligem Absorptionsgrad α_n .

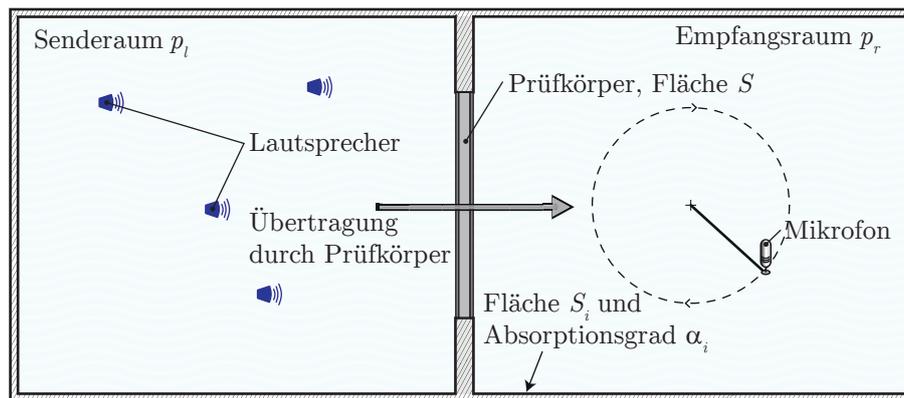


Abbildung 5.2: Experimentelle Ermittlung des Schalldämm-Maßes. Vereinfachend ist der Weg über Flankenübertragung nicht dargestellt.

Berechnung des Einzahlwertes

Zum einfachen Vergleich der Schalldämmeigenschaften unterschiedlicher Prüfkörper wird das frequenzabhängige Schalldämm-Maß $R(f)$ unter der Verwendung einer Bezugskurve in den Einzahlwert des bewerteten Schalldämm-Maßes überführt. Das Verfahren ist in der DIN EN ISO 717 beschrieben [41]. Die Bezugskurve wird solange gegenüber der in Terzen gemittelten Messkurve verschoben, bis die Summe der Unterschreitungen für jede Terzmittenfrequenz möglichst groß, aber kleiner als 32dB ist. Da die Verschiebung immer um Eins erfolgt ergibt sich ein ganzzahliger Wert. Das Verfahren ist schematisch in Abb. 5.3 dargestellt.

Ein Optimierungsalgorithmus benötigt in der Regel einen Einzahlwert, welcher maximiert oder minimiert werden soll. Da die beschriebene Methodik nach der DIN EN ISO 717 einen ganzzahligen Wert liefert, würde eine Berechnung mit unterschiedlichen Geometrie- oder Materialparametern eine Treppenstufenfunktion erzeugen. Damit der Optimierungsalgorithmus möglichst gut arbeiten kann, wird jedoch eine möglichst feine Abstufung der Zielfunktion benötigt. Daher, und auch damit die Auswirkungen der Berechnungsparameter auf den Einzahlwert besser erfasst werden können, wird die Methodik leicht abgeändert. Die Schrittweite zur Ermittlung des Einzahlwertes wird dabei in der Prozedur auf 1/100

abgesenkt, um den Einzahlwert mit zwei Nachkommastellen ermitteln zu können. Zur Unterscheidung wird dieser Einzahlwert dann als R_w^{mod} bezeichnet.

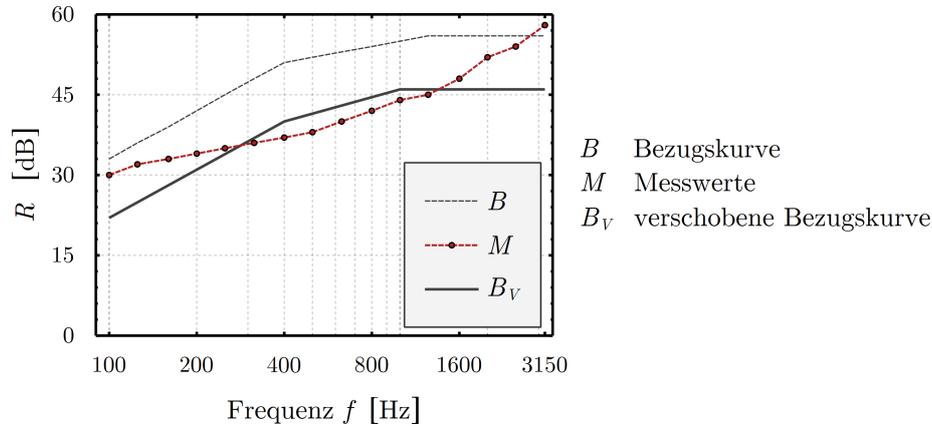


Abbildung 5.3: Anpassung der Bezugskurve zur Ermittlung des Einzahlwertes R_w (nach [84]).

5.2.2 Näherungen für monolithische und zweischalige Wände

Im Folgenden werden Näherungsgleichungen zur Abschätzung des Schalldämm-Maßes von ein- und zweischaligen Wänden hergeleitet. Für monolithische Bauteile kann das Schalldämmvermögen relativ präzise abgeschätzt werden. Jedoch kann für zweischalige Bauteile der frequenzabhängige Verlauf des Schalldämm-Maßes nur qualitativ beschrieben werden.

Monolithische Wände

Die Herleitung des Schalldurchgangs durch unendlich ausgedehnte Platten der Dicke d (siehe Abb. 5.6a) bei einem Schalleinfall erfolgt über die Lösung der dynamischen Plattengleichung im Frequenzbereich. Die Biegewellengleichung für homogene Platten lautet unter Verwendung des in Abb. 5.4 dargestellten Koordinatensystems

$$\frac{\partial^4 v_w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 v_w}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 v_w}{\partial z^4} - \frac{\tilde{m}}{B} \omega v_w = \frac{i \omega p(y, z)}{B}, \quad (5.4)$$

mit der Geschwindigkeit der Plattenschwingung v_w in x -Richtung, der Biegesteifigkeit der Wand $B = E(d^3/12)/(1 - \nu^2)$ und der flächenbezogenen Masse der Platte $\tilde{m} = \rho d$, wobei d die Plattendicke ist.

Die Schallfelder auf der linken und rechten Seite der Platte werden beschrieben durch

$$\begin{aligned} p_a + p_e &= p_0 e^{-ikx \cos \varphi} e^{ikz \cos \varphi} + r p_0 e^{ikx \cos \varphi} e^{ikz \cos \varphi} & \text{in } \Omega_l, \\ p_t &= t p_0 e^{-ikx \cos \varphi} e^{ikz \cos \varphi} & \text{in } \Omega_r, \end{aligned} \quad (5.5)$$

mit dem Reflexionskoeffizient r und Transmissionskoeffizient t . p_a ist das einfallende Schallfeld, p_e das reflektierte Schallfeld und p_t das transmittierte Schallfeld auf der rechten Seite der Platte.

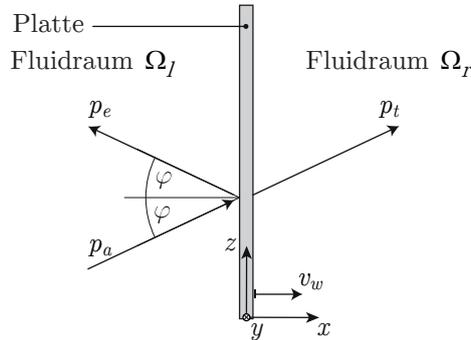


Abbildung 5.4: Schalldurchgang durch eine Platte.

Die Belastung der Platte ergibt sich aus der Differenz der Schallfelder auf der linken und rechten Seite der Platte. Mit der Annahme der Anregung durch eine einfallende Welle ergibt sich eine eindimensionale Ausbreitung der Biegewellen und Gl. (5.4) geht über in:

$$\frac{1}{k_B^4} \frac{\partial^4 v_w}{\partial z^4} - v_w = \frac{i}{\tilde{m}\omega} (p_a(0, z) + p_e(0, z) - p_t(0, z)), \quad (5.6)$$

mit $k_B^4 = \frac{\tilde{m}\omega^2}{B}$. Die Geschwindigkeit der Teilchenauslenkungen des Fluids, die sogenannte Schnelle, kann ausgedrückt werden durch

$$v_0 = \frac{i}{\omega\rho_0} \nabla p. \quad (5.7)$$

An der Berandung entspricht die Geschwindigkeit der Plattenauslenkungen der Schnelle der Fluidpartikel $v_0 e^{ikz \sin \varphi}$:

$$v_w = v_0 e^{ikz \sin \varphi}. \quad (5.8)$$

Der Reflexionskoeffizient kann durch den Transmissionskoeffizienten ausgedrückt werden: $r = 1 - t$. Einsetzen von Gl. (5.5), Gl. (5.7) und Gl. (5.8) in Gl. (5.6) ergibt schließlich einen Ausdruck für den Transmissionskoeffizienten als

$$t = \frac{\frac{2i\rho_0 c_0}{\tilde{m}\omega}}{\left(\frac{k^4}{k_B^4} \sin^4(\varphi) - 1\right) \cos(\varphi) + \frac{2i\rho_0 c_0}{\tilde{m}\omega}}. \quad (5.9)$$

Aus Gl. (5.9) kann das Schalldämm-Maß R ermittelt werden:

$$R = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{|t|^2} \right). \quad (5.10)$$

Von besonderer Bedeutung ist hierbei das Verhältnis $\frac{k^4}{k_B^4} = \frac{f^2}{f_k^2}$ in Gl. (5.9). Unterhalb der *Inzidenzgrenzfrequenz* f_k kann das Dämmvermögen einer Struktur durch das bekannte *Massegesetz* beschrieben werden. Das Schalldämm-Maß ist in diesem Bereich näherungsweise lediglich von der flächenbezogenen Wandmasse abhängig. Die Inzidenzgrenzfrequenz gibt die Frequenz an, bei der die Länge der BiegeWellen gleich der Länge der Luftschallwellen ist. In diesem Fall kann die erzeugte BiegeWelle sehr leicht und mit hoher Amplitude angeregt werden, da sie dieselben Ausbreitungseigenschaften wie die freie Welle hat. Oberhalb der Inzidenzgrenzfrequenz übersteigt die BiegeWellenlänge die Luftschallwellenlänge. Die Inzidenzgrenzfrequenz ist gegeben durch:

$$f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{\rho c_0 d}{B}}}{2\pi}. \quad (5.11)$$

Für eine homogene Platte kann die BiegeWellenlänge λ_B aus

$$\lambda_B = 2\pi \sqrt[4]{\frac{Ed^2}{12\rho(1-\nu^2)} \frac{1}{\sqrt{\omega}}} \quad (5.12)$$

berechnet werden [84].

Es wird eine Fallunterscheidung für Gl. (5.9) durchgeführt, in welcher zwischen den Frequenzen unterhalb und oberhalb der Inzidenzgrenzfrequenz unterschieden wird. Nach Mittelung über den Einfallswinkel, nach FAHY [44] von 0° bis 78° , und einigen Näherungen erhält man für Frequenzen unterhalb der Grenzfrequenz das Massegesetz:

$$R_{stat} = 20 \log_{10} \left(\frac{\omega \tilde{m}}{2\rho_0 c_0} \right) - 3\text{dB}. \quad (5.13)$$

Oberhalb der Inzidenzgrenzfrequenz ist das Schalldämmvermögen neben der Masse der Wand auch von der inneren Dämpfung, beschrieben durch den Verlustfaktor η , abhängig und steigt generell steiler an. Die innere Dämpfung wird durch eine komplexe Biegesteifigkeit $B \rightarrow B(1+i\eta)$ ausgedrückt, die in Gl. (5.4) ersetzt wird. Nach einigen Rechnungen erhält man das Schalldämm-Maß oberhalb der Inzidenzgrenzfrequenz:

$$R = 20 \log_{10} \left(\frac{\omega \tilde{m}}{2\rho_0 c_0} \right) + 10 \log_{10} (2\eta) + 5 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_k} \right). \quad (5.14)$$

Die Gl. (5.13) und Gl. (5.14) sind nur für diejenigen Frequenzen gültig, die hinreichend weit von der Inzidenzgrenzfrequenz entfernt sind und gelten für unendlich ausgedehnte Platten unter der Vernachlässigung von Randbedingungen. In der DIN EN 12354 wird eine Vorgehensweise beschrieben, die es erlaubt, das Schalldämm-Maß für endliche Bauteile unter Berücksichtigung von Prüfstandsbedingungen genauer zu bestimmen [39]. Zur Erläuterung des typischen Verlaufs des Schalldämm-Maßes wird hier noch eine Gleichung zur näherungsweise Berechnung der Eigenfrequenzen $f_{e,BP}$ einer rechteckigen Platte mit fest gelagerten Rändern und den Abmessungen l_x und l_y angegeben [81]:

$$f_{e,BP} = \frac{\omega_{e,BP}}{2\pi} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \left(Ed^2 \left(\frac{(\Delta m + m)^2}{l_x^2} + \frac{(\Delta n + n)^2}{l_y^2} \right)^2 \frac{1}{\rho(1-\nu^2)} \right)^{1/2} \quad (5.15)$$

für die Modenzahlen $m = 1, 2, 3, \dots$ und $n = 1, 2, 3, \dots$. Hierbei ist $\Delta m = ((nl_x/ml_y)^2 + 2)^{-1}$ und $\Delta n = ((ml_y/nl_x)^2 + 2)^{-1}$.

Die Eigenfrequenzen eines Quader-Raums mit der dazugehörige Modenzahl (n_x, n_y, n_z) sind:

$$f_n = \frac{c_0}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2}, \quad (5.16)$$

mit $n_{x,y,z} = 1, 2, 3, \dots$ und den Abmessungen l_x, l_y und z in die jeweiligen Koordinatenrichtungen. In Abb. 5.5 ist der prinzipielle Verlauf des Schalldämm-Maßes für monolithische Wände dargestellt. Die Anzahl und Anordnung der Wandmoden und Raummoden hängen vom Aufbau des Labors und der Wand ab und können sich auch überlagern.

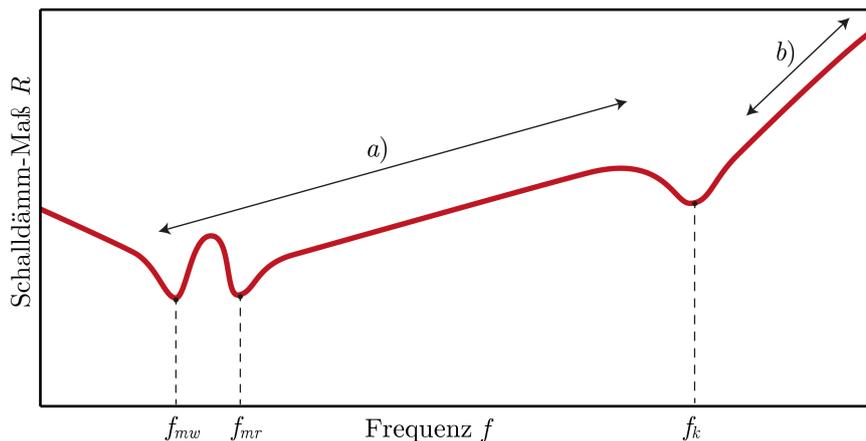


Abbildung 5.5: Prinzipieller Verlauf des Schalldämm-Maßes bei einer einschaligen Wand mit der Inzidenzgrenzfrequenz f_k , Wandmode bei f_{mw} und Raummode bei f_{mr} . Bereich a) nach Gl. (5.13) und Bereich b) nach Gl. (5.14).

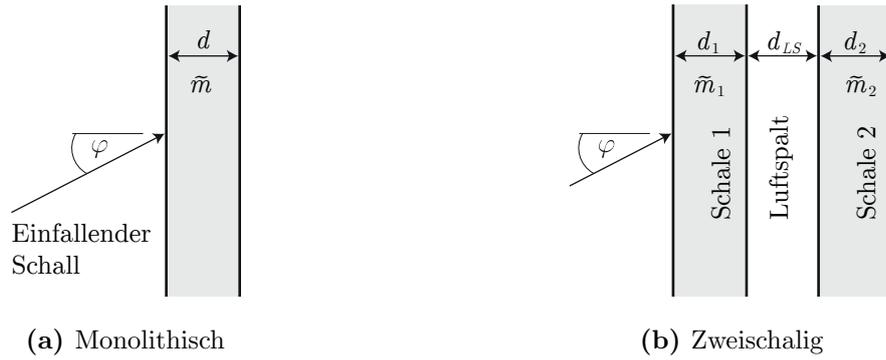


Abbildung 5.6: Monolithische und zweischalige Wände.

Zweischalige Wände

Während der Schalldurchgang durch einschalige Wände durch Näherungsformeln gut beschrieben werden kann und mit experimentellen Werten durchaus zumindest tendenziell übereinstimmt, gilt dies nicht für zwei- und mehrschalige Wandaufbauten. Analytische Herleitungen scheitern an der mathematisch schwierigen Beschreibung der Kopplung der Schalen, eventuell auftretender Schallbrücken und der größeren Anzahl von Parametern, welche teilweise schwierig zu bestimmen sind. Die hier vorgestellten analytischen Gleichungen dienen daher vielmehr der generellen Beschreibung der unterschiedlichen Wirkmechanismen und sind nicht dazu geeignet, ein experimentell ermitteltes Schalldämm-Maß vorherzusagen (Abb. 5.7). Neben den bereits erwähnten Effekten spielt die Resonanzfrequenz des Masse-Luft-Masse-Systems eine große Rolle. Außerdem kommt es zu Resonanzen der Luftsäule zwischen den Schalen, sofern der Zwischenraum nicht mit passendem Dämmmaterial gefüllt wird. Für den Transmissionskoeffizienten ergibt sich nach [44]

$$t = \frac{2i\rho_0^2 c_0^2 \sec^2(\varphi) \sin(kd_{LS} \cos(\varphi))}{z_1 z_2 \sin^2(kd_{LS} \cos(\varphi)) + \rho_0^2 c_0^2 \sec(\varphi)}, \quad (5.17)$$

mit

$$z_j = \tilde{m}_j (i\omega + \eta_j \omega_{e,BP,j}) - \frac{i\omega_{e,BP,j}^2 \tilde{m}_j}{\omega} + \rho_0 c_0 \sec(\varphi) (1 - i \cot(kd \cos(\varphi))).$$

Der Index j bezeichnet die jeweiligen Werte der ersten und zweiten Schale, d_{LS} ist die Dicke des Luftspalts (siehe Abb. 5.6b). Die Masse-Luft-Masse Resonanz wird durch die Kopplung der Schalen mit der Luftsäule verursacht, welche als Feder angesehen werden kann. Die entsprechende Resonanzfrequenz ergibt sich aus

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_0 c_0^2}{d_{LS}} \left(\frac{\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2}{\tilde{m}_1 \tilde{m}_2} \right)}. \quad (5.18)$$

Die Resonanzen der Luftsäule $\omega_{e,LS}$ werden bei der Abwesenheit von Dämmmaterialien durch die Abmessungen des trennenden Luftspalts bestimmt und treten bei in der Praxis üblichen Konstruktionen erst bei relativ hohen Frequenzen auf. Sie können aus der folgenden Gleichung bestimmt werden:

$$\omega_{e,LS} = n \frac{\pi c_0}{d}, \quad (5.19)$$

mit $n = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

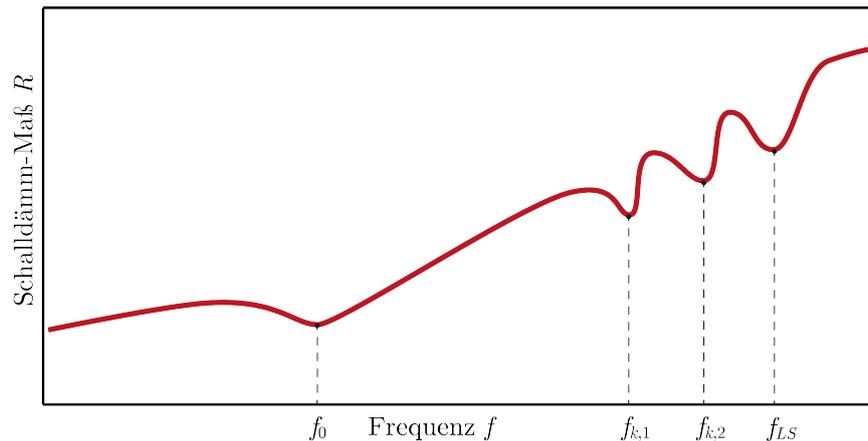


Abbildung 5.7: Prinzipieller Verlauf des Schalldämm-Maßes für eine zweischalige Wand mit der Masse-Luft-Masse Resonanzfrequenz f_0 , den Inzidenzgrenzfrequenzen der Schalen $f_{k,i}$ und der Resonanzfrequenz des Luftspalts f_{LS} .

5.2.3 Näherungen für geometrisch komplexe Wandaufbauten

Während für monolithische Wände noch relativ gute analytische Näherungsmethoden existieren, gestaltet sich die Vorhersage der Schalldämmeigenschaften von mehrschichtigen/mehrschaligen Wandaufbauten als sehr komplex. Der Bestimmung des Schalldämm-Maßes sind hier recht enge Grenzen bezüglich der Randbedingungen, Materialmodelle und Geometrie der Wandstruktur gesetzt.

Für einfach aufgebaute Sandwichstrukturen können Näherungsgleichungen entwickelt werden. Die Verbindung der Einzelschichten kann hierbei unter der Berücksichtigung von Scherung als fest angenommen werden. Weiterhin können Absorberschichten und Luftspalte berücksichtigt werden. Mittels komplexer mathematischer Beziehungen können auch die Brücken zwischen den einzelnen Schalen von Doppelwänden berücksichtigt werden, was eine präzisere Vorhersage des Schalldämm-Maßes ermöglicht [44]. Eine übersichtliche Zusammenfassung zur näherungsweise Bestimmung des Schalldämm-Maßes von einfach aufgebauten Paneelen gab MECHEL in [78] an.

Zur Berechnung von Strukturen, die aus einer Anzahl von Schichten bestehen, kann die

Übertragungsmatrix-Methode verwendet werden [68]. Hierbei werden für jede Schicht die physikalischen Beziehungen auf beiden Seiten der Schicht in einer Matrix angegeben. Die Matrizen werden anschließend zusammengefasst und das Schalldämm-Maß kann aus der Eingangsgröße der ersten Schicht und der Ausgangsgröße der letzten Schicht berechnet werden. Die Methode wird von der von VIGRAN entwickelten Software **NorFLAG** verwendet, um das Schalldämm-Maß von monolithischen, geschichteten und mehrschaligen Wandstrukturen zu berechnen [132]. Die einzelnen Schichten haben dabei unendliche Ausdehnung, wobei allerdings ein Fenster zur Begrenzung verwendet werden kann. Es kann unter anderem die KIRCHHOFF-Theorie für dünne elastische Platten und die REISSNER-MINDLIN-Theorie für dicke elastische Platten verwendet werden, wobei dem Anwender jedoch die Grenzen der verwendeten Theorien bewusst sein müssen, um sinnvolle Ergebnisse zu erhalten. Die KIRCHHOFF-Theorie nimmt an, dass keine Schubdeformationen auftreten und ist gültig für Platten, deren Biegewellenlänge (vgl. Gl. (5.12)) größer als sechsmal deren Plattendicke ist, was die maximale Frequenz bzw. die maximale Dicke beschränkt. So kann das Schalldämm-Maß bis 3150Hz für eine Betonplatte berechnet werden, deren Dicke höchstens etwa 0.06m beträgt [1]. Die Theorie für dicke elastische Platten erlaubt Schubverformungen, was die Grenzen der Anwendbarkeit erweitert.

Je komplexer der Wandaufbau wird, bspw. durch elastische Brücken in mehrschaligen Strukturen, Hohlräume oder geriffelte Kerne von Sandwichstrukturen, desto schwieriger gestaltet es sich hinreichend genaue Näherungsmethoden zu entwickeln. Mittels der Methode der statistischen Energie-Analyse (SEA) lassen sich noch relativ komplex aufgebaute Wandstrukturen mit vergleichsweise niedrigem Aufwand berechnen. Hierbei wird das Gesamtsystem in Subsysteme unterteilt, diese können bspw. einzelne Schalen, Fluidgebiete oder elastische Brücken sein, die durch Kopplungen miteinander verbunden werden. Die Zustandsgrößen sind die gespeicherte Energie innerhalb der Subsysteme und die Energieflüsse zwischen diesen, welche statistische Werte darstellen. Es ergibt sich ein System von Gleichungen, aus dem die Schalldämmung von relativ komplex aufgebauten Wandstrukturen bestimmt werden kann [25, 122]. Ein Nachteil der SEA ist die Beschränkung auf den mittleren und hohen Frequenzbereich, da eine ausreichend hohe Modendichte vorausgesetzt wird.

Analytische Näherungslösungen sind für allgemeine komplexe Wandaufbauten nicht bekannt. Für geometrisch komplizierte Wände, mit komplexen Randbedingungen und Materialeigenschaften, müssen numerische oder experimentelle Methoden eingesetzt werden. Zu diesem Zweck wird in dieser Arbeit ein virtuelles Labor auf der Grundlage der SEM entwickelt, welches im folgenden Abschnitt beschrieben wird.

5.2.4 Ermittlung der Schalldämmung im virtuellen Labor

Zur Berechnung der Schalldämmung einer Wandstruktur wird das FSI-Problem in Abb. 5.8 gelöst. Die Berechnung erfolgt im Frequenzbereich für eine große Anzahl von Frequenzen. Der Übersicht halber werden die Bestimmungsgleichungen mit den Randbedingungen aus Abschnitt 4.4.1 nochmals zusammengefasst:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} + k^2 p(\mathbf{x}) &= Q \quad \text{in } \Omega_F, \\
 \tilde{\nabla}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} &= -\rho \omega^2 \mathbf{u} \quad \text{in } \Omega_S, \\
 \mathbf{u}_S \mathbf{n}|_{\Gamma_{S,S}} &= \mathbf{u}_F \mathbf{n}|_{\Gamma_{S,F}} \\
 \text{und} \\
 \mathbf{t} = -p \mathbf{n}_S &= p \mathbf{n}_F \quad \text{auf } \Gamma_{S,F}.
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

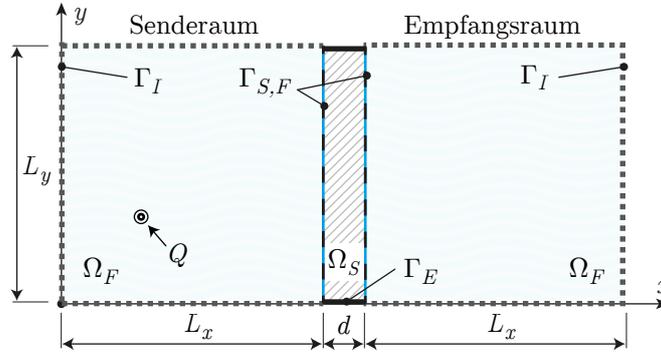


Abbildung 5.8: FSI-Problem.

Die Wandstruktur ist fest gelagert und die Randbedingung lautet daher

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E. \tag{5.21}$$

Statt einer festen Lagerung kann natürlich auch eine gewisse Nachgiebigkeit der Lagerung berücksichtigt werden. Zur Abbildung der Absorptionseigenschaften der Wände des Labors wird die Impedanzrandbedingung

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{n} \cdot \nabla p = -\frac{i\omega p}{Z_g} \quad \text{auf } \Gamma_I \tag{5.22}$$

verwendet. Als Schallquelle Q wird ein Punktstrahler nach Gl. (2.12) verwendet. Dessen Leistung P ist zur Berechnung des Frequenzgangs irrelevant und wird daher zu Eins gesetzt. Die verwendeten Materialwerte für die Luft sind die Dichte $\rho_0 = 1.21 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ und die Schallgeschwindigkeit $c_0 = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Falls nicht anders angegeben, wird eine 2D Simulation verwendet, in welcher für die Wandstruktur der ebene Verzerrungszustand angenommen

wird. Die Abweichungen gegenüber einer 3D Berechnung sind für die untersuchten Strukturen akzeptabel gering [5, 32], insbesondere in Anbetracht des weitaus geringeren Berechnungsaufwands. Voraussetzung ist hierbei natürlich, dass die 3D Wandstruktur in einer Koordinatenrichtung keine Änderungen in der Geometrie oder der Materialeigenschaften erfährt. Die Parameter der numerischen Berechnung des Schalldämm-Maßes orientieren sich prinzipiell an der experimentellen Ermittlung. Diese wird in der DIN EN ISO 10140 beschrieben und gibt unter anderem die folgenden Richtlinien vor [38]:

- Hoher Reflexionsgrad der Wände des Labors,
- Vermeidung ungünstiger Abmessungsverhältnisse,
- Volumen von 50 – 60m³ für den Sende- und Empfangsraum.

Das vorrangige Ziel dieser Richtlinien ist die Schaffung eines möglichst diffusen Schallfeldes, also räumlich homogen verteilter Schallenergie, sowie einem möglichst geringem Einfluss der Raummoden. Dies gelingt, für praktikable Abmessungen des Labors, für den niedrigen Frequenzbereich aufgrund der großen Wellenlänge nicht, was zu deutlichem Einfluss des Labors auf das gemessene bzw. berechnete Schalldämm-Maß führt. In den Arbeiten von PAPADOPOULOS [89, 90] wurde eine Optimierung des geometrischen Aufbaus eines virtuellen Labors bezüglich der Modendichte im unteren Frequenzbereich vorgenommen. Damit kann die Anforderung des diffusen Schallfeldes und gleicher Modendichte besser erfüllt werden. Da hierbei jedoch die Berandungen des virtuellen Labors Polygonzüge werden, was die Flexibilität in der Netzgenerierung der Fluidbereiche einschränkt, wird dies in dieser Arbeit aufgrund des zu geringen Zugewinns nicht eingeführt.

Der Einfluss der Eigenfrequenzen der Fluidgebiete (nach Gl. (5.16)) sowie der Wandstruktur (nach Gl. (5.15) für monolithische Wandaufbauten) auf das ermittelte Schalldämm-Maß ist beispielhaft in der Abb. 5.9 dargestellt. In der Abb. 5.10 ist die Verteilung des Schalldruckpegels im Senderaum für zwei Frequenzen von 125Hz und 1250Hz gezeigt. Wird bspw. der räumliche Mittelwert über eine 1m² große Fläche gebildet, ist es leicht ersichtlich, dass der Wert für niedrige Frequenzen sehr stark von der Position der Messung abhängt.

Zur numerischen Berechnung des Frequenzverlaufs des Schalldämm-Maßes wird jede der 16 Terzen nach Tab. 5.1 im Bereich zwischen $f_{t,u}$ und $f_{t,o}$ in eine Anzahl n_t Frequenzen unterteilt. Der mittlere Schalldruckpegel im Sende- und Empfangsraum wird für jede Frequenz berechnet und daraus wird jeweils nach Gl. (5.2) das Schalldämm-Maß ermittelt. Der in Terzen gemittelte Verlauf des Schalldämm-Maßes wird durch arithmetische Mittelung über alle Frequenzen einer Terz berechnet. Für jede Terz wird die Geometrie entsprechend der höchsten Frequenz $f_{t,o}$ diskretisiert und alle Frequenzen innerhalb der Terz mit dieser Vernetzung berechnet. So wird bspw. die Terz $f_{t,m} = 100\text{Hz}$ in $n_t = 20$

Frequenzen zwischen 90Hz und 112Hz unterteilt, welche alle auf einem Netz berechnet werden, dessen Elementgröße so gewählt ist, dass der vorgegebene Fehler für 112Hz nicht überschritten wird. Die 20 Frequenzen der nächsten Terz werden dann auf einem etwas feineren Netz berechnete, so dass der Fehler für 140Hz nicht überschritten wird, usw.

