

# Elementarisierungen zum inneren Aufbau von Sternen und zur Sternentwicklung

DISSERTATION  
zur Erlangung des Grades eines Doktors  
der Philosophie

vorgelegt von:  
Adrian Weber

eingereicht bei der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät  
der Universität Siegen  
Siegen 02.03.2020

Gutachter der Dissertation: Prof. Dr. Oliver Schwarz (Betreuer)  
Prof. Dr. Alfred Ziegler  
Tag der mündlichen Prüfung: 15.06.2020

Gedruckt auf alterungsbeständigem holz- und säurefreiem Papier.

# Kurzfassung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, ein elementarisierendes Lernangebot zum Thema innerer Aufbau der Sterne und Sternentwicklung bereitzustellen, welches sich zum einen an angehende Physiklehrer im Grundstudium, sowie Physikstudierende im Bachelorstudiengang richtet, zum anderen an Lernende der gymnasialen Oberstufe. Zur Legitimierung des Themas wird der aktuelle Stand der Astronomie im Allgemeinen im Schul- und Hochschulunterricht und speziell die Beschäftigung mit dem Sternaufbau und der Sternentwicklung analysiert. Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt in der Entwicklung von Lernmodulen. Dabei steht die Entwicklung eines prinzipiellen physikalischen Verständnisses für den inneren Aufbau der Sterne im Vordergrund und nicht möglichst präzise Vorhersagen durch Modellrechnungen zu treffen, oder eine vollständige Theorie darzulegen. Es werden außerdem erkenntnistheoretische Überlegungen der Wissenschaftler mit einbezogen, die die Theorie des inneren Aufbaus der Sterne maßgeblich vorangetrieben haben, sowie die wissenschaftlichen Methoden aus dem Bereich der theoretischen Astrophysik zum Einsatz gebracht haben. Damit geht diese Arbeit deutlich über die rein phänomenologische Ebene hinaus. Es werden Mittelwerte und Größenordnungen wichtiger Zustandsgrößen wie Druck und Temperatur für unser Zentralgestirn bestimmt und allgemeine Zusammenhänge zwischen den Zustandsgrößen für Sterne im Hauptreihenstadium hergeleitet. Mithilfe von Differentialgleichungen werden Verläufe der Zustandsgrößen vom Zentrum bis hin zur Oberfläche beschrieben und die Notwendigkeit einer solchen Betrachtung verdeutlicht. Die Differentialgleichungen werden analysiert und mit numerischen Verfahren gelöst.

Das Lernangebot ist in vier aufeinander aufbauende Lernmodule unterteilt, welche sich inhaltlich an Meilensteinen der historischen Entwicklung der Theorie zum inneren Aufbau von Sternen und den zu den jeweiligen Zeiten vorherrschenden Forschungsfragen anschließen. Zugleich werden erkenntnistheoretische Überlegungen einbezogen, um Lernenden ein tiefgreifendes Verständnis für die Sternmodelle zu ermöglichen. In den Modulen wird stets deutlich, warum das betrachtete Modell aus der fachlichen und historischen Perspektive weiterentwickelt wurde. Bis auf das letzte Modul beginnt jedes Modul mit erkenntnistheoretischen Überlegungen und einer wissenschaftshistorischen Einordnung. Daraus werden prinzipielle Aussagen extrahiert und einfache Abschätzungen aufgestellt. Anschließend werden detaillierte Analysen der Verläufe von Zustands-

größen durchgeführt. Diese werden dabei auf möglichst elementare Weise gewonnen, um eine breite Zielgruppe zu adressieren. An dieser Stelle wird auch ein sinnvoller Computereinsatz dargestellt. Die Erkenntnisse aus den Lernmodulen werden mit verschiedenen Tools modelliert und von Modul zu Modul weiterentwickelt und verfeinert. In dieser Arbeit wird mit dem Tabellenkalkulationsprogramm Microsoft Excel und der Modellbildungssoftware CMA Coach 6.0 gearbeitet, die Ergebnisse lassen sich aber auch problemlos mit kostenfreien Alternativprogrammen erzeugen. Somit wird gewährleistet, dass ein großer Benutzerkreis angesprochen wird, da keine zusätzliche Software installiert oder gar gekauft werden muss. Dies ist auch der Grund, warum auf den Einsatz von Spezialsoftware verzichtet wird. Die Lernmodule wurden bereits in einer Lehrveranstaltung zur Astrophysik erprobt und positiv angenommen. Eine vollumfängliche empirische Studie wurde jedoch noch nicht durchgeführt.

# Abstract

The aim of this thesis is to provide an elementary learning offer on the subject of the inner structure of stars and stellar evolution, which is aimed at physics teacher students in their undergraduate studies, as well as physics students in their bachelor's degree and at learners in upper grammar schools. In order to legitimize the topic, the current state of astronomy in general is analyzed in school and university classes, especially the dealing with the stellar structure and evolution. The focus of this work is on the development of learning modules. The main goal is to develop a basic physical understanding of the inner structure of the stars and not to make precise predictions by model calculations or to present a complete theory. In addition, epistemological considerations of the scientists are included, who have decisively evolved the theory of the internal structure of the stars, as well as the scientific methods from the field of theoretical astrophysics, so that this work clearly goes beyond the phenomenological level. Mean values and magnitudes of important state variables such as pressure and temperature are determined for our central star and general correlations between the state variables for stars in the main sequence stage are derived. Differential equations are used to describe the progression of state variables from the center to the surface and the necessity of this consideration is clarified. The differential equations will be analyzed and solved with numerical methods.

The learning offer is divided into four sequential learning modules that are based on milestones of the historical development of the theory of the inner structure of stars and the research questions prevailing at the respective times. At the same time, epistemological considerations are included in order to give learners a profound understanding of the star models. In the modules, it is always clear why the model under consideration has been further developed. Except for the last module, each module begins with epistemological considerations and a scientific-historical classification. Afterwards basic statements and simple estimates are made. Subsequently, detailed analyses of the course of state variables are carried out. These are obtained in a simple way in order to address a broad target group. At this point, a meaningful use of computers is also presented. The insights from the learning modules are modelled with various tools and further developed and refined from module to module. In this work, Microsoft Excel and the modelling software CMA Coach 6.0 are used, but the results can also be easily generated with free alternative

programs. Thus it is guaranteed that a large circle of users is addressed, since no additional software must be installed or bought at all. This is also the reason why special software is not used. The learning modules have already been tested and positively accepted in a course on astrophysics. However, a complete empirical study has not yet been carried out.

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, ohne deren Unterstützung diese Arbeit kaum entstanden wäre.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Schwarz für die geduldige Betreuung dieser Arbeit sowie Herrn Prof. Dr. Ziegler für die kurzfristige Übernahme des Zweitgutachtens. Ebenfalls möchte ich allen weiteren Mitarbeitern und ehemaligen Mitarbeitern der Arbeitsgruppe der Didaktik der Physik der Universität Siegen herzlich danken, Prof. Dr. Wolfram Winnenburg, Prof. Dr. Manfred Bodemann, Dr. Ina Stricker, Dr. Lenka Müller, Dr. Henrik Bernshausen, Dr. Volker Heck, Dr. Christian Deiteresen, Dr. Simon Kraus, Dr. Eduard Krause, Dr. Sascha Hohmann, Dr. Sebastian Launer, Dr. Chat Tran Ngoc, Philipp Raack, Andree Georg, Mirko Schommer, Sabine Schirm-Springob, Christoph Springob, Simone Wenderoth und Cornelia Schulte.

Silvia Becher danke ich für ihre Unterstützung und das sorgfältige Korrekturlesen.

Zum Schluss möchte ich mich bei meinen Eltern sowie meiner Schwester für die Unterstützung während meines Studiums und der Promotion bedanken.

Köln, Oktober 2020  
Adrian Weber

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>xii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Legitimation astronomischer Inhalte in der Schule . . . . .	2
1.2 Legitimation der Themengebiete Sternaufbau und Sternentwicklung . . . . .	6
1.3 Ziele der Arbeit . . . . .	10
1.4 Aufbau der Arbeit . . . . .	13
<b>2 Grundlagen</b>	<b>15</b>
2.1 Mathematische Grundlagen: numerische Lösungsverfahren	15
2.1.1 Differentialgleichung 1. Ordnung: Beispiel und Umsetzung . . . . .	18
2.1.2 Umsetzung auf dem Computer: Tabellenkalkulation	20
2.1.3 Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	23
2.1.4 Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung . . . . .	24
2.2 Physikalische Grundlagen . . . . .	26
2.2.1 Die Grundgleichungen . . . . .	27
2.2.2 Zustandsgleichungen . . . . .	29
2.2.3 Der Energietransportmechanismus . . . . .	33
2.2.4 Opazität . . . . .	34
2.2.5 Energiequellen . . . . .	35
2.2.6 Randbedingungen . . . . .	38

2.2.7	Sternentwicklung . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Modul A - Hinführung zu Sternmodellen</b>	<b>42</b>
3.1	Erkenntnistheoretische Überlegungen und wissenschafts- historische Einordnung . . . . .	42
3.1.1	Grundannahmen astrophysikalischer Modelle . . .	44
3.1.2	Überprüfbarkeit der Modellannahmen in der Him- melskunde . . . . .	46
3.1.3	Die Sonne als Objekt aus idealem Gas . . . . .	47
3.1.4	Der Aggregatzustand der Sonnenmaterie Teil 1 und die Notwendigkeit der Betrachtung des Sonneninneren . . . . .	49
3.1.5	Alter der Sonne und die Sternentwicklung . . . . .	51
3.2	Prinzipielle Aussagen/einfache Abschätzungen . . . . .	54
3.2.1	Freifallzeit . . . . .	54
3.2.2	Halbkugelmodell . . . . .	56
3.3	Detaillierte Analyse der Verläufe von Zustandsgrößen . .	63
3.3.1	Schweredruck . . . . .	63
3.3.2	Federmodell . . . . .	67
3.3.3	Tools zur numerischen Berechnung der Modelle .	73
3.3.4	Exceltools . . . . .	74
3.3.5	Coach Tools . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Modul B - Gaskugelmodelle bis 1908</b>	<b>85</b>
4.1	Erkenntnistheoretische Überlegungen und wissenschafts- historische Einordnung . . . . .	85
4.1.1	Der Aggregatzustand der Sonne - Teil 2 . . . . .	86
4.1.2	Entwicklung der Sonnenmodelle bis 1908 . . . . .	88
4.1.3	Kritik am Konvektionsgleichgewicht . . . . .	96
4.2	Prinzipielle Aussagen/einfache Abschätzungen . . . . .	97
4.2.1	Das Modell einer konvektiven Gaskugel . . . . .	97
4.2.2	Mechanische Grundgleichungen einer Gaskugel . .	98
4.2.3	Homologe Sterne . . . . .	117
4.3	Detaillierte Analyse der Verläufe von Zustandsgrößen . .	121
4.3.1	Das Tangentenverfahren - Lösen einfacher Differen- tialgleichung . . . . .	122

4.3.2	Das Tangentenverfahren für konvektive Gaskugeln	124
4.3.3	Exceltool 4 - Polytrope Gaskugeln 1 (vollkonvektive Gaskugeln) . . . . .	129
4.3.4	Coach Tool 2 - polytrope Sterne . . . . .	135
<b>5</b>	<b>Modul C - Eddingtons Standardmodell</b>	<b>139</b>
5.1	Erkenntnistheoretische Überlegungen und wissenschaftshistorische Einordnung . . . . .	140
5.2	Prinzipielle Aussagen/einfache Abschätzungen . . . . .	145
5.2.1	Die Cepheiden als Wärmekraftmaschine - Konsequenzen aus dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik	146
5.2.2	Mechanismen der Energiefreisetzung . . . . .	151
5.2.3	Sterne im Strahlungsgleichgewicht . . . . .	161
5.2.4	Eddingtons Standardmodell . . . . .	176
5.3	Detaillierte Analyse der Verläufe von Zustandsgrößen . .	184
5.3.1	Exceltool 5 - Polytrope Gaskugeln 2 (Sterne im Strahlungsgleichgewicht) . . . . .	184
<b>6</b>	<b>Modul D - Annäherung an die Sternentwicklung</b>	<b>186</b>
6.1	Detaillierte Analyse der zeitlichen Entwicklung von Zustandsgrößen im Hauptreihenstadium . . . . .	194
6.1.1	Exceltool 5 - Entwicklung der Leuchtkraft . . . . .	194
<b>7</b>	<b>Schlussbetrachtung und Ausblick</b>	<b>198</b>
7.1	Thesen . . . . .	198
<b>8</b>	<b>Notationsverzeichnis</b>	<b>202</b>
	<b>Literatur</b>	<b>205</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	IPN-Interessensstudie . . . . .	6
2.1	Die Tangente als bestapproximierende Gerade . . . . .	17
2.2	Euler'sches Tangentenverfahren 1 . . . . .	19
2.3	Euler'sches Tangentenverfahren 2 . . . . .	20
2.4	Darstellung des Tangentenverfahrens in Excel . . . . .	22
2.5	Das hydrostatische Gleichgewicht im Sterninneren . . . . .	28
2.6	Schalenstruktur der Fusionszonen im Stern eines schweren Sterns . . . . .	32
3.1	Die Elemente-Theorie von Aristoteles . . . . .	45
3.2	Das Kirchhoff'sche Strahlungsgesetz . . . . .	50
3.3	Das Halbkugelmodell eines Sterns . . . . .	56
3.4	Kugelschalenmodell des Sterninneren. . . . .	64
3.5	Druckverlauf im Sterninneren 1 . . . . .	66
3.6	Matroschka als Analogie zu einem Stern mit abnehmen- dem Druckprofil . . . . .	67
3.7	Druckverlauf im Sterninneren 2 . . . . .	68
3.8	Federmodell eines Sterns . . . . .	69
3.9	Federlängen im Federmodell . . . . .	71
3.10	Schematischer Übergang zum Federmodell eines Sterns . . . . .	73
3.11	Eingabe der Konstanten in das Exceltool . . . . .	75
3.12	Darstellung des fertigen Exceltools 1 . . . . .	77
3.13	Darstellung des fertigen Exceltools 2 . . . . .	79
3.14	Aufbau von Coach. . . . .	80
3.15	Konfiguration der Laufvariablen . . . . .	82
3.16	Einfügen der Konstanten . . . . .	83
3.17	Einfügen der Hilfsgrößen . . . . .	84

3.18	Das fertige Federmodell . . . . .	84
4.1	Granulation der Sternoberfläche . . . . .	91
4.2	Modellierung des hydrostatischen Gleichgewichts im Sterninneren . . . . .	99
4.3	Hertzsprung-Russell-Diagramm . . . . .	102
4.4	Zöllners Modell eines isothermen Sterns . . . . .	105
4.5	Druck- und Temperaturverlauf im Sterninneren sowie deren Gradienten unter der Annahme konstanter Dichte . . . . .	108
4.6	Euler'sches Tangentenverfahren 3 . . . . .	124
4.7	Darstellung des Informationstransportes im Sterninneren . . . . .	126
4.8	Druck- und Temperaturverlauf im Sterninneren sowie deren Gradienten in einem polytropen Stern . . . . .	128
4.9	Druck- und Temperaturverlauf im Sterninneren sowie deren Gradienten . . . . .	129
4.10	Aufbau des Exceltools 3 . . . . .	131
4.11	Masseverteilung, Druck-, Dichte- und Temperaturverlauf im Inneren eines polytropen Sterns . . . . .	134
4.12	Einfügen der Konstanten . . . . .	135
4.13	Einfügen der Hilfsgrößen . . . . .	136
4.14	Einfügen der Hilfsgrößen . . . . .	138
5.1	Mitte-Rand-Verdunklung 1 . . . . .	140
5.2	Mitte-Rand-Verdunklung 2 . . . . .	141
5.3	Charakteristische Helligkeitsschwankungen der Cepheiden . . . . .	144
5.4	Bindungsenergie pro Nukleon in Abhängigkeit von der Anzahl der Nukleonen im Atomkern . . . . .	151
5.5	Boltzmann-Verteilung . . . . .	157
5.6	Zwei Teilchen in einem Potential im klassischen Bild . . . . .	159
5.7	Zwei Teilchen in einem Potential im quantenphysikalischen Bild . . . . .	159
5.8	Gamow-Peak . . . . .	161
5.9	Darstellung der Fusion von Wasserstoff zu Helium mit der Proton-Proton-Kette . . . . .	162
5.10	Darstellung der Fusion von Wasserstoff zu Helium mithilfe des Bethe-Weizsäcker-Zyklus . . . . .	163

5.11	Darstellung des Strahlungsaustausches zwischen zwei Flächen . . . . .	163
5.12	Die Wechselwirkung von Photonen und Elektronen . . . . .	168
5.13	Die Streuung eines Photons an einem Elektron im klassischen Bild . . . . .	171
5.14	Strahlungsfluss durch einen Absorber. . . . .	171
5.15	Bewegungsverlauf eines freien Elektrons im Sterninneren . . . . .	174
5.16	Die Masse-Leuchtkraft-Beziehung . . . . .	183
5.17	Masseverteilung, Druck-, Dichte- und Temperaturverlauf im Inneren eines polytropen Sterns . . . . .	185
6.1	Die Säulen der Schöpfung . . . . .	187
6.2	Exceltool zur Berechnung des zeitlichen Verlaufes der Leuchtkraft der Sonne . . . . .	195
6.3	Zeitliche Entwicklung der Leuchtkraft der Sonne . . . . .	197
7.1	Schematische Darstellung des Erkenntnisprozesses . . . . .	199

# Tabellenverzeichnis

2.1	Vergleich der analytischen mit der numerischen Lösung unter Verwendung des Tangentenverfahrens 1 . . . . .	19
2.2	Vergleich der analytischen mit der numerischen Lösung unter Verwendung des Tangentenverfahrens 2 . . . . .	21
2.3	Vergleich der analytischen mit der numerischen Lösung unter Verwendung des Runge-Kutta Verfahrens zweiter Ordnung . . . . .	25
3.1	Abschätzung der Lebensdauer der Sonne für verschiedene Brennstoffe . . . . .	61
3.2	Berechnung der Rückstellkräfte $F$ und Federlängen $l$ für das Federmodell . . . . .	70
4.1	Spezialfälle polytroper Zustandsänderungen . . . . .	95
5.1	Mögliche fossile Brennstoffe . . . . .	148
5.2	Eddingtons ermittelte Werte für den Anteil des Strahlungsdrucks am Gesamtdruck $1 - \beta$ für verschiedene Massen $M$ und mittlere Teilchenmassen $\mu$ . . . . .	180
8.1	In dieser Arbeit verwendete Notation, Abweichungen davon sind an den entsprechenden Stellen gesondert erläutert.	204
8.2	In dieser Arbeit verwendete Konstanten . . . . .	204

# Kapitel 1

## Einleitung

Schon vor vielen Jahrtausenden spielte die Beschäftigung mit Astronomie für die Menschheit eine zentrale Rolle und hat maßgeblich zum gesellschaftlichen und technologischen Fortschritt beigetragen. Durch die systematische Beobachtung des nächtlichen Himmels war es möglich, präzise Kalender als Zeitmaß zu erstellen, was unter anderem für die Landwirtschaft unabdingbar war und noch bis heute ist. Erst dadurch gelang es dem Menschen sesshaft zu werden. Für die Kartografie sowie die Navigation zu Land und zu See waren astronomische Kenntnisse ebenfalls essentiell.

Während sich die Astronomie in der Zeit vor dem 19. Jahrhundert weitestgehend mit der Beobachtung der Gestirnspositionen und der Himmelsmechanik beschäftigte, gelang mit der Entwicklung der Spektralanalyse im Jahre 1859 durch Bunsen und Kirchhoff ein gewaltiger Durchbruch. Denn die Analyse des Sternlichtes „gibt Aufschluss über die Temperatur, die chemische Zusammensetzung der äußersten Sternschichten und den gesamten Lichtausstoß (Leuchtkraft)“ [TM85, S. 1]. Man stellte fest, dass die dort gefundenen Elemente sich nicht von denen auf der Erde unterscheiden.<sup>1</sup> Aber auch weit entfernte Sterne konnten auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede im Spektrum untersucht werden. Dies war die Geburtsstunde der modernen Astrophysik (nach [UB05]). Noch heute ist die Spektroskopie das wichtigste Untersuchungsinstrument, denn „bei den meisten Sternen ist die einzige Informationsquelle das Licht (Spektrum), das wir von ihnen empfangen“ ([TM85, S. 1]).

---

<sup>1</sup>Als Ausnahme ist Helium zu nennen, da es zu dieser Zeit auf der Erde noch nicht entdeckt war. Sir Norman Lockyer entdeckte die zugehörigen Linien im Sonnenspektrum 1868 (vgl. [Cor21, S. 237]).

Um die Unterschiede in den Sternspektren physikalisch erklären zu können, zeigte sich, dass es nicht genügt sich allein mit der Sternhülle auseinanderzusetzen. Es war notwendig sich mit der gesamten inneren Sternstruktur zu beschäftigen und wie heute bekannt ist, beeinflusst diese die äußeren Schichten eines Sterns maßgeblich. Frühe Modelle des inneren Aufbaus der Sonne und von Sternen allgemein hatten Probleme wissenschaftlich akzeptiert zu werden, da Modellannahmen getroffen werden mussten, welche letztendlich damals nicht überprüfbar waren.

In der heutigen Zeit ist man nicht nur in der Lage die innere Struktur von Sternen modellhaft darzustellen, sondern deren gesamte Lebensgeschichte, angefangen von der Entstehung bis hin zum Verlöschen, präzise zu berechnen und mit astronomischen Beobachtungen in Einklang zu bringen. Bis zu solch einem ausgereiften Zustand waren nicht nur viele erkenntnistheoretische Hürden zu nehmen, sondern auch Fortschritte in vielen Teilgebieten der Physik, wie der Thermodynamik und der Atom- und Kernphysik, notwendig.

In dieser Arbeit wird ein didaktisch aufbereiteter Ansatz zur Modellierung des Sterninneren und der Sternentwicklung dargelegt, der sich einerseits an wissenschaftshistorischen Meilensteinen und den zu den jeweiligen Zeiten vorherrschenden Forschungsfragen orientiert, andererseits aber auch erkenntnistheoretischen Überlegungen genügend Raum bietet, sodass der Leser ein tiefgehendes Verständnis für die Sternmodelle entwickeln kann.

Zunächst wird jedoch die Astronomie im Schul- und Hochschulunterricht allgemein und darauf folgend speziell die Beschäftigung mit dem Sternaufbau und der Sternentwicklung legitimiert. Nach einem Überblick über den Ist-Stand des Astronomieunterrichts in Deutschland wird das Ziel der Arbeit formuliert und deren Aufbau vorgestellt.

## **1.1 Legitimation astronomischer Inhalte in der Schule**

Die Wichtigkeit des Astronomieunterrichts bzw. astronomischer Inhalte im naturwissenschaftlichen Unterricht wurde in der Vergangenheit bereits von vielen Autoren begründet, wie beispielsweise durch Winnenburg [Win74]. Nachfolgend werden exemplarisch aktuelle Argumente für den

Astronomieunterricht aus einem offenen Brief der Mitarbeiter des Hauses der Astronomie vom 11.02.2015 an das Landesinstitut für Schulentwicklung in Baden-Württemberg vorgestellt [Pös]:

- Astronomie ist attraktiv – sie knüpft an Schüler/inneninteressen an und bietet so einen ansprechenden Einstieg in die Naturwissenschaften.
- Astronomie weckt insbesondere auch bei Schülerinnen Interesse an Naturwissenschaft – das zeigen vergleichende Interessenstudien.
- Astronomie ist präsent – Medien, Filme und Computerspiele haben astronomische Themen immer mehr zu einem Teil der heutigen Welt junger Menschen gemacht, mit vielen Anknüpfungspunkten für den Unterricht.
- Astronomie verknüpft – ihre Konzepte verbinden Inhalte der Physik, Chemie, Biologie, Technik, Geschichte, Philosophie und anderer Geisteswissenschaften.
- Astronomie zeigt anspruchsvolle und spannende Anwendungen von Technik – Optik, Mechanik und Luft- und Raumfahrttechnik sind die Voraussetzungen für moderne astronomische Forschung und werden von den Astronomen mit entwickelt.
- Astronomie bietet daher anspruchsvolle und mitreißende Themen für Verbundfächer wie NwT oder Naturphänomene und Technik.
- Astronomie vermittelt Schülern ihren Platz in einem größeren Universum – und fördert so Umweltbewusstsein und Bewusstsein für Nachhaltigkeit ebenso wie Toleranz und die Akzeptanz von Vielfalt.

Ergänzend ist hervorzuheben, dass die Entwicklung der Wissenschaften Physik und Astronomie sich in weiten Bereichen symbiotisch vollzog. Daher kann in etwa die klassische Mechanik nicht vollumfänglich verstanden werden, wenn man nicht auch auf astronomische Inhalte wie die Himmelsmechanik Bezug nimmt.

Dass astronomische Inhalte im Physikunterricht nicht nur eine Bereicherung, sondern unverzichtbar für das Verstehen von Physik sind, legt Schwarz dar und soll im Folgenden wiedergegeben werden [Sch10, S. 13 - 16]. Die Argumente sind wissenschaftshistorischer und erkenntnistheoretischer Natur und somit unabhängig von aktuellen bildungspolitischen Debatten. Um auf Grundlage dieser Sichtweisen geeignete astronomische Inhalte auswählen zu können, muss man sich zunächst klarmachen, was eine Wissenschaft auszeichnet. Das sind zum einen deren Untersuchungsgegenstände, zum anderen deren Erkenntnismethoden. Typische Erkenntnismethoden der Physik sind:

- die experimentelle Methode,
- die Modellbildung,
- die Formulierung mathematischer Theorien und Hypothesen,
- das Denken in Modellen und Analogien,
- das Zurückzuführen auf wenige grundlegende Prinzipien.

Die Astronomie verwendet im Wesentlichen dieselben Methoden, unterscheidet sich jedoch dadurch von der Physik, dass ihr die experimentelle Methode im Allgemeinen unzugänglich ist und sie für den Erkenntnisgewinn auf die systematische Beobachtung zurückgreift. Beide Methoden der Naturbefragung stehen gleichwertig nebeneinander und um Lernenden nahezubringen, wie man die Natur befragen kann, müssen beide Methoden zumindest in Grundzügen verstanden werden. Die Bedeutsamkeit des Zusammenwirkens von Astronomie und Physik zeigt ein Blick in die Geschichte: Newton entwickelte das Gravitationsgesetz und eine axiomatisch aufgebaute Physik auf Grundlage von astronomischen Beobachtungen (Keplersche Gesetze). Umgekehrt war das newtonsche Gravitationsgesetz Grundlage vieler Entdeckungen in der Astronomie. Neben dem soeben diskutierten historischen, lassen sich wissenschafts- und erkenntnistheoretische Argumente nennen: Dass beide Wissenschaften gewinnbringend miteinander wechselwirken, verwundert kaum, denn sie haben beide zum Ziel die Natur zu verstehen und arbeiten dabei auf Grundlage derselben Naturgesetze und verwenden ähnliche Erkenntnismethoden. Die Untersuchungsgegenstände von Physik und Astronomie zeigen ebenfalls große Übereinstimmungen, jedoch mit leicht verschobenen Schwerpunkten:

- Kinematik,
- Dynamik,
- Materie, Materiezustände, Strukturen (groß/klein),
- Herkunft / Entwicklung der Strukturen.

Im heutigen Physikunterricht findet der Entwicklungsgedanke bisher nur wenig Beachtung, obwohl alle chemischen Elemente, Lebewesen und Himmelskörper, sogar das Universum „irgendwann“ einmal entstanden sind und sich in eine bestimmte zeitliche Richtung entwickelt haben. Hingegen ist für die Astronomie die Frage nach dem Ursprung und der Zukunft der Untersuchungsgegenstände eine Selbstverständlichkeit. Die Astronomie kann somit dazu beitragen, diesen Aspekt stärker in den Fokus zu rücken. Zusammengefasst kann die Astronomie den Physikunterricht in folgenden Punkten bereichern:

- Sie wird benötigt, um Erkenntnismethoden und Denkprinzipien bereitzustellen, die innerhalb des Physikunterrichts nicht oder nicht in der erforderlichen Ausprägung vorkommen.
- Sie ist notwendig, um Untersuchungsgegenstände der Physik selbst vollständig zu erfassen.

Dabei sind besonders zu erwähnen:

- Das beiden Disziplinen gemeinsame Bestreben, die Welt nach einheitlichen Prinzipien zu verstehen und in Weltmodelle zusammenzufassen.
- Die von der Astronomie perfekt bereitgestellte und astronomisch bestens zu übende Erkenntnismethode der Beobachtung.
- Der die Astronomie durchziehende Entwicklungsgedanke.

Nachfolgend geht es nicht um eine vollständige bildungstheoretische Legitimation des Astronomieunterrichtes, sondern es stehen lediglich wissenschaftshistorische, erkenntnistheoretische und fachwissenschaftliche Argumente im Fokus.

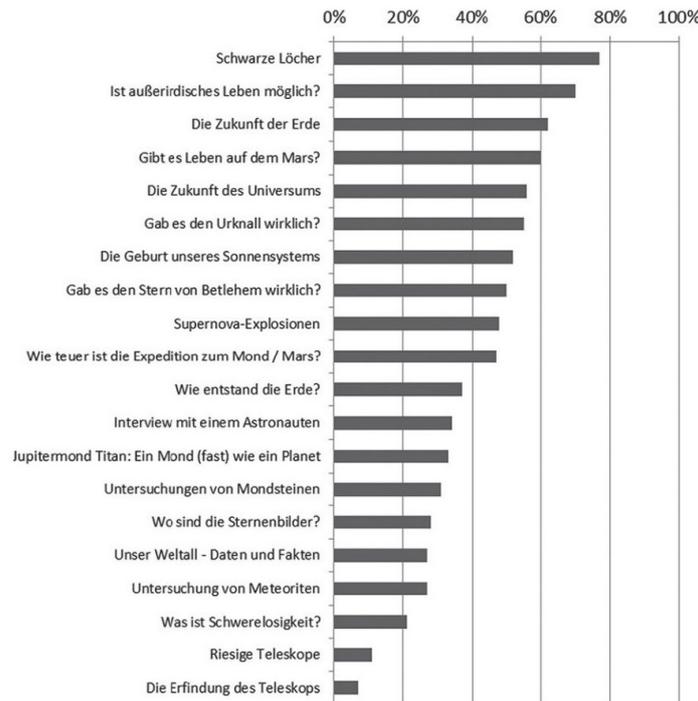


Abbildung 1.1: Interesse an Inhalten der Ausgabe: „Unser Universum“ geordnet nach Interesse [Die14, S. 216].

## 1.2 Legitimation der Themengebiete Sternaufbau und Sternentwicklung

Heute ist die Astrophysik eine voll ausgebildete Teilwissenschaft der allgemeinen Himmelskunde, die einen interessanten, aber auch äußerst umfangreichen Fundus an Lehr- / und Lerninhalten anbieten kann. Doch welche dieser Inhalte sollte man herausgreifen?

Um herauszufinden, welche astronomischen Inhalte bei Lernenden besonders beliebt sind, wurde vom IPN in Zusammenarbeit mit dem Spektrum-Verlag eine Interessensstudie anhand des populärwissenschaftlichen Magazins „Spektrum Neo“ durchgeführt (vgl. [Die14, S. 215 - 221]). An zwei Gymnasien wurden 190 Schülerinnen und Schüler zu ihrem Interesse an den Inhalten verschiedener Themenhefte befragt. Die Ergebnisse zur Ausgabe „Unser Universum“ sind in Abb. 1.1 dargestellt.

Es zeigt sich, dass das Interesse bei Themen wie Schwarzen Löchern, der Zukunft des Universums und Supernova-Explosionen besonders groß ist. Das Interesse fällt hingegen bei Themen wie riesigen Teleskopen, Sternbildern und Untersuchungen von Meteoriten eher gering aus. Auffällig ist,

dass insbesondere fachlich sehr anspruchsvolle Themen bei den Jugendlichen beliebt sind. Möchte man als Lehrkraft das natürliche Interesse an den oben genannten Themen für seinen Unterricht nutzen, steht man dadurch vor einer großen Herausforderung. Zwar bieten populärwissenschaftliche Magazine einen guten Überblick über die jeweiligen Themenfelder, jedoch wird die phänomenologische Ebene kaum überschritten. Dies mag für die Sekundarstufe I angemessen sein, für eine Behandlung in der Oberstufe oder einer Lehrveranstaltung im Grundstudium wünscht man sich jedoch einfache und für Lernende nachvollziehbare Modelle mit denen Berechnungen und Abschätzungen wichtiger Größen durchgeführt werden können, sowie Aufgaben zum Üben und Festigen des Gelernten, bei denen die typischen Arbeitsweisen der entsprechenden Fachdisziplin zur Anwendung kommen. Es ist Aufgabe der Fachdidaktik, diesem Bedürfnis entgegenzukommen und entsprechende Materialien zur Verfügung zu stellen. Die vorliegende Arbeit setzt sich zum Ziel hier einen Teil dazu beizutragen.

Um ein Verständnis für die zuvor genannten Themen entwickeln zu können, ist es unumgänglich, sich näher mit der Physik von Sternen zu beschäftigen. So ergibt die Behandlung von Supernova-Explosionen nur dann Sinn, wenn die Vorgänge, die sich in den Endstadien der Sternentwicklung ereignen, thematisiert werden. Vorangehend sollte behandelt werden, was Sterne eigentlich sind, wie sie sich untereinander und von anderen Himmelskörpern unterscheiden und warum sie sich in einem begrenzten Zeitraum entwickeln – insbesondere stellt sich die Frage nach dem Schicksal unserer Sonne. Die Physik von Sternen stellt somit einen natürlichen Einstieg in die moderne Astrophysik dar.

Es gibt eine ganze Fülle von Unterrichtsmaterialien, welche sich mit der Beobachtung von Phänomenen auf der Sonnenoberfläche, der Bestimmung von Zustandsgrößen der Sonne bzw. Sternen im Allgemeinen oder mit der Untersuchung des Hertzsprung-Russell-Diagramms beschäftigen, siehe z.B. [Lin06, 17 - 19]. Ganz elementare Fragen können jedoch nur mithilfe von Modellen zum inneren Sternaufbau beantwortet werden. So schreibt Subrahmanyan Chandrasekhar:

„How is it that a certain specified march of the net flux of radiant energy is able to support (against gravitational attraction) an amount of mass equal to  $M$  inside a spherical volume of precisely the radius  $R$ ?“ [Cha67, S. 5]

Die Beantwortung dieser Frage hilft uns dabei zu verstehen, warum das Leben auf der Erde überhaupt erst möglich ist. Bei einer genaueren Betrachtung von Sternkatalogen fällt auf, dass es Sterne nur in einem sehr eingeschränkten Massebereich von etwa  $1 M_{\odot}$  gibt. Warum gibt es scheinbar keine beliebig leichte oder schwere Sterne?

Diese und viele weitere Fragestellungen können bei einer rein phänomenologischen Betrachtung der Sterne nicht zufriedenstellend beantwortet werden.

Aus der didaktischen Perspektive ist die Behandlung des inneren Aufbaus der Sterne sicherlich keine leichte Aufgabe, da der Thematik viele Schwierigkeiten innewohnen:

- Es sind fundierte Fachkenntnisse aus diversen Teilgebieten der Physik erforderlich:
  - Astronomie
  - Mechanik
  - Thermodynamik
  - Atom- und Kernphysik
  - Quantenmechanik
  - Relativitätstheorie
  
- Der innere Aufbau von Sternen wird durch ein System von Differentialgleichungen beschrieben, welches im Allgemeinen nicht analytisch lösbar ist. Es sind somit Kenntnisse aus mehreren mathematischen Disziplinen notwendig:
  - Differential-/ Integralrechnung
  - Lösen von Gleichungssystemen
  - numerische Lösungsverfahren
  
- numerische Lösungsverfahren erfordern einen sehr hohen Rechenaufwand, wenn diese eine bestimmte Genauigkeit erzielen sollen, sodass der Einsatz leistungsstarker Computer unvermeidbar ist. Grundlegende Informatikkenntnisse in folgenden Bereichen sind ebenfalls notwendig:
  - Umsetzung von Iterationsverfahren

- Umgang mit Tabellenkalkulationsprogrammen
- Kenntnisse von Programmiersprachen

Letztgenannte Probleme kommen in der heutigen Zeit weit weniger zum Tragen, als zu Beginn der Forschung zum inneren Aufbau der Sterne vor mehr als 100 Jahren, da in nahezu jedem Haushalt ein Computer mit ausreichender Rechenleistung vorhanden ist. In Schulen findet sich in der Regel zumindest ein Computerraum für den Informatikunterricht.

Auch der Einsatz von Computeralgebrasystemen findet immer größere Verbreitung: In vielen Bundesländern sind CAS-Taschenrechner mittlerweile fester Bestandteil im Mathematikunterricht der Oberstufe und können somit auch im Physik- bzw. Astronomieunterricht sinnvoll eingesetzt werden. Dennoch bleiben viele Probleme bestehen, die eine Thematisierung des Sternaufbaus und der Sternentwicklung erschweren.

- Hinzu kommen erkenntnistheoretische Probleme:
  - Astronomen können nur die äußeren Schichten eines Sterns beobachten. Experimente und Messungen ähnlich einer Bohrkernuntersuchung lassen sich dort nicht durchführen. Das Wissen über das Sterninnere stammt somit fast<sup>2</sup> allein aus Modellrechnungen und Computersimulationen. Es ist zunächst kritisch zu hinterfragen, ob diese Resultate tatsächlich als gesichert angesehen werden können.
  - Allen astrophysikalischen Modellen liegt die Annahme zugrunde, dass im Universum keine grundsätzlich verschiedenen physikalischen Gesetze gelten. Heutzutage ist dieser Ansatz leicht zu akzeptieren, jedoch war eine lange historische Entwicklung unseres Weltbildes dazu nötig.
  - Die Temperaturen und Drücke im Sterninneren sind extrem hoch und lassen sich unter Laborbedingungen nicht ohne Weiteres erzeugen, getroffene Modellannahmen müssen sehr sorgfältig begründet werden.

---

<sup>2</sup>Die Beobachtung von Neutrinos, die bei der Kernfusion freigesetzt werden, sowie helioseismologische Untersuchungen ermöglichen direkte Zugänge zu Prozessen tief im Inneren der Sonne.

### 1.3 Ziele der Arbeit

Ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, ein Lernangebot zum Thema „Innerer Aufbau der Sterne und Sternentwicklung“ in elementarisierter Darstellung bereitzustellen, welches sich zum einen an angehende Physiklehrer im Grundstudium, sowie Physikstudierende im Bachelorstudien-gang richtet, zum anderen an Lernende der gymnasialen Oberstufe. Die einfachsten Ideen und Modellrechnungen sollten sogar für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I nachvollziehbar sein. Es wird nicht der Anspruch gestellt, eine möglichst vollständige Theorie darzulegen, da im Vordergrund stehen soll, ein prinzipielles Verständnis für den inneren Aufbau der Sterne zu entwickeln und nicht möglichst präzise Vorhersagen durch Modellrechnungen zu treffen. Es werden außerdem erkenntnistheoretische Überlegungen der Wissenschaftler mit einbezogen, die die Theorie des inneren Aufbaus der Sterne maßgeblich vorangetrieben haben, sowie die wissenschaftlichen Methoden aus dem Bereich der theoretischen Astrophysik zum Einsatz gebracht haben.

Das Lernangebot soll strukturierte Lernmodule bieten, welche den Anforderungsniveaus der Zielgruppen entsprechen sollen. Die einzelnen Lernmodule orientieren sich inhaltlich an wichtigen Meilensteinen in der historischen Entwicklung der Theorie des inneren Aufbaus der Sterne. Zu Beginn eines jeden Moduls werden die erforderlichen fachlichen Grundlagen ausführlich erläutert, sowie wichtige erkenntnistheoretische Überlegungen angestellt und eine grobe Einordnung in die Wissenschaftsgeschichte vorgenommen. Anschließend werden zunächst prinzipielle Überlegungen angestellt, mit denen Größenordnungen oder Mittelwerte einiger Zustandsgrößen der Sterne bestimmt werden können. Zusätzlich wird der Computer als Rechenhilfe einbezogen, da dieser heutzutage in praktisch jedem Haushalt verfügbar ist. Es sollen Tools auf Basis gängiger Software entwickelt werden, mit denen eine detailliertere Analyse der Sternstruktur durchgeführt werden kann, um das thermodynamische Verhalten der Sterne besser verstehen zu können. Dabei wird aus mehreren didaktischen Gründen auf die Verwendung von (teurer) Spezialsoftware verzichtet. Die Bedienung neuer Software erfordert für den User immer eine gewisse Einarbeitungszeit. Es muss abgewogen werden, ob dieser Aufwand einen tatsächlichen Nutzen mit sich bringt. Wissenschaftler, die sich künftig mit der Thematik auseinandersetzen werden, profitieren

mit Sicherheit von den Vorzügen spezieller Software. Für die Zielgruppe der vorliegenden Arbeit erscheint es sinnvoller, möglichst viel Zeit für das Verstehen der Physik der Sterne aufzuwenden und möglichst wenig Zeit für das mechanische Bedienen einer Software aufzuwenden. Alle computergestützten Rechnungen werden deswegen entweder mit Computerprogrammen durchgeführt, deren Grundfunktionen aus dem Informatikunterricht oder sonstigen Tätigkeiten vertraut sein sollten, oder zumindest von der Bedienung her besonders leicht zu erlernen sind. Auf diesem Wege wird gewährleistet, dass der Computer eine Hilfe beim Verstehen von Physik ist und nicht eine weitere Hürde darstellt.

Die derzeit auf dem fachdidaktischen „Markt“ angebotene Vielfalt an Lehr- und Lernmethoden kann hier nicht vollumfänglich beleuchtet werden. Wichtig für diese Arbeit ist, dass in all diesen didaktisch pädagogischen Überlegungen die Selbsttätigkeit der Lernenden eine herausragende Rolle einnimmt. Dementsprechend ist das primäre Hauptziel dieser Promotionsschrift, den Lernenden Angebote zu unterbreiten, mit deren Hilfe sie tatsächlich in einen sinnvollen Modus eigenen Lernens, Rechnens und Modellierens übergehen können. Was die Theorie des inneren Aufbaus der Sterne betrifft, so ist das bisher in der Literatur veröffentlichte Angebot als sehr eingeschränkt zu bezeichnen. Verknüpft man formale Einsichten auch mit dem Anspruch an einen erkenntnistheoretischen Gewinn, so ist erfahrungsgemäß die Wissenschaftsgeschichte eine wertvolle Hilfsquelle, auf die man zurückgreifen kann, um sich über das breite Spektrum an denknotwendigem und denkmöglichen zu vergewissern. Gerade die Theorie des inneren Aufbaus der Sterne bietet hier viel Stoff, denn das Innere der Sterne ist der Beobachtung und der Messung zumeist unzugänglich. Zur Realisierung des eben genannten Zieles, wird ein elementarisierendes Lehrangebot zum Thema „innerer Aufbau der Sterne und Sternentwicklung“ bereitgestellt.

Zusammengefasst setzt sich die Arbeit folgende Ziele:

- Es soll eine didaktisch aufgearbeitete Einführung in die Theorie des inneren Aufbaus von Sternen und der Sternentwicklung in Form von strukturierten Lernmodulen entwickelt werden. Diese richten sich an die folgenden Zielgruppen:
  - Physik Lehramtsstudierende im Grundstudium
  - Physik Bachelorstudierende

- Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II
- (Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I)
- Die Behandlung der Theorie des inneren Aufbaus von Sternen soll fachlich über die phänomenologische Ebene weit hinaus gehen:
  - Es sollen Mittelwerte und Größenordnungen wichtiger Zustandsgrößen wie dem Druck und der Temperatur für unser Zentralgestirn bestimmt werden und allgemeine Zusammenhänge zwischen den Zustandsgrößen für Sterne im Hauptreihenstadium hergeleitet werden.
  - Es soll die Notwendigkeit der Betrachtung von Verläufen der Zustandsgrößen vom Zentrum bis hin zur Oberfläche verdeutlicht und mithilfe von Differentialgleichungen beschrieben werden.
  - Die auftretenden Differentialgleichungen sollen detailliert analysiert und mithilfe numerischer Verfahren gelöst werden.
  - Beim Lösen der Differentialgleichungen spielen der Computer und numerische Lösungsverfahren eine zentrale Rolle. Dazu werden am Ende der Lernmodule die Tools entwickelt, mit denen die Lernenden die Resultate der Arbeit am eigenen Computer reproduzieren können. Zum Einsatz kommen Tabellenkalkulationsprogramme und Modellbildungsprogramme, in dieser Arbeit wird exemplarisch mit Microsoft Excel und CMA Coach 6.0 gearbeitet. Die Beschreibungen sind ausführlich genug gestaltet, sodass sie problemlos auf kostenfreie Alternativprogramme übertragen werden können und der Leser mit der Software arbeiten kann, mit der er möchte. Eine Umsetzung mit dem CAS Taschenrechner oder über eine Programmiersprache wie Python oder Matlab ist ebenfalls denkbar, wird jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht thematisiert. Zugleich wird bewusst auf die Verwendung teurer Spezialsoftware verzichtet, um die Inhalte nicht nur einer sehr eingegrenzten Zielgruppe zur Verfügung zu stellen.
- Die Struktur der vorliegende Arbeit ist so gestaltet, dass sie die Lernenden durch die Geschichte der Theorie des inneren Aufbaus

der Sterne führt und wichtige erkenntnistheoretische Überlegungen derjenigen Wissenschaftler miteinbezieht, die die Entwicklung der Theorie maßgeblich beeinflusst haben, um Lernende Wissenschaft nachempfinden zu lassen.

- Es wird eine kurze Einführung in numerische Verfahren (Euler, Runge-Kutta) gegeben und auf dem Computer mit den entsprechenden Programmen realisiert. Aus didaktischen Gründen wird der Schwerpunkt auf die pragmatische Umsetzung der Verfahren gelegt und viele, für die numerische Mathematik wichtige Probleme, wie das Fehlerverhalten oder Konvergenzprobleme, außen vor gelassen bzw. nur am Rande behandelt, da der Fokus auf der Entwicklung von physikalischen Modellen und prinzipiellen Überlegungen liegt.

Wie man an der Zielformulierung erkennt, steht fachlich begründete Entwicklungsarbeit im Mittelpunkt. Die Praktikabilität der vorgeschlagenen Lernmodule wurde im Rahmen einer Lehrveranstaltung zur Astrophysik erprobt – im Sinne einer Rückkopplung zu den Lernenden im Rahmen individueller Diskussionen und Rückfragen, mit dem Ziel, den Grad des Verstehens festzustellen. Eine vollumfängliche Erprobung im Rahmen der Methoden der Lehr-/Lernforschung hätte den Rahmen dieser Arbeit gesprengt.

## 1.4 Aufbau der Arbeit

Nach der Einleitung (Kapitel 1) werden in Kapitel 2 einleitend grundlegende numerische Verfahren zum Lösen von Differentialgleichungen vorgestellt und auf einfache innermathematische Beispiele angewendet. Das Euler'sche Tangentenverfahren wird vorwiegend in der Arbeit verwendet, während das komplexere Runge-Kutta-Verfahren als Ausblick dient, um die Qualität und Leistungsfähigkeit von Lösungsverfahren zu verbessern. Anschließend wird die Theorie des inneren Aufbaus der Sterne in kompakter Form dargelegt. Auf Erläuterungen und Herleitungen wird weitestgehend verzichtet, da innerhalb der einzelnen Lernmodule alle notwendigen Gleichungen ausführlich hergeleitet werden.

In Kapitel 3 werden einige zentrale Fragestellungen zu den Grundannahmen heutiger Sternmodelle aufgeworfen, deren Gültigkeit heute zwar

wie selbstverständlich angenommen werden, der Nachweis dennoch keineswegs trivial ist. Exemplarisch sei die Anwendbarkeit des Gesetzes des idealen Gases auf den Sonnenkörper genannt. Darüber hinaus werden erste naive (Excel-)Modelle konstruiert und Mindestanforderungen an funktionierende Sternmodelle herausgearbeitet.

Am Ende von Kapitel 4 sollen das Gleichungssystem des Sternmodells einer voll konvektiven Gaskugel stehen, sowie ein Tool entwickelt werden, mit dem die Lösung numerisch ermittelt und visualisiert werden kann. Im Vorfeld werden die Gleichungen tiefgehend analysiert und wichtige Zusammenhänge zwischen Eigenschaften von Sternen herausgearbeitet, die eine Lösung der Gleichungen nicht erforderlich macht.

Während in Kapitel 4 weitestgehend Überlegungen zur mechanischen Stabilität von Gaskugeln im Vordergrund stehen, wird in Kapitel 5 das Sternmodell um eine ausgiebige Analyse zum Energietransport und der Energieproduktion im Zentrum erweitert und somit ein sehr realitätsnahes Modell geschaffen, welches in der Lage ist, viele beobachtbare Erscheinungen zu erklären.

Auch wenn in den bestehenden Kapiteln der Entwicklungsgedanke schon immer bei der Modellbildung berücksichtigt wurde, findet die Komponente „Zeit“ erst in Kapitel 7 Einzug in das Sternmodell. Es soll simuliert werden, wie sich die Leuchtkraft der Sonne im Laufe ihres Lebens aufgrund von Fusionsprozessen im Sternzentrum verändert haben muss.

# Kapitel 2

## Grundlagen

### 2.1 Mathematische Grundlagen: numerische Lösungsverfahren

Um den genauen Verlauf verschiedener Zustandsgrößen wie Druck und Dichte vom Sternzentrum bis hin zur Oberfläche zu bestimmen, muss ab einem gewissen Komplexitätsgrad zwangsläufig ein System von Differentialgleichungen gelöst werden, welche den inneren Sternaufbau beschreiben. Selbst unter stark vereinfachenden Annahmen ist es häufig nicht möglich, eine analytische Lösung anzugeben, sodass numerische Lösungsverfahren und der Computer zur Anwendung kommen müssen. In diesem Abschnitt werden zwei verschiedene Lösungsverfahren näher erläutert, das Euler'sche Tangentenverfahren und das modernere Runge-Kutta-Verfahren (2. Ordnung). Beide Verfahren werden zunächst auf eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung angewendet, sowie die mögliche Umsetzung mit verschiedenen Computerprogrammen vorgestellt. Implizite Probleme werden nicht betrachtet, da sie für diese Arbeit nicht relevant sind. Zum Einsatz kommt Tabellenkalkulationssoftware (z.B. Microsoft Excel, Apache OpenOffice Calc ...) und Modellbildungssoftware (Coach 6.0, Moebius, Dynasys ...). Die Software wird bewusst so gewählt, dass entweder der kostenfreie Zugang, eine weite Verbreitung, oder eine möglichst einfache Bedienung gewährleistet ist.

Im Anschluss wird das Tangentenverfahren auf Differentialgleichungen 2. Ordnung bzw. ein System von zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung übertragen. Das Runge-Kutta-Verfahren wird hier nicht näher betrachtet, da die Umsetzung des Verfahrens für unerfahrene Nutzer deutlich

aufwändiger ist, als beim Euler'schen Tangentenverfahren. In der Praxis spielt das Tangentenverfahren zwar keine Rolle mehr, erfüllt im Rahmen dieser Arbeit aber einen didaktischen Zweck, da in den folgenden Kapiteln mehr Wert darauf gelegt wird, ein prinzipielles Verständnis für die Vorgänge im Sterninneren und die Arbeitsweisen der theoretischen Astrophysik zu entwickeln, als möglichst präzise Resultate mit komplexen numerischen Rechentechniken zu erzielen.

### Das Euler'sche Tangentenverfahren

Der Mathematiker Karl Weierstrass definierte den Ableitungsbegriff wie folgt: [DD05, S. 316]

„ $f$  heißt in  $x_0$  differenzierbar, wenn es eine Gerade  $t_{x_0}$  durch den Punkt  $(x_0, f(x_0))$  gibt, sodass der Approximationsfehler

$$r(h) = f(x_0 + h) - t_{x_0}(x_0 + h) \quad (2.1)$$

mit

$$(x_0 + h \in D_F) \quad (2.2)$$

der Bedingung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \quad (2.3)$$

genügt. Die Steigung von  $t_{x_0}$  heißt Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$  und wird mit  $f'(x_0)$  bezeichnet.“

Diese Definition ist äquivalent zu der aus der Schule bekannten Definition nach Cauchy über den Differenzenquotienten, betont jedoch den Charakter der Tangente als bestapproximierende Gerade, da der Fehler  $r(h)$  durch die Tangente nicht nur gegen Null geht, wenn der Abstand  $h$  gegen Null geht, sondern auch dann noch verschwindet, wenn  $r(h)$  durch  $h$  dividiert wird. Die Tangente ist die einzige Gerade mit dieser Eigenschaft (vgl. [DD05, S. 26]). Dies kann ausgenutzt werden, um ein sehr einfaches Lösungsverfahren für Differentialgleichungen zu entwickeln. Man kann das Lösen von Differentialgleichungen 1. Ordnung folgendermaßen interpretieren: „Gesucht ist eine Funktion  $f(x)$ , deren Ableitung bzw. Tangentensteigung  $f'(x)$  an jeder Stelle bekannt ist. Ist ein Funktionswert  $f(x_0)$  bekannt, so ist die Funktion  $f(x)$  eindeutig festgelegt.“

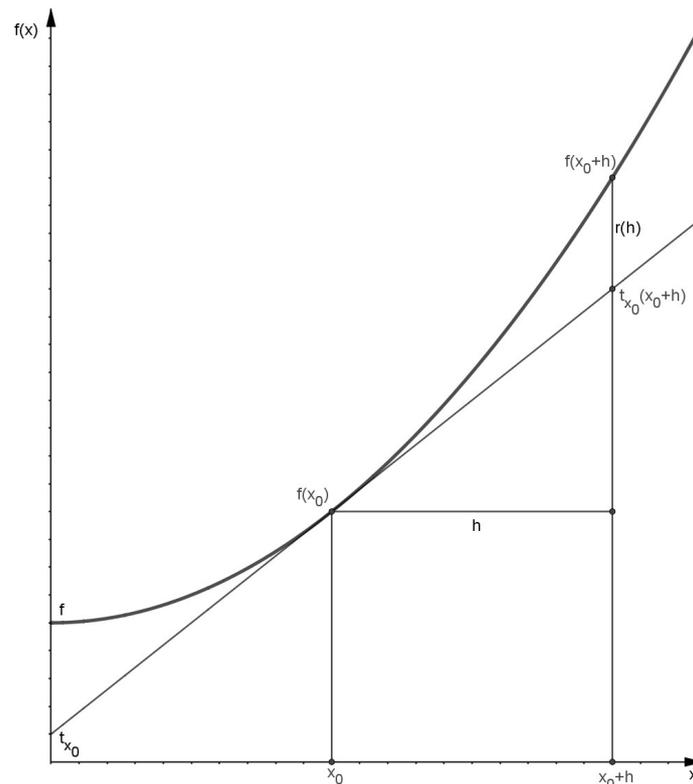


Abbildung 2.1: Die Tangente als bestapproximierende Gerade.

Ausgehend von der Weierstrass'schen Definition der Ableitung kann der Funktionswert  $f(x_0+h)$  durch die Tangente  $t_{x_0}$  durch den Punkt  $(x_0, f(x_0))$ , so approximiert werden, dass gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \quad (2.4)$$

Für kleine Abstände  $h$  kann der gesuchte Funktionswert an der Stelle  $x_0 + h$  also sehr gut angenähert werden. Da  $f(x_0 + h) \approx t_{x_0}(x_0 + h)$  und  $f'(x_0 + h)$  bekannt sind, kann auf analoge Weise der Funktionswert  $f(x_0 + 2h)$  angenähert werden und der Vorgang so oft wiederholt werden, bis die Funktionswerte an jeder gewünschten Stelle bekannt sind.

Es ist zu beachten, dass mit jedem neu berechneten Funktionswert die Approximationsfehler der vorangegangenen Rechenschritte mitgenommen werden. Dies ist insbesondere dann problematisch, wenn eine Funktion über sehr große Intervalle bestimmt werden soll – so wie es für den inneren Aufbau von Sternen notwendig ist. Die einzige Möglichkeit, den Fehler bei dem Tangentenverfahren gering zu halten, ist die Wahl einer kleinen

Schrittweite  $h$ , was jedoch den Rechenaufwand erhöht. Der Einsatz von Computern kann dieses Problem weitgehend entschärfen.

### 2.1.1 Differentialgleichung 1. Ordnung: Beispiel und Umsetzung

Anhand eines einfachen Beispiels wird das Tangentenverfahren nun angewendet und der Einfluss der Schrittweite auf die Güte der Approximation demonstriert.

Gegeben sei die Differentialgleichung (DGL)  $f' = \frac{df}{dx} = x$ , mit dem vorgegebenen Funktionswert  $f(0) = 0$ . Die analytische Lösung lautet bekanntlich  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 0$  und wird mit dem numerischen Resultat im Intervall  $[0; 1]$  verglichen.

Ansatz: Die DGL gibt die Steigung der Tangenten in jedem Punkt an. Bei bekanntem Startwert  $f(0) = 0$  und bekannter Steigung  $f'(x_0) = 0$  lässt sich ein benachbarter Punkt  $f(x_1)$  durch die Tangente annähern. Es gilt:

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) = 0 + 0 \cdot h \quad (2.5)$$

An dieser Stelle kommt die Schrittweite  $h$  ins Spiel, welche zunächst sehr grob mit  $0,2$  gewählt wird und anschließend, zum Vergleich, etwas feiner mit  $0,05$ . Für  $h = 0,2$  folgt somit:

$$f(x_1) = 0 \quad (2.6)$$

An der Stelle  $x = 0,2$  besitzt die Funktion die Steigung  $f'(0,2) = 0,2$ . Analog kann nun  $f(x_2 = 0,4)$  angenähert werden.

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x_2 = 0,4) &\approx f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1) \\ &= 0 + 0,2 \cdot (0,4 - 0,2) = 0,04 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dieser Vorgang lässt sich auch in allgemeinen Fällen wiederholen, bis alle gewünschten Funktionswerte im Intervall ermittelt sind. Als erster Schritt ergibt sich:

$$f(x_0) = 0 \quad (2.8)$$

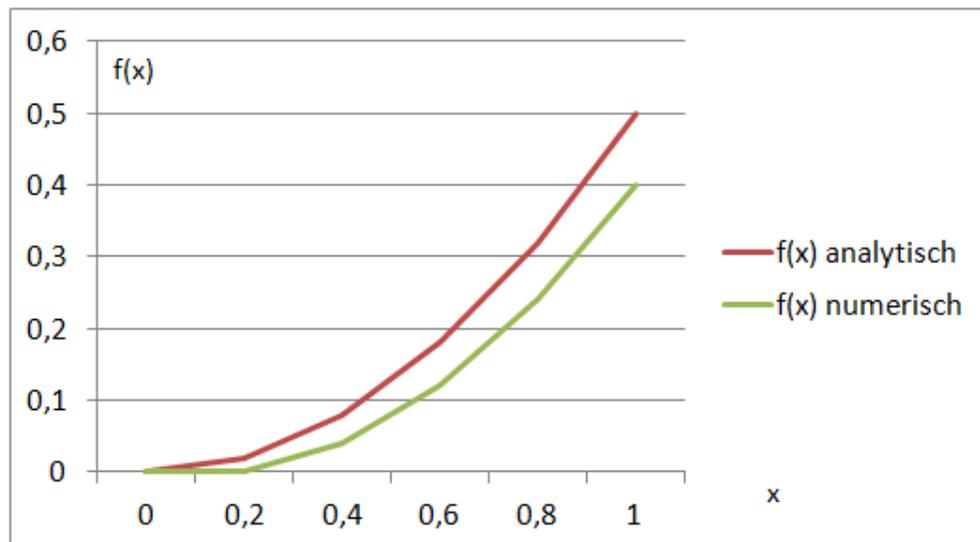


Abbildung 2.2: Grafischer Vergleich der analytischen mit der numerischen Lösung unter Verwendung des Tangentenverfahrens bei einer Schrittweite von  $h = 0,2$ .

Tabelle 2.1: Vergleich der Wertetabelle der analytischen mit der numerischen Lösung unter Verwendung des Tangentenverfahrens bei einer Schrittweite von  $h = 0,2$ .

$x$	$f'(x)$	$f(x)$ analytisch	$f(x)$ numerisch
0	0	0	0
0,2	0,2	0,02	0
0,4	0,4	0,08	0,04
0,6	0,6	0,18	0,12
0,8	0,8	0,32	0,24
1	1	0,5	0,4

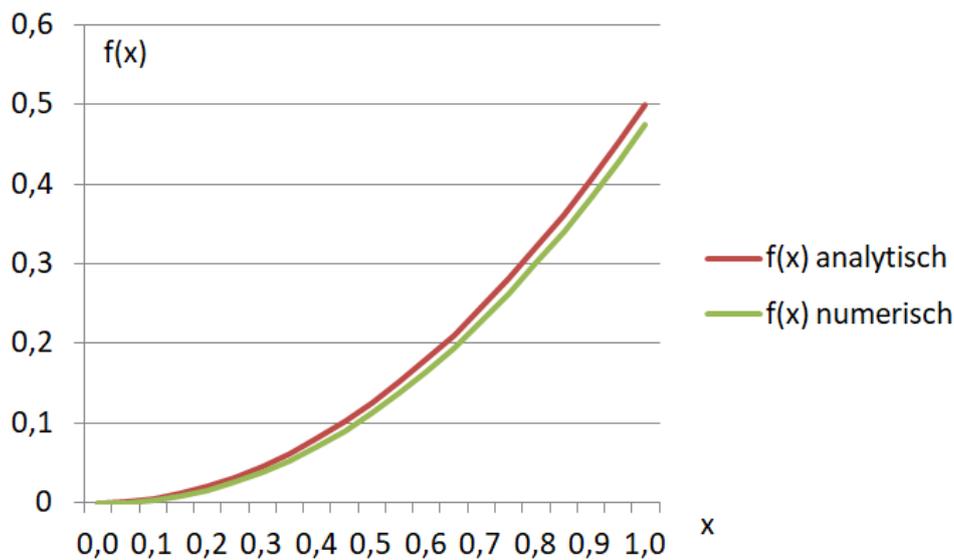


Abbildung 2.3: Grafischer Vergleich der analytischen mit der numerischen Lösung unter Verwendung des Tangentenverfahrens bei einer Schrittweite von  $h = 0,05$ .

$$\begin{aligned}
 f(x_1) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot h \\
 &\dots \\
 f(x_{n+1}) &= f(x_n) + f'(x_n) \cdot h
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Tabelle 2.1 und Abbildung 2.2 zeigen die Ergebnisse für die Schrittweite  $h = 0,2$  und stellen sie der analytischen Lösung gegenüber. An der Stelle  $x = 1$  beträgt die Abweichung von der analytischen Lösung 20%. Die Genauigkeit des Ergebnisses lässt sich durch die Wahl einer kleineren Schrittweite wesentlich steigern, wie Tabelle 2.2 und Abbildung 2.3 zeigen. Der Fehler an der Stelle  $x = 1$  kann mit  $h = 0,05$  auf 5% reduziert werden, was jedoch einen erheblich größeren Rechenaufwand erfordert.

### 2.1.2 Umsetzung auf dem Computer: Tabellenkalkulation

Um eine Differentialgleichung 1. Ordnung mithilfe von Tabellenkalkulationssoftware lösen zu können, muss das Problem in eine Form gebracht werden, welche mit der vorgegebenen Tabellenstruktur kompatibel ist. In der vorliegenden Arbeit wird mit Microsoft Excel 2010 gearbeitet, sodass bei der Verwendung einer anderen Tabellenkalkulationssoftware

Tabelle 2.2: Vergleich der Wertetabelle der analytischen mit der numerischen Lösung unter Verwendung des Tangentenverfahrens bei einer Schrittweite von  $h = 0,05$ .

<b>x</b>	<b>f'(x)</b>	<b>f(x) analytisch</b>	<b>f(x) numerisch</b>
0	0	0	0
0,05	0,05	0,00125	0
0,1	0,1	0,005	0,0025
0,15	0,15	0,01125	0,0075
0,2	0,2	0,02	0,015
0,25	0,25	0,03125	0,025
0,3	0,3	0,045	0,0375
0,35	0,35	0,06125	0,0525
0,4	0,4	0,08	0,07
0,45	0,45	0,10125	0,09
0,5	0,5	0,125	0,1125
0,55	0,55	0,15125	0,1375
0,6	0,6	0,18	0,165
0,65	0,65	0,21125	0,195
0,7	0,7	0,245	0,2275
0,75	0,75	0,28125	0,2625
0,8	0,8	0,32	0,3
0,85	0,85	0,36125	0,34
0,9	0,9	0,405	0,3825
0,95	0,95	0,45125	0,4275
1	1	0,5	0,475

	A	B	C	D	E
1					
2	Rechnung 1	df/dx=x	f(0)=0		
3	Schrittweite h	0,2			
4					
5	i	x_i	f'(x)	f(x) analytisch	f(x) numerisch
6	0	0	0	0	0
7	1	0,2	0,2	0,02	0
8	2	0,4	0,4	0,08	0,04
9	3	0,6	0,6	0,18	0,12
10	4	0,8	0,8	0,32	0,24
11	5	1	1	0,5	0,4

Abbildung 2.4: Darstellung der berechneten Lösung in Excel.

gegebenenfalls Anpassungen der hier verwendeten Formeln und Funktionen vorgenommen werden müssen.

In den Spalten werden in der Regel die verschiedenen Funktionen eingetragen, die Zeilen entsprechen einem Wert des Definitionsbereiches, sodass jede ausgefüllte Zelle einem bestimmten Funktionswert an einer bestimmten Stelle des Definitionsbereichs entspricht. Alle verwendeten Formeln werden konkret für die erste Zelle formuliert, welche keinen Randwert des jeweils gegebenen Problems darstellt, sodass Excel diese automatisch mit dem Ausfüllkästchen auf darauf folgende Zellen korrekt übertragen kann.

Eine sinnvolle Tabellenstruktur für das Problem

$$f' = \frac{df}{dx} = x \quad (2.10)$$

mit

$$f(0) = 0 \quad (2.11)$$

ist in Abbildung 2.4 dargestellt.

Zunächst wird die Schrittweite  $h$  im Feld  $B3$  mit dem Wert  $0,2$  festgelegt. Daraufhin werden in der Spalte  $A$  die Nummerierungen  $i$  der Stützstellen eingetragen. Mithilfe der Nummerierung und der Schrittweite kann in der Spalte  $B$  die gesuchte Position der  $i$ -ten Stützstelle auf der  $x$ -Achse ermittelt werden. Da  $x_0 = 0$  wird  $B6 = 0$  gesetzt, in die Zelle  $B7$  wird  $= A7 * B\$3$  eingetragen. Mit dem „\$“- Zeichen kann verhindert werden, dass Excel beim Übertragen der Formel auf weitere Einträge der Spalte

te den Bezug auf die Zelle  $B3$  verändert. In der Spalte  $C$  werden die Tangentensteigungen eingetragen, welche sich aus

$$f'(x_i) = x_i \quad (2.12)$$

ergeben. Somit kann für  $C6 = B6$  eingetragen werden. Da in diesem Problem die analytische Lösung der Differentialgleichung  $f(x) = 0,5x^2$  bekannt ist, bietet es sich an, die entsprechenden Funktionswerte ebenfalls zu ermitteln, um einen Vergleich mit der numerischen Lösung zu ermöglichen. Dazu wird in das Feld  $D6$

$$= 0,5 * B6^2 \quad (2.13)$$

eingetragen. In Spalte  $E$  können nun die numerisch genäherten Ergebnisse berechnet werden. In die Zelle  $E6$  wird zunächst der Startwert  $= 0$  eingegeben. Für die numerische Berechnung in den folgenden Zeilen muss Formel (2.5) in die Sprache von Excel übersetzt werden. Dabei gilt:

$$f(x_0) = E6 \quad (2.14)$$

$$f'(x_0) = C6 \quad (2.15)$$

$$(x_1 - x_0) = (B7 - B6) \quad (2.16)$$

Für  $E7$  wird somit

$$= E6 + C6 * (B7 - B6) \quad (2.17)$$

einggegeben. Um nun die Berechnung auf dem gesamten Intervall  $[0;1]$  durchzuführen, genügt es, die Zellen  $A7$  bis  $E7$  zu markieren und das Ausfüllkästchen per „drag and drop“ bis Zeile 11 zu ziehen. Das Ergebnis als Exceltabelle ist in Abbildung (2.4) zu sehen und zusätzlich als Diagramm visualisiert in Abbildung (2.3). Excel interpoliert dabei standardmäßig linear zwischen den Stützstellen.

### 2.1.3 Runge-Kutta-Verfahren

Bei genauerer Betrachtung des Tangentenverfahrens im vorangegangenen Beispiel wird schnell eine entscheidende Fehlerquelle deutlich. Da die Steigung zwischen  $x_i$  und  $x_{i+1}$  anwächst, erhält man bedingt durch

das Verfahren immer einen zu kleinen Funktionswert  $f(x_{i+1})$ . Bei großer Schrittweite bzw. Berechnung über große Intervalle hinweg summieren sich diese Rechenfehler schnell auf und können zu sehr schlechten Ergebnissen führen. Die Mathematiker Heun, Runge und Kutta haben zur Lösung dieser Problematik um das Jahr 1900 ein Verfahren veröffentlicht, welches durch die Verwendung von Informationen über die Steigung benachbarter Punkte, die Rechengenauigkeit enorm steigern kann. Man unterscheidet Runge-Kutta-Verfahren (RK) verschiedener Ordnungen, welche sich in erster Linie durch die Menge an zusätzlichen Informationen unterscheiden. So betrachtet das RK 2. Ordnung die Tangentensteigung an zwei Stellen, während das RK 4. Ordnung vier Tangentensteigungen miteinbezieht. Verfahren höherer Ordnung versprechen in der Regel eine höhere Genauigkeit, erfordern dafür jedoch mehr Rechenarbeit und Programmieraufwand. In der Praxis erweist sich das RK 4. Ordnung als guter Kompromiss, nachfolgend genügt uns aber die Betrachtung des Runge-Kutta-Verfahrens 2. Ordnung.

#### 2.1.4 Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung

Wie zuvor beschrieben, liefert das Tangentenverfahren nicht zwangsläufig die beste Näherung für einen benachbarten Funktionswert  $f(x_{i+1})$ . Wenn  $f'(x_{i+1}) > f'(x_i)$  folgt zwangsläufig aus dem Tangentenverfahren  $f(x_{i+1}) > f(x_i) + h \cdot f'(x_i)$ . Durch die Wahl einer etwas größeren Steigung sollte es möglich sein, die Approximation zu verbessern. Analog verbessert eine etwas kleinere Steigung die Approximation, falls  $f'(x_{i+1}) < f'(x_i)$  für alle  $x$  gilt. Auch wenn die Tangente lokal als bestapproximierende Gerade angesehen werden kann, zeigt dieses Beispiel, dass die Approximation in der Gesamtsicht verbessert werden kann, indem Informationen über die Steigung an einer oder mehreren benachbarten Stellen miteinbezogen werden. Dieses Prinzip kommt bei den sogenannten Runge-Kutta-Verfahren zur Anwendung. Die Runge-Kutta-Verfahren werden, abhängig von der Anzahl der einbezogenen Informationen in „Ordnungen“ eingeteilt. Das Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung verwendet die lokale Steigung sowie die Steigung der Funktion an einer benachbarten Stelle. An dieser Stelle wird lediglich die Rechenvorschrift aufgegriffen und auf Fachliteratur zur Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen verwiesen (z.B. [Rei08]). Approximiert man  $f(x_{i+1})$  durch eine Gerade

Tabelle 2.3: Vergleich der Wertetabelle der analytischen mit der numerischen Lösung unter Verwendung des Runge-Kutta-Verfahrens zweiter Ordnung bei einer Schrittweite von  $h = 0,2$ .

<b>i</b>	<b><math>x_i</math></b>	<b><math>f'(x_i)</math></b>	<b>f(x) numerisch</b>	<b>f(x) analytisch</b>
0	0	0	0	0
1	0,2	0,2	0,02	0,02
2	0,4	0,4	0,08	0,08
3	0,6	0,6	0,18	0,18
4	0,8	0,8	0,32	0,32
5	1	1	0,5	0,5

mit der Steigung  $\frac{f'(x_{i+1})+f'(x_i)}{2}$  so lässt sich zeigen, dass die Rechengenauigkeit gegenüber dem Euler'schen Tangentenverfahren deutlich gesteigert werden kann. Das Eulerverfahren

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n) \cdot h \quad (2.18)$$

wird beim Runge-Kutta-Verfahren modifiziert zu:

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + \left[ \frac{f'(x_{n+1}) + f'(x_n)}{2} \right] \cdot h \quad (2.19)$$

### Umsetzung mit Tabellenkalkulation

Um das Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung mit einer Tabellenkalkulationssoftware anzuwenden, kann eine vergleichbare Tabellenstruktur wie beim Tangentenverfahren erstellt werden. Die einzige notwendige Modifikation findet sich in der Zelle  $D7$ . Der dortige Eintrag muss durch

$$= D6 + 0,5 * (C6 + C7) * (B7 - B6) \quad (2.20)$$

ersetzt werden und auf die darunterliegenden Zeilen übertragen werden. Wendet man das Verfahren auf das erste Beispiel an, wird die Steigerung der Genauigkeit deutlich, wie in Tabelle 2.3 zu erkennen. Das Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung liefert den exakten Funktionswert an den Stützstellen. Bei komplexeren Problemen ist dies selbstverständlich nicht zwangsläufig der Fall.

## 2.2 Physikalische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die physikalischen Grundlagen der Theorie des inneren Aufbaus der Sterne in stark verkürzter Form dargestellt, um einen groben Überblick über den aktuellen Stand der Theorie zu geben. Der Aufbau dieses Abschnitts ist angelehnt an gängige Lehrbücher wie beispielsweise [KWW13] oder [Phi96]. Um die beobachtbaren Eigenschaften der Sterne erklären zu können, ist es notwendig, sich Gedanken über deren inneren Aufbau und die dort ablaufenden Prozesse zu machen. Eines der größten Probleme dabei ist sicherlich, dass dieser Bereich der Beobachtung weitgehend verborgen bleibt und wir lediglich das Licht (im Sinne von elektromagnetischer Strahlung) der äußersten Sternschichten als Hauptinformationsquelle nutzen können. Der Einblick in das Sterninnere wird durch Beobachtung von Neutrinos, die bei Fusionsprozessen im Sternzentrum freigesetzt werden und helioseismologische Untersuchungen der Sternoberfläche ermöglicht. Eine weitere Schwierigkeit stellt die Tatsache dar, dass aus messtechnischen Gründen nicht alle wichtigen Zustandsgrößen eines beliebigen Sterns bestimmt werden können. In der theoretischen Astrophysik versucht man deshalb auf Grundlage bekannter physikalischer Gesetze die wesentlichen Eigenschaften „denkbarer“ Sterne herauszuarbeiten und deren Aufbau zu bestimmen. Durch Astronomen gut vermessene Sterne, wie beispielsweise die Sonne, können dabei als Gütekriterium der theoretischen Modelle dienen.

Damit dies gelingen kann, muss geklärt werden, wie ein Stern chemisch zusammengesetzt ist, welche Zustandsgleichungen gelten, welche Kräfte wirken und wie sich der Stern thermodynamisch verhält.

Zu Beginn werden einige Annahmen gemacht, die die Behandlung des Problems enorm erleichtern:

- Sterne sind sphärisch symmetrische Objekte,
- die Rotation und Magnetfelder der Sterne werden außer Acht gelassen,
- Sterne ändern zwar im Laufe der Zeit ihre Eigenschaften, jedoch so langsam, dass man dies vernachlässigen kann.

Der erste Punkt erlaubt es alle Eigenschaften des Sterns in Abhängigkeit vom Abstand zum Mittelpunkt zu beschreiben, sodass der Sternaufbau ein eindimensionales Problem ergibt. Man kann einen Stern somit aus

vielen konzentrischen Kugelschalen zusammengesetzt beschreiben, innerhalb derer sämtliche physikalische Eigenschaften konstant sind.

Der zweite Punkt ist notwendige Voraussetzung für eine kugelsymmetrische Betrachtungsweise des Problems. Die Rotation hätte Einfluss auf die Masseverteilung, sodass der Stern in Äquatornähe den größten Durchmesser besäße, ähnlich wie es bei der Abplattung der Erde der Fall ist. Magnetfelder werden zunächst außer Acht gelassen, da diese nicht durch einfache Kugelsymmetrien beschrieben werden können.

Der dritte Punkt erlaubt es, die Zeitabhängigkeit in auftretenden partiellen Differentialgleichungen zu vernachlässigen, sodass nur noch gewöhnliche Differentialgleichungen auftreten, wodurch das Problem aus mathematischer Sicht wesentlich vereinfacht wird. Doch nicht nur aus mathematischer Sicht ist diese Annahme sinnvoll, aus der Alltagserfahrung weiß man, insbesondere von der Sonne, dass sich deren Eigenschaften über lange Zeiträume nicht merklich ändern.

## 2.2.1 Die Grundgleichungen

Zunächst werden die Differentialgleichungen angegeben, die den inneren Aufbau der Sterne beschreiben. Diese werden als Grundgleichungen bezeichnet.

### Die hydrostatische Grundgleichung

Auf jedes Masseelement wirken Gravitationskräfte, welche durch die restliche Sternmaterie hervorgerufen werden. Da sich der Stern im Gleichgewicht befinden soll, muss die Gravitationskraft, welche ein Masseelement zum Zentrum hin beschleunigt, kompensiert werden.

Dies kann durch einen Druckgradienten geschehen, sodass tieferliegende Gasmassen einen größeren Druck  $p_U$  auf ein Gaselement ausüben, als die darüber liegenden, die einen Druck  $p_O$  ausüben. Im Gleichgewichtsfall gilt:

$$F_G + p_O \cdot A = p_U \cdot A \quad (2.21)$$

$$\Leftrightarrow g \cdot dm + (p + dp) \cdot A = p \cdot A \quad (2.22)$$

$$\Leftrightarrow g \cdot \rho \cdot A \cdot dr = -dp \cdot A \quad (2.23)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dp}{dr} = -g \cdot \rho \quad (2.24)$$

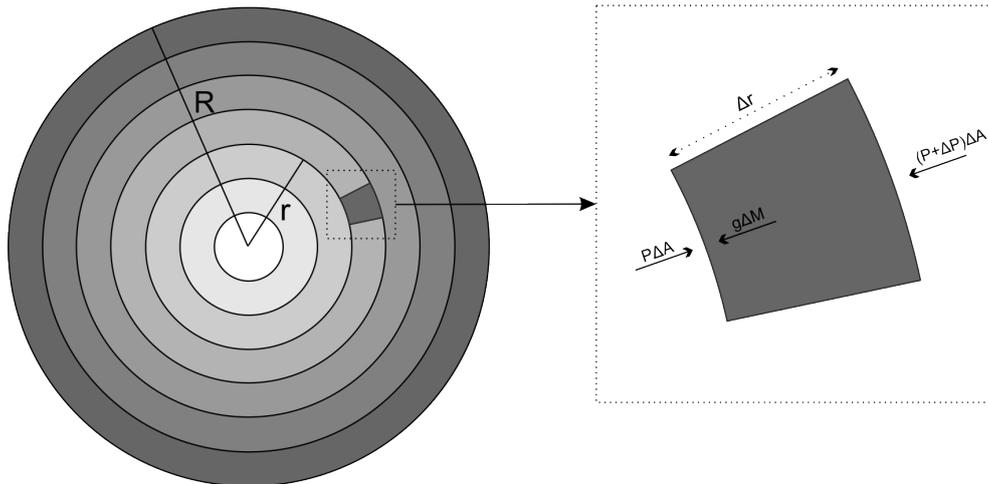


Abbildung 2.5: Ein Stern ist hydrostatisch stabil, wenn sich an jeder Stelle in seinem Inneren die nach Außen sowie die nach Innen wirkenden Kräfte aufheben, nach [Phi96, S. 6].

Diese Gleichung wird hydrostatische Grundgleichung genannt und stellt die erste Grundgleichung für den inneren Sternaufbau dar. Zur Ermittlung der Gravitationsbeschleunigung  $g$  muss das Newton'sche Gravitationsgesetz angewandt werden:

$$g(r) = G \cdot \frac{M(r)}{r^2}, \quad (2.25)$$

wobei  $M(r)$  die Masse beschreibt, die sich innerhalb einer Kugel mit dem Radius  $r$  befindet. Um die Arbeit mit dem Gravitationsgesetz zu erleichtern, werden zwei wichtige Aussagen verwendet, die im Sterninneren gelten.

- Eine Kugel mit Masse  $M$  und einer Dichteverteilung, welche nur vom Radius  $r$  abhängt, wirkt mit derselben Gravitationskraft auf eine Probemasse  $dM$ , wie eine punktförmige Masse  $M$  im Zentrum der eben genannten Kugel,
- im Inneren einer Kugelschale mit konstanter Dichte addieren sich die Gravitationskräfte zu Null.

Ein mathematischer Beweis der beiden Aussagen kann beispielsweise in [TMPB07, S.351-358] nachgelesen werden. Gleichung (2.25) kann nun in Gleichung (2.24) eingesetzt werden, sodass gilt:

$$\frac{dp}{dr} = -G \cdot \frac{M(r)}{r^2} \cdot \rho(r) \quad (2.26)$$

Diese Differentialgleichung kann nur gelöst werden, indem die unbekannt-ten Funktionen für  $M(r)$  und  $\rho(r)$  näher spezifiziert werden.

### Die Masseverteilung

Die Masseverteilung im Sterninneren wird üblicherweise durch eine Funktion  $M(r)$  beschrieben, welche angibt, wie viel Masse sich innerhalb einer Kugel mit dem Radius  $r$  befindet. Es gilt in Integralschreibweise

$$M(r) = \int_0^V \rho \, dV = \int_0^r 4\pi \rho r^2 \, dr = 4\pi \int_0^r \rho r^2 \, dr \quad (2.27)$$

Wobei die Dichte  $\rho$  eine zunächst unbekannt Funktion vom Radius ist. Diese Gleichung lässt sich ebenfalls in differentieller Schreibweise darstellen als

$$dM = 4\pi r^2 \rho dr \quad (2.28)$$

bzw.

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi \cdot \rho \cdot r^2 \quad (2.29)$$

Dies beschreibt, wie sich die Masse  $M(r)$  bei hinzufügen einer infinitesimal dünnen Kugelschale ändert. Die zuletzt genannte Gleichung ist die zweite Grundgleichung des inneren Sternaufbaus.

### 2.2.2 Zustandsgleichungen

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde der Druck als Stabilisationsmechanismus gegen die Schwerkraft betrachtet ohne zu klären, wodurch er aufgebracht wird. Dieser kann auf vielfältige Weise zustande kommen. Einen bedeutenden Beitrag dazu leistet sicherlich der Gasdruck der Sternmaterie, welcher sich in Hauptreihensternen durch das Gesetz des idealen Gases beschreiben lässt. Es gilt:

$$p \cdot V = nk_B T \quad (2.30)$$

Bei der Betrachtung des inneren Aufbaus der Sterne ist diese Darstellungsweise unvorteilhaft, da sie nicht die mittlere Teilchenmasse  $\mu$  enthält, welche für weiterführende Betrachtungen zwingend erforderlich ist. Bringt man in Gleichung (2.30) das Volumen  $V$  auf die rechte Seite und

ersetzt es durch den Ausdruck

$$V = \frac{M}{\rho} \quad (2.31)$$

folgt:

$$p = \frac{n\rho k_B T}{M} \quad (2.32)$$

Die Gesamtmasse  $M$  ergibt sich aus dem Produkt aus der mittleren Teilchenmasse  $\mu$  und der Teilchenanzahl  $n$ .

$$M = n \cdot \mu \quad (2.33)$$

Einsetzen in die obige Gleichung führt zu der gesuchten Gleichung:

$$p = \frac{\rho k_B T}{\mu} \quad (2.34)$$

Ein vollionisierter Stern der zu dem Anteil  $X$  aus Wasserstoff, dem Anteil  $Y$  aus Helium sowie dem Anteil  $Z$  aus schwereren Elementen besteht, besitzt die mittlere Teilchenmasse  $\mu$ :

$$\mu = \left[ \frac{1}{2} X m_p + \frac{3}{4} Y m_p + 2Z m_p \right]^{-1} \approx \frac{1}{2} \quad (2.35)$$

wobei  $\mu_p$  die Masse eines Protons ist. Die Koeffizienten ergeben sich wie folgt:

Ein ionisiertes Wasserstoffatom besteht aus einem Proton sowie einem Elektron, dessen Masse gegenüber dem Proton vernachlässigt werden kann. Die mittlere Teilchenmasse beträgt somit  $\frac{1}{2} m_p$ . Der Heliumkern besteht aus 2 Protonen und 2 Neutronen, welche in etwa dieselbe Masse besitzen, sowie 2 Elektronen. Die Masse von  $4m_p$  muss somit auf 3 Teilchen verteilt werden, sodass die mittlere Masse  $\frac{4}{3} m_p$  beträgt. Durch analoge Überlegung zu schwereren Elementen lässt sich zeigen, dass die mittlere Teilchenmasse für schwerere Elemente in etwa der zweifachen Protonenmasse entspricht.

Spätestens seit Entdeckung des Compton-Effektes ist bekannt, dass Photonen bei Stößen mit Materie Energie übertragen können und den Impuls

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (2.36)$$

besitzen. Bei den hohen Temperaturen in den zentralen Regionen, insbesondere bei schweren Sternen, kann deren Impuls der Photonen die Größenordnung des Impulses der Gasteilchen erreichen und teilweise sogar übersteigen. Somit kann der Strahlungsdruck der Photonen als Stabilisierungsmechanismus gegen die Schwerkraft keinesfalls vernachlässigt werden. Für einen schwarzen Körper ergibt sich der Strahlungsdruck zu

$$p_{Rad} = \frac{1}{3}aT^4 \quad (2.37)$$

mit der Temperatur  $T$  und der Konstanten  $a = 7,56 \cdot 10^{-16} \text{ J}/(\text{m}^3\text{K}^4)$ . Der Gesamtdruck ergibt sich aus der Summe des Gasdruckes und des Strahlungsdruckes:

$$p_{Ges} = p_{Gas} + p_{Rad} = \frac{k_B}{\mu\rho T} + \frac{1}{3}aT^4 \quad (2.38)$$

Da der Strahlungsdruck mit der vierten Potenz der Temperatur ansteigt, wird deutlich, dass dieser insbesondere in sehr heißen Sternen als Gegendruck an Bedeutung gewinnt.

Der Gegendruck in Weißen Zwergen oder Neutronensternen ist von quantenmechanischer Natur. In diesen Himmelskörpern befindet sich die Materie in einem Zustand von solch hoher Dichte, dass das Pauli-Prinzip zum Tragen kommt und einen Gegendruck erzeugt [Han14, S. 355]. Dieses besagt, dass eine Zelle des Phasenraumes  $(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$  mit dem Volumen

$$h^3 = dp_x dp_y dp_z dV \quad (2.39)$$

nicht mehr als zwei Elektronen enthalten darf. Eine Kugelschale im Phasenraum  $[p, p + dp]$  enthält  $\frac{4\pi p^2 dV}{h^3}$  solcher Phasenraumzellen und darf somit nicht mehr als  $\frac{8\pi p^2 dV}{h^3}$  Elektronen enthalten. Sind alle Phasenraumzellen bis zum Impuls  $p_f$  mit 2 Elektronen besetzt, alle darüber liegenden leer, so spricht man von Gas-Entartung. Entartung tritt aufgrund der geringeren Masse zunächst bei Elektronen auf, während dies für die restlichen Gasanteile noch nicht der Fall sein muss. Für entartetes Gas müssen zwei Fälle unterschieden werden, für die jeweils unterschiedliche Zustandsgleichungen gelten.

Man spricht bei einer Dichte  $\rho < 2 \cdot 10^6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  von nicht relativistischer Entartung. Es gilt:

$$p = K_1 \cdot \rho^{\frac{5}{3}} \quad (2.40)$$

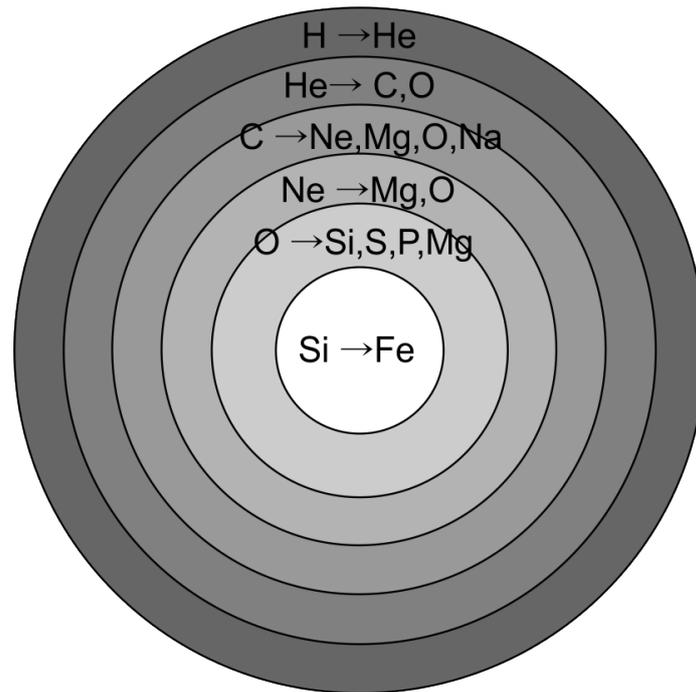


Abbildung 2.6: Schalenstruktur der Fusionszonen im Kern eines schweren Sterns mit mindestens 10 Sonnenmassen, nach [Sal08].

Man spricht bei einer Dichte  $\rho > 2 \cdot 10^6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  von relativistischer Entartung. Es gilt:

$$p = K_2 \cdot \rho^{\frac{4}{3}} \quad (2.41)$$

Die Konstanten  $K_1$  und  $K_2$  werden durch die chemische Zusammensetzung festgelegt. Auffällig ist, dass der Druck im Falle von Entartung nicht von der Temperatur abhängt.

### Die Energiefreisetzung

Eine fundamentale Eigenschaft von Sternen ist, dass es sich um selbstleuchtende Objekte handelt, die über eine endliche Energiequelle in ihrem Zentrum verfügen, sodass sie an ihrer Oberfläche gewaltige Energiemengen abstrahlen und diese Energieabgabe über sehr lange Zeiträume aufrecht erhalten können. Wie heute bekannt ist, wird die erforderliche Energie hauptsächlich durch die Fusion von Wasserstoff zu Helium bereitgestellt, bei massereichen Sternen kann die Fusion schwererer Elemente bis hin zu Eisen in einer schalenartigen Struktur des Kerns stattfinden, wie in Abbildung 2.6 dargestellt. Im Sterninneren wird durch Kernfusion Energie erzeugt und kann durch eine Funktion  $\epsilon(r)$  beschrieben werden, die die freigesetzte Leistung pro Kilogramm in Abhängigkeit vom Ab-

stand zum Zentrum angibt. Diese kann durch spätere kernphysikalische Überlegungen näher festgelegt werden. In einem Gleichgewichtszustand muss die gesamte Energie  $L(r)$ , die in einer Kugel mit Radius  $r$  freigesetzt wird, an ihrer Oberfläche abgegeben werden. Die Änderungsrate der Leuchtkraft kann somit beschrieben werden durch:

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi \cdot r^2 \rho(r) \epsilon(r) \quad (2.42)$$

### 2.2.3 Der Energietransportmechanismus

Die im Zentrum freigesetzte Energie kann nicht ungehindert an die Oberfläche gelangen. Es muss daher betrachtet werden, auf welche Weise die Energie nach außen transportiert wird. Dafür stehen drei verschiedene Mechanismen zur Verfügung:

- Wärmeleitung (Konduktion)
- Wärmestrahlung
- Massetransport (Konvektion)

Bei Weißen Zwergen stellt die Konduktion den dominierenden Transportmechanismus dar, bei Hauptreihensternen hingegen spielt er nahezu keine Rolle, daher wird auf diesen nicht näher eingegangen. Der Energiefluss pro  $m^2$  und Sekunde  $F(r)$  beträgt bei Wärmestrahlung

$$F_{rad}(r) = -\frac{4acT^3}{3\kappa_{rad}\rho} \cdot \frac{dT}{dr} \quad (2.43)$$

mit der Strahlungskonstanten  $a = 7,567 \cdot 10^{-16} \frac{\text{J}}{\text{m}^3\text{K}^4}$ , der Lichtgeschwindigkeit  $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , der Opazität  $\kappa_{rad}$ , die das Absorptionsvermögen des Sternmaterials für Strahlung beschreibt und der Temperatur  $T$ . Für den Energiefluss durch eine Kugelschale mit Radius  $r$  gilt somit:

$$L(r) = -4\pi r^2 \frac{4acT^3}{3\kappa_{rad}\rho} \cdot \frac{dT}{dr} = -\frac{16\pi a c r^2 T^3}{3\kappa_{rad}\rho} \cdot \frac{dT}{dr} \quad (2.44)$$

Wärmestrahlung tritt, wie auch Wärmeleitung, jederzeit im Sterninneren auf. In Regionen, in denen Konvektion auftritt, lässt sich diese jedoch in der Regel vernachlässigen.

### 2.2.4 Opazität

Die Opazität von Materie beschreibt, wie stark elektromagnetische Strahlung beim Durchlaufen absorbiert wird. Die nachfolgenden Mechanismen sind für diesen Effekt verantwortlich:

#### Elektronenstreuung

Elektronen im elektromagnetischen Feld eines Photons beginnen zu schwingen, sodass sich in Folge der Energieerhaltung die Energie des Photons reduziert. Infolge dessen wird elektromagnetische Strahlung beim Durchlaufen von Materie geschwächt. Der Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  für

$$\omega \gg \omega_0 \quad (2.45)$$

wird als der Thomson-Wirkungsquerschnitt bezeichnet und lässt sich bestimmen zu

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \cdot \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right)^2 = 6,65 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2 \quad (2.46)$$

Betrachtet man den Fall

$$\omega_0 \gg \omega \quad (2.47)$$

so lässt sich der Rayleigh-Wirkungsquerschnitt  $\sigma_R$  wie folgt ermitteln:

$$\sigma_R = \sigma_T \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \quad (2.48)$$

#### Frei-frei-Übergänge

Befindet sich ein freies Elektron in der Nähe eines Ions, sind diese gemeinsam in der Lage Strahlung zu absorbieren – jedes Teilchen für sich ist aufgrund der Energie- und Impulserhaltung dazu nicht in der Lage. Da sich die freien Elektronen im Sterninneren bedingt durch ihre Temperatur bewegen, ist die Zeit  $t$ , in der sie sich nahe genug an einem Ion befinden, antiproportional zu deren Geschwindigkeit  $v$ . Für die Geschwindigkeit gilt wiederum

$$v \propto T^{\frac{1}{2}} \quad (2.49)$$

sodass

$$t \propto \frac{1}{v} \propto T^{-\frac{1}{2}} \quad (2.50)$$

Der Prozess wird umso häufiger stattfinden, je mehr Teilchen vorhanden sind, sodass die Dichte der Materie  $\rho$  ebenfalls in Betracht gezogen werden muss. Für ein solches System leitete Kramer einen Absorptionskoeffizienten von  $Z^2\nu$  ab, wobei  $Z$  die Ladung und  $\nu$  die Frequenz der einfallenden Strahlung darstellt. Es gilt daher für die Opazität  $\kappa_\nu$

$$\kappa_\nu \propto Z^2 \rho T^{-\frac{1}{2}} \nu^{-3} \quad (2.51)$$

### Gebunden-frei-Übergänge

Bei gebunden-frei-Übergängen wird ein Atom ionisiert, indem ein gebundenes Elektron durch Absorption eines Photons aus der Hülle gelöst wird und somit zu einem freien Elektron mit der Geschwindigkeit  $v$  wird. Das Photon muss über genügend Energie  $h\nu$  verfügen, um die Bindungsenergie  $E_0$  zu überwinden, sodass gilt:

$$h\nu = E_0 + \frac{1}{2}m_e v^2 \quad (2.52)$$

Bei dem inversen Prozess, der Rekombination, nimmt ein positiv geladenes Ion ein freies Elektron auf und entsendet dabei ein Photon.

### 2.2.5 Energiequellen

Zum heutigen Zeitpunkt ist bekannt, dass chemische Prozesse, wie beispielsweise die klassische Verbrennung, nicht ausreichen, um die enorme Energiefreisetzung im Sterninneren erklären zu können. Die einzige Energiequelle, die in Frage kommt, ist die Fusion von leichten Elementen zu schwereren.

#### Thermonukleare Energieerzeugung

Verschmelzen leichte Atomkerne (mit geringerer Ordnungszahl als Eisen) der Massen  $M_i$  zu einem einzigen Kern, so ist dessen Gesamtmasse  $M$  etwas geringer als die Summe der Einzelmassen. Die Differenz  $\Delta M$  beträgt:

$$\Delta M = \sum M_i - M \quad (2.53)$$

Dieser Effekt wird als Massedefekt bezeichnet und ist der Ursprung der Energiefreisetzung, denn nach Einsteins berühmter Formel

$$E = mc^2 \quad (2.54)$$

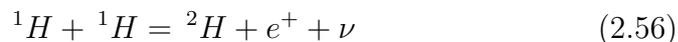
ist Masse äquivalent zu Energie. In unserem Fall gilt also für die freigesetzte Energie  $E$ :

$$E = \Delta Mc^2 \quad (2.55)$$

Als wichtigste Fusionsreaktionen in Hauptreihensternen ist die Fusion von Wasserstoff zu Helium zu nennen, was auf zwei wesentlich verschiedene Reaktionswege realisiert werden kann, der Proton-Proton-Reaktion sowie der CNO-Zyklus. Welche dieser Reaktionen dominierend ist, hängt im Wesentlichen von der Temperatur ab.

### Proton-Proton-Prozess

Im ersten Reaktionsschritt entstehen aus zwei Wasserstoffkernen  ${}^1H$  ein Deuteriumkern  ${}^2H$ , ein Positron  $e^+$  sowie ein Neutrino  $\nu$ :



Der Deuterium Kern  ${}^2H$  kann schließlich mit einem weiteren Wasserstoffkern  ${}^1H$  zu Helium  ${}^3He$  fusionieren, wobei Energie in Form von einem Photon  $\gamma$  freigesetzt wird:



Von hier an gibt es mehrere Reaktionswege, der einfachste stellt sich durch die Reaktion von zwei  ${}^3He$  Kernen zu Helium  ${}^4He$  und zwei Wasserstoffkernen  ${}^1H$  dar.

Die Energiefreisetzungsrates  $\epsilon$  beträgt hierbei:

$$\epsilon \propto \rho T^5 \quad (2.58)$$

### CNO-Zyklus

Als Voraussetzung für den CNO-Zyklus muss eine gewisse Menge an Kohlenstoff vorhanden sein, welche als Katalysator fungiert. Weiterer Kohlenstoff wird nicht erzeugt und der vorhandene Kohlenstoff nicht „ver-

braucht“.

In einem ersten Schritt fusioniert ein Wasserstoffkern  ${}^1H$  mit einem Kohlenstoffkern  ${}^{12}C$  zu einem Stickstoffkern  ${}^{13}N$  und einem Photon  $\gamma$ .



Der Stickstoffkern zerfällt schließlich zu einem Kohlenstoffkern  ${}^{13}C$ , einem Positron  $e^+$  sowie einem Neutrino  $\nu$



Der Kohlenstoffkern  ${}^{13}C$  reagiert weiterhin mit einem Wasserstoffkern  ${}^1H$  zu Stickstoff  ${}^{14}N$  und einem Photon  $\gamma$



Der so gewonnene Stickstoffkern  ${}^{14}N$  reagiert mit einem weiteren Wasserstoffkern  ${}^1H$  zu einem Sauerstoffkern  ${}^{15}O$ , unter Freisetzung eines Photons  $\gamma$ .



Der Sauerstoffkern kann nun zu einem Stickstoff Kern  ${}^{15}N$ , einem Positron  $e^+$  sowie einem Neutrino  $\nu$  zerfallen



Im letzten Reaktionsschritt des CNO-Zyklus wird der Stickstoffkern  ${}^{15}N$  mit einem Wasserstoffkern  ${}^1H$  zu einem Kohlenstoffkern  ${}^{12}C$  sowie einem Heliumkern  ${}^4He$  umgewandelt.



Auf diese Weise werden letztlich 4 Wasserstoffkerne  ${}^1H$  zu einem Heliumkern  ${}^4He$  umgewandelt, während der zu Beginn erforderliche Kohlenstoff  ${}^{12}C$  wieder freigesetzt wurde. Der Kohlenstoff wirkt hier wie ein Katalysator.

Die Energiefreisetzung beider Fusionsketten hängt stark von der Temperatur ab. Während die Proton-Proton-Kette bei etwa  $T = 10^7$  K den CNO-Zyklus übertrifft, gewinnt dieser bei noch größeren Temperaturen

die Oberhand.

### Folgereaktionen

Sofern der Wasserstoffvorrat im Zentrum verbraucht ist, kann keine Energie mehr freigesetzt werden und infolgedessen sinkt der Strahlungsdruck, sodass der Stern zu kontrahieren beginnt. Dabei heizt sich die Materie auf, bis sie schließlich heiß genug ist, um Helium zu Kohlenstoff bzw. Sauerstoff zu fusionieren. Die dabei freigesetzte Strahlung und der erhöhte Gasdruck wirken unterstützend gegen die eigene Schwerkraft, sodass die Kontraktion aufgehalten wird. Ist auch der Heliumvorrat irgendwann einmal aufgebraucht, beginnt die Kontraktion und Aufheizung erneut und ein neuer Fusionsprozess setzt ein. Dies kann solange fortgesetzt werden, bis schließlich Eisen erzeugt wird. Eisen stellt das erste Element dar, bei dem durch Kernfusion keine weitere Energie freigesetzt werden kann.

### 2.2.6 Randbedingungen

Um eine Lösung für die vier Differentialgleichungen (2.24), (2.26), (2.42) und (2.44) finden zu können, sind entsprechend vier Randbedingungen notwendig. Für zwei Gleichungen sind diese naheliegend:

Da sich in innerhalb einer Kugel mit Radius  $r = 0$  keine Masse befindet, kann angenommen werden, dass

$$M(r) = 0 \tag{2.65}$$

für  $r = 0$  gilt. Entsprechend wird dort auch keine Energie freigesetzt, sodass

$$L(r) = 0 \tag{2.66}$$

für  $r = 0$  gilt. Für den Druck und die Temperatur lassen sich ohne Weiteres keine Zentralwerte angeben, es müssen Werte für die Oberfläche angegeben werden. Es liegt ein Zusammenhang zwischen der Leuchtkraft des Sterns  $L$  und der effektiven Temperatur  $T_{eff}$  in Form des Stefan-Boltzmann'schen Gesetzes vor. Es gilt:

$$L(r) = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4 \tag{2.67}$$

Der Druck an der Oberfläche muss mit einem Atmosphärenmodell berechnet werden, was in dieser Arbeit jedoch nicht näher thematisiert wird, da das Sterninnere im Fokus stehen soll. Da der Druck in der Nähe der Oberfläche erheblich geringer sein wird als in zentralen Regionen, kann die Näherung

$$p(r) = 0 \quad (2.68)$$

für  $r = R$  dennoch gerechtfertigt werden.

### 2.2.7 Sternentwicklung

Aufgrund des Energieerhaltungssatzes können Sterne ihre Leuchtkraft nicht über beliebig lange Zeiträume aufrecht erhalten, da irgendwann die in ihr gespeicherte Energie aufgebraucht sein wird. Somit müssen sich Sterne zwangsläufig entwickeln. Darüber hinaus sorgen die kernphysikalischen Prozesse tief im Inneren dafür, dass sich die chemische Zusammensetzung des Sterns stetig verändert, was langfristig betrachtet starke Auswirkungen auf die Leuchtkraft hat. Kurzfristig gesehen kann das Einsetzen der Fusion schwererer Elemente die beobachtbaren Eigenschaften des Sterns schlagartig verändern. All diese Prozesse sorgen dafür, dass die Position eines Sterns im Hertzsprung-Russell-Diagramm im Laufe des Lebens nicht als fest angesehen werden kann, sondern diese im Diagramm eine bestimmte Entwicklungslinie beschreibt. Moderne Sternentwicklungsmodelle versuchen diesen Entwicklungspfad zu ermitteln. Im Wesentlichen unterscheidet man Entwicklungswege zwischen massearmen Sternen, Sternen mittlerer Masse, und massereichen Sternen, deren Entwicklung nun stark verkürzt dargestellt werden soll und den Ausführungen von Scholz folgt [Sch18, S. 564].