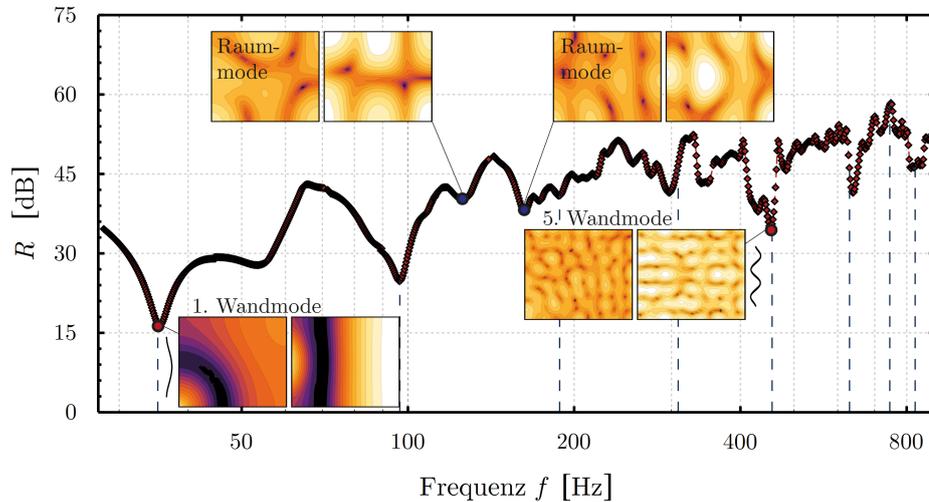


Abbildung 5.9: Einfluss von Eigenfrequenzen auf das Schalldämm-Maß R . Die Schalldruckpegel in Sende- und Empfangsraum sind beispielhaft für einige ausgewählte Frequenzen dargestellt.

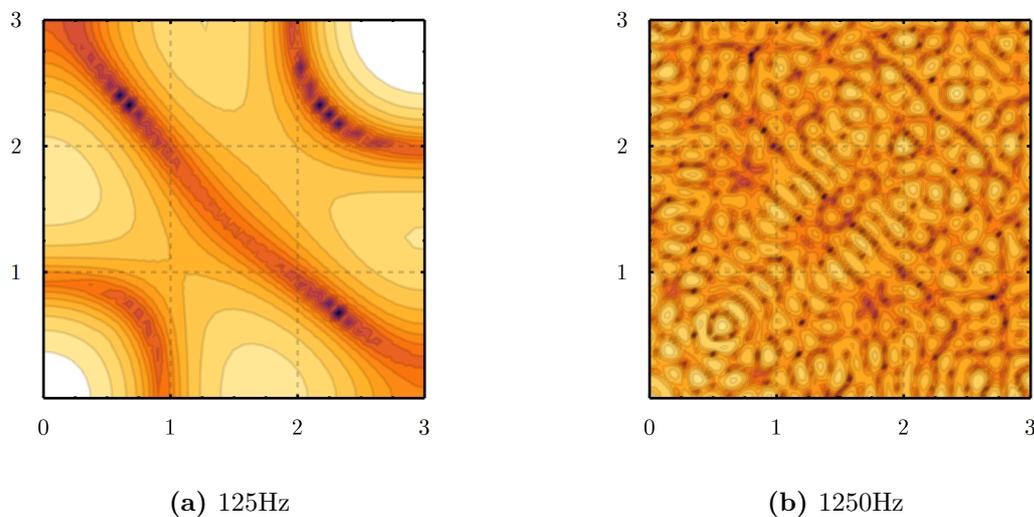


Abbildung 5.10: Beispiel für die Verteilung des Schalldruckpegels im Senderaum.

Für geschichtete/mehrschalige Wände kommt ein eigens erstellter Algorithmus zum Aufbau des in Abb. 5.11 gezeigten strukturierten Netzes zum Einsatz. Dieser arbeitet auch die inneren Stützknoten der Formfunktionen direkt ein und nimmt dabei eine günstige Nummerierung der Knoten vor, um eine geringe Bandbreite in den Systemmatrizen des Fluid- und Strukturbereichs zu erzielen. Dünnwandige Schichten werden mit Elementen vernetzt, die eine unterschiedliche Ordnung der Formfunktionen in die Koordinatenrichtungen auf-

weisen, um die Anzahl der benötigten Freiheitsgrade zu senken, ohne die Genauigkeit zu verringern (siehe Abb. 3.9). Außerdem werden Elemente gleicher Form und Größe erkannt und eine überflüssige Neuberechnung der jeweiligen Elementmatrizen vermieden.

Für komplexe Geometrie, bspw. eingebrachte Hohlräume (siehe Abb. 5.11), wird wie bereits im Abschnitt 4.3.1 beschrieben vorgegangen. Der Netzgenerator der Software **COMSOL Multiphysics** erstellt, gemäß der jeweiligen Terz, ein Netz der Geometrie, welches in den SEM-Algorithmus importiert wird. Die inneren Stützknotten werden abhängig von der Ordnung der Formfunktionenn im nächsten Schritt eingearbeitet. Für strukturierte Bereiche wird gemäß dem vorangegangenen Abschnitt verfahren.

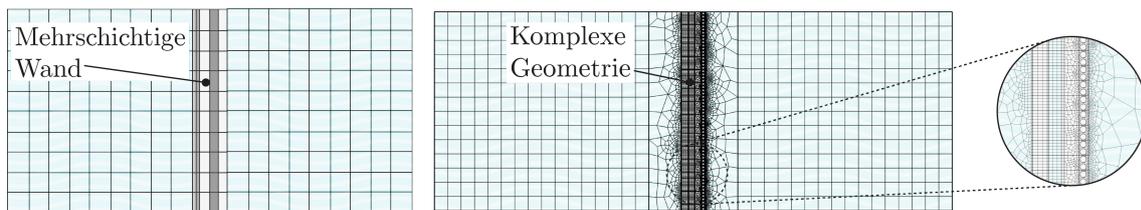


Abbildung 5.11: Strukturierte Vernetzung für mehrschichtige Wand und zweischalige Wand mit komplexer Geometrie. Die Stützstellen sind hier aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht dargestellt.

Die Größe der Elemente richtet sich nach der gewünschten Genauigkeit der Berechnung. Abhängig von der gewünschten Genauigkeit wird die optimale Ordnung der Formfunktionen gewählt, um die Berechnung möglichst zeiteffizient zu gestalten. Die Genauigkeit der Berechnung wird *a priori* durch den im Abschnitt 4.1 vorgestellten Fehlerschätzer vorgegeben. Hierzu wird die gewünschte Genauigkeit als Fehler ε_2 mit der gewählten Ordnung p der Formfunktionen kombiniert und daraus die notwendige Maximalgröße eines Elementes für jede der 16 Terzen berechnet. Der Fehlerschätzer liefert, wie beschrieben, lediglich eine ungefähre Abschätzung für die notwendige Diskretisierung, da andere Effekte wie bspw. die numerische Dispersion oder Eigenfrequenzen nicht berücksichtigt werden. Daher unterscheidet sich der tatsächliche Fehler der Schalldruckverteilung der FSI-Berechnung von der gewählten Genauigkeit. Der tatsächliche Fehler ist größer. Um Missverständnisse zu vermeiden, wird der gewählte Wert des *a priori* Fehlerschätzers als Fehlerschranke ε_{FS} bezeichnet. Die im Rahmen der Arbeit durchgeführten Untersuchungen haben jedoch gezeigt, dass die Werte des Fehlerschätzers zumindest tendenziell mit dem resultierenden Fehler des Schalldämm-Maßes übereinstimmen.

Es ist zu beachten, dass sich der Fehlerschätzer an der Luftschallwellenlänge, welche für eine gegebene Frequenz durch Gl. (2.6) exakt berechnet werden kann, orientiert und für dünne Strukturen mit einer entsprechend niedrigen Biegewellenlänge die Fehlerschranke entsprechend herabgesetzt werden muss. Es ist zwar möglich, die Biegewellenlänge für homogene Platten mit Gl. (5.12) zu ermitteln und als Kriterium für die minimale Ele-

mentlänge heranzuziehen. Jedoch ist dies für komplexe Geometrie nicht ohne Weiteres machbar.

5.3 Bestimmung der Wärmedurchgangszahl

Die experimentelle Ermittlung der Wärmedämmeigenschaften eines geometrisch komplexen Wandaufbaus kann über die Messung im geregelten oder kalibrierten Heizkasten erfolgen [42]. Dabei wird unabhängig vom Mechanismus der Übertragung (Wärmeleitung, natürliche Konvektion und Strahlung) die Gesamtmenge der Wärme gemessen, die von einer Seite der Wand auf die andere Seite übertragen wird. Das Verfahren bildet die Randbedingungen im Einbauzustand ab. Auf beiden Seiten der Wand befindet sich jeweils eine Kammer, welche mit atmosphärischer Luft gefüllt ist (siehe Abb. 5.12a). Während eine Kammer mit kalter Luft gefüllt ist, wird die andere Kammer durch Leistungszufuhr beheizt. Zur Bestimmung der Wärmedurchgangseigenschaften wird die notwendige Leistung zur Aufrechterhaltung des stationären Zustandes ermittelt. Die übliche Messungenauigkeit des Verfahrens wird in der Norm mit etwa 5% für homogene Probekörper angegeben.

Während die numerische Berechnung eines Wärmeleitungsproblems in einem Festkörper, auch bei komplexer Geometrie, verhältnismäßig unkompliziert ist, ist der Wärmedurchgang durch Hohlräume schwierig zu berechnen. Der Grund dafür besteht in der starken Kopplung der einzelnen Vorgänge der Wärmeübertragung: Wärmeleitung, Konvektion und Strahlung. Der Energietransport durch die Strahlung hängt von der Temperatur der Oberflächen ab. Ebenso hängt der Massentransport durch die natürliche Konvektion vom Temperaturgradienten innerhalb des fluidgefüllten Hohlraums ab. Obwohl es in Ausnahmefällen möglich ist, die Gleichungen (2.32), (2.35) und (2.36) für den stationären Fall zu lösen, so muss doch in der Regel ein zeitabhängiges Problem gelöst werden. Die Wärmedurchgangszahl U wird nach hinreichend langer Zeit berechnet, so dass das Temperaturfeld keinen allzu starken Schwankungen mehr unterliegt. Der Grund dafür, dass die stationären Gleichungen sich nur in manchen Einzelfällen lösen lassen, liegt in den Konvergenzproblemen, die durch die nichtlinearen NAVIER-STOKES-Gleichungen verursacht werden. Aus dem gleichen Grund kann auch die Lösung der zeitabhängigen Wärmeübertragungsprobleme rechnerisch sehr anspruchsvoll sein, eine sehr feine Vernetzung benötigen und eine sehr lange Berechnungszeit erfordern.

Unter gewissen Voraussetzungen lassen sich jedoch die komplexen und gekoppelten Vorgänge der Wärmeübertragung in luftgefüllten Hohlräumen durch ein reines Wärmeleitungsproblem approximieren, was die Berechnung der Wärmedurchgangszahl erheblich vereinfacht. Dieser Abschnitt beschreibt ein virtuelles Labor dazu in dem statt der aufwändigen gekoppelten Simulation ein äquivalenter Wärmeleitkoeffizient für die Luft in

Hohlräumen verwendet wird, in dem die Übertragung der Energie durch die Wärmeleitung, die natürliche Konvektion und die Strahlung zusammengefasst wird. Der Aufbau im virtuellen Labor ist in der Abb. 5.12b dargestellt.

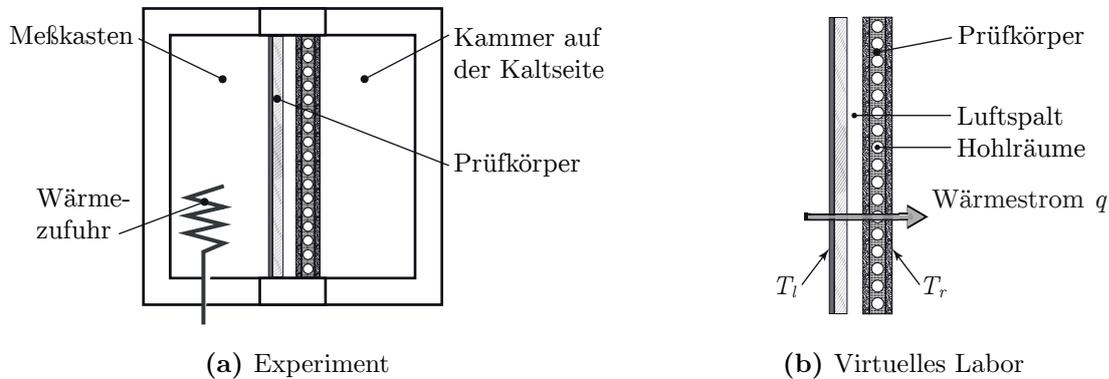


Abbildung 5.12: Prinzipskizze zur (a) experimentellen Ermittlung der Wärmedurchgangszahl im kalibrierten Heizkasten (nach [42]) und (b) numerischen Ermittlung im virtuellen Labor.

Approximativer Wärmeleitkoeffizient für die Luft in den Hohlräumen

Die DIN EN ISO 6946 beschreibt eine Methode zur Anpassung des Wärmeleitkoeffizienten k eines Luftspalts in Abhängigkeit von seinen Abmessungen und Emissionsgraden der Oberflächen [40]. Die dazu notwendige Definitionen können der Abb. 5.13 entnommen werden. Für eine angenommene Temperaturdifferenz von $\Delta T < 5\text{K}$ zwischen den Wänden, die den Luftspalt begrenzen, ist der Wärmedurchlasswiderstand durch

$$R_a = 1 / (h_a + h_r), \quad h_a = \max(0.025/d_{LS}, 1.25), \quad h_r = 4\sigma T_{mn}^3 / (1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1) \quad (5.23)$$

gegeben. Hierbei ist h_a der Wärmeübergangskoeffizient durch die Leitung und Konvektion in mK/W für den horizontal verlaufenden Wärmefluss, und σ ist die BOLTZMANN-Konstante. Die Emissionsgrade der Oberflächen für einen Luftspalt mit einer mindestens zehnfach größeren Dicke d_{LS} als die Breite b wird über den Wärmeübergangskoeffizienten durch die Strahlung h_r berücksichtigt. In Gl. (5.23) ist T_{mn} die mittlere thermodynamische Temperatur der Oberflächen und deren Umgebung und ε_j ist der jeweilige hemisphärische Emissionsgrad der Luftspaltwand mit $j = 1, 2$. Der Wert des hemisphärischen Emissionsgrades beträgt für die meisten Oberflächen $\varepsilon > 0.8$ [10]. Ist dieser Wert für die Oberfläche unbekannt, wird er als $\varepsilon = 0.9$ angenommen. Zur Bestimmung von T_{mn} wird näherungsweise ein linearer Verlauf der Temperatur über die Breite des Luftspalts angenommen und der Wert in der Luftspaltmitte gewählt. Für eine Temperaturdifferenz von mehr als $\Delta T \geq 5\text{K}$ oder andere Verhältnisse zwischen der Breite und der Dicke des Spalts gibt die DIN EN ISO 6946 ähnliche Verfahren an. Bei kleinen Verhältnissen zwischen der Breite und der Dicke sind jedoch Abweichungen möglich [123]. Für eine

nicht-rechteckige Form des Hohlraums wird seine Fläche berechnet und zur Anwendung des Verfahrens wird der Hohlraum in äquivalente Rechteckform mit dem Abmessungsverhältnis des Luftspalts transformiert. Diese Methodik ist jedoch auf einfache Geometrie des Hohlraums beschränkt.

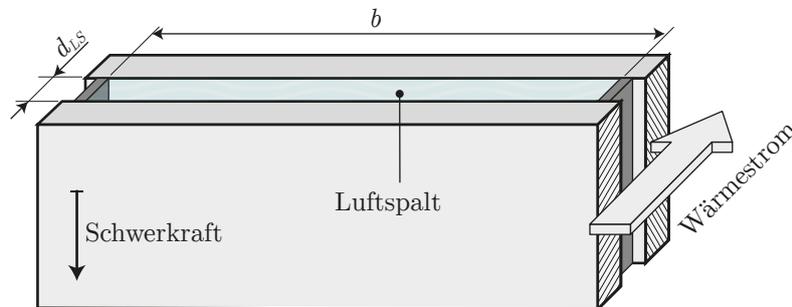


Abbildung 5.13: Näherungsberechnung für einen Luftspalt nach DIN EN ISO 6946.

Das Verfahren wird in dieser Arbeit auch für etwas komplexer geformte Hohlräume verwendet. Die Norm DIN EN ISO 6946 gibt keine Richtlinien vor, wie bei geringer Höhe des Hohlraums zu verfahren ist. Das Geschwindigkeitsfeld und damit das Temperaturfeld infolge der natürlichen Konvektion unterscheidet sich bei den Spalten geringer Höhe von den Spalten großer Höhe, daher wird eine äquivalente Dicke d_{LS} des Hohlraums ermittelt, um dem Rechnung zu tragen. Weiterhin ist zu beachten, dass der Wärmefluss sich bei anderer Ausrichtung des Bauteils, und damit anderer Charakteristik der natürlichen Konvektion, stark unterscheiden kann. Wirkt die Schwerkraft in der Richtung der Hohlraumachse, wird das Verfahren der DIN EN ISO 6946 für niedrige Verhältnisse von b/d_{LS} angewandt. Auch hier muss wieder eine äquivalente Dicke d_{LS} ermittelt werden, worauf hier jedoch nicht explizit eingegangen werden soll. In der Anwendung müssen die Gültigkeitsgrenzen des Näherungsverfahrens bestimmt und eingehalten werden. Im Anhang A.3 werden dazu Beispiele gezeigt. Das Verfahren sollte nur dann angewendet werden, wenn die Hohlräume vergleichsweise niedrigen Einfluss auf die Wärmedurchgangszahl der Wandstruktur haben. Dies ist der Fall, wenn sie kleine Abmessungen im Verhältnis zu den Gesamtabmessungen der Wandstruktur haben.

Nachdem die äquivalenten Wärmeleitkoeffizienten für die Hohlräume und Spalte einer Wandstruktur bestimmt wurden, wird das Wärmeleitungsproblem mittels der SEM gelöst. Die Randbedingungen sind die Temperaturen $T_l = 273\text{K}$ und $T_r = 293\text{K}$ auf der linken und rechten Seite der Wandstruktur (siehe Abb. 5.12b). Aus dem Wärmestrom q kann mit der Gl. (2.38) die Wärmedurchgangszahl ermittelt werden.

Die Anwendung des in der Norm beschriebenen Verfahrens hat sich für Luftspalte und auch für relativ komplex geformte Hohlräume bewährt. So wurden bspw. Ziegelwände hinsichtlich der Größe der eingebrachten Kavitäten untersucht und optimiert [31], Ziegel aus Papierabfällen mit besonderer Porosität analysiert [126] und die Effekte von speziellen

Beschichtungen mit niedriger Emissionszahl in Hohlräumen studiert [104].

Geschichtete Wände

Die Berechnung der Wärmedurchgangszahl erfolgt für geschichtete Wände gemäß der Gl. (2.39), wobei für den Luftspalt ein äquivalenter Wärmeleitkoeffizient verwendet wird. Zur Berechnung des Temperaturverlaufs wird die stationäre Wärmeleitungsgleichung jeweils für die einzelnen Schichten gelöst. Als Randbedingungen sind die Temperaturen am linken und rechten Rand vorgegeben. Als Übergangsbedingung wird die Kontinuität der Temperatur und des Wärmeflusses an der Grenzfläche der einzelnen Schichten vorausgesetzt. So ergeben sich bspw. für eine dreischichtige Wand mit den Schichtdicken d_i und den jeweiligen Wärmeleitkoeffizienten k_i die folgenden Gleichungen mit den dazugehörigen Rand- und Übergangsbedingungen:

$$\begin{aligned}
 k_1 \nabla^2 T_1 = 0, \quad k_2 \nabla^2 T_2 = 0, \quad k_3 \nabla^2 T_3 = 0, \\
 \text{mit den Randbedingungen} \\
 T_1(0) = 273\text{K}, \quad T_3(d_1 + d_2 + d_3) = 293\text{K} \\
 \text{und den Übergangsbedingungen}
 \end{aligned}
 \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}
 k_1 \nabla T_1|_{x=d_1} = k_2 \nabla T_2|_{x=d_1}, \quad k_2 \nabla T_2|_{x=d_1+d_2} = k_3 \nabla T_3|_{x=d_1+d_2}, \\
 T_1(d_1) = T_2(d_1), \quad T_2(d_1 + d_2) = T_3(d_1 + d_2).
 \end{aligned}$$

Die Lösung des Wärmeleitungsproblems ist analytisch möglich und lässt sich über die Integrationen der Differentialgleichungen und durch die Anpassungen der Rand- und Übergangsbedingungen herleiten.

5.4 Optimierung multifunktionaler Wandstrukturen

5.4.1 Bestimmung der Zielfunktion

Eine multikriterielle Optimierung kann auf mehrere Weisen durchgeführt werden. Eine Möglichkeit ist die Zusammenfassung von Schalldämmungs-Maß R_w^{mod} und Wärmedurchgangszahl U in einer Zielfunktion, wobei eine Gewichtung der Teilziele vorgenommen werden kann. Im Folgenden wird die Zielfunktion

$$f_t(\mathbf{d}) = C + \delta_R R_w^{mod}(\mathbf{d}) - \delta_U U(\mathbf{d})
 \tag{5.25}$$

mit den jeweiligen Gewichten δ_R und δ_U definiert. Die Variablen \mathbf{d} der Zielfunktion sind die variablen Geometrie- und Materialparameter. Der Wert C wird zu $C = 100$ gesetzt und führt dazu, dass die Werte für $f_t(\mathbf{d})$ immer positiv sind. Dies hat lediglich ästhetische Gründe. Das negative Vorzeichen vor dem dritten Term trägt dem Umstand Rechnung, dass eine Verbesserung der Wärmedämmung durch einen kleineren Wert der Wärmedurchgangszahl U ausgedrückt wird. Alternativ dazu kann auch der gewichtete inverse Wert von U verwendet werden, was einen stärkeren Einfluss von niedrigen Werten von U auf die Zielfunktion bewirkt. In den Beispielen im Abschnitt 6.3 sollen die Teilziele Schalldämmung und Wärmedämmung jeweils den gleichen Anteil an einer Erhöhung des Wertes der Zielfunktion haben. Bei der Wahl der Gewichtungsfaktoren wird hierfür der Wert δ_R zu eins gesetzt und der Wert δ_U durch

$$\delta_U = \frac{|R_{w,max}^{mod} - R_{w,min}^{mod}|}{|U_{max} - U_{min}|}$$

bestimmt. Die Werte für $R_{w,max}^{mod}$, $R_{w,min}^{mod}$ und U_{max} , U_{min} werden durch eine Vorabrechnung bestimmt, in welcher die Grenzen der Optimierungsvariablen, also die minimalen und maximalen Werte für d_i , eingesetzt werden. Man erhält hierbei dann natürlich lediglich eine Abschätzung der minimalen und maximalen Werte für U und R_w^{mod} , da die Werte innerhalb der Grenzen der Nebenbedingungen auch größer oder kleiner werden können.

Es muss an dieser Stelle betont werden, dass die gleiche Gewichtung der Teilziele auf deren Anteil an der Zielfunktion bezogen ist und nicht als objektive Größe für eine letztendlich subjektive Verbesserung verstanden werden darf. Es kann im Gegensatz dazu bspw. auch eine Gewichtung vorgenommen werden, bei welcher eine Verdopplung der wahrgenommenen Lautstärke (im Rahmen der Psychoakustik verdoppelt sich die Lautstärke für ≈ 10 dB Zunahme) und eine Halbierung der Wärmedurchgangszahl den gleichen Anstieg der Zielfunktion zur Folge haben. Ein ähnliches Vorgehen lässt sich in der Maschinendynamik definieren, wobei hier eine Zunahme des Schalldruckpegels um 6dB eine Verdopplung des Schalldrucks und eine Zunahme um 3dB eine Verdoppelung der Schallintensität zur Folge haben. Es muss dann im Übrigen die Ermittlung des Einzahlwertes dem relevanten Frequenzspektrum entsprechend angepasst werden.

Eine weitere Möglichkeit ist die Erfüllung eines Zielwertes (ein Mindestwert $R_{w,min}^*$ des Schalldämm-Maßes oder Maximalwert der Wärmedurchgangszahl U_{max}^* wird durch den Auftraggeber oder gesetzliche Vorschriften vorgegeben) und dann die Maximierung bzw. Minimierung des anderen Ziels. Wird also bspw. eine Mindestanforderung an die Schalldämmeigenschaften eines Bauteils gestellt, ist dann für jede Parameterkombination zu überprüfen, ob diese erfüllt ist und lediglich die Wärmedämmung wird weiter verbessert. In der Zielfunktion Gl. (5.25) wird das Gewicht δ_R zu Null und das Gewicht δ_U zu

Eins gesetzt. Die Berechnung wird nur durchgeführt, falls die Bedingung $R_w^{mod} \geq R_{w,min}^*$ erfüllt ist. Der Wert der Zielfunktion erhöht sich dann ausschließlich für eine bessere Wärmedämmung. Analog kann auch eine Optimierung der Schalldämmung für einen gegebenen maximalen Wert der Wärmedurchgangszahl durchgeführt werden.

Für eine größere Entscheidungsfreiheit des Anwenders wird die *Pareto-optimale Lösung* ermittelt. Im Optimierungsproblem wird dann nicht ein einzelner optimaler Punkt einer Zielfunktion gesucht, sondern ein Gütefunktionsvektor $\mathbf{f}(\mathbf{d}) = [-R_w^{mod}(\mathbf{d}), U(\mathbf{d})]^T$ wird minimiert [91, 144]. Die PARETO-optimale Lösung P ist durch

$$\mathbf{d}^* \in P \Leftrightarrow \{\mathbf{d} \in D \mid \mathbf{f}(\mathbf{d}) \leq \mathbf{f}(\mathbf{d}^*)\} = \{\}$$

definiert. Die leere Menge auf der rechten Seite der Gleichung bedeutet, dass ein Punkt \mathbf{d}^* zu der PARETO-optimale Lösungsmenge P nur dann gehört, falls es keinen anderen Punkt gibt, an dem sich die Ziele R_w^{mod} und U des Optimierungsproblems verbessern. Alle Punkte der PARETO-optimale Lösung bilden die *Pareto-Front*. Der Anwender entscheidet nach den selbstgewählten Kriterien, welcher Punkt der PARETO-Front die optimale Lösung darstellt. Als Entscheidungskriterium für die optimale Lösung können auch weitere Werte, bspw. die sich daraus ergebende Gesamtdicke oder das Gewicht der Wandstruktur, hinzugezogen werden.

5.4.2 Optimierung durch Parametervariation und genetischen Algorithmus

Das Schalldämmvermögen einer Struktur hängt im Wesentlichen von der Steifigkeit, der Materialdämpfung und insbesondere von der flächenbezogenen Masse ab und die Wärmedämmung von den Wärmeleitkoeffizienten. Wird nur eines der beiden Ziele für eine geringe Anzahl von Parametern und einfacher Wandstruktur (bspw. die Variation der Dicke von lediglich einer Schicht einer mehrschichtigen Wand) optimiert, lässt sich ein Bestwert unter Umständen auch durch praktische Erfahrung abschätzen.

Für eine multikriterielle Optimierung ist dies im Allgemeinen nicht möglich. Für gebräuchliche Werkstoffe korreliert das Schalldämmvermögen einer Struktur üblicherweise nicht mit dem Wärmedämmvermögen [85]. Sind weiterhin Luftspalte und Hohlräume vorhanden, besteht sowohl für die Wärmedämmung als auch für die Schalldämmung ein komplexer Zusammenhang. Ist die Anzahl der Auslegungsparameter (bspw. die Anzahl der Schichten einer Wandstruktur) gering, kann eine einfache Parametervariation zum Ziel führen. Da der erforderliche Aufwand dazu jedoch sehr stark mit der Anzahl der Auslegungsparameter wächst, sind dieser Möglichkeit jedoch enge Grenzen gesetzt. Werden bspw. zwei Parameter d_1 und d_2 in $i = 10$ Schritten unterteilt, sind hierfür $i^2 = 100$

Berechnungen notwendig. Für drei Parameter und $i = 20$ sind es bereits 8000 Berechnungen. Weiterhin sind unter Umständen zur genaueren Ermittlung des Optimums noch Folgerechnungen notwendig. Für lediglich ein oder zwei Parameter lässt sich jedoch der Verlauf der Zielfunktion sehr anschaulich darstellen. Aus dem Aufbau der Funktion lassen sich möglicherweise auch weitere Informationen gewinnen und der Einfluss von einzelnen Parametern lässt sich gezielt untersuchen.

Für eine höhere Anzahl von Auslegungsparametern ist der Einsatz eines passenden Optimierungsalgorithmus notwendig. Als ein weit verbreiteter Ansatz sind die genetischen Algorithmen zu nennen, die zur Klasse stochastischer Optimierungsalgorithmen gehören. Diese beruhen darauf, dass die Prinzipien der Evolutionstheorie nachgeahmt werden, um damit anspruchsvolle Probleme der Optimierung zu lösen. Zu den Vorteilen genetischer Algorithmen zählt, dass kaum Problemwissen zur Lösung der Optimierungsaufgabe vorab notwendig ist. Weiterhin können auch Lösungen für nichtlineare und diskontinuierliche Problemstellungen gefunden werden, in denen die traditionellen Optimierungsverfahren normalerweise versagen. Als ein großer Nachteil muss ein hoher Rechenaufwand in Kauf genommen werden, der aus der hohen Anzahl von notwendigen Berechnungsiterationen resultiert. Außerdem kann unter Umständen der globale Bestwert nicht gefunden und lediglich ein lokales Optimum ermittelt werden.

Ein genetischer Algorithmus läuft im Allgemeinen nach folgendem Schema ab. Eine Anfangsmenge von Individuen, ausgedrückt durch eine Kombination der Parameter und oft als *Chromosomen* bezeichnet, mit den, in den Grenzen der Nebenbedingungen zufällig gewählten Parametern, bildet die erste Generation. Die Anzahl der Individuen ist üblicherweise relativ hoch, weshalb Techniken entwickelt wurden, um die notwendige Anzahl und damit den Berechnungsaufwand für spezielle Einsatzfälle zu reduzieren [135]. Im Anschluss wird eine Iterationsschleife mit einem geeigneten Abbruchkriterium durchlaufen, wobei in jedem Durchlauf eine neue Generation erzeugt wird. Für jede Generation werden durch die Evaluation der Zielfunktion für die einzelnen Individuen die sogenannten *Fitnesswerte* gebildet, welche angeben wie weit das spezifische Set der Optimierungsparameter an das Optimierungsziel angenähert ist. Anschließend werden die folgenden Operationen, nämlich die *Selektion*, *Rekombination* und *Mutation*, vorgenommen, um eine neue Generation zu bilden:

- Der Operator der Selektion wählt Individuen basierend auf ihrem Fitnesswert aus. Je höher der Fitnesswert ist, desto höher ist die Chance für das Individuum seine Zusammensetzung von Chromosomen an die nachfolgende Generation weitergeben zu können.
- Durch die Rekombination werden neue Individuen durch die Kombination der Chromosome der Eltern gebildet.