#### Rote Zwerge

Sterne, die lediglich eine Masse von etwa  $(0,1 - 0,7) M_{\odot}$  besitzen, gelten als Rote Zwerge. Gasmassen, die eine noch geringere Masse besitzen, können während ihrer Kontraktionsphase keine Zentraltemperaturen erzeugen, bei denen Wasserstoff fusionieren kann. Die Kontraktion wird durch die Entartung des Kerns aufgehalten.

Rote Zwerge sind nicht in der Lage, eine genügend hohe Temperatur im Zentrum zu erzeugen, um schwerere Elemente als Helium durch Kernfusion zu erzeugen. Die geringe Kerntemperatur führt zu Leuchtkräften,

die um ein Vielfaches geringer sind, als die der Sonne, sodass die Energievorräte bis zu mehreren Billionen Jahren ausreichen und somit das Alter des Universums von 14,6 Milliarden Jahren deutlich übersteigen. Es gibt daher noch keine Roten Zwerge, die das Endstadium erreicht haben. Bedingt durch den Fusionsprozess, der zu einer stetig ansteigenden mittleren Teilchenmasse führt, erhöht sich die Leuchtkraft im Laufe der Zeit. Die Position im Hertzsprung-Russell-Diagramm ist somit nicht fest, sondern der Stern beschreibt eine Entwicklungskurve.

### **Massearme Sterne**

Sterne mit einer Masse von  $(0,7 - 2,3) M_{\odot}$  – und somit auch die Sonne – zählen zu den massearmen Sternen. Die erste Lebensphase verläuft analog zu der von Roten Zwergen, jedoch verbrauchen sie den verfügbaren Wasserstoff erheblich schneller. Die Leuchtkraftzunahme bedingt durch die ansteigende mittlere Teilchenmasse macht sich stärker bemerkbar als bei Roten Zwergen, so war die Leuchtkraft der Sonne kurz nach ihrer Entstehung etwa 30 – 40 % geringer als heute.

Während die Wasserstoffvorräte zuneige gehen, sinkt der Zentraldruck, der Kern des Sterns kontrahiert und beginnt sich zu erhitzen und die Hülle bläht sich auf, der Stern entwickelt sich zu einem Roten Riesen. Irgendwann erreicht der Kern eine genügend hohe Temperatur, sodass die Fusion von Helium zu Kohlenstoff einsetzen kann. Dies geschieht schlagartig durch den sogenannten Heliumflash, bei dem sich die Energiefreisetzung für kurze Zeit massiv erhöht, was aber keine Auswirkungen auf der Sternoberfläche zeigt. Die freigesetzte Energie wird konvektiv auf die Sternhülle verteilt. Anschließend ist eine starke Kontraktion an der Oberfläche zu verzeichnen und es stellt sich ein erneuter Gleichgewichtszustand ein. In diesem Stadium verbleibt der Stern solange, bis auch die Heliumvorräte aufgebraucht sind, was erheblich schneller vonstatten geht, als bei den Wasserstoffvorräten. Schließlich endet die Entwicklung – übrig bleibt ein Weißer Zwerg.

### **Sterne mittlerer Masse und massereiche Sterne**

Sterne mittlerer Masse besitzen eine Masse von  $(2,3 - 8) M_{\odot}$ , der massereichste bekannte Stern besitzt eine Masse von  $265 M_{\odot}$ . Beide besitzen erheblich größere Leuchtkräfte als massearme Sterne, sodass sie ihre

gesamten Energievorräte innerhalb von einigen Millionen Jahren aufgebraucht haben. Sie können, abhängig von ihrer Masse, durch Kontraktion Temperaturen im Zentrum erzeugen, die genügen, um noch weitere Fusionsphasen im Kern zu zünden:

Wasserstoff  $\rightarrow$  Helium  $\rightarrow$  Kohlenstoff  $\rightarrow$  Neon  $\rightarrow$  Sauerstoff  $\rightarrow$  Silizium  
 $\rightarrow$  Eisen

Eisen ist das schwerste Element, welches durch Fusion erzeugt werden kann – bei gleichzeitiger Energiefreisetzung. Die Fusion noch schwererer Elemente verbraucht Energie und es kann kein Gegendruck aufgebaut werden, um den Stern gegen den Kollaps zu stabilisieren, es kommt zu einer Supernova. Abhängig von der Masse des übrig gebliebenen Kerns handelt es sich hierbei um einen Neutronenstern ( $1,44 - 3,2$ )  $M_{\odot}$  oder, bei noch größerer Masse, um ein Schwarzes Loch. Neutronensterne besitzen eine solch hohe Dichte, dass die Elektronen in die Protonen gepresst werden und in Neutronen umgewandelt werden. Diese erzeugen aufgrund des Pauliprinzips einen genügend großen Druck, um nicht zu kollabieren. Sie besitzen lediglich einen Durchmesser von wenigen Kilometern. Wird eine Grenzmasse von ca.  $3,2 M_{\odot}$  überschritten, ist kein weiterer Stabilisierungsmechanismus bekannt, um den Kollaps zu einem Schwarzen Loch zu verhindern.

# Kapitel 3

## Modul A - Hinführung zu Sternmodellen

### 3.1 Erkenntnistheoretische Überlegungen und wissenschaftshistorische Einordnung

Ein Blick in die gängige Fachliteratur zum inneren Aufbau der Sterne zeigt, dass heutzutage wie selbstverständlich davon ausgegangen wird, dass sich die Sonnenmaterie und auch die der Hauptreihensterne wie ein Gas verhält und zu einem Großteil aus Wasserstoff besteht. So schreibt Weigert:

„Von wenigen extremen Ausnahmen abgesehen, ist die Materie im Sterninneren gasförmig; man hat also Gaskugeln zu betrachten.“ [WW89, S. 153]

Die Gleichungen, die den inneren Aufbau beschreiben, werden als weitestgehend abgeschlossene Theorie zunächst theoretisch hergeleitet und deren Lösungen ausgiebig thematisiert. Für ein Lehrbuch mag dieses Vorgehen durchaus legitim sein, da eine effiziente Vermittlung des aktuellen Forschungsstandes im Vordergrund steht. Um ein tiefgehendes Verständnis für eine Theorie entwickeln zu können, reicht dies jedoch nicht aus. Erst durch eine Betrachtung der Geschichte einer Theorie wird deutlich, dass viele Annahmen keineswegs trivial sind und dass das Ringen vieler kluger Köpfe über mehrere Jahrzehnte hinweg erforderlich war, um sie hervorzubringen. Hieraus ergibt sich auch die Gelegenheit sich mit historischer Kritik auseinanderzusetzen und darzulegen, wie bestehende

Zweifel ausgeräumt wurden, sodass sich die heute als erfolgreich geltende Theorie letztendlich gegen konkurrierende Modellvorstellungen als die Bessere durchgesetzt hat. Die Thematisierung der Geschichte des inneren Aufbaus der Sterne stellt in dieser Arbeit somit weit mehr als schmückendes Beiwerk dar, wie es auch der Physiker und Physikhistoriker Friedrich Hund allgemein für die Physik sieht:

„Man lernt Physik meist aus einem Lehrbuch, das auf kurzem Weg das für richtig gehaltene Wissen plausibel macht oder nur systematisch darstellt. Der Leser gewöhnt sich so an die Begriffe und an die Sätze [. . .]. So haben sich zum Beispiel die Physiker daran gewöhnt, dass das Licht auf elektromagnetischen Wellen beruht, dass die Wärme eine Energieform ist [. . .]. Die Gründe dafür, die Zweifel daran und viele Schwierigkeiten, die eine solche Vorstellung bot, werden nicht mehr diskutiert. So werden auch die grundlegenden Begriffe der Physik nicht mehr voll verstanden.“ [Hun72, S. 11]

Die frühen Sternmodelle konnten über die chemische Zusammensetzung sowie den Zustand der Sonnenmaterie nur mutmaßen, da weder die Beobachtungstechniken verfügbar, noch die physikalischen Theorien weit genug entwickelt waren, um eine letzte Entscheidung darüber zu treffen. Die ersten Modelle dienten ohnehin dem Zweck, direkt beobachtbare Phänomene wie Sonnenflecken zu beschreiben und zu erklären, sodass das Sterninnere zunächst von geringerem wissenschaftlichen Interesse war. Aus der historischen Perspektive soll herausgestellt werden, warum eine Theorie des Sterninneren wissenschaftlich notwendig wurde und diskutiert werden, wie zuverlässig Aussagen zum Sterninneren überhaupt sein können. Eine messtechnische Untersuchung des Sterninneren z.B. mithilfe von Sonden ist schließlich nicht möglich. Lernende sollen an das Thema herangeführt werden, um erste Erfahrungen mit Sternmodellen zu sammeln. Im Vordergrund sollen dabei einfache Modelle stehen, mit denen Mittelwerte von Zustandsgrößen bestimmt, sowie Zentralwerte des Sterns abgeschätzt werden können. Des Weiteren müssen grundlegende Zusammenhänge zwischen Zustandsgrößen hergeleitet werden. Im Anschluss werden dann erste Modelle entwickelt, mit denen die Verläufe von Zustandsgrößen vom Zentrum bis hin zur Oberfläche berechnet werden können und die Resultate schließlich kritisch betrachtet. Hier stehen

didaktische Überlegungen im Vordergrund sowie die Überprüfung auf physikalische Richtigkeit der Ansätze und Resultate. In den Vorüberlegungen dieses Lernmoduls werden insbesondere die Gedankengänge dargestellt, die vor der Entwicklung der ersten Gaskugelmodelle notwendig waren. Man sollte sich nicht täuschen: erkenntnistheoretische Grundüberlegungen sind für das Erstellen von Theorien über Objekte, die in jeglicher Hinsicht außerhalb des Einflussbereichs irdischer Physik liegen, nicht zu vernachlässigen. Andernfalls könnten Lernende die technische Handhabung mathematisch-physikalischer Modelle lediglich im Sinne eines Handwerks auffassen, ohne sich dabei darüber im Klaren zu sein, auf welchen grundlegenden Annahmen ihr Vorgehen eigentlich beruht.

In den Vorüberlegungen des Moduls werden insbesondere solche Gedankengänge dargestellt, die vor der Entwicklung der ersten Gaskugelmodelle notwendig waren. Dazu zählen:

- Grundannahmen über astrophysikalische Modelle
- Überprüfbarkeit der Modellannahmen in der Himmelskunde
- Die Sonne als Objekt aus idealem Gas
- Der Aggregatzustand der Sonnenmaterie und die Notwendigkeit der Betrachtung des Sonneninneren
- Das Alter der Sonne und die Sternentwicklung

### 3.1.1 Grundannahmen astrophysikalischer Modelle

Allen astrophysikalischen Modellen liegt die Annahme zugrunde, dass alle Naturgesetze im gesamten Universum ihre Gültigkeit besitzen. Dies ermöglicht es, in Laborexperimenten gewonnene Gesetze im Rahmen ihres Gültigkeitsbereiches auf Sterne zu übertragen, um diese zu erforschen. Bis dieser, heute anscheinend sehr naheliegende Gedanke, in der Wissenschaft Akzeptanz gefunden hat, bedurfte allerdings einer jahrtausende langen Entwicklung unseres Verständnisses der Welt.

Aus der Antike stammt die Elemente-Theorie des Aristoteles (384 - 322 v. Chr.): Ihr zufolge steht die Erde im Mittelpunkt der Welt und alle sich auf ihr befindlichen Dinge bestehen aus den vier Elementen Erde, Feuer, Wasser oder Luft. Jedes Element hat das Bestreben zu seinem natürlichen Ort zu gelangen und bewegt sich geradlinig dorthin. Alle Objekte

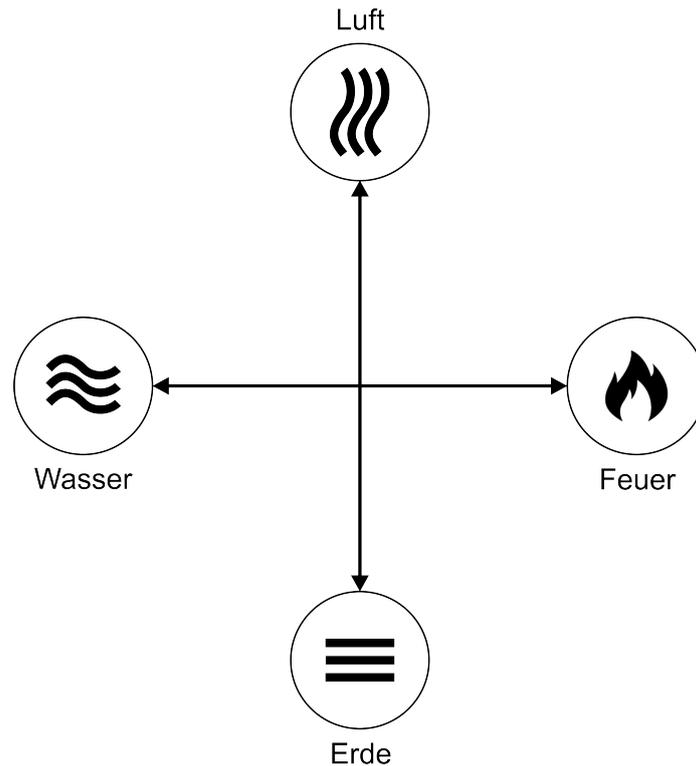


Abbildung 3.1: Symbolische Darstellung der Elemente-Theorie von Aristoteles.

des Elements Erde streben zum Boden hin, das Feuer steigt nach oben während Wasser und Luft sich horizontal verteilen. Außerhalb der Erde befinden sich mehrere Sphären, auf denen die Planeten und Sterne angeordnet sind. Diese Schalen rotieren um die Erde, sodass ihnen die Kreisbewegung als natürlicher Bewegungszustand innewohnt (siehe [Ham06, S. 32 - 34]). Im translunaren Bereich wurde das kosmische Element Äther verortet, dessen Eigenschaften sich prinzipiell von denen irdischer Elemente unterscheiden sollten. Diese Weltvorstellung fand im Mittelalter große Verbreitung, einerseits weil sie viele alltägliche Phänomene gut beschrieb, andererseits weil sie von der einflussreichen katholischen Kirche als zentrales Lehrdogma verbreitet wurde. Eine entscheidende Folgerung des aristotelischen Modells ist, dass für Himmelsobjekte grundlegend verschiedene Naturgesetze gelten als für Objekte auf der Erde. Ein Forscher, der Naturgesetze im Labor erforscht, kann seine gewonnenen Erkenntnisse demnach nicht auf die Himmelsobjekte übertragen, denn die Elemente Erde, Feuer, Wasser und Luft verhalten sich naturgemäß anders als der Äther. Die Entwicklung von Sternmodellen, so wie in dieser Arbeit vorgeschlagen, wäre auf Grundlage dieser Weltvorstellung von vornherein

zum Scheitern verurteilt.

Die historische Darstellung der Entwicklung der Weltmodelle soll an dieser Stelle keine zentrale Rolle spielen. Es muss aber darauf hingewiesen werden, dass es erst Newton (1642-1726) gelungen ist, Gleichungen zu formulieren, die sowohl die Bewegungen von Körpern auf der Erde, wie auch im All beschreiben. Der Erfolg seiner Theorie zeigte sich unter anderem in der Entdeckung des Planeten Neptun, dessen Existenz in himmelsmechanischen Berechnungen theoretisch angenommen werden musste, um die Störungen in der Bahn des Uranus erklären zu können. Durch solche bedeutsamen, herausragenden Ereignisse – erwähnt sei ferner die Vorhersage des Halley’schen Kometen oder die himmelsmechanische Behandlung der Mondbewegung durch Laplace – wurde eindringlich gezeigt, dass die Erde und der Himmel keine getrennt voneinander existierenden Systeme sind und diese sich mit ein und derselben Theorie beschreiben lassen. Erkenntnisse, die auf der Erde gewonnen wurden, können auf das Universum übertragen werden und umgekehrt. Das 19. Jahrhundert brachte schließlich die Einsicht, dass diese Aussage nicht nur auf mechanische Vorgänge zutrifft, sondern vielmehr auch alle anderen Naturgesetze, also thermodynamische, elektrodynamische etc., diese „Übertragungsregel“ befolgen.

### 3.1.2 Überprüfbarkeit der Modellannahmen in der Himmelskunde

Zu den wichtigsten Erkenntnismethoden der Physik zählt die experimentelle Methode. Im Rahmen dieser Methode werden zu erforschende Naturzusammenhänge durch Modellvorstellungen in einen gewissen theoretischen Rahmen eingebettet. Aus diesem Vorgehen ergeben sich experimentell prüfbare Vorhersagen, die dann durch entsprechende Labormessungen falsifiziert werden müssen. Weichen die experimentellen Ergebnisse allerdings zu stark von den theoretisch vorhergesagten Befunden ab, so muss die Theorie adaptiert oder verworfen werden. Natürlich handelt es sich bei dieser kurzen Darstellung der experimentellen Methode nur um eine holzschnittartige Zusammenfassung, an der man das für uns wesentlich aber dennoch erkennen kann: Physikalisches Arbeiten bedeutet unbedingt auch Manipulation am Forschungsobjekt. Auf die Sonne oder andere Sterne lässt sich dieser Ansatz augenscheinlich nicht übertragen,

da eine experimentelle Überprüfbarkeit nicht ohne Weiteres gegeben ist – und dies gleich in zweifacher Hinsicht. Erstens kann man sich aufgrund der Abmessungen mit Objekten wie Sternen in keinem Labor experimentieren, zweitens sind uns die allermeisten Regionen im Inneren der Sterne prinzipiell nicht zugänglich, ebenso wenig wie man eine Millisekunde nach dem Urknall eine experimentelle Erfassung von Daten zur Entstehung des Universums durchführen könnte. Wir sind auf die Informationen angewiesen, die uns die Himmelskörper von ganz alleine „übermitteln“, auch wenn es immer wieder überraschende Wendungen im Hinblick auf experimentelle Zugänglichkeit kosmischer Phänomene gibt:

- Durch die Beobachtung von Neutrinos, die im Zentrum der Sonne freigesetzt werden, ist man heute in der Lage, die Fusionsprozesse im Zentrum direkt zu untersuchen. Dieser Zugang war vor wenigen Jahrzehnten undenkbar.
- Durch aufwändige Beobachtung und Analyse von Schwingungen der Sonnenoberfläche lässt sich mit der sogenannten Helioseismologie auf Zustandsgrößen im Sterninneren schließen. Auch diese Forschungsmöglichkeit besteht erst seit relativ kurzer Zeit.

Interessanterweise waren die Wissenschaftler in der Lage, sich die innere Struktur der Sterne zu erschließen, noch bevor diese Methoden bekannt waren. Das Vertrauen in die Vorhersagekraft der Sternmodelle ging zum Ende des letzten Jahrhunderts sogar so weit, dass starke Abweichungen im später beobachteten Neutrinofluss nicht zu einer Überarbeitung des Standardmodells zum Sonneninneren, sondern zu fundamentalen Änderungen im Verständnis der Elementarteilchenphysik führte. Eine Berechtigung für ein solches „Grundvertrauen“ lässt sich zwar rein logisch nicht geben, es resultiert aber aus der Tatsache, dass eine einfache und formal elegante Theorie in der Lage war, korrekt das wesentliche Verhalten der Sonne zu beschreiben.

### **3.1.3 Die Sonne als Objekt aus idealem Gas**

Die Modellvorstellung des idealen Gases legt zugrunde, dass die Teilchen als punktförmige Objekte angesehen werden können, dass also die das Gas konstituierenden Teilchen kein Volumen (oder nur ein sehr geringes Volumen) im Vergleich zum Gasvolumen einnehmen. Bei der hohen

mittleren Dichte der Sonne, welche mit  $1400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  größer als die Dichte von Wasser ist, kann man durchaus skeptisch werden, ob das ideale Gas den Zustand der Sonne angemessen beschreibt. Die Gültigkeit der Gleichung des idealen Gases

$$p \cdot V = n \cdot k_B \cdot T \quad (3.1)$$

lässt sich überprüfen, indem das Gesamtvolumen der vorliegenden Gasteilchen mit dem zur Verfügung stehenden Volumen, also dem Volumen der Sonne, verglichen wird. Dazu muss eine chemische Zusammensetzung angenommen werden. Wird der Einfachheit halber postuliert, die Sonne bestünde ausschließlich aus Wasserstoff, folgt daraus, dass etwa 43% des Volumens der Sonne durch die Wasserstoffatome eingenommen wird.<sup>1</sup> Das Modell des idealen Gases wäre somit tatsächlich keine gute Näherung. Die Annahme einer realistischeren chemischen Zusammensetzung ändert wenig daran, dass die Punktförmigkeit der Gasteilchen auf diese Weise nicht gerechtfertigt werden kann.

Bei der vorangegangenen Überlegung hat sich jedoch ein grundlegender Fehler eingeschlichen: Unter den extremen Bedingungen im Sterninneren ist der Wasserstoff weitestgehend ionisiert, d.h. die Elektronen der Atomhülle sind nicht mehr an den Kern gebunden, wodurch sich der effektive Radius der vorhandenen Teilchen etwa um den Faktor 10000 verringert. Das Gesamtvolumen der Gasteilchen (Protonen und Elektronen) ist nun im Vergleich zum Volumen der Sonne vernachlässigbar klein und die Gleichung des idealen Gases anwendbar.<sup>2</sup>

Zu Zeiten der frühen Sternmodelle konnte das Verhalten von Materie unter den Bedingungen, wie sie in der Sonne und anderen Sternen vorherrschen, noch nicht verstanden werden. Dazu waren zunächst die Entwicklung der Quantenmechanik ab Beginn des 20. Jahrhunderts und thermodynamische Erkenntnisse zum Verhalten von Gasen und Flüssigkeiten unter hohen Drücken und Temperaturen notwendig. Nach dem wissenschaftlichen Kenntnisstand Ende des 19. Jahrhunderts verwundert es demnach nicht, dass die Sonne zunächst nicht als Gaskugel, insbesondere nicht als Kugel, die aus idealem Gas besteht, angesehen wurde.

---

<sup>1</sup>Die Rechnung wird in 3.2.2 durchgeführt.

<sup>2</sup>Die mittlere Masse der vorliegenden Teilchen muss streng genommen zusätzlich halbiert werden, da nun der Mittelwert aus der Masse des Elektrons und des Kerns gebildet werden muss. Dies wurde jedoch hier außer Acht gelassen.

### 3.1.4 Der Aggregatzustand der Sonnenmaterie Teil 1 und die Notwendigkeit der Betrachtung des Sonneninneren

Vor der Entdeckung der Spektralanalyse war der Zustand der Materie im Sterninneren noch weitgehend unerforscht. Winnecke [Win61] beschreibt unser Zentralgestirn 1861 in seiner Publikation „Über die Sonne“ als dunklen kühlen Himmelskörper, der von einer selbstleuchtenden und einer nicht selbstleuchtenden Wolkendecke umhüllt ist. Mit dieser Modellvorstellung war es ihm möglich, beobachtbare Phänomene der Sonnenflecken zu erklären. Durch bessere Beobachtungsmethoden geriet dieses Modell in Kritik:

Der Physiker Gustav Robert Kirchhoff konnte Winneckes Modell mithilfe seines Strahlungsgesetzes widerlegen. Er wies nach, dass der kühle innere Kern durch die heiße äußere Schicht selbst auf deren Temperatur gebracht werden müsste. Kirchhoff formulierte ein eigenes Sonnenmodell, welches er auf Grundlage folgender spektroskopischer Erkenntnisse aufbaute:

- Ein selbstleuchtender flüssiger oder fester undurchsichtiger Körper emittiert ein kontinuierliches Spektrum (Planckspektrum).
- Ein selbstleuchtendes Gas relativ niedriger Temperatur unter niedrigem Druck emittiert ein charakteristisches diskretes Spektrum. Dieses kann ein schwaches kontinuierliches Spektrum einer anderen Quelle überlagern.
- Wird weißes Licht durch ein Gas gesendet, so werden bestimmte Wellenlängen absorbiert und dadurch im Spaltspektrum eines Spektralapparates dunkle Absorptionslinien hervorgerufen.

Die spektroskopische Untersuchung der Sonne zeigt näherungsweise ein Planckspektrum, in dem mehrere Absorptionslinien erkennbar sind. Da seinerzeit bekannt war, dass nur glühende Festkörper und Flüssigkeiten ein solches Spektrum emittieren, nahm Kirchhoff an, der Zentralkörper müsse sich in einem dieser Aggregatzustände befinden. Es war seinerzeit kein Mechanismus bekannt, mit dem ein Gas ein kontinuierliches Spektrum hervorbringen könnte, sodass er einen zentralen Gaskörper ausschließen musste (Heutzutage wissen wir, dass dies durchaus möglich ist und bei der Sonne auch der Fall ist). Aufgrund der Absorptionslinien

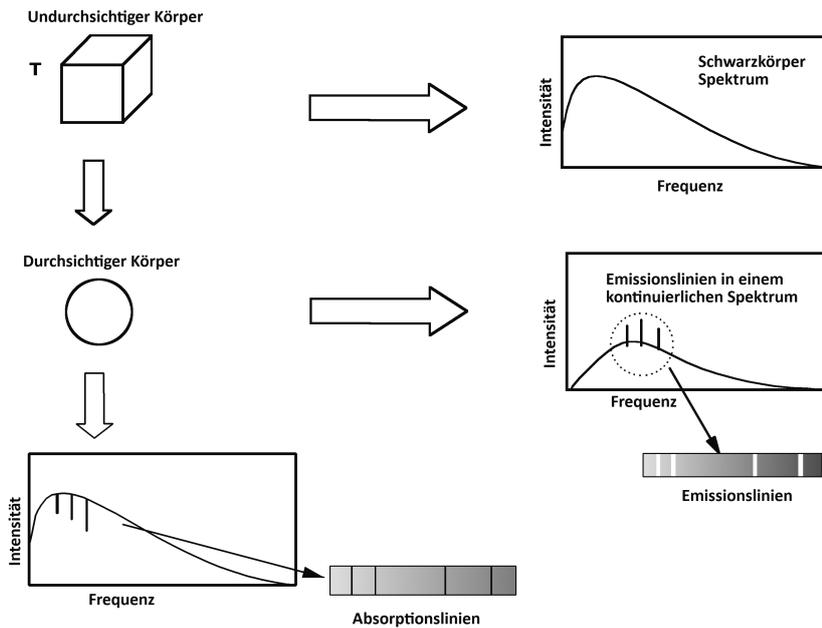


Abbildung 3.2: Das Kirchhoff'sche Strahlungsgesetz, nach [Sri11, S. 39].

schloss er, dass der zentrale Körper von einer Gasschicht umgeben sein sollte. Spektroskopische Untersuchungen von Protuberanzen zeigten dort Emissionslinien im Spektrum, wo im Sonnenspektrum Absorptionslinien zu sehen waren, was der Vorstellung seines Modells entsprach. Um die Sonnenflecken zu beschreiben, legte er Wolkenbildungsprozesse mit analogen Überlegungen zur Erdatmosphäre zugrunde. Auch wenn sich sein Modell nicht durchsetzen konnte, nutzte er bereits die Werkzeuge, die die Grundlage für spätere Sternmodelle bildeten:

- Analogien zur Erdatmosphäre,
- das Strahlungsgesetz,
- die Spektralanalyse.

Mit besseren Beobachtungstechniken konnten immer mehr Phänomene auf der Sonnenoberfläche beobachtet werden und es wurde dementsprechend eine Vielzahl an Modellen entwickelt, um diese Einzelphänomene zu erklären. Dabei stellte sich heraus, dass diese nicht in Einklang mit anderen beobachtbaren Phänomenen zu bringen waren. Die Sonnenforschung geriet dadurch in den 1880er und 90er Jahren in Verruf. J. Fényi schrieb dazu:

„Bekanntlich schwebt über der Natur unseres Zentralkörpers noch das größte Dunkel und dieser uns nächste Fixstern bietet wenig Aufschlüsse, aber viele Rätsel dar. Unwidersprechlich stehen die Erscheinungen vor uns, aber ihre versuchten Deutungen sind voll Widerspruch. Die neuesten Theorien machen den Eindruck der Verzweiflung, welche aus ausgesuchten Wegen den Schwierigkeiten auszuweichen sucht ... Sonnentheorien pflegen mit größten Mißtrauen aufgenommen zu werden .... “[Fén96, S. 289]

Einigen Wissenschaftlern wurde klar, dass zum theoretischen Verstehen der Erscheinungen auf der Sonnenoberfläche Prozesse im Sonneninneren betrachtet werden müssen. Ein direkter Schluss von der Beobachtung zu einer Theorie der inneren Struktur der Sonne ist jedoch unmöglich. Es etablierte sich der Ansatz eines deduktiven Schließens von allgemeingültigen Gesetzen, wie z.B. der Energieerhaltung, um etwas über die innere Struktur der Sonne zu lernen. Bis ein Sonnenmodell entwickelt wurde, welches an der Beobachtung gemessen werden konnte, vergingen mehrere Jahrzehnte intensiver Forschung.

Die wichtigsten Meilensteine auf dem Weg dorthin sollen in den Modulen B und C thematisiert und die Diskussion um den Aggregatzustand der Sonne weitergeführt werden. Dies wird auch zu entscheidenden Erkenntnissen darüber führen, warum wir die Sonne als Objekt aus idealem Gas ansehen müssen.

### **3.1.5 Alter der Sonne und die Sternentwicklung**

Aktuelle Sternmodelle beinhalten neben den Gleichungen des inneren Aufbaus in der Regel auch die zeitliche Entwicklung der Struktur des Sterns. Das vom Stern ausgesandte Licht wird durch Kernfusion im Zentrum des Sterns freigesetzt, wodurch sich seine chemische Zusammensetzung ändert. Der Stern entwickelt sich.

Die Vorgänge tief im Sterninneren und deren Konsequenzen für die Lebensgeschichte waren zum Ende des 19. Jahrhunderts noch weitgehend unerforscht. Dennoch haben Überlegungen zur Entwicklung der Sonne im Zusammenhang mit der Energiefreisetzung schon seit Anbeginn der Sonnenforschung eine zentrale Rolle für die Modellüberlegungen gespielt. Da Sterne gewaltige Mengen Energie in Form von elektromagnetischer

Strahlung ins All aussenden, jedoch nahezu keine Energie von außen aufnehmen, können sie dies nach dem Energieerhaltungssatz nur für eine endliche Zeit tun, da jeder Körper nur über begrenzte Energievorräte verfügt. Sterne können somit nur für eine bestimmte Zeit in ihrem aktuellen Zustand verharren. Um zu zeigen, dass sich Sterne entwickeln, genügen somit bereits einfache Überlegungen zum Energieerhaltungssatz, bei der eine genaue Betrachtung des Sterninneren nicht erforderlich ist. Von besonderem Interesse ist die Frage, wie lange die Sonne ihre Leuchtkraft aufrecht erhalten kann und mit welchen Mechanismen die Energiefreisetzung stattfindet.

Hermann von Helmholtz stellte in seinem Werk „Über die Erhaltung der Kraft“ [Hel47] die Hypothese auf, die Sonne kontrahiere im Laufe der Zeit und wandle dabei durch Kontraktionsarbeit potentielle Energie in Wärme um und schätzte auf dieser Grundlage ab, dass die Sonne vor 20.000.000 Jahren entstanden sein müsste. Keine bekannte irdische Quelle konnte eine vergleichbare Energiemenge bereitstellen, da die meisten chemischen Energiequellen die Leuchtkraft der Sonne nur für wenige tausend Jahre aufrechterhalten würden. Die Hypothese wurde zusätzlich dadurch gestützt, dass die für die Energiefreisetzung erforderliche Radiusänderung äußerst gering und durch astronomische Beobachtungen nicht nachweisbar sein sollte. Lord Kelvin, ein starker Verfechter der Kontraktionshypothese, ergänzte diese um weitere Annahmen. Bedingt durch die hohe Dichte der Sonne sei anzunehmen, dass die Sonne nicht weiter kontrahieren könne und nunmehr langsam abkühlen würde. Er berechnete, dass die in ihr gespeicherte Wärme genügen müsste, um die Erde noch für mehrere Millionen Jahre mit Energie zu versorgen.

Es gab jedoch geologische Hinweise darauf, dass das Alter der Erde und somit auch das der Sonne, deutlich höher sein müsse als Helmholtz' Berechnungen nahelegten. Charles Darwin ermittelte 1859 ein Alter des Weald, einer Waldgegend in England, von 300 Millionen Jahren, John Phillips, ein Geologieprofessor aus Oxford schätzte aus Daten der Sedimente im Ganges-Becken das Alter der Erdkruste auf 96 Millionen Jahre. [Whi07, S. 1 - 5].

Diesen geologischen Untersuchungen widersprach Lord Kelvin jedoch klar:

„What then are we to think of such geological estimates as 300,000,000 years for the „denudation of the Weald“? Whether is it more probable that the physical conditions of the

sun's matter differ 1,000 times more than dynamics compel us to suppose they differ from those of matter in our laboratories; or that a stormy sea, with possibly Channel tides of extreme violence, should encroach on a chalk cliff 1,000 times more rapidly than Mr. Darwin's estimate of one inch per century?" [Tho62, S. 356 - 375]

Der Streit um das Alter der Erde konnte erst nach der Entdeckung der Radioaktivität und modernen Methoden der Altersbestimmung von uranhaltigem Gestein beigelegt und die Kontraktionshypothese widerlegt werden. Diese ergaben, die Erde müsse bereits mehrere Milliarden Jahre alt sein.

Aber auch astronomische Argumente sprachen gegen die Kontraktionshypothese: Aus den Daten von leuchtstarken Sternen ergab sich aus der Kontraktionshypothese eine Lebenserwartung von lediglich einigen hunderttausend Jahren. Es war nur schwer vorstellbar, dass die Lebensspanne eines Großteils der sichtbaren Sterne geringer sein sollte als das Alter der Menschheit. Ein weiteres Argument gegen die Kontraktionshypothese findet sich in den Beobachtungsdaten des 1785 entdeckten  $\delta$  Cephei, dessen Leuchtkraft mit einer regelmäßigen Periode variiert. Nach dem Verständnis des Pulsationsmechanismus von  $\delta$  Cephei Sternen hängt deren Periode empfindlich mit den Prozessen im Sterninneren zusammen. Seit der Entdeckung sollte sich der Radius von  $\delta$  Cephei ausgehend von der Kontraktionshypothese bereits um  $\frac{1}{300}$  verringert haben, was sich in einer Verringerung der Periode um etwa 17 Sekunden pro Jahr äußern würde. Die tatsächlich beobachtete Änderung beträgt hingegen nur  $\frac{1}{10}$  Sekunde pro Jahr. Zumindest im Cepheidenstadium muss die freigesetzte Energie in Sternen aus einer anderen Quelle stammen [EB28, S. 72]. Auch wenn sich die Helmholtz'sche Kontraktionshypothese letzten Endes als nicht zutreffend herausgestellt hat, ist sie historisch von großer Bedeutung für die Theorie des inneren Aufbaus der Sterne:

- Die durch Kontraktion freigesetzte Energie wird ganz maßgeblich von der Massenverteilung im Sterninneren beeinflusst. Um einen besseren Schätzwert für die Lebensdauer der Sonne zu erhalten, ist es notwendig, das Dichteprofil im Sterninneren zu kennen. Seinerzeit ging Helmholtz der Einfachheit halber von einer gleichmäßigen Massenverteilung aus, wenngleich ihm bewusst war, dass die Dichte zum Zentrum hin zunehmen muss.

- Durch Lord Kelvins Ergänzung wird nicht nur eine Antwort darauf gegeben, wie lange die Energievorräte der Sonne noch ausreichen, sondern insbesondere die Frage aufgeworfen, auf welche Art und Weise Energie aus dem tiefen Inneren der Sonne bis hin zur Oberfläche gelangt. Oberflächennahe Schichten würden durch die Wärmestrahlung viel zu schnell auskühlen, wenn es nicht einen effizienten Mechanismus für einen Energienachschub geben würde. Dies dient als Ausgangspunkt für weiterführende Überlegungen in Modul B.

## 3.2 Prinzipielle Aussagen/einfache Abschätzungen

### 3.2.1 Freifallzeit

Um ein Verständnis für das physikalische Verhalten von Sternen zu entwickeln, ist es notwendig, die Zustandsgrößen, die sie beschreiben, zu untersuchen. Dazu zählen die Masse  $M$ , der Radius  $R$ , der Druck  $p$ , die Temperatur  $T$ , die Dichte  $\rho$ , die mittlere Teilchenmasse  $\bar{\mu}$  und die Leuchtkraft  $L$ . Zunächst sollen Mittel- und Zentralwerte einiger Zustandsgrößen abgeschätzt werden. Wie sich zeigen wird, sind viele davon keine Konstanten, sondern werden durch Funktionen abhängig vom Abstand zum Zentrum  $r$  beschrieben. Für eine vollständige thermodynamische Beschreibung eines Sterns müssen diese Funktionen bestimmt werden. Als Werkzeuge zur Untersuchung der Zustandsgrößen steht das Beobachtungsmaterial, das die Astronomie bereitstellt, zur Verfügung, sowie das deduktive Schließen mithilfe von Modellen unter Anwendung fundamentaler Naturgesetze. Das wohl wichtigste Naturgesetz in der Astronomie stellt sicherlich das newtonsche Gravitationsgesetz dar, welches die Kraft  $F_G$  beschreibt, die zwei Massen  $M_1$  und  $M_2$  im Abstand  $r$  aufeinander ausüben. Es gilt:

$$F_G = G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2} \quad (3.2)$$

Dabei ist  $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$  die Gravitationskonstante. Betrachtet man nun ein Masselement  $\Delta m$  an der Oberfläche eines Sterns der Masse  $M$  mit dem Radius  $R$ , so lässt sich ermitteln, welche Kraft auf dieses

Masseelement ausgeübt wird.

$$F_G = G \cdot \frac{M \cdot \Delta m}{R^2} \quad (3.3)$$

Durch diese Kraftwirkung wird das Massenelement mit der Oberflächenbeschleunigung  $a$  in Richtung Zentrum beschleunigt. Es gilt:

$$F_G = G \cdot \frac{M \cdot \Delta m}{R^2} = \Delta m \cdot a \quad (3.4)$$

$$\Rightarrow G \cdot \frac{M}{R^2} = a \quad (3.5)$$

Nun lässt sich beispielsweise die Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche der Sonne ermitteln, indem die Sonnenmasse  $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$  kg sowie der Sonnenradius  $R_\odot = 7 \cdot 10^8$  m eingesetzt wird. Es folgt:

$$a = 270 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (3.6)$$

Daraus lässt sich weiter bestimmen, welche Zeit  $t$  verstreicht, bis das Massenelement im freien Fall ins Zentrum stürzt. Da  $\Delta m$  als beliebiges Element auf der Sonnenoberfläche gewählt wurde, gilt die Freifallzeit für die gesamte Sonnenoberfläche und entsprechend auch für die sich darunter befindliche Sonnenmasse. Umstellen des Weg-Zeit-Gesetzes<sup>3</sup> ergibt:

$$t = \sqrt{\frac{2R}{a}} = 38 \text{ min} \quad (3.7)$$

Da das Gravitationsgesetz zweifelsohne gültig ist, aus der Alltagserfahrung jedoch keine größeren Veränderungen an der Sonnenoberfläche wahrgenommen werden können, muss gefolgert werden, dass die Gravitationskraft vollständig oder zumindest in guter Näherung durch eine Gegenkraft kompensiert wird. Die Hauptreihensterne verbringen den Großteil ihrer Lebenszeit in solch einem Zustand des Gleichgewichts, im Fall der Sonne nunmehr seit über 4 Milliarden Jahren. Dementsprechend erscheint es sinnvoll zunächst Sterne zu untersuchen, die sich in solch einem Gleichgewichtszustand befinden. Üblicherweise wird anstelle eines Kräftegleichgewichtes der Gravitationsdruck einem Gegendruck gegenüberge-

---

<sup>3</sup>Die Gravitationsbeschleunigung wächst während des Kollaps an, sodass die Freifallzeit genau genommen durch ein Integral bestimmt werden müsste. Das Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung stellt jedoch eine obere Grenze dar und erfüllt demnach seinen Zweck als Abschätzung der charakteristischen Zeitspanne.

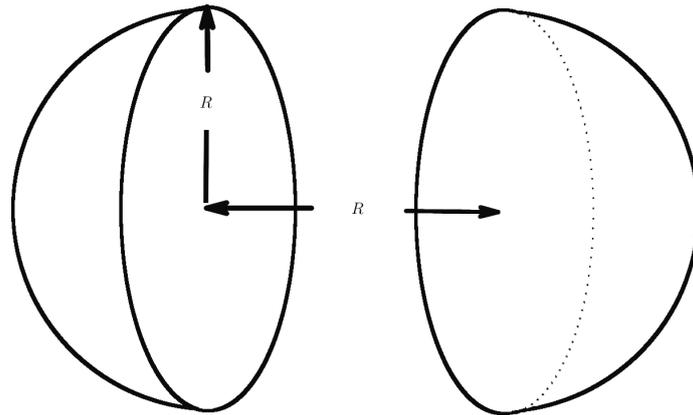


Abbildung 3.3: Das Halbkugelmodell eines Sterns, nach [FM97, S.131].

stellt. Die Art und Weise, wie dieser Gegendruck aufgebracht wird, hängt maßgeblich davon ab, um welche Art Himmelskörper es sich handelt.

### 3.2.2 Halbkugelmodell

Um sich einen ersten Einblick über die Zustandsgrößen im Sterninneren zu verschaffen, soll zunächst der mittlere Druck abgeschätzt werden, den der Stern aufbringen muss, um sich gegen den Kollaps durch seine eigene Schwerkraft zu stabilisieren. Dies kann geschehen, indem der mittlere Gravitationsdruck  $\bar{p}$  ermittelt wird, dem der Stern im Inneren einen Druck entgegen setzen muss. Nach der Definition des Druckes  $p$  in der Mechanik gilt:

$$p = \frac{F}{A}, \quad (3.8)$$

wobei  $F$  eine Kraft, sowie  $A$  die Fläche darstellt, an der die Kraft angreift. In dieser Betrachtung handelt es sich um die Gravitationskraft  $F_G$ . Es müssen nun einerseits repräsentative Massen, deren Gravitationskräfte aufeinander wirken, sowie eine geeignete Fläche gefunden werden, auf die diese Kräfte wirken. Das einfachste Modell welches diese Anforderung erfüllt, ist das sogenannte Halbkugelmodell, welches unter anderem Inhalt des Schulbuches [FM97] ist und in Abbildung 3.3 dargestellt wird. Der Stern wird gedanklich in zwei Halbkugeln der Masse  $\frac{M}{2}$  unterteilt, deren Massenschwerpunkte sich etwa im Abstand  $R$  befinden. Beide Halbkugeln ziehen sich gegenseitig mit der Kraft

$$F_G = G \cdot \frac{\frac{M}{2} \cdot \frac{M}{2}}{R^2} \quad (3.9)$$

an. Durch die Wahl einer Fläche  $A$ , auf die die Gravitationskraft  $F_G$  wirkt, lässt sich der mittlere Druck  $\bar{p}$  bestimmen. Eine geeignete Wahl stellt die Querschnittsfläche der Halbkugel  $A = \pi R^2$  dar, sodass folgt:

$$\bar{p} = \frac{F_G}{A} = G \cdot \frac{\frac{M}{2} \cdot \frac{M}{2}}{R^2 \cdot \pi R^2} = \frac{G}{4\pi} \cdot \frac{M^2}{R^4} \quad (3.10)$$

Der physikalische Kern dieses Resultats liegt darin, dass der mittlere Druck in einem Stern proportional zu  $M^2$  und antiproportional zu  $R^4$  ist, mit der Proportionalitätskonstanten  $\frac{G}{4\pi}$ . Wesentlich ausgefeiltere Modelle, wie sie z.B. bei Chandrasekhar [Cha67] zu finden sind, liefern dieselben Proportionalitäten und unterscheiden sich lediglich in der Proportionalitätskonstanten, die um den Faktor 20 variieren kann. Das Halbkugelmodell gibt somit das physikalische Verhalten der Sterne in Form von Proportionalitäten korrekt wieder und ist angesichts der Einfachheit des Ansatzes sogar gut geeignet, um numerische Abschätzungen durchzuführen. Weiterhin wurden keine Annahmen darüber gemacht, um welche Art von Materie es sich handelt. Demnach sollten die gezeigten Zusammenhänge allgemein für alle stabilen kugelförmigen Himmelskörper zutreffen, die durch ihre eigene Gravitation zusammengehalten werden – beispielsweise Planeten. Setzt man nun die bekannten Daten der Sonne ein, so folgt für den mittleren Gravitationsdruck:

$$\bar{p} = 8,8 \cdot 10^{13} \text{ Pa} \quad (3.11)$$

Zum Vergleich: Der atmosphärische Druck auf der Erde auf Meereshöhe beträgt etwa  $p = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . Um zu erklären, wie die Sonne diesen Druck physikalisch aufbringen kann, sind weitere Annahmen über den Zustand der vorliegenden Materie erforderlich. Heutzutage wird angenommen, dass die Hauptreihensterne durch die Zustandsgleichung des idealen Gases

$$p \cdot V = n \cdot k_B \cdot T \quad (3.12)$$

beschrieben werden. Dabei stellt  $p$  den Druck,  $V$  das Volumen,  $n$  die Anzahl der Gasteilchen,  $k_B$  die Boltzmannkonstante, und  $T$  die Temperatur des vorliegenden Gases dar. Die Gasteilchen führen untereinander und mit den Gefäßwänden elastische Stöße durch, sodass ein Druck aufgebaut wird. Dieser hängt einerseits von der Anzahl der durchgeführten Stöße, andererseits vom Impuls der Teilchen ab. Ein Maß für die durchschnitt-

liche Geschwindigkeit  $\bar{v}$  der Teilchen ist durch die mittlere Temperatur des Gases  $\bar{T}$  gegeben. Für die Betrachtungen des inneren Aufbaus der Sterne ist es zweckmäßig die Gleichung des idealen Gases in einer Form darzustellen, die die mittlere Dichte  $\bar{\rho}$  und die mittlere Teilchenmasse  $\bar{\mu}$  enthält. Mit

$$\bar{\rho} = \frac{M}{V} \quad (3.13)$$

und

$$\bar{\mu} = \frac{M}{N} \quad (3.14)$$

folgt durch Einsetzen in die Gleichung des idealen Gases und einigen Umformungsschritten:

$$T = \frac{p \cdot \mu}{k_B \cdot \rho} \quad (3.15)$$

Unter Anwendung des Gesetzes des idealen Gases kann nun die mittlere Temperatur ermittelt werden, die den erforderlichen Druck liefert um die Sonne im mechanischen Gleichgewicht zu halten. Nimmt man der Einfachheit halber an, die Sonne bestünde ausschließlich aus Wasserstoff, so würde die mittlere Teilchenmasse

$$\bar{\mu} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (3.16)$$

betragen. Mit der mittleren Dichte der Sonne  $\bar{\rho}$

$$\bar{\rho} = 1400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (3.17)$$

lässt sich die mittlere Temperatur im Sonneninneren  $\bar{T}$  bestimmen zu:

$$\bar{T} = 8 \cdot 10^6 \text{ K} \quad (3.18)$$

Auch wenn hinter der durchgeführten Modellrechnung keine komplexen Gedankengänge stecken, ist es dennoch erforderlich, einige getroffene Annahmen kritisch zu hinterfragen. Da das Sterninnere für die direkte Beobachtung weitgehend unzugänglich ist, müssen Modellannahmen besonders gründlich geprüft und durch beobachtbare oder theoretische Argumente gestützt werden.

Da die Sonne eine deutlich größere Dichte als Wasser besitzt, erscheint es abwegig, dass das Modell des idealen Gases geeignet sein könnte, um den Zustand der Materie angemessen zu beschreiben. Die hohe Dich-

te legt eher einen flüssigen oder festen Zustand nahe. Grundvoraussetzung für die Anwendbarkeit der Gleichung des idealen Gases ist, dass das Gesamtvolumen der Gaspartikel klein gegenüber den Abmessungen des zur Verfügung stehenden Volumens ist und die Gasteilchen demnach als punktförmig angesehen werden können. Dies kann durch eine einfache Rechnung überprüft werden. Unter der Annahme, die Sonne bestünde ausschließlich aus Wasserstoffatomen, kann deren Teilchenanzahl  $N$  bestimmt werden, indem die Masse der Sonne  $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$  kg durch die Masse eines Wasserstoffatoms  $m_H = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg geteilt wird:

$$N = \frac{M_{\odot}}{m_H} = \frac{2 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 1,195 \cdot 10^{57} \quad (3.19)$$

Multipliziert man nun die Anzahl der Wasserstoffatome mit deren Einzelvolumen, erhält man das Gesamtvolumen  $V_H$ , welches durch die Wasserstoffteilchen eingenommen wird. Es soll nun berechnet werden, welchen Anteil dieses am Gesamtvolumen der Sonne einnimmt. Mit  $R_{\odot} = 7 \cdot 10^8$  m und  $R_H = 0,5 \cdot 10^{-10}$  m folgt

$$\begin{aligned} \frac{V_H \cdot N}{V_{\odot}} &= \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot (R_H)^3 \cdot N}{\frac{4}{3}\pi \cdot (R_{\odot})^3} = \\ &= \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot (0,5 \cdot 10^{-10} \text{ m})^3 \cdot 1,195 \cdot 10^{57}}{\frac{4}{3}\pi \cdot (7 \cdot 10^8 \text{ m})^3} = \\ &= \frac{(0,5 \cdot 10^{-10} \text{ m})^3 \cdot 1,195 \cdot 10^{57}}{(7 \cdot 10^8 \text{ m})^3} = 0,435 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Die Gasteilchen nehmen demnach 43% des Sonnenvolumens ein und die Gleichung des idealen Gases dürfte nicht angewendet werden. Neben diesem theoretischen Argument sprachen auch spektroskopische Untersuchungen des Sternenlichts zunächst gegen einen gasförmigen Zustand im Sonneninneren, da es keinen Erklärungsansatz gab, wie ein Gas das beobachtete kontinuierliche Emissionsspektrum hervorrufen konnte.

Doch wie kann nachgewiesen werden, dass die Sternmaterie im Sonneninneren tatsächlich gasförmig ist, geschweige denn, dass sie sich wie ein ideales Gas verhält? Einerseits müssen theoretische Argumente gefunden werden, die die Annahme eines gasförmigen Aggregatzustandes erlauben, andererseits müssen astronomische Beobachtungen Fakten liefern, die dies bestätigen. Ende des 19. Jahrhunderts, zur Zeit, als die ersten Sternmodelle entwickelt wurden, waren weder die Physik noch die Astro-

nomie weit genug entwickelt, um einen gasförmigen Zustand zu rechtfertigen. Deshalb argumentierten Wissenschaftler, die die Ansicht vertraten, die Sonne könne sich in einem gasförmigen Zustand befinden, vorsichtig, indem sie darlegten, sie würden lediglich die abstrakten Modelle von Gaskugeln analysieren und gingen dementsprechend vorsichtig mit der Behauptung um, dass es sich bei diesen tatsächlich um Sterne handeln könnte. Fast alle der nachfolgenden elementaren Betrachtungen sind aber vollkommen unabhängig von konkreten Aggregatzustand der Materie. Sie gelten vielmehr für jedwedes selbstgravitierende Objekt.

### **Das Alter und die Lebensdauer der Sonne - Die Helmholtz'sche Kontraktionshypothese**

Die Sonne sendet jede Sekunde gewaltige Mengen Energie in Form von elektromagnetischer Strahlung ins All und hat es dadurch ermöglicht, dass sich Leben auf der Erde entwickeln konnte. Aus dem Energieerhaltungssatz folgt, dass die Sonne, wie auch alle anderen Sterne, ihre Strahlungsleistung nur für einen endlichen Zeitraum aufrecht erhalten kann, da ihr nur ein endlicher Energievorrat zur Verfügung steht. Aus dieser Tatsache lassen sich unmittelbar die folgenden Fragestellungen ableiten:

- Seit wann existiert die Sonne, so wie wir sie kennen?
- Wie lange wird die Sonne die Erde noch mit Energie versorgen?
- Durch welche Energieumwandlungsprozesse setzt die Sonne die Energie frei?

Diesen Fragen ging Hermann von Helmholtz im 19. Jahrhundert nach und präsentierte seine Erkenntnisse in den Vorträgen „Über die Entstehung des Planetensystems“ und „Über die Wechselwirkung der Naturkräfte“. Er prüfte zunächst die seinerzeit verbreitete Hypothese, dass die Sonne ihre Energie durch chemische Verbrennungsprozesse freisetzt: Der hypothetische Energievorrat der Sonne lässt sich anhand von Literaturwerten zum Energiegehalt von bekannten Energieträgern abschätzen. Modellhaft kann man beispielsweise postulieren, die Sonne würde komplett aus Steinkohle bestehen und durch Verbrennung der gesamten Masse Energie freisetzen. Mit einem Heizwert  $H_s$  von  $2,72 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$  für Steinkohle stünde der Sonne, die eine Masse von  $M = 2 \cdot 10^{30}$  kg besitzt, ein Energievorrat

Tabelle 3.1: Abschätzung der Lebensdauer der Sonne für verschiedene Brennstoffe. [Bun19]

1 kg Brennstoff	Energiegehalt [ $\frac{kJ}{kg}$ ]	E Sonne [ $J$ ]	Lebensdauer [ $a$ ]
Braunkohle	8996	$1,7992 \cdot 10^{37}$	1501
Steinkohle	27196	$5,4392 \cdot 10^{37}$	4539
Heizöl, leicht	42816	$8,5632 \cdot 10^{37}$	7146
Rohbenzin	44000	$8,8000 \cdot 10^{37}$	7343

von maximal

$$E = H_s \cdot M = 5,4 \cdot 10^{37} \text{ J} \quad (3.21)$$

zur Verfügung. Dividiert man den Energievorrat durch die Leuchtkraft der Sonne  $L = 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W}$ , so erhält man einen Schätzwert für die Leuchtdauer der Sonne und somit auch deren Lebensspanne  $t$ . Es gilt:

$$t = \frac{E}{L} = 4539 \text{ a.} \quad (3.22)$$

Würde die Sonne ihre Energie durch Verbrennung von Steinkohle beziehen, wären ihre gesamten Energievorräte bereits nach rund 5000 Jahren aufgebraucht. Wie Tabelle 3.1 zeigt, liegen andere fossile Brennstoffe in der selben Größenordnung. Bereits die dokumentierte Menschheitsgeschichte ist länger als dieser Zeitraum, deshalb können solche Überlegungen für die Energiefreisetzung der Sonne ausgeschlossen werden. Helmholtz machte stattdessen den Vorschlag, dass die Sonne durch allmähliches Schrumpfen potentielle Energie durch Kontraktionsarbeit in Form von Wärme freisetzen könnte. Um die potentielle Energie der Sonne zu bestimmen, muss streng genommen die Massenverteilung im Inneren bekannt sein. Für die Zwecke einer Abschätzung ist die Annahme einer konstanten Dichte legitim, so wie es auch Helmholtz getan hat.

Das Gravitationspotential  $\Phi$  im Abstand  $r$  vom Mittelpunkt des Sterns beträgt:

$$\Phi(r) = G \cdot \frac{M(r)}{r} \quad (3.23)$$

Dabei stellt die Funktion  $M(r)$  die Masse dar, die sich innerhalb einer Kugel vom Radius  $r$  befindet. Im Inneren des Stern steigt  $M(r)$  demnach für wachsendes  $r$  an und nimmt außerhalb des Sterns den konstanten

Wert  $M$  an. Mit der konstanten Dichte  $\rho$  folgt:

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho \quad (3.24)$$

Die Masse einer Kugelschale der infinitesimalen Dicke  $dr$  im Abstand  $r$  besitzt die Masse:

$$dm(r, dr) = 4\pi r^2 dr \quad (3.25)$$

Die potentielle Energie  $dE$  dieser Gasmasse lässt sich aus dem Produkt von dem Potential  $\Phi$  und ihrer Masse  $dm$  berechnen:

$$dE = G \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi \rho r^3}{r} \cdot 4\pi r^2 \rho dr = \frac{16}{3}\pi^2 \rho^2 G r^4 dr \quad (3.26)$$

Helmholtz zufolge bezog die Sonne ihre Energie aus der Kontraktion vom Rande des Planetensystems auf ihre heutige Größe. Für den Rand des Sonnensystems verwendete er die Umlaufbahn von Neptun, was etwa dem 6000-fachen Sonnenradius entspricht. Durch Integration von Gleichung (3.26) von  $r = 6000R$  bis  $R$  erhielt er für die gesamte potentielle Energie:

$$E = \int_{6000R}^R dE(r) dr = \frac{16}{3}\pi^2 \rho^2 G \int_{6000R}^R r^4 dr = \frac{3GM^2}{5} \left( \frac{1}{6000R} - \frac{1}{R} \right) \quad (3.27)$$

Dies lässt sich weiter vereinfachen zu:

$$E = -\frac{5G}{3} \cdot \frac{M^2}{R} \quad (3.28)$$

Setzt man nun die Daten der Sonne ein, folgt für die potentielle Energie  $E = -2,28 \cdot 10^{41}$  J. Das negative Vorzeichen kennzeichnet hier, dass bei der Kontraktion Energie freigesetzt wird. Es lässt sich ein Alter der Sonne von etwa 20 Millionen Jahren ableiten, durch weitere Kontraktion wäre die Sonne in der Lage, ihre Leuchtkraft noch für einige Millionen Jahre aufrecht zu erhalten. Auch wenn geologische Untersuchungen nahelegten, dass die Erde bereits mehrere hundert Millionen Jahre existieren und die Sonne dementsprechend älter sein müsste, fand Helmholtz' Hypothese weite Anerkennung in der Astronomie. Sie wurde durch die Tatsache gestützt, dass die Veränderungen des Sonnenradius so klein sein müssten, dass sie in historisch überschaubaren Zeiträumen nicht beobachtet werden könnten. Letztendlich stellte sich die Kontraktionshypothese als falsch heraus, da die Sonne, wie heute bekannt ist, ihre Energie aus Fusi-

onsprozessen tief im Inneren bezieht. Als Helmholtz diese Hypothese aufstellte, waren kernphysikalische Prozesse zur Energiegewinnung jedoch noch unbekannt und selbst nach deren Entdeckung schien es zunächst abwegig, dass die Fusion von Wasserstoff im Sonneninneren tatsächlich möglich sein könnte. Heute begegnet uns die Kontraktionshypothese zur Beschreibung der Frühphase der Sternentwicklung in moderner Gestalt wieder. Historisch bedeutsam ist sie insofern, dass zur Verfeinerung der Berechnung der Energieabgabe der Sonne ein Modell zur inneren Massenverteilung notwendig war. Das regte diesbezüglich theoretische Überlegungen an. Der Virialsatz, der die Gleichverteilung von der potentiellen Energie auf die Erhöhung der inneren Energie und die Wärmeabgabe fordert, war Helmholtz so noch nicht bekannt. Die Größenordnung seiner Abschätzung bleibt davon jedoch unberührt.

### 3.3 Detaillierte Analyse der Verläufe von Zustandsgrößen

#### 3.3.1 Schweredruck

Mithilfe des Halbkugelmodells lässt sich zwar verdeutlichen, welche extremen Bedingungen im Sterninneren herrschen, es beschreibt das thermodynamische Verhalten des Sterns jedoch nur in Grundzügen. Aus dem Alltag ist uns vertraut, dass der Druck in Flüssigkeiten und Gasen mit der Höhe stark variiert: Beim Tauchen spüren wir schon bei geringen Tiefen die Zunahme des Umgebungsdruckes und müssen einen Druckausgleich machen, um noch etwas tiefer zu gelangen. Auch im Flugzeug macht sich die Höhenabhängigkeit des Druckes in der Atmosphäre, insbesondere bei Start und Landung, bemerkbar. Es ist daher anzunehmen, dass sich die Sonne physikalisch ähnlich verhält und der Druck zum Zentrum hin ansteigt, unabhängig davon, in welchem Aggregatzustand sich ihre Materie befindet.

Ziel der folgenden Betrachtung wird es daher sein, ein erstes, vorläufiges Druckprofil des Sterninneren zu erstellen. Anstatt zwei Halbkugeln zu betrachten, wird der Stern stattdessen gedanklich in eine zentrale Kugel und mehrere konzentrische Kugelschalen aufgeteilt, ähnlich einer Zwiebel (siehe Abb. 3.4). Da sich im Sterninneren alle Zustandsgrößen kontinuier-

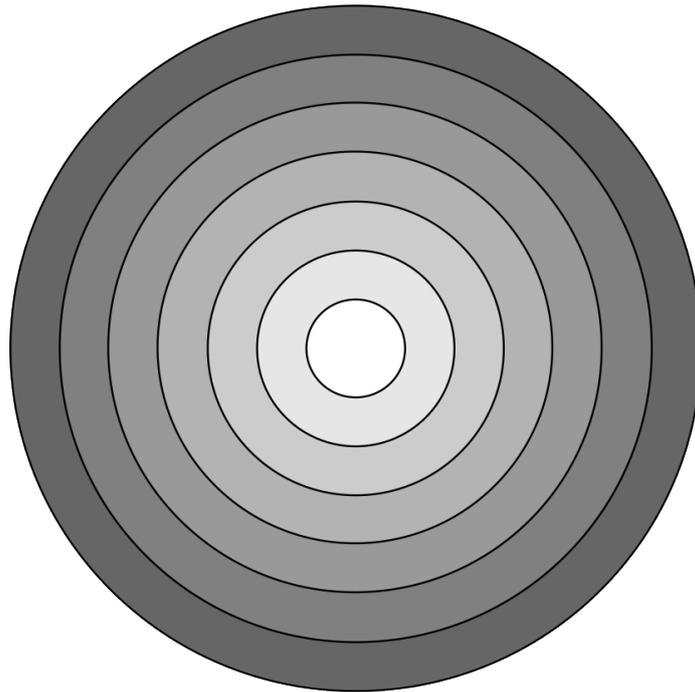


Abbildung 3.4: Kugelschalenmodell des Sterninneren.

lich vom Zentrum bis hin zur Oberfläche ändern sollten, müssen für alle Schalen Mittelwerte der betrachteten Zustandsgrößen bestimmt werden. Da zunächst der Druck  $p$  im Fokus stehen soll, werden einige vereinfachende Annahmen getroffen:

- Der Stern wird in Schalen gleicher Masse aufgeteilt (nachfolgend werden beispielhaft 15 Schalen verwendet).
- Der Stern soll eine konstante Dichte besitzen.

Um den Druck zu ermitteln, der innerhalb einer Kugelschale herrscht, wird ein Ansatz adaptiert, mit dem es uns möglich ist, allein aus der Kenntnis des Luftdruckes  $p$  in Bodennähe die Masse der Erdatmosphäre abzuschätzen:

Die über uns befindliche Luftmasse  $m$  wird durch die Gravitationskraft  $F_G$  der Erde angezogen und übt dadurch einen Schweredruck auf den Boden aus:

$$p = \frac{F_G}{A} = \frac{m \cdot g}{A} \quad (3.29)$$

Der Druck  $p$  lässt sich mithilfe eines Barometers messen, die Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  ist bekannt, für die Fläche  $A$  kann die Erdoberfläche eingesetzt werden. Durch Einsetzen und Umstellen der Gleichung lässt

sich die Masse der Erdatmosphäre  $m$  auf wenige Prozent genau bestimmen.

Die Situation innerhalb der Sonne stellt das inverse Problem dazu dar, sodass eine Übertragung dieses Ansatzes vielversprechend erscheint: Die untersten 14 Masseschalen ziehen die darüber liegende Schicht an und erzeugen dadurch den gesuchten Schweredruck. Die Masse der obersten Schicht ist bekannt und beträgt in diesem Beispiel  $\frac{1}{15}M$ . Anstelle der Erdbeschleunigung muss die durch die unteren Schalen hervorgerufene Beschleunigung mithilfe des newtonschen Gravitationsgesetzes ermittelt werden. Es werden zwei wichtige Folgerungen aus dem newtonschen Gravitationsgesetz verwendet, deren Herleitungen in gängigen Lehrwerken der Physik wie z.B. Tipler - Physik für Wissenschaftler und Ingenieure [TMPB07] zu finden sind:

1. Eine homogene Vollkugel der Masse  $M$  übt auf eine Probemasse die selbe Kraft aus, wie eine Punktmasse  $M$ , die sich im Zentrum der Vollkugel befindet.
2. Die resultierende Gravitationskraft einer homogenen Kugelschale addiert sich in deren Inneren zu Null.

Es gilt demnach:

$$F_G = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \quad (3.30)$$

$$\Rightarrow p = \frac{F_G}{A} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \frac{1}{A} = G \cdot \frac{M \cdot m}{4\pi r^4} = G \cdot \frac{M \cdot (M_\odot - M)}{4\pi r^4} \quad (3.31)$$

wobei  $A$  die Oberfläche der Kugel ist, die die Gravitationsbeschleunigung verursacht. Sie besitzt den Radius  $r$  und beinhaltet die Masse  $M$ . Berechnet man auf diese Weise – Schale für Schale – explizit den Druck, ergibt sich ein ungewöhnliches Druckprofil (siehe Abb. 3.5):

Vom Rand des Sterns nimmt der Druck in Richtung Zentrum zunächst zwar deutlich zu, allerdings erreicht er an der Stelle  $r^*$  ein Maximum, fällt danach wieder ab und nimmt im Zentrum den Wert Null an. Ein solches Druckprofil ist in einem stabilen Himmelskörper unmöglich: Betrachtet man eine Kugelschale an einer Stelle  $r < r^*$ , so ist der von unten auf sie wirkende Druck geringer als der von oben wirkende. Aufgrund dieser Differenz würde sich eine resultierende Kraft in Richtung Zentrum ergeben und der innere Bereich des Sterns kollabieren. Auf den zentrumsnahen Schalen lastet zwar der Großteil der Gesamtmasse, allerdings werden diese nur von einer geringen Masse im Zentrum beschleunigt, sodass der Ausdruck  $M \cdot (M_\odot - M)$  in Formel (3.31) für den Druck klein wird. Durch

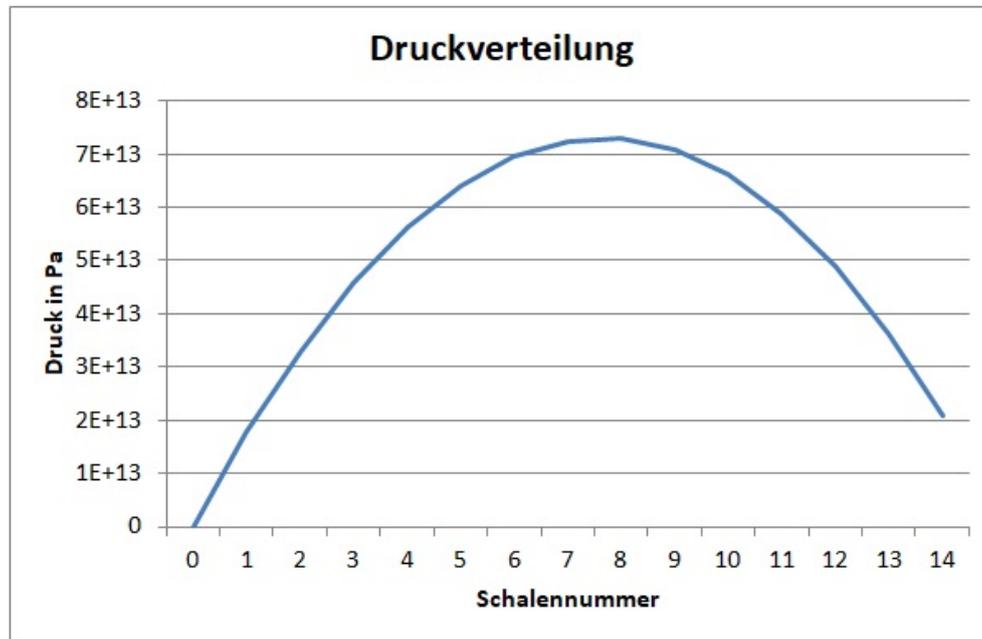


Abbildung 3.5: Der Druck  $P$  im Sterninneren in Abhängigkeit vom Abstand zum Zentrum  $r$ .

Interpretation dieses Resultates kann klar gezeigt werden, dass der gewählte Ansatz zu keinem funktionierenden Sternmodell führt, zugleich wird man darauf aufmerksam gemacht, dass offenbar ein entscheidendes Konstruktionsmerkmal bislang nicht in die Modellbildung eingeführt wurde. Man kann auf diese Weise die Existenz eines Gegendrucks zum Schweredruck im Stern mit Lernenden „entdecken“. Dadurch, dass die Wechselwirkung der einzelnen Gasschichten miteinander vernachlässigt wurde, hat sich ein Druckprofil ergeben, wie es nur in einem Festkörper vorkommen kann, dessen Stabilität nicht gravitationsbedingt ist. Die einzelnen Schalen müssten stabil sein, selbst wenn darunter liegende Schalen entfernt würden. Von seinem physikalischen Verhalten wäre dies vergleichbar mit einer Art Sternmatroschka (Abbildung 3.6).

Die zentralen Erkenntnisse können folgendermaßen zusammengefasst werden:

- Um ein funktionierendes Sternmodell konstruieren zu können, muss die Stabilität des Sterns als Ausgangspunkt gewählt werden,
- der Schweredruck allein gibt kein hinreichendes Kriterium für die Konstruktion eines Sternmodells,
- es muss ein geeigneter Mechanismus gefunden werden, der den



Abbildung 3.6: Die einzelnen Schalen einer Matroschka sind stabil, unabhängig davon, ob sich darunter eine weitere Figur befindet, da es sich, anders als bei den Schalen eines Sterns, jeweils um Festkörper handelt ([Fan05]).

Stern gegen den Kollaps stabilisieren kann.

Es drängt sich die Frage auf, wie der Druck im Sterninneren tatsächlich verlaufen muss und ob das Modell angepasst werden kann, um ein realistischeres Druckprofil zu ermitteln. Damit dies gelingt, muss die Wechselwirkung der Kugelschalen untereinander berücksichtigt werden. Aufgrund der allseitigen Druckausbreitung in Fluiden muss jede Gasschicht den Druck, der in den darüber liegenden Schichten herrscht, ebenfalls spüren. Dies kann realisiert werden, indem in einem zweiten Schritt für die endgültige Berechnung des Druckes einer Gasschicht die Druckwerte der darüber liegenden Schichten hinzu addiert werden. Daraus ergibt sich das Druckprofil aus Abbildung 3.7, welches mithilfe von Exceltool 2 in Kapitel (3.3.4) bestimmt werden kann.

### 3.3.2 Federmodell

Wie im vorangegangenen Abschnitt herausgearbeitet wurde, benötigt jeder Stern einen Rückstellmechanismus, der ihn gegen seine eigene Gravitationswirkung stabilisiert. Verschiedenartige Himmelskörper nutzen dabei unterschiedliche Mechanismen, bei Hauptreihensternen wie der Sonne spielen einerseits die kinetische Energie der Gasteilchen und damit verbunden die Temperaturverteilung des Gases, andererseits der Strah-

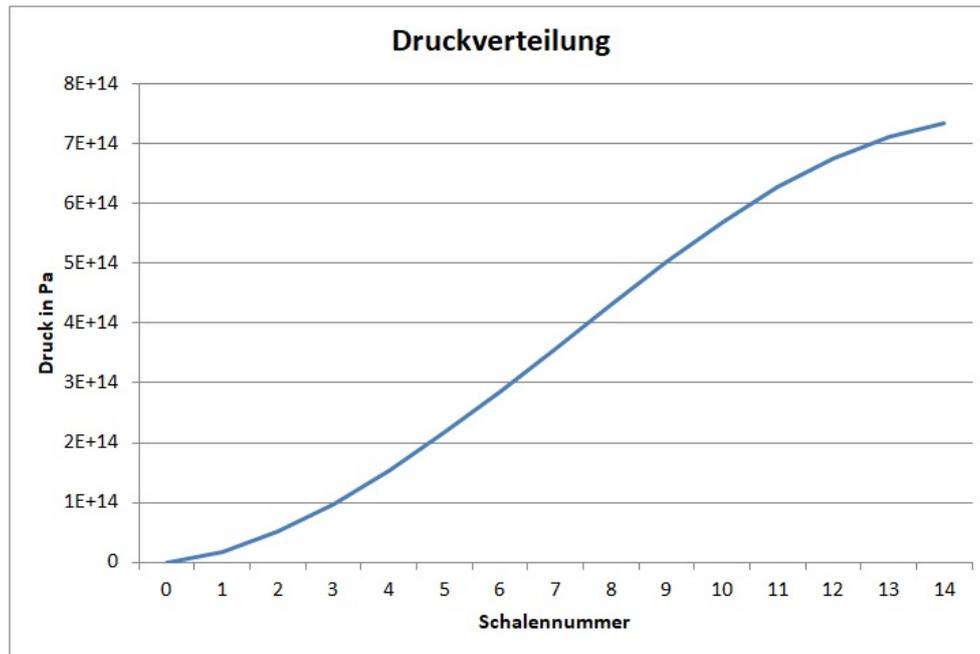


Abbildung 3.7: Der Druck  $p$  der einzelnen Schalen ergibt sich hier aus dem zuvor ermittelten Wert und den Drücken der darunterliegenden Schalen. Auf diese Weise entsteht keine „Sternmatroschka“.

lungsdruck der Photonen, die bei der Kernfusion freigesetzt werden, eine zentrale Rolle<sup>4</sup>, sodass der Stern nicht in sich zusammenstürzt.

Ausgehend vom Kugelschalenmodell soll nun ein Modell betrachtet werden, welches die mechanische Stabilität im Sterninneren veranschaulicht und erste Berechnungen zulässt. Schwarz schlägt ein einfaches Federmodell vor, in dem mehrere Federn und Massen abwechselnd übereinander auf einem starren Metallstab aufgereiht werden (siehe dazu [Sch97b, S. 33]). Die Federn stellen den Gegendruck der Sternmaterie dar, während die Massstücke die Rolle der Masse der Gasschichten spielen. Anhand von Abb. 3.8 ist ersichtlich, dass die untersten Federn am stärksten komprimiert werden und demnach die höchste Dichte aufweisen, sowie die größte Rückstellkraft aufbringen müssen, was dem größten Druck entspricht.

Um dies zu quantifizieren werden nun die Rückstellkräfte, sowie die resultierenden Federlängen bestimmt. Die oberste Feder muss die Rückstellkraft

$$F_{Rück_1} = F_G = m \cdot g \quad (3.32)$$

<sup>4</sup> im unteren Bereich der Hauptreihe ist der Strahlungsdruck vernachlässigbar



Abbildung 3.8: Reales Federmodell eines Sterns, Originalmodell aus [Sch97b].

Tabelle 3.2: Berechnung der Rückstellkräfte  $F$  und Federlängen  $l$  für das Federmodell

Federnummer	Rückstellkraft $F$ [N]	Federlänge $l$ [cm]
1	0,49	4,18
2	0,98	3,37
3	1,47	2,55
4	1,96	1,73
5	2,45	0,91

aufbringen, wobei  $m$  die Masse des obersten Gewichtsstückes und  $g$  die Erdbeschleunigung ist. Diese wird durch das Hooke'sche Gesetz

$$F_{Rück_1} = -k \cdot \Delta x \quad (3.33)$$

beschrieben, wobei  $k$  die Federkonstante und  $\Delta x$  die Stauchung der Feder darstellt. Die Stauchung kann durch Gleichsetzen der Formeln 3.32 und 3.33 und eine einfache Umformung ermittelt werden:

$$F_{Rück_1} = F_G \quad (3.34)$$

$$-k \cdot \Delta x_1 = m \cdot g \quad (3.35)$$

$$\Rightarrow \Delta x_1 = -\frac{m \cdot g}{k} \quad (3.36)$$

Es resultiert die Länge der Feder bei der Belastung durch ein Massestück:

$$l_{res_1} = l - \Delta x = l - \frac{m \cdot g}{k} \quad (3.37)$$

Für die darunter liegenden Federn folgt analog zu (3.32) und (3.37):

$$F_{Rück_n} = F_G = n \cdot m \cdot g \quad (3.38)$$

$$l_{res_n} = l - n \cdot \frac{m \cdot g}{k} \quad (3.39)$$

wobei  $n$  die Federnummer bzw. die Anzahl der Massestücke angibt. Die Ergebnisse für die exemplarischen Daten  $m = 50 \text{ g}$ ,  $k = 60 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  und  $l = 5 \text{ cm}$  sind in Tabelle 3.2 dargestellt und wurden mit Exceltool 2 erzeugt:

Aus den einzelnen resultierenden Federlängen kann nun durch Summie-

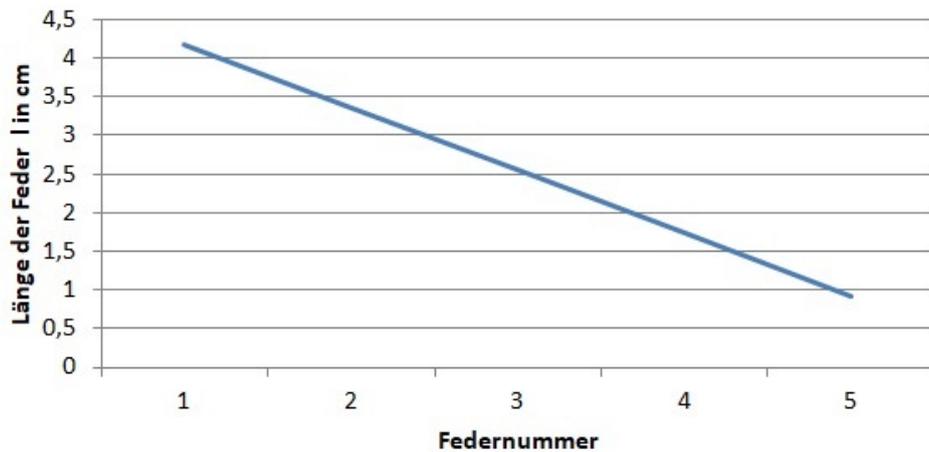


Abbildung 3.9: Federlängen  $l$  des Sternmodells von außen nach innen.

ren die Gesamtgröße des Modellsterns bestimmt werden.

$$R = \sum_{i=1}^5 l_i = 12,7 \text{ cm} \quad (3.40)$$

oder allgemein:

$$R = \sum_{n=1}^5 l_i = n \cdot l - \frac{gm}{D} \cdot \sum_{i=1}^n (n+1-i) \quad (3.41)$$

Die Summe kann mithilfe der Gauß'schen Summenformel

$$\sum_{i=1}^n (n+1-i) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad (3.42)$$

vereinfacht werden:

$$R = n \cdot l - \frac{gm}{D} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad (3.43)$$

Dieses Modell kann selbstverständlich keinen Stern physikalisch korrekt abbilden, jedoch lassen sich viele Überlegungen direkt in realistischere Modelle integrieren bzw. erfordern nur wenige Modifikationen. Die Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen dem Federmodell und Sternmodellen sollen nun kurz diskutiert werden:

- Die fünf Massestücke und Federn repräsentieren die Einteilung der Gesamtmasse des Sterns in fünf Kugelschalen gleicher Masse.

- Die Federn, so wie auch die Gasschichten im Stern, werden durch die darüber liegenden Massestücke bzw. Gasschichten zusammen gedrückt. Gleichzeitig drücken sie die darunter liegenden Federn bzw. Gasschichten aufgrund der eigenen Schwerkraft zusammen.
- Die Rückstellkraft der Federn ist mit der Gravitationskraft der darüber liegenden Massen gleichzusetzen, da ein Kräftegleichgewicht herrscht – ein Prinzip, das auch im Inneren von Sternen gelten muss. Üblicherweise wird dort jedoch anstelle des Kräftegleichgewichtes das Druckgleichgewicht betrachtet.
- Die Rückstellkraft wird im Federmodell durch das Hooke'sche Gesetz  $F_{Rück} = -k \cdot \Delta x$  beschrieben, während im Sterninneren der Gasdruck und der bislang nicht betrachtete Strahlungsdruck dafür verantwortlich sind. Der Nachweis, dass dies tatsächlich der Fall ist, steht jedoch noch aus. Es müssen gute Argumente gefunden werden, die dies belegen, da ansonsten die Gefahr besteht, dass das Modell zwar in sich schlüssig ist, ein solcher Stern aber in der Realität nicht existiert.
- Allein aus der Kenntnis der Masse und dem Gesetz, das die Rückstellkraft beschreibt, wird die Größe des Sterns vorhergesagt, wodurch sich das Modell an die Beobachtung koppeln lässt.
- Die resultierende Längen der Federn  $l_{res}$  finden ihre Entsprechung in der Dicke der Kugelschalen im Sternmodell. Aus der Masse und dem Volumen einer Kugelschale lässt sich die gesuchte mittlere Dichte ableiten.
- Die Berechnung der Gewichtskraft der einzelnen Massestücke muss im Sterninneren nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz  $F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$  erfolgen, da die Gravitationsbeschleunigung dort nicht konstant ist. Dadurch wird das Modell mathematisch deutlich komplizierter, da die Gravitationskräfte und die Stauchungen der Gasschichten simultan berechnet werden müssen.

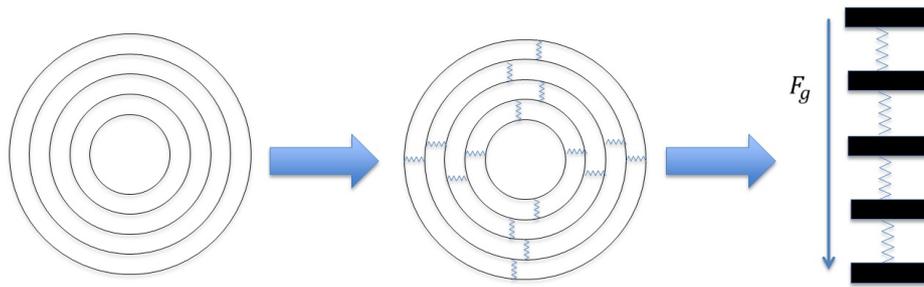


Abbildung 3.10: Schematische Darstellung der vereinfachenden Schritte vom Kugelschalenmodell hin zum Federmodell.

### 3.3.3 Tools zur numerischen Berechnung der Modelle

Viele der in diesem Modul vorgestellten Modelle sind einfach genug, um die Berechnungen konventionell per Zettel und Stift durchzuführen, was in Modul B nicht mehr möglich sein wird oder zumindest unverhältnismäßig großen Aufwand mit sich bringen würde, sodass der Einsatz von Computersoftware zwingend erforderlich wird. Bedingt dadurch, dass für alle Zustandsgrößen in den bislang betrachteten Kugelschalen Mittelwerte angenommen werden, diese aber tatsächlich mit dem Radius variieren, bedeutet eine Berechnung mit mehr Kugelschalen eine höhere Genauigkeit der Modellrechnungen, allerdings bei erheblich wachsendem Rechenaufwand. Selbst die Berechnung eines Modells mit 10 Schalen erfordert bei manueller Rechnung einen Aufwand, der kaum zu rechtfertigen ist, da große Fehler durch die grobe Näherung zu erwarten sind. Die in die Berechnung einfließende Annahme, dass Zustandsgrößen in der Sonne bei einer Zehnerteilung des Radius, über 70000 km hinweg konstant sein sollen, ist offensichtlich wenig realistisch. Der Rechnereinsatz ermöglicht es, das Problem insofern zu verringern, als dass auch Simulationen mit mehreren tausend Schalen nahezu instantan mithilfe der heutigen Heimcomputer durchgeführt werden können. Der Anwender muss jedoch über gewisse Programmierfähigkeiten und entsprechende Software verfügen, um davon profitieren zu können. Da in dieser Arbeit keine Programmierkenntnisse vorausgesetzt werden, sollen bereits von Beginn an einfache iterative Algorithmen programmiert werden, um den Umgang mit der zum Einsatz kommenden Software anhand leicht überschaubarer Modelle zu erlernen. Den höchsten Bekanntheitsgrad der vorgeschlagenen Programme besitzt

mit Sicherheit die Tabellenkalkulationssoftware Microsoft Excel oder das vergleichbare, frei zugängliche Apache OpenOffice. Auf diese wird das Hauptaugenmerk der Arbeit gelegt. Alle Exceltools lassen sich allerdings auch mit den Matrizenkalkulationsprogrammen Matlab oder der kostenfreien Alternative Octave umsetzen, welche in der numerischen Mathematik breite Anwendung finden. Die letztgenannten Programmarten haben gemeinsam, dass für die Lösung der auftretenden Differentialgleichungen Algorithmen in der Sprache C bzw. C++ programmiert werden müssen. Soll der mathematische Aspekt in den Hintergrund gerückt werden, lassen sich viele Modelle auch mit einer Modellbildungssoftware wie z.B. Coach oder Dynasys berechnen. Diese erfordern lediglich die Angabe der Differentialgleichungen sowie der Randwerte und geben selbstständig die Lösung eben dieser an. Über eine graphische Oberfläche ist ebenfalls ersichtlich, inwiefern die Gleichungen eines Gleichungssystems miteinander gekoppelt sind. Dem Leser bleibt selbst überlassen, worauf der Fokus gelegt werden soll.

### 3.3.4 Exceltools

#### Exceltool 1 - Der Schweredruck

In Abschnitt 3.3.1 wurde das Profil des Schweredrucks im Inneren der Sonne gesucht. Nachfolgend soll erläutert werden, wie ein Tool in Excel konstruiert werden kann, mit dem ein solches Profil am eigenen Rechner erstellt werden kann. Die folgende Modelldaten sind bekannt:

- Masse der Sonne  $M = 2 \cdot 10^{30}$  kg,
- Radius der Sonne  $R = 7 \cdot 10^8$  m,
- Dichte  $\bar{\rho} = \frac{M}{V}$ , diese wird als konstant im gesamten Stern angesehen,
- die Anzahl der Kugelschalen soll exemplarisch  $n = 30$  betragen.

Die Zahlenwerte sollten zunächst in eine Exceltabelle eingegeben werden, sodass diese für weitere Berechnungen zur Verfügung stehen. Da Excel nur mit Zahlen und nicht mit Einheiten rechnen kann, werden lediglich die Zahlenwerte in den Grundeinheiten des SI-Systems eingetragen, sodass alle weiter berechneten numerischen Resultate ebenfalls in den

	A	B	C
1	Gesamtmasse	2E+30	kg
2	Radius	700000000	m
3	Anzahl der Schalen	30	
4	Gravitationskonstante	6.67E-11	m <sup>3</sup> /(kg s <sup>2</sup> )
5	mittlere Dichte	1392.025741	kg/m <sup>3</sup>
6	Masse der einzelnen Schalen	6.66667E+28	kg

Abbildung 3.11: Eingabe der Konstanten in das Exceltool.

Grundeinheiten ausgegeben werden. Die Eingabe soll so erfolgen, wie in Abb. 3.11 exemplarisch zu sehen ist.

- $B1 = 2 * 10^{30}$
- $B2 = 7 * 10^8$
- $B3 = 30$
- $B4 = 6,67 * 10^{(-11)}$

Aus diesen Daten lässt sich die mittlere Dichte der Sonne in  $B5$  sowie die Masse der einzelnen Kugelschalen in  $B6$  ermitteln, wobei deren Berechnung durch Bezug auf die zuvor eingegeben Daten erfolgen soll. Um die Rechnung beispielsweise für einen Stern mit doppelter Masse ohne größeren Aufwand erneut durchführen zu können, soll Excel automatisch die neue mittlere Dichte ermitteln und weiterverwenden. Dadurch wird gewährleistet, dass lediglich wenige Eingabeparameter geändert werden müssen, um unmittelbar das Ergebnis der neuen Modellrechnung zu erhalten.

Die mittlere Dichte der Sonne  $\bar{\rho}$  ergibt sich durch

$$\bar{\rho} = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (3.44)$$

sowie die Masse einer Kugelschale  $m$  durch

$$m = \frac{M}{n} \quad (3.45)$$

Gleichung (3.44) lässt sich wie folgt in Zelle B5 übertragen. Zur Erinnerung: Das Modell in Abschnitt 3.3.1 beruhte auf der Annahme konstanter Dichte.

$$B5 = B1/(4/3 * pi()B2^3) \quad (3.46)$$

Gleichung (3.45) kann mit

$$B6 = B1/B3 \quad (3.47)$$

in Excel umgesetzt werden. Um den Druck an der Oberseite einer Kugelschale berechnen zu können, muss zunächst bestimmt werden, in welchem Abstand von Zentrum sich diese befindet. Dafür sollen die Zellen B9 bis B39 genutzt werden, während die Zellen A9 bis A39 für die Nummerierung der Kugelschalen verwendet werden. Es erweist sich als hilfreich, in den Zellen C9 bis C39 jeweils den Kehrwert des quadratischen Abstandes der Schalen vom Zentrum einzutragen, da dieser Ausdruck bei der Berechnung der wirksamen Gravitationskraft auftaucht und die folgende Berechnung etwas einfacher gestaltet.  $F_G$  soll in den Zellen D9 bis D39, der Schweredruck  $p$  in den Zellen E9 bis E39 berechnet werden.

Der jeweils erste Spalteneintrag wird der äußersten Kugelschale zugeordnet, sodass dort die Randwerte eingegeben werden können:

- $A9 = 0$
- $B9 = B2$
- $C9 = 1/(B9^2)$
- $D9 = 0$
- $E9 = 0$

Die jeweils zweiten Spalteneinträge sollen so formuliert werden, dass es möglich ist, die eingegebenen Formel durch Ziehen des Ausfüllkästchens in die darunter liegen Felder automatisch zu übertragen, ohne dass diese weiter manuell modifiziert werden müssen.

Um die Position des Randes der darunter liegenden Kugelschale zu ermitteln, muss der Radius  $r_i$  einer Kugel der Masse  $M_i = M \cdot \frac{n-i}{n}$  (da die äußerste Kugelschale nicht mehr hinzugezählt wird) bestimmt werden. Es gilt:

$$M_i = M \cdot \frac{n-i}{n} = \frac{4}{3} \pi r_i^3 \cdot \bar{\rho} \quad (3.48)$$

Löst man nach  $r_i$  auf, gilt

$$r_i = \sqrt[3]{\frac{M \cdot \left(\frac{n-i}{n}\right)}{\bar{\rho} \cdot \frac{4}{3} \pi}} \quad (3.49)$$

	A	B	C	D	E	F
1	Gesamtmasse	2E+30	kg			
2	Radius	700000000	m			
3	Anzahl der Schalen	30				
4	Gravitationskonstante	6,67E-11	m <sup>3</sup> /(kg s <sup>2</sup> )			
5	mittlere Dichte	1392,025741	kg/m <sup>3</sup>			
6	Masse der einzelnen Schalen	6,66667E+28	kg			
7						
8	Schalenummer	Radien der ziehenden Kugeln	1/r <sup>2</sup>	Grav. Kraft gesamt	hydrostatischer Druck	
9	0	700000000	2,04082E-18	0	0	
10	1	692134165,6	2,08747E-18	1,75447E+31	2,91444E+12	
11	2	684085364,1	2,13688E-18	3,42666E+31	5,82694E+12	
12	3	675842569,2	2,18932E-18	5,01463E+31	8,73651E+12	
13	4	667393651,4	2,2451E-18	6,51634E+31	1,1642E+13	
14	5	658725220,2	2,30458E-18	7,92958E+31	1,45422E+13	

Abbildung 3.12: Darstellung des fertigen Exceltools.

Diese Formel lässt sich nun für die Exceltabelle übersetzen und in Zelle B10 eintragen:

$$B10 = (\$B\$1 * (\$B\$3 - \$A10) / \$B\$3 / (\$B\$5 * 4/3 * pi()))^{(1/3)} \quad (3.50)$$

Aufgrund der in Excel erforderlichen Syntax muss großer Wert auf eine sorgfältige Klammersetzung gelegt werden. Die Übersichtlichkeit kann etwas erhöht werden, wenn für  $\pi$  z.B. der Zahlenwert 3,14 verwendet wird, statt ihn durch den Befehl pi() abzurufen oder weitere Spalten hinzugefügt werden, in der Zwischenberechnungen durchgeführt werden. Die eingegebenen Dollarzeichen sind zwingend erforderlich, wenn man alle weiteren Einträge der Spalte mithilfe des Ausfüllkästchens erzeugen möchte. Wird die Formel in die darunter liegende Zelle übertragen, so modifiziert Excel im Allgemeinen die gegebene Formel, indem es alle Laufindizes aus der darunter liegende Zelle bezieht. Was für die Schalenummern durchaus sinnvoll ist, würde aber auch dafür sorgen, dass Excel im nächsten Rechenschritt anstelle der Sonnenmasse den Sonnenradius verwendet, einfach weil sich der Wert unmittelbar darunter befindet. Durch das Dollarzeichen wird die Zeilennummer fixiert. Die ersten 3 Spalten können nun unmittelbar mithilfe des Ausfüllkästchens vervollständigt werden.

Um die Gravitationskraft zu ermitteln, mit der eine Massekugel die darüber liegenden Gasschichten anzieht, sollten diese in ihre Einzelkomponenten zerlegt und aufsummiert werden. Es gilt:

$$D10 = \$B\$4 * (\$B\$3 - A10) * \$B\$6 * \$B\$6 * SUMME(C\$9 : C9) \quad (3.51)$$

Daraus lässt sich unmittelbar der Schweredruck bestimmen mit:

$$E10 = D10 / (4 * \pi() * B10^2) \quad (3.52)$$

Nun können alle fehlenden Einträge der Tabelle mithilfe des Ausfüllkästchens ergänzt werden und das Resultat graphisch dargestellt werden. Im vorliegenden Beispiel wurde der Schweredruck gegen die Schalenummer aufgetragen, wobei die rechte Seite dem Zentrum und die linke Seite der Oberfläche der Sonne entspricht.

### Exceltool 2 - Der Schweredruck V2.0

Um die Wechselwirkung der Schalen untereinander zu berücksichtigen, genügt es das Exceltool 1 um eine weitere Spalte zu ergänzen und diese anschließend graphisch darzustellen:

$$F9 = \text{SUMME}(E\$9 : E9) \quad (3.53)$$

### Exceltool 3 - Das Federmodell

Die Ausgangsdaten des Federmodells werden wie folgt gewählt und in das Excelsheet eingetragen:

- Masse  $m = 0,05$  kg:  $B2 = 0,05$
- Federanzahl:  $n = 5$
- Federlänge  $l = 0,05$  m:  $B3 = 5$
- Federkonstante  $k = 60 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ :  $B4 = 60$
- Erdbeschleunigung  $g$ :  $B5 = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Die Federn werden von  $n = 1, \dots, 5$  in den Zellen D3 bis D8 durchnummeriert, der obersten Feder wird die 1 zugeordnet, sodass die Federnummer gleichzeitig der Anzahl Massestücke entspricht, die sich über ihr befinden. Die Gewichtskraft der Massen, die auf Feder  $i$  lasten, beträgt demnach:

$$F_G = i \cdot m \cdot g \quad (3.54)$$

Die Gewichtskraft von Feder 1 lässt sich in Zelle E3 berechnen mit

$$E3 = B\$2 * B\$5 * D3 \quad (3.55)$$

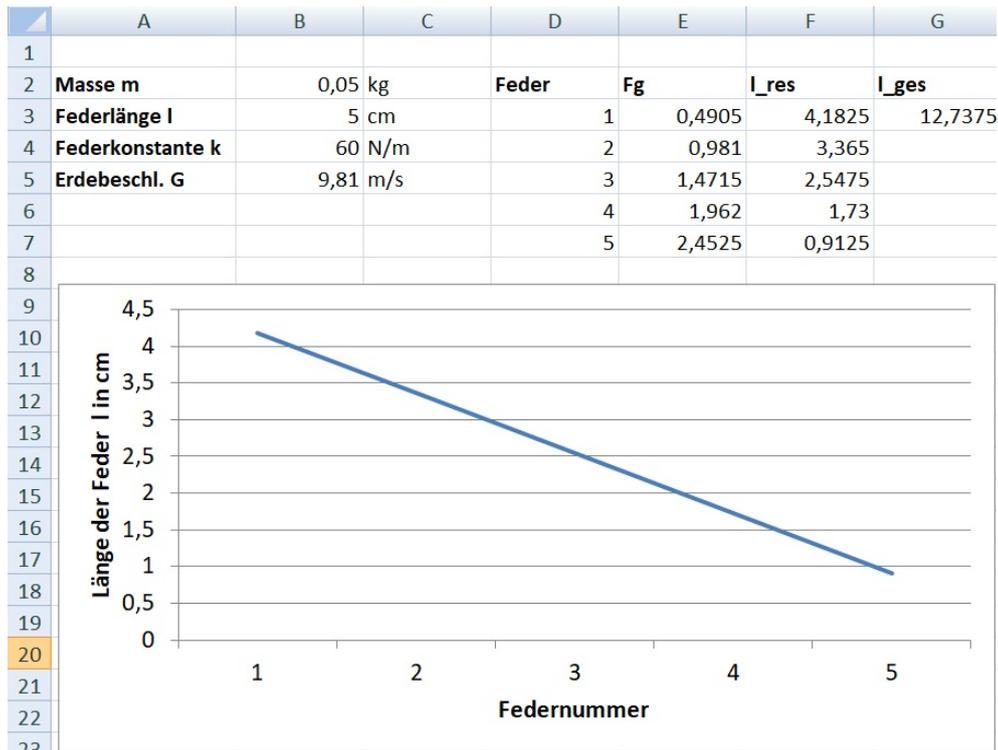


Abbildung 3.13: Darstellung des fertigen Exceltools.

und auf die darunterliegenden Zellen übertragen. Die Gewichtskraft wird gleichgesetzt mit der Rückstellkraft, welche durch das Hooke'sche Gesetz beschrieben wird, um daraus die Stauchung der Feder  $\Delta x$  zu ermitteln. Die resultierende Länge  $l_{res}$  in *cm* von Feder 1 ergibt sich nach:

$$l_{res} = l - \frac{i \cdot m \cdot g}{k \cdot 100} \quad (3.56)$$

Die resultierende Länge von Feder 1 kann in Zelle F3 berechnet werden mit

$$F3 = B\$3 - D3 * B\$2 * B\$5 / B\$4 * 100 \quad (3.57)$$

und auf die darunter liegenden Zellen übertragen werden. Die Gesamtlänge aller Federn kann z.B. in Zelle G3 berechnet werden mit

$$G3 = SUMME(F3 : F7) \quad (3.58)$$

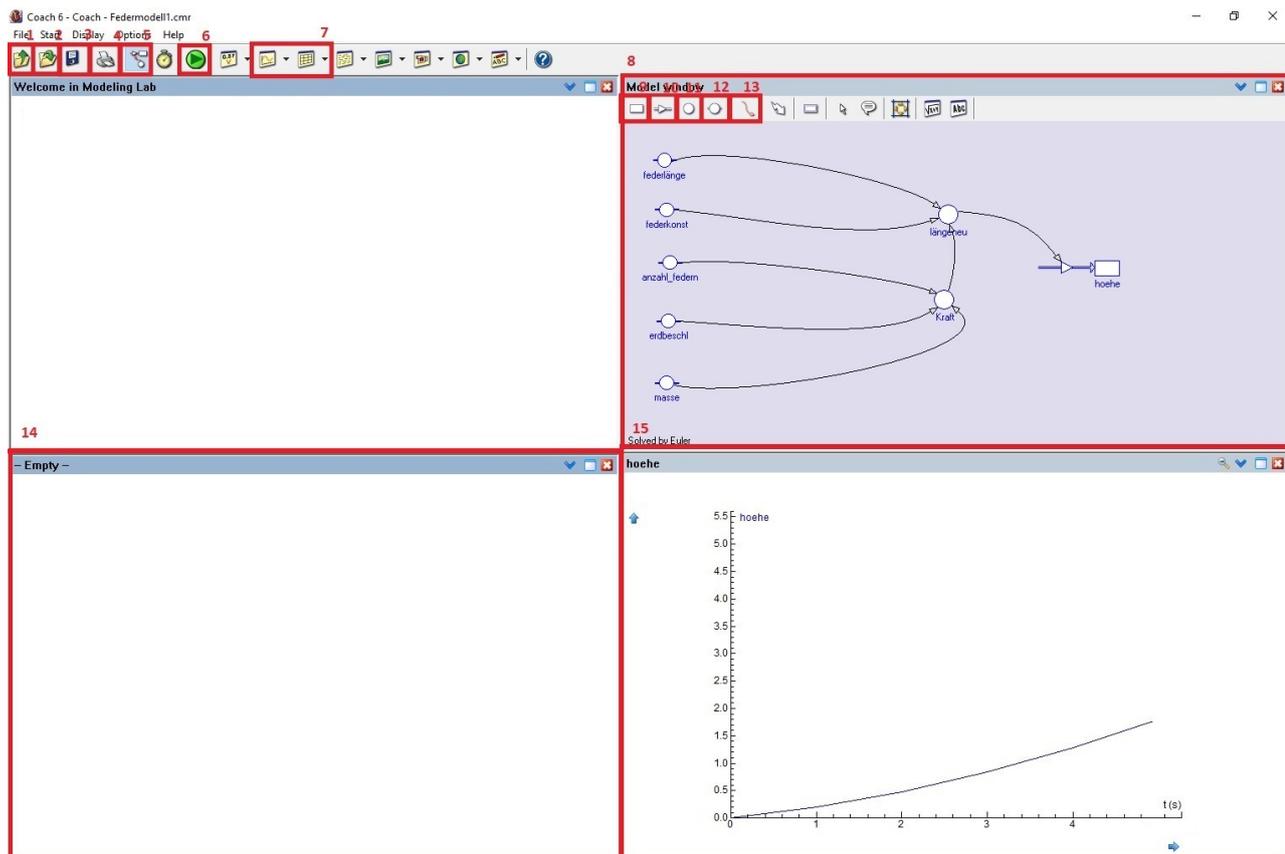


Abbildung 3.14: Aufbau vom Modellbildungsmodus in Coach.

1 = schließen, 2 = öffnen, 3 = speichern, 4 = drucken,  
 5 = Modellfenster (8) ein-/ausblenden, 6 = Berechnung  
 ausführen, 7 = Auswahl Diagramm / Tabelle, 8 = Mo-  
 dellfenster, 9 = Bestandsgröße, 10 = Flussgröße, 11 =  
 Hilfsgröße, 12 = Konstante, 13 = Konnektor, 14 = Dia-  
 grammfenster 1, 15 = Diagrammfenster 2.

### 3.3.5 Coach Tools

Als Alternative zu Excel lassen sich viele physikalische Problemstellungen auch mithilfe von Modellbildungssoftware wie „CMA Coach 6.1“ oder der kostenfreien Alternative „Dynasys“ realisieren. Der grobe Aufbau der Nutzeroberfläche, die Programmfenster sowie die für diese Arbeit wichtigsten Funktionen werden kurz am Beispiel von Coach vorgestellt, Dynasys folgt einem sehr ähnlichen Aufbau.

Über Menüpunkt 2 kann ein bestehendes Coach-Projekt geöffnet werden, in Abbildung 3.14 wurde exemplarisch das Projekt zum Federmodell geöffnet, vorgenommene Änderungen können über Menüpunkt 3 gespeichert werden. Mithilfe von Menüpunkt 5 kann das Modellfenster ein- und

ausgeblendet werden, sodass das Fenster ebenfalls zur Darstellung von Graphen oder Tabellen über die Menüpunkte 7 verwendet werden kann, es bietet sich jedoch an die beiden Diagrammfenster dafür zu verwenden (Menüpunkte 14 und 15). Das Modellfenster kann in drei verschiedenen Varianten dargestellt werden. Neben dem graphischen Modus wie in 3.14 können Modelle ebenfalls in einem Formel oder Textmodus konstruiert werden, diese werden im Rahmen der Arbeit jedoch nicht verwendet. Ein Modell kann aus bis zu 5 verschiedenen Elementen konstruiert werden:

- Menüpunkt 9 : Bestandsgrößen (für Zustandsgrößen)
- Menüpunkt 10: Flussgrößen (für Gradienten)
- Menüpunkt 11: Hilfsgrößen (zur Zwischenspeicherung von Zustandsgrößen)
- Menüpunkt 12: Konstanten (zur Speicherung von (Natur)konstanten)
- Menüpunkt 13: Konnektoren (zur Herstellung von mathematischen Beziehungen zwischen obigen Objekten)

Um physikalische Größen darzustellen, die sich mit der Zeit (bzw. für die Theorie des inneren Sternaufbaus mit dem Abstand vom Zentrum) verändern, werden Bestandsgrößen platziert. Für jede Bestandsgröße muss ein Anfangswert definiert werden und es besteht die Möglichkeit eine Flussgröße anzubringen, welche angibt, inwiefern sich die Bestandsgröße ändert, sie stellen somit Differentialgleichungen dar. Hilfsgrößen können verwendet werden, um Ergebnisse aus Zwischenrechnungen aufzunehmen und für die weitere Verwendung im Modell zur Verfügung zu stellen. Hilfsgrößen können im Gegensatz zu Bestandsgrößen nicht mit einer Flussgröße versehen werden. Hilfsvariablen können aber an Flussgrößen übergeben werden, um Bestandsgrößen zu verändern. Bestandsgrößen können hingegen nicht an Flussgrößen übergeben werden. Konstanten werden verwendet, um feste Modellparameter oder Naturkonstanten aufzunehmen und für weitere Berechnungen bereitzustellen. Wird eine oder mehrere Größen verwendet, um daraus eine weitere zu berechnen, so müssen diese immer mit einem Konnektor verbunden werden. Die einzige Ausnahme stellt die Flussgröße dar, die unmittelbar an die Bestandsgröße angeheftet werden muss, die sie verändert.