- Die Mutation erlaubt die zufällige Abänderung von Chromosomen.

Neben diesen Basis-Mechanismen können auch andere weiterentwickelte Techniken zum Einsatz kommen [50, 135]. Das Ablaufdiagramm des genetischen Algorithmus zur multikriteriellen Optimierung von Wandstrukturen und Paneelen ist in der Abb. 5.14 dargestellt. Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Berechnungsalgorithmus von CASTELLANOS [20] verwendet.

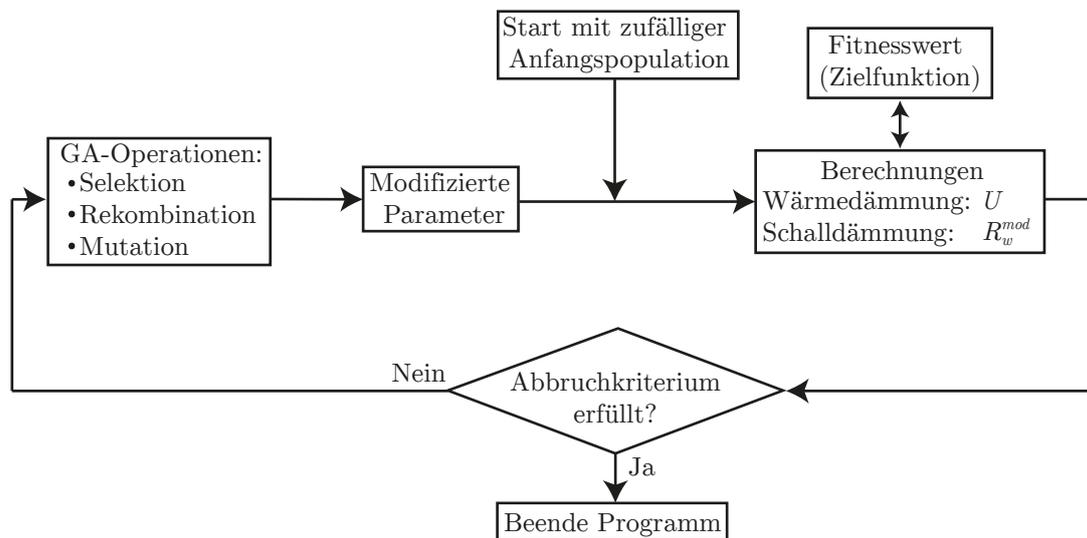


Abbildung 5.14: Ablaufdiagramm der multikriteriellen Optimierung durch den genetischen Algorithmus.

5.5 Einflussparameter des virtuellen Mehrzwecklabors

Im realen Versuchslabor hängt die Genauigkeit der Messergebnisse von dem Versuchsaufbau und den verwendeten Geräten ab, während im virtuellen Labor die Qualität der Ergebnisse stark von dem Simulationswerkzeug, den verwendeten Parametern und der Auswertungsmethodik abhängen.

In diesem Abschnitt wird der Einfluss der wichtigsten Simulationsparameter auf das Schalldämm-Maß untersucht. Die unterschiedlichen Parameter des Labors und der Simulation haben auf dieses relativ große Auswirkungen. Für die Ermittlung der Wärmedurchgangszahl ist hingegen eine relativ grobe Vernetzung und eine niedrige Ordnung der Formfunktionen ausreichend. Der Einfluss der Simulationsparameter ist hier vernachlässigbar.

Einfluss der Laborparameter

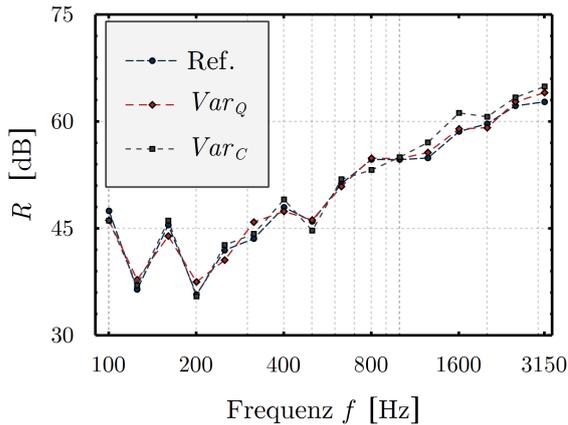
Die unterschiedlichen Parameter des virtuellen Labors (Größe, Reflexionskoeffizient der

Laborwände, Randbedingungen der Prüfwand, Position und Anzahl der Schallquellen, etc.) haben erheblichen Einfluss auf das Schalldämm-Maß. Im Folgenden soll nur eine kurze Übersicht über den Einfluss verschiedener Faktoren gegeben werden. Eine detailliertere Analyse des Einflusses unterschiedlicher Laborparameter wurde in [1] durchgeführt.

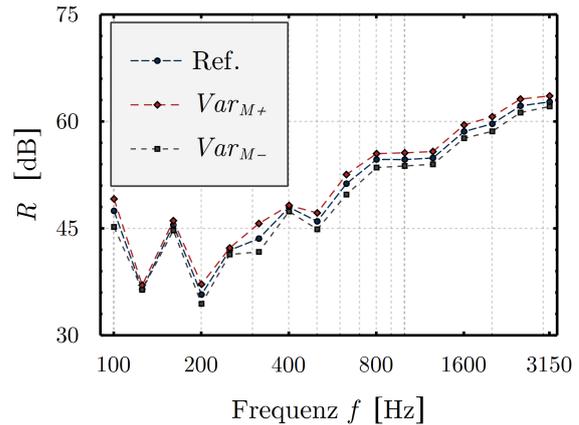
Die Abb. 5.15a zeigt die Einflüsse der unterschiedlichen Position der Monopolquelle und der Schallgeschwindigkeit der Luft. Falls nicht anders angegeben, wird ein Punktstrahler verwendet, der sich in einer Ecke des Senderraums befindet. Diese Vorgehensweise entspricht nicht den Empfehlungen der DIN EN ISO 10140, welche eine Anzahl von Quellen über den Raum verteilt empfiehlt. Obwohl dies in der Abbildung nicht dargestellt ist, wurden auch umfangreiche Untersuchungen mit unterschiedlicher Art der Anregung (bspw. durch dynamischen Druck über eine Fläche oder Linie), Anzahl von Quellen und Positionen durchgeführt, wobei festgestellt wurde, dass der Einfluss für den Vergleich mit einer analytischen Näherungsmethode oder einer Messung vernachlässigbar ist. Andere Arbeiten bildeten einen Mittelwert über eine Anzahl von Berechnungen mit unterschiedlichen Positionen der Quelle [4]. Aus dem oben genannten Grund wird dies zur Minimierung des Berechnungsaufwandes nicht durchgeführt. Der Wert der Schallgeschwindigkeit ist in der vorliegenden Arbeit für alle numerischen Berechnungen konstant. Eine eventuelle Abweichung kann jedoch einen Einfluss gegenüber experimentell ermittelten Verläufen haben.

Obwohl die Materialwerte der zu prüfenden Wand keine direkten Parameter des Messlabors darstellen, soll der Einfluss von Schwankungen der Materialwerte kurz erläutert werden. Derartige Schwankungen bei Herstellung einer Serie von konstruktiv gleichen Prüfkörpern können kaum vermieden werden und führen zu (leicht) unterschiedlichen Messkurven. Weiterhin arbeitet natürlich auch eine numerische Näherung nur mit den zugrunde gelegten Werten, weshalb sich Abweichungen zur experimentellen Ermittlung nicht vermeiden lassen. In der Abb. 5.15b werden die Dichte, die Poissonzahl, der Elastizitätsmodul und der isotrope Verlustfaktor der Wand um jeweils 10% nach unten und oben variiert, was zu einer Streuung der Kurvenverläufe führt.

In der Abb. 5.16a wird die Abhängigkeit des Verlaufs des Schalldämm-Maßes einer Betonwand von der Größe des virtuellen Labors gezeigt. Außerdem zeigt die Abb. 5.16b einen direkten Vergleich des ungemittelten Frequenzverlaufs von R , in dem der stärkere Einfluss der Eigenfrequenzen im niedrigen Frequenzbereich bei geringerer Fläche des virtuellen Labors ersichtlich ist.

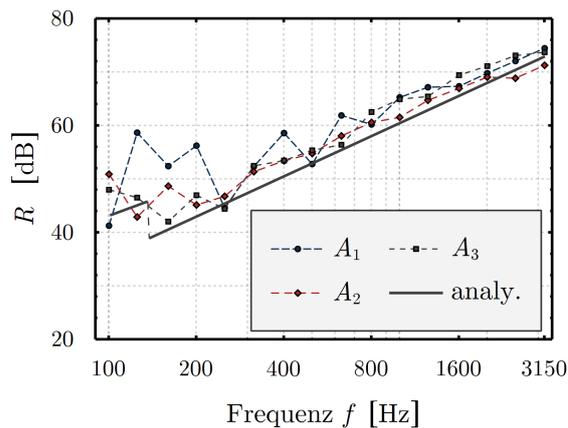


(a) Laborparameter

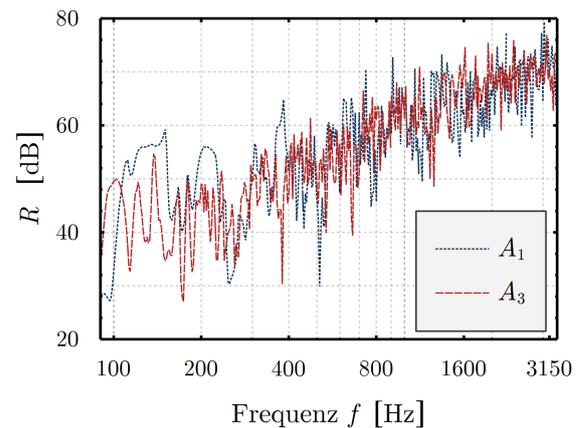


(b) Materialparameter

Abbildung 5.15: (a) Einfluss der Position der Quelle und Schallgeschwindigkeit der Luft. Für Ref. befindet sich die Quelle in einer Raumecke und $c_0 = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, für Var_Q befindet sich die Quelle innerhalb des Raumes und für Var_C beträgt die Schallgeschwindigkeit $c = 336 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. (b) Einfluss der Variation der Materialeigenschaften der Wand. Gegenüber der Referenz (Ref.) sind für Var_{M+} alle Werte von E , ν , ρ und η um 10% höher und für Var_{M-} um 10% niedriger angesetzt.



(a) In Terzen gemittelt



(b) Frequenzverlauf

Abbildung 5.16: Verlauf des Schalldämm-Maßes für unterschiedliche Größen des virtuellen Labors. Die Flächen von Sende- und Empfangsraum betragen jeweils: $A_1 \approx 4\text{m}^2$, $A_2 \approx 9\text{m}^2$ und $A_3 \approx 16\text{m}^2$. Die analytische Näherung (analy.) wurde mit der Gl. (5.13) und Gl. (5.14) ermittelt.

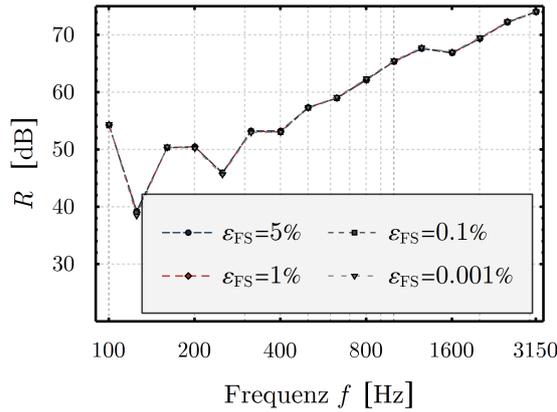
Einfluss der Fehlerschranke

Um die nötige Fehlerschranke ε_{FS} zum Vergleich mit experimentellen Daten abschätzen zu können, wird ein 2D Modellproblem des virtuellen Labors mit etwa 20m^2 Gesamtfläche nach der Abb. 5.8 untersucht. Die rechteckigen Geometrien des Fluidbereichs und der Platte ermöglichen die Verwendung strukturierter Netze, was eine exakte Festlegung der Knotendichte ermöglicht. Es soll nochmal betont werden, dass sich die durch den Fehlerschätzer nach Abschnitt 4.1 vorgegebene Elementgröße auf die Genauigkeit im Fluid-

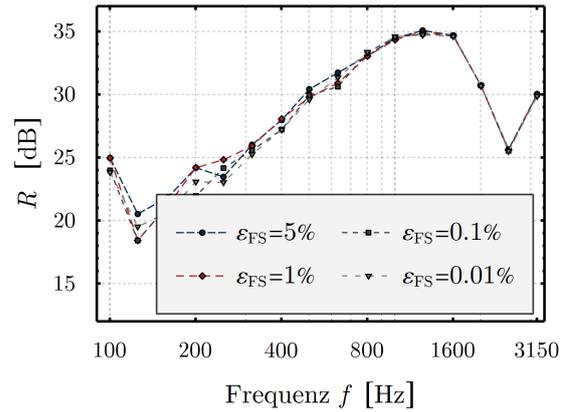
gebiet bezieht. Es werden außerdem der Pollution-Fehler und der Einfluss der Eigenfrequenzen nicht berücksichtigt. Bei der Verwendung der SEM ist das numerische Verhalten bei hohen Frequenzen und in der Nähe von Eigenfrequenzen (vgl. Abschnitt 4.2.1) jedoch relativ gut. Es werden eine 0.12m dicke Betonwand mit entsprechend niedriger Inzidenzgrenzfrequenz, sowie eine 15mm dicke Flachpressplatte aus Holzspan (die Materialwerte sind $\rho = 650 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\nu = 0.285$, $E = 2.9\text{GPa}$ und $\eta = 0.03$) untersucht. Für letztere ergibt sich ein hoher Wert der Inzidenzgrenzfrequenz und entsprechend ist die Biegewellenlänge für einen großen Bereich des Frequenzspektrums niedriger als die Luftschallwellenlänge.

In der Abb. 5.17 ist der in Terzen gemittelte Verlauf (Frequenzen pro Terz: $n_t = 110$) des Schalldämm-Maßes für die untersuchten Wandaufbauten dargestellt. Der Einfluss der Fehlerschranke ist für die Betonwand relativ gering. Für die Flachpressplatte ergeben sich, erwartungsgemäß, unterhalb der Inzidenzgrenzfrequenz größere Abweichungen. Hier müsste die Wand also feiner vernetzt werden als der Fluidbereich. Selbstverständlich kann die Biegewellenlänge für die homogene Wand für jede Frequenz berechnet werden, doch ist dies für komplexe Wandstrukturen nicht mehr möglich. Das Beispiel der Flachpressplatte dient daher der Abschätzung inwieweit sich eine Unterdiskretisierung auf das Schalldämm-Maß auswirkt. Für komplexe Strukturen muss durch Erfahrungswerte oder iteratives Vorgehen die Fehlerschranke (und damit die Diskretisierungsdichte) für den unteren Frequenzbereich entsprechend angepasst werden.

Aufgrund der Mittelung der Frequenzen für die jeweilige Terz ergibt sich in der Abb. 5.17 ein etwas verschönertes Bild der Auswirkungen der Fehlerschranke. Daher sind in den Abb. 5.18 und 5.19 jeweils die Abweichungen gegenüber dem Referenz-Verlauf mit hoher Genauigkeit dargestellt. Der ermittelte Einzahlwert R_w^{mod} variiert je nach der Fehlerschranke für die Betonwand um etwa 0.5% ($R_w^{mod} = [59.68\text{dB}; 59.97\text{dB}]$) und für die Flachpressplatte um etwa 1.0% ($R_w^{mod} = [31.46\text{dB}; 31.77\text{dB}]$). Hierbei ist jedoch zu beachten, dass sich Abweichungen durch den Mittelungsprozess aufheben können und die Variation, insbesondere für niedrigere Werte der Teilungszahl n_t , selbst bei einer geringfügigen Änderung der Wand bzw. der Laborparameter, erheblich größer werden kann.

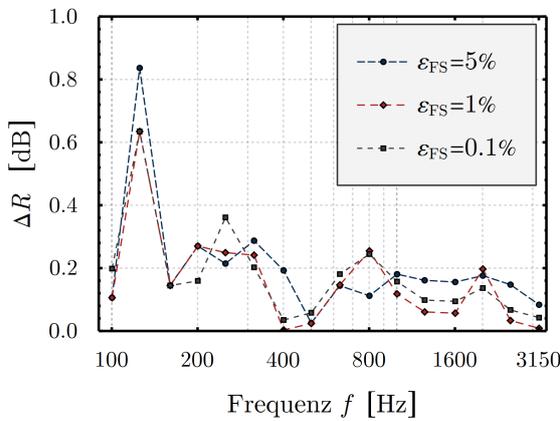


(a) Betonwand

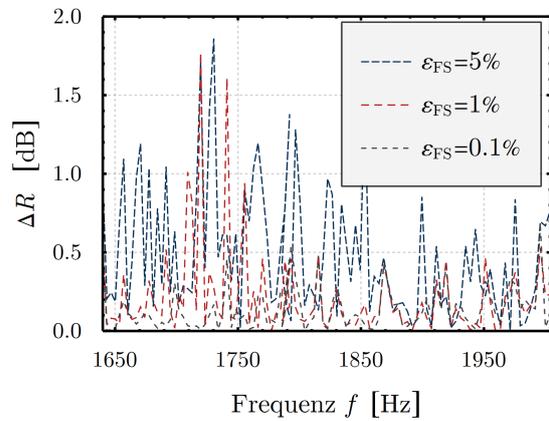


(b) Flachpressplatte

Abbildung 5.17: In Terzen gemittelter Verlauf in Abhängigkeit von der Fehlerschranke für (a) eine 0.12m dicke Betonwand und (b) eine 15mm dicke Flachpressplatte.

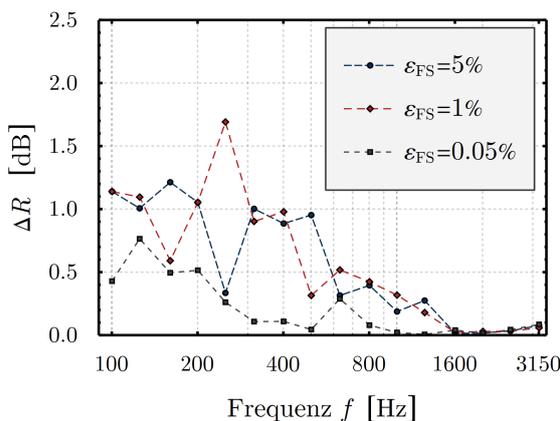


(a) Terzverlauf

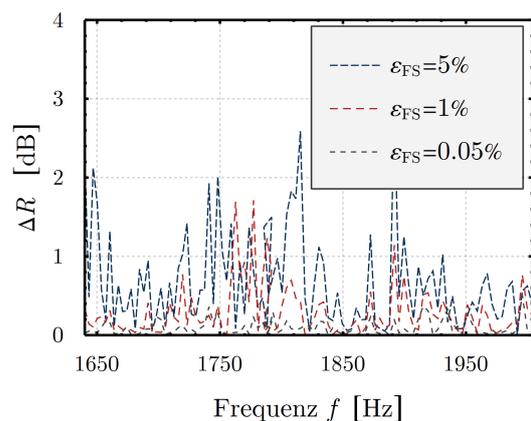


(b) Frequenzspektrum ohne Mittelung

Abbildung 5.18: Abweichungen gegenüber dem Referenzverlauf für eine 0.12m dicke Betonwand.



(a) Terzverlauf



(b) Frequenzspektrum ohne Mittelung

Abbildung 5.19: Abweichungen gegenüber dem Referenzverlauf für eine 15mm dünne Flachpressplatte.

Die Eigenfrequenzen haben einen großen Einfluss auf das Schalldämm-Maß (insbesondere im niedrigen Frequenzbereich) und auch auf den numerischen Fehler. In der Abb. 5.20 ist der Frequenzverlauf des Schalldämm-Maßes R der Betonwand im Intervall [250Hz; 500Hz] sowie die Abweichung gegenüber einer Referenzlösung, erstellt mit hoher Genauigkeit, dargestellt. Die Eigenfrequenzen des gekoppelten FSI-Problems und die Eigenfrequenzen der Wand sind ebenfalls eingezeichnet. Es wird hier deutlich, dass insbesondere die Wand-eigenfrequenzen einen erheblichen Einfluss auf die Genauigkeit der numerischen Lösung haben. Das auf der SEM basierende virtuelle Mehrzwecklabor hat hier Vorteile, da der numerische Fehler in der Nähe von Eigenfrequenzen bei Verwendung von Formfunktionen höherer Ordnung geringer ausfällt.

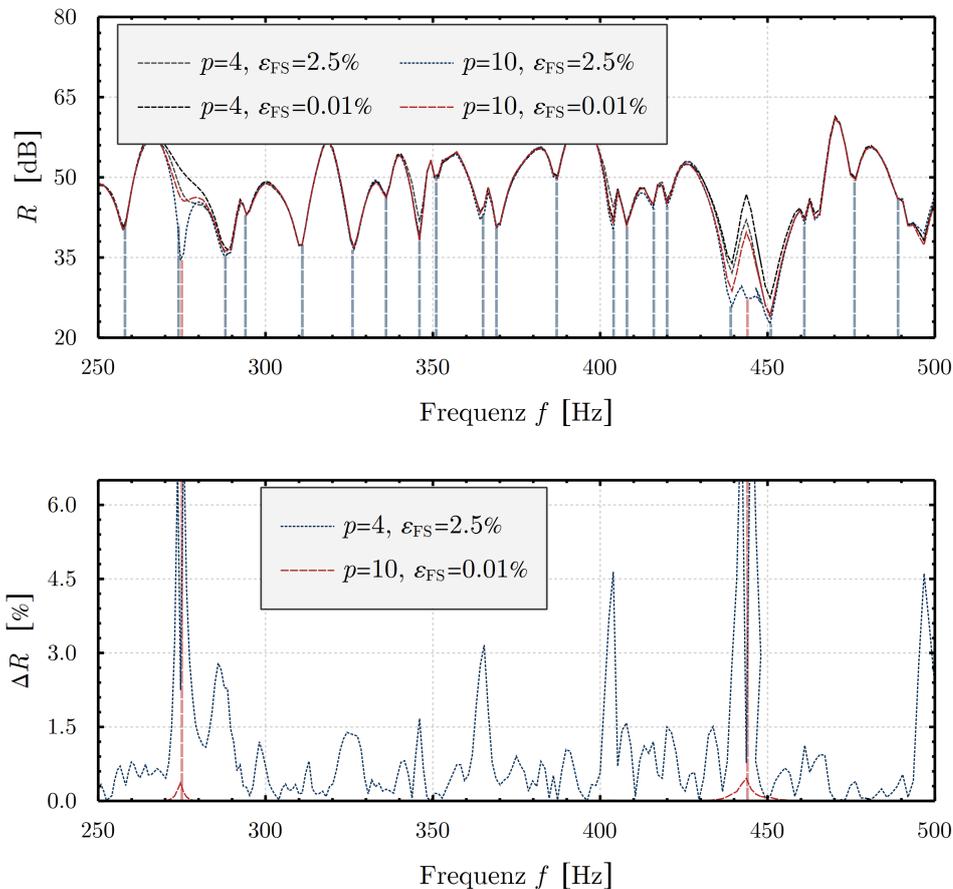


Abbildung 5.20: Einfluss der Eigenfrequenzen auf die Genauigkeit der numerischen Lösung. Wandeigenfrequenzen werden als vertikale rote Linien (unten und oben) und die Eigenfrequenzen des FSI-Problems als vertikale blaue Linien eingezeichnet (nur oben).

Um den Einfluss der Fehlerschranke auf den Einzahlwert zu untersuchen, ist die Dicke d der Betonwand und der Flachpressplatte nun nicht mehr fest vorgegeben, sondern wird variiert. In der Abb. 5.21 ist der ermittelte Verlauf des Einzahlwertes jeweils für die Betonwand und die Flachpressplatte für unterschiedliche Fehlerschranken in Abhängigkeit

der Dicke dargestellt. Die Referenzkurve wurde mit hoher Genauigkeit berechnet. Es erscheint eine Fehlerschranke von $\varepsilon_{FS} = 0.1\%$ hinreichend für dünnwandige Wände und komplexe Geometrie. Für massive Wände kann die Fehlerschranke höher gewählt werden.

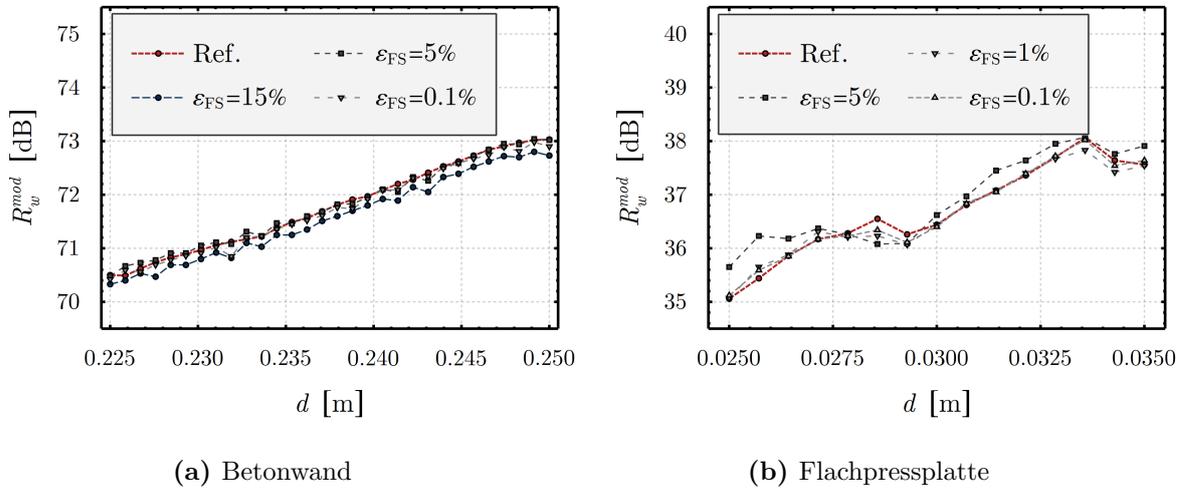


Abbildung 5.21: Einfluss der Fehlerschranke auf den Einzahlwert.

Einfluss der Teilungszahl

Während der Einfluss der Fehlerschranke relativ gering ist, hat die Anzahl der Unterteilungen pro Terz n_t einen größeren Einfluss auf das Schalldämmmaß R . In der Abb. 5.22 ist der Verlauf des in Terzen gemittelten Schalldämm-Maßes für die 0.12m dicke Betonwand und die 15mm dicke Flachpressplatte und einer Fehlerschranke von $\varepsilon_{FS} = 0.1\%$ dargestellt. In der Abb. 5.23 ist ersichtlich, dass das Frequenzspektrum bei zu geringer Anzahl an Unterteilungen nicht adäquat wiedergegeben werden kann. Im Gegensatz zur Arbeit von ARJUNAN et al. [5], in welcher nur eine geringe Anzahl an Frequenzen im Bereich der Terzmittenfrequenz zur Berechnung verwendet wurde, wird argumentiert, dass eine höhere Anzahl von n_t notwendig ist, um den Verlauf des Schalldämm-Maßes bzw. den Einzahlwert akkurat ermitteln zu können. Insbesondere wird der Einfluss von Eigenfrequenzen durch eine höhere Anzahl von Unterteilungen minimiert.

In der Abb. 5.24 sind für die Betonwand ($\varepsilon_{FS} = 0.1\%$) die Einzahlwert-Kurven für unterschiedliche Unterteilungszahlen dargestellt. Die Referenzkurve wurde mit hoher Genauigkeit und Teilungszahl berechnet. Durch Vergleich mit der Referenzkurve erscheint eine Mindestanzahl von $n_t \geq 20$, insgesamt also 320 Berechnungen für die Terzbänder von 100Hz bis 3150Hz, zur akkuraten Bestimmung des Einzahlwertes ausreichend zu sein.

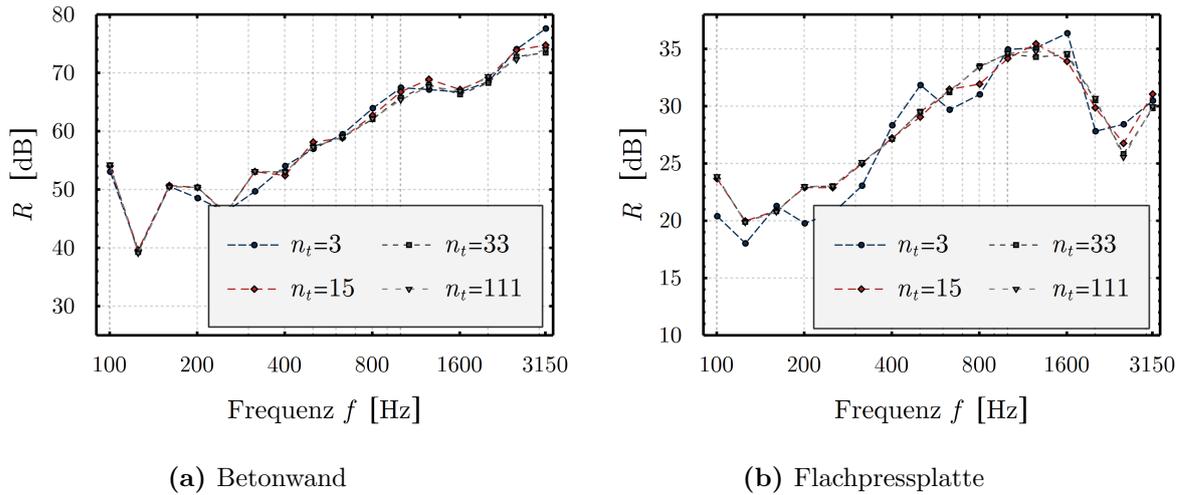


Abbildung 5.22: Frequenzverlauf bei Variation der Terzteilungszahl.

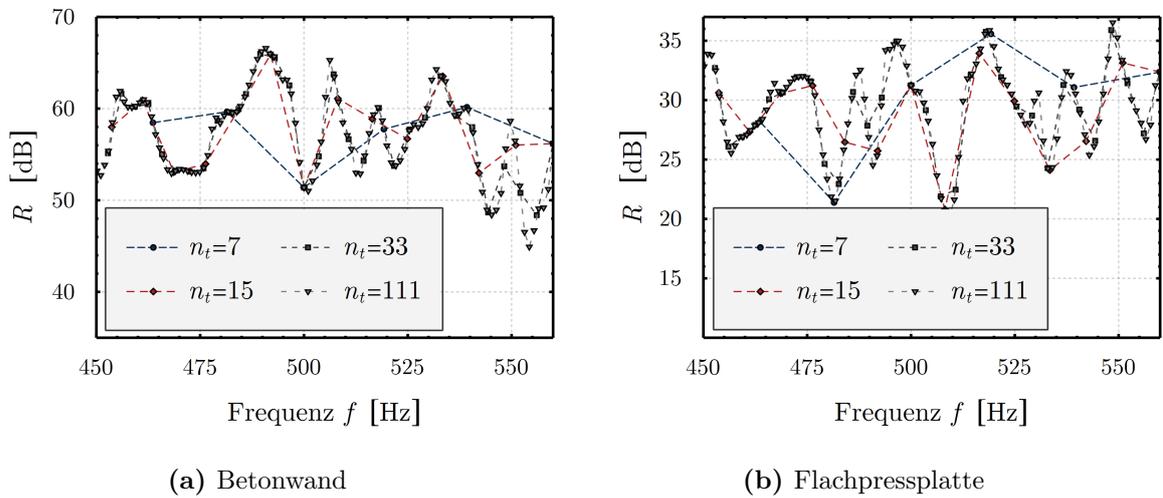


Abbildung 5.23: Frequenzverlauf mit der Variation der Terzteilungszahl im niedrigen Frequenzbereich.