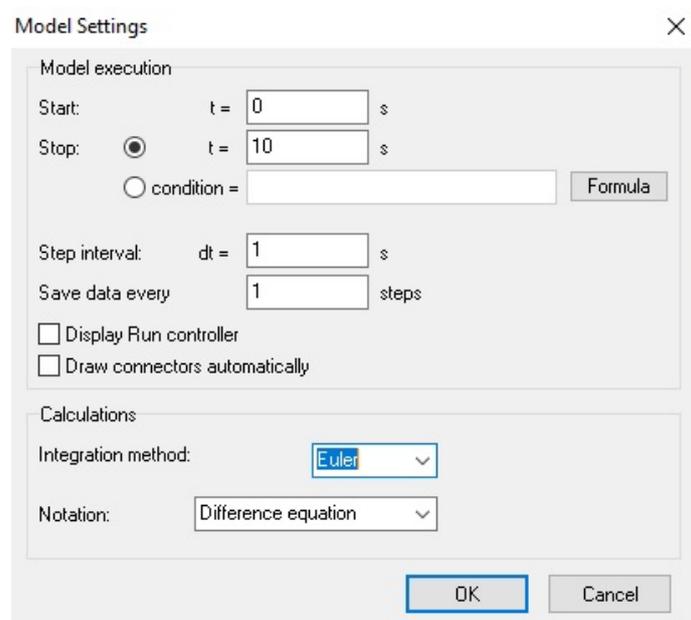


Abbildung 3.15: Konfiguration der Laufvariablen.

Um aus den vorgestellten Grundbauteilen ein sinnvolles Modell konstruieren zu können, müssen über das Menü „Optionen“ → „Einstellungen“ die Parameter einer Laufvariablen festgelegt werden, dies ist in Coach grundsätzlich die Zeit. Dies umfasst einen Start- und Endwert, Abbruchbedingungen sowie die Schrittweite. Darüber hinaus kann das Euler'sche Tangentenverfahren sowie das Runge-Kutta-Verfahren 2. und 4. Ordnung als Integrationsmethode ausgewählt werden (siehe Abbildung 3.15). Zu beachten ist hierbei, dass in Coach grundsätzlich die Zeit  $t$  in Sekunden als Laufvariable verwendet wird, dies soll allerdings kein Grund sein, diese nicht allgemeiner zu verwenden und eine inkorrekte Achsenbeschriftung in Kauf zu nehmen.

### Coach Tool 1 - Das Federmodell

Bevor das Federmodell im Modellfenster konstruiert werden kann, muss eine sinnvolle Laufvariable festgelegt werden. Es bietet sich an, die Nummerierung der einzelnen Federn zu verwenden mit dem Anfangswert  $t_0 = 0$  und dem Endwert  $t_{10} = 10$ , bei einer Schrittweite von 1, so wie in Abbildung 3.15 ersichtlich. Schließlich können die Konstanten des Modells wie in Abbildung 3.16 eingefügt werden. Per Rechtsklick auf die einzelnen Variablen können Werte sowie Namen vergeben werden, dabei ist es sinnvoll aussagekräftige Namen zu verwenden, da die Variablen in



Abbildung 3.16: Einfügen der Konstanten.

Formeln über ihre Namen angesprochen werden. Die folgenden Variablen werden verwendet:

- $federlänge = 1 \text{ cm}$
- $federkonst = 50 \text{ Ncm}^{-1}$
- $anzahl\_federn = 10$
- $erdbeschl = 10 \text{ ms}^{-2}$
- $masse = 0,04 \text{ kg}$

Anschließend müssen zwei Hilfsgrößen über die entsprechenden Schaltflächen eingefügt werden, einerseits die Kraft  $F$ , mit der jede einzelne Feder zusammengedrückt wird, andererseits die aus der Kraftwirkung resultierenden Längen der jeweiligen Federn, hier mit „längeneu“ bezeichnet. Die Hilfsgrößen müssen nun mit Konnektoren mit den Größen verbunden werden, die für die Berechnung erforderlich sind, wie in Abbildung 3.17 ersichtlich. Im Eigenschaften-Fenster der Hilfsgröße „Kraft“ kann nun die folgende Formel, hinterlegt werden:

$$kraft = erdbeschl * masse * (anzahl\_federn - t) \quad (3.59)$$

Die Kraft wird hier für die Schritte  $t = 0$  bis 10 ermittelt und lässt sich unmittelbar verwenden um die resultierenden Federlängen zu bestimmen:

$$längeneu = federlänge - Kraft/federkonst \quad (3.60)$$

Die Gesamtlänge aller Federn ergibt sich durch Summation aller einzelnen Federlängen und kann durch platzieren einer Bestandsgröße *hoehe*

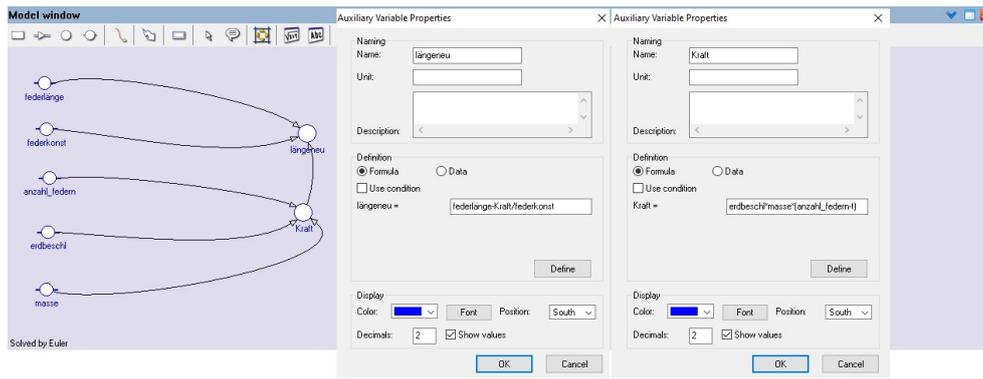


Abbildung 3.17: Einfügen der Hilfsgrößen.

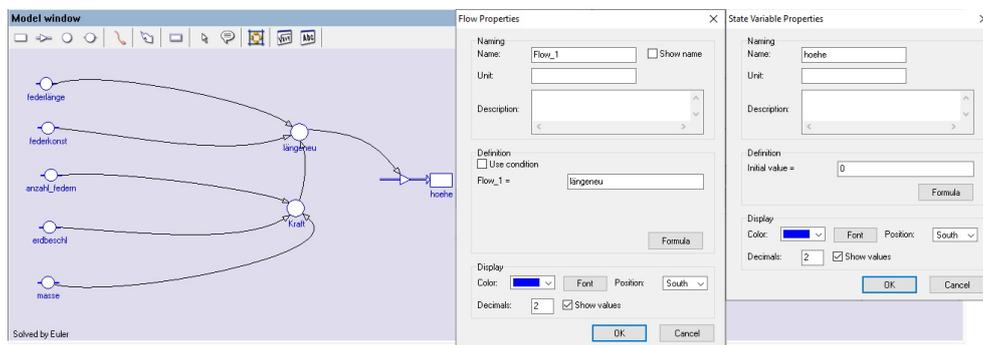


Abbildung 3.18: Das fertige Federmodell.

und einer damit verbundenen Flussgröße  $flow\_1$  ermittelt werden, indem die Hilfsgröße  $längeneu$  mit  $flow\_1$  verbunden wird. Über das Eigenschaftenfenster kann für  $flow\_1$  die Formel

$$flow\_1 = längeneu \quad (3.61)$$

hinterlegt werden, sodass auf diese Weise mit jedem Iterationsschritt die Federlänge der betrachteten Feder zur Bestandsgröße „hoehe“ addiert wird. Dieser muss nun noch der Startwert Null vergeben werden. Sofern alle beschriebenen Schritte korrekt umgesetzt wurden, kann durch einen Klick auf Menüpunkt 6 die Berechnung gestartet werden. Alle Berechneten Größen können mithilfe der Menüpunkte 7 als Grafik oder Tabelle dargestellt werden. Das Ergebnis der durchgeführten Rechnung ist in Abbildung 3.14 ersichtlich.

# Kapitel 4

## Modul B - Gaskugelmodelle bis 1908

Das nun folgende Lernmodul beschäftigt sich insbesondere mit der Entwicklung der ersten Gaskugelmodelle. Im Jahre 1908 setzte Robert Emden mit seinem Werk „Gaskugeln“ [Emd07] einen wichtigen Meilenstein. Die darin entwickelte Theorie polytroper Gaskugeln fasste frühere Theorien zusammen und erreichte einen solchen Abstraktionsgrad, dass sie auch für die weitere Modellentwicklung richtungsweisend war und noch heute fester Bestandteil gängiger Lehrbücher ist. Zunächst soll in den erkenntnistheoretischen Überlegungen und der wissenschaftshistorischen Einordnung die entscheidenden Gedankengänge auf dem Weg hin zu dieser Theorie beschrieben werden und viele der auftretenden Modellüberlegungen im darauffolgenden fachlichen Teil detailliert ausgeführt werden.

### 4.1 Erkenntnistheoretische Überlegungen und wissenschaftshistorische Einordnung

Die zentralen Erkenntnisse des vorangegangenen Lernmoduls können wie folgt zusammengefasst werden:

- Sterne werden durch ihre eigene Gravitation zusammengehalten,
- es gibt eine Gegenkraft, die diese vollständig kompensiert, deren physikalische Ursache ist noch ungeklärt,
- der Aggregatzustand der Sonnenmaterie ist eine noch offene Frage, aus der physikalischen Perspektive des 19. Jahrhunderts sprechen

aber gewichtige Argumente gegen einen gasförmigen Zustand:

- Die mittlere Dichte der Sonne liegt numerisch zwischen der Dichte von Wasser und der mittleren Dichte der Erde.
  - Die Sonne sendet ein kontinuierliches Spektrum aus, was zum damaligen Kenntnisstand nur bei Flüssigkeiten und Festkörpern auftritt. Es war nicht bekannt, unter welchen Voraussetzungen dies auch bei einem Gas möglich ist.
  - Bislang nicht thematisiert: Die Sonne besitzt einen scharfen Rand. Zunächst erschien es nicht möglich, dass eine Gasmasse einen solchen Rand erzeugen könnte.
- Ausgangspunkt für ein funktionierendes Sternmodell ist ein Kräfte- bzw. Druckgleichgewicht, das an jeder Stelle im Stern erfüllt sein muss.
  - Der Druck nimmt aufgrund der allseitigen Druckausbreitung und aus Stabilitätsgründen zum Zentrum hin zu.
  - Um einen genaueren Schätzwert für das Alter der Sonne auf Grundlage der Kontraktionshypothese zu erhalten, ist die Kenntnis der Masseverteilung im Inneren der Sonne erforderlich. Dies gibt Anlass dazu, Überlegungen zum Dichteprofil der Sonne anzustellen.
  - Die Kontraktionshypothese stellt ein einfaches Modell der Sternentwicklung dar: Ihr zufolge schrumpfen Sterne im Laufe der Zeit und setzen dabei Energie frei, die sie aus der Kontraktionsarbeit beziehen. Die für die Sonne ermittelte Zeitspanne erscheint unzureichend, eine effizientere Energiequelle ist erforderlich.

### 4.1.1 Der Aggregatzustand der Sonne - Teil 2

Wie bereits gezeigt wurde, gab es historisch gute Argumente, die dagegen sprachen, dass die Sonne sich in einem gasförmigen Zustand befinden könne, sodass Flüssigkeitskugelmodelle am Ende des 19. Jahrhunderts favorisiert wurden. Mit fortschreitender Entwicklung der Physik konnten jedoch viele Argumente zu Gunsten einer Flüssigkeitskugel entkräftet werden:

- Experimente von T. Andrews im Jahre 1869 mit Gasen bei hohen Temperaturen hatten gezeigt, dass diese oberhalb einer bestimmten kritischen Temperatur nicht mehr verflüssigt werden konnten, unabhängig vom vorherrschenden Druck. Die Temperatur im Inneren der Sonne sollte die dabei ermittelte kritische Temperatur weit überschreiten.
- Um das Jahr 1900 haben Untersuchungen von Gasen unter sehr hohem Druck und bei hoher Temperatur gezeigt, dass diese ein kontinuierliches Spektrum emittieren. Die damals naheliegende Folgerung von Kirchhoff, der von einem kontinuierlichen Sternspektrum auf einen festen oder flüssigen Aggregatzustand geschlossen hatte, war somit hinfällig. Die Ursache für die Druckverbreiterung der Spektrallinien war jedoch noch unbekannt.<sup>1</sup>

Diese Argumente konnten zwar nicht beweisen, dass die Sonne gasförmig sein muss, doch zumindest trugen sie dazu bei, dass die Entwicklung von Gaskugelmodellen intensiver betrieben wurde. Auch wenn sich die Vorstellung verbreitete, dass die Sonne zwar ein gasförmiges Objekt sein könnte, wurde deutlich zwischen einer gasförmigen Sonne und der Sonne als Objekt aus idealem Gas unterschieden. Die Mehrheit der Forscher vertraten lediglich die allgemeinere Ansicht, sie sei ein Gas. Dies beruht unter anderem auf Untersuchungen von Maxwell, welche ergaben, dass die Viskosität von Gasen bei steigender Temperatur ansteigt. So beschreibt Young „...daß diese Gasmasse der Bewegung ähnlich wie eine Masse Pech oder Glaserkitt widersteht.“ [You83] Die Sonnenmaterie schien sich also, trotz des gasförmigen Zustandes, ähnlich einer zähfließenden Flüssigkeit zu verhalten, was der Vorstellung eines idealen Gases klar widerspricht. Dementsprechend wurde 1900 durch N. Eckholm der Versuch unternommen, ein Gaskugelmodell auf Grundlage der Van-der-Waals Gleichung aufzustellen. Sein Versuch war jedoch wenig überzeugend, da mathematische Schwierigkeiten ihn dazu zwangen, das Korrekturglied für den Druck zu vernachlässigen, sodass die selben physikalischen Bedenken bestehen blieben, wie bei Verwendung der Gleichung des idealen Gases.

Bis ins Jahr 1907, als Emden in seinem Werk „Gaskugeln“ [Emd07] mit der Lane-Emden-Gleichung die allgemeinste Formulierung von Gaskugelmodellen publizierte, konnte nicht abschließend geklärt werden, ob

---

<sup>1</sup>Heutzutage lässt sich dies mithilfe einer Quecksilber-Höchstdrucklampe eindrucksvoll demonstrieren.

die Sonne eine Flüssigkeits- oder eine Gaskugel (aus idealem Gas) sei, sodass über mehrere Jahrzehnte hinweg zwei Hypothesen nebeneinander standen, ohne dass entscheidbar war, welche davon die richtige ist.

### 4.1.2 Entwicklung der Sonnenmodelle bis 1908

Um das Jahr 1870 war noch unklar, in welchem Aggregatzustand sich die Sonne befindet, sodass Theorien über Gas- bzw. Flüssigkeitskugeln in direkter Konkurrenz zueinander standen. Auch wenn sich die Grundannahmen beider Modellansätze scheinbar gravierend voneinander unterscheiden, spielte diese Unterscheidung für die Modellrechnungen an sich eine eher untergeordnete Rolle. Viele beobachtete Phänomene auf der Sonnenoberfläche mussten ohnehin ausgeklammert werden, da die frühen Modellüberlegungen sie nicht annähernd hätten abbilden können. Einerseits zwangen mathematische Probleme die Forscher dazu, mit einfachen Gleichungen zu arbeiten, andererseits war der physikalische Kenntnisstand nicht so weit entwickelt, dass Theorien verfügbar waren, um die Situation im Sterninneren genauer beschreiben zu können und einfache Näherungen angewandt werden mussten.

Karl Friedrich Zöllner, ein Verfechter der Flüssigkeitstheorie, entwickelte zwischen 1870 und 1873 bereits mathematisch sehr ausgefeilte Modelle zum Aufbau der Sonne. Diese erstellte er auf Grundlage vorangegangener Arbeiten zur Entwicklungsgeschichte der Sonne. Seiner Ansicht nach sollten die Sterne fünf Entwicklungsstadien durchlaufen: Zöllner definierte eine Abkühlungssequenz, die bei einem glühend-gasförmigen Zustand bei der Entstehung startete und über mehrere Schritte zu einem erkalteten Festkörper führte. Seiner Auffassung nach wäre die Sonne in einem glühend flüssigen Zustand gewesen. An ihrer Oberfläche würden durch Abkühlung Schlackebildungsprozesse stattfinden, die sich als Sonnenflecken zeigen. Bedingt durch die geringe Temperatur der Sonnenflecken sollten Strömungen in der Sonnenatmosphäre entstehen, ähnlich wie es vom Land-See-Wind auf der Erde bekannt ist.

Auch wenn die Sonne Zöllners Ansicht nach eine Flüssigkeitskugel war, beschäftigte er sich ebenfalls mit Gaskugelmodellen. Er stellte seine Überlegungen dazu allerdings nicht an, um etwas über das Innere von Sternen zu lernen, sondern bezog diese auf das Universum an sich. Es gelang ihm als erster, die Differentialgleichungen einer isothermen Gaskugel aufzu-

stellen und deren Lösung korrekt anzugeben. Er wies nach, dass deren Radius im Unendlichen liegen müsse. Für die Theorie des inneren Aufbaus der Sterne ist sein Resultat insofern bedeutsam, als dass es beweist, dass es keine isothermen Sterne geben kann, die dem Gesetz des idealen Gases folgen. Dies wird in Kapitel 4.2.2 ausführlich dargestellt.

Demgegenüber stand die Entwicklung der ersten Gaskugelmodelle, zu deren wichtigsten Vertretern Homer Lane, August Ritter, Lord Kelvin und Robert Emden zählen. Lane beschäftigte sich zunächst mit der Stabilität von Sternen. Er konnte zeigen, dass ein Stern bei Kontraktion seine Temperatur erhöhen muss, um seine Stabilität gegen die eigene Schwerkraft aufrecht erhalten zu können. Dies wird als das Lane'sche Gesetz bezeichnet und lässt sich mathematisch durch die Proportionalität

$$T \propto \frac{1}{R} \quad (4.1)$$

ausdrücken. Sterne, die annähernd durch das Gesetz des idealen Gases beschrieben werden können, müssen dieses Gesetz befolgen oder sind instabil. Wie wir hier vorwegnehmen können, ist das Lane'sche Gesetz eine unmittelbare Folge des Virialsatzes für ein Vielteilchensystem, der bekanntlich nur für hydrostatisch stabile Konfigurationen gilt. Bezieht man Lanes Gesetz auf die Lebensgeschichte der Sterne, so hat dies scheinbar paradoxe Konsequenzen: Sterne, die dem Gesetz des idealen Gases folgen, sollten demnach im Laufe ihrer Geschichte allmählich schrumpfen und dabei immer heißer werden, was im Widerspruch zu damals gängigen Theorien zur Entwicklungsgeschichte der Sonne stand. Außerdem wird durch das Lane'sche Gesetz offensichtlich, dass nicht die ganze Kontraktionsarbeit freigesetzt werden kann. Vielmehr muss ein Teil der Energie darauf verwendet werden, die Sonne aufzuheizen. Anschaulich ist dies völlig klar: Ist das massebehaftete Objekt kompakter, dann wirkt eine größere Gravitationskraft aufgrund des verringerten Abstandes zum Zentrum. Diese wiederum macht eine größere Gegenkraft erforderlich, um einen Gleichgewichtszustand zu ermöglichen. Nimmt man an, dass diese Gegenkraft durch nichts anderes als den Gasdruck verursacht wird, erklärt sich die Notwendigkeit der höheren Temperatur.

Das von Helmholtz geschätzte Alter der Sonne muss folglich weiter verringert werden. Zuvor ging man davon aus, dass Sterne, wie auch alle irdischen Körper, durch Aussenden von Wärmestrahlung allmählich

abkühlen, dass kosmische Körper eine Phase der Temperaturerhöhung durchlaufen können - und zwar ausschließlich durch innere Mechanismen - schien undenkbar. Damals hat Lanes Entdeckung jedoch für weniger Aufsehen in der Astrophysik gesorgt, als man vermuten würde, da niemand mit Sicherheit wusste, ob es tatsächlich Himmelsobjekte gibt, die dem Gesetz des idealen Gases folgen.

August Ritter stieß bei seinen Untersuchungen, unabhängig von Lane, auf den Zusammenhang zwischen der inneren Energie  $U$  und der potentiellen Energie  $E_{pot}$ , der auch als Virialsatz bezeichnet wird. Für eine Gaskugel mit dem Adiabatenexponenten<sup>2</sup>  $\chi$  gilt:

$$U = \frac{E_{pot}}{3(\chi - 1)} \quad (4.2)$$

Daraus schloss er, dass es keine stabilen Sterne mit  $\chi < \frac{4}{3}$  geben kann. Im Grenzfall  $\chi = \frac{4}{3}$  muss für Gleichung 4.2 eine Änderung der potentiellen Energie komplett in innere Energie gehen. Reale Sterne können diese Bedingung aber nicht erfüllen, denn diese geben permanent Energie an die Umgebung ab, sie würden also bei Unterschreitung des Adiabatenexponenten unter  $\frac{4}{3}$  keinen Gleichgewichtszustand finden. Des weiteren war aus der Thermodynamik bekannt, dass der größte denkbare Adiabatenkoeffizient  $\gamma$  für einatomige Gase  $\frac{5}{3}$  beträgt. Nach Demtröder ([Dem01, S. 282]) gilt

$$\gamma = \frac{f + 2}{f} \leq \frac{5}{3} \quad (4.3)$$

da die Freiheitsgrade  $f$  pro betrachtetem Teilchen nicht kleiner als 3 sein können. Demnach gilt für alle stabilen Gaskugeln:

$$\frac{4}{3} < \chi \leq \frac{5}{3} \quad (4.4)$$

Nimmt man für die Sonne an, sie bestünde ausschließlich aus Wasserstoff ( $\chi = \frac{5}{3}$ ), so folgt, dass eine Änderung der potentiellen Energie je zur Hälfte in die innere Energie und in die Energieabgabe des Objektes überführt wird.

Lord Kelvin stieß bei einer Erweiterung der Helmholtz'schen Kontraktionshypothese ebenfalls auf dieses Resultat: Er nahm an, dass die Sonne aufgrund ihrer hohen Dichte, welche die des inkompressiblen Wassers

---

<sup>2</sup>Der Adiabatenkoeffizient ergibt sich aus dem Quotienten der Wärmekapazitäten  $\chi = \frac{c_P}{c_V}$

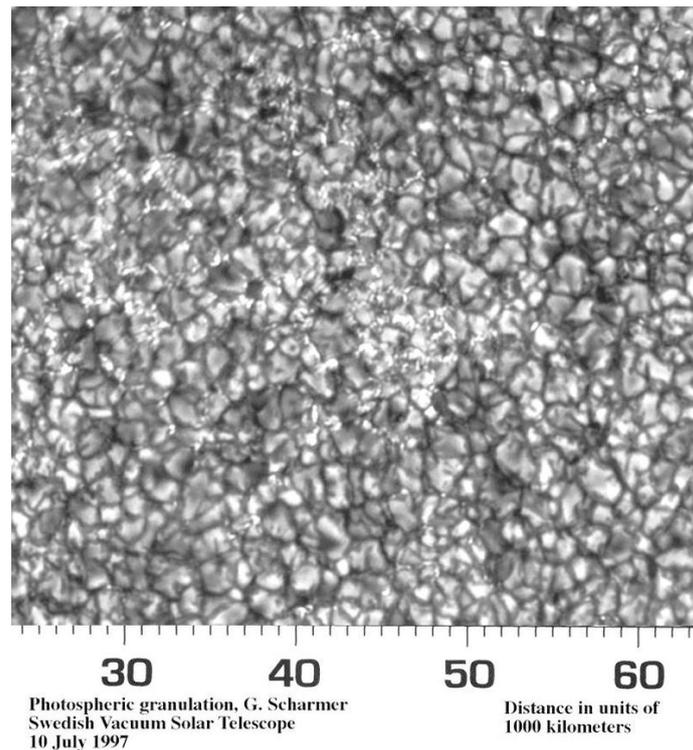


Abbildung 4.1: August Ritter wertete die beobachtete Granulation als Hinweise auf aufsteigende bzw. absinkende Masse [Sch97a]

deutlich übersteigt, nicht in der Lage sei weiter zu kontrahieren. Er berechnete, dass die in ihr gespeicherte Restwärme noch ausreichen würde, um ihre Leuchtkraft für weitere 20 Millionen Jahre aufrecht zu erhalten. Die freigesetzte potentielle Energie nach Helmholtz und die in der Sonne gespeicherte Wärme stimmen numerisch überein, genau so, wie es der Virialsatz fordert.

Bereits 1865 erkannte H. Faye, dass die an der Photosphäre abgegebene Wärmestrahlung ersetzt werden muss, da die äußeren Schichten der Sonne andernfalls aufgrund der enormen Leuchtkraft zu schnell abkühlen würde. Dies erfordert einen äußerst effizienten Mechanismus, der kontinuierlich Energie aus dem Inneren an die Oberfläche transportiert. Er stellte die Hypothese auf, dass konvektive Prozesse dafür verantwortlich seien. Dies wurde durch analoge Überlegungen zum Verhalten der Erdatmosphäre, aber auch durch astronomische Beobachtungen nahegelegt (August Ritter wertete die Granulation auf der Sonnenoberfläche, wie sie in Abbildung (4.1) zu sehen ist, als Hinweise auf aufsteigende bzw. absinkende Masse). Darüber, dass konvektive Prozesse im Sonneninneren von

großer Bedeutung sein müssten, herrschte weitestgehend Einigkeit unter den Forschern, unabhängig von der Diskussion, in welchem Aggregatzustand sie sich befinden solle.

Im Jahre 1870 gelang es dem amerikanischen Physiker Homer Lane mit der Arbeit „On the theoretical temperature of the Sun, under the hypothesis of a gaseous mass maintaining its volume by its internal heat, and depending on the laws of gases as known to terrestrial experiment“ [Lan70] die Gleichungen einer Gaskugel, deren Inneres vollständig durch Konvektion durchmischt wird, aufzustellen und numerisch zu lösen. Er nahm an, dass die Sonnenmaterie, ähnlich wie die unteren Schichten der Erdatmosphäre, aufgrund von konvektiven Strömungen beständig durchmischt werden, um die kontinuierliche Energieabgabe ins All auszugleichen. Ausgekühlte Gasmassen sollten demnach absinken und durch heiße, aufsteigende Gasmassen tief aus dem Inneren der Sonne ersetzt werden. Die Meteorologie stellte seinerzeit bereits entsprechende mathematische Modelle für die Erdatmosphäre bereit, die von Lane nun auf die Sonne übertragen werden konnten. Grundlage seiner Berechnungen waren:

Die hydrostatische Grundgleichung

$$dp = -G \frac{M(r)}{r^2} \cdot \rho dr, \quad (4.5)$$

das Gesetz des idealen Gases

$$p = \frac{R_G}{\bar{\mu}} \rho T, \quad (4.6)$$

und die Poissongleichung, welche sich ergibt, wenn der Konvektionsprozess quasistatisch abläuft. Heute wird üblicherweise die allgemeinere Polytropengleichung

$$p = K \cdot \rho^\chi \quad (4.7)$$

verwendet, mit der Polytropenkonstante  $K$  sowie dem Polytropenexponent  $\chi$  (welcher zur Zeit Lanes speziell dem Adiabatenexponenten entsprach). Dabei handelt es sich um sternspezifische Konstanten, für die hier gelten soll:

$$\chi = \frac{c_P}{c_V} \quad (4.8)$$

und

$$K = \frac{p_0}{\rho_0^{\chi}}. \quad (4.9)$$

Ihm gelang es, dieses Gleichungssystem als eine einzige Differentialgleichung zusammenzufassen, die später weiter verallgemeinert und als Lane-Emden Differentialgleichung bekannt wurde. Er gab keine physikalischen Begründungen dafür, warum die zuvor genannten Gleichungen im Inneren der Sonne gültig sein sollten, was seinerzeit auch unmöglich war. Dadurch war Lane vermutlich gezwungen, den Titel seiner Arbeit äußerst vorsichtig zu formulieren. Mit seinen Überlegungen verfolgte er das Ziel, die Oberflächentemperatur der Sonne auf theoretischem Wege zu ermitteln. Auch wenn seine Schätzung nicht zufriedenstellend war, beschriftet Lane, wie er in der Einleitung selbst bemerkt, mit seiner Arbeit einen für die Astrophysik neuen methodischen Erkenntnisweg:

„Not any longer relying on my first rough estimate based on assumed high temperatures at the photosphere, the question was now inverted. Assuming the gaseous constitution, and assuming the laws expressed in Poisson’s formulae, known to govern the constitution of gases at common temperatures and densities, what shall we find to be the temperatures and densities corresponding to the observed volume of the sun supposing it were composed of some known gas such as hydrogen, or supposing it to be composed of such a mixture of gases as would be represented by common air. Pure hydrogen will, of course, give us the lowest temperature of all known substances, under the general hypothesis.“[Lan70]

Ausgehend von allgemeingültigen Gesetzmäßigkeiten und lediglich der Kenntnis des Volumens und der Masse der Sonne gelang es ihm, die daraus resultierende Struktur und Temperatur in deren Inneren abzuleiten. Bis zu diesem Zeitpunkt war es üblich gewesen, von beobachteten Phänomenen auszugehen und danach zu fragen, welche physikalischen Vorgänge im Sterninneren für eben diese verantwortlich sein könnten. Lane rückte rein theoretische Argumente in den Fokus.

Auf Basis der oben genannten Gleichungen war es Lane möglich, den theoretischen Verlauf von der Dichte, dem Druck und der Temperatur im Inneren der Sonne durch numerische Integration zu ermitteln. Dazu musste er weiter einen bestimmten Wert für den in Gleichung 4.9 auftre-

tenden Adiabatenexponenten  $\chi$  annehmen. Er führte die Berechnung für  $\chi = 1,4$  durch, dem experimentell ermittelten Wert für Luft, sowie für  $\chi = \frac{5}{3}$ , dem Wert für einatomige Gase.

In der Zeit bis 1908 lief die weitere Entwicklung der Sternmodelle sehr verworren und ist geprägt von zahlreichen Mehrfachentdeckungen, z.B. des Lane'schen Gesetzes, was hier nicht im Detail erörtert werden soll. Es erscheint zweckmäßig lediglich die grobe geschichtliche Entwicklung darzulegen, eine genaue Darstellung der Geschehnisse ist beispielsweise in der Dissertation von Schwarz ([Sch92]) zu finden.

August Ritter publizierte in den Jahren 1878 - 1889 19 Arbeiten zum Thema Gaskugeln und veröffentlichte als Erster eine Monographie dazu. Darin legte er die Gleichung des idealen Gases hypothetisch als Zustandsgleichung der Sonnenmaterie, die Gleichung für eine adiabatische Atmosphäre, sowie die Kontraktion als Mechanismus für die Energiefreisetzung zugrunde. Er löste die Gleichungen für adiabatische Gaskugeln mit ähnlicher chemischer Zusammensetzung wie die Erdatmosphäre mit dem Adiabatenexponenten  $\chi = 1,44$ , sowie formal für  $1 < \chi < \infty$ , um auch zusammengesetzte Gaskugeln betrachten zu können. Er fand die geschlossene Lösung für die Spezialfälle  $\chi = \infty$  und  $\chi = 2$  und beschäftigte sich mit Spezialfällen wie isothermen Gaskugeln, isothermen Gaskugeln mit fester Hülle oder adiabatischen Gaskugeln mit isothermem Kern. Er entdeckte das Lane'sche Gesetz, wie bereits erwähnt, erneut, ohne zuvor Kenntnis davon zu haben und stellte darauf aufbauend den Zusammenhang zwischen innerer Energie  $U$  und potentieller Energie  $E_{Pot}$  einer Gaskugel her, der sich aus Überlegungen zu deren Stabilität ergab. Neben diesen Aspekten, die im aktuellen Lernmodul noch von zentraler Bedeutung sein werden, stellte er eine Theorie pulsierender Gaskugeln auf und fand den Zusammenhang zwischen Pulsationsperiode  $T_p$  und mittlerer Dichte  $\bar{\rho}$  :

$$T_p \cdot \sqrt{\bar{\rho}} = C \quad (4.10)$$

womit er eine Erklärung für periodisch veränderliche Sterne fand. Des Weiteren gelang es ihm ein Modell zu entwickeln, das es ihm ermöglichte, die Oberflächentemperatur eines Sterns zu berechnen und in Kombination mit dem Stefan'schen Strahlungsgesetz dessen Leuchtkraft zu bestimmen. Auf diesem Weg gelang es ihm, eine Art Masse-Leuchtkraft-Beziehung theoretisch zu begründen.

Auf Grundlage seiner breiten Erkenntnisse stellte er als erster eine Theo-

Tabelle 4.1: Spezialfälle polytroper Zustandsänderungen.

Polytropy- exponent $\chi$	Spezialfall
0	isobar
1	isotherm
$\infty$	isochor
$\chi$	adiabat

rie der Sternentwicklung auf, welche über eine simple Abkühlungssequenz hinaus ging und das Lane'sche Gesetz berücksichtigte. Junge Sterne sollten demnach zunächst wenig Licht emittieren und bedingt durch ihre Kontraktion nach und nach ihre Temperatur und Leuchtkraft erhöhen, wobei sich ihre Farbe vom roten in den blauen Bereich verschieben sollte. Nach einer gewissen Zeit erreichen sie ein Dichtemaximum, da sie sich nicht beliebig kontrahieren können und kühlen daraufhin langsam aus, wobei sich ihre Farbe zurück in den rötlichen Bereich verschiebt.

Um das Jahr 1880, als Ritter den Großteil seiner Arbeit zum inneren Aufbau der Sterne leistete, war das wissenschaftliche Interesse daran als eher gering einzustufen. Als im Jahre 1908 die Monographie „Gaskugeln“ von Robert Emden erschien, traf dieses Werk auf fruchtbareren Boden und das allgemeine Interesse an einer umfassenden Darstellung, für deren Verständnis das Studium weiterer Literatur nicht zwingend erforderlich war, stieg erheblich an. Seiner Arbeit liegt ebenfalls die Annahme zugrunde, die Sonne sei eine adiabatische Gaskugel, bestehend aus idealem Gas. Darauf aufbauend entwickelt er die klassische Theorie der Gaskugeln, wobei er die wesentlichen Erkenntnisse Ritters aufgriff. Durch die Einführung des Begriffs der polytroper Zustandsänderung

$$\frac{dQ}{dT} = K \quad (4.11)$$

gelang es ihm, die Gaskugeltheorie in einen solch abstrakten Rahmen einzubetten, der einerseits den Spezialfall der adiabatischen Gaskugel beinhaltet, aber auch das später durch Eddington entwickelte Gaskugelmodell im Strahlungsgleichgewicht beschreiben konnte. Er führte die Theorie der polytroper Gaskugeln mathematisch auf das Lösen einer

Differentialgleichung 1. Ordnung mit zwei Variablen zurück, welche im Nachhinein physikalisch mit Leben zu füllen war. Die Lösungen für verschiedene Parameter stellte er tabellarisch dar, sodass sie als Grundlage für weitere Forschungen bereit standen. Die Lane-Emden-Gleichung selbst wird aufgrund des hohen Abstraktionsgrades in dieser Arbeit nicht näher thematisiert, da die Vorzüge eben dieser vor allem auf der mathematischen Seite zu finden sind. Der in dieser Arbeit vorgeschlagene Umgang mit dem Gaskugelmodell ist dadurch mathematisch etwas umständlicher, bietet aber für Lernende den Vorteil, die abstrakten Variablen und Lösungen der Lane-Emden-Gleichung zu umgehen und mit Gleichungen zu arbeiten, die jederzeit physikalisch leicht interpretiert werden können. Die Herleitung der Lane-Emden-Gleichung, sowie der Umgang mit eben dieser, findet sich in zahlreicher Literatur zum Sternaufbau.

### 4.1.3 Kritik am Konvektionsgleichgewicht

Aus heutiger Sicht beschreibt das von Lane entwickelte Sternmodell die Bedingungen im Inneren der Sonne nur sehr unzureichend. Die durch Lane eingeführte Poissongleichung ist strenggenommen nur gültig, wenn die Konvektionsprozesse im Sterninneren quasistatisch ablaufen. Es war jedoch seiner Zeit schon denkbar, dass die Konvektion im Inneren der Sonne durchaus mit sehr hoher Geschwindigkeit ablaufen sollte. Des Weiteren musste eine Ursache dafür gefunden werden, warum die vorliegende Gasmasse den bei der Konvektion auftretenden Durchmischungsprozess aufrecht erhält. In der Erdatmosphäre sorgt unter anderem die Erwärmung des Erdbodens dafür, im Inneren der Sonne ist dies nicht so leicht zu beantworten.

Auch wenn die angestellten physikalischen Überlegungen bereits sehr ausgefeilt waren und in ein mathematisches Modell übertragen werden konnten, gibt es keine Möglichkeit die Berechnungen anhand von Beobachtungsdaten zu überprüfen.

Darüber hinaus wird nicht berücksichtigt, dass die durch den Stern strömenden Photonen einen Strahlungsdruck ausüben, der in einer Größenordnung liegt, der zur Stabilisierung gegen den gravitativen Kollaps beitragen kann.

Beide letztgenannten Kritikpunkte können erst mit dem Modell von Eddington entkräftigt werden, welches in Modul C entwickelt werden soll.

## 4.2 Prinzipielle Aussagen/einfache Abschätzungen

### 4.2.1 Das Modell einer konvektiven Gaskugel

Im Jahre 1870 veröffentlichte der Amerikaner Homer Lane ein Sonnenmodell, in dem er unser Zentralgestirn als Gaskugel auffasste, in deren Inneren durch Konvektion beständig Energie aus zentrumsnahen Regionen an die Oberfläche transportiert wird. Darüber, dass Konvektion im Inneren der Sonne von zentraler Bedeutung sein müsse, waren sich die Wissenschaftler damals weitestgehend einig, da diese einen effizienten Mechanismus zum Transport von Energie aus dem Zentrum an die Oberfläche darstellen kann. Die Notwendigkeit eines solchen Mechanismus ergab sich aus der Überlegung, dass die äußeren Schichten der Sonne zu schnell abkühlen würden, wenn die immense abgegebene Wärmestrahlung nicht ersetzt werden sollte. Anders als heute war man der Ansicht, dass die Konvektion dadurch verursacht wird, dass abgekühlte Gasmassen aus den oberen Schichten der Sonne absinken und durch aufsteigende heiße Gasmassen aus dem Inneren ersetzt werden. Die Konvektion war also ein physikalisches Mittel, um eine Abkühlung des gesamten Sonnenkörpers herbeizuführen. Heutzutage betrachten wir die Konvektion als eine Möglichkeit die in der Sonne durch Kernfusion anfallende Energie zur Oberfläche hin abzutransportieren. Gäbe es solche Transportmechanismen nicht, so müsste sich das Sonneninnere immer weiter aufheizen. Für uns ist die Konvektion ein Vorgang, um die Sonnentemperatur konstant zu halten. Glücklicherweise ist quasistatische Konvektion reversibel, sodass es keinen Unterschied macht, ob man ein aufsteigendes oder absteigendes Gaselement betrachtet. Deswegen ist die damalige Theorie, trotz der soeben geschilderten Änderung der Interpretation der Prozesse im Hinblick auf die Modellbildung nutzbar. Doch zurück in die Vergangenheit: Ob die Sonne ein Gas oder eine Flüssigkeit sei, war um 1870 noch immer eine offene Frage, jedoch gab es mehrere experimentelle Befunde, die für eine gasförmige Sonne sprachen:

- Experimente von T. Andrews im Jahre 1869 mit Gasen bei hohen Temperaturen hatten gezeigt, dass diese oberhalb einer bestimmten kritischen Temperatur nicht mehr verflüssigt werden konnten, unabhängig vom vorherrschenden Druck. Die Temperatur im Inneren

der Sonne sollte die kritische Temperatur weit überschreiten.

- Um das Jahr 1900 haben Untersuchungen von Gasen unter sehr hohem Druck und bei hoher Temperatur gezeigt, dass diese ein kontinuierliches Spektrum emittieren. Die um 1870 noch naheliegende Folgerung von Kirchhoff, der von einem kontinuierlichen Sternspektrum auf einen festen oder flüssigen Aggregatzustand geschlossen hatte, war somit hinfällig. Die Ursache für die Druckverbreiterung der Spektrallinien war jedoch noch unbekannt.

Im Vordergrund dieses Lernmoduls soll nun die Entwicklung des Lane'schen Sonnenmodells stehen. Einerseits sollen die von ihm aufgestellten Differentialgleichungen physikalisch gut begründet, hergeleitet und numerisch gelöst werden, andererseits soll besonderes Gewicht auf eine physikalische Begründung wesentlicher Zusammenhänge gelegt werden, sodass das mathematische Modell in seinen zentralen Aussagen auf physikalische Plausibilität hin geprüft werden kann. Zunächst sollen die Modellüberlegungen an die Erkenntnisse des vorherigen Lernmoduls angeknüpft werden.

### 4.2.2 Mechanische Grundgleichungen einer Gaskugel

Wie aus den Betrachtungen des vorangegangenen Moduls hervorging, muss die mechanische Stabilität des Stern im Zentrum aller Modellüberlegungen stehen. Ein Gaselement im Inneren eines Sterns befindet sich in Ruhe, wenn ein Kräftegleichgewicht zwischen der Gravitationskraft und einer Gegenkraft herrscht. Weiter muss berücksichtigt werden, dass alle Gasschichten in Interaktion miteinander stehen. Das Ziel muss daher sein, eine mathematische Gleichung aufzustellen, die diese Bedingungen zusammenfasst. Betrachtet man ein beliebiges Masselement  $\Delta M$  im Inneren eines Sterns, welches sich zwischen den Stellen  $r$  und  $r + \Delta r$  befindet, die Oberfläche  $\Delta A$ , sowie das Volumen  $V = A \cdot \Delta r$  besitzt. Auf dessen Unterseite üben die darunter liegenden Gasschichten einen Druck  $p$  auf die Fläche  $\Delta A$  aus, welcher der Gravitationskraft  $F_G = g\Delta M$ , durch die das Masselement zum Zentrum hin beschleunigt wird, sowie dem Druck  $p + \Delta p$ , den die darüber liegenden Gasschichten auf die Oberfläche  $A$  ausüben, entgegenwirkt. Wenn sich alle wirkenden Kräfte aufheben, befindet sich das Masselement in Ruhe, sodass sich die Gleichung

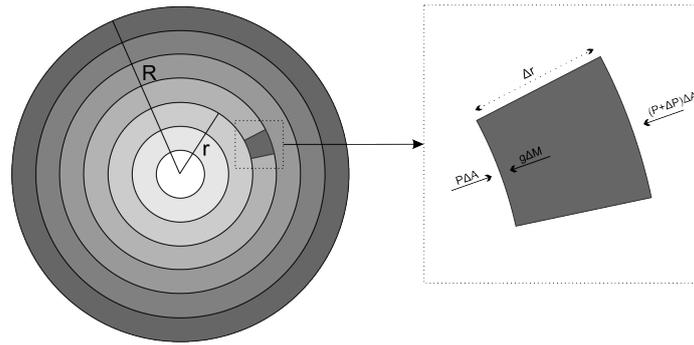


Abbildung 4.2: Ein Stern ist hydrostatisch stabil wenn sich an jeder Stelle in seinem Inneren die nach außen sowie die nach innen wirkenden Kräfte zu Null addieren, nach [Phi96, S. 6].

für das Kräftegleichgewicht ergibt zu:

$$p \cdot \Delta A = g \Delta M + (p + \Delta p) \cdot \Delta A \quad (4.12)$$

Weiter gilt:

$$\Delta M = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot \Delta A \cdot \Delta r, \quad (4.13)$$

sodass durch Einsetzen in Gleichung 4.12 folgt:

$$p \cdot \Delta A = g \cdot \rho \cdot \Delta A \cdot \Delta r + (p + \Delta p) \cdot \Delta A \quad (4.14)$$

Mit einigen elementaren Umformungen lässt sich diese auf dem Konzept des Kräftegleichgewichtes basierende Gleichung in eine Form bringen, welche die Betrachtung des Druckgleichgewichtes in den Fokus rückt. Das Ziel ist es, eine mathematische Vorschrift für den Druckgradienten  $\frac{dp}{dr}$  herzuleiten, welche als hydrostatische Grundgleichung bekannt ist. Es gilt:

$$0 = g \cdot \rho \cdot \Delta A \cdot \Delta r + \Delta p \Delta A \quad (4.15)$$

$$0 = g \cdot \rho \cdot \Delta r + \Delta p \quad (4.16)$$

$$\Delta p = -g \cdot \rho \cdot \Delta r \quad (4.17)$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta r} = -g \cdot \rho \quad (4.18)$$

Da die Gravitationsbeschleunigung  $g$  und die Dichte  $\rho$  positive Größen sind, ist aufgrund des Minuszeichens ersichtlich, dass der Druck von innen nach außen kontinuierlich abnehmen muss, damit sich der Stern im Gleichgewicht befindet.

Durch den Übergang zu infinitesimalen Größen folgt:

$$\frac{dp}{dr} = -g \cdot \rho \quad (4.19)$$

Sowohl  $g$  als auch  $\rho$  hängen vom Abstand zum Zentrum  $r$  ab, sodass Gleichung 4.19 erst integriert werden kann, wenn diese näher spezifiziert wurden. Nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz gilt:

$$g(r) = G \cdot \frac{M(r)}{r^2}, \quad (4.20)$$

wobei  $M(r)$  die Masse beschreibt, die sich innerhalb einer Kugel mit dem Radius  $r$  befindet. Durch Einsetzen in 4.19 folgt:

$$\boxed{\frac{dp}{dr} = -G \cdot \frac{M(r)}{r^2} \cdot \rho} \quad (4.21)$$

Die Masseverteilung  $M(r)$  ist zunächst unbekannt und muss durch Lösen einer weiteren Grundgleichung bestimmt werden. Diese erhält man, indem die Masse einer beliebigen Kugelschale ermittelt wird. Eine Sphäre zwischen den Radien  $r$  und  $r + \Delta r$  besitzt für kleine  $\Delta r$  die Masse  $\pi r^2 \rho \Delta r$ . Diese stimmt überein mit der Massendifferenz der Vollkugeln  $M(r + \Delta r)$  und  $M(r)$ , sodass gilt:

$$M(r + \Delta r) - M(r) = \pi r^2 \rho \Delta r \quad (4.22)$$

bzw.

$$\frac{M(r + \Delta r) - M(r)}{\Delta r} = \frac{\Delta M(r)}{\Delta r} = \pi r^2 \rho \quad (4.23)$$

Für infinitesimal kleine  $\Delta r$  gilt die zweite Grundgleichung:

$$\boxed{\frac{dM}{dr} = \pi r^2 \rho} \quad (4.24)$$

Die bislang aufgestellten Gleichungen sind so allgemein formuliert, dass sie für alle Himmelskörper gelten, die durch ihre eigene Gravitation zusammengehalten werden und hydrostatisch stabil sind, unabhängig davon, in welchem Aggregatzustand sie sich befinden. Bei einer vorgegebenen Masseverteilung ließe sich nun berechnen, wie der Druck im Sterninneren verlaufen würde. Jedoch ist diese in der Regel unbekannt und muss sich ebenfalls aus dem Modell ergeben. Des Weiteren wurde bislang keine

Aussage darüber getroffen, auf welche Weise die Materie den Gegendruck aufbringen kann. Für den Fall, dass sich die Sternmaterie durch das Gesetz des idealen Gases beschreiben ließe, kann der Gasdruck die Rolle der Rückstellkraft übernehmen:

$$p = \frac{k_B \cdot \rho \cdot T}{\mu} \quad (4.25)$$

Um den notwendigen Druck zur Stabilisierung gegen die Schwerkraft aufzubringen, stehen einem Gas folglich zwei „Stellschrauben“ zur Verfügung, um den Gasdruck anzupassen. Dies kann durch Dichte- und durch Temperaturanpassung geschehen. In der Natur wird es wohl dazu kommen, dass beides gleichzeitig geschieht. Gäbe es nun überhaupt keine weitere Abhängigkeit zwischen Dichte und Temperatur, so wären hier beliebige Möglichkeiten zulässig. Diese Variante scheint die Natur aber nicht zu wählen, denn sie würde ermöglichen, dass stabile Sterne mit gleicher Masse in praktisch unendlicher Vielfalt existieren müssten, da die Freiheit bestehen würde, Stabilität durch praktisch beliebige Temperatur und Dichteverteilungen im Inneren zu erzielen, sofern nur die Kombination aus beiden Größen zu einem Schalendruck führt, der die hydrostatische Gleichung erfüllt. Betrachtet man beliebige hydrostatische Gravitationskugeln, so wäre es natürlich auch denkbar, dass diese die hydrostatische Gleichung erfüllen, indem sie den jeweiligen Gegendruck auf besonders einfache Weise erzeugen, etwa - wenn wir an die Gleichung des idealen Gases denken - indem nur ein Parameter variiert. Diese Idee wird tatsächlich bei bestimmten Himmelskörpern realisiert, allerdings nie bei Objekten die der Gleichung des idealen Gases genügen.

Trägt man eine statistische Gesamtheit in das Hertzsprung-Russell-Diagramm (siehe Abbildung 4.3) ein, erkennt man eindeutige Häufungsgebiete, was als starker Hinweis auf die Tatsache gewertet werden muss, dass die allermeisten Sterne innerhalb eines Häufungsgebietes einen weitgehend ähnlichen inneren Aufbau besitzen. Dies muss als starkes Indiz dafür gewertet werden, dass im Inneren eines Sterns gerade nicht eine beliebige Verteilung der Zustandsgrößen gestattet ist. Vielmehr ist es naheliegend, die Physik dahingehend zu durchforsten, ob es nicht Zusatzbedingungen geben muss, die stringente weitere Abhängigkeiten von Zustandsgrößen fordern. Es wird sich in diesem Lernmodul herausstellen, dass selbst im einfachsten Modell einer idealen Gaskugel eine solche For-

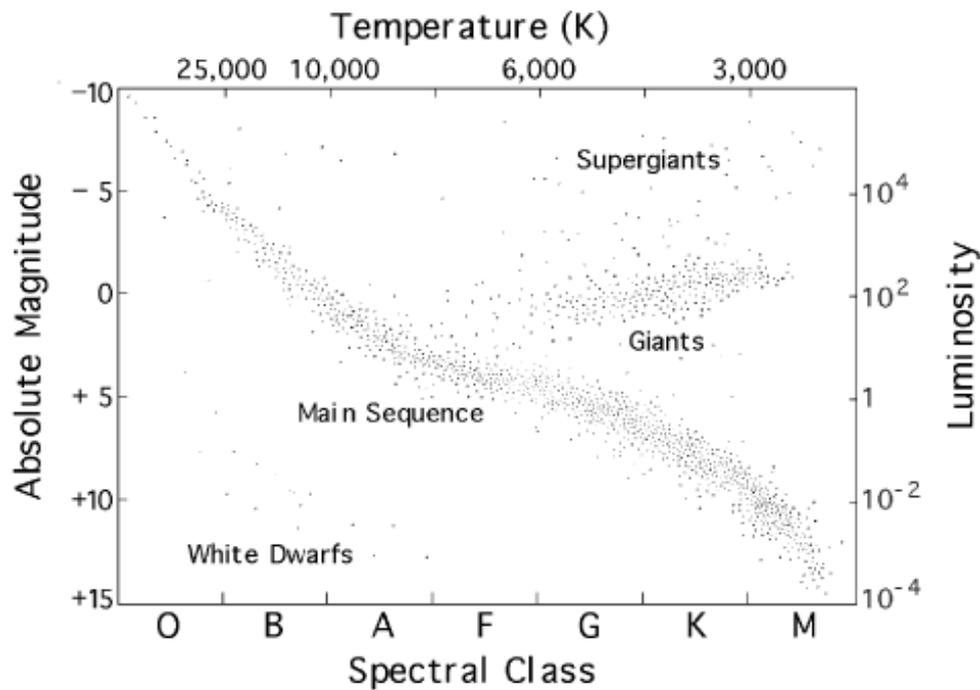


Abbildung 4.3: Hertzsprung-Russell-Diagramm. ([Whi97, S. 8])

derung durch den Umstand formuliert werden kann, dass ein Stern als selbstleuchtende Gaskugel definiert ist. Selbstleuchtend bedeutet Energieabgabe und dies bedeutet wiederum, dass es im Sterninneren Mechanismen geben muss, die diese Energieabgabe über lange Zeiträume ermöglichen. Genau durch diese Mechanismen kommt die geforderte weitere Abhängigkeit ins Spiel.

Die Tatsache der Existenz von homogenen Häufungsgebieten im Hertzsprung-Russell-Diagramm könnte zunächst als Indiz für die soeben besprochene Hypothese angesehen werden, dass womöglich außer dem Druck nur eine weitere Zustandgröße im Inneren des Sterns variiert und die andere konstant bleibt. Glücklicherweise lässt sich die Entkräftung dieser Aussage sowohl durch mathematische als auch physikalische Argumente vornehmen. Nachfolgend wird dies gezeigt, indem wir die Unmöglichkeit einer isothermen Gaskugel beweisen.

- Es können einfache Spezialfälle betrachtet werden, die es dem Gas nur erlauben, eine der beiden Variablen zu verändern, sodass entweder die Temperatur oder die Dichte im Sterninneren als konstant angesehen wird und die Konsequenzen für den Stern untersucht werden.

- Es wird ein Dichteprofil vorgegeben, von dem anzunehmen ist, dass es näherungsweise im Inneren des Sterns gilt.
- Es wird ein einfacherer Zusammenhang zwischen Druck und Dichte gefunden. Dies kann entweder durch die Verwendung einer anderen Zustandsgleichung geschehen, oder indem weitere Bedingungen an den Stern gestellt, sodass sich ein einfacherer Zusammenhang zwischen dem Druck und der Dichte ergibt, z.B. von der Form  $p \propto \rho^\gamma$ .
- Es werden weitere Bedingungen an den Temperaturverlauf im Sterninneren gestellt.

### **Isotherme Gaskugeln**

Sterne sind als isotherme Gaskugeln physikalisch undenkbar. Nach dem 0. Hauptsatz der Thermodynamik erfolgt eine Wärmeübertragung stets vom wärmeren zum kälteren Körper. Wären Sterne isotherme Gaskugeln, müsste die an der Oberfläche abgegebene Energie durch irgendeinen physikalischen Prozess aus dem Inneren nachgeliefert werden. Innerhalb einer isothermen Gaskugeln finden aber keine Wärmeaustauschprozesse statt. Zu diesem physikalischen Argument gibt es ebenfalls einen mathematischen Unmöglichkeitbeweis aus dem Jahre 1872, den man – je nach Leistungsstand – nachfolgend durcharbeiten, wahlweise aber auch überspringen kann, da wir den physikalischen Beweis bereits geleistet haben. Obwohl die Existenz isothermer Gaskugeln ausgeschlossen ist, erachtete Emden die Auseinandersetzung mit eben diesen dennoch als wichtig, da die barometrische Höhenformel, die in der Meteorologie häufig herangezogen wird, eine konstante Temperatur der Atmosphäre zur Voraussetzung hat. Die Betrachtung des physikalischen Verhaltens einer vollständig isothermen Gaskugel lag daher seiner Ansicht nach nahe [Emd22, S. 414]. Karl Friedrich Zöllner war der erste, dem eine mathematische Analyse isothermer Gaskugeln gelang. Seine Überlegungen bezog er jedoch nicht auf die Sonne, welche er als Flüssigkeitskugel ansah, sondern auf das Universum als Ganzes. Dennoch lassen sich die anhand des Modells gewonnene Erkenntnisse unmittelbar nutzen, um etwas über den Aufbau von Sternen zu lernen. Die hier vorgestellten Überlegungen stellen weitestgehend eine Übersetzung Zöllners Originalarbeit ([Zöl61]) in die heute gängige Formelsprache dar, seine mathematischen Gedankengänge werden inhaltlich unverändert dargestellt.

Aus Stabilitätsgründen muss die hydrostatische Grundgleichung

$$dp = -\rho g dr \quad (4.26)$$

gelten, außerdem wird die Gültigkeit der Gleichung des idealen Gases

$$pV = nk_b T \quad (4.27)$$

vorausgesetzt und in der zweckmäßigen Form

$$p = \left(\frac{nk_B}{M}\right)T \cdot \rho = a\rho \quad (4.28)$$

dargestellt. Die Konstanten wurden zusammengefasst zu:

$$a = \frac{nk_B}{M} \cdot T = \text{const.} \quad (4.29)$$

Weiter gilt für die Differentiale:

$$dp = a d\rho \quad (4.30)$$

Zusammen mit 4.26 folgt

$$a d\rho = -\rho g dr \quad (4.31)$$

Nach Trennung der Variablen ergibt sich:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{g}{a} dr \quad (4.32)$$

Die Gravitationsbeschleunigung  $g$  folgt aus dem Newton'schen Gravitationsgesetz und lässt sich bestimmen zu:

$$g = \frac{GM(r)}{r^2} \quad (4.33)$$

Zöllner wählte nun anschaulich eine Kugel mit dem Radius  $r_1$ , der nahezu dem Radius der Gaskugel entsprechen sollte, sodass sich fast die gesamte Masse darin befindet. Auf Teilchen an deren Oberfläche wirkt die Beschleunigung  $g_1$ , welche in etwa der Beschleunigung an der Oberfläche entsprechen muss. Da sich außerhalb der soeben definierten Kugel kaum Masse befindet, leistet diese einen vernachlässigbar kleinen Beitrag zur

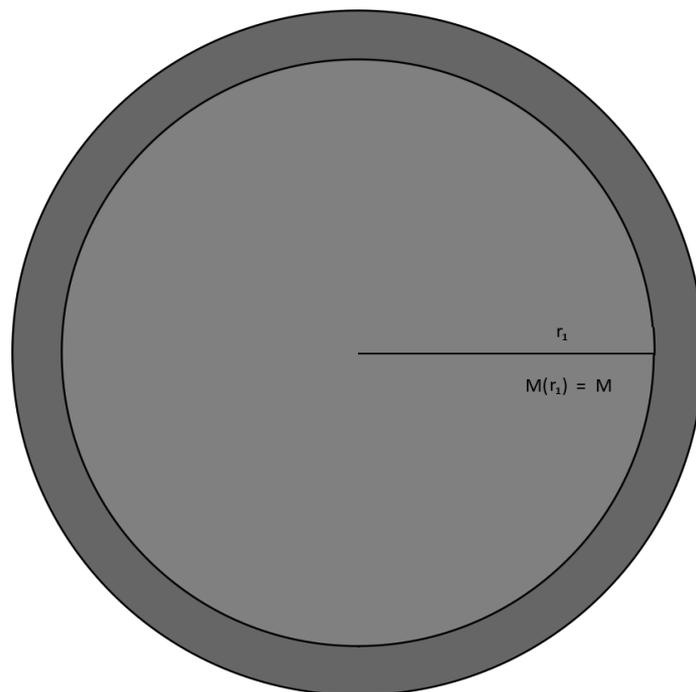


Abbildung 4.4: Zöllner wählt für seine Betrachtung eine Kugel mit dem Radius  $r_1$ , sodass diese nahezu die gesamte Masse  $M$  enthält und analysiert die Kugelschale, die sich zwischen  $r_1$  und dem Rand  $R$  befindet. Ihm gelingt es zu zeigen, dass der Radius im Unendlichen liegen muss.

Gravitationsbeschleunigung weiter außerhalb von  $r_1$ , sodass die Gravitationsbeschleunigung für  $r > r_1$  quadratisch mit dem Abstand abnimmt. Dadurch lässt sich die Beschreibung der Gravitationsbeschleunigung in diesem Bereich so weit vereinfachen, dass die genaue Kenntnis der Masseverteilung nicht erforderlich ist und sich die nachfolgende Berechnung erheblich vereinfacht. Es gilt für  $r > r_1$ :

$$g = \frac{GM(r)}{r^2} = \frac{GM(r)}{r^2} \cdot \frac{r_1^2}{r_1^2} = \frac{GM(r)}{r_1^2} \cdot \frac{r_1^2}{r^2} = g_1 \cdot \frac{r_1^2}{r^2} \quad (4.34)$$

Gleichung 4.32 kann nun durch Einsetzen von 4.34 integriert werden:

$$\int \frac{1}{\rho} d\rho + const. = -\frac{g_1 \cdot r_1^2}{a} \int_{r_1}^r \frac{1}{r^2} dr \quad (4.35)$$

$$\Rightarrow \ln \frac{\rho}{c} = \frac{g_1 r_1^2}{a} \cdot \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{g_1 r_1^2}{a} \cdot \frac{r_1 - r}{r \cdot r_1} = \frac{g_1 \cdot r_1}{a} \cdot \frac{r_1 - r}{r} \quad (4.36)$$

$$\Leftrightarrow \rho = c \cdot e^{\left( \frac{g_1 r_1^2}{a} \cdot \frac{r_1 - r}{r} \right)} \quad (4.37)$$

Für  $r \rightarrow \infty$  läuft die Dichte gegen den konstanten Wert

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho = \lim_{r \rightarrow \infty} c \cdot e^{\left( \frac{g_1 r_1^2}{a} \cdot \frac{r_1 - r}{r} \right)} = c \cdot e^{-\frac{g_1 r_1^2}{a}} \quad (4.38)$$

Die Dichte der Gaskugel nimmt von innen nach außen zwar wie erwartet ab, läuft allerdings nicht gegen Null, sondern gegen einen konstanten Wert. Die soeben geschilderte Überlegung ließe sich immer wieder aufs Neue auf eine noch weiter als  $r_1$  entfernten Ort anwenden, sodass die Aussage zum Sternrand, nicht nur näherungsweise, sondern exakt gültig ist. Das soeben betrachtete Sternmodell kann demnach keinen Rand im Endlichen besitzen bzw. besitzt einen unendlichen Radius. Die Rechnung unterstützt somit das zu Anfang gebrachte physikalische Argument, dass die Wärmeabgabe an der Oberfläche einer isothermen Gaskugel Probleme bereitet, indem der Rand der Gaskugel notwendigerweise ins Unendliche gerückt wird. Isotherme Gaskugeln, die der Gleichung des idealen Gases genügen, können demnach nicht existieren.

### Gaskugeln mit konstanter Dichte

Es bleibt noch zu zeigen, dass eine selbstgravitierende Gasmasse ihren Gasdruck nicht aufbringen kann, indem sie nur die Temperatur mit dem

Abstand zum Zentrum verändert, aber ihre Dichte im Inneren konstant hält. Es gelten die beiden Grundgleichungen, sowie die Gleichung des idealen Gases:

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho \tag{4.39}$$

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{M(r)}{r^2} \cdot \rho \tag{4.40}$$

$$p = \frac{k_B \cdot \rho \cdot T}{\mu} \tag{4.41}$$

Da  $\rho = const$  vorausgesetzt wird, lassen sich die beiden Differentialgleichungen unmittelbar integrieren. Es gelten:

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \cdot \rho \, dr = 4\pi \cdot \rho \int_0^r r^2 \, dr = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \tag{4.42}$$

und

$$\begin{aligned} P(r) &= \int_0^r -G \frac{M(r)}{r^2} \rho \, dr = \int_0^r -G \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r^2} \rho \, dr = \int_0^r -G \frac{4}{3}\pi r \rho^2 \, dr \\ &= -G \frac{4}{3}\pi \rho^2 \int_0^r r \, dr = -G \frac{4}{3}\pi \rho^2 \frac{r^2}{2} + c = -\frac{4}{6}G\pi \rho^2 r^2 + c \end{aligned} \tag{4.43}$$

Die Integrationskonstante  $c$  entspricht dem Druck im Zentrum des Sterns und lässt sich mit der Randbedingung

$$p(R) = 0 \tag{4.44}$$

bestimmen zu

$$c = p_c = \frac{4}{6}\pi G \rho^2 R^2. \tag{4.45}$$

Somit gilt für den Druck im Sterninneren:

$$p(r) = -G \frac{4}{3}\pi \rho^2 \frac{r^2}{2} + c = -\frac{4}{6}G\pi \rho^2 r^2 + \frac{4}{6}\pi G \rho^2 R^2 = \frac{4}{6}G\pi \rho^2 (R^2 - r^2) \tag{4.46}$$

mithilfe der Gleichung des idealen Gases lässt sich daraus unmittelbar der Temperaturverlauf bestimmen:

$$T(r) = \frac{p(r) \cdot \mu}{k_B \cdot \rho} = \frac{\frac{4}{6}G\pi \rho^2 (R^2 - r^2) \cdot \mu}{k_B \cdot \rho} = \frac{4}{6} \frac{G\pi \rho \mu}{k_B} (R^2 - r^2) \tag{4.47}$$

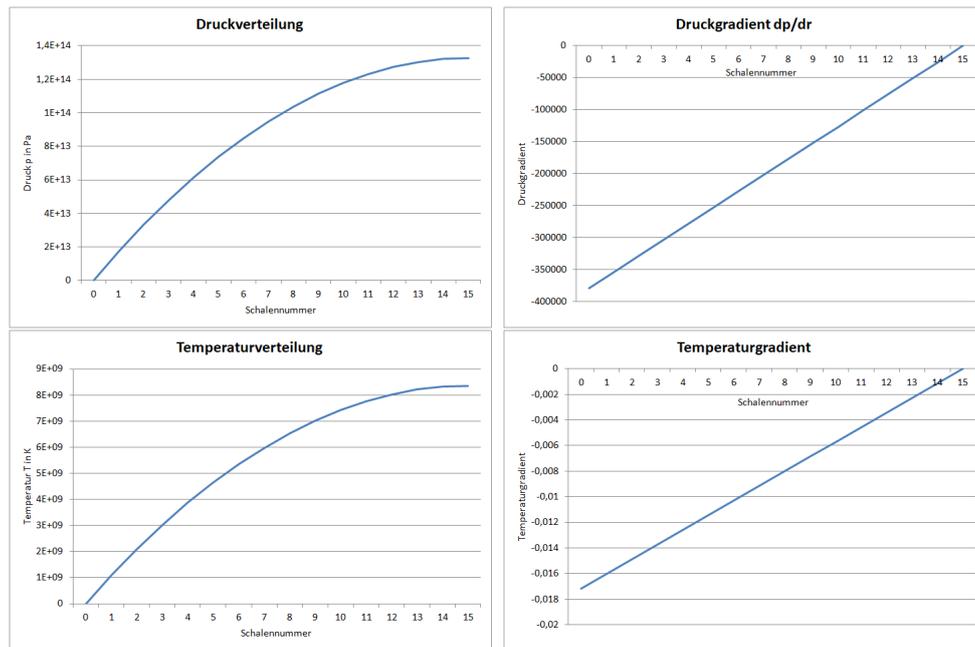


Abbildung 4.5: Druck- und Temperaturverlauf im Sterninneren von außen nach innen sowie deren Gradienten unter der Annahme konstanter Dichte.

sowie der Temperaturgradient  $\frac{dT}{dr}$  durch Ableiten von Gleichung 4.47 ermitteln:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{4}{3}\pi G\mu\rho r \quad (4.48)$$

Die Verläufe des Druckes und der Temperatur lassen sich gemeinsam mit den zugehörigen Gradienten mithilfe von Exceltool 4 auswerten und wie in Abbildung 4.5 graphisch darstellen:

Auf den ersten Blick scheint das Sternmodell mit konstanter Dichte problemlos aufzugehen, da der Druck die hydrostatische Grundgleichung erfüllt und sich daraus die erforderliche Temperatur ermitteln lässt, die das Gas besitzen müsste, um den Gasdruck aufzubringen, der ihn im Gleichgewicht hält. Durch die vorgegebene konstante Dichte und eine endliche Masse  $M$  ergibt sich immer ein endlicher Radius für die Gaskugel. Das physikalisch unintuitive Verhalten des Gases, welches sich lediglich erwärmen soll und nicht zusammenzieht, wenn mehr Masse darauf lastet, genügt hier nicht, um das Modell zu Fall zu bringen, da die Gleichung des idealen Gases dieses Verhalten prinzipiell erlaubt. Rein mathematisch kann an der Modellrechnung wenig ausgesetzt werden, da bei einer vorgegeben Dichtefunktion, sei sie auch eine Konstante, die Masseverteilung bereits vollständig bestimmt ist und der Druckverlauf im Sterninneren

aus der hydrostatischen Grundgleichung ermittelt werden kann. Die Temperatur hat keinerlei Einfluss auf die Struktur, sondern ist eine Folgerung aus dem Gesetz des idealen Gases.

Die Schwierigkeiten, die das Modell eines konstanten Dichteverlaufes mit sich bringt, ergeben sich aus der Definition eines Sterns als selbstleuchtender Körper, der seine Leuchtkraft über enorme Zeiträume aufrecht erhalten muss (im Falle der Sonne bereits seit mehreren Milliarden Jahren). Damit ihm dies gelingt, ist es unerlässlich, dass der Stern dauerhaft Energie aus seinem Inneren nach außen transportieren kann, da die äußeren Gasschichten aufgrund der enormen Leuchtkraft von Sternen sehr schnell auskühlen würden. Es gibt in der Physik drei Mechanismen, die einen Energietransport ermöglichen:

- Konvektion,
- Wärmeleitung,
- Wärmestrahlung.

Durch die vorausgesetzte konstante Dichte der Sternmaterie ist ein Energietransport durch Konvektion von vornherein ausgeschlossen, da ein Materietransport gegen das Schwerfeld nur dann stattfinden kann, wenn es eine Dichteabnahme mit der Höhe gibt. Dichteunterschiede sind die Voraussetzung für Auftrieb und ohne Auftrieb gibt es keine Konvektion. Der Wärmetransport müsste somit durch Wärmeleitung oder -strahlung geschehen.

Die Energie  $Q$ , die pro Sekunde durch die Fläche  $A = 1m^2$  zwischen zwei Gasschichten übertragen wird, hängt davon ab, welche Temperaturdifferenz zwischen diesen besteht. Abhängig davon, ob dies durch Wärmeleitung oder Wärmestrahlung geschieht, muss ein anderer Temperaturgradient betrachtet werden. Im Falle der Wärmeleitung gilt:

$$\frac{\dot{Q}}{A} \propto \frac{dT}{dr} \tag{4.49}$$

bzw.

$$\dot{Q} \propto \frac{dT}{dr} \cdot A \tag{4.50}$$

Mit einem erneuten Blick auf Abbildung 4.5 lassen sich die Probleme des Modells verdeutlichen: In der Nähe des Zentrum beträgt der Temperaturgradient nahezu Null und steigt nach außen hin an, sodass der Ener-

gietransport pro Quadratmeter und Sekunde in Richtung Oberfläche mit dem Abstand zum Zentrum ansteigt. Hinzu kommt, dass die äußeren Gasschichten eine deutlich größere Oberfläche besitzen als die zentrumsnahen Gebiete. Als Konsequenz ergibt sich, dass die äußeren Gasschichten ihre Energie erheblich schneller in Richtung Oberfläche transportieren, als es für zentrumsnahe Schichten der Fall ist. Es gibt somit keinen Mechanismus, der gestatten würde, einen konstanten Wärmestrom über große Teile des Sterninneren hinweg aufrecht zu erhalten, was wir als Grundvoraussetzung für einen stabilen Stern voraussetzen müssen. Ein Stern, der auf diesem Wege funktionieren sollte, könnte seine Leuchtkraft nur für kurze Zeit aufrecht erhalten, da er auf einen großen Teil der in ihm gespeicherten Energie nicht zugreifen kann.

Durch die Modellbetrachtung sind wir, neben der kaum verwunderlichen Erkenntnis, dass die Dichte im Sterninneren nicht konstant sein kann, auf eine weitere wichtige Bedingung gestoßen, die im Inneren des Sterns gelten muss. Ein Stern muss nicht nur hydrostatisch stabil sein, sondern ein Temperaturprofil aufweisen, welches ihm ermöglicht, die Energieabgabe an der Oberfläche auf die gesamte Gasmasse zu beziehen. Dazu muss jede beliebige Gasschicht, in der selbst keine Energie freigesetzt wird, genau soviel Energie an die darüber liegende abgeben, wie sie von der darunterliegenden erhält, sodass gilt:

$$\dot{Q} \propto \frac{dT}{dr} \cdot A = \text{const} \quad (4.51)$$

Zusammenfassend kann man sagen, dass sowohl ein Modell mit konstanter Temperatur als auch konstanter Dichte unvereinbar mit grundlegenden thermodynamischen Überlegungen sind. Die vorangegangene Betrachtung lässt sich analog für Wärmestrahlung mit dem Temperaturgradienten  $\frac{\dot{Q}}{A} \propto \frac{dT^4}{dr}$  anstellen.

### **Konvektive bzw. adiabatische Gaskugeln**

Wir wissen nun, dass Sterne zur Erzeugung des Gasdrucks sowohl die Temperatur, als auch die Dichte in ihrem Inneren verändern müssen und sind darauf gestoßen, dass dem Energietransport durch alle Gasschichten hinweg eine entscheidende Rolle zukommt, damit sie ihre Leuchtkraft über große Zeiträume hinweg aufrecht erhalten können. Homer Lane legte bei seinen Überlegungen zum Sonneninneren die Konvektion

als Transportmechanismus zugrunde. Seiner Ansicht nach kühlen die äußeren Gasschichten aufgrund der Wärmestrahlung ab und kontrahieren dabei. Dadurch erhöht sich deren Dichte, sodass sie in tiefere Schichten der Sonne absinken, während heißes Gas aus dem Inneren aufsteigt und das abgekühlte Gas ersetzt, sodass ein ständiger Materieaustausch zwischen den tieferen Regionen und höher gelegenen Schichten besteht. Läuft die Konvektion so langsam ab, dass sie annähernd als quasistatisch angesehen werden kann, so erfolgt die Zustandsänderung der auf- bzw. absteigenden Gasmassen adiabatisch, also ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung. Es bildet sich ein Temperaturgradient aus, bei dem die auf- bzw. absteigenden Gasmassen stets die Temperatur ihrer Umgebung besitzen. Auch hierbei handelt es sich natürlich nur um eine vereinfachende Modellannahme: würde die Konvektion tatsächlich wie beschrieben erfolgen, so käme sie genau dann zum Stillstand, wenn sich die innere Energie eines Gaselementes in Folge von Expansion komplett in mechanische Ausdehnungsarbeit verwandelt hat. Das wäre bei exakt 0K an der Sternoberfläche der Fall, mit der Folge, dass auch solche Sterne nicht leuchten würden. Die Lösung besteht darin, dass die Konvektion zwar ohne Wärmeaustausch mit der lokalen Umgebung erfolgt, also lokal tatsächlich adiabatisch ist. Global für den gesamten Stern ist sie es natürlich nicht. Die aufsteigenden Gaselemente transportieren einen Energieüberschuss mit sich zur Sternoberfläche, den sie genau dort abstrahlen. Dies geht natürlich nicht quasistatisch, vielmehr sind die Konvektionsgeschwindigkeiten in realen Sternen relativ hoch.

Historisch wurden Gaskugeln, die auf diese Weise aufgebaut sein sollten, als konvektive Gaskugeln bezeichnet, auch wenn sie im Modell der adiabatischen Gaskugel dargestellt wurden. Adiabatisch ist die Konvektion in realen Sternen nur näherungsweise.

Wie sich herausstellte, genügt die Annahme des hydrostatischen Gleichgewichts und einer Gleichung die das Konvektionsgleichgewicht beschreibt, um die Struktur eines solchen Sterns bei bekannter Masse und chemischer Zusammensetzung vollständig bestimmen zu können. Um dies zu zeigen, müssen zunächst die mathematischen Konsequenzen aus der Annahme einer adiabatischen Gasschichtung hergeleitet werden:

Adiabatische Vorgänge sind dadurch gekennzeichnet, dass keine Wärme

mit der Umgebung ausgetauscht wird und es gilt:

$$\frac{dQ}{dT} = 0 \quad (4.52)$$

Weiter muss der 1. Hauptsatz der Thermodynamik erfüllt sein:

$$dQ = c_V dT + p dV \quad (4.53)$$

Aus 4.52 folgt, dass  $dQ$  in 4.53 Null sein muss:

$$0 = c_V dT + p dV \quad (4.54)$$

Für den Druck  $p$  kann die Gleichung des idealen Gases

$$p = \frac{R_a \cdot T}{V} \quad (4.55)$$

eingesetzt werden, sodass folgt:

$$0 = c_V dT + \frac{R_a \cdot T}{V} dV \quad (4.56)$$

Division durch die Temperatur  $T$  und anschließende Integration ergibt:

$$const = c_V \cdot \ln T + R_a \ln V \quad (4.57)$$

Durch Anwenden der Exponentialfunktion und einigen Rechenschritten folgt:

$$\begin{aligned} const &= e^{c_V \cdot \ln T + R_a \ln V} \\ &= e^{c_V \cdot \ln T} \cdot e^{R_a \ln V} \\ &= (e^{\ln T})^{c_V} \cdot (e^{\ln V})^{R_a} \\ &= T^{c_V} \cdot V^{R_a} \\ &= T \cdot V^{\frac{R_a}{c_V}} \\ &= T \cdot V^{\frac{c_p - c_V}{c_V}} \\ &= T \cdot V^{\frac{c_p}{c_V} - 1} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Betrachtet man nun das spezifische Volumen  $v_s$ , für das gilt,

$$v_s = \frac{1}{\rho} \quad (4.59)$$

so folgt:

$$const = T \cdot \left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{c_p}{c_v} - 1}. \quad (4.60)$$

Wird nun das Gesetz des idealen Gases nach  $T$  aufgelöst und eingesetzt, ergibt sich:

$$const = \frac{p}{R_a} \cdot \left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{c_p}{c_v}} \quad (4.61)$$

bzw.

$$p = C \cdot \rho^{\frac{c_p}{c_v}} \quad (4.62)$$

Für konvektive Gaskugeln besteht somit ein relativ einfacher Zusammenhang zwischen dem Druck und der Dichte, welcher lediglich von den beiden Parametern  $\frac{c_p}{c_v} = \gamma$  und  $C = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}$  abhängt und nur indirekt von der Temperatur  $T$  des Gases. Diese ist keineswegs konstant, sondern lässt sich anschließend aus dem Druck und der Dichte über das Gesetz des idealen Gases ermitteln. Zusammenfassend wird eine konvektive Gaskugel durch das folgende Gleichungssystem beschrieben:

$$\frac{dM}{dr} = \pi r^2 \rho \quad (4.63)$$

$$\frac{dp}{dr} = -G \cdot \frac{M(r)}{r^2} \cdot \rho \quad (4.64)$$

$$p = C \cdot \rho^\gamma \quad (4.65)$$

$$p = \frac{R_a \cdot T}{V} \quad (4.66)$$

$$(4.67)$$

Dieses Gleichungssystem ist mathematisch nicht unproblematisch, da es lediglich für einige Spezialfälle eine analytische Lösung besitzt und in der Regel numerische Verfahren zum Lösen angewendet werden müssen. Aus einer Analyse des Gleichungssystems lassen sich jedoch bereits wichtige Erkenntnisse gewinnen, die das Lösen der Gleichungen nicht erfordern.

### Die Energieverteilung von Gaskugeln - Der Virialsatz

Ausgehend von der Gleichung für das hydrostatische Gleichgewicht lässt sich die Energieverteilung zwischen innerer und potentieller Energie für das Gaskugelmodell ableiten. Dieser Zusammenhang wird als Virialsatz bezeichnet und spielt nicht nur für die Theorie des inneren Aufbaus der Sterne eine wesentliche Rolle, sondern findet in der Astrophysik breite

Anwendbarkeit, da er für alle Systeme gilt, die durch die eigene Gravitation zusammengehalten werden, wie z.B. unser Sonnensystem oder ganze Galaxien. Der Virialsatz ergibt sich, indem die Gesamtenergie des Systems durch Integration der ersten Grundgleichung über den gesamten Stern ermittelt wird, siehe hierzu z.B. [Phi96]. Durch Multiplikation mit  $4\pi r^3 dr$  wird Gleichung 4.19 zu

$$\begin{aligned} 4\pi r^3 \frac{dp}{dr} dr &= -4\pi r^3 dr \cdot g\rho \\ = -4\pi r^3 GM(r)\rho dr &= -\frac{GM(r)}{r} \cdot (4\pi r^2 \rho dr) \end{aligned} \quad (4.68)$$

Nach Gleichung 4.24 kann der Ausdruck in der Klammer ersetzt werden, sodass gilt:

$$4\pi r^3 \frac{dp}{dr} dr = -\frac{GM(r)}{r} \cdot dM \quad (4.69)$$

Die Gleichung kann nun über den gesamten Stern integriert werden

$$\int_0^R 4\pi r^3 \cdot \frac{dp}{dr} dr = -\int_0^M \frac{GM(r)}{r} dM \quad (4.70)$$

Die linke Seite der Gleichung lässt sich partiell integrieren, sodass mit

$$\int_0^R 4\pi r^3 \cdot \frac{dp}{dr} dr = 3[p(r) \cdot 4\pi r^3]_0^R - 3 \int_0^R p(r) \cdot 4\pi r^2 dr \quad (4.71)$$

folgt:

$$\begin{aligned} 3[p(r) \cdot 4\pi r^3]_0^R - 3 \int_0^R p(r) \cdot 4\pi r^2 dr &= 3 \cdot p(R) \cdot 4\pi R^3 - 3 \int_0^R p(r) \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= -\int_0^M \frac{GM(r)}{r} dM \end{aligned} \quad (4.72)$$

Der Druck an der Oberfläche sollte gegenüber dem Zentraldruck verschwindend klein sein, sodass der Ausdruck  $4\pi R^3 p(R)$  vernachlässigt werden kann. Der rechte Teil der Gleichung entspricht der potentiellen Energie  $E_{pot}$  des Sterns, sodass folgt:

$$-3 \int_0^R p(r) \cdot 4\pi r^2 dr = E_{pot} \quad (4.73)$$

Da der genaue Druckverlauf im Sterninneren noch unbekannt ist, lässt sich das Integral beispielsweise durch Verwendung des mittleren Druckes

im Stern  $\bar{p}$  lösen, sodass gilt:

$$-3 \int_0^R p(r) \cdot 4\pi r^2 dr = -3 \cdot \bar{p} \cdot \int_0^R 4\pi r^2 dr = -3 \cdot \bar{p} \cdot V = E_{pot} \quad (4.74)$$

bzw.

$$\bar{p} \cdot V = -\frac{1}{3} E_{pot} \quad (4.75)$$

Es besteht somit ein einfacher Zusammenhang zwischen dem mittleren Druck im Sterninneren und der potentiellen Energie des Sterns, der sich zwangsläufig aus der hydrostatischen Grundgleichung ergibt. Um den gesuchten Zusammenhang zwischen innerer und potentieller Energie herzustellen, muss nun der mittlere Druck näher beschrieben werden. Dazu muss unbedingt nach der physikalischen Ursache des Druckes gefragt werden, sodass sich der nachfolgende Teil der Herleitung für verschiedenartige Himmelsobjekte unterscheidet. In einem idealen Gas wird dieser bekanntlich durch die Bewegung der Teilchen hervorgerufen, was nun exemplarisch am Beispiel eines Einheitswürfels mit der Kantenlänge  $L$ , welcher  $N$  Gasteilchen enthält, dargelegt werden soll.

Ein beliebiges dieser Teilchen soll die Geschwindigkeit  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ , sowie den Impuls  $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$  besitzen. Dieses Teilchen übt auf jede der Begrenzungsflächen einen Druck aus, der sich aus dem Impulsübertrag beim Zusammenstoßen des Teilchens mit der Wand, sowie aus der Häufigkeit der Zusammenstöße ergibt. Die Anzahl der Zusammenstöße pro Sekunde mit beispielsweise der oberen Begrenzungsfläche beträgt  $\frac{v_z}{2L}$ . Der Faktor 2 muss eingefügt werden, da das Teilchen zwischen zwei Stößen mit ein und derselben Fläche die Strecke  $L$  zweimal durchlaufen muss – bis zur gegenüberliegenden Seite und wieder zurück. Bei jedem Zusammenstoß mit der Wand wird die Geschwindigkeit des Teilchens in  $z$ -Richtung umgekehrt, sodass der zweifache Impuls des Teilchens an die Wand übertragen wird. Für eine Einheitsfläche beträgt der Impulsübertrag eines einzelnen Teilchens pro Sekunde demnach:

$$2P_z \cdot \frac{v_z}{2L} \cdot \frac{1}{L^2} = \frac{P_z \cdot v_z}{L^3} \quad (4.76)$$

Diese Größe beschreibt den durch das Teilchen ausgeübten Druck. Der Druck  $p$ , der durch alle  $N$  Teilchen des betrachteten Volumens hervorgerufen wird, lässt sich durch Summation der Einzeldrücke berechnen. Es

gilt:

$$p = \frac{P_{z1} \cdot v_{z1}}{L^3} + \dots + \frac{P_{zN} \cdot v_{zN}}{L^3} \quad (4.77)$$

Da alle Teilchen eine unterschiedliche Geschwindigkeit in z-Richtung besitzen können, ist es sinnvoll, die mittlere Geschwindigkeit aller Teilchen anzugeben. Es folgt:

$$p = \frac{N}{L^3} \langle P_z v_z \rangle \quad (4.78)$$

Da es keine bevorzugte Richtung für die Geschwindigkeiten der Teilchen gibt, stimmen die mittleren Geschwindigkeiten für alle Raumrichtungen überein, sodass gilt:

$$\langle P_x v_x \rangle = \langle P_y v_y \rangle = \langle P_z v_z \rangle = \frac{\langle \vec{P} \cdot \vec{v} \rangle}{3}. \quad (4.79)$$

Mit

$$\langle \vec{P} \cdot \vec{v} \rangle = \langle P_x v_x \rangle + \langle P_y v_y \rangle + \langle P_z v_z \rangle \quad (4.80)$$

folgt für den Druck, der auf alle Gefäßwände gleichermaßen wirkt:

$$p = \frac{N}{L^3} \frac{\langle \vec{P} \cdot \vec{v} \rangle}{3} \quad (4.81)$$

Durch wenige Umformungen lässt sich der Zusammenhang zwischen der kinetischen Energie aller Teilchen und dem mittleren Druck  $\bar{p}$  herstellen:

$$\bar{p} = \frac{N}{L^3} \frac{\langle \vec{P} \cdot \vec{v} \rangle}{3} = \frac{N}{L^3} \frac{\langle m\vec{v} \cdot \vec{v} \rangle}{3} = \frac{2}{3} \frac{N}{L^3} \langle \frac{1}{2} m\vec{v} \cdot \vec{v} \rangle = \frac{2}{3} \frac{1}{L^3} E_{kin} \quad (4.82)$$

Bezogen auf das Gesamtvolumen eines Sterns gilt dementsprechend:

$$\bar{p} = \frac{2}{3} \frac{E_{kin}}{V} \quad (4.83)$$

Die Gleichungen (4.75) und (4.83) können nun gleichgesetzt werden, so dass die kinetische Energie der Sternmaterie und die potentielle Energie des Sterns sich wie folgt in Beziehung setzen lassen:

$$\frac{2}{3} E_{kin} = -\frac{1}{3} E_{pot} \quad (4.84)$$

bzw.

$$2E_{kin} + E_{pot} = 0 \quad (4.85)$$

Diese Aussage wird als Virialsatz bezeichnet und hat für die Theorie des inneren Aufbaus der Sterne und der Sternentwicklung entscheidende Konsequenzen: Da die Sternmaterie den Virialsatz erfüllen muss, liegt ein bestimmtes Verhältnis aus potentieller Energie und kinetischer Energie vor, um das hydrostatische Gleichgewicht aufrecht erhalten zu können. Dies gilt auch für Sterne, die, ausgehend von der Helmholtz'schen Kontraktionshypothese, im Laufe ihrer Lebenszeit kontrahieren, da sie aufgrund der großen Zeiträume als näherungsweise hydrostatisch stabil angesehen werden können. Wird die potentielle Energie der Gaskugel um einen bestimmten Betrag verringert, muss konsequenterweise die innere Energie ansteigen. Folglich kann nur ein Teil der frei werdenden potentiellen Energie als Wärmestrahlung abgegeben werden, wodurch die Schätzung des Alters der Sonne nach Helmholtz, sofern sie sich nur auf die freie Kontraktion bezieht, erheblich nach unten korrigiert werden muss. Außerdem ist die Erhöhung der inneren Energie mit einer Erhöhung der Temperatur der Sternmaterie verbunden. Dies erscheint auf den ersten Blick paradox, da ein solches Verhalten der alltäglichen Erfahrung widerspricht, man denke beispielsweise an eine Tasse Kaffee, die aufgrund der Wärmeabgabe auskühlt. Die Wärmeabstrahlung eines Sterns, der sonst über keine weiteren Energiequellen verfügt, sorgt hingegen dafür, dass der Stern, anstatt abzukühlen, im Laufe der Zeit immer heißer werden muss, um sich gegen die eigene Schwerkraft zu stabilisieren. Mithilfe des Virialsatzes lässt sich daher auf elementarer Grundlage zeigen, dass es überhaupt nicht zwingend ist, Theorien der Sternentwicklung nur mit Abkühlungssequenzen auszustatten, wie es im 19. Jahrhundert der Fall war. Vielmehr ist es ebenso naheliegend davon auszugehen, dass neben der Abkühlung ebenso Phasen der Aufheizung komprimierbarer Materie zur Kosmogonie der Sterne gehören müssen.

### 4.2.3 Homologe Sterne

Die beiden Grundgleichungen (4.19) und (4.24) und dementsprechend der Virialsatz (4.85) sind nicht nur für die Sonne, sondern für alle Sterne gültig. Für zwei Sterne, deren Massen  $M_1$  und  $M_2$ , sowie deren Radien  $R_1$  und  $R_2$  sich zwar unterscheiden, bei denen aber vermutet wird, dass deren Aufbau durch die selben Gleichungen beschrieben wird, lässt es sich vermeiden, die Grundgleichungen für beide Sterne aufwändig lösen

zu müssen. Es lassen sich einfache Skalierungsfaktoren finden, mit denen die Lösung des einen Sterns in die Lösung des zweiten Sterns transformiert werden kann. Dieses Verfahren lässt sich beispielsweise bei Sternen auf der Hauptreihe erfolgreich anwenden, weil Hauptreihensterne die Voraussetzung erfüllen, dass sie näherungsweise einen ähnlichen Aufbau besitzen.

Zunächst muss präzisiert werden, wie die Ähnlichkeit im Aufbau zu verstehen ist. Um die Modelle zweier Sterne sinnvoll miteinander vergleichen zu können, sollten aufgrund der Tatsache, dass sich deren Radien durchaus stark voneinander unterscheiden können, anstelle von absoluten, relative Koordinaten verwendet werden. Werden beide Sterne beispielsweise in 10 Kugelschalen gleicher Masse  $m_1 = \frac{M_1}{10}$  und  $m_2 = \frac{M_2}{10}$  aufgeteilt, gilt

$$\frac{m_1}{M_1} = \frac{m_2}{M_2}, \tag{4.86}$$

auch wenn sich die absoluten Massen der Kugelschalen beider Sterne unterscheiden. Stimmen nun die relativen Dicken der Kugelschalen

$$\frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2} = \chi \tag{4.87}$$

überein, so spricht man von zwei homologen Sternen, wobei  $\chi$  die relative Radius-Koordinate darstellen soll. Würde man die Dichtepprofile homologer Sterne auf einen Einheitsradius normieren, wären sie identisch. Aus den Grundgleichungen, die ebenfalls für beide Sterne erfüllt sein müssen, ergeben sich Konsequenzen für alle anderen Zustandsgrößen, die nun herausgearbeitet werden müssen. Zunächst soll die Gleichung für die Masseverteilung mithilfe der relativen Koordinate  $\chi$ , anstelle des Radius  $r$ , dargestellt werden. Für Sternmodell 1 gilt:

$$\frac{dm_1}{dr_1} = \frac{dm_1}{dr_1} \frac{d\chi}{d\chi} = \frac{dm_1}{d\chi} \frac{d\chi}{dr_1} = \pi r_1^2 \rho_1. \tag{4.88}$$

Mit

$$\frac{d\chi}{dr_1} = \frac{1}{R_1} \tag{4.89}$$

folgt

$$\frac{dm_1}{d\chi} \frac{1}{R_1} = \pi r_1^2 \rho_1 \tag{4.90}$$

bzw.

$$\frac{m_1}{d\chi} = \pi r_1^2 \rho_1 \cdot R_1 \quad (4.91)$$

Ersetzt man die linke Seite mithilfe von Gleichung (4.86) und erweitert die rechte Seite geschickt, lässt sich diese in die Grundgleichung für den zweiten Stern transformieren:

$$\frac{d(m_2 \cdot \frac{M_1}{M_2})}{d\chi} = \pi r_1^2 \rho_1 \cdot R_1 \cdot \left[ \frac{r_2^2}{r_2^2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_2} \cdot \frac{R_2}{R_2} \right] \quad (4.92)$$

Durch Umsortieren folgt:

$$\frac{dm_2}{d\chi} = \pi r_2^2 \rho_2 \cdot R_2 \cdot \left[ \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{M_2}{M_1} \right] \quad (4.93)$$

und mit Gleichung (4.87) folgt:

$$\frac{dm_2}{d\chi} = \pi r_2^2 \rho_2 \cdot R_2 \cdot \left[ \frac{R_1^3}{R_2^3} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{M_2}{M_1} \right] \quad (4.94)$$

Da gleichzeitig auch die Grundgleichung für Stern 2

$$\frac{m_2}{d\chi} = \pi r_2^2 \rho_2 \cdot R_2 \quad (4.95)$$

mit der relativen Koordinate  $\chi$  erfüllt sein muss, folgt, dass der eingeklammerte Ausdruck in Gleichung (4.94) eins ergeben muss:

$$\frac{R_1^3}{R_2^3} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{M_2}{M_1} = 1 \quad (4.96)$$

bzw.

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{R_2^3}{R_1^3} \cdot \frac{M_1}{M_2} \quad (4.97)$$

Da  $M \cdot R^{-3} \propto \bar{\rho}$  skaliert die Dichte an allen homologen Punkten, also auch im Zentrum des Sterns, mit dessen mittlerer Dichte  $\bar{\rho}$ :

$$\boxed{\rho(\chi) \propto \rho_c \propto \bar{\rho}} \quad (4.98)$$

Betrachten wir nun die hydrostatische Grundgleichung. Für das erste Sternmodell gilt:

$$\frac{dp_1}{dr_1} = -G \cdot \frac{m_1(r)}{r_1^2} \cdot \rho_1 \quad (4.99)$$

Diese soll nun ebenfalls mit der relativen Koordinate  $\chi$  ausgedrückt werden. Es gilt:

$$\frac{dp_1}{dr_1} \cdot \frac{d\chi}{d\chi} = \frac{dp_1}{d\chi} \cdot \frac{d\chi}{dr_1} = \frac{dp_1}{d\chi} \cdot \frac{1}{R_1} = -G \cdot \frac{m_1(r)}{r_1^2} \cdot \rho_1 \quad (4.100)$$

$$\frac{dp_1}{d\chi} = -G \cdot \frac{m_1(r)}{r_1^2} \cdot \rho_1 \cdot R_1 \quad (4.101)$$

Durch geschicktes Erweitern und Umformen ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{d\chi} &= -G \cdot \frac{m_1(r)}{r_1^2} \cdot \rho_1 \cdot R_1 \cdot \left( \frac{M_2}{M_2} \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_2} \cdot \frac{R_2}{R_2} \right) \\ &= -G \cdot \frac{m_2(r)}{r_2^2} \cdot \rho_2 \cdot R_2 \cdot \left( \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{R_1}{R_2} \right) \end{aligned} \quad (4.102)$$

Da die hydrostatische Grundgleichung auch für das zweite Sternmodell gelten muss:

$$\frac{dp_2}{d\chi} = -G \cdot \frac{m_2(r)}{r_2^2} \cdot \rho_2 \cdot R_2, \quad (4.103)$$

lässt sich der Ausdruck vor der Klammer in (4.102) ersetzen, sodass gilt:

$$\frac{dp_1}{d\chi} = \frac{dp_2}{d\chi} \left( \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{R_1}{R_2} \right). \quad (4.104)$$

Nach Division durch  $\frac{dp_2}{d\chi}$  folgt:

$$\frac{dp_1}{dp_2} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{R_1}{R_2} \quad (4.105)$$

mit Gleichung (4.87) folgt:

$$\frac{dp_1}{dp_2} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{R_1}{R_2} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{R_1}{R_2} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (4.106)$$

Da weiter gilt:

$$\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (4.107)$$

folgt für alle homologen Punkte  $\chi$  im Sterninneren, also ebenfalls im Zentrum:

$$\frac{dp_1}{dp_2} = \frac{M_1^2}{M_2^2} \cdot \frac{R_2^4}{R_1^4} \quad (4.108)$$

Daher gilt:

$$\boxed{p(\chi) \propto p_c \propto \frac{M^2}{R^4}} \quad (4.109)$$

Der zentrale wie auch der mittlere Druck in homologen Sternen steigt somit quadratisch mit der Masse an und verringert sich mit der vierten Potenz des Radius. Zu beachten ist, dass die Analyse des Differentialgleichungssystems zu derselben Proportionalität führt, wie bereits das einfache Halbkugelmodell in Modul A.

Im nachfolgenden Abschnitt wird sich zeigen, dass die soeben hergeleiteten Skalierungsfaktoren für das numerische Lösen der Grundgleichungen eine enorme Arbeitserleichterung darstellen, da für jede Modellberechnung der Druck, sowie die Dichte im Zentrum des Stern durch ein aufwändiges Probierversahren erraten werden müssen. Wurde diese Arbeit einmal geleistet, können diese Zentralwerte nun durch die soeben gewonnenen Skalierungsfaktoren auf jedes weitere homologe Sternmodell übertragen werden. Man beachte, dass diese und weitere homologe Transformationen nicht nur eine mathematische Erleichterung darstellen, sondern gleichzeitig prinzipielle physikalische Aussagen über die Zusammenhänge von Zustandsgrößen in Sternen beinhalten.

### 4.3 Detaillierte Analyse der Verläufe von Zustandsgrößen

In diesem Abschnitt sollen nun konkret numerische Lösungen der Gleichungen einer konvektiven Gaskugel ermittelt werden:

$$\frac{dM}{dr} = \pi r^2 \rho \quad (4.110)$$

$$\frac{dp}{dr} = -G \cdot \frac{M(r)}{r^2} \cdot \rho \quad (4.111)$$

$$p = C \cdot \rho^\gamma \quad (4.112)$$

$$p = \frac{R_a \cdot T}{V} \quad (4.113)$$

$$(4.114)$$

Da diese Gleichungen nur für wenige Spezialfälle eine analytische Lösung besitzen und diese zu diesem Zeitpunkt von untergeordnetem Interesse

sind, soll nun ein Verfahren entwickelt werden, mit dem das obige Gleichungssystem numerisch gelöst werden kann. In der numerischen Mathematik findet das sogenannte Runge-Kutta-Verfahren breite Anwendung, da es eine hohe Rechengenauigkeit bei vergleichsweise geringem Rechenaufwand für den Computer bietet. Für die Zwecke dieser Arbeit soll jedoch ein einfaches Tangentenverfahren bevorzugt werden, da es für Lernende verständlicher ist und insbesondere für Programmieranfänger erheblich leichter umgesetzt werden kann, sodass ein Verlust an numerischer Genauigkeit vertretbar ist und wie wir nachfolgend zeigen werden für die Physik, die wir erkunden wollen, belanglos ist.

### 4.3.1 Das Tangentenverfahren - Lösen einfacher Differentialgleichung

Die Grundlagen zum numerischen Lösen von Differentialgleichungen mithilfe des Eulerschen Tangentenverfahrens werden prinzipiell bereits im Mathematikgrundkurs zu Beginn der gymnasialen Oberstufe gelegt. Der Differenzenquotient wird in der Einführungsphase als mittlere Änderungsrate eingeführt, welcher im Grenzübergang zur momentanen Änderungsrate wird, oder geometrisch interpretiert als Sekantensteigung, die im Limes zur Tangentensteigung wird. Da eine Differentialgleichung die Tangentensteigung einer zunächst unbekanntem Funktion  $f$  an jeder Stelle angibt, wird hier eine Möglichkeit eröffnet,  $f$  auf geometrischem Wege zu rekonstruieren:

- An einem bekannten Punkt  $(x_1 | f(x_1))$  wird eine Tangente angelegt, deren Steigung durch die Differentialgleichung vorgegeben wird.
- Die Tangente ist die bestapproximierende Gerade zu einem in der Nähe befindlichen Punkt der Lösungsfunktion an der Stelle  $x_1 + h$ . Der Funktionswert der Lösungsfunktion  $f(x_1 + h)$  stimmt in guter Näherung mit dem Funktionswert der Tangente  $t(x_1 + h)$  überein, sodass  $f(x_1 + h) = t(x_1 + h)$  gesetzt werden kann.

Durch Wiederholung dieser Schritte lässt sich die gesuchte Funktion  $f$  stückweise rekonstruieren, indem kleine Tangentenabschnitte aneinandergefügt werden. Die Genauigkeit des Verfahrens soll nun an einem einfachen Beispiel demonstriert werden:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{df}{dx} = x \quad (4.115)$$

Die zugehörige analytische Lösung, die zum Vergleich mit der numerischen Lösung herangezogen werden soll, lässt sich durch Integration leicht ermitteln zu

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad (4.116)$$

wenn als Anfangsbedingung  $f(0) = 0$  gesetzt wird. Nun soll die Lösung auf numerischem Wege generiert werden: Die Differentialgleichung kann als Differenzenquotient auf dem Intervall  $[x_1; x_2]$  aufgefasst werden:

$$\frac{df(x_1)}{dx} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = x_1 \quad (4.117)$$

Dieser Schritt wird als Diskretisierung bezeichnet, da hier der Übergang von infinitesimalen Größen zu konkret wählbaren Abständen geschieht. Durch eine einfache Umformung folgt:

$$f(x_2) = x_1(x_2 - x_1) + f(x_1), \quad (4.118)$$

was der bekannten Geradengleichung

$$y = m \cdot x + b \quad (4.119)$$

entspricht. Ist der Funktionswert  $f(x_1)$  bekannt, so kann dort ein kleines Tangentenstück mit der Schrittlänge  $x_2 - x_1$  angelegt werden, um  $f(x_2)$  zu approximieren. Je näher sich  $x_2$  an  $x_1$  befindet, desto genauer die Approximation. Am Punkt  $(x_2|f(x_2))$  kann nun ein weiteres Tangentenstück bis hin zur Stelle  $x_3$  angelegt werden, deren Steigung aufgrund der vorgegebenen Differentialgleichung  $x_2$  beträgt. Die konkrete Umsetzung des Verfahrens in Excel findet sich in Abschnitt 2.1.2. Abbildung (4.6) zeigt die numerische Lösung auf dem Intervall  $[0; 2]$  bei einer Schrittweite von 0,1 im Vergleich zur exakten analytischen Lösung. Die Übereinstimmung beider Lösungen lässt sich weiter erhöhen, indem eine geringere Schrittweite gewählt wird, wodurch jedoch mehr Rechenschritte ausgeführt werden müssen.