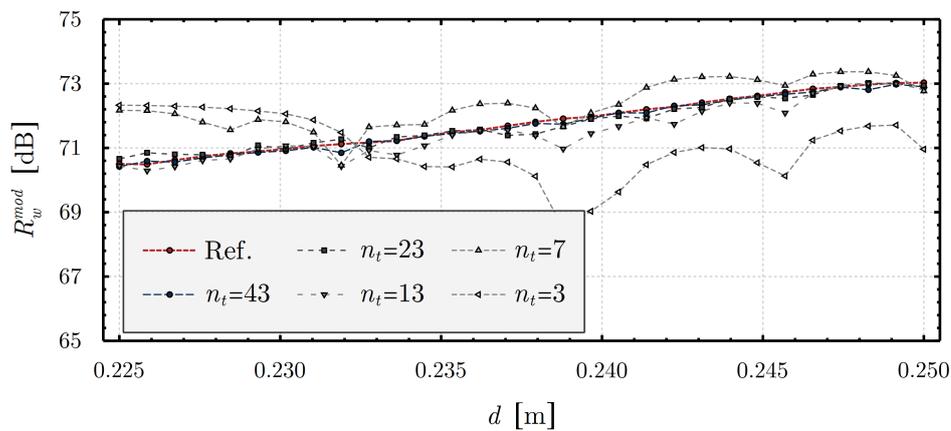


Abbildung 5.24: Einfluss der Anzahl an Terzteilungen auf den Einzahlwert einer Betonwand.

6 Ausgewählte Anwendungsbeispiele

6.1 Schalldämmung von Wandstrukturen

In diesem Abschnitt wird ein Vergleich der Berechnungen im virtuellen Labor mit vorwiegend aus der Literatur entnommenen Messungen durchgeführt. Diese wurden gemäß der Richtlinie DIN EN ISO 10140 bzw. äquivalenten Normen vorgenommen. Bei der Beurteilung ist zu beachten, dass es auch bei experimenteller Ermittlung des Schalldämmmaßes in unterschiedlichen Messeinrichtungen zu teilweise erheblichen Schwankungen des Schalldämmmaßes kommen kann. Die Gründe dafür liegen zum einen in den relativ geringfügigen Abweichungen der Materialwerte der gemessenen Wandstruktur. Andererseits haben allerdings die spezifischen Parameter der jeweiligen Prüfstände wesentlich größere Auswirkungen. Sowohl die Größe des Labors und das Absorptionsvermögen der Laborwände als auch die Durchführung der Messung haben starke Einflüsse auf die Messergebnisse, insbesondere im niedrigen Frequenzbereich [22]. In [113, 80] wurden dazu umfangreiche Ringuntersuchungen durchgeführt und Abweichungen zwischen unterschiedlichen Prüfstandkonstruktionen festgestellt, die im Bereich von bis zu 20dB im unteren und 4 – 8dB im mittleren und hohem Frequenzbereich liegen. Eine ähnliche Studie wurde kürzlich von MACHIMBARRENA et al. [73] veröffentlicht. In dieser Arbeit wurde die Schalldämmung verschiedener Wandaufbauten anhand von über 2000 Datensätzen analysiert und es wurden erhebliche Schwankungen bezüglich der ermittelten Einzahlwerte festgestellt. Bei mangelnder Kenntnis der Parameter der Messungen kann also auch im virtuellen Labor mittels einer numerischen Simulation lediglich eine tendenzielle Übereinstimmung der Messkurven erwartet werden. Sind allerdings die wesentlichen Informationen bekannt (darunter gehören die Geometrie des Labors, die Absorptionsgrade aller Oberflächen, die Befestigungsbedingungen, die Temperatur und Feuchtigkeit der Luft), so lässt sich auch für niedrige Frequenzen das Schallfeld, und somit der Verlauf des Schalldämmmaßes, sehr genau im virtuellen Labor ermitteln, wie die Arbeit von DE MELO et al. [30] gezeigt hat. Falls nicht anders angegeben, werden praxisübliche Werte für die Absorptionseigenschaften der Laborwände verwendet [1]. Im Senderaum wird ein Reflexionskoeffizient von $r = 0.95$ und im Empfangsraum ein Reflexionskoeffizient von $r = 0.925$ vorgeschrieben. Weiterhin wird in diesem Abschnitt die Schalldämmung einiger, vom CBMA entwickelte, Wandaufbauten ermittelt und Beispiele zu den Schalldämmeigenschaften von periodisch aufgebauten Wandstrukturen werden ebenfalls gezeigt und diskutiert.

6.1.1 Schalldämmung von monolithischen und mehrschaligen Wänden

Monolithische Wände

Das Simulationswerkzeug des virtuellen Labors wird anhand experimenteller Daten und analytischer Näherungslösungen validiert. Hierbei müssen die vorangegangenen Ausführungen beachtet werden. Eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse kann aufgrund der Abhängigkeit der numerischen Lösungen von den Randbedingungen des virtuellen Labors nicht erwartet werden, wohl aber eine qualitative Übereinstimmung, insbesondere für höhere Frequenzen.

Das nachfolgende Beispiel einer dünnen Aluminiumplatte (Abb. 6.1) ist aus der Arbeit von VILLOT et al. [133] entnommen. Da in der Arbeit sämtliche Abmessungen des experimentellen Aufbaus angegeben sind und auch die Materialwerte von Aluminium ($E = 70\text{ GPa}$, $\rho = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\nu = 0.34$) kaum Variationen aufweisen, stimmt der berechnete Verlauf des Schalldämm-Maßes recht gut mit der Messung überein. Insbesondere ist dabei zu beachten, dass kaum Unterschiede zwischen einer 2D und einer 3D Simulation bestehen. Dieses Ergebnis stimmt mit bekannten Untersuchungen der Literatur überein [101]. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass die Geometrie und die Materialparameter in Richtung der dritten Dimension konstant sind. Während eine 2D Berechnung innerhalb von etwa zwei Minuten beendet ist, benötigt eine 3D Berechnung jedoch mehr als eine Stunde (Intel i7-7700K, 32GB RAM). Die bei der Simulation verwendete Fehlerschranke beträgt 1% und ist trotz der sehr hohen Inzidenzfrequenz ausreichend niedrig, um eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten zu erzielen.

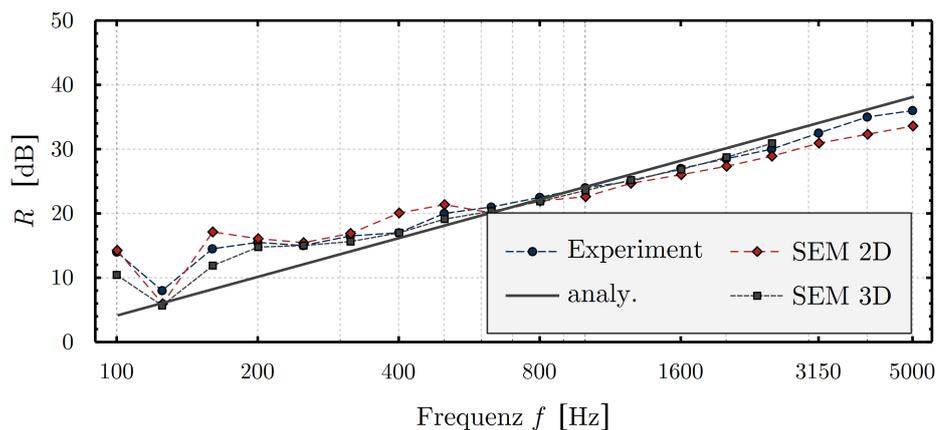


Abbildung 6.1: Vergleich zwischen der SEM-Simulation im virtuellen Labor und der experimentellen Ermittlung des Schalldämm-Maßes einer dünnen Aluminiumplatte. Die analytische Lösung (analy.) basiert auf Gl. (5.13) und Gl. (5.14) und die experimentellen Daten sind aus [133] entnommen.

Als ein weiteres Beispiel wird eine Betonwand untersucht (Abb. 6.2). Die Daten der Wand sind gegeben durch $d = 0.12\text{m}$, $E = 30\text{GPa}$, $\rho = 2200\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\nu = 0.3$ und $\eta = 0.05$. Die Inzidenzgrenzfrequenz f_k liegt im unteren Frequenzbereich und ist in der Abbildung angegeben. Es zeigt sich auch hierbei eine gute Übereinstimmung zwischen der analytischen Näherungslösung und der 2D und 3D Simulation. Der höhere Wert des Schalldämm-Maßes unterhalb der Inzidenzgrenzfrequenz ist qualitativ ersichtlich, aufgrund des hohen Einflusses der Eigenfrequenzen (diese werden durch die analytische Näherung nicht erfasst) ist der Wert allerdings größer.

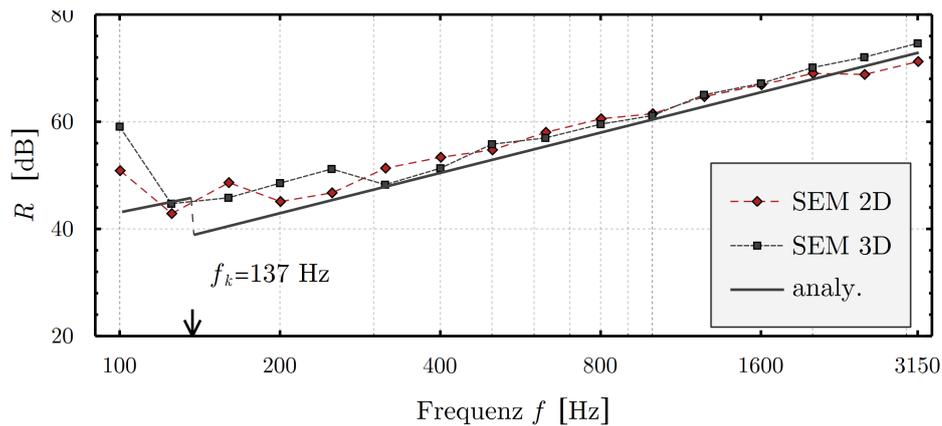


Abbildung 6.2: Vergleich zwischen der SEM-Simulation im virtuellen Labor und der analytischen Lösung (analy.) nach Gl. (5.13) und Gl. (5.14) für eine Betonwand.

In der Abb. 6.3 ist das Schalldämm-Maß einer Flachpressplatte mit der Dicke 35mm dargestellt, deren Inzidenzgrenzfrequenz f_k im mittleren Frequenzbereich liegt. Das Material wird als isotrop angenommen und hat die Dichte $\rho = 650\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, die Querkontraktionszahl $\nu = 0.285$, den Elastizitätsmodul $E = 2.9\text{GPa}$ und den Verlustfaktor $\eta = 0.03$. Der Vergleich des numerischen Ergebnisses mit der analytischen Näherung zeigt eine gute Übereinstimmung und der Sprung bei der Inzidenzgrenzfrequenz ist ersichtlich.

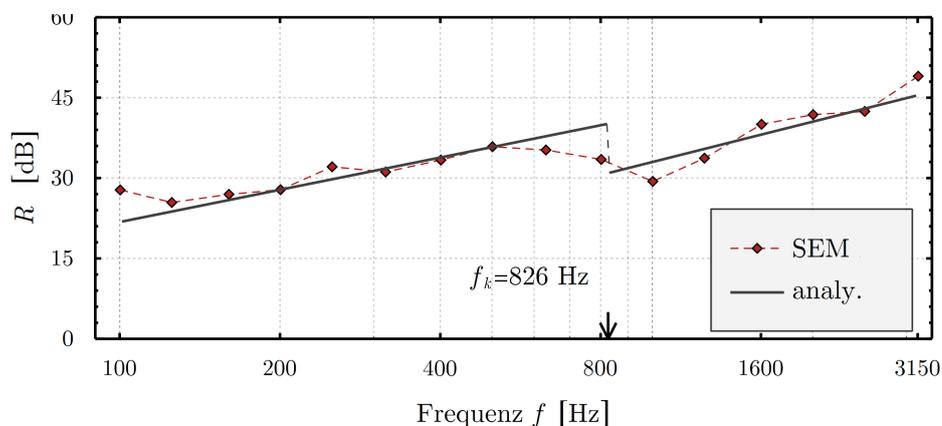


Abbildung 6.3: Vergleich zwischen der SEM-Simulation im virtuellen Labor mit der analytischen Lösung (analy.) nach Gl. (5.13) und Gl. (5.14) für eine Flachpressplatte.

Mehrschichtige/mehrschalige Wände

Die Software **NorFLAG** der Version 4.0 wird im Folgenden zum Vergleich mit der SEM-Simulation für eine mehrschichtige und eine doppelschalige Wand verwendet.

In der Arbeit von SHORTER [119] wurden unter anderem geschichtete Glaspaneele mit einer Zwischenschicht aus Polyvinylbutyral (PVB) untersucht. Der in der Abb. 6.4 gezeigte Wandaufbau wird verwendet, um einen Vergleich zwischen der experimentellen Messung und den numerischen Simulationen mittels der SEM und der Software **NorFLAG** vorzunehmen. Die Materialwerte der einzelnen Schichten sind in der Tab. 6.1 angegeben. Die erzielten Ergebnisse sind in der Abb. 6.5 dargestellt. Die Kurven NF_{dk} beschreiben die Näherungsergebnisse mittels der Software **NorFLAG**, wobei der Index dk dicke elastische Platten und der Index dn dünne elastische Platten kennzeichnet. Die Näherungslösung für dünne elastische Platten versagt bei einem Frequenzbereich von über 1000Hz. Sowohl die Näherungslösung für dicke Platten als auch die SEM-Simulation zeigen eine gute Übereinstimmung mit der Messung. Eine Kenntnis der Gültigkeitsgrenzen ist bei der SEM-Simulation im Gegensatz zur Näherungslösung der Software **NorFLAG** jedoch nicht erforderlich.

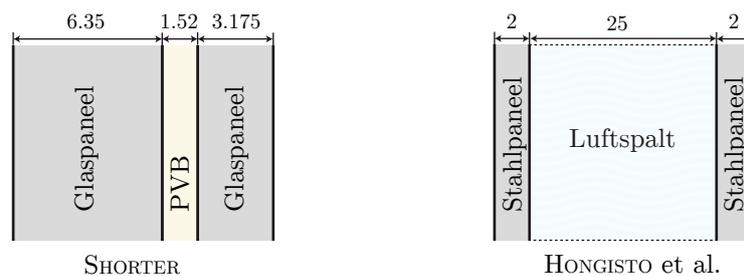


Abbildung 6.4: Aufbau eines Glaslaminats (nach SHORTER [119]) und der Stahlpaneele mit Zwischenraum (nach HONGISTO et al. [57]).

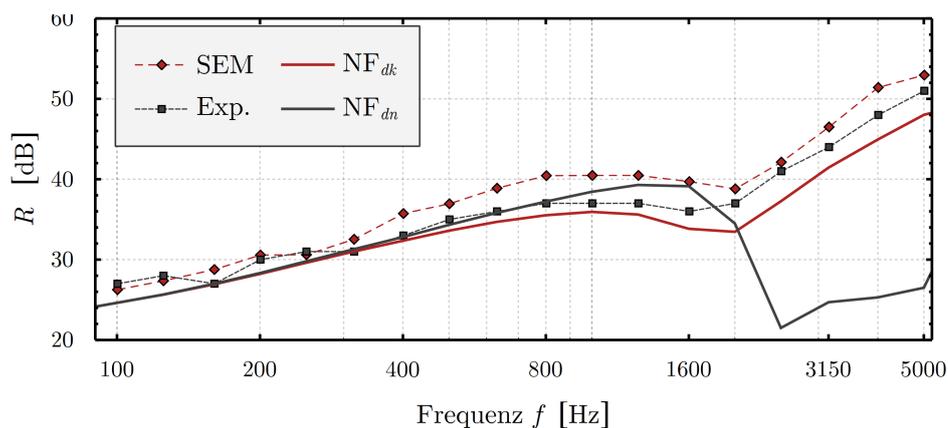


Abbildung 6.5: Vergleich zwischen der Messung (Exp.), SEM-Simulation und der Näherungslösung mittels **NorFLAG** (NF_{dk} und NF_{dn}) für ein Glaslaminat. NF_{dn} steht für eine dünne Wand und NF_{dk} steht für eine dicke Wand. Experimentelle Daten sind entnommen aus [119].

Tabelle 6.1: Materialwerte für Glas, PVB und Stahl.

	E [GPa]	ρ [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$]	ν [-]	η [-]
Glas	62	2300	0.24	0
PVB	0.15	1000	0.49	0.6
Stahl	210	7850	0.3	0

Eine analytische Näherungslösung für mehrschalige Wandaufbauten ist aus den im Abschnitt 5.2.2 dargestellten Gründen schwieriger. In der Arbeit von HONGISTO et al. [57] wurde unter anderem ein zweischaliger Aufbau aus zwei 2mm dünnen Stahlblechen (Materialwerte nach Tab. 6.1) untersucht, welche durch einen 25mm breiten Luftspalt voneinander getrennt sind. Dass die beiden Bleche nicht miteinander verbunden sind, vereinfacht eine analytische Näherungslösung und ermöglicht eine Vorhersage des Verlaufs des Schalldämm-Maßes. In der Abb. 6.6 ist das Ergebnis dargestellt. Die R -Kurve NF_D beschreibt das Schalldämm-Maß relativ genau, jedoch wird hier gegenüber der R -Kurve NF_{kD} eine zusätzliche Dämpfung von etwa 870dB/km analog der Vorgehensweise nach [132] in den Luftspalts eingebracht. Unter der Berücksichtigung der Dämpfung ergibt sich eine recht gute Übereinstimmung mit den experimentell ermittelten Werten. Ohne die Berücksichtigung der Dämpfung versagt die Näherungsrechnung jedoch. Die Simulation mittels SEM ergibt, ohne die Einführung einer künstlichen Dämpfung in die Luftschicht, eine gute Übereinstimmung mit dem experimentellen Ergebnis. Die Größe von Send- und Empfangsraum entspricht den Angaben in [132]. Der erste Einbruch bei etwa 150Hz entsteht durch die Masse-Luft-Masse Resonanz nach Gl. (5.18) und der zweite Einbruch bei 3400Hz ist bedingt durch die Resonanz der Luftsäule nach Gl. (5.19).

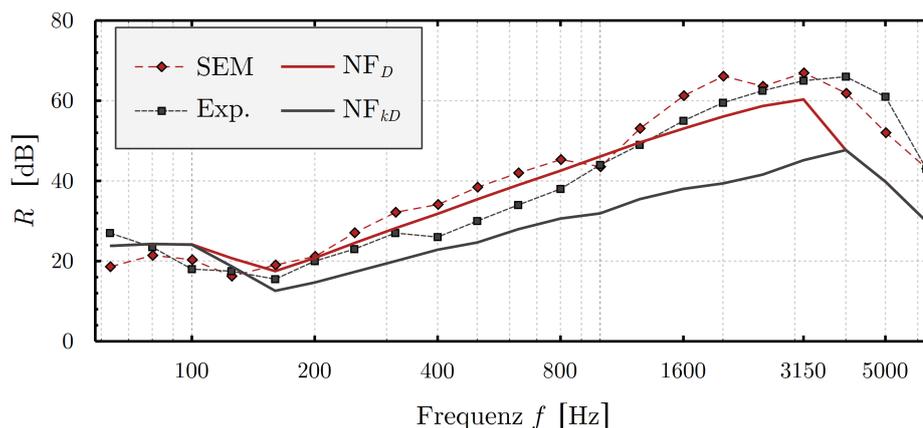


Abbildung 6.6: Vergleich zwischen der Messung (Exp.), SEM-Simulation und Näherungslösung mittels NorFLAG (NF_D und NF_{kD}) für zwei Stahlpaneele mit 25mm Luftspalt. NF_D steht für den Luftspalt mit Dämpfung und NF_{kD} steht für den Luftspalt ohne Dämpfung. Die experimentellen Daten sind entnommen aus [57].

6.1.2 Schalldämmung der CBMA Designs

Abschließend soll noch das Schalldämm-Maß vierer vom CBMA entwickelten Wandaufbauten für eine Referenzkonfiguration angegeben werden. Zwei der Aufbauten werden im Abschnitt 6.3 hinsichtlich ihrer Schall- und Wärmedämmeigenschaften optimiert und sind in der Abb. 6.7 dargestellt. Die verwendeten Materialwerte sind in der Tab. 6.2 aufgelistet. Die verwendeten Werte für die Abmessungen der Referenzkonfiguration können der Tab. 6.3 entnommen werden. Die entwickelten Wände basieren auf neuartigen Entwicklungen aus gepressten Strohpaneelen, die im Kern der Aufbauten verwendet werden. Diese Wände wurden in Hinblick auf günstige Wärmedämmungs- und Schalldämmeigenschaften entwickelt. Weiterhin werden auch Platten aus Polyurethan (PU), Calciumsilicat (CalSil) und anderen Werkstoffen verwendet.

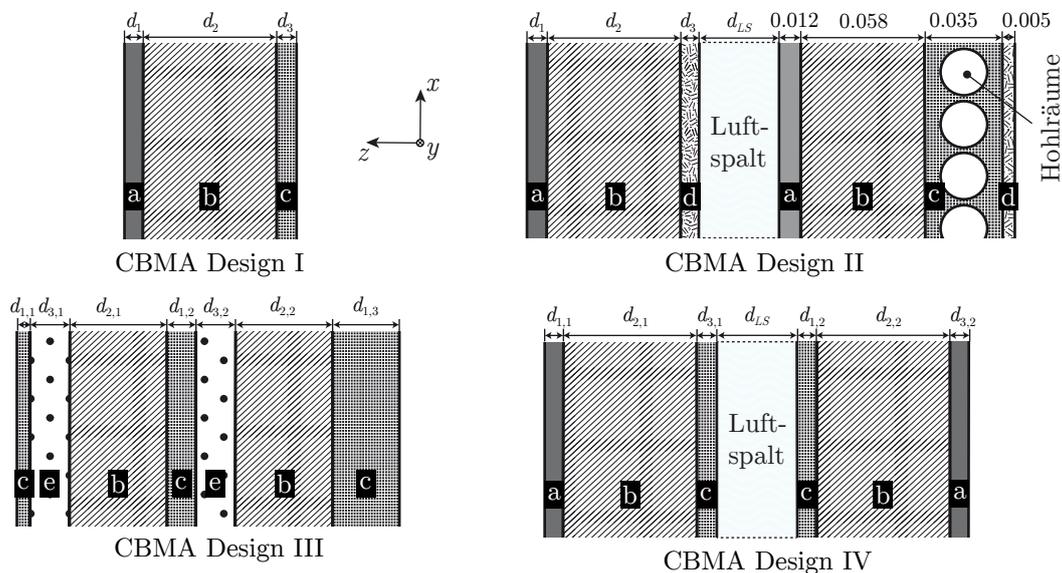


Abbildung 6.7: Beispiele für die an der CBMA entwickelte Wände. Die Materialien und die Abmessungen sind in Tab. 6.2 und 6.3 angegeben.

Tabelle 6.2: Materialwerte der CBMA Designs.

	E [GPa]	ρ [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$]	ν [-]	η [-]	k [$\frac{\text{W}}{\text{mK}}$]
(a) Beton	25	2300	0.2	0.05	1.51
(b) Pressstroh	2.4	475	0.09	0.025	0.08
(c) Flachpressplatte	2.9	650	0.285	0.02	0.12
(d) CalSil	3.75	1270	0.3	0.004	0.25
(e) PU	0.055	30	0.435	0.1	0.025

Bei der Simulation werden Verbindungen zwischen den Schalen der Designs II und IV zur Reduzierung der Einflussfaktoren nicht berücksichtigt. Die Steifigkeit der Verbindungen

Tabelle 6.3: Referenzabmessungen der CBMA Designs.

Abmessungen in [mm]	
Design I	$d_1 = 6, d_2 = 58, d_3 = 6$
Design II	$d_1 = 6, d_2 = 58, d_3 = 6, d_{LS} = 50$
Design III	$d_{1,1} = 6, d_{1,2} = 15, d_{1,3} = 30, d_{2,1} = d_{2,2} = 58, d_{3,1} = d_{3,2} = 20$
Design IV	$d_{1,1} = d_{1,2} = 6, d_{2,1} = d_{2,2} = 58, d_{3,1} = d_{3,2} = 6, d_{LS} = 50$

ist schwierig zu ermitteln und hat großen Einfluss auf das akustische Verhalten der Wand [102]. Da jedoch keine detaillierten Informationen über den exakten Aufbau der Verbindungen vorliegen und der Fokus auf dem Aufbau und den Materialien der Schalen liegt, werden die Aufbauten ohne Verbindungen untersucht. Prinzipiell erhöht sich dadurch das Schalldämm-Maß unter Umständen beträchtlich (vgl. auch Gl. (5.17)). In den untersuchten Designs wird kein Dämmmaterial in den Hohlräumen verwendet, es sei aber darauf hingewiesen, dass dieses das Schalldämm-Maß verbessern kann [84].

Für die zweite Schale im Design II wird näherungsweise angenommen, dass die FSI innerhalb der Hohlräume vernachlässigbar ist. Diese Annahme hat für den Fall kleiner Flächen der Hohlräume und hoher Steifigkeit der Gesamtstruktur vernachlässigbare Auswirkungen auf das Schalldämm-Maß. In der Abb. 6.8a sind die in Terzen gemittelten Abweichungen des Schalldämm-Maßes in einer Ziegelwand, die mit Luft gefüllte Hohlräume (mit entsprechender Kopplung) und leere Hohlräume aufweist, dargestellt [95]. Dabei werden ein weiches ($E = 1\text{GPa}$, $\rho = 600\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) und ein steifes ($E = 25\text{GPa}$, $\rho = 2300\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) Material sowie zwei Größen der Hohlräume untersucht (Abb. 6.8b). Es ist ersichtlich, dass sich für ein steifes Material selbst für große Hohlräume geringe Abweichungen ergeben und auch für ein weiches Material die Abweichungen im Fall kleiner Hohlräume noch relativ gering ausfallen. Der Einfluss auf den Einzahlwert ist für jeden hier betrachteten Fall kleiner als 1%.

Weiterhin wird angenommen, dass für das Design II die Steifigkeit für eine Drehung von 90° Grad um die z -Achse (vgl. Abb. 6.7) näherungsweise gleich ist. Da bei der experimentellen Ermittlung die Abmessungen in x - und y -Richtungen in etwa gleich groß sind, ist diese Annahme gerechtfertigt. Im Design III wird die Schicht aus Polyurethan als Festkörper modelliert, was aufgrund der hohen Porosität des Werkstoffs lediglich eine Näherung darstellt. In der Abb. 6.9 sind die mittels der SEM-Simulation ermittelten Verläufe des Schalldämm-Maßes dargestellt sowie die jeweiligen Einzahlwerte.

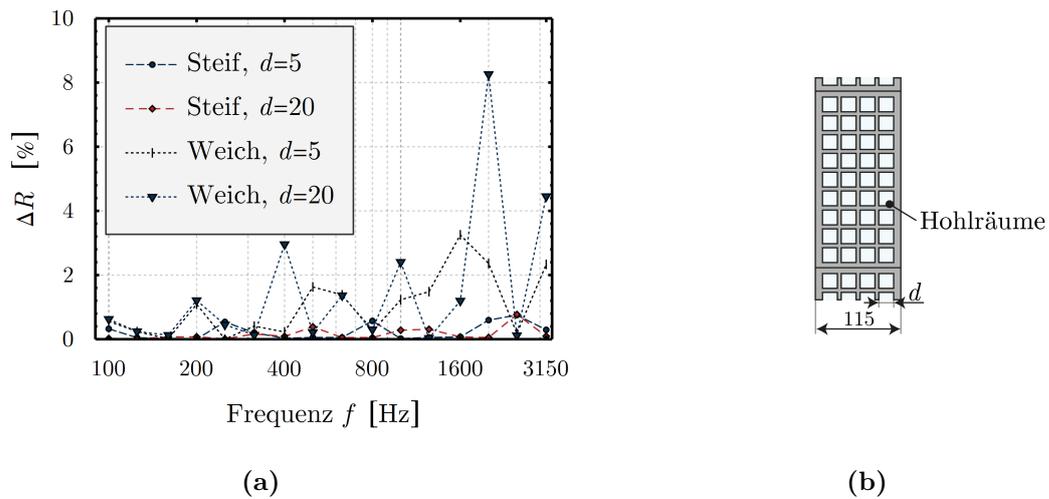


Abbildung 6.8: Der Einfluss der Luft in den Hohlräumen einer Ziegelwand. (a) Abweichungen der ungekoppelten Simulation gegenüber einer vollständigen Kopplung innerhalb der Hohlräume (aus [95]). (b) Aufbau der Ziegel mit variabler Größe der Hohlräume (Maßangaben in [mm]).

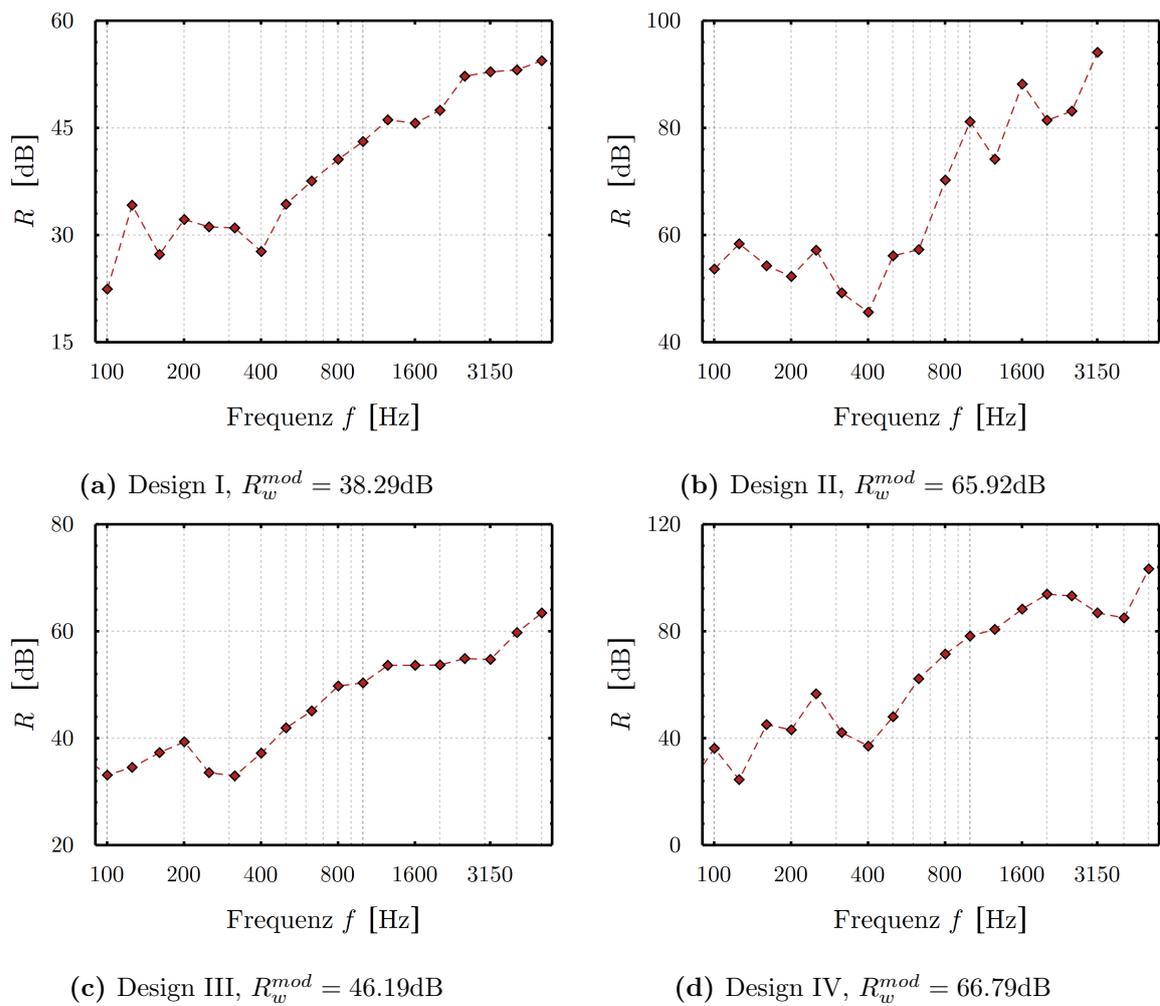


Abbildung 6.9: Schalldämm-Maß der CBMA Designs mit Referenzabmessungen.

6.1.3 Schalldämmung von periodisch aufgebauten Wandstrukturen

Es ist schon lange bekannt, dass periodisch angeordnete Strukturen die Wellenausbreitung einschränken oder sogar vollständig unterbinden können. Ein Frequenzbereich in dem durch die periodische Anordnung die Wellenausbreitung verhindert wird, wird als *Bandlücke* (englisch: *Bandgap*) bezeichnet. Anwendungen wurden in der Forschung insbesondere für den hochfrequenten Bereich untersucht. Für die Schallausbreitung innerhalb des hörbaren Frequenzbereichs sind die Kunstwerke von EUSEBIO SEMPERE bekannt, die durch periodisch angeordnete Stahlstäbe einen Schalldurchgang erschweren [36]. In diesem Abschnitt soll eine Anwendung der periodischen Strukturen im Bereich der Bauakustik diskutiert werden. Während die Literatur zur Berechnung der elastischen Strukturen sehr umfangreich ist [59], gibt es nach Wissen des Autors bislang keine Veröffentlichungen, in denen die konkreten Schalldämmeigenschaften von periodischen Strukturen anhand einer numerischen Simulation des FSI-Problems untersucht wurden.

In der Abb. 6.10 sind die untersuchten Einheitszellen für die 2D periodisch aufgebauten Wände dargestellt. Die Vektoren e_1 und e_2 geben darin die Richtungen an, in welche die Einheitszellen zur Erstellung der periodischen Struktur wiederholt werden.

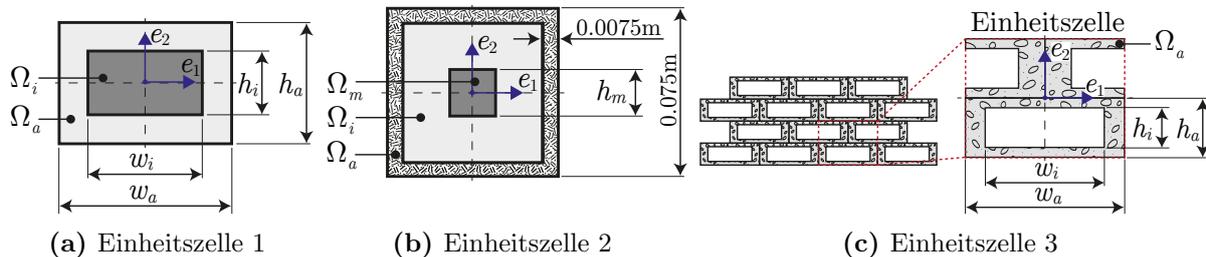


Abbildung 6.10: Drei unterschiedliche Einheitszellen.

Einheitszelle 1

Für die Einheitszelle in der Abb. 6.10a wird in Ω_a das Material Polyethylen verwendet ($E = 1040\text{MPa}$, $\rho = 950\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$). Im Kern Ω_i kommt Stahl bzw. Wolfram ($E = 410\text{GPa}$, $\rho = 19100\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) zum Einsatz. In dieser Untersuchung wird das Ziel einer Bandlücke in einem möglichst niedrigen Frequenzbereich verfolgt. Um die Bandlücken für die Einheitszelle zu ermitteln muss das Dispersionsdiagramm berechnet werden. Das Vorgehen wird im Anhang A.4 gezeigt, wobei auch einige Beispiele für die Dispersionsdiagramme mit unterschiedlichen Geometrieparametern der Einheitszelle 1 dargestellt sind. Alternativ dazu können die Bandlücken im Übrigen auch direkt dem Frequenzspektrum entnommen werden, der Berechnungsaufwand ist dafür allerdings etwas höher. Generell müssen für eine Bandlücke mit niedrigerer Frequenz die Abmessungen der Einheitszelle vergrößert werden. Dies führt zu einer ansteigenden Gesamtdicke der Wand, die aus mehreren Schichten

der Einheitszellen aufgebaut ist. Aus praktischen Gründen wird daher für die nachfolgenden Untersuchungen der Wert $h_a = 0.075\text{m}$ festgelegt. Die übrigen Abmessungen werden durch eine Parameterstudie ermittelt, so dass sie zu einem möglichst niedrigen Frequenzbereich der ersten Bandlücke führen: $w_a = 0.125\text{m}$, $w_i = 0.0875\text{m}$ und $h_i = 0.0375\text{m}$. Neben einer derartigen Ermittlung einer möglichst tieffrequenten und breiten Bandlücke können auch Optimierungsalgorithmen verwendet werden [47].

Um die Effizienz des PC zu untersuchen, wird eine periodische Wand, bestehend aus 18 Schichten in der x -Richtung und $n_{pc} = 6$ Schichten in der y -Richtung betrachtet (siehe Abb. 6.11a). Als dynamische Erregung wird eine Verschiebung v_0 des linken unteren Knotens in y -Richtung vorgegeben, sämtliche Ränder sind frei. Wie im Abschnitt 4.3.1 entspricht die zeitabhängige Verschiebung $\hat{v}_0 e^{i\omega t}$ der Verschiebung v_0 im Frequenzbereich. In der Abb. 6.12 ist das resultierende Frequenzspektrum für einen Stahlkern und einen Wolframkern dargestellt. Auf der Ordinate ist der dekadische Logarithmus der vertikalen Verschiebung des rechten oberen Knotens $\log_{10}(v_t/v_0)$ aufgetragen. Es ist ersichtlich, dass eine Wellenausbreitung in der Bandlücke nahezu vollständig verhindert wird. Wird als Werkstoff für den Kern nicht Stahl, sondern Wolfram verwendet, sinkt zum Einen die untere Frequenz der Bandlücke und zum Anderen wird die Bandlücke weiter.

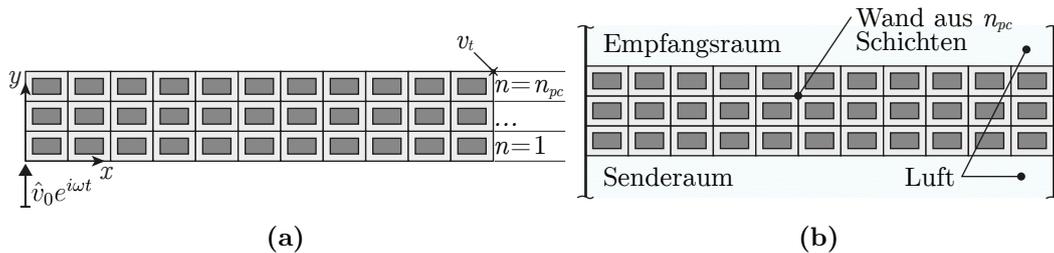


Abbildung 6.11: Periodisch aufgebaute Wandstruktur. (a) Erregung der Wand zur Ermittlung des Frequenzspektrums. (b) FSI-Simulation im virtuellen Labor.

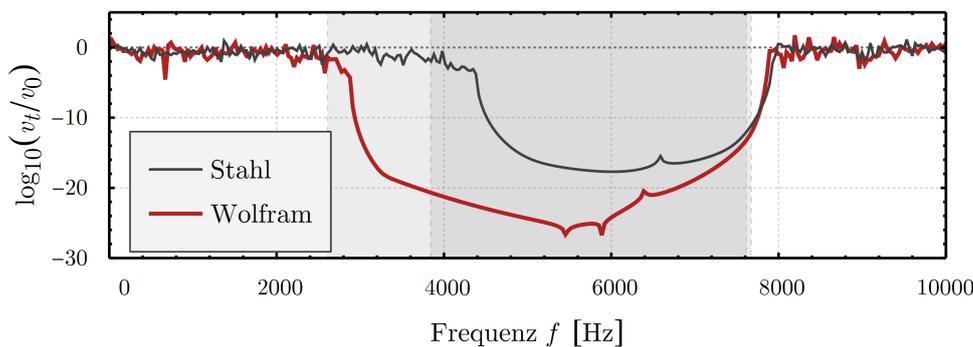


Abbildung 6.12: Frequenzspektrum bei dynamischer Anregung des Kontinuums. Die hellgrauen (Wolfram) und dunkelgrauen (Stahl) Bereiche kennzeichnen die Bandlücken.

Es wird nun die Schalldämmung der Wand, aufgebaut aus mehreren Reihen von Ein-

heitszellen, mittels des virtuellen Labors ermittelt. Der Aufbau des Labors entspricht der Vorgehensweise im Abschnitt 5.2.4 (vgl. auch Abb. 6.11b und 5.8), es wird jedoch der Frequenzbereich bis 10000Hz untersucht. In der Abb. 6.13a ist der Verlauf der Schalldämmung dargestellt, wobei die Anzahl der Einheitszellen n_{pc} in Dickenrichtung der Wand variiert wird. Es wird ein Stahlkern verwendet. Es ist erkennbar, dass die Schalldämmung für je drei Reihen der Einheitszellen um etwa 60dB zunimmt, also etwa 20dB pro Reihe. Dabei nimmt die Dicke der Wand mit jeder Reihe um jeweils 0.075m zu. Das Schalldämm-Maß außerhalb der Bandlücke scheint jedoch weitgehend unabhängig von n_{pc} zu sein.

Damit eine Anwendung tatsächlich sinnvoll ist, muss die Schalldämmung der periodisch aufgebauten Wand, zumindest in der Bandlücke, über der von einer monolithischen Wand gleicher längenbezogener Masse (die Dicke der Wand beträgt dann $d_{eq} = 0.19\text{m}$) liegen. Das dies auch der Fall ist, wird in der Abb. 6.13b ersichtlich. Die Schalldämmung erreicht in der Bandlücke immens hohe Werte und liegt sogar weit über der von einer monolithischen Wand gleicher Dicke d_{gl} . Allerdings liegt die Schalldämmung außerhalb der Bandlücke deutlich unter den Werten der jeweiligen monolithischen Wände, was mit der deutlich niedrigeren Steifigkeit der periodischen Wandstruktur begründet werden kann.

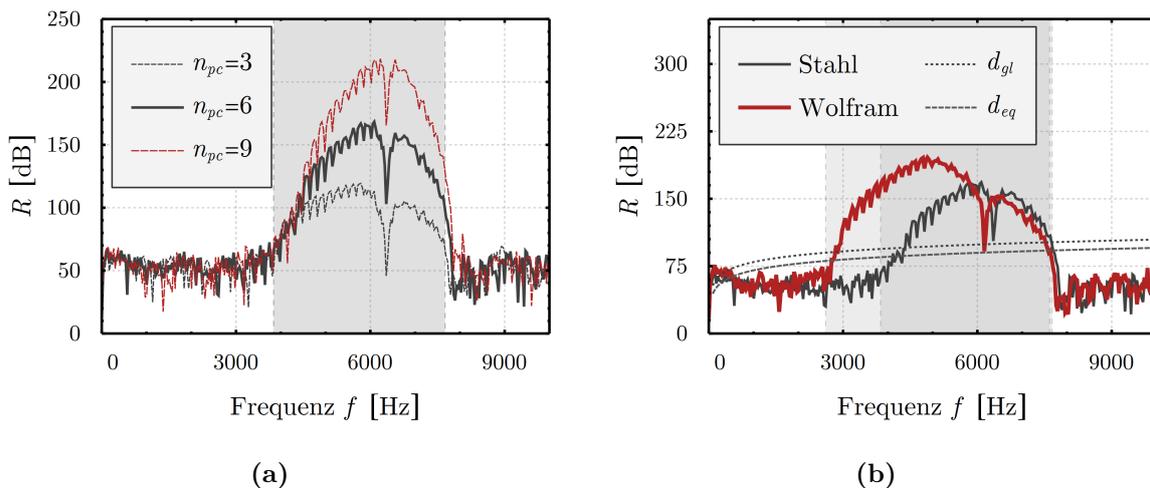


Abbildung 6.13: (a) Verlauf des Schalldämm-Maßes für n_{pc} Schichten der Einheitszellen und einem Stahlkern. (b) Verlauf des Schalldämm-Maßes für Stahl- und Wolfram-Kerne ($n_{pc} = 6$) und im Vergleich mit einer monolithischen Wand gleicher längenbezogener Masse (Dicke d_{eq}) und gleicher Dicke d_{gl} (berechnet mit Gl. (5.13) und Gl. (5.14)). Die hellgrauen (Wolfram) und dunkelgrauen (Stahl) Bereiche kennzeichnen die Bandlücken.

In der Abb. 6.14 sind schließlich noch die logarithmischen Werte der Amplitude des Verschiebungsfeldes über einen Ausschnitt der periodisch aufgebauten Wand für drei verschiedene Frequenzen dargestellt. Die Wand wird dabei durch das Schallfeld in einer FSI-Simulation (Abb. 6.11b) angeregt. Die Seite auf der sich der Senderraum und der Empfangsraum befinden sind in der Abb. 6.14 gekennzeichnet. Die Frequenzen 2000Hz und 10000Hz liegen außerhalb der Bandlücke und eine Wellenausbreitung ist möglich.

Für die Frequenz 6000Hz innerhalb der Bandlücke wird die Ausbreitung der elastischen Wellen in der Richtung der Wandnormale stark abgeschwächt. Somit wird auch nahezu keine Energie in den Empfangsraum übertragen, was die hohen Werte des Schalldämm-Maßes bei dieser Frequenz begründet. Dazu muss bei der Interpretation der Abb. 6.14 die logarithmische Skalierung beachtet werden. Für die Frequenz $f = 6000\text{Hz}$ reduziert sich die Amplitude der elastischen Welle vom linken Rand (Seite der Erregung im Senderaum) zum rechten Rand (Seite des Empfangsraums) auf ein Milliardstel.

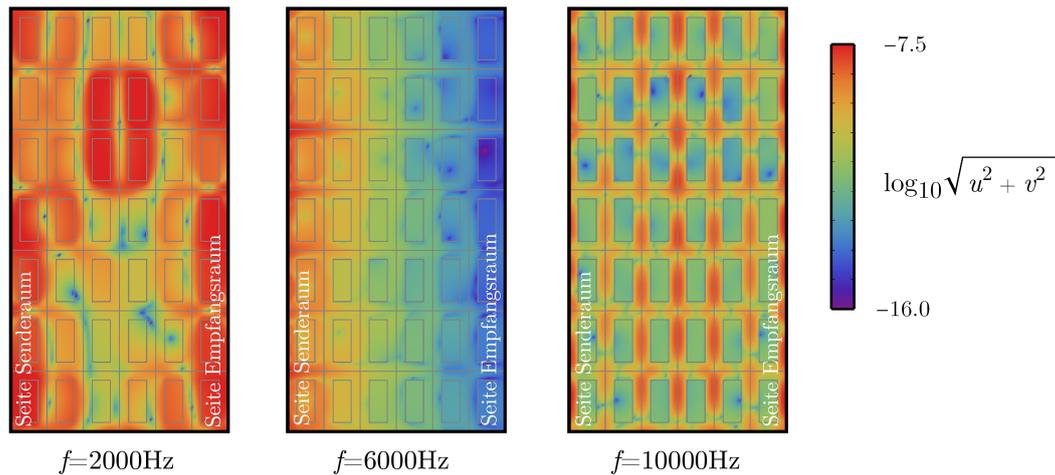


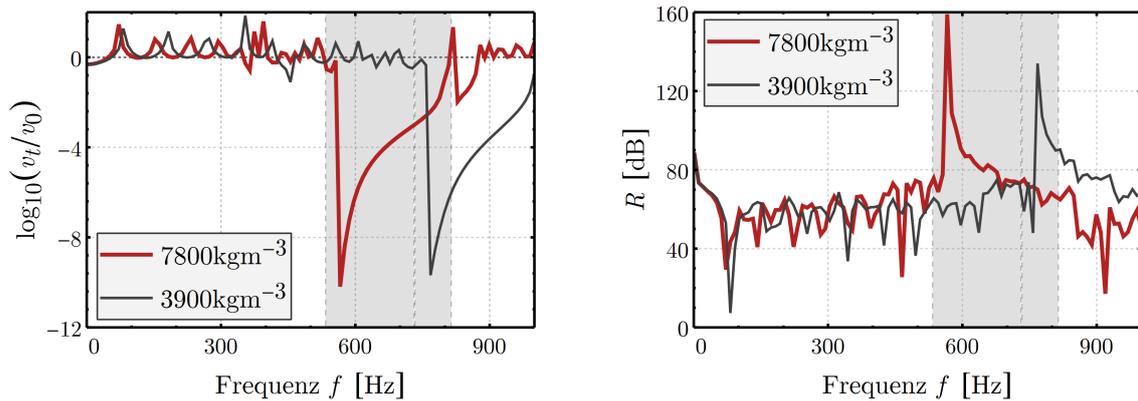
Abbildung 6.14: Repräsentative Ausschnitte des logarithmischen Verschiebungsfeldes $\log_{10}(\sqrt{u^2 + v^2})$ bei den Frequenzen 2000Hz, 6000Hz und 10000 Hz (Stahlkern, $n_{pc} = 6$). Die Frequenz $f = 6000\text{Hz}$ befindet sich in einer Bandlücke.

Einheitszelle 2

Im Folgenden werden mit der Einheitszelle 2 und der Einheitszelle 3 noch zwei weitere Möglichkeiten untersucht, wobei der äußere Teil der Einheitszelle aus einem relativ steifen Material besteht. Die in der Abb. 6.10b dargestellte Einheitszelle 2 verwendet einen Mantel Ω_a aus Beton. Der Kern Ω_m besteht aus Stahl, der von einem weichen Gummi in Ω_i umgeben ist ($E = 10\text{MPa}$, $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$), was mechanische Schwingungen des Kerns ermöglicht. Die Breite des Kerns beträgt $h_m = 0.03375\text{m}$. Das Dispersionsdiagramm kann dem Anhang A.4 entnommen werden.

In der Abb. 6.15 sind das entsprechende Frequenzspektrum für eine Anregung durch eine dynamische Verschiebung (vgl. Abb. 6.11a) und der Verlauf des Schalldämm-Maßes dargestellt. Verwendet werden hierbei $n_{pc} = 6$ Schichten der Einheitszelle. Da das Frequenzspektrum und der Verlauf des Schalldämm-Maßes nur in sehr geringem Maße von der Steifigkeit des Kerns abhängen, kann die Position der Bandlücke durch eine Anpassung der Masse des Kerns verändert werden. Dies lässt sich bspw. dadurch realisieren, dass der Kern als Hohlprofil gestaltet wird, der mit Stahl- oder Wolframkugeln, gefüllt werden kann und dadurch in der Masse verändert wird. Der Maximalwert des Schalldämm-Maßes

in der Bandlücke verringert sich dadurch zwar, allerdings ist es auch bei der halben Masse eines vollständig gefüllten Stahlkerns noch hinreichend groß. In der Abb. 6.16 ist das logarithmische Verschiebungsfeld in der Bandlücke für einen Ausschnitt der Wand dargestellt. Die Wand wird dabei durch das Schallfeld in einer FSI-Simulation (Abb. 6.11b) angeregt. Es ist deutlich erkennbar, dass die gute Schalldämmung auf die Resonanzeffekte beruht: der schwere Kern in der Einheitszelle wirkt durch seine Bewegung in der weichen umgebenden Masse der Wellenausbreitung entgegen.



(a) Frequenzspektrum

(b) Schalldämm-Maß

Abbildung 6.15: Frequenzspektrum für die Anregung durch eine dynamische Verschiebung und Verlauf des Schalldämm-Maßes für verschiedene Dichten des Kerns. Die grauen Bereiche kennzeichnen die Bandlücken für den Fall mit einem Kern der Dichte $\rho = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

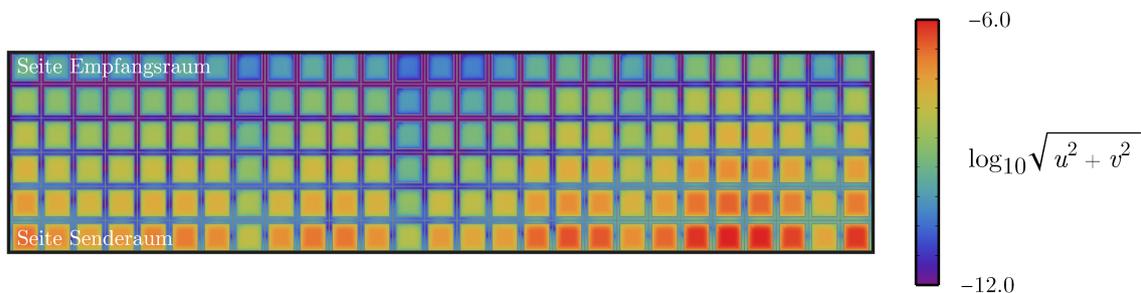


Abbildung 6.16: Repräsentatives logarithmisches Verschiebungsfeld $\log_{10}(\sqrt{u^2 + v^2})$ in der Bandlücke (565Hz).

Einheitszelle 3

Als letztes Beispiel wird die komplexere Einheitszelle aus Abb. 6.10c untersucht. Der versetzt angeordnete Hohlziegel besteht aus Beton. Auch in dieser Untersuchung wird wieder eine möglichst niedrige Frequenz für die erste Bandlücke angestrebt. Eine Parameterstudie ergibt dafür die Werte $w_a = 0.5\text{m}$, $h_a = 0.075\text{m}$, $w_i = 0.35\text{m}$ und $h_i = 0.06375\text{m}$, die

in den folgenden Untersuchungen verwendet werden. Das Dispersionsdiagramm für diese Werte kann dem Anhang A.4 entnommen werden.

In der Abb. 6.17 ist das Frequenzspektrum für die Anregung durch eine dynamische Knotenverschiebung dargestellt. Vergleichend dazu wird das sich ergebende Schalldämm-Maß der Wandstruktur gezeigt, wobei jeweils $n_{pc} = 4$ Schichten der Einheitszellen verwendet werden. Eine Füllung der Hohlräume kann mit Dämmmaterial vorgenommen werden, auch um die Wärmedämmung zu verbessern. Vorausgesetzt wird dabei, dass die elastische Wellenausbreitung innerhalb der Wandstruktur davon nicht beeinflusst wird, da sonst die Wirkung der PCs beeinträchtigt wird. Die Auswirkungen einer Füllung mit Luft sind vernachlässigbar (vgl. auch Abb. 6.8). Während für die Einheitszellen 1 und 2 jeweils nur eine große Bandlücke im relevanten Frequenzbereich bis 10000Hz existieren, sind hierbei außer einer großen Bandlücke auch mehrere kleine Bandlücken vorhanden (Abb. A.9b). Daraus ergeben sich nun mehrere Spitzen im Frequenzspektrum und dem Verlauf des Schalldämm-Maßes (Abb. 6.17). Durch den relativ komplexen Aufbau der Einheitszelle kommt es zu Interferenzeffekten, was die vergleichsweise „zackigen“ Verläufe erklärt. In der Abb. 6.18 ist das logarithmische Verschiebungsfeld für eine Frequenz von 4000Hz außerhalb von Bandlücken und 6500Hz in einer Bandlücke dargestellt. Die Wand wird dabei durch das Schallfeld in einer FSI-Simulation (Abb. 6.11b) angeregt.

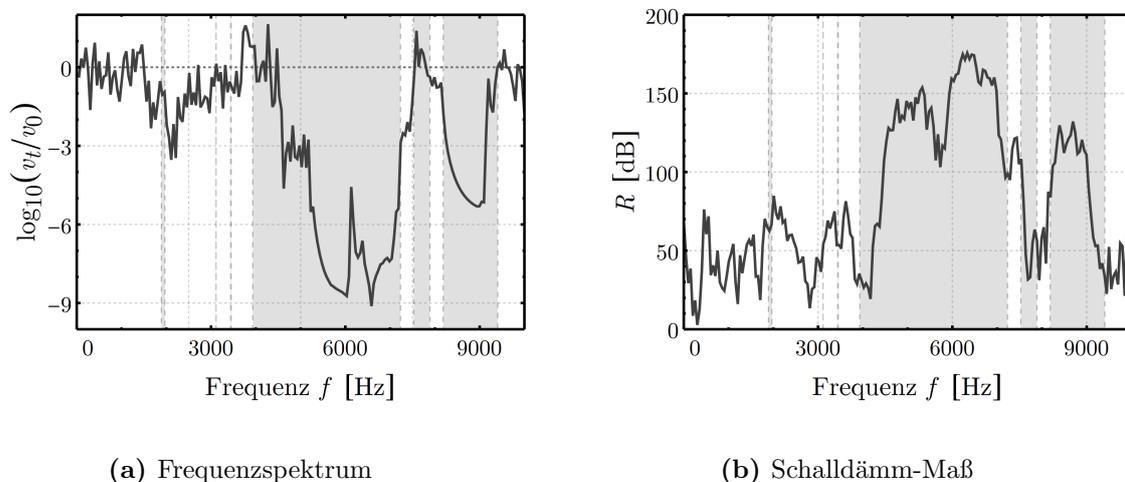


Abbildung 6.17: Frequenzspektrum für die Anregung durch eine dynamische Verschiebung und Verlauf des Schalldämm-Maßes.

Abschließend kann festgestellt werden, dass der Einsatz von periodischen Wandstrukturen, zum Zweck der Verhinderung der Übertragung von Schallenergie durch die Wand, durchaus vielversprechend ist. Insbesondere für viele Spezialanwendungen im Bauwesen, bei denen eine hohe Anforderung an die Schalldämmung verlangt wird, erscheint das Potential der periodischen Wandstrukturen sehr hoch. Durch eine gezielte Steuerung der Bandlücken in einem bestimmten Frequenzbereich kann das Schalldämmvermögen einer

Wandstruktur beträchtlich erhöht werden.

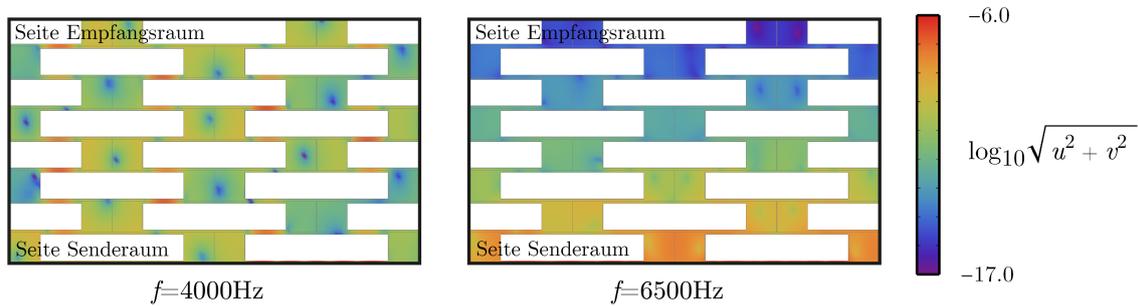


Abbildung 6.18: Repräsentative Ausschnitte des logarithmischen Verschiebungsfeldes $\log_{10} \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right)$ bei den Frequenzen 4000Hz (nicht in einer Bandlücke) und 6500Hz (in einer Bandlücke).

6.2 Wärmedämmung von Wandstrukturen

Um ein rechnerisch aufwändiges gekoppeltes Wärmeübertragungsproblem zu vermeiden, kann für luftgefüllte Hohlräume und Spalte ein äquivalenter Wärmeleitkoeffizient nach dem Abschnitt 5.3 verwendet werden. Es muss dann zur numerischen Berechnung der Wärmedurchgangszahl U einer Wandstruktur lediglich die Wärmeleitungsgleichung gelöst werden. Für geometrisch komplexe Wandstrukturen kommt dabei das virtuelle Labor mittels der SEM zum Einsatz. Im Folgenden wird dies an den vom CBMA entwickelten Wandaufbauten (siehe Abb. 6.7) demonstriert. Das Design II wird detailliert analysiert und die numerischen Ergebnisse werden mit experimentellen Messwerten verglichen. Die Ermittlung des Temperaturverlaufs und der Wärmedurchgangszahl ist für die übrigen Designs analytisch möglich und wird im Anschluss kurz vorgestellt. Für einen detaillierteren Vergleich der im virtuellen Mehrzwecklabor ermittelten Wärmedurchgangszahl von Design II mit den Messwerten werden die zweite Schale der Wand und die Wand als Ganzes getrennt betrachtet (Abb. 6.19). Die Abmessungen und Materialwerte können der Abb. 6.7, Tab. 6.2 und Tab. 6.3 entnommen werden. Die Emissionsgrade betragen $\varepsilon = 0.9$ für die Wände des Luftspalts und $\varepsilon = 0.85$ für die Wände der Hohlräume.

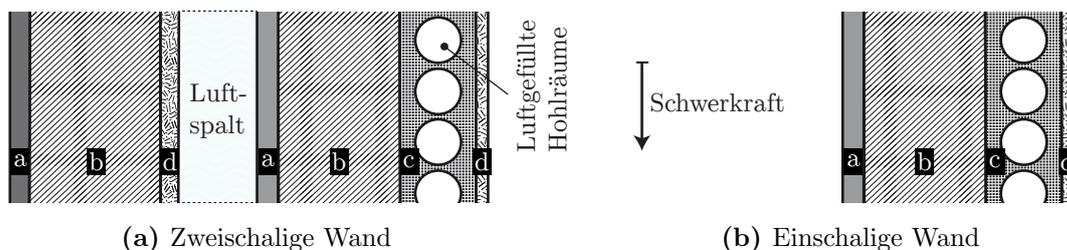


Abbildung 6.19: Ein- und zweischalige Wände mit Hohlräumen.