Untersuchungen zum Wechselspiel aus Rechenaufwand und Rechengenauigkeit spielen in der numerischen Mathematik eine zentrale Rolle, da

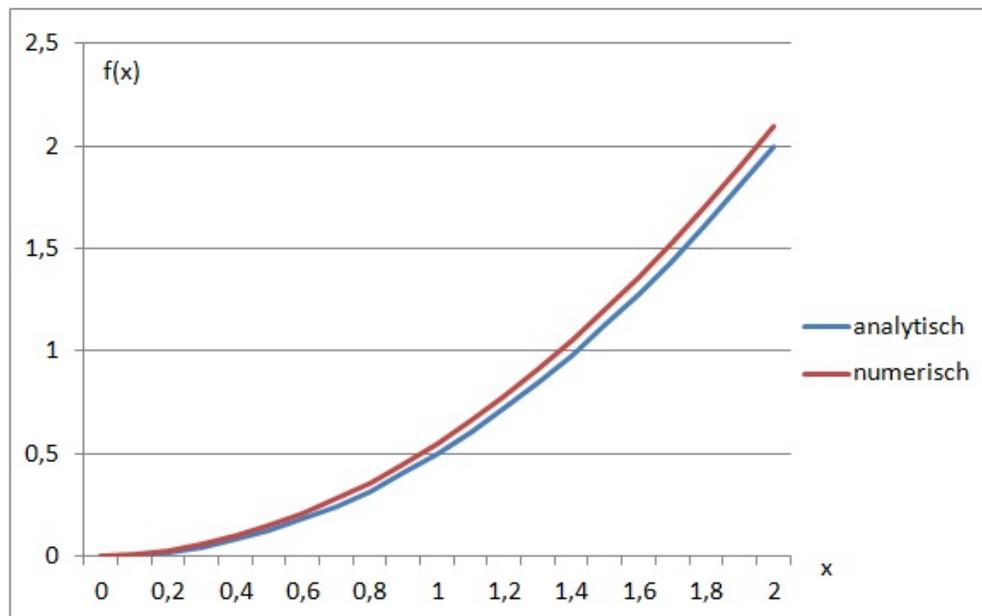


Abbildung 4.6: Grafischer Vergleich der analytischen mit der numerischen Lösung unter Verwendung des Tangentenverfahrens bei einer Schrittweite von Schrittweite  $h = 0,1$ .

sich eine exakte numerische Lösung in der Regel nur durch einen unendlichen Rechenaufwand erzielen lässt, so dass in der Praxis ein Kompromiss gefunden werden muss. Betrachtungen in dieser Hinsicht werden nachfolgend eine untergeordnete Rolle spielen, da ein prinzipielles Verständnis der Physik des Sterninneren im Vordergrund dieser Arbeit steht, bei dem es um das Abschätzen von Größenordnungen und nicht um möglichst exakte Rechenergebnisse gehen soll.

### 4.3.2 Das Tangentenverfahren für konvektive Gaskugeln

Um das Verfahren für den Aufbau konvektiver Gaskugeln nutzbar zu machen, muss es für die Anwendung auf ein Differentialgleichungssystem angepasst werden. Zunächst müssen die einzelnen Gleichungen diskretisiert werden, d.h. in die Form von Gleichung (4.118) gebracht werden. Es folgt für die hydrostatische Grundgleichung:

$$\frac{dp}{dr} \approx \frac{\Delta p}{\Delta r} = \frac{p(r_2) - p(r_1)}{r_2 - r_1} = -G \frac{M(r_2) \rho_1}{r_2^2} \quad (4.120)$$

Ausgehend von einem als bekannt angenommenen Druck  $p(r_1)$  folgt für den Druck an der Stelle  $r_2$  durch Umstellen:

$$p(r_2) = -G \frac{M(r_2)\rho(r_1)}{r_2^2} \cdot [r_2 - r_1] + p(r_1). \quad (4.121)$$

Analog lässt sich die Massengleichung diskretisieren und umformen zu

$$\frac{dM}{dr} \approx \frac{\Delta M}{\Delta r} = \frac{M(r_2) - M(r_1)}{r_2 - r_1} = 4\pi r_2^2 \rho(r_1) \quad (4.122)$$

$$\Rightarrow M(r_2) = 4\pi r_2^2 \rho(r_1)[r_2 - r_1] + M(r_1), \quad (4.123)$$

wobei  $M(r_1)$  ebenfalls als bekannt vorausgesetzt wird. Bei der Polytropengleichung handelt es sich zwar um keine Differentialgleichung, doch sie stellt uns vor das Problem, dass sie die Unbekannten  $\gamma$  und  $K$  enthält. Für konvektive Gaskugeln beträgt der Polytropenexponent  $\gamma = 5/3$ , während die Polytropenkonstante  $K$  durch Homologiebetrachtungen, welche an späterer Stelle der Arbeit vorgenommen werden, bestimmt werden kann. Die Polytropengleichung kann wie folgt diskretisiert werden:

$$p(r_1) = K \cdot \rho(r_1)^{\frac{5}{3}} \quad (4.124)$$

Bei genauerer Betrachtung der Gleichungen ist ersichtlich, dass die Steigung der Geraden

$$m = -G \frac{M(r_2)\rho(r_1)}{r_2^2} \quad (4.125)$$

in Gleichung (4.121) die Masse der zweiten Schale  $M(r_2)$  enthält. Da diese aber noch nicht ermittelt wurde, kann die Steigung nicht direkt berechnet werden kann. Um die fehlende Masse zu ermitteln, muss diese zuvor mithilfe von Gleichung (4.123) bestimmt werden.

Die richtige Wahl der Indizes bei der Diskretisierung spielt eine entscheidende Rolle, damit ein „Informationstransport entlang des Radius“ gewährleistet ist. Es kann also hilfreich sein, diesen in Form eines Schaubildes darzustellen, um einen Überblick über die Abfolge der Rechenschritte zu erhalten, wie es beispielsweise in Abbildung (4.7) geschehen ist. Daran ist ersichtlich, dass Schritt für Schritt die Informationen aus dem Zentrum bzw. einer beliebigen Gassicht vollständig auf die jeweils darüber liegende Schicht übertragen werden und somit die Struktur des gesamten Sterns iterativ ermittelt werden kann. Da die Indizes bei der

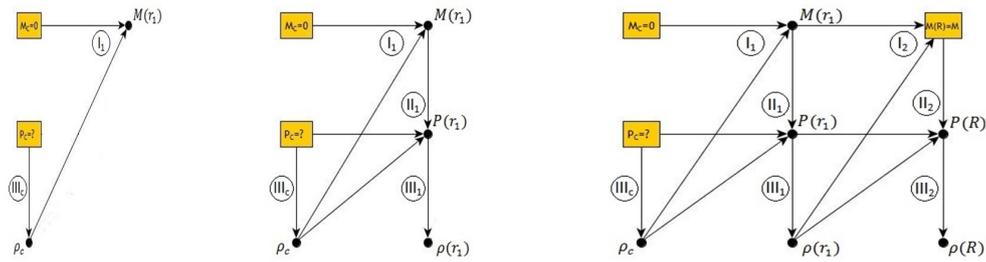


Abbildung 4.7: Darstellung des Informationstransportes im Sterninneren:

- (I)  $M(r_1) = 4\pi r_1^2 \rho(r_c) [r_1 - r_c] + M(r_c)$
- (II)  $p(r_1) = -G \frac{M(r_1) \rho_c}{r_1^2} \cdot [r_1 - r_c] + p(r_c)$
- (III)  $p = K \cdot \rho^{\frac{5}{3}}$

Diskretisierung prinzipiell auch anders gewählt werden dürfen, kann sich das Schaubild von Abbildung (4.7) unterscheiden. Bei einer ungeschickten Indexwahl, was bei komplexeren Problemen leicht passieren kann, ist es möglich, dass ein Informationstransport in die nächsthöhere Gasschicht nicht gelingt. Mithilfe des Schaubildes lässt sich jedoch schnell ausmachen, an welcher Stelle der Fehler zu suchen ist und welche Indizes angepasst werden müssen.

Mit den Gleichungen (4.121), (4.123) und (4.124) ist es nun möglich, den Druck- und Dichteverlauf, sowie die Masseverteilung im Sterninneren zu berechnen. Das Gleichungssystem ist so aufgebaut, dass ausgehend von vorgegebenen Druck- und Dichtewerten im Zentrum alle Zustandsgrößen der darüber liegenden Schicht ermittelt werden können. Durch Iteration kann die gesamte Sternstruktur erschlossen werden. Wir nehmen zunächst an, dass die Werte für die Dichte und den Druck im Zentrum bekannt sind und können beispielsweise Schätzwerte aus dem Halbkugelmodell als Zentralwerte verwenden. Da die Polytropengleichung für jeden Punkt gelten muss, folgt:

$$p_c = K \cdot \rho_c^{\frac{5}{3}} \tag{4.126}$$

Anhand der gewählten Zentraldaten lässt sich die Polytropenkonstante  $K$  ermitteln:

$$K = p_c \cdot \rho_c^{-\frac{5}{3}} \tag{4.127}$$

Dabei ist zu beachten, dass die Polytropenkonstante zwar innerhalb eines Sterns als konstant angesehen werden kann, jedoch für jedes weitere

Sternmodell einen anderen Wert annehmen kann und zu Beginn der Berechnung ermittelt werden muss.

Als nächstes kann mithilfe von Gleichung (4.121) die Masse der ersten Schale bestimmt werden. Anschließend sind alle notwendigen Daten bekannt um den Druck  $p(r_1)$  dieser Schale mit Gleichung (4.123) zu ermitteln. Gleichung (4.124) liefert die Dichte eben dieser. Da nun alle Zustandsgrößen von der ersten Schale bekannt sind, können nun analog alle Zustandsgrößen von der zweiten, dritten, ..., letzten Schale berechnet werden. Die Iteration bricht ab, wenn der Druck soweit abgenommen hat, bis er einen negativen Wert erreicht. Physikalisch ist dies so zu interpretieren, dass der Rand des Sterns überschritten wurde.

Aus mathematischer Sicht ist der Modellierungsprozess des Sterninneren abgeschlossen. Nun gilt es, das berechnete Modell mit realen Sternen abzugleichen, bzw. ganz konkret mit der Sonne. Als Vergleichsparameter stehen einerseits der berechnete Radius, sowie die berechnete Masse der Gaskugel zur Verfügung. Wurden die korrekten Zentraldaten gewählt, entspricht die Modellvorstellung näherungsweise der Realität, so bricht der Rechenprozess bei einer Kugel mit dem Radius  $R = R_\odot$  ab, wobei diese die Masse  $M = M_\odot$  enthalten muss. Durch systematisches Variieren der Zentralwerte lassen sich mit etwas Aufwand die passenden Zentralwerte finden, aus denen sich der Radius und die Masse der Sonne ergeben. Ohne den Einsatz des Computers als Hilfsmittel wäre dies nur schwer durchführbar. Aus erkenntnistheoretischer Sicht lässt sich ergänzen: gelingt die Simulation so, dass sich Sonnenradius und Masse näherungsweise darstellen lassen, darf man vermuten, dass die theoretischen Modellannahmen die Realität nicht grundlegend falsch abbilden.

Anschließend kann der Vollständigkeit halber der Temperaturverlauf mit der Gleichung des idealen Gases bestimmt und zusammen mit den anderen Zustandsgrößen wie in Abbildung (4.8) graphisch dargestellt werden: Ein Vergleich mit ausgefeilteren Sternmodellen (siehe Abbildung 4.9) zeigt, dass die Kurvenverläufe bereits sehr große Ähnlichkeiten aufweisen und auch die Größenordnungen dicht beieinander liegen. Erkennbar ist, dass genauere Modellrechnungen zu einer Masseverteilung führen, die stärker im Zentrum konzentriert ist. In einem vollkonvektiven Sonnenmodell befindet sich die Hälfte der gesamten Masse innerhalb von  $0,5 R$ , während dies in ausgefeilteren Modellen bereits bei  $0,3 R$  der Fall ist, was im Zusammenhang mit einer deutlich geringen Zentraldichte steht.

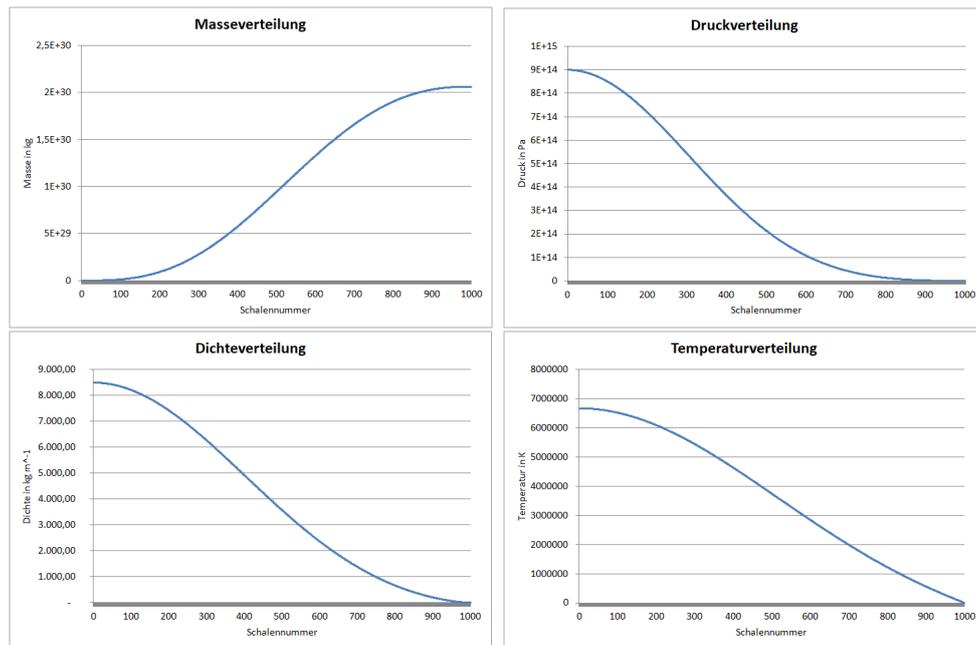


Abbildung 4.8: Verlauf von Masse, Druck, Dichte und Temperatur in Abhängigkeit von der Schalennummer

Der Druck und die Temperatur im Zentrum sind ebenfalls geringer. Im Wesentlichen hat unser Modell jedoch den physikalischen Kern getroffen.

Anhand des Verfahrens lässt sich demonstrieren, wie schwierig es sein kann, ein Sternmodell zu einem ganz konkreten Stern zu berechnen, da insbesondere in der Vergangenheit für viele Sterne nicht alle für die Rechnung notwendigen Daten zur Verfügung standen. In der Astrophysik ist dies allerdings nicht zwangsläufig erforderlich, da das Studium bestimmter Sternklassen von größerem Interesse sein kann, als das Studium von Einzelobjekten. Bezogen auf unser Modell ließen sich die „fehlgeschlagenen“ Rechenversuche anders interpretieren, nicht als falsche Rechenergebnisse, sondern als Konstruktionsversuche von Sternmodellen, die nach den vorgegebenen Parametern stabil wären. Solche „erlaubten“ Sternmodelle können ganz einfach dazu dienen, das Wechselspiel der physikalischen Größen zu untersuchen. Beispielsweise lassen sich die Resultate dazu nutzen, um den Zusammenhang zwischen dem Zentraldruck bzw. der Zentraldichte und dem resultierendem Radius bzw. der Sternmasse dieser Modellklasse zu erforschen. So lässt sich zeigen, dass ein geringerer Zentraldruck einen geringeren Radius, sowie eine geringere Masse nach sich zieht und eine geringere Zentraldichte zu einem größeren Radius, sowie einer größeren Masse führt. Ebenfalls zeigt das Verfahren, dass be-

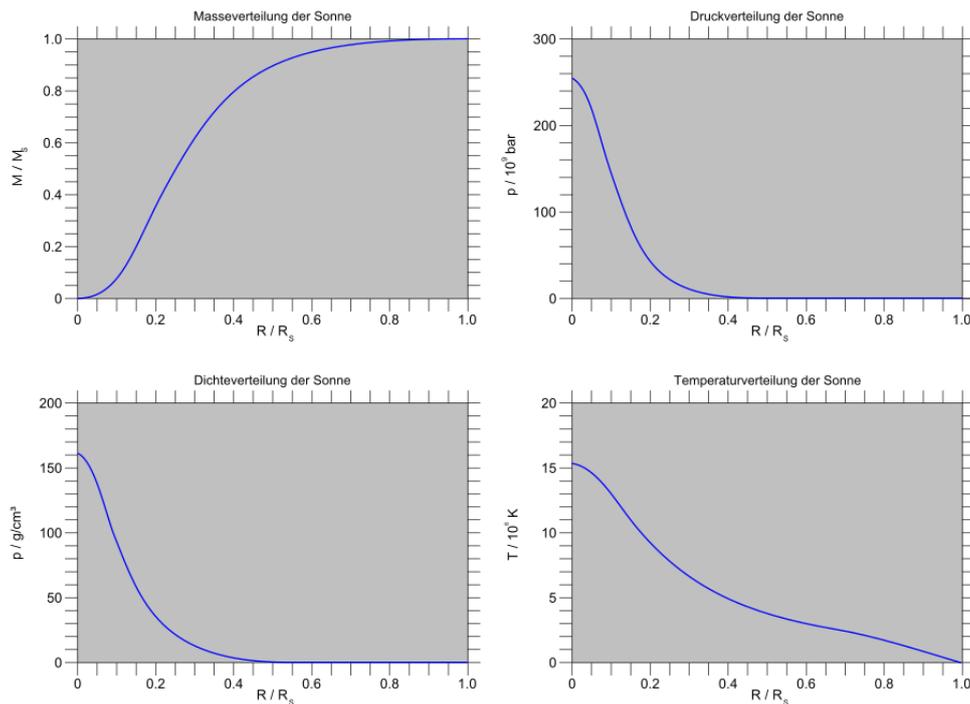


Abbildung 4.9: Verlauf von Masse, Druck, Dichte und Temperatur in Abhängigkeit vom relativen Radius nach [AI71].

reits geringe Änderungen der Zentraldaten zu starken Veränderungen der Größenverhältnisse der Sterne führen. Dies ist auch unter erkenntnistheoretischem Gesichtspunkten von allgemeinem Interesse: Durch Computersimulationen lassen sich Modelle konstruieren, doch die Funktionsweise der Modelle selbst bleibt oftmals im verborgenen. Erst durch systematisches Variieren der Modellparameter lernt man dann die Modelltheorie besser kennen.

### 4.3.3 Exceltool 4 - Polytrope Gaskugeln 1 (vollkonvektive Gaskugeln)

In Modul B wurde bereits dargelegt, wie die Grundgleichungen angepasst werden müssen, um sie mit einem Tangentenverfahren lösen zu können. Nun soll dieses Verfahren mit Excel umgesetzt werden. Zunächst beschränken wir uns auf die Betrachtung der Gleichungen, die das mechanische Gleichgewicht beschreiben. Diese werden in der bereits in Modul B hergeleiteten Tangentenform dargestellt, siehe dazu Gleichungen (4.121),

(4.123) und (4.124)

$$p(r_2) = -G \frac{M(r_2)\rho(r_1)}{r_2^2} \cdot [r_2 - r_1] + p(r_1) \quad (4.128)$$

$$M(r_2) = 4\pi r_2^2 \rho(r_1) [r_2 - r_1] + M(r_1), \quad (4.129)$$

$$p(r_2) = K \cdot \rho(r_2)^{\frac{5}{3}} \quad (4.130)$$

Zunächst sollten alle notwendigen Konstanten in die Zellen eingegeben und entsprechend beschriftet werden:

- Gesamtmasse:  $B2 = 2 * 10^{(30)}$
- Sternradius:  $B3 = 7 * 10^8$
- Gravitationskonstante:  $B4 = 6,67 * 10^{(-11)}$
- Boltzmannkonstante:  $B5 = 1,8 * 10^{(-23)}$
- mittlere Teilchenmasse:  $B6 = 8,7 * 10^{(-28)}$

Anschließend werden die Modellparameter eingegeben:

- Polytropenindex:  $D4 = \frac{5}{3}$
- Polytropenindex:  $D5 = E3 \setminus E2^{(E4)}$
- Anzahl Schalen:  $D6 = 1000$

Da die Zentralwerte für den Druck und die Dichte zwar benötigt werden, jedoch nicht bekannt sind, können hier zunächst beliebige Werte eingesetzt werden, um das Lösungsverfahren korrekt aufzusetzen. Es ist natürlich sinnvoll an dieser Stelle bereits mit Schätzwerten zu arbeiten, die wir in den vorangegangenen Kapitel ermittelt haben.

- Zentrale Dichte:  $D2 = 8500$
- Zentraler Druck:  $D3 = 9 * 10^{14}$

Für die Berechnung des Verlaufs der Zustandsgrößen vom Zentrum hin zum Rand wird je einer Spalte eine Variable zugeordnet und mit einer entsprechenden Überschrift versehen. Die Beschriftungen werden hier in Zeile 11 eingegeben. Folgende Zuordnung von Spalte zu Variable wurde hier exemplarisch gewählt:

	A	B	C	D	E	F
1	<b>Konstanten</b>			<b>Modellparameter</b>		
2	Masse	2E+30		Zentrale Dichte	8500	
3	Radius	7E+08		Zentraler Druck	9E+14	
4	G	6,67E-11		Polytropaenindex	1,67	
5	Boltzmannkonstante	1,38E-23		Polytropaenkonstante	254220732,99	
6	Mittlere Teilchenmasse	8,7E-28		Anzahl Schalen	1000,00	
7						
8						
9						
10						
11	Schale	Radius	Druck	Dichte	Masse	Temperatur
12		0	0	9E+14	8.500,00	0
13		1	700000	9E+14	8.499,83	3,66373E+22

Abbildung 4.10: Aufbau des Exceltools zur Berechnung eines polytropen Sterns.

- A: Schalennummer
- B: Radius
- C: Druck
- D: Dichte
- E: Masse
- F: Temperatur

Zeile 12 beinhaltet schließlich die Startwerte des Modells im Zentrum, während in Zeile 13 jeweils eine Formel eingegeben werden muss, die mithilfe des Ausfüllkästchens auf alle darunterliegenden Zellen übertragen werden kann. In Spalte A wird der Laufindex  $i$  eingetragen und beginnt von 0 an Zeilenweise aufwärts zu zählen. Spalte B gibt den Abstand des äußeren Randes der  $i$ -ten Schale vom Zentrum des Sternes an und kann als Produkt aus einer frei gewählten Dicke der Kugelschalen  $\Delta r$  und  $i$  bestimmt werden:

$$r_i = i \cdot \Delta r \quad (4.131)$$

Das Modell kann etwas flexibler gestaltet werden, indem die Anzahl der Kugelschalen  $N$  als weiterer freier Parameter anstelle der Schalendicke verwendet wird, sodass darüber die Rechengenauigkeit bzw. der Rechenaufwand gesteuert werden kann. Mit

$$\Delta r = \frac{R}{N} \quad (4.132)$$

folgt:

$$r_i = i \cdot \frac{R}{N} \tag{4.133}$$

In Zelle B13 muss daher die Formel

$$= B3 * A13 \backslash D6 \tag{4.134}$$

eingetragen werden. Für den Druck wird in Zelle C13 nach Gleichung (4.121)

$$= C12 - D12 * B4 * E13 \backslash B13^2 * (B13 - B12) \tag{4.135}$$

eingetragen. Für die Dichte folgt nach Übertragung von Gleichung (4.123) in Zelle D13:

$$= (C13 \backslash I5)^{(1/H6)} \tag{4.136}$$

Für die Masse, die sich innerhalb der gesamten Kugel befindet, gilt für Zelle E13:

$$= 4 * PI() * B13^2 * D12 * (B13 - B12) + E12 \tag{4.137}$$

Optional kann die Temperatur dieser Gasschicht wie folgt in Zelle F13 angegeben werden:

$$= C13 \backslash D13 \backslash B5 * B6 \tag{4.138}$$

Markiert man nun den Zellbereich A12 bis F13, so können die soeben eingegebenen Formeln mithilfe des Ausfüllkästchens auf die darunterliegenden Zellen übertragen werden, um die Zustandsgrößen in die oberhalb der zentralen Kugel liegenden Kugelschalen zu übertragen.

Von vornherein ist nicht abzusehen, wie viele Zeilen notwendig sind, um den Rand des Sterns zu erfassen, im Falle der Sonne sollte dies bei der von uns gewählten Schalendicke bei etwa 1000 Schalen der Fall sein. Zusätzlich muss die Bedingung erfüllt sein, dass sich die gesamte Masse der Sonne innerhalb des Radius befinden muss. Dies ist nur der Fall, wenn die zentrale Dichte und der zentrale Druck zu Beginn korrekt gewählt wurden – was bei der ersten Anwendung des Modells nicht der Fall sein sollte. Die passenden Startwerte lassen sich jedoch mit etwas Aufwand durch ein iteratives Probiervorgehen ermitteln. Die Zentraldaten, die nicht zu dem

gewünschten Ergebnis führen, sollten mit den Lernenden näher thematisiert werden, da diese nicht etwa einen Fehler im Modell darstellen, sie führen vielmehr zu dem Modell eines Sterns der Masse  $M'$  und dem Radius  $R'$ , der den selben physikalischen Gesetzen wie die Sonne gehorcht. Umgekehrt gedacht haben wir also die Zentralbedingungen eines Sterns gefunden, nur eben nicht von der Sonne.

Durch Variation eines einzigen Parameters lässt sich außerdem studieren, wie dieser die Gestalt eines polytropen Sterns beeinflusst. Beginnen wir mit einer Analyse der Veränderung des zentralen Druckes:

Vergleicht man die Modelle zweier Sterne, welche dieselbe Dichte im Zentrum besitzen, für die im Zentrum jedoch  $p_1 < p_2$  gilt, so lässt sich mithilfe des Exceltools erkennen, dass  $M_1 < M_2$  und  $R_1 < R_2$ . Soll also die Gasmasse  $M_1$  im Zentrum genauso stark verdichtet werden wie die Gasmasse  $M_2$ , ist dies nur möglich, indem der erste Stern einerseits einen kleineren Radius als der zweite Stern annimmt, andererseits erzeugt die kleinere Masse  $M_1$  im Zentrum auch nur einen geringeren Druck im Zentrum als die Masse  $M_2$ . Aus dem Gesetz des idealen Gases folgt außerdem, dass die zentrale Temperatur  $T_1$  geringer sein muss als die Temperatur  $T_2$ . Betrachten wir nun Variationen der zentralen Dichte:

Vergleicht man also zwei Sterne, deren Drücke im Zentrum übereinstimmen sollen und bei denen die Dichte  $\rho_1$  kleiner als die Dichte  $\rho_2$  sein soll, so resultiert, dass die Gesamtmasse  $M_2$  sowie der Radius  $R_2$  kleiner sind, als die Gesamtmasse und der Radius des Sterns mit der geringeren zentralen Dichte. Um sich dieses Verhalten des Modells erklären zu können, muss man sich überlegen, wie es einer kleinen Masse gelingen kann, den selben Druck im Zentrum zu erzeugen, wie eine größere Masse. Bei einem identischen relativen Verlauf der Zustandsgrößen im Inneren ist dies nur möglich, indem die geringere Gasmasse komprimiert wird und folglich einen kleineren Radius besitzen muss. Je kleiner der Radius eines Sterns, desto größer muss auch die Dichte sein, was sich in homologen Sternen auch unmittelbar auf das Zentrum übertragen lässt. Durch „Herumspielen“ mit den Parametern wird ersichtlich, dass es sehr aufwändig sein kann, die passenden Zentralwerte für einen ganz bestimmten Stern zu finden. Dieser Umstand ist unter Anderem der Einfachheit des Modells geschuldet, bietet aber einen Ansatzpunkt zur Diskussion intelligenterer Algorithmen, mit denen die Suche nach den Zentralwerten automatisiert oder zumindest vereinfacht werden kann. Generell sollte dieses Problem

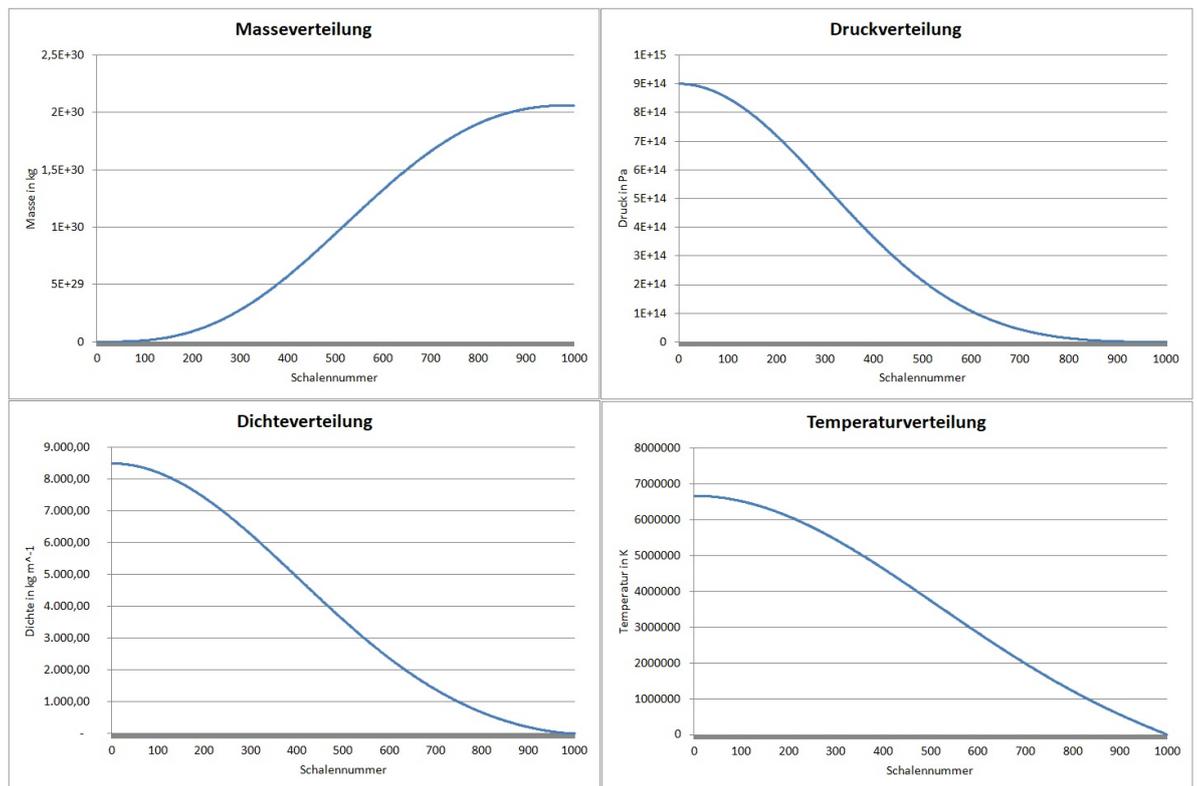


Abbildung 4.11: Masseverteilung, Druck- und Dichte- und Temperaturverlauf im Inneren eines polytropen Sterns.

aber nicht überbewertet werden, da sich die Astrophysik häufig damit befasst, allgemeine Aussagen über ganze Klassen von Sternen zu treffen, so wie wir es in den vorangegangenen Abschnitten gemacht haben. Durch die manuelle Arbeit lässt sich außerdem erkennen, dass bereits geringe Änderungen der Zentralwerte große Auswirkungen auf die äußere Gestalt eines Sterns haben. Sofern unser Sternmodell im Kern das physikalische Verhalten realer Sterne beschreibt, so sollten wir mit unseren Berechnungen nicht erheblich von den realen Bedingungen abweichen.

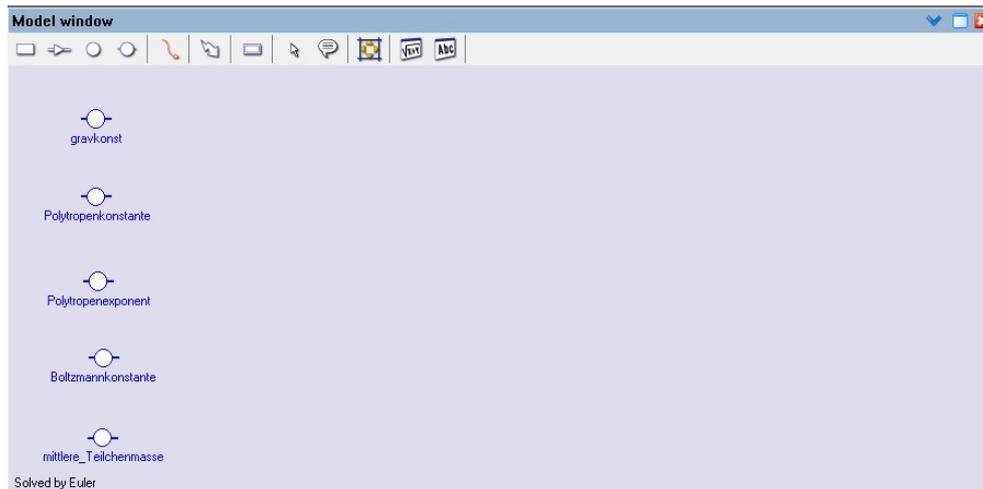


Abbildung 4.12: Einfügen der Konstanten.

#### 4.3.4 Coach Tool 2 - polytrope Sterne

Polytrope Sterne werden durch die nachfolgenden Gleichungen beschrieben, die es in ein Coach Modell umzusetzen gilt.

$$\frac{dp}{dr} = -G \cdot \frac{M(r)}{r^2} \cdot \rho \quad (4.139)$$

$$\frac{dM}{dr} = \pi r^2 \rho \quad (4.140)$$

$$p = C \cdot \rho^\gamma \quad (4.141)$$

$$p = \frac{k_B T \rho}{\mu} \quad (4.142)$$

$$(4.143)$$

Im ersten Schritt werden alle Konstanten des Modells eingefügt und mit aussagekräftigen Namen versehen, sowie mit den entsprechenden Werten versehen (siehe Abbildung 4.12):

- $gravkonst = 6.67384 \cdot 10^{-11}$
- $Polytropenkonstante = 254915262.33$
- $Polytropenexponent = \frac{5}{3}$
- $Boltzmannkonstante = 1.38 \cdot 10^{-23}$
- $mittlere\_Teilchenmasse = 0.84 \cdot 10^{-27}$

Anzumerken ist hierbei, dass die Polytropenkonstante, wie auch der Anfangswert für die Bestandsgröße *druck* zunächst nicht bekannt sind, son-

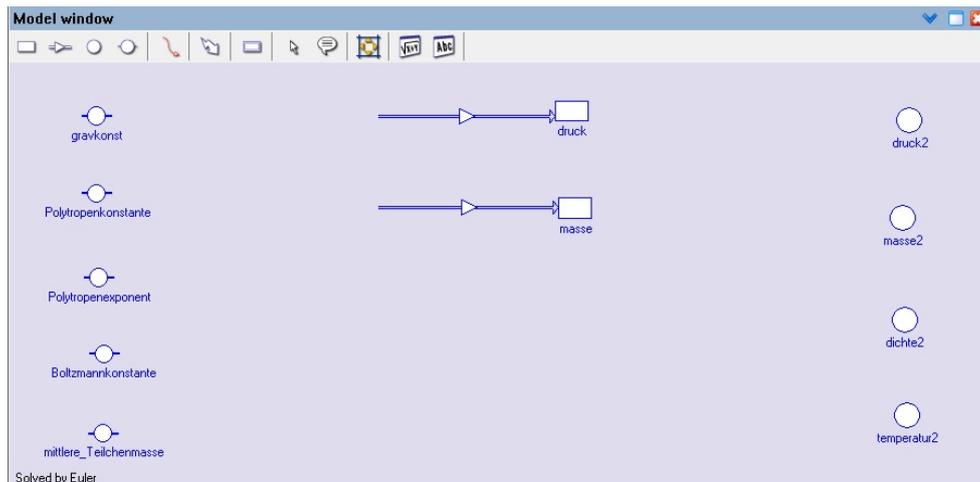


Abbildung 4.13: Einfügen der Hilfsgrößen.

den durch Versuchen verschiedener Zahlen herausgefunden werden müssen. Anschließend können zur Beschreibung der beiden Differentialgleichungen zwei Bestandsgrößen mit zugehöriger Flussgröße und Hilfsgrößen für den Druck  $p$ , die Masse  $M$ , die Dichte  $\rho$  und optional die Temperatur  $T$  hinzugefügt werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die Konnektoren erst im nächsten Schritt hinzugefügt:

Die Bestandsgrößen werden wie folgt bezeichnet und besitzen die Anfangswerte:

- $druck = 8.5 \cdot 10^{14}$  mit Flussgröße = *Druckgradient*
- $masse = 0$  mit Flussgröße = *Massegradient*

Die Hilfsgrößen werden wie folgt bezeichnet:

- druck2
- masse2
- dichte2
- temperatur2

Die „2“ wurde jeweils am Ende angehängt, um bei den Formeln, die später eingefügt werden, klar zwischen Hilfsgrößen und den Bestandsgrößen unterscheiden zu können. Aus technischen Gründen ist es notwendig, die Bestandsgrößen an Hilfsgrößen zu übergeben, wenn mit ihnen innerhalb eines Iterationsschrittes weitergearbeitet wird. Nun werden alle erforder-

derlichen Konnektoren eingefügt und die zugehörigen Gleichungen der Hilfsgrößen und Flussgrößen hinterlegt. Der Druckgradient ist gegeben durch die rechte Seite von Gleichung (4.139), somit muss die Flussgröße *Druckgradient* mit *gravkonst*, *masse2* und *dichte2* verbunden werden. Im Eigenschaften-Menü wird die folgende Formel hinterlegt:

$$- \textit{gravkonst} \cdot \textit{masse2} \cdot \textit{dichte2} \cdot r^{-2} \quad (4.144)$$

Der Massegradient wird durch die rechte Seite von Gleichung 4.140 beschrieben, demnach muss die Flussgröße *Massegradient* mit der Hilfsgröße *dichte2* verbunden und mit nachfolgender Gleichung versehen werden:

$$4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \textit{dichte2} \quad (4.145)$$

Anschließend können Verbindungen von *druck* nach *druck2* sowie von *masse* nach *masse2* gesetzt werden, um die jeweils aktuellen Werte der Bestandsgrößen an die Hilfsgrößen zu übergeben, dort müssen die Formeln

$$\textit{druck2} = \textit{druck} \quad (4.146)$$

und

$$\textit{masse2} = \textit{masse} \quad (4.147)$$

hinterlegt werden. Die Berechnung der Dichte erfolgt in jeden Iterationsschritt über die Polytropengleichung (4.141). Die Hilfsgröße *dichte2* muss daher mit *druck2*, *Polytropenkonstante* und *Polytropenexponent* verbunden werden und mit der Gleichung

$$(\textit{druck2} \cdot \textit{Polytropenkonstante}^{-1})^{\frac{1}{\textit{Polytropenexponent}}} \quad (4.148)$$

versehen werden. Auch wenn die Temperatur für die Modellrechnung nicht zwingend erforderlich ist, erscheint es dennoch sinnvoll, sie in die Modellrechnung mit aufzunehmen. Sie kann mithilfe des Gesetzes des idealen Gases (4.142) ermittelt werden. Demnach muss *temperatur2* mit *Boltzmannkonstante*, *mittlere\_teilchenmasse*, *dichte2* und *druck2* verbunden werden. Es wird die Gleichung

$$\textit{temperatur2} = \frac{\textit{druck2} \cdot \textit{mittlere\_Teilchenmasse}}{\textit{Boltzmannkonstante} \cdot \textit{dichte2}} \quad (4.149)$$

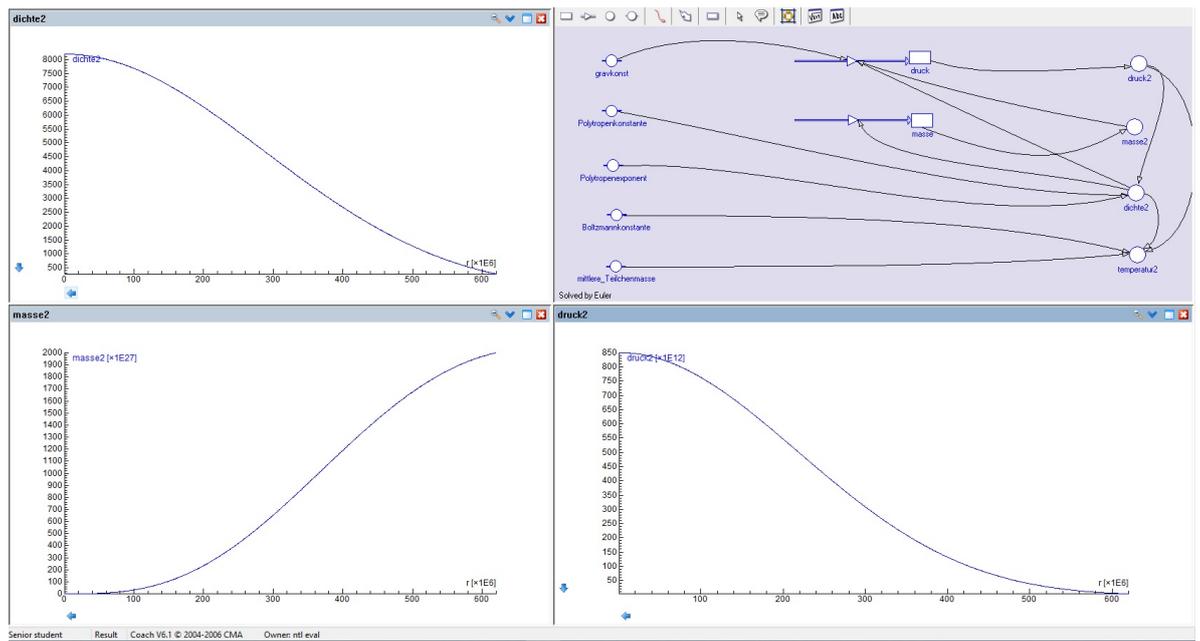


Abbildung 4.14: Einfügen der Hilfsgrößen.

eingefügt. Das fertige Modell sowie die Resultate sind in Abbildung 4.14 dargestellt.

# Kapitel 5

## Modul C - Eddingtons Standardmodell

Im vorangegangenen Lernmodul konnte mit elementaren Überlegungen gezeigt werden, dass neben den Gleichungen, die den Druckverlauf beschreiben um die Stabilität des Sterns zu gewährleisten, weitere Gleichungen erforderlich sind, mit denen der Energietransport modelliert werden kann. Diese stellen Bedingungen an den Temperaturverlauf im Inneren des Sterns. Neben der Betrachtung von konvektiven Prozessen, kommen außerdem die Wärmeleitung, sowie die Wärmestrahlung als mögliche Mechanismen für den Energietransport in Frage. In realen Sternen spielen die beiden letztgenannten Mechanismen immer eine Rolle, sie können jedoch in Bereichen von Sternen vernachlässigt werden, in denen Konvektion stattfindet. In unseren Modellen soll lediglich derjenige Mechanismus betrachtet werden, welcher den dominierend Anteil zur Energiebilanz beiträgt. Prozesse zur Wärmeleitung werden daher nicht untersucht, da durch diese in Hauptreihensternen im Vergleich zur Wärmestrahlung nur sehr wenig Energie transportiert wird. Im Inneren von Weißen Zwergen hingegen ist die Wärmeleitung dominierend, diese werden in der Arbeit jedoch nicht näher betrachtet.

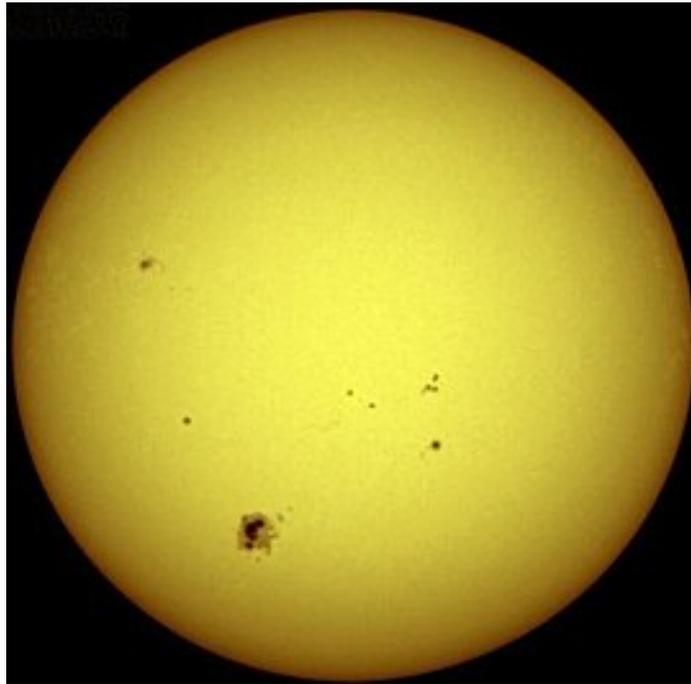


Abbildung 5.1: Die Helligkeit auf der Sonnenscheibe nimmt vom Zentrum hin zum Rand ab (Mitte-Rand-Verdunklung) [NAS].

## 5.1 Erkenntnistheoretische Überlegungen und wissenschaftshistorische Einordnung

Ein Stern, welcher den Großteil seiner Energie durch Wärmestrahlung transportiert, muss für jede Schale genau soviel Strahlungsenergie nach außen abgeben, wie diese von den darunter liegenden Schichten aufnimmt. Alle Schalen sollen sich im Strahlungsgleichgewicht befinden. Das erste Modell zum Strahlungsgleichgewicht welches erfolgreich auf Sterne angewendet werden konnte, wurde von Karl Schwarzschild entwickelt. Bei seinem Versuch ein solches Modell aufzustellen, war er jedoch aus mathematischen Gründen gezwungen, starke Vereinfachungen anzunehmen:

- konstante Gravitationsbeschleunigung,
- Absorptionskoeffizient unabhängig von der Strahlungsfrequenz und lediglich zur Dichte proportional,
- Energietransport zwischen parallel liegenden Gasschichten.

Trotz dieser Annahmen gelang es ihm, den resultierenden Temperaturverlauf mit beobachtbaren Daten der Sonne in Einklang zu bringen.

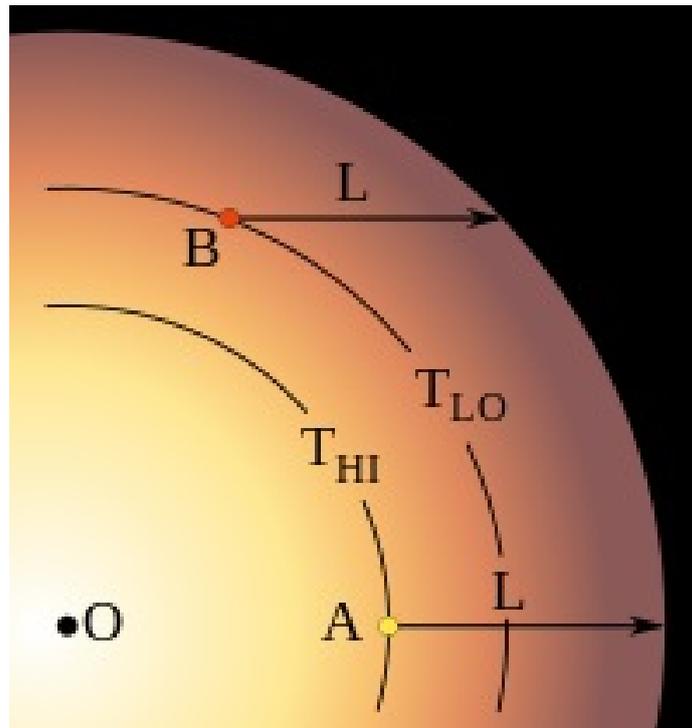


Abbildung 5.2: Die Mitte-Rand-Verdunklung lässt sich dadurch erklären, dass vom Rand der Sonnenscheibe Licht aus kälteren Regionen zu uns gelangt, als es in der Mitte der Fall ist. ([Par05])

Dies erreichte er, indem er eine Erklärung der Mitte-Rand-Verdunklung (siehe Abbildung 5.1) auf der Sonnenscheibe lieferte. Er nahm an, dass die beobachtbare Abnahme der Helligkeit vom Mittelpunkt der sichtbaren Kreisfläche der Sonne zum Rand hin durch einen Wärmestrahlungseffekt in teilweise transparentem Gas verursacht wird. Umgangssprachlich könnte man vereinfacht sagen, „zum Zentrum hin Blickt man auf heißere Gasschichten als am Rand“, dies gibt allerdings den physikalischen Ursprung dieses Effektes nicht zutreffend wieder (vgl. Abb.5.2).

Der physikalische Sehprozess findet genau umgekehrt statt, denn die an der Sternoberfläche freigesetzten Photonen durchdringen nach einer Vielzahl von Streuvorgängen eine teilweise durchlässige Atmosphäre und gelangen schließlich in unser Auge, wo wir sie schließlich wahrnehmen können. Die Strahlungsintensität ist dabei nicht isotrop, sondern weist eine deutliche Richtungsabhängigkeit auf. Dies ist auf das starke Absorptionsvermögen der Sonnenatmosphäre zurückzuführen, sodass senkrecht austretende Lichtstrahlen aus heißen Regionen mit einer deutlich höheren Strahlungsintensität stammen, als schräg austretende Lichtstrahlen (siehe Abb. 5.2). Auf Grundlage der Auswertung der Helligkeitsabnahme durch Karl Schwarzschild war es nun möglich, Sternmodelle bezüglich der berechneten Temperaturen in der Nähe der Oberfläche mit astronomischen Beobachtungen abzugleichen — ein bedeutsamer Schritt um Sternmodelle aus dem Status rein mathematischer Konstrukte herauszuheben.

Daneben entwickelte Schwarzschild ein Kriterium, mit dem durch die Betrachtung des Temperaturgradienten entschieden werden kann, ob an einer Stelle im Stern ein Konvektions- oder Strahlungsgleichgewicht vorliegt, das sogenannte Schwarzschild-Kriterium: Wie wir noch zeigen werden setzt Konvektion immer dann ein, wenn die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$1 - \frac{T_o^4}{T^4} < 4 \frac{\chi - 1}{\chi} \quad (5.1)$$

Im folgenden Lernmodul stehen die Untersuchungen von A.S. Eddington zum Sterninneren im Mittelpunkt. Um das Jahr 1916, als Eddington seine Forschungen begann, wurden viele bedeutsame Beobachtungen gemacht, die seine Überlegungen maßgeblich begünstigten. Einerseits bemerkten E. Hertzsprung und H. N. Russell, dass Sterne existieren, die bei identischer Spektralklasse (also übereinstimmender Oberflächentemperatur)

Leuchtkräfte besitzen, welche erheblich voneinander abweichen können. Dies ließ sich mithilfe des Stefan-Boltzmann-Gesetzes

$$P = \sigma \cdot A \cdot T^4 \quad (5.2)$$

erklären. Dabei stellt  $P$  die Strahlungsleistung,  $\sigma$  die Stefan-Boltzmann-Konstante und  $T$  die Temperatur der Oberfläche  $A$  des Sterns dar. Zwei Sterne der selben Spektralklasse besitzen in etwa dieselbe Oberflächentemperatur, sodass die Unterschiede in der Leuchtkraft auf Unterschiede in den Sternradien zurückzuführen sein müssen. Damit wurde offenbar, dass es im wahrsten Sinne des Wortes Riesen- und Zwergsternen geben muss. Die Riesensterne besitzen eine so geringe mittlere Dichte, dass angenommen werden kann, dass sie dem Gesetz des idealen Gases unterliegen. Somit wurde der Fokus der Sterntheorien auf die Untersuchung von Riesensternen gelenkt, da es noch immer keinen Hinweis darauf gab, ob Hauptreihensterne eben diesem Gesetz folgen könnten. Eine Schwierigkeit bei der Untersuchung von Riesensternen bestand darin, dass zum Jahr 1916 zu keinem Riesen die Masse, der Radius sowie die Leuchtkraft gleichzeitig bestimmt werden konnten.