Die Tab. 6.4 zeigt die experimentell ermittelten Wärmedurchgangszahlen durch das Verfahren mit dem kalibrierten Heizkasten nach der DIN EN ISO 8990 [42] (die experimentellen Daten wurden vom CBMA zur Verfügung gestellt) und die unter der Anwendung des Näherungsverfahrens aus dem Abschnitt 5.3 im virtuellen Labor ermittelten Werte. Der Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen zeigt für die einschalige Wand geringe Abweichungen, die vermutlich auf Variation der Materialparameter oder Einflüsse bei der experimentellen Ermittlung zurückzuführen sind. Die Annahme einer linearen Temperaturverteilung in der Dickenrichtung der Wand zur Bestimmung der mittleren thermodynamischen Temperatur T_{mn} in Gl. (5.23) verursacht bei der Ermittlung im virtuellen Labor einen geringen Fehler. Eine Verbesserung würde eine iterative Berechnung schaffen, auf die aufgrund des geringen Fehlers jedoch verzichtet wird. Im Anhang A.3 wird für das Design II ein detaillierter Vergleich zwischen der gekoppelten Berechnung der Wärmeübertragung (Wärmeleitung, Strahlung und Konvektion) und der Berechnung im virtuellen Mehrzwecklabor angegeben.

Tabelle 6.4: Vergleich zwischen Experiment und Näherungslösung im virtuellen Labor.

	Experiment	Näherung (SEM)	Experiment	Näherung (SEM)
	Einschalige Wand		Zweischalige Wand	
$U \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \right]$	0.98	1.073	0.57	0.576

Die Temperaturverläufe über die Wanddicke und die Wärmedurchgangszahlen können für die CBMA Designs I,III und IV analytisch gemäß der Vorgehensweise in Gl. (5.24) berechnet werden, wobei für Design IV der äquivalente Wärmeleitkoeffizient für den Luftspalt verwendet wird. Die Ergebnisse sind in der Abb. 6.20 dargestellt.

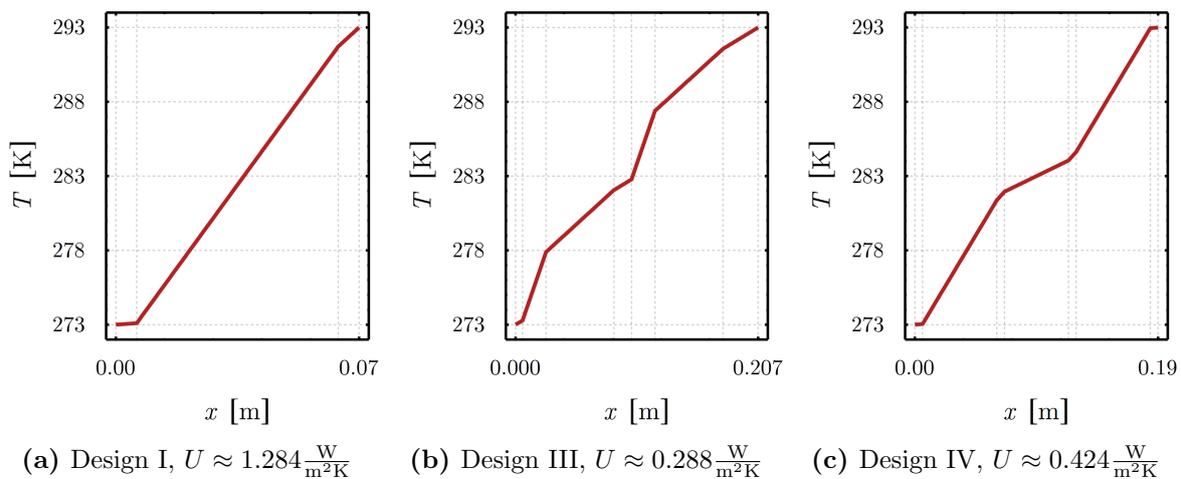


Abbildung 6.20: Verlauf der Temperatur über die Wanddicke. Für den Luftspalt im Design IV wird ein äquivalenter Wärmeleitkoeffizient verwendet.

6.3 Optimierung multifunktionaler Wandstrukturen

Wie im Kapitel 5 dargestellt, werden die Schall- und Wärmedämmungen sehr effizient im virtuellen Labor ermittelt. Die geringe Berechnungsdauer zur Ermittlung des Einzahlwertes der Schalldämmung R_w^{mod} und der Wärmedurchgangszahl U ermöglicht die Untersuchung und Optimierung von multifunktionalen Strukturen mit vielen hundert Iterationen.

In vielen Anwendungen, in denen die Wärmedämmung von Wänden optimiert wird, werden bei einer multikriteriellen Optimierung oft neben der Wärmedurchgangszahl auch die thermische Masse optimiert. Dadurch können Temperaturschwankungen sowohl in Richtung des Gebäudeinneren als auch nach Außen ausgeglichen und somit Kühl- bzw. Heizkosten reduziert werden. Dazu wird die Wandstruktur über den Verlauf des Tag-Nacht-Zyklus, oder auch der Jahreszeiten untersucht und abhängig vom Einsatzstandort optimiert [2, 26, 15, 110, 74, 142].

Insbesondere im Automobilssektor oder auch im Flugzeugbau wird, neben der Maximierung der Schalldämmung häufig das Gewicht einer Struktur minimiert [33, 70, 141, 135]. Im Bereich der Gebäudeplanung sind, neben den statischen, akustischen und thermischen Eigenschaften, vor allem auch die Kosten ein wichtiges Optimierungsziel [75, 29].

Der Fokus liegt in dieser Arbeit auf den Teilzielen der Schalldämmung und der Wärmedämmung. Es existieren im Bereich des Bauwesens bisher nur wenige Veröffentlichungen, in denen eine multikriterielle Optimierung von Wandstrukturen hinsichtlich dieser beiden Ziele vorgenommen wurde [37, 98].

6.3.1 Doppelschalige Wand mit Hohlräumen

Das CBMA Design II aus der Abb. 6.7 enthält einen Luftspalt und Hohlräume. Es wird in diesem Beispiel eine Optimierung durch Parametervariation durchgeführt. Dazu wird eine große Anzahl an Punkten für eine Variation der Auslegungsvariablen d_2 und d_{LS} berechnet. Die Verläufe des Einzahlwertes des Schalldämm-Maßes und der Wärmedurchgangszahl in Abhängigkeit der Auslegungsvariablen sind in der Abb. 6.21 dargestellt.

Als erstes wird eine Optimierung mit einer gleichen Gewichtung des Schalldämm-Maßes und der Wärmedurchgangszahl in der Zielfunktion vorgenommen. Zur Vorgabe der Zielfunktion wird hierbei zur Bestimmung des notwendigen Wertes von δ_U bei 50/50-Gewichtung der Zielfunktion (siehe Abschnitt 5.4.1) eine geringe Anzahl an Parametern evaluiert, um näherungsweise die Extremwerte für die Wärme- und Schalldämmung zu bestimmen.

Das Optimierungsproblem lautet für eine gleiche Gewichtung der Schall- und Wärmedäm-

mung an der Zielfunktion dann:

$$\text{Maximiere } f_t(d_2, d_{LS}) = 100 + R_w^{mod}(d_2, d_{LS}) - 140U(d_2, d_{LS})$$

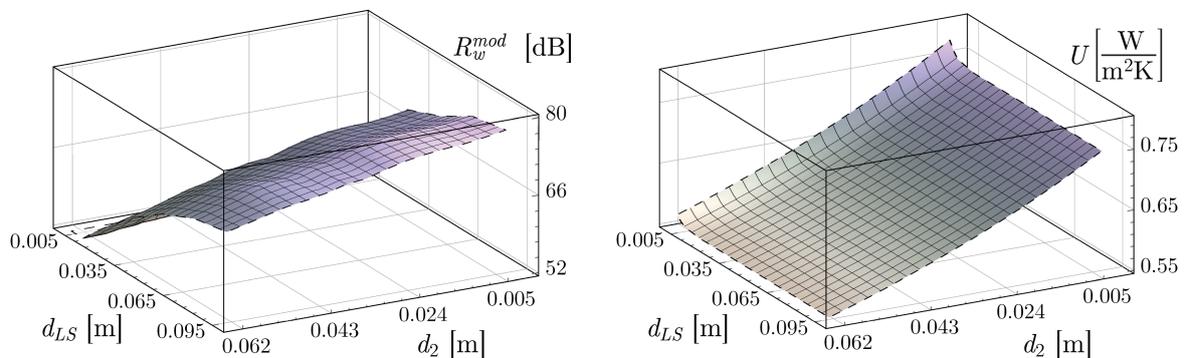
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1} d_i &= 0.07\text{m}, \\ 0.005\text{m} &\leq d_2 \leq 0.065\text{m}, \\ d_1 &= d_3, \\ 0.005\text{m} &\leq d_{LS} \leq 0.1\text{m}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Für das Optimierungsproblem, bei welchem ein minimaler Wert des Schalldämm-Maßes von $R_{w,min}^* = 70\text{dB}$ vorgegeben wird, lautet die Zielfunktion

$$\text{Maximiere } f_t(d_2, d_{LS}) = 100 - U(d_2, d_{LS}). \quad (6.2)$$

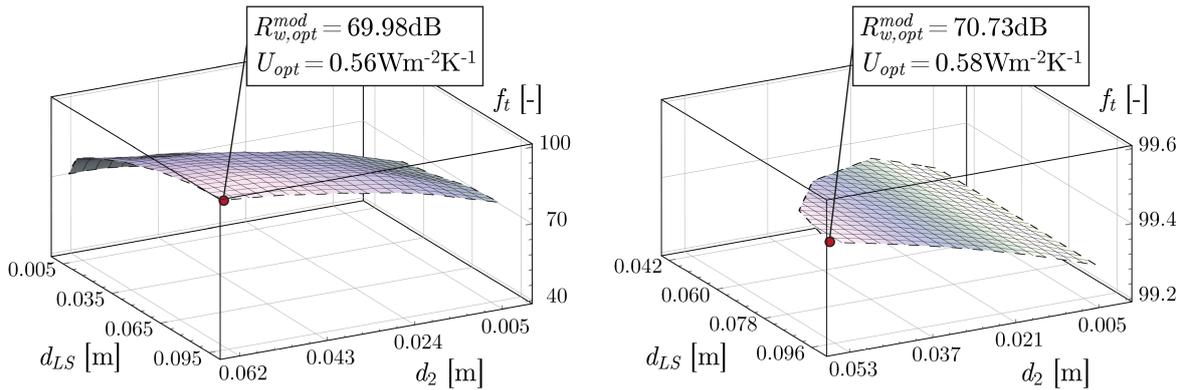
Die Nebenbedingungen aus der Gl. (6.1) werden in diesem Fall dann um die Ungleichung $R_w^{mod} \geq R_{w,min}^* = 70\text{dB}$ ergänzt. Die sich daraus ergebenden Zielfunktionen für beide Optimierungsprobleme sind in der Abb. 6.22 dargestellt. Für den ausgeschnittenen Teil der Fläche in Abb. 6.22b wird die Bedingung für einen Minimalwert von R_w^{mod} nicht erfüllt.



(a) $R_w^{mod}(\mathbf{d})$

(b) $U(\mathbf{d})$

Abbildung 6.21: Schalldämm-Maß und Wärmedurchgangszahl in Abhängigkeit von den Parametern d_{LS} und d_2 .



(a) 50/50-Gewichtung

(b) $R_{w,min}^*$

Abbildung 6.22: $f_t(\mathbf{d})$ für gleiche Gewichtung der Schall- und Wärmedämmung und $f_t(\mathbf{d})$ für die Maximierung von U bei gegebenem $R_{w,min}$.

In der Abb. 6.23 sind die Werte R_w^{mod} und U für alle berechneten Parameterkombinationen und die sich daraus ergebende PARETO-Front dargestellt. Wie im Abschnitt 5.4.1 erläutert, befinden sich auf dieser die Optimalpunkte für jeweils ein Teilziel. So hat bspw. der Punkt für $R_w^{mod} = 74\text{dB}$ die Wärmedurchgangszahl $U = 0.64 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$. Außer diesem Punkt hat kein anderer Punkt mit $R_w^{mod} = 74\text{dB}$ eine geringere Wärmedurchgangszahl. Das gleiche gilt auch für das Teilziel der Wärmedurchgangszahl. Für den Punkt mit $U = 0.7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ ergibt sich $R_w^{mod} = 76.9\text{dB}$. Alle anderen Punkte mit einer besseren Schalldämmung haben gleichzeitig eine schlechtere Wärmedurchgangszahl. Daher kann, neben der Einhaltung von Grenzwerten durch den Auftraggeber oder den Gesetzgeber, ein weiteres Kriterium herangezogen werden. So sollen die optimierten Designs, wie in Kapitel 1 erläutert, dazu beitragen die Luftverschmutzung zu reduzieren, indem eine möglichst hohe Menge an Stroh einer sinnvollen Verwendung zugeführt wird damit diese nicht verbrannt werden muss. Als zusätzliches Entscheidungskriterium kann also die Maximierung der Schicht $d_{2,max}$ aus gepresstem Stroh herangezogen werden. Weiterhin kann auch eine minimale Dicke des Luftspalts $d_{LS,min}$, und damit eine geringere Gesamtdicke der Wand, als ein mögliches Auswahlkriterium verwendet werden. Die dazugehörigen Werte, welche im Übrigen teilweise deckungsgleich mit den Werten für $d_{2,max}$ sind, können ebenfalls der Abbildung entnommen werden. In der Abb. 6.23 ist auch die Referenzkonfiguration eingezeichnet. Der Datenpunkt der Referenzkonfiguration liegt oberhalb der PARETO-optimalen Menge, was bedeutet, dass es unabhängig von der Formulierung der Zielfunktion (aber mit den gleichen Nebenbedingungen) Datenpunkte gibt, die ein besseres Schalldämm-Maß und eine bessere Wärmedurchgangszahl aufweisen. Die Abmessungen der Referenzkonfiguration können der Tab. 6.3 entnommen werden und die Werte des Schalldämm-Maßes und der Wärmedurchgangszahl der Referenzkonfiguration werden in den Abschnitten 6.1.2 und 6.2 ermittelt.

In der Tab. 6.5 sind die Ergebnisse der Optimierung durch Parametervariation zusammengefasst. Es ergibt sich bei 50/50-Gewichtung der Zielfunktion ein besseres Schalldämmmaß und auch eine bessere Wärmedurchgangszahl. Für die Vorgabe von $R_{w,min}^*$ ergibt sich ein deutlich besseres Schalldämm-Maß bei gleicher Wärmedurchgangszahl. Falls die Optimierung durch Parametervariation mit einer größeren Anzahl von Werten der Auslegungsvariablen (und damit höherem Berechnungsaufwand) durchgeführt wird, liegt der Wert für $R_{w,min}^*$ näher an der Vorgabe $R_{w,min}^* = 70\text{dB}$.

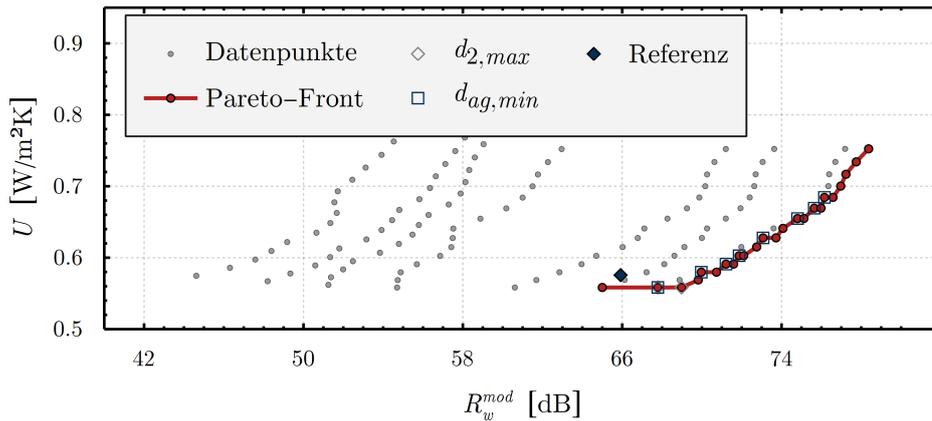


Abbildung 6.23: PARETO-Front für U und R_w^{mod} mit Entscheidungskriterien $d_{LS,min}$ und $d_{2,max}$.

Tabelle 6.5: Werte der Schalldämmung und der Wärmedämmung des Referenzdesigns und der optimierten Designs durch Parametervariation.

	$R_{w,opt}^{mod}$ [dB]	U_{opt} [$\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$]	d_2 [m]	d_{LS} [m]
Referenz	65.92	0.58	0.058	0.05
50/50-Gewichtung	69.98	0.56	0.065	0.10
Vorgabe von $R_{w,min}^*$	70.73	0.58	0.056	0.10

6.3.2 Wand mit sieben Schichten

Als ein illustratives Beispiel für die Anwendung des genetischen Algorithmus wird das CBMA Design III betrachtet, siehe Abb. 6.7. Es werden die vier Schichten $d_{1,1}$, $d_{2,1}$, $d_{3,1}$ und $d_{1,2}$ variiert. Durch die höhere Anzahl von Optimierungsvariablen ist die Anwendung des GA deutlich effizienter als eine einfache Variation der Parameter.

Als erstes Optimierungsproblem wird wieder eine gleiche Gewichtung der Schall- und

Wärmedämmung betrachtet. Das Optimierungsproblem lautet dann:

$$\text{Maximiere } f_t(\mathbf{d}) = 100 + R_w^{mod}(\mathbf{d}) - 44.8U(\mathbf{d})$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1} d_i &= 0.207\text{m}, \\ 0.0025\text{m} &\leq d_{1,1} \leq 0.02\text{m}, \\ 0.01\text{m} &\leq d_{2,1} \leq 0.1\text{m}, \\ 0.005\text{m} &\leq d_{3,1} \leq 0.05\text{m}, \\ 0.005\text{m} &\leq d_{1,2} \leq 0.03\text{m}, \\ d_{2,2} &= d_{2,1}, \\ d_{3,2} &= d_{3,1}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Für das zweite Optimierungsproblem wird ein maximaler Wert der Wärmedurchgangszahl von $U_{max}^* = 0.35 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ vorgegeben und der Wert R_w^{mod} der Schalldämmung wird optimiert. Die Aufgabenstellung lautet dann:

$$\text{Maximiere } f_t(\mathbf{d}) = 100 + R_w^{mod}(\mathbf{d}). \tag{6.4}$$

Es werden die gleichen Nebenbedingungen aus Gl. (6.3) verwendet, die allerdings um $U \leq U_{max}^* = 0.35 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ ergänzt werden sollen. Wie in der Abb. 6.24 ersichtlich ist, findet der genetische Algorithmus für beide Optimierungsaufgaben nach einer geringen Anzahl an Iterationen bereits einen relativ hohen Wert der Zielfunktion. Das Auffinden des globalen Optimums benötigt allerdings eine sehr hohe Anzahl von Durchläufen.

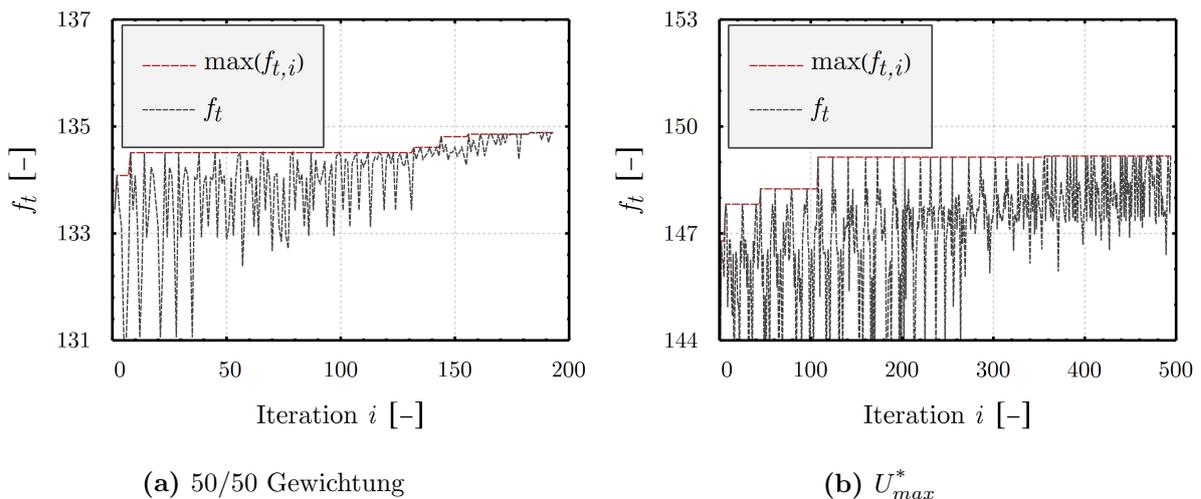


Abbildung 6.24: Verlauf der Zielfunktion f_t über i Iterationen des genetischen Algorithmus. Die gestrichelte rote Linie gibt den Maximalwert $\max(f_{t,i})$ der i -ten Iteration an.

Zur Ermittlung der PARETO-optimalen Menge werden wieder, wie im vorangegangenen

Abschnitt, für eine große Anzahl von Parameterkombinationen der U -Wert und R_w^{mod} -Wert ermittelt (siehe Abb. 6.25). Die PARETO-Front ist, ebenso wie das Entscheidungskriterium einer maximalen Dicke der Pressstroschicht, in der Abbildung ersichtlich. Da die Wärmedämmung der Wand allerdings für den überwiegenden Wertebereich der Optimierungsvariablen sehr gute Werte annimmt, sind die höheren Werte der Schalldämmung auf Kosten der Wärmedämmung zu bevorzugen.

Die Tab. 6.6 fasst die Ergebnisse der Optimierung zusammen und vergleicht diese mit der Referenzkonfiguration (mit den Abmessungen nach Tab. 6.3). Durch die Anwendung des GA kann das Schalldämm-Maß und auch die Wärmedurchgangszahl deutlich verbessert werden, doch verbessern sich nicht beide Werte gleichzeitig. Dies liegt in beiden Fällen an der Definition der Zielfunktion, die der GA maximiert. Wie der Abb. 6.25 entnommen werden kann, liegt der Datenpunkt der Referenzkonfiguration des Design III deutlich hinter der PARETO-Front. Daraus ergibt sich, dass bei gleicher Wärmedurchgangszahl eine knapp 2dB bessere Schalldämmung und bei gleicher Schalldämmung eine um etwa $0.5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ bessere Wärmedämmung gegenüber der Referenzkonfiguration möglich ist. Während die Optimierung durch den GA jedoch lediglich wenige hundert Iterationen benötigt, ist die PARETO-Front in Abb. 6.25 durch eine Parametervariation mit, bedingt durch die große Anzahl an Optimierungsvariablen, fast 10000 Berechnungsdurchläufen ermittelt worden. Eine Anwendung in praktischen Fällen ist also nicht sehr effizient und wird hier lediglich für einen Vergleich durchgeführt.

Das mittels dem genetischen Algorithmus erzielte Optimum mit dem Ziel gleicher Gewichtung von Schall- und Wärmedämmung (der Datenpunkt Optimum_{50/50} in Abb. 6.25) liegt in unmittelbarer Nähe zur PARETO-Front, woraus sich schließen lässt, dass der Optimierungsalgorithmus einen sehr guten Wert sehr effizient finden konnte. Für das Ziel einer maximalen Wärmedämmung (der Datenpunkt Optimum $_{U_{max}^*}$) gilt dies jedoch nicht in gleichem Maße. Das vom genetischen Algorithmus gefundene lokale Optimum liegt zwar relativ nahe an der PARETO-Front, doch wird ein besserer Wert auch nach sehr viel mehr Iterationen nicht gefunden. Dies erklärt auch die größere Schwankungsbreite der Zielfunktion in der Abb. 6.24.

Tabelle 6.6: Werte der Schalldämmung und der Wärmedämmung des Referenzdesigns und der optimierten Designs durch Parametervariation.

	$R_{w,opt}^{mod}$ [dB]	U_{opt} [$\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$]	$d_{1,1}$ [m]	$d_{1,2}$ [m]	$d_{2,1}$ [m]	$d_{3,1}$ [m]
Referenz	46.19	0.29	0.0060	0.0150	0.0580	0.0200
50/50-Gewichtung	44.56	0.22	0.0027	0.0199	0.0112	0.0446
Vorgabe von U_{max}^*	49.17	0.33	0.0035	0.0057	0.0118	0.0187

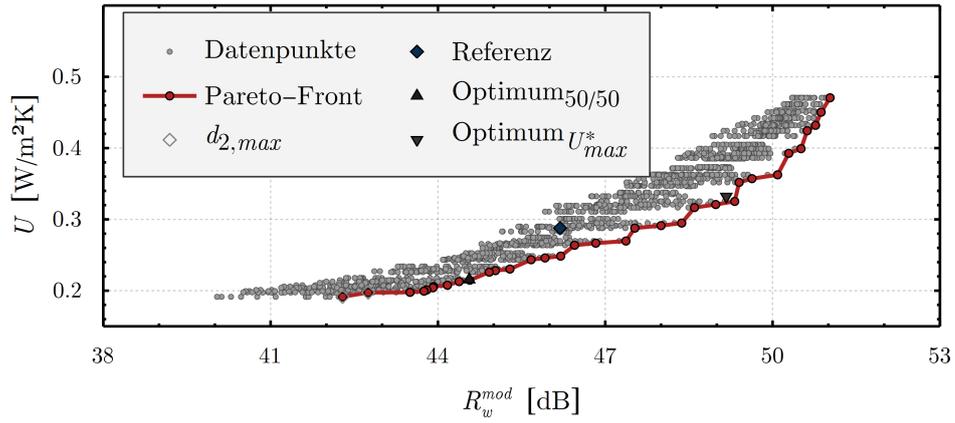


Abbildung 6.25: PARETO-Front von U und R_w^{mod} mit dem Entscheidungskriterium für $d_{2,max}$.

7 Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein virtuelles Mehrzwecklabor zur Untersuchung und Optimierung der Schall- und Wärmedämmungseigenschaften von mehrschichtigen, mehrschaligen und geometrisch komplex aufgebauten Wandstrukturen und Paneelen entwickelt. Das virtuelle Mehrzwecklabor basiert überwiegend auf der SEM, verwendet aber auch analytische Ansätze und Näherungslösungen für einfache Fälle.

Der Einsatz des in dieser Arbeit entwickelten Mehrzwecklabors ist für geometrisch komplex aufgebaute Wände zwingend notwendig, da hierfür im Allgemeinen keine analytischen Lösungen oder Näherungslösungen existieren. Aber auch für monolithische, mehrschichtige und mehrschalige Wandstrukturen ergeben sich Vorteile, da, im Gegensatz zu analytischen Lösungen und Näherungsmethoden, keine maßgebenden Einschränkungen bezüglich der Randbedingungen und Materialmodelle bestehen. Zudem wird eine Fluid-Struktur-Kopplung vollständig berücksichtigt, was eine akkurate Simulation von mehrschaligen Wänden ermöglicht. Prinzipiell kann daher bei der Verwendung des entwickelten Mehrzwecklabors auf eine langwierige und kostspielige experimentelle Messung verzichtet werden, was insbesondere die Durchführung von Parameterstudien und Optimierungen komplexer Wandstrukturen ermöglicht und deutlich vereinfacht.

Die SEM als ein wichtiges Simulationswerkzeug zeichnet sich durch eine hohe Genauigkeit und Effizienz aus. Die Verwendung der GAUSS-LEGENDRE-LOBATTO Nodalbasis führt zu einer sehr niedrigen Konditionszahl der Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems. Dies ermöglicht die Verwendung einer hohen Ordnung der Formfunktionen und steigert die Genauigkeit der numerischen Simulation. Darüber hinaus verbessert sich dadurch das numerische Verhalten in der Nähe von Eigenfrequenzen und ungünstigen Materialwerten. Bei der numerischen Integration mittels LOBATTO-Quadratur ergibt sich für alle Ordnungen der Formfunktionen eine diagonale Elementmassenmatrix. Transiente Problemstellungen können dann effizient durch ein explizites Zeitintegrationsverfahren gelöst werden. Für frequenzabhängige Wellenausbreitungsprobleme ergeben sich daraus Vorteile durch die geringere Anzahl von notwendigen numerischen Operationen. Die Effizienz der SEM wird für unterschiedliche Probleme der Akustik, Elastodynamik und Fluid-Struktur-Interaktion im Zeit- und Frequenzbereich sowie für transiente und stationäre Wärmeleitung untersucht. Es kann dabei festgestellt werden, dass sich für Problemstel-

lungen, in denen eine sehr hohe Genauigkeit der Lösung gefordert ist, bei der Verwendung einer hohen Ordnung der SEM eine sehr hohe Effizienz mit niedrigem Speicherplatzbedarf ergibt. Die Verwendung der SEM ist dann gegenüber der Standard-FEM deutlich zu bevorzugen. Für niedrige Genauigkeitsanforderungen muss die Ordnung der Formfunktionen reduziert werden, um die Effizienz der SEM zu maximieren. Im Allgemeinen ergeben sich für niedrige Genauigkeitsanforderungen bei Verwendung der SEM nur noch geringe Vorteile gegenüber der Standard-FEM.

Zur Untersuchung der Schalldämmung einer Wandstruktur oder eines Paneels im virtuellen Mehrzwecklabor wird ein FSI-Problem im Frequenzbereich gelöst. Der Aufbau des entwickelten virtuellen Mehrzwecklabors orientiert sich dabei an den Richtlinien der DIN EN ISO 10140 zur experimentellen Messung. Es wurden umfangreiche Untersuchungen zur notwendigen Genauigkeit und zu den Einflüssen der Labor- und Simulationsparameter durchgeführt. Soll nur der qualitative Verlauf des Schalldämm-Maßes einer Wandstruktur ermittelt werden, ist eine vergleichsweise niedrige Genauigkeit zu empfehlen. Insbesondere für mehrschichtige und geometrisch einfache Wandstrukturen konnte hier unter anderem durch eine angepasste Vernetzung, den Einsatz spezieller Elemente und die LOBATTO-Quadratur eine deutliche Steigerung der Effizienz des virtuellen Labors zur Berechnung der Schalldämmung im Vergleich mit kommerzieller Software erreicht werden. Es wurden auch periodisch angeordnete Wandstrukturen hinsichtlich ihrer Schalldämmeigenschaften im virtuellen Mehrzwecklabor untersucht. Dabei wurde festgestellt, dass eine sehr hohe Schalldämmung in bestimmten Frequenzbereichen in der Bandlücke erreicht werden kann.

Zur Bestimmung der Wärmedurchgangszahl, Kennwert der Wärmedämmung im virtuellen Mehrzwecklabor, wird die stationäre Wärmeleitungsgleichung gelöst. Für luftgefüllte Spalte und Hohlräume innerhalb einer Wandstruktur wird ein äquivalenter Wärmeleitkoeffizient nach der Vorgehensweise der DIN EN ISO 6946 verwendet. Die Berechnung der Wärmedurchgangszahl kann dann für mehrschichtige und mehrschalige Wände analytisch vorgenommen werden. Die Wärmeleitungsgleichung wird für geometrisch komplexe Wandstrukturen mit der SEM gelöst. Die Genauigkeit des berechneten Temperaturfelds mittels der entwickelten SEM ist hierbei sehr hoch, zur Bestimmung der Wärmedurchgangszahl ist im Allgemeinen aber eine niedrige Genauigkeit ausreichend. Die Simulationszeit liegt auch für geometrisch komplexe Wandstrukturen unterhalb von einer Sekunde.

Die im virtuellen Mehrzwecklabor numerisch ermittelten Ergebnisse für die Schall- und Wärmedämmeigenschaften von Wandstrukturen und Paneelen wurden mit experimentellen Daten validiert. Es zeigt sich hierbei, im Rahmen der Messungenauigkeiten und Variation der Materialparameter, eine recht gute Übereinstimmung. Das entwickelte Mehrzwecklabor kann zur Optimierung multifunktionaler Wandstrukturen eingesetzt werden. Die multikriterielle Optimierung in dieser Arbeit bezieht sich auf die Schall- und Wärme-

dämmeigenschaften von Wandstrukturen und Paneelen. Der Algorithmus ist in der Lage, einen ausreichend akkuraten Einzahlwert der Schalldämmung gemäß DIN EN ISO 717 für mehrschichtige und mehrschalige Wandstrukturen innerhalb von weniger als zwei Minuten auf üblichen Bürorechnern zu ermitteln. Für geometrisch komplexe Strukturen ist die Berechnungszeit abhängig von der notwendigen Diskretisierung etwas höher. In jedem Fall können aber die Kennwerte der Schalldämmung und Wärmedämmung ausreichend schnell ermittelt werden, um mit vertretbarem Zeitaufwand mehrere hundert bis tausend Iterationen eines Optimierungsalgorithmus oder einer Parameterstudie zu ermöglichen.

7.2 Ausblick

Als verbesserungswürdig sind die Effizienz und die Flexibilität des virtuellen Mehrzwecklabors zu nennen. Die höhere Simulationszeit für geometrisch komplexe Wandstrukturen und Paneele resultiert aus der Verwendung von Viereckselementen zur Vernetzung der Struktur. Eine effizientere Berechnung könnte bei der Verwendung von Dreieckselementen für die Wandstruktur erzielt werden. In diesem Fall ist die SEM mit zusätzlichen Problemen verbunden. Weiterhin müssen dann unter Umständen andere Methoden, bspw. die Technik der *Localized Lagrange Multipliers*, zur Kopplung von Fluid- und Strukturbereichen erprobt werden. In welchem Maße die Genauigkeit und die Effizienz davon beeinflusst werden, soll in zukünftigen Forschungsarbeiten überprüft werden.

Der Optimierungsalgorithmus soll in Zukunft erweitert werden, um andere Ziele, insbesondere die wesentlichen baustatischen und baudynamischen Struktureigenschaften, zu berücksichtigen. Die in dieser Arbeit entwickelten numerischen Simulationswerkzeuge sollen dementsprechend modifiziert und weiterentwickelt werden. Schließlich ist zu erwähnen, dass das entwickelte virtuelle Mehrzwecklabor in dieser Arbeit nur auf Wandstrukturen und Paneele im Bauwesen angewendet wird. Prinzipiell kann das Labor aber auch zur Untersuchung und Optimierung multifunktionaler Sandwichstrukturen, geschichteter Laminare und ähnlicher Bauteile im Maschinenbau sowie in der Luft- und Raumfahrtindustrie eingesetzt werden. Dazu sind zusätzliche Forschungsarbeiten für das virtuelle Mehrzwecklabor erforderlich.

A Anhang

A.1 Fourier-Transformation

Mittels der FOURIER-Transformation

$$\bar{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.1})$$

kann eine beliebige Funktion $f(t)$ vom Zeitbereich in den Frequenzbereich überführt werden. Dabei wird $\bar{f}(\omega)$ als die FOURIER-Transformierte der zeitabhängigen Funktion $f(t)$ bezeichnet, und ω ist die Kreisfrequenz bzw. der Transformationsparameter.

Beispielhaft wird dies hier an der homogenen skalaren 1D Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{A.2})$$

demonstriert. Die Anwendung der Fourier-Transformation auf die Gl. (A.2) führt zu der folgenden 1D Helmholtz-Gleichung im Frequenzbereich:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \bar{p}(x, \omega) + \frac{\partial^2 \bar{p}(x, \omega)}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Die auftretenden zeitabhängigen Randbedingungen auf einem Rand Γ können ebenfalls durch die FOURIER-Transformation in den Frequenzbereich transformiert werden. Der Übergang des Anfangs-Randwertproblems vom Zeitbereich in den Frequenzbereich erlaubt es eine aufwändigere Lösung des Problems im Zeitbereich durch die Lösung der HELMHOLTZ-Gleichung mit den entsprechenden Randbedingungen zu ersetzen. Dies bietet sich insbesondere dann an, wenn, wie es in dieser Arbeit der Fall ist, in erster Linie das Frequenzspektrum der Lösung von Interesse ist.

A.2 Analytische Lösung der Helmholtz-Gleichung unter Dirichlet-Randbedingungen

Betrachtet wird die homogene HELMHOLTZ-Gleichung $\Delta p + k^2 p = 0$ über ein 2D quadratisches Gebiet $\Omega \in [1 \times 1]$. Die Randbedingungen $p = f_w(y)$ und $p = f_e(y)$ auf den

zwei gegenüberliegenden vertikalen Rändern Γ_w und Γ_e sind gegeben. Auf den zwei gegenüberliegenden horizontalen Rändern Γ_s und Γ_n gelten $p = f_s(x)$ und $p = f_n(x)$. Das Randwertproblem wird mittels einer semi-analytischen Methode, entwickelt von TADI in [128], gelöst.

Dabei wird das Problem auf die zwei Teilprobleme aufgeteilt, in denen jeweils die Randbedingungen auf den zwei gegenüberliegenden Rändern zu Null gesetzt werden. Wird zuerst $f_w(y) = f_e(y) = 0$ gesetzt, kann die Lösung für das Teilproblem über die Reihenentwicklung

$$p(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(y) \sin(j\pi x)$$

ermittelt werden. Die Randbedingungen für den unteren und oberen Rand sind gegeben durch

$$f_j(0) = 2 \int_0^1 f_s(x) \sin(j\pi x) dx, \quad f_j(1) = 2 \int_0^1 f_n(x) \sin(j\pi x) dx.$$

Die Faktoren $f_j(y)$ können unter Beachtung einer Fallunterscheidung in Abhängigkeit von j bestimmt werden. Für den Fall $k^2 > j^2\pi^2$ gilt:

$$f_j(y) = f_j(0) \cos(\sigma y) + \frac{f_j(1) - f_j(0) \cos(\sigma)}{\sin(\sigma)} \sin(\sigma y), \quad \sigma = \sqrt{k^2 - j^2\pi^2}.$$

Für den Fall $k^2 \approx j^2\pi^2$ gilt:

$$f_j(y) = (f_j(0) - f_j(1))y + f_j(0) + \sum_{n=1}^{n_{\max}} \varepsilon^n f_j^n(y), \quad \varepsilon = (k^2 - j^2\pi^2).$$

Für $k^2 < j^2\pi^2$ muss eine weitere Fallunterscheidung vorgenommen werden:

- $e^{j^2\pi^2 - k^2} \ll \infty$: $f_j(y) = \frac{f_j(1) - e^{-\tau} f_j(0)}{e^{\tau} - e^{-\tau}} e^{\tau y} + \frac{f_j(1) - e^{\tau} f_j(0)}{e^{-\tau} - e^{\tau}} e^{-\tau y}$,
- $k^2 \ll j^2\pi^2$: $f_j(y) = f_j(1) e^{-\tau(1-y)} + (f_j(0) - f_j(1) e^{-\tau}) e^{-\tau y}$,

mit $\tau = \sqrt{j^2\pi^2 - k^2}$. Analog kann die Lösung für das Teilproblem mit $f_s(x) = f_n(x) = 0$ ermittelt werden.

A.3 Numerische Lösung der Wärmeübertragung durch Wandstrukturen mit Hohlräumen

Die gekoppelten Berechnungen werden mit der Software COMSOL Multiphysics durchgeführt, um die Gleichungen (2.32), (2.35) und (2.36) numerisch zu lösen. Der grundsätzliche

Aufbau entspricht der Abb. A.1. Die Bestimmungsgleichungen und Randbedingungen sind:

$$\begin{aligned}
 &\text{Gl. (2.36) in} && \Omega_H, \\
 &\text{Gl. (2.32) in} && \Omega_H, \\
 &\text{Gl. (2.32) mit } \dot{\mathbf{u}} = 0 \text{ in} && \Omega_F, \\
 &\text{Gl. (2.35) auf} && \Gamma_R, \\
 &T = T_l \text{ und } T = T_r \text{ auf} && \Gamma_l \text{ und } \Gamma_r, \\
 &\nabla T = 0 \text{ auf} && \Gamma_o \text{ und } \Gamma_u, \\
 &\dot{\mathbf{u}} = 0 \text{ auf} && \Gamma_R, \\
 &\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g\rho_0 \end{bmatrix} \text{ in} && \Omega_H, \\
 &p_0(t) = 0 \text{ im Punkt} && \gamma.
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

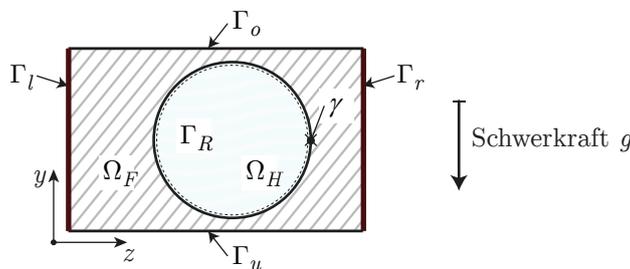


Abbildung A.1: Aufbau der gekoppelten Simulation.

Als Anfangsbedingungen werden das Temperaturfeld, Druckfeld und Geschwindigkeitsfeld

$$\begin{aligned}
 T(0) &= T_0 \text{ in } \Omega_F \text{ und } \Omega_H, \\
 \dot{\mathbf{u}}(0) &= 0, \quad p(0) = 0 \text{ in } \Omega_H
 \end{aligned}$$

vorgegeben. Durch die Bedingung $p_0(t) = 0$ in einem Punkt γ konvergiert die Berechnung schneller. Der dabei entstehende Fehler ist vernachlässigbar klein.

Im Folgenden wird mit U_{approx} der Wert der Wärmedurchgangszahl bei der Anwendung des Näherungsverfahrens nach Abschnitt 5.3 bezeichnet und die entsprechende äquivalente Wärmeleitfähigkeit für den Hohlraum mit k_{eq} . Für das gekoppelte FEM-Modell wird die Bezeichnung U_{kopp} für die Wärmedurchgangszahl verwendet. Vergleichsberechnungen mit dem gekoppelten FEM-Modell und dem Näherungsverfahren werden durchgeführt und die entsprechenden Ergebnisse werden in der Abb. A.2 angegeben. Es wird dabei ein Luftspalt der Dicke d_{LS} untersucht (siehe Abb. 5.13). Die Wände haben jeweils den Emissionsgrad ϵ . Die Zeitbereichsberechnung wird für ausreichend lange Zeitdauer durchgeführt, so dass ein stationärer Zustand des Wärmeflusses q erreicht ist. Die Wärmedurchgangszahl wird

dann mit der Gl. (2.38) berechnet.

Für praxisnahe Emissionsgrade im Bereich $\varepsilon > 0.8$ und kleine Spaltdicken ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung. Hierbei wird in der gekoppelten FE-Simulation ein Spalt mit hinreichend großen Abmessungen in Richtung der Schwerkraft verwendet.

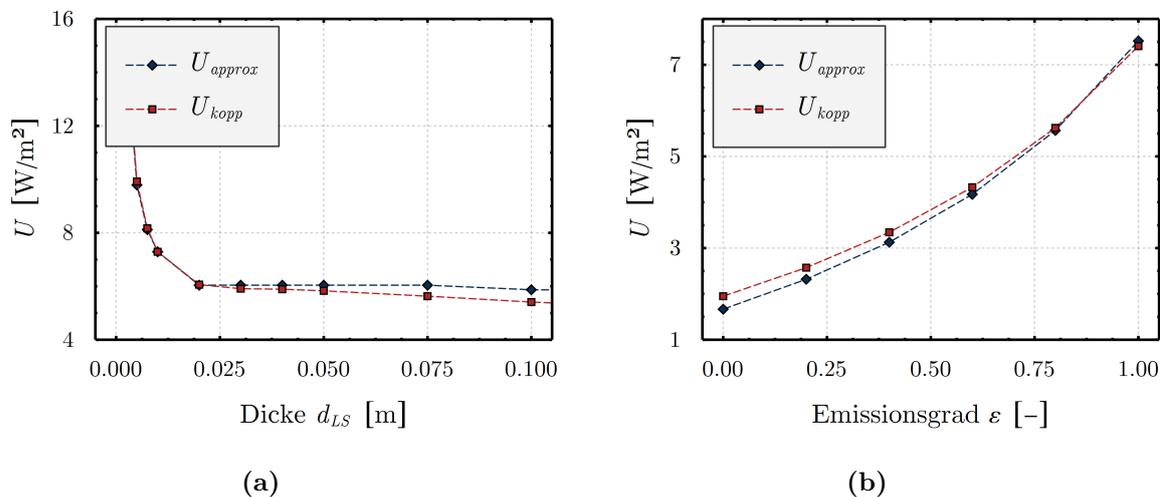


Abbildung A.2: Vergleich der Wärmedurchgangszahlen, berechnet durch die gekoppelte Simulation und das Näherungsverfahren, für (a) die Spaltdicke d_{LS} und (b) dem Emissionsgrad ε .

Es werden nun komplex geformte Hohlräume betrachtet. Die hier gezeigten Untersuchungen basieren auf 2D Simulationen, in denen die Schwerkraft orthogonal zur Hohlraumachse gemäß Abb. A.3 wirkt und dementsprechend $b \gg d_{LS}$ ist.

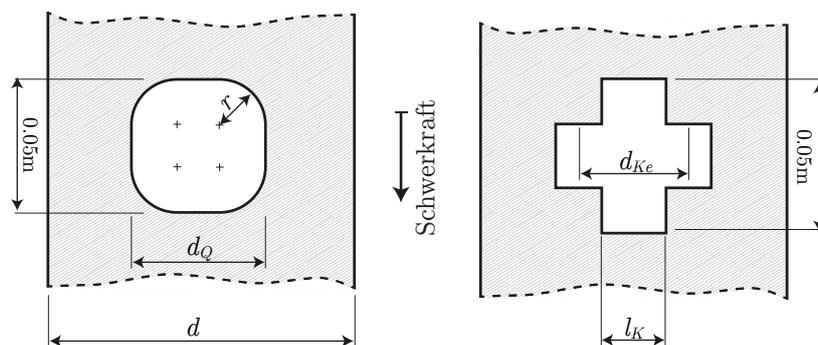


Abbildung A.3: Geometrie der Hohlräume. d_{Ke} ist der Abstand der Mitten der Kreuzstreben voneinander.

In der Abb. A.4 ist für verschiedene Parameter von r und l_K die Wärmedurchgangszahl U bei der Anwendung des Näherungsverfahrens im Vergleich zur gekoppelten FE-Simulation dargestellt. Hierbei wird der U -Wert in einer FE-Simulation für eine Wandstruktur der Dicke $d = 0.1$ m bestimmt, in der in der Richtung der Schwerkraft mehrere Hohlräume eingebracht sind. Es werden unterschiedliche Verfahren zur Bestimmung der äquivalenten

Dicke d_{LS} des Hohlraums verwendet, die der Abb. A.4 unter Berücksichtigung der Definitionen in Abb. A.3 entnommen werden können. In der Abb. A.5 ist beispielhaft das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld für einen kreuzförmigen Hohlraum dargestellt.

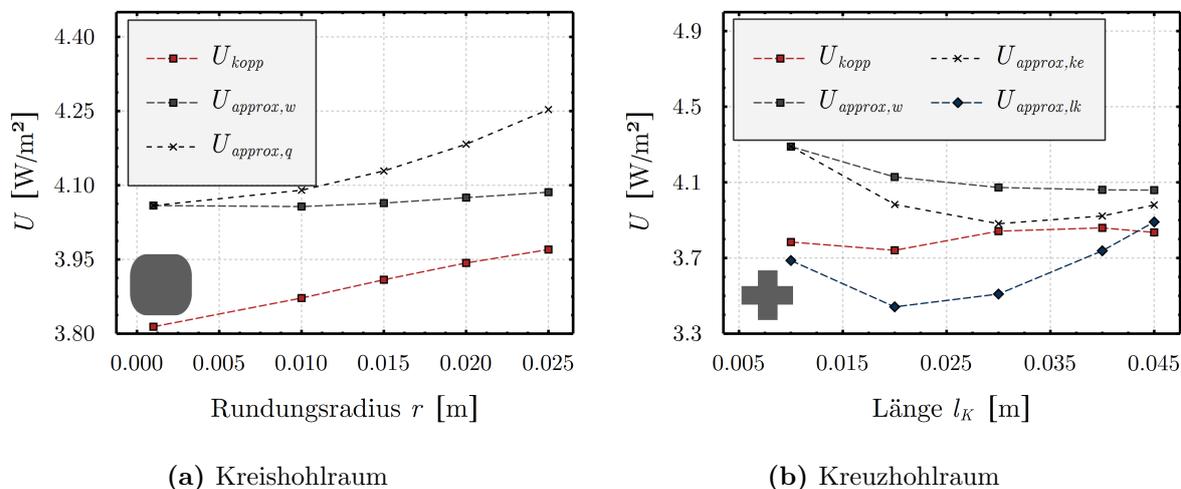


Abbildung A.4: Vergleich zwischen dem Näherungsverfahren und der gekoppelten Simulation für geometrisch komplexe Hohlräume. Hierbei wird d_{LS} wie folgt berechnet: $d_{LS} = \sqrt{A}$ für $U_{approx,w}$, $d_{LS} = d_Q$ für $U_{approx,q}$, $d_{LS} = d_{Ke}$ für $U_{approx,ke}$ und $d_{LS} = l_K$ für $U_{approx,lk}$. A ist hierbei die Fläche des Hohlraums.

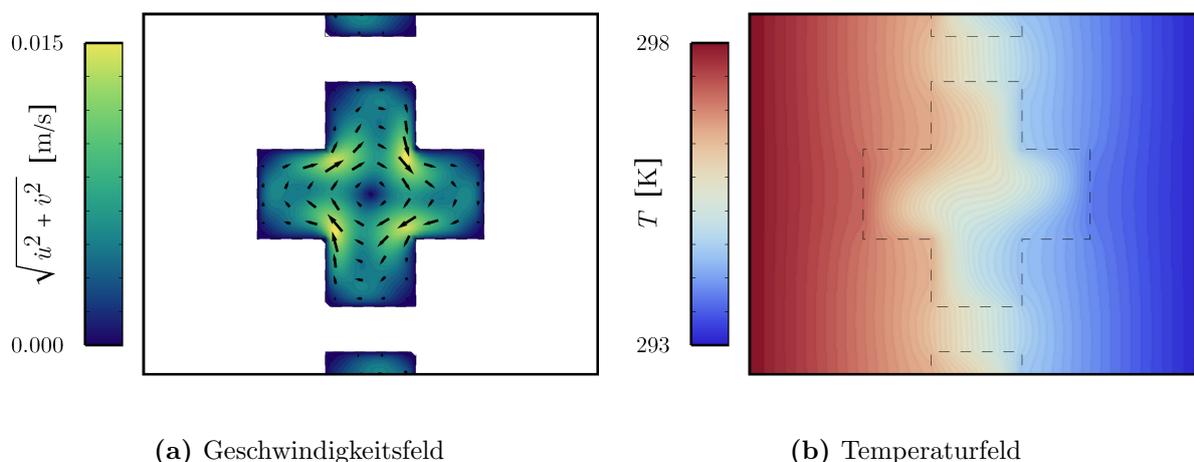


Abbildung A.5: Das Geschwindigkeits- und Geschwindigkeitsvektorfeld (eingezeichnete Pfeile in den Hohlräumen) sowie das Temperaturfeld aus der gekoppelten Simulation für einen kreuzförmigen Hohlraum.

Es wird nun der Einfluss der Mechanismen Wärmeleitung (D), Konvektion (C) und Strahlung (R) für die Wandstrukturen aus der Abb. 6.19 im Abschnitt 6.2 untersucht.

Für die vollständig gekoppelte FE-Simulation (DCR), in welcher sowohl Wärmeleitung, Strahlung und Konvektion berücksichtigt wird, ergibt sich, wie auch für das Näherungsverfahren, eine gute Übereinstimmung. Wird in der FE-Simulation nur Wärmeleitung und

Konvektion (DC), nur Wärmeleitung und Strahlung (DR) oder nur Wärmeleitung (D) berücksichtigt, ergibt sich eine beträchtliche Abweichung. Die Übereinstimmung zwischen gekoppelter Simulation und Approximation ist für beide Fälle sehr gut.

Tabelle A.1: Vergleich zwischen Experiment, Näherungslösung und Einflüsse von Wärmeleitung (D), Konvektion (C) und Strahlung (R) in gekoppelter Simulation.

	Experiment	DCR	DC	DR	D	Näherung (SEM)
Einschalige Wand						
$U \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \right]$	0.98	1.078	0.952	1.044	0.813	1.073
Zweischalige Wand						
$U \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \right]$	0.57	0.578	0.454	0.554	0.294	0.576

A.4 Berechnung der Dispersionsdiagramme von periodischen Strukturen

Die Berechnung der unendlich ausgedehnten periodischen Struktur lässt sich durch die Betrachtung einer repräsentativen Einheitszelle vereinfachen. Es muss zur Untersuchung des dynamischen Verhaltens der PC dann lediglich eine Eigenwertberechnung der Einheitszelle für eine Reihe von Wellenvektoren durchgeführt werden. Hierfür wird die sogenannte *Irreduzible Brillouin-Zone* (IBZ) betrachtet [16]. Der Wellenvektor \mathbf{k} wird dann innerhalb der Werte an den Eckpunkten der IBZ variiert. Für eine rechteckige Einheitszelle ist die IBZ in der Abb. A.6 dargestellt. Die elastischen Wellengleichungen für einen Festkörper im ebenen Verzerrungszustand sind gegeben durch Gl. (2.25). Auf Γ_{BF} gelten die periodischen *Bloch-Randbedingungen*:

$$\mathbf{u}_z = \mathbf{u}_q e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_z - \mathbf{r}_q)} \quad (\text{A.5})$$

Hierbei kennzeichnet z den Zielrand und q den Quellenrand der periodischen Randbedingungen auf Γ_{BF} und \mathbf{r} ist der Ortsvektor der jeweiligen Ränder. Für eine detaillierte Darstellung der Theorie der PC wird auf die Literatur verwiesen [36].

Nachfolgend werden in diesem Abschnitt die Dispersionsdiagramme für die Einheitszellen, die im Abschnitt 6.1.3 untersucht werden, berechnet. Die Variation der Geometrie der Einheitszelle soll zu einem möglichst niedrigen Frequenzbereich der ersten Bandlücke mit einer möglichst hohen Breite führen. Dafür wird eine Parametervariation in der Software MATLAB R2017b von The MathWorks, Inc. und COMSOL Multiphysics durchgeführt, mit der die optimalen Werte ermittelt werden. Eine Berechnung der Dispersionsdiagramme

me ist aber auch mit der SEM möglich [125, 52].

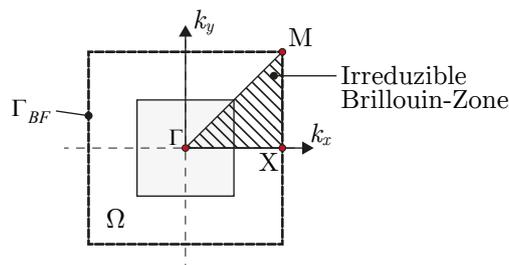


Abbildung A.6: Irreduzible BRILLOUIN-Zone (IBZ) in einem rechteckigen phononischen Kristall.

Einheitszelle 1

Es wird die Einheitszelle 1 aus der Abb. 6.10a untersucht. In der Abb. A.7 und Abb. A.8 sind die Dispersionsdiagramme jeweils für die verschiedenen Kombinationen der Werte von w_a und h_a , sowie w_i und h_i für einen Kern aus Stahl dargestellt.

Die grau eingezeichneten Bereiche in dem Dispersionsdiagramm geben die Frequenzbereiche an, in denen eine Ausbreitung der Welle nicht, bzw. lediglich unter starker Reduzierung der Amplitude, möglich ist. Diese werden als *Bandlücken* (englisch: *Bandgaps*) bezeichnet.

Es ist aus den Abb. A.7 und A.8 ersichtlich, dass die Abmessungen der Einheitszelle einen erheblichen Einfluss auf die Lage und die Breite der jeweiligen Bandlücken haben. Es kann insbesondere festgestellt werden, dass ein größerer Wert von h_a die Lage der ersten Bandlücke verringert. Die Abb. A.8 zeigt die Dispersionsdiagramme für die im Abschnitt 6.1.3 verwendeten Werte der Einheitszelle 1.

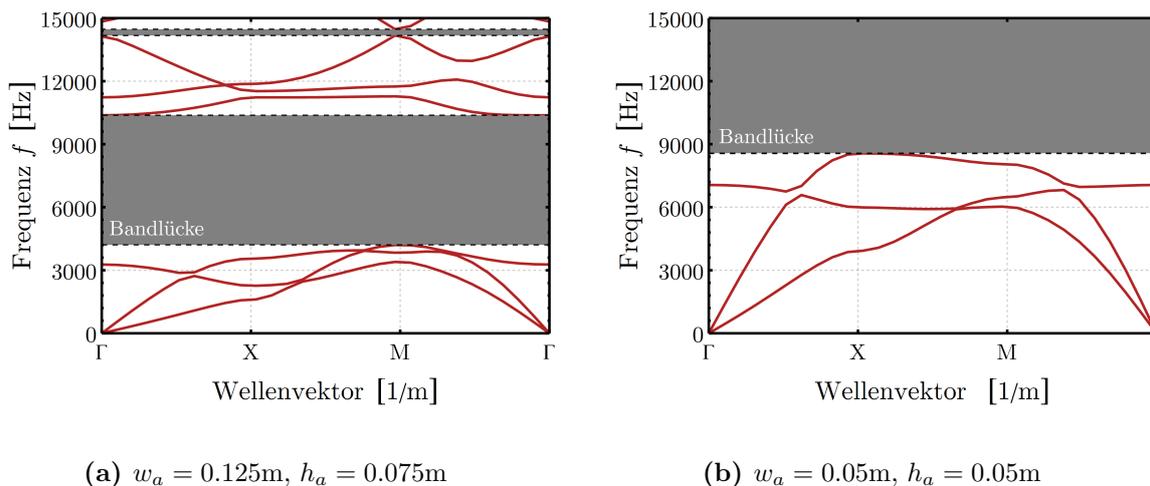


Abbildung A.7: Dispersionsdiagramme für $w_i = 0.8w_a$ und $h_i = 0.6w_a$. Die grauen Bereiche kennzeichnen Bandlücken.

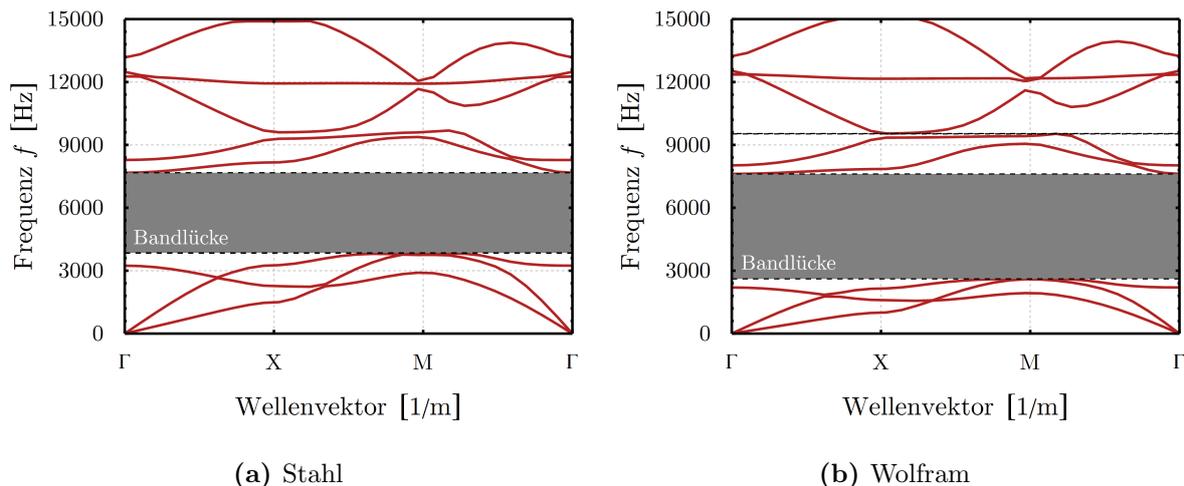


Abbildung A.8: Dispersionsdiagramme für die Abmessungen $w_a = 0.125\text{m}$, $h_a = 0.075\text{m}$, $w_i = 0.0875\text{m}$, $h_i = 0.0375\text{m}$ und einen Kern aus Stahl und Wolfram. Die grauen Bereiche kennzeichnen Bandlücken.

Einheitszelle 2 und Einheitszelle 3

Die geometrischen Abmessungen der Einheitszelle 2 (Abb. 6.10b) und Einheitszelle 3 (Abb. 6.10c) werden ebenfalls so gewählt, dass sich eine möglichst breite Bandlücke mit möglichst niedriger Frequenz für die jeweilige Einheitszelle ergibt. Die ermittelten Dispersionsdiagramme für die optimalen Abmessungen sind in der Abb. A.9 dargestellt.

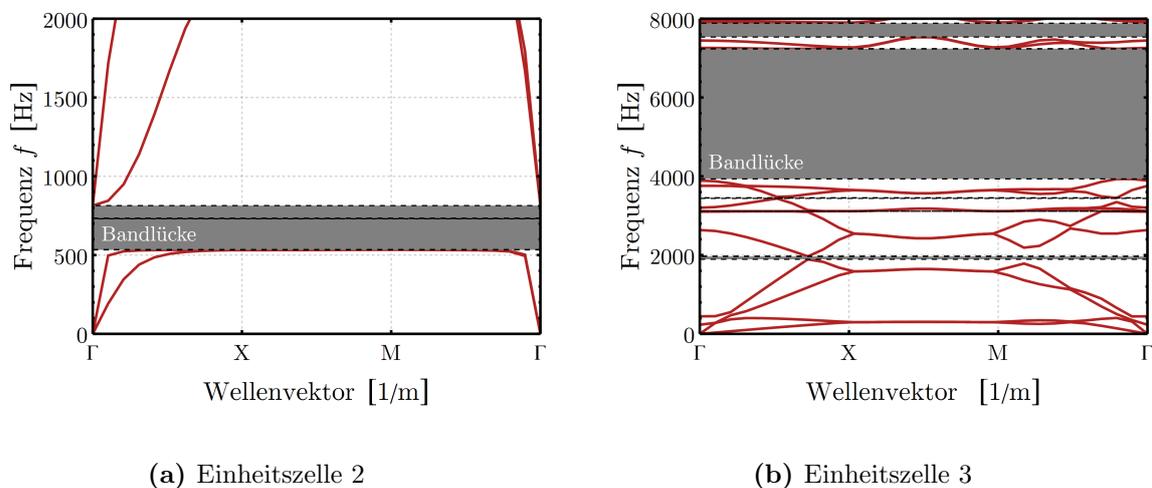


Abbildung A.9: (a) Dispersionsdiagramm für die Einheitszelle 2 mit $h_m = 0.03375\text{m}$ und einem Kern aus Stahl. (b) Dispersionsdiagramm für die Einheitszelle 3 mit $w_a = 0.5\text{m}$, $h_a = 0.075\text{m}$, $w_i = 0.35\text{m}$ und $h_i = 0.06375\text{m}$. Die grauen Bereiche kennzeichnen Bandlücken.