Für die weitere Entwicklung der Theorie des Inneren Aufbaus der Sterne spielte die Untersuchung von Riesen mit einem kurzperiodischen Lichtwechsel eine wesentliche Rolle, den sogenannten Cepheiden. Nach der Entdeckung, dass es sich bei Delta Cephei um ein Doppelsternsystem handelt, wurde eine Vielzahl an Arbeiten publiziert, mit dem Ziel eine Erklärung für den ungewöhnlichen zeitlichen Verlauf der Leuchtkraft zu finden (siehe Abb. 5.3). Viele Hypothesen, die von einem einfachen Bedeckungsveränderlichen ausgingen, konnten keine zufriedenstellende Erklärung des nicht sinusförmigen Verhaltens des Lichtwechsels geben. Es setzte sich die unter Anderem von Eddington vertretene Hypothese durch, dass der Lichtwechsel durch eine Pulsation des Sterns verursacht wird, was allerdings einige Probleme mit sich brachte. Wie sich herausstellen sollte, trug deren Lösung ganz entschieden dazu bei, die Entwicklung der Theorie des inneren Aufbaus der Sterne voranzutreiben. Wie der 2. Hauptsatz der Thermodynamik in der Formulierung von Max Planck besagt, kann es keine periodisch arbeitende Maschine geben, die weiter nichts bewirkt als eine Last anzuheben und dabei ein Wärmereservoir abzukühlen. Die Periode, mit der die Last, also die Gasmassen der Sonne,

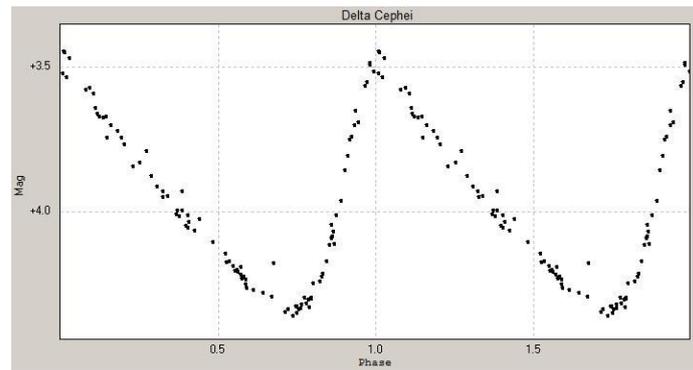


Abbildung 5.3: Die Helligkeit der Cepheiden verändert sich periodisch mit einem charakteristischen Kurvenverlauf. ([Tho11])

bewegt werden, müsste im Laufe der Zeit abnehmen – genau so, wie bei einer Wärmekraftmaschine, wenn man ihre Wärmezufuhr gekappt hat. Da dies im Rahmen der erwarteten Abnahme nicht der Fall war, folgerte Eddington, dass sich tief im Inneren eine äußerst ergiebige Energiequelle befinden müsse. Des Weiteren musste ein Mechanismus gefunden werden, der einerseits mit dem Kurvenverlauf des Lichtwechsels in Einklang zu bringen war und gleichzeitig sicherstellt, dass der Schwingungsvorgang aufrecht erhalten blieb. Die im Sterninneren strömende Wärme musste irgendwie in eine mechanische Pulsation umgewandelt werden. Eddington vermutete, dass der Strahlungsdruck dafür verantwortlich sein könnte. Durch seine Betrachtungen zur Pulsation der Cepheiden stieß er auf alle wichtigen Zusammenhänge, die er später als Grundlage für sein Standardmodell der Theorie des Sternaufbaus verwendete:

- Im Zentrum der Sterne befindet sich eine Energiequelle,
- der Strahlungsdruck trägt zur Stabilität der Sterne bei,
- die Durchlässigkeit der Materie für Strahlung, die sogenannte Opazität, muss berücksichtigt werden.

Die Entwicklung des nachfolgend präsentierten Lernmoduls erfolgt entlang Eddingtons Überlegungen zu den Cepheiden, um Lernenden zu vergegenwärtigen, dass die Entwicklung einer physikalischen Theorie häufig auf einem nicht-linearen Weg erfolgt und durchaus von Erkenntnissen geprägt sein kann, die in verwandten wissenschaftlichen Gebieten gewonnen wurden.

Dieses Vorgehen soll dazu beitragen, ein tiefgehendes Verständnis für die Theorie sowie für die historischen Erkenntnisprozesse zu entwickeln.

Anders als in Fachbüchern häufig der Fall, greifen wir nachfolgend auch in sich stimmige Argumentationen aus der Wissenschaftsgeschichte auf, sofern sie von erkennbarem didaktischem Wert sind und einen Lernzuwachs bedingen. Das nachfolgende Lernmodul ist in zwei Hälften gesplittet, als Einschub werden wir zwischen diesen Teilen weitere Hinweise für Lehrkräfte geben.

## 5.2 Prinzipielle Aussagen/einfache Abschätzungen

Um das Jahr 1916 trugen gleich mehrere astronomische Beobachtungen und deren Interpretationen dazu bei, die Entwicklung von Gaskugelmodellen weiter voranzutreiben. Insbesondere wurde die Möglichkeit geschaffen, bisherige Modellüberlegungen mit der Beobachtung abzugleichen, sodass die Gaskugelmodelle vom Status theoretisch-mathematischer Überlegungen zu physikalischen Modellen, welche die Bedingungen in real existierenden Sternen beschreiben, aufgewertet wurden. Dies gelang als erstem Karl Schwarzschild, indem er die Helligkeitsabnahme auf der „Sonnenscheibe“ vom Zentrum zum Rand hin, wie in Abbildung 5.1 zu sehen, auf die Temperaturabnahme im Sonnenkörper von innen nach außen zurückführen konnte. Der resultierende Temperaturverlauf konnte zum Abgleich mit anderweitig theoretisch berechneten Temperaturverläufen dienen. Des Weiteren gelang es ihm, ein Modell der Photosphäre im Strahlungsgleichgewicht zu erstellen, was mit der Beobachtung der Mitte-Rand-Verdunklung in Einklang gebracht werden konnte.

Das erste Modell, welches das Strahlungsgleichgewicht auch tief im Inneren erfolgreich berücksichtigte, wurde von A. S. Eddington erstellt. Eddington gelang es, durch Einbeziehung von Überlegungen zum Strahlungstransport und zur Energiefreisetzung in die hydrostatischen Betrachtung zur Stabilität von Gaskugeln, ein Modell zu entwickeln, das wir heute als Standardmodell bezeichnen. Er konnte zeigen, dass

- Sterne eine effiziente Energiequelle im Inneren besitzen,
- für Hauptreihensterne eine Masse-Leuchtkraft-Beziehung gilt und somit die Theorie des Sterninneren an Beobachtungen gekoppelt werden kann,

- Hauptreihensterne dem Gesetz des idealen Gases genügen.

Eddingtons Interesse galt zunächst den sogenannten Cepheiden. Dabei handelt es sich um Riesensterne, deren Leuchtkraft periodisch zu- und wieder abnimmt. Diese Periode verläuft allerdings unsymmetrisch (siehe Abb. 5.3), sodass der Lichtwechsel nicht durch Bedeckungsveränderlichkeit entstehen kann, sondern eine Ursache im physikalischen Verhalten des Sterns selbst haben muss. Eddington war der Ansicht, dass eine Pulsationstheorie geeignet für eine Lösung des Problems sei, auch wenn es durch diese Annahme einige Hürden zu überwinden galt. Diese machten Eddington jedoch auf alle wichtigen Aspekte aufmerksam, die für die Entwicklung seines Sternmodells erforderlich waren. Sollte die periodische Schwankung der Leuchtkraft der Cepheiden dadurch verursacht werden, dass die Sternoberfläche in Schwingung versetzt wird, so ließe sich der Stern als Wärmekraftmaschine auffassen, da Wärme von den heißen zentralen Regionen in Richtung kühlerer Oberfläche strömt und dabei einen Teil des Wärmeflusses in Hubarbeit umwandelt. Eine überzeugende Pulsationstheorie musste nun einerseits einen Weg aufzeigen, die Pulsation mit dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik in Einklang zu bringen und andererseits eine Erklärung für die Umwandlung von thermischer in mechanische Energie beinhalten.

### 5.2.1 Die Cepheiden als Wärmekraftmaschine - Konsequenzen aus dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik

Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik besagt in der Formulierung von Max Planck:

„Es ist unmöglich, eine periodisch arbeitende Maschine zu bauen, die nichts weiter bewirkt, als eine Last zu heben und einen Wärmespeicher abzukühlen.“

Für die Cepheiden folgt daraus, dass die Pulsation nach einer gewissen Zeit zum Erliegen kommen müsste, es sei denn, die Abkühlung des Wärmespeichers im Zentrum würde durch Energiezufuhr verhindert. Tatsächlich lässt sich eine minimale Abnahme der Schwingungsperiode beobachten, jedoch fällt diese weitaus geringer aus, als sie es ohne das Vorhandensein einer Energiequelle sein würde. Für eine Pulsationstheorie

lag es daher nahe, dass eine effektive Energiequelle im Zentrum der Cepheiden verborgen sein muss – ein Gedanke der von Eddington später auch auf „normale“ Sterne übertragen wurde. Energieerzeugungs- und Energietransportprozesse wurden fest in seinen Überlegungen zum inneren Aufbau der Sterne verankert.

Durch die hohen Anforderungen an die Effizienz der zentralen Energiequelle, lassen sich vornherein viele denkbare Quellen ausschließen. Diese Ausschlusskriterien sollen nun am Beispiel der Sonne aufgestellt werden. Sie gelten in analoger Weise auch für andere Sterntypen.

Wie wir heute aus Untersuchungen von irdischen Gesteinen z.B. mit der Uran-Blei Methode wissen, beträgt das Alter der Erde etwa 4,5 Milliarden Jahre, die Sonne muss entsprechend etwas älter sein. Inwiefern sich die Leuchtkraft der Sonne im Laufe ihrer Geschichte verändert hat, können wir an dieser Stelle der Arbeit nicht darlegen, jedoch wissen wir, dass sie für den Zeitraum, in dem das Leben entstanden ist, annähernd konstant gewesen sein muss (Eine vereinfachte Untersuchung zur zeitlichen Entwicklung der Leuchtkraft der Sonne findet sich in Kapitel 4). Wäre die Leuchtkraft erheblich größer bzw. geringer gewesen, hätte es kein flüssiges Wasser auf der Erde geben können, was aber Grundvoraussetzung für die Entwicklung von komplexen, mehrzelligen Lebensformen ist. Diese sind vor etwa 1 Mrd. Jahren entstanden, sodass gefolgert werden kann, dass die Leuchtkraft der Sonne für eben diesen Zeitraum näherungsweise konstant gewesen sein muss. In dieser Zeitspanne hat sie die Energie  $E = L_{\odot} \cdot t$  abgestrahlt, mit der Leuchtkraft der Sonne  $L_{\odot} = 3,8 \cdot 10^{26}$  W und  $t = 10^9$  a folgt:

$$\begin{aligned} E &= L_{\odot} \cdot t = 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W} \cdot 10^9 \text{ a} \\ &= 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W} \cdot 3,15 \cdot 10^{16} \text{ s} = 1,2 \cdot 10^{43} \text{ J} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Eine verborgene Energiequelle im Inneren der Sonne muss also mindestens  $E = 1,2 \cdot 10^{43}$  J bereitstellen können. Dividiert man diesen Wert nun durch die Masse der Sonne  $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$  kg, so erhält man den benötigten Energiegehalt pro Kilogramm eines potentiellen Energieträgers. Dabei stellt dieser Wert eine absolute Untergrenze für den Energiegehalt dar, da unterstellt wird, dass die gesamte Sonnenmasse als Energieträger

Tabelle 5.1: Mögliche fossile Brennstoffe.

Brennstoff	Energiegehalt pro $kg$
Benzin	$4,7 \cdot 10^7 \frac{J}{kg}$
Braunkohle	$2,1 \cdot 10^7 \frac{J}{kg}$
Steinkohle	$2,9 \cdot 10^7 \frac{J}{kg}$
Nadelholz	$1,7 \cdot 10^7 \frac{J}{kg}$

fungieren würde. Es gilt:

$$\frac{E}{M_{\odot}} = \frac{1,2 \cdot 10^{43} \text{ J}}{2 \cdot 10^{30} \text{ kg}} = 6 \cdot 10^{12} \frac{\text{J}}{\text{kg}} \quad (5.4)$$

Energieträger, die weniger als  $6 \cdot 10^{12} \frac{J}{kg}$  bereitstellen, kommen somit als zentrale Energiequelle für die Sonne nicht in Frage. Betrachten wir zunächst einige fossile Energieträger und ermitteln deren Energiegehalt, ähnlich wie es bereits im ersten Lernmodul geschehen ist:

Sämtliche Energieträger, die auf chemischer Verbrennung beruhen, liefern Energieinhalte die um den Faktor 100.000 zu gering ist, um die Leuchtkraft der Sonne für den betrachteten Zeitraum aufrecht erhalten zu können. Umwandlungsprozesse in der Atomhülle, wie sie bei Verbrennung von konventionellen Energieträgern stattfinden, stellen also nicht genügend Energie zur Verfügung.

Betrachten wir nun die Kontraktionshypothese und ermitteln, wie viel Gravitationsenergie pro Kilogramm Sonnenmaterie freigesetzt werden kann. Die potentielle Energie der Sonne liegt in der Größenordnung von

$$E_{pot} \approx G \frac{M^2}{R} \quad (5.5)$$

Ein Kilogramm Sonnenmaterie setzt demnach eine Energie von

$$\frac{E_{pot}}{M} \approx G \frac{M}{R} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 2 \cdot 10^{30} kg}{7 \cdot 10^8 \text{ m}} = 5 \cdot 10^{10} \frac{\text{J}}{\text{kg}} \quad (5.6)$$

frei und liegt somit ebenfalls weit unterhalb der geforderten Effektivität. Da weder chemische Verbrennungsprozesse noch Gravitationsenergie in

Frage kommen, muss die Energiequelle effektiver arbeiten – beispielsweise durch die Annihilation von Materie (wie Eddington noch glaubte) oder durch Kernprozesse.

Ermitteln wir also zunächst, ob die Spaltung von Uran 235, dem gängigen Brennstoff in Kernkraftwerken, ausreichen würde, um die Energieversorgung der Sonne zu gewährleisten. Wird dem Kern des stabilen Isotops Uran 235 ein weiteres Neutron hinzugefügt, wandelt sich dieses in das sehr kurzlebige Uran 236 um. Dieses zerfällt in die beiden Elemente Krypton 89 und Barium 144 sowie 3 freie Neutronen. Es gilt die Reaktionsgleichung:



Die Masse der Ausgangsprodukte beträgt

$$m = 236,053 \text{ u} \quad (5.8)$$

wobei  $u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  die atomare Masseneinheit darstellt. Rechnet man die Massen der Spaltprodukte zusammen, so ergibt sich

$$m_{Kr} + m_{Ba} + m_{3n} = 235,840 \text{ u} \quad (5.9)$$

Die Masse der Spaltprodukte ist demnach geringer als die Ausgangsmasse, sodass sich deren Differenz ergibt zu:

$$\Delta m = m - (m_{Kr} + m_{Ba} + m_{3n}) = 0,213 \text{ u} \quad (5.10)$$

Der Masseanteil

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{0,213 \text{ u}}{236,053 \text{ u}} = 0,000899 \approx 0,1 \% \quad (5.11)$$

geht also durch den Spaltungsprozess verloren. Gemäß der bekannten Formel

$$E = mc^2 \quad (5.12)$$

lässt sich die fehlende Masse (der sogenannte Massendefekt) in eine Energie umrechnen (genau genommen handelt es sich hierbei um einen Teil der Bindungsenergie des Urankerns). Wird also 1 kg Uran vollständig

gespalten, so werden etwa 0,1 g davon in Energie umgewandelt. Es gilt:

$$E = 0,0001 \text{ kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2 = 9 \cdot 10^{12} \text{ J} \quad (5.13)$$

Die Spaltung von Uran würde demnach genügend Energie liefern, um als Energiequelle im Sterninneren in Frage zu kommen. Insbesondere könnte durch die nachfolgende Spaltung der Tochterkerne noch mehr Energie freigesetzt werden. Neben der Kernspaltung schwerer Elemente muss zusätzlich die Fusion leichter Elemente als Energiequelle betrachtet werden. Aus den Experimenten von F. W. Aston zur Massebestimmung der Atome geht hervor, dass die Masse von vier Wasserstoff Kernen, also vier Protonen, etwas größer war, als die Masse von Helium. Die vier Protonen besitzen die Masse

$$m_{4p} = 4 \cdot 1,0081 \text{ u} = 4,0324 \text{ u} \quad (5.14)$$

während ein Heliumkern die Masse

$$m_{He} = 4,0039 \text{ u} \quad (5.15)$$

besitzt. Durch den Fusionsprozess von Wasserstoff zu Helium, geht demnach ein Anteil von etwa 0,7 % verloren und wird in Energie umgewandelt. (Der tatsächliche Fusionsprozess von Wasserstoff zu Helium ist komplizierter als die Fusion von 4 Protonen, da die Kernladungszahl um 2 zu hoch wäre. Dieser Umstand soll hier jedoch außer Acht gelassen werden, da eine Abschätzung der freigesetzten Energie im Vordergrund steht.) Bei der Fusion von 1 kg Wasserstoff zu Helium werden also 0,7 g in Energie umgewandelt. Es gilt:

$$E = 0,0007 \text{ kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2 = 6,3 \cdot 10^{13} \text{ J} \quad (5.16)$$

Die Kernfusion stellt demnach eine noch weit effektivere Energiequelle als die Kernspaltung dar.

Im Jahre 1932 wurde das Positron  $e^+$  entdeckt, das Antiteilchen zum Elektron  $e^-$ . Trifft ein Teilchen auf sein Antiteilchen, vernichten sie sich gegenseitig und strahlen ihre gesamte Masse in Form von Energie ab. Da die Masse eines Wasserstoffatoms etwa um den Faktor 2000 größer ist als die Elektronenmasse, können also etwa 0,5% der Gesamtmasse von

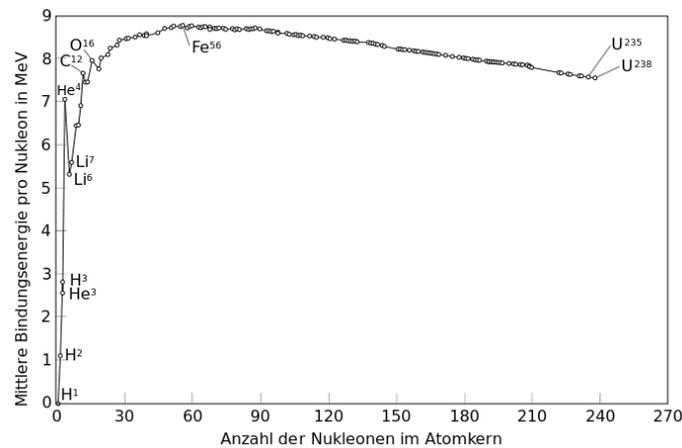


Abbildung 5.4: Bindungsenergie pro Nukleon in Abhängigkeit von der Anzahl der Nukleonen im Atomkern. Bei der Fusion von leichten Elementen kann bis hin zu  $Fe^{56}$  Energie gewonnen werden, während bei schweren Elementen nur Spaltungsprozesse Energie freigegeben können [Fas08].

Wasserstoff durch  $e^+$  und  $e^-$  Annihilation in Energie umgewandelt werden (Die Frage woher die Positronen stammen sollten sei hier außer Acht gelassen). Für schwerere Elemente ist dieser Prozess ineffizienter, da das Verhältnis von Elektronenmasse zu Kernmasse ungünstiger wird, da die Kerne zur Stabilisierung mehr Neutronen enthalten. Demnach liegt die Energiefreisetzung durch Annihilation von Elektronen etwa in der selben Größenordnung wie bei der Fusion von Wasserstoff bzw. der Spaltung von Uran und wäre als Energiequelle im Sterninneren denkbar.

Durch einfache Abschätzungen zum Energiegehalt der Materie lassen sich die möglichen Energiequellen im Sterninneren bereits stark einschränken, allerdings ist der physikalische Charakter dieser Überlegung stark spekulativ. Glücklicherweise lassen sich weitere Einschränkungen vornehmen. Wie bereits zu Beginn dieses Abschnitts erläutert wurde, ist neben der Größe des Energievorrats entscheidend, dass die Energiefreisetzung gleichmäßig stattfindet. Es muss demnach einen natürlichen Mechanismus geben, der die Energiefreisetzung regulieren kann.

## 5.2.2 Mechanismen der Energiefreisetzung

### Der radioaktive Zerfall und die Annihilation von Materie

Betrachten wir zunächst eine geringe Menge einer radioaktiven Substanz, die durch einen spontanen, also rein zufälligen Zerfall gekennzeichnet ist.

Die Anzahl der Zerfälle  $\frac{dN}{dt}$ , welche auch Gleichzeitig die Abnahme der Teilchenanzahl angibt, ist daher proportional zur Anzahl der vorhandenen Teilchen  $N(t)$ , multipliziert mit  $-1$ . Es gilt:

$$\frac{dN}{dt} \propto -N(t) \quad (5.17)$$

Die Proportionalität kann in eine Gleichung überführt werden, indem die Zerfallskonstante  $\lambda$  als Proportionalitätskonstante eingeführt wird die spezifisch ist für jedes radioaktive Isotop:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t) \quad (5.18)$$

Der zeitliche Verlauf der Teilchenanzahl lässt sich durch Trennung der Variablen und anschließende Integration bestimmen:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt \quad (5.19)$$

$$\ln(N) = -\lambda t \quad (5.20)$$

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad (5.21)$$

mit

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}} \quad (5.22)$$

lässt sich die Teilchenanzahl auch mithilfe der Halbwertszeit darstellen als:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}} t} \quad (5.23)$$

Da die Teilchenanzahl proportional zur Anzahl der Zerfälle ist und diese wiederum proportional zur freigesetzten Energie ist, folgt daraus, dass die Energiefreisetzung ebenfalls eine abfallende Exponentialfunktion sein muss, mit einer Halbwertszeit, die der des vorliegenden Elementes entspricht. Nimmt man an, es würde sich dabei um Uran 235 handeln, welches die Halbwertszeit  $T_{\frac{1}{2}} = 7 \cdot 10^8$  a besitzt, so hätte sich die Sonnenleuchtkraft im Laufe des betrachteten Zeitraums mehr als halbiert. Dies widerspricht aber unserer Annahme, dass die Sonne für mindestens eine Milliarde Jahre ihre Leuchtkraft etwa konstant halten soll, damit die Entwicklung von Leben auf der Erde möglich ist. Der spekulative Charakter unserer Überlegung zum radioaktiven Zerfall liegt ohnehin auf der Hand.

Bei der enormen Ansammlung von Uran 235 würde der Zerfall nicht mehr spontan stattfinden, sondern es würde zu einer unkontrollierten Kettenreaktion kommen. Beim Zerfall zu Krypton und Barium werden jeweils drei Neutronen freigesetzt, die unmittelbar auf einen weiteren Urankern stoßen und diesen zum Zerfall anregen. Dabei würden weitere Neutronen freigesetzt werden und ein Lawineneffekt ausgelöst. In kürzester Zeit würde der gesamte Uranvorrat wie bei der Explosion einer Atombombe gespalten werden, was offensichtlich nicht passiert. Um die Kernreaktion zu regulieren müsste es einen Moderator geben, der einen Teil der freiwerdenden Neutronen absorbiert. Man würde hier natürlich an Wasserstoff denken, dessen Protonen ja einen extrem wirksamen Moderator darstellen. Allerdings widerspricht das unseren Modellüberlegungen, wir sind ja bei unserer Abschätzung davon ausgegangen, dass die gesamte Sonne aus Uran 235 bestehen solle.

Auf ähnliche Weise bereitet die Annihilation von Positronen und Elektronen Probleme, da kein natürlicher Mechanismus bekannt ist, der dafür sorgt, dass die Positronen über Milliarden von Jahren im Sterninneren überleben könnten, ohne dass alle Positronen schlagartig mit den vorhandenen Elektronen reagieren würden, oder zumindest eine Abnahme der Energiefreisetzung zu beobachten wäre.

Von den uns bekannten Energiequellen bleibt per Ausschlussverfahren nur noch die Kernfusion übrig, die wir nun näher betrachten müssen.

### **Kernfusion**

Sofern Sterne als Kugeln aus idealem Gas aufgefasst werden können, steht ihnen für die Kernfusion ein genialer Mechanismus zur Verfügung, mit dem die Energiefreisetzung reguliert und Abweichungen von einem „Normalwert“ auf natürliche Weise ausgeglichen werden können. Ein solcher Mechanismus ist zwingend erforderlich, da die Energiefreisetzung durch Fusion z.B. von Wasserstoff zu Helium auf ähnlichem Wege abläuft, wie bei der Explosion einer Wasserstoffbombe. Eine schlagartig ansteigende Energiefreisetzung würde zur Zerstörung des Sterns führen. Um den Regulierungsmechanismus verstehen zu können, müssen wir einige Zusammenhänge vorweg nehmen, auf die wir erst nachfolgend näher eingehen werden.

Die Fusionsrate hängt stark von der Temperatur in den zentralen Regionen des Sterns ab, da zwei Atomkerne nur fusionieren können, wenn sie

sich hinreichend nahe kommen. Da alle Atomkerne positiv geladen sind, müssen sie die gegenseitige Coulombabstoßung überwinden, was nur bei sehr großen Teilchengeschwindigkeiten und somit hohen Gastemperaturen möglich ist.

Nehmen wir zunächst an, die Temperatur im Zentrum würde durch eine Störung etwas ansteigen. Durch die höhere Temperatur würde die Kernfusion angeregt werden, was zu einer größeren Energiefreisetzung führen würde. Dadurch müsste der Druck im Zentrum ansteigen. Dieser würde den Gravitationsdruck übersteigen, sodass die hydrostatische Grundgleichung nicht mehr erfüllt sein würde und die Zentralregion expandieren müsste. An dieser Stelle käme das Lane'sche Gesetz ins Spiel. Da gilt

$$T \propto \frac{1}{R}, \quad (5.24)$$

würde eine Vergrößerung des Radius für eine Verringerung der Temperatur der betrachteten Gasmasse sorgen. Die geringere Temperatur wiederum hätte eine Reduzierung der Fusionsrate zur Folge, sodass sich diese wieder auf das Normalniveau einstellen würde.

Nehmen wir nun an, die Temperatur im Zentrum würde etwas verringert. Dadurch müsste die Kernfusion gehemmt werden, sodass sich die Energiefreisetzung reduzieren würde. Der Druck fiel dadurch ab. Damit würde der Gravitationsdruck den entgegenwirkenden Druck übersteigen, sodass die hydrostatische Grundgleichung nicht mehr erfüllt wäre und die der Zentralregion kontrahieren müsste. Nach dem Lane'schen Gesetz würde die Verringerung des Radius eine Temperaturerhöhung der betrachteten Gasmasse bewirken. Die höhere Temperatur hätte wiederum eine Erhöhung der Fusionsrate zur Folge, sodass sich diese wieder auf das Normalniveau einstellen würde.

Nimmt man also an, dass Fusionsprozesse im Sterninneren stattfinden, so sollte die Energiefreisetzung auf natürliche Weise gegen Störungen stabilisiert werden, sodass sie weder zum Erliegen käme, noch in unkontrollierter Weise ansteigen könnte – zumindest insofern die Sternmaterie dem Gesetz des idealen Gases folgt.

### Erste Überlegungen zur Kernfusion

Es konnte gezeigt werden, dass durch die Fusion von Wasserstoff zu Helium theoretisch genügend Energie bereitgestellt werden kann, um die Leuchtkraft der Sonne hinreichend lange aufrecht zu erhalten. Des Weiteren konnte mithilfe des Lane'schen Gesetzes ein Weg aufgezeigt werden, mit dem die Sonne ihre Leuchtkraft auf natürliche Weise regulieren kann. Es bleibt nun noch zu klären, ob die physikalischen Bedingungen im Sternzentrum ausreichen, um die Fusion von Atomkernen überhaupt in Gang zu setzen – historisch gab es daran durchaus berechtigte Zweifel. Zwei Atomkerne können nur miteinander fusionieren, wenn sie sich auf eine Distanz von  $d \approx 10^{-15}$  m annähern, da in diesem Abstand die anziehenden starken Kernkräfte die Coulombabstoßung überwiegen und sie dadurch zusammengehalten werden. Die abstoßende Wirkung der Coulombkraft stellt jedoch aufgrund des Abstandsgesetzes eine Hürde dar, die nicht ohne Weiteres überwunden werden kann, dazu sind hohe kinetische Energien und somit enorme Gastemperaturen erforderlich. Die Größenordnung wird nun abgeschätzt. Da die Coulombkraft zwischen zwei möglichen Fusionspartnern von deren Kernladungszahlen abhängt, betrachten wir nachfolgend die Fusion zweier Protonen, um die notwendigen physikalischen Bedingungen für die Fusion im Sterninneren nach unten abschätzen zu können.

Für die abstoßende Coulombkraft zwischen zwei Protonen im Abstand  $r$  gilt:

$$F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} \quad (5.25)$$

Die Arbeit, die erforderlich ist, um den Abstand auf  $d \approx 10^{-15}$  m zu reduzieren beträgt:

$$W = \int_r^d F_c \, dr = \int_r^d \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} \, dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot e^2 \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d}\right) \quad (5.26)$$

Dabei stellt  $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$  die elektrische Feldkonstante dar. Da  $r$  gegenüber  $d$  in der Regel sehr groß ist, gilt:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{d} \quad (5.27)$$

durch Einsetzen aller bekannten Größen folgt, dass eine kinetische Energie von etwa  $E_{kin} = 2,36 \cdot 10^{-13}$  J erforderlich ist. Dieser Wert wird nun

in Elektronenvolt umgerechnet, der Energieeinheit, die in der Kernphysik üblicherweise verwendet wird:

$$E_{kin} = 2,36 \cdot 10^{-13} \text{ J} \approx 1,5 \text{ MeV} \quad (5.28)$$

Vergleichen wir diesen Wert nun mit der mittleren kinetischen Energie  $\bar{E}_{kin}$  der Teilchen im Zentrum der Sonne. Es gilt:

$$\bar{E}_{kin} = \frac{3}{2} k_B T \quad (5.29)$$

Der Einfachheit halber kann eine Faustformel für die kinetische Energie in Elektronenvolt verwendet werden:

$$T = 10^4 \text{ K} \Rightarrow \bar{E}_{kin} \approx 1 \text{ eV} \quad (5.30)$$

In den vorangegangenen Lernmodulen wurde die Temperatur im Inneren der Sonne auf etwa  $T = 10.000.000 \text{ K}$  abgeschätzt, sodass nach Gleichung (5.30) die mittlere kinetische Energie der Teilchen in der Nähe des Zentrum nach unserem Modellansatz  $\bar{E}_{kin} = 1 \text{ keV}$  beträgt. Die Temperatur im Sonneninneren sollte demnach um mindestens 3 Zehnerpotenzen zu klein zu sein, um die Fusion von Protonen und insbesondere noch schwereren Kernen zu erlauben. Bei der verwendeten Temperatur handelte es sich allerdings um einen Mittelwert, sodass es auch einige Teilchen mit einer erheblich größeren kinetischen Energie gibt, für die die Fusion möglich sein könnte. Es bleibt zu klären, ob genügend hochenergetische Teilchen vorhanden sind, um die enorme Energiefreisetzung im Inneren der Sonne zu ermöglichen. Die relativen Häufigkeiten der Teilchengeschwindigkeiten eines idealen Gases mit der mittleren Temperatur  $\bar{T}$  wird durch die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung beschrieben. Die Teilchenanzahl mit einer Geschwindigkeit im Intervall  $[\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v}]$  lässt sich ermitteln nach:

$$N(\vec{v})d\vec{v} \propto e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} d\vec{v} \quad (5.31)$$

Die Proportionalitätskonstante folgt aus der Normierungsbedingung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(v) d\vec{v} = N \quad (5.32)$$

wobei  $N$  der Anzahl der Gasteilchen des betrachteten Gases entspricht. Aus der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung lässt sich nun ablei-

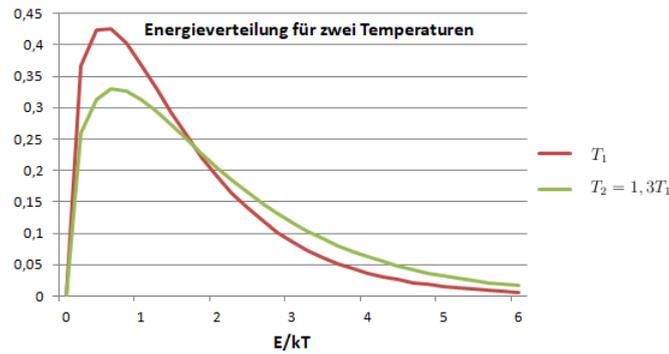


Abbildung 5.5: Die Boltzmann-Verteilung

ten, wie die kinetische Energie  $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$  auf die Gasteilchen verteilt ist. Es folgt (ohne Herleitung):

$$N(E)dE \propto e^{-\frac{E}{kT}} \sqrt{E} dE \quad (5.33)$$

Die Verteilung der kinetischen Energie wird als Boltzmannverteilung bezeichnet. Im Bereich geringer Energien nimmt die Teilchenanzahl mit  $\sqrt{E}$  zu, während sie für hohe Energien exponentiell abnimmt und ein Maximum für die mittlere kinetische Energie annimmt. Da die mittlere kinetische Energie der Protonen mit etwa  $E_{kin} = 1000$  eV um den Faktor 1000 geringer ist, als die zu überwindende Coulomb Barriere von  $\approx 1,5$  MeV, resultiert, dass lediglich der Anteil  $e^{-1000} = 10^{-434}$  der vorliegenden Protonen eine hinreichend große Geschwindigkeit besitzt, um mit einem weiteren Proton fusionieren zu können. Da sich in der Sonne jedoch „nur“ etwa  $10^{57}$  Protonen befinden, genügt diese Betrachtung nicht, um die Fusion von Protonen als Energiequelle zuzulassen.

Mit den Mitteln der klassischen Physik lässt sich tatsächlich nicht erklären, wie die Fusion unter den Bedingungen im Sterninneren stattfinden kann. Dennoch war Eddington davon überzeugt, dass Kernfusion im Inneren von Sternen stattfinden muss. Kritiker, die der Meinung waren, das Innere von Sternen sei nicht heiß genug, entgegnete er:

„The critics lay themselves open to an obvious retort; we tell them to go and find a hotter place.“

Erst mit der Entdeckung des Tunneleffektes und dessen Beschreibung durch die Quantenmechanik konnte eine zufriedenstellende Lösung für das Fusionsproblem gefunden werden. Dieser Effekt erlaubt es Teilchen, Potentialbarrieren zu passieren, die aus klassischer Sicht als unüberwind-

bar gelten.

Ein Teilchen, welches sich mit einer bestimmten kinetischen Energie  $E_{kin}$  auf eine Potentialbarriere der Höhe  $V > E_{kin}$  und der Breite  $b - a$  zu bewegt, würde nach den Regeln der klassischen Physik einfach reflektiert werden. Quantenmechanisch lässt sich das Teilchen jedoch als Welle auffassen, welche zum Teil reflektiert wird, zum Teil aber auch die Barriere passieren kann, da die Aufenthaltswahrscheinlichkeit hinter der Potentialbarriere von Null verschieden ist (Dieser Effekt ist in der Optik für Lichtwellen auch als verhinderte Totalreflexion (evaneszente Welle) bekannt.) Ausführungen zum Verhalten von Wellen in verschiedenen Potentialen finden sich in gängigen Lehrbüchern zur Quantenmechanik, wie z.B. [Dem96]. Eine genaue Herleitung dazu soll hier nicht im Fokus stehen, statt dessen folgen Überlegungen nach [Sri11]. Im Falle eines Coulombpotentials der Höhe  $V$  gilt für die Transparenz  $P_{trans}$

$$P_{trans} \propto \exp\left(-2 \int_a^b \sqrt{\frac{2m}{\hbar}(V - E)} dx\right). \quad (5.34)$$

Die Wahrscheinlichkeit  $P_{trans}$ , die Barriere zu durchtunneln, wird also durch eine Funktion beschrieben, welche für eine gegebene Potentialhöhe  $V$  exponentiell mit der kinetischen Energie des Teilchens  $E$  ansteigt. Des Weiteren ist sie für massearme Teilchen größer als für massereiche. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Proton die Coulombbarriere eines zweiten Protons durchdringt, beträgt

$$P_{trans} \approx \exp\left(-2\pi \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{e^2}{\hbar E^{\frac{1}{2}}}\right) \quad (5.35)$$

bzw. für zwei beliebige Kerne mit den Kernladungszahlen  $Z_1$  und  $Z_2$

$$P_{trans} \approx \exp\left(-2\pi \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar E^{\frac{1}{2}}}\right) \quad (5.36)$$

Dabei stellt  $m$  die reduzierte Masse dar. Die Durchtunnelungswahrscheinlichkeit nimmt mit steigender Kernladungszahl wie zu erwarten ab, da die zu überwindende Coulombbarriere von der Ladung abhängt. Auf der anderen Seite nimmt sie exponentiell mit der kinetischen Energie der Teilchen zu.

Für zwei Protonen mit einer kinetischen Energie von  $E_{kin} \approx 1000$  eV, also der mittleren kinetischen Energie des Gases bei  $T = 10^7$  K, folgt

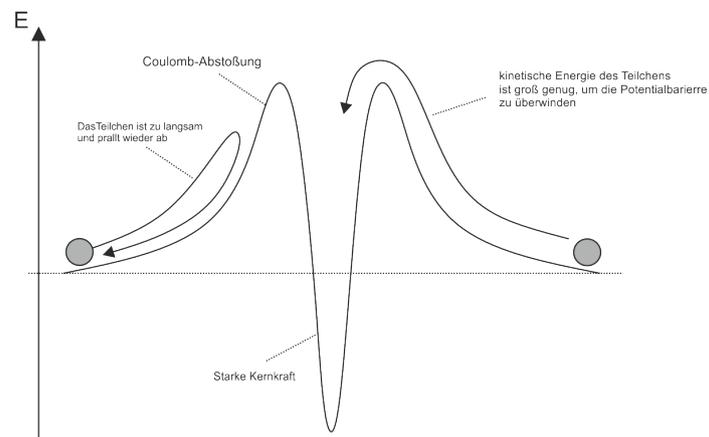


Abbildung 5.6: Zwei Teilchen mit  $E_1 < V$  und  $E_2 > V$  treffen im klassischen Bild auf das Potential  $V$  (Nach [Har13]).

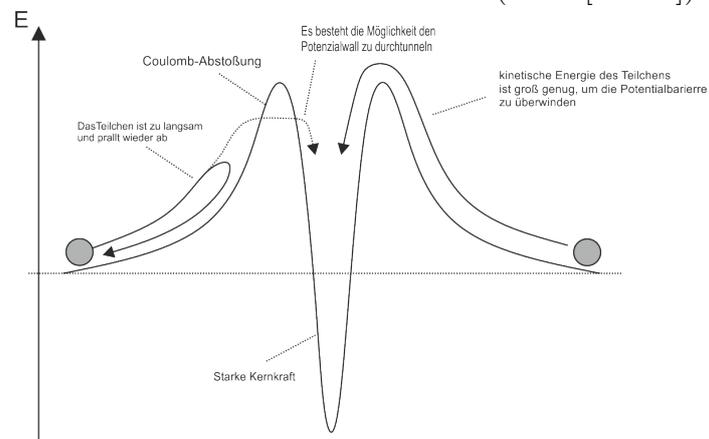


Abbildung 5.7: Zwei Teilchen mit  $E_1 < V$  und  $E_2 > V$  treffen im quantenmechanischen Bild auf das Potential  $V$  (Nach [Har13]).

nach Einsetzen eine Wahrscheinlichkeit von

$$P = 10^{-20}. \quad (5.37)$$

Auch wenn die Wahrscheinlichkeit noch immer sehr gering erscheint, ist sie, bedingt durch die Anzahl der vorliegenden Teilchen, nicht zu verachten, insbesondere da es sich hier um die Betrachtung der mittleren kinetischen Energie handelt.

Die Fusionsrate im Sterninneren wird nun durch zwei gegenläufige Effekte festgelegt: Einerseits durch die Verteilung der kinetischen Energien der Gasteilchen, welche durch die Boltzmannverteilung beschrieben wird und besagt, dass die Anzahl der Teilchen mit hohen Energien exponentiell abnimmt. Andererseits folgt aus den Betrachtungen zum Tunneleffekt, dass diese wenigen hochenergetischen Teilchen eine besonders hohe Wahrscheinlichkeit besitzen die Coulombbarriere zu überwinden. Eine genauere Analyse ergibt, dass die Anzahl der Fusionen pro Einheitsvolumen und Zeiteinheit durch das Integral

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{k_B T}} \cdot e^{-\frac{\eta}{\sqrt{E}}} dE \quad (5.38)$$

beschrieben werden kann. Der erste Faktor unter dem Integral ist auf die Boltzmannverteilung zurückzuführen, während der zweite Faktor durch den Tunneleffekt gegeben ist. Stellt man nun die Funktion unter dem Integral graphisch dar, zeigt sich ein Maximum, welches als Gamow-Peak bezeichnet wird. Die unter der Kurve liegende Fläche gibt die Reaktionsrate an und kann durch Lösen des Integrals ermittelt werden.

Nachdem wir gezeigt haben, dass es prinzipiell möglich ist, zwei Protonen miteinander zu verschmelzen, sind wir dennoch ein Stück weit davon entfernt, den Weg aufzuzeigen, wie ausgehend von vier Protonen Helium erzeugt werden kann. Der einzige Hinweis, dass dies überhaupt der Fall sein könnte, liegt bislang in der Tatsache, dass die Masse von Helium in etwa mit der von vier Protonen übereinstimmt. Im Inneren von Sternen stehen zwei verschiedene Wege offen, wie dies gelingen kann: In massearmen Sternen wie der Sonne findet der Großteil der Energiefreisetzung über die Proton-Proton-Kette statt, während in massereichen Sternen der Bethe-Weizsäcker-Zyklus dominiert. Im Gegensatz zur Proton-Proton-Kette erfordert der Bethe-Weizsäcker-Zyklus das Vorhandensein von Kohlenstoff, Stickstoff und Sauerstoff als Katalysatoren, sodass dieser

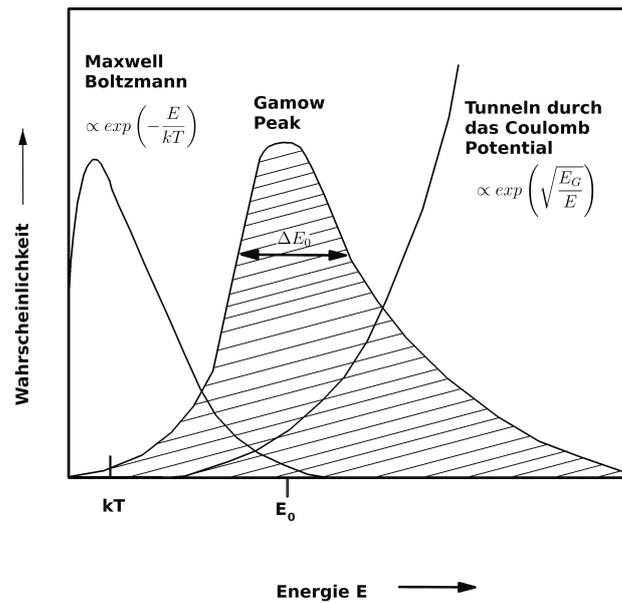


Abbildung 5.8: Die Multiplikation der Maxwell-Boltzmann-Verteilung mit der Verteilung der Tunnelwahrscheinlichkeit ergibt die Fusionswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Energie. Das Maximum wird als Gamow-Peak bezeichnet, nach [KKZ97].

in der ersten Sternengeneration nicht stattfinden konnte, da diese Elemente noch nicht existierten. Der Ablauf beider Fusionsabläufe ist in Abbildung (5.9) und Abbildung (5.10) dargestellt, soll nun aber nicht im Detail erläutert werden.

### 5.2.3 Sterne im Strahlungsgleichgewicht

Neben der Einbeziehung von Energiefreisetzungprozessen im Sternzentrum stellten Eddingtons Überlegungen, auf welche Art und Weise die freigesetzte Energie zur Oberfläche transportiert werden kann, die wesentlichen neuen Bestandteile seines Sternmodells dar. Er war der Ansicht, dass der Energietransport durch Strahlung geschieht und nahm weiter an, dass sich Strahlung und Sternmaterie im Strahlungsgleichgewicht befinden. Dies bedeutet, dass alle Gasteilchen, wie auch die Photonen, im Mittel die selbe Energie besitzen. Des Weiteren gilt im Strahlungsgleichgewicht, dass jedes beliebige betrachtete Volumenelement im Stern genau so viel Strahlung emittiert, wie es absorbiert. Das Strahlungsgleichgewicht kann im Inneren von Sternen nur näherungsweise erfüllt sein, da ein Teil der Strahlung den Stern offensichtlich an seiner Oberfläche ver-

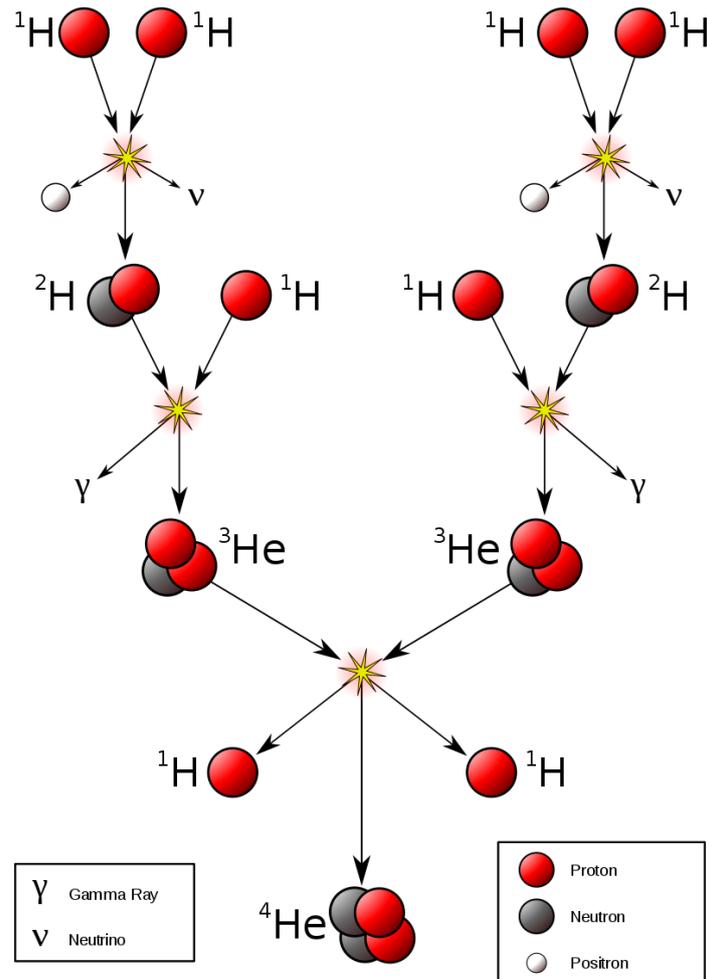


Abbildung 5.9: Darstellung der Fusion von Wasserstoff zu Helium mit der Proton-Proton-Kette ([Bor06a]).

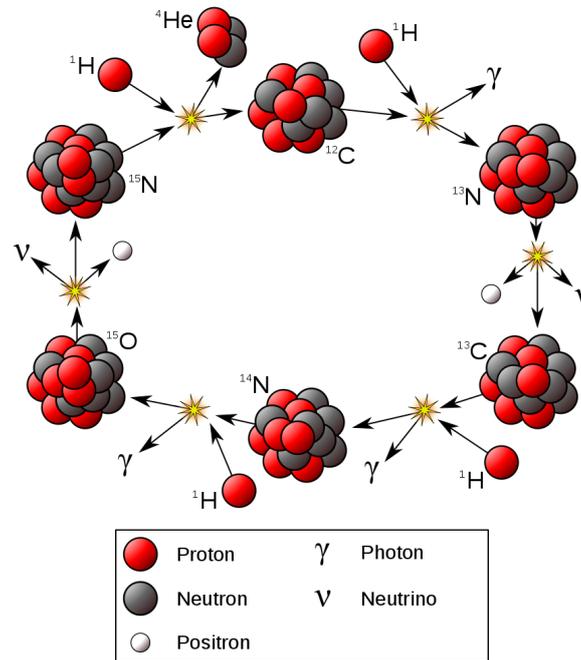


Abbildung 5.10: Darstellung der Fusion von Wasserstoff zu Helium mithilfe des Bethe-Weizsäcker-Zyklus ([Bor06b]).

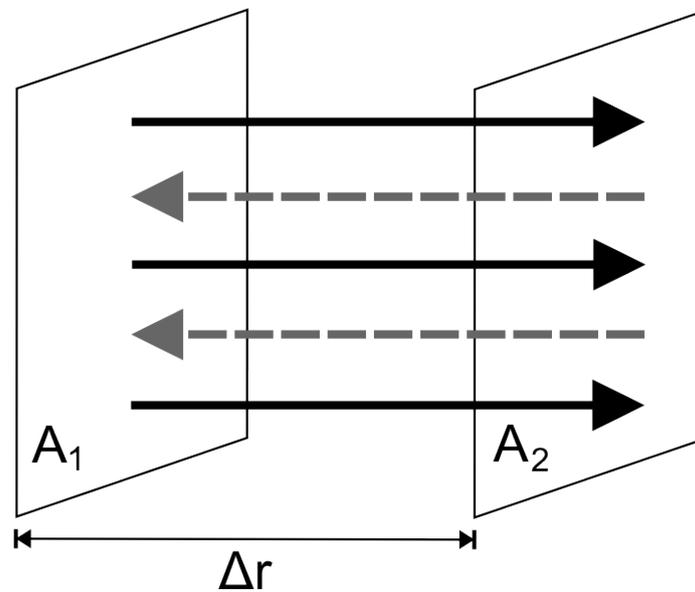


Abbildung 5.11: Darstellung des Strahlungsaustausches der Flächen  $A_1$  und  $A_2$  mit den Temperaturen  $T_1 < T_2$ , nach [Sch09, S. 59].

lassen kann.

Es ist nun notwendig, den Strahlungstransport im Inneren der Sterne zu modellieren. Dazu betrachten wir, wie in Abbildung (5.11) dargestellt, zwei senkrecht zum Sternradius ausgerichtete Flächenelemente  $A_1 = A_2 = 1 \text{ m}^2$ , die sich an den Stellen  $r_1$  bzw.  $r_2$  befinden und einen Abstand  $\Delta r$  zueinander aufweisen sollen. Beide Flächenelemente senden sich gegenseitig Strahlung mit den Leistungen  $S_1$  und  $S_2$  zu, die nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz durch die Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  des Gases bestimmt werden. Demnach gilt:

$$S = \sigma AT^4 \quad (5.39)$$

Dabei sind  $S$  die Strahlungsleistung des Gases,  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-9} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}$  die Stefan-Boltzmann-Konstante,  $A$  die strahlende Fläche und  $T$  deren Temperatur. Das weiter außen liegende Flächenelement  $A_2$  muss etwas mehr Strahlung von der Fläche  $A_1$  erhalten, um den Energietransport an die Oberfläche des Sterns sicherzustellen. Die Differenz  $\Delta S = S_2 - S_1$  ergibt die resultierende Strahlungsleistung für den nach außen gerichteten Energietransport. Es soll nun das Ziel sein zu ermitteln, von welchen Größen  $\Delta S$  abhängt und diesen Zusammenhang durch Proportionalitäten zu beschreiben.

Die Strahlungsleistung beider Flächen ist proportional zur vierten Potenz der Temperatur, sodass deren Differenz dadurch festgelegt ist, wie sich die vierte Potenz der Temperatur entlang der Strecke  $\Delta r$  verringert:

$$\Delta S \propto \frac{\Delta T^4}{\Delta r} \quad (5.40)$$

Für den Grenzfall  $\Delta r \rightarrow 0$  gilt:

$$dS \propto \frac{dT^4}{dr} = 4T^3 \frac{dT}{dr} \quad (5.41)$$

Die Abnahme der Strahlungsleistung wird außerdem von der Materie beeinflusst, die sich zwischen beiden Flächen befindet. Je größer dessen Dichte  $\rho$  ist, desto stärker wird die Ausbreitung der Strahlung behindert. Des Weiteren wird die Durchlässigkeit für Strahlung durch den Qualitätsfaktor  $\kappa$  beeinflusst, der als Opazität bezeichnet wird. Um sich den Effekt der Opazität zu veranschaulichen, denke man beispielsweise an einen Tropfen Tinte, der in ein Glas Wasser gegeben wird. Die Licht-

durchlässigkeit der Flüssigkeit wird deutlich reduziert, obwohl die Dichte nahezu konstant bleibt. Die physikalische Ursache für die Opazität wird in den folgenden Abschnitten erläutert. Es gilt:

$$dS \propto \frac{1}{\rho\kappa} \quad (5.42)$$

Zusammengefasst gilt für die Strahlungsleistung, die durch die Fläche  $A_2$  nach außen gelangt

$$dS \propto \frac{T^3}{\rho\kappa} \frac{dT}{dr} \quad (5.43)$$

Findet im Bereich zwischen den Kugeln mit den Radien  $r_1$  und  $r_2$  keine weitere Energiefreisetzung statt, so wird an der Oberfläche der Kugel mit dem Radius  $r_2$  genauso viel Energie abgegeben, wie an der Oberfläche des Sterns (vorausgesetzt in den weiter außen liegenden Bereichen findet ebenfalls keine Energiefreisetzung statt, was aber aufgrund der Temperaturabnahme zum Rand hin nicht zu vermuten ist). Die Leuchtkraft des betrachteten Himmelskörpers lässt sich also ermitteln, indem die obige Proportionalität mit der Oberfläche der äußeren Kugel multipliziert wird. Es gilt somit:

$$L \propto 4\pi r^2 \frac{T^3}{\rho\kappa} \frac{dT}{dr} \quad (5.44)$$

Dies stellt die dritte