Literaturverzeichnis

- [1] ACKERMANN, L. : *Simulation der Schalltransmission durch Wände*, Technische Universität Braunschweig, Dissertation, 2002.
- [2] AL-SANEAM, S. A. ; ZEDAN, M. F.: Optimum insulation thickness for building walls in a hot-dry climate. In: *International Journal of Ambient Energie* 23 (2002), Nr. 3, S. 115–126.
- [3] AMPUERO, J. : *Lecture Notes: GE 263 – Computational Geophysics – The Spectral Element Method*. California Institute of Technology, 2009.
- [4] AOKI, Y. ; MAYSENHÖLDER, W. ; PISCOYA, R. ; OCHMANN, M. : Sound transmission loss of corrugated panels. Krakau, Polen : Forum Acusticum, September 2014.
- [5] ARJUNAN, A. ; WANG, C. J. ; YAHIAOUI, K. ; MYNORS, D. J. ; MORGAN, T. ; ENGLISH, M. : Finite element acoustic analysis of a steel stud based double-leaf wall. In: *Building and Environment* 67 (2013), S. 202–210.
- [6] ARJUNAN, A. ; WANG, C. J. ; YAHIAOUI, K. ; MYNORS, D. J. ; MORGAN, T. ; NGUYEN, V. B. ; ENGLISH, M. : Development of a 3D finite element acoustic model to predict the sound reduction index of stud based double-leaf walls. In: *Journal of Sound and Vibration* 333 (2014), Nr. 23, S. 6140–6155.
- [7] ATALLA, N. ; BERNHARD, R. J.: Review of numerical solutions for low-frequency structural-acoustic problems. In: *Applied Acoustics* 43 (1994), Nr. 3, S. 271–294.
- [8] AZKORRA, Z. ; PÉREZ, G. ; COMA, J. ; CABEZA, L. F. ; BURES, S. ; ÁLVARO, J. E. ; ERKOREKA, A. ; URRESTARAZU, M. : Evaluation of green walls as a passive acoustic insulation system for buildings. In: *Applied Acoustics* 89 (2015), S. 46–56.
- [9] BABUŠKA, I. M. ; SAUTER, S. A.: Is the pollution effect of the FEM avoidable for the Helmholtz equation considering high wavenumber? In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 34 (1997), Nr. 6, S. 2392–2423.

- [10] BAEHR, H. D. ; STEPHAN, K. : *Wärme- und Stoffübertragung*. 6. Auflage. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2008.
- [11] BERENGER, J.-P. : A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. In: *Journal of Computational Physics* 114 (1994), S. 185–200.
- [12] BERGMAN, T. ; LAVINE, A. S. ; INCROPERA, F. P. ; DEWITT, D. P.: *Introduction to Heat Transfer*. 6. Edition. Hoboken : John Wiley & Sons, 2011.
- [13] BÉRIOT, H. ; GABARD, G. ; PERREY-DEBAIN, E. : Analysis of high-order finite elements for convected wave propagation. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 96 (2013), Nr. 11, S. 665–688.
- [14] BÉRIOT, H. ; PRINN, A. ; GABARD, G. : Efficient implementation of high-order finite elements for Helmholtz problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 106 (2016), Nr. 3, S. 213–240.
- [15] BOLATTÜRK, A. : Optimum insulation thicknesses for building walls with respect to cooling and heating degree-hours in the warmest zone of Turkey. In: *Building and Environment* 43 (2008), Nr. 6, S. 1055–1064.
- [16] BRILLOUIN, L. : *Wave Propagation in Periodic Structures*. London : McGraw-Hill Book Company, 1946.
- [17] BROUARD, B. ; LAFARGE, D. ; ALLARD, J.-F. : A general method of modelling sound propagation in layered media. In: *Journal of Sound and Vibration* 183 (1995), Nr. 1, S. 129–142.
- [18] CANUTO, C. ; HUSSAINI, Y. M. ; QUARTERONI, A. ; ZANG, T. A. J.: *Spectral Methods – Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2007.
- [19] CARSLAW, H. S. ; JAEGER, J. C.: *Conduction of Heat in Solids*. 2. Edition. Oxford : Oxford University Press, 1986.
- [20] CASTELLANOS, H. M. S.: *Dokumentation für das GeneticAlgorithms-Package in Mathematica*. Version 0.0.1, 2012.

- [21] CHRISTODOULOU, K. ; LAGHROUCHE, O. ; MOHAMED, M. S. ; TREVELYAN, J. : High-order finite elements for the solution of Helmholtz problems. In: *Computers & Structures* 191 (2017), S. 129–139.
- [22] CLASEN, D. ; LANGER, S. : Finite element approach for flanking transmission in building acoustics. In: *Building Acoustics* 14 (2007), Nr. 1, S. 1–14.
- [23] COMSOL MULTIPHYSICS: *COMSOL Multiphysics Reference Manual*. Version 5.3, 2018.
- [24] COYETTE, J. P.: The use of finite-element and boundary-element models for predicting the vibro-acoustic behaviour of layered structures. In: *Advances in Engineering Software* 30 (1999), Nr. 2, S. 133–139.
- [25] CROCKER, M. J. ; PRICE, A. J.: Sound transmission using statistical energy analysis. In: *Journal of Sound and Vibration* 9 (1969), Nr. 3, S. 469–486.
- [26] DAOUAS, N. ; HASSEN, Z. ; AISSIA, H. B.: Analytical periodic solution for the study of thermal performance and optimum insulation thickness of building walls in Tunisia. In: *Applied Thermal Engineering* 30 (2010), Nr. 4, S. 319–326.
- [27] DAVIDSSON, P. ; BRUNSKOG, J. : Sound transmission of structures. A finite element approach with simplified room description. In: *Acta Acustica united with Acustica* 90 (2004), Nr. 5, S. 847–857.
- [28] DAVIDSSON, P. ; BRUNSKOG, J. ; WERNBERG, P.-A. ; SANDBERG, G. ; HAMMER, P. : Analysis of sound transmission loss of double-leaf walls in the low-frequency range using the finite element method. In: *Building Acoustics* 11 (2004), Nr. 4, S. 239–257.
- [29] DAVIS, D. J.: Cost optimisation of noise control for industrial buildings. Brisbane, Australia : Proceedings of Acoustics 2016, November 2016.
- [30] DE MELO, G. ; GERGES, S. N. Y. ; GIBBS, B. M.: Sound absorption at low frequencies: Modelling a test room. In: *Building Acoustics* 13 (2006), Nr. 2, S. 141–158.

- [31] DEL COZ DÍAZ, J. J. ; GARCÍA NIETO, P. J. ; BETEGÓN BIEMPICA, C. ; PRENDES GERO, M. B.: Analysis and optimization of the heat-insulating light concrete hollow brick walls design by the finite element method. In: *Applied Thermal Engineering* 27 (2007), Nr. 8–9, S. 1445–1456.
- [32] DEL COZ DÍAZ, J. J. ; ÁLVAREZ RABANAL, F. P. ; GARCÍA NIETO, P. J. ; SERRANO LÓPEZ, M. A.: Sound transmission loss analysis through a multilayer lightweight concrete hollow brick wall by FEM and experimental validation. In: *Building and Environment* 45 (2010), Nr. 11, S. 2373–2386.
- [33] DENLI, H. ; SUN, J. Q.: Structural-acoustic optimization of sandwich structures with cellular cores for minimum sound radiation. In: *Journal of Sound and Vibration* 301 (2007), Nr. 1–2, S. 93–105.
- [34] DEY, S. : Evaluation of p-FEM approximations for mid-frequency elasto-acoustics. In: *Journal of Computational Acoustics* 11 (2003), Nr. 2, S. 195–225.
- [35] DEY, S. ; DATTA, D. K. ; SHIRRON, J. J. ; SHEPHARD, M. S.: p-Version FEM for structural acoustics with a posteriori error estimation. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006), Nr. 17–18, S. 1946–1957.
- [36] DEYMIER, P. A. (Hrsg.): *Acoustic Metamaterials and Phononic Crystals*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2013.
- [37] DI BELLA, A. ; GRANZOTTO, N. ; ELARGA, H. ; SEMPRINI, G. ; BARBARRESI, L. ; MARINOSCI, C. : Balancing of thermal and acoustic insulation performance in building envelope design. San Francisco, USA : Inter-Noise, DOI:10.13140/RG.2.1.1435.9122, August 2015.
- [38] DIN 10140-5:2014-09: *Messung der Schalldämmung von Bauteilen im Prüfstand, Teil 5: Anforderungen an Prüfstände und Prüfeinrichtungen*. Berlin : Beuth-Verlag, 2014.
- [39] DIN 12354-1:2000-12: *Berechnung der akustischen Eigenschaften von Gebäuden aus den Bauteileigenschaften, Teil 1: Luftschalldämmung zwischen Räumen*. Berlin : Beuth-Verlag, 2000.

- [40] DIN 6946:2015-06: *Wärmedurchlasswiderstand und Wärmedurchgangskoeffizient – Berechnungsverfahren*. Berlin : Beuth-Verlag, 2015.
- [41] DIN 717-1:2013-06: *Bewertung der Schalldämmung in Gebäuden und von Bauteilen, Teil 1: Luftschalldämmung*. Berlin : Beuth-Verlag, 2013.
- [42] DIN 8990:1996-09: *Bestimmung der Wärmedurchgangseigenschaften im stationären Zustand – Verfahren mit dem kalibrierten und dem geregelten Heizkasten*. Berlin : Beuth-Verlag, 1996.
- [43] DOYLE, J. F.: *Wave Propagation in Structures – Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms*. 2. Edition. New York : Springer Science+Business Media, 1997.
- [44] FAHY, F. : *Sound and Structural Vibration – Radiation, Transmission and Response*. 7. Printing. London : Academic Press, 2001.
- [45] FARHAT, C. ; LESOINNE, M. ; LE TALLEC, P. : Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 157 (1998), Nr. 1–2, S. 95–114.
- [46] FRANCK, S. A.: *Finite-Elemente-Methoden, Lösungsalgorithmen und Werkzeuge für die akustische Simulationstechnik*, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Dissertation, 2008.
- [47] GAZONAS, G. A. ; WEILE, D. S. ; WILDMAN, R. ; MOHAN, A. : Genetic algorithm optimization of phononic bandgap structures. In: *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006), Nr. 18–19, S. 5851–5866.
- [48] GIBBS, B. M. ; MALUSKI, S. : Airborne sound level difference between dwellings at low frequencies. In: *Building Acoustics* 11 (2004), Nr. 1, S. 61–78.
- [49] GIORGIANI, G. ; MODESTO, D. ; FERNÁNDEZ-MÉNDEZ, S. ; HUERTA, A. : High-order continuous and discontinuous Galerkin methods for wave problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 73 (2013), Nr. 10, S. 883–903.

- [50] GOLDBERG, D. E.: *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Boston : Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [51] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; WRIGGERS, P. : *Technische Mechanik 4 – Hydromechanik, Elemente der höheren Mechanik, Numerische Methoden*. 8. Auflage. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2011.
- [52] GUARÍN-ZAPATA, N. ; GOMEZ, J. : Evaluation of the spectral finite element method with the theory of phononic crystals. In: *Journal of Computational Acoustics* 23 (2015), Nr. 2, 1550004.
- [53] HAFTKA, R. T.: Stiffness-matrix condition number and shape sensitivity errors. In: *AIAA Journal* 28 (1990), Nr. 7, S. 1322–1324.
- [54] HEDAYATRASA, S. ; BUI, T. Q. ; ZHANG, C. ; LIM, C. W.: Numerical modeling of wave propagation in functionally graded materials using time-domain spectral Chebyshev elements. In: *Journal of Computational Physics* 258 (2014), S. 381–404.
- [55] HENNINGS, B. ; LAMMERING, R. ; GABBERT, U. : Numerical simulation of wave propagation using spectral finite elements. In: *CEAS Aeronautical Journal* 4 (2013), Nr. 1, S. 3–10.
- [56] HERRMANN, N. : *Höhere Mathematik für Ingenieure, Physiker und Mathematiker*. 2. Auflage. München : Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2007.
- [57] HONGISTO, V. ; LINDGREN, M. ; HELENIUS, R. : Sound insulation of double walls – An experimental parametric study. In: *Acta Acustica united with Acustica* 88 (2002), Nr. 6, S. 904–923.
- [58] HOU, G. ; WANG, J. ; LAYTON, A. : Numerical methods for fluid-structure interaction – A review. In: *Communications in Computational Physics* 12 (2012), Nr. 2, S. 337–377.
- [59] HUSSEIN, M. I. ; LEAMY, M. J. ; RUZZENE, M. : Dynamics of phononic materials and structures: Historical origins, recent progress, and future outlook. In: *Applied Mechanics Reviews* 66 (2014), Nr. 4, 040802.

- [60] HUTTUNEN, T. ; KAIPIO, J. P. ; MONK, P. : An ultra-weak method for acoustic fluid–solid interaction. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 213 (2008), Nr. 1, S. 166–185.
- [61] IHLENBURG, F. ; BABUŠKA, I. M.: Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number Part I: The h-version of the FEM. In: *Computers & Mathematics with Applications* 30 (1995), Nr. 9, S. 9–37.
- [62] JUNG, M. ; LANGER, U. : *Methode der finiten Elemente für Ingenieure – Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation*. 2. Auflage. Wiesbaden : Springer Fachmedien, 2013.
- [63] KOMATITSCH, D. ; BARNES, C. ; TROMP, J. : Simulation of anisotropic wave propagation based upon a spectral element method. In: *Geophysics* 65 (2000), Nr. 4, S. 1251–1260.
- [64] KOMATITSCH, D. ; LIU, Q. ; TROMP, J. ; SÜSS, P. ; STIDHAM, C. ; SHAW, J. H.: Simulations of ground motion in the Los Angeles basin based upon the spectral-element method. In: *Bulletin of The Seismological Society of America* 94 (2004), Nr. 1, S. 187–206.
- [65] KOMATITSCH, D. ; TROMP, J. : Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. In: *Geophysical Journal International* 139 (1999), Nr. 3, S. 806–822.
- [66] KOMATITSCH, D. ; TSUBOI, S. ; TROMP, J. : The spectral-element method in seismology. In: *Geophysical Monograph Series* 157 (2005), S. 205–227.
- [67] KUDELA, P. ; ŽAK, A. ; KRAWCZUK, M. ; OSTACHOWICZ, W. : Modelling of wave propagation in composite plates using the time domain spectral element method. In: *Journal of Sound and Vibration* 302 (2007), Nr. 4-5, S. 728–745.
- [68] KURRA, S. : Comparison of the models predicting sound insulation values of multilayered building elements. In: *Applied Acoustics* 73 (2012), Nr. 6–7, S. 575–589.
- [69] KYTHE, P. K. ; WEI, D. : *An Introduction to Linear and Nonlinear Finite Element Analysis – A Computational Approach*. New York : Springer Science+Business Media, 2004.

- [70] LEITE, P. ; THOMAS, M. ; SIMON, F. ; BRÉCHET, Y. : Optimal design of a multifunctional sandwich panel with foam core: lightweight design for flexural stiffness and acoustical transmission loss. In: *Advanced Engineering Materials* 17 (2014), Nr. 3, S. 311–318.
- [71] LERCH, R. ; SESSLER, G. M. ; WOLF, D. : *Technische Akustik – Grundlagen und Anwendungen*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2009.
- [72] LIEU, A. ; GABARD, G. ; BÉRIOT, H. : A comparison of high-order polynomial and wave-based methods for Helmholtz problems. In: *Journal of Computational Physics* 321 (2016), S. 105–125.
- [73] MACHIMBARRENA, M. ; MONTEIRO, C. R. A. ; PEDERSOLI, S. ; JOHANSSON, R. ; SMITH, S. : Uncertainty determination of in situ airborne sound insulation measurements. In: *Applied Acoustics* 89 (2015), S. 199–210.
- [74] MAHLIA, T. M. I. ; TAUFIQ, B. N. ; ISMAIL ; MASJUKI, H. H.: Correlation between thermal conductivity and the thickness of selected insulation materials for building wall. In: *Energy and Buildings* 39 (2007), Nr. 2, S. 182–187.
- [75] MAKRIS, S. E. ; SMITH, M. ; DYM, C. L.: Multi-objective optimization of acoustic sandwich panels. In: *Engineering Optimization* 13 (1988), Nr. 2, S. 147–172.
- [76] MALUSKI, S. ; GIBBS, B. M.: Application of a finite-element model to low-frequency sound insulation in dwellings. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 108 (2000), Nr. 4, S. 1741–1751.
- [77] MARFURT, K. J.: Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar and elastic wave equation. In: *Geophysics* 49 (1984), Nr. 5, S. 533–549.
- [78] MECHEL, F. P. (Hrsg.): *Formulas of Acoustics*. 2. Edition. Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag, 2008.
- [79] MEHRA, S.-R. : *Berechnung der Luftschalldämmung von einschaligen Trennbauteilen endlicher Abmessung*, Universität Stuttgart, Dissertation, 1995.
- [80] MEIER, A. ; SCHMITZ, A. ; RAABE, G. : Inter-laboratory test of sound insulation measurements on heavy walls: Part II – Results of main test. In: *Building Acoustics*

- 6 (1999), Nr. 3, S. 171–186.
- [81] MITCHELL, A. K. ; HAZELL, C. R.: A simple frequency formula for clamped rectangular plates. In: *Journal of Sound and Vibration* 118 (1987), Nr. 2, S. 271–281.
- [82] MITCHELL, W. F.: How high a degree is high enough for high order finite elements? In: *Procedia Computer Science* 51 (2015), S. 246–255.
- [83] MÖNKÖLÄ, S. : Time-harmonic solution for acousto-elastic interaction with controllability and spectral elements. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 234 (2010), Nr. 6, S. 1904–1911.
- [84] MÖSER, M. : *Technische Akustik*. 9. Auflage. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2012.
- [85] NURZYŃSKI, J. : Is thermal resistance correlated with sound insulation? In: *Energy Procedia* 78 (2015), S. 152–157.
- [86] OBERAI, A. A. ; PINSKY, P. M.: A numerical comparison of finite element methods for the Helmholtz equation. In: *Journal of Computational Acoustics* 8 (2000), Nr. 1, S. 211–221.
- [87] OTTOSEN, N. S. ; PETERSSON, H. : *Introduction to the Finite Element Method*. Hemel Hempstead : Prentice Hall International, 1992.
- [88] PALACZ, M. : Spectral methods for modelling of wave propagation in structures in terms of damage detection – A review. In: *Applied Sciences* 8 (2018), Nr. 7, S. 1124–1149.
- [89] PAPADOPOULOS, C. : Development of an optimised, standard-compliant procedure to calculate sound transmission loss: Design of transmission rooms. In: *Applied Acoustics* 63 (2002), Nr. 9, S. 1003–1029.
- [90] PAPADOPOULOS, C. : Development of an optimised, standard-compliant procedure to calculate sound transmission loss: Numerical measurements. In: *Applied Acoustics* 64 (2003), Nr. 11, S. 1069–1085.

- [91] PAPAGEORGIOU, M. ; LEIBOLD, M. ; BUSS, M. : *Optimierung – Statische, Dynamische, Stochastische Verfahren für die Anwendung*. 3. Auflage. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2012.
- [92] PATERA, A. T.: A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion. In: *Journal of Computational Physics* 54 (1984), Nr. 3, S. 468–488.
- [93] PENA, G. : *Spectral Element Approximation of the Incompressible Navier-Stokes Equations in a Moving Domain and Applications*, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Dissertation, 2009.
- [94] PERRAS, E. ; ZHANG, C. : Numerische Simulation der Wärme- und Schalldämmung in multifunktionalen Wandkonstruktionen. Döllnsee, Deutschland : Forschungskolloquium Baustatik-Baupraxis, September 2015, S. 86–88.
- [95] PERRAS, E. ; ZHANG, C. : Effiziente Vorhersage des Schalldämmmaßes komplexer Strukturen mit der Spektralelemente-Methode. Grasellenbach, Deutschland : Forschungskolloquium Baustatik-Baupraxis, Oktober 2018, S. 53–55.
- [96] PERRAS, E. ; ZHANG, C. : Analysis of acoustic wave propagation in composite laminates via a spectral element method. Wien, Österreich : Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics 19, DOI: 10.1002/pamm.201900282, Februar 2019.
- [97] PERRAS, E. ; ZHANG, C. ; CHEN, C. ; JI, Z. : Determination and optimization of sound insulation capabilities of geometrically complex walls. Aachen, Deutschland : Proceedings of the 23rd International Congress on Acoustics, September 2019, S. 257–264.
- [98] PERRAS, E. ; ZHANG, C. ; CHEN, J. ; JI, Z. : Multifunktionale Optimierung von Wandstrukturen. Bochum, Deutschland : Baustatik-Baupraxis 13, März 2017, S. 457–464.
- [99] PETERSEN, S. ; DREYER, D. ; VON ESTORFF, O. : Assessment of finite and spectral element shape functions for efficient iterative simulations of interior acoustics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006), Nr. 44–47, S. 6463–6478.

- [100] PETRA, C. G. ; SCHENK, O. ; LUBIN, M. ; GÄRTNER, K. : An augmented incomplete factorization approach for computing the Schur complement in stochastic optimization. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 36 (2014), Nr. 2, S. C139–C162.
- [101] POBLET-PUIG, J. : *Numerical Modelling of Sound Transmission in Lightweight Structures*, Universitat Politècnica de Catalunya, Dissertation, 2008.
- [102] POBLET-PUIG, J. ; RODRÍGUEZ-FERRAN, A. ; GUIGOU-CARTER, C. ; VILLOT, M. : The role of studs in the sound transmission of double walls. In: *Acta Acustica united with Acustica* 95 (2009), Nr. 3, S. 555–567.
- [103] POZRIKIDIS, C. : *Introduction to Finite and Spectral Element Methods Using MATLAB*. 2. Edition. Boca Raton : CRC Press, 2014.
- [104] PRINCIPI, P. ; FIORETTI, R. : Thermal analysis of the application of pcm and low emissivity coating in hollow bricks. In: *Energy and Buildings* 51 (2012), S. 131–142.
- [105] RAMAKRISHNAN, J. V. ; KOVAL, L. R.: A finite element model for sound transmission through laminated composite plates. In: *Journal of Sound and Vibration* 112 (1987), Nr. 3, S. 433–446.
- [106] RATNIEKS, J. ; JAKOVICS, A. ; KLAVINS, J. : Development of mathematical model for determining sound reduction index of building elements. Stuttgart, Deutschland : Proceedings of the 2011 COMSOL Conference in Stuttgart, Oktober 2011.
- [107] RATNIEKS, J. ; JAKOVICS, A. ; KLAVINS, J. : Mathematical model for prediction of transmission loss for clay brick walls. Mailand, Italien : Proceedings of the 2012 COMSOL Conference in Milan, Oktober 2012.
- [108] ROSS, M. R. ; FELIPPA, C. A. ; PARK, K. C. ; SPRAGUE, M. A.: Treatment of acoustic fluid–structure interaction by localized Lagrange multipliers: Formulation. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (2008), Nr. 33–40, S. 3057–3079.
- [109] ROSS, M. R. ; SPRAGUE, M. A. ; FELIPPA, C. A. ; PARK, K. C.: Treatment of acoustic fluid–structure interaction by localized Lagrange multipliers and comparison to alternative interface-coupling methods. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2009), Nr. 9–12, S. 986–1005.

- [110] SAMBOU, V. ; LARTIGUE, B. ; MONCHOUX, F. ; ADJ, M. : Thermal optimization of multilayered walls using genetic algorithms. In: *Energy and Buildings* 41 (2009), Nr. 10, S. 1031–1036.
- [111] SANDBERG, G. (Hrsg.) ; OHAYON, R. (Hrsg.): *Computational Aspects of Structural Acoustics and Vibration – CISM courses and lectures, vol. 505*. Wien New York : Springer, 2008.
- [112] SCHENK, O. ; GÄRTNER, K. : *PARDISO User Guide*. Version 6.1.0, 2018.
- [113] SCHMITZ, A. ; MEIER, A. ; RAABE, G. : Inter-laboratory test of sound insulation measurements on heavy walls: Part I – Preliminary test. In: *Building Acoustics* 6 (1999), Nr. 3, S. 159–169.
- [114] SCHULTE, R. T.: *Modellierung und Simulation von wellenbasierten Structural Health Monitoring-Systemen mit der Spektral-Elemente Methode*, Universität Siegen, Dissertation, 2010.
- [115] SERIANI, G. : A parallel spectral element method for acoustic wave modeling. In: *Journal of Computational Acoustics* 5 (1997), Nr. 1, S. 53–69.
- [116] SERIANI, G. : 3-D large-scale wave propagation modeling by spectral element method on Cray T3E multiprocessor. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 164 (1998), Nr. 1–2, S. 235–247.
- [117] SERIANI, G. ; OLIVEIRA, S. P.: Dispersion analysis of spectral element methods for elastic wave propagation. In: *Wave Motion* 45 (2008), Nr. 6, S. 729–744.
- [118] SERIANI, G. ; PRIOLO, E. : Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 16 (1994), Nr. 3–4, S. 337–348.
- [119] SHORTER, P. J.: Wave propagation and damping in linear viscoelastic laminates. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 115 (2004), Nr. 5, S. 1917–1925.
- [120] SIGRIST, J.-F. : *Fluid-Structure Interaction – An Introduction to Finite Element Coupling*. Chichester : John Wiley & Sons, 2015.

- [121] SINGH, S. N. ; VENKATESHAN, S. P.: Numerical study of natural convection with surface radiation in side-vented open cavities. In: *International Journal of Thermal Sciences* 43 (2004), Nr. 9, S. 865–876.
- [122] STEEL, J. A. ; CRAIK, R. J. M.: Statistical energy analysis of structure-born sound transmission by finite element methods. In: *Journal of Sound and Vibration* 178 (1994), Nr. 4, S. 553–561.
- [123] STEFANIZZI, P. ; LIPPOLIS, A. ; LIUZZI, S. : Experimental and numerical analysis of heat transfer in the cavities of hollow blocks. In: *International Journal of Heat and Technology* 31 (2013), Nr. 2, S. 149–154.
- [124] STEINKE, P. : *Finite-Elemente-Methode – Rechnergestützte Einführung*. 4., neu bearbeitete und ergänzte Auflage. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2012.
- [125] SUKUMAR, N. ; PASK, J. E.: Classical and enriched finite element formulations for Bloch-periodic boundary conditions. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 77 (2009), Nr. 8, S. 1121–1138.
- [126] SUTCU, M. ; DEL COZ DÍAZ, J. J. ; ÁLVAREZ RABANAL, F. P. ; GENCEL, O. ; AKKURT, S. : Thermal performance optimization of hollow clay bricks made up of paper waste. In: *Energy and Buildings* 75 (2014), S. 96–108.
- [127] SVOBODA, Z. ; KUBR, M. : Numerical simulation of heat transfer through hollow bricks in the vertical direction. In: *Journal of Building Physics* 34 (2010), Nr. 4, S. 325–350.
- [128] TADI, M. : A semi-analytical method for the solution of Helmholtz equation. In: *Journal of Applied Mathematics and Physics* (2013), Nr. 1, S. 54–57.
- [129] TAYLOR, C. ; IJAM, A. Z.: A finite element numerical solution of natural convection in enclosed cavities. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 19 (1979), Nr. 3, S. 429–446.
- [130] TORNABENE, F. ; FANTUZZI, N. ; BACCIOCCHI, M. : The strong formulation finite element method: stability and accuracy. In: *Frattura Ed Integrità Strutturale* 8 (2014), Nr. 29, S. 251–265.

- [131] TREVATHAN, J. : *Sound Transmission Through Walls: A Coupled BEM/FEM Approach*, University of Canterbury, Dissertation, 2005.
- [132] VIGRAN, T. E.: *Manual for NorFLAG*. Version 4.0, 2018.
- [133] VILLOT, M. ; GUIGOU, C. ; GAGLIARDINI, L. : Predicting the acoustical radiation of finite size multi-layered structures by applying spatial windowing on infinite structures. In: *Journal of Sound and Vibration* 245 (2001), Nr. 3, S. 433–455.
- [134] VIRDI, S. : *Construction Science and Materials*. Chichester : John Wiley & Sons, 2012.
- [135] WANG, T. ; LI, S. ; NUTT, S. R.: Optimal design of acoustical sandwich panels with a genetic algorithm. In: *Applied Acoustics* 70 (2009), Nr. 3, S. 416–425.
- [136] WASSOUF, Z. : *Die Mortar Methode für Finite Elemente hoher Ordnung*, Technische Universität München, Dissertation, 2010.
- [137] WILLBERG, C. ; DUCZEK, S. ; VIVAR PEREZ, J. M. ; SCHMICKER, D. ; GABBERT, U. : Comparison of different higher order finite element schemes for the simulation of Lamb waves. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 241–244 (2012), S. 246–261.
- [138] WIRASAET, D. ; TANAKA, S. ; KUBATKO, E. J. ; WESTERINK, J. J. ; DAWSON, C. : A performance comparison of nodal discontinuous Galerkin methods on triangles and quadrilaterals. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 64 (2010), Nr. 10–12, S. 1336–1362.
- [139] WISSMANN, J. ; SARNES, K.-D. : *Finite Elemente in der Strukturmechanik*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2006.
- [140] XAMÁN, J. ; ÁLVAREZ, G. ; LIRA, L. ; ESTRADA, C. : Numerical study of heat transfer by laminar and turbulent natural convection in tall cavities of facade elements. In: *Energy and Buildings* 37 (2005), Nr. 7, S. 787–794.
- [141] XU, X. ; JIANG, Y. ; LEE, H. P.: Multi-objective optimal design of sandwich panels using a genetic algorithm. In: *Engineering Optimization* 49 (2016), Nr. 10, S. 1665–1684.

- [142] YU, J. ; YANG, C. ; TIAN, L. ; LIAO, D. : A study on optimum insulation thicknesses of external walls in hot summer and cold winter zone of China. In: *Applied Energy* 86 (2009), Nr. 11, S. 2520–2529.
- [143] ZEIDLER, E. (Hrsg.): *Springer-Taschenbuch der Mathematik: Begründet von I.N. Bronstein und K.A. Semendjaew, Weitergeführt von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler – Herausgegeben von E. Zeidler*. 3. Auflage. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2013.
- [144] ZHOU, J. ; BHASKAR, A. ; ZHANG, X. : Optimization for sound transmission through a double-wall panel. In: *Applied Acoustics* 74 (2013), Nr. 12, S. 1422–1428.
- [145] ZUO, S.-L. ; LI, F.-M. ; ZHANG, C. : Numerical and experimental investigations on the vibration band-gap properties of periodic rigid frame structures. In: *Acta Mechanica* 227 (2016), Nr. 6, S. 1653–1669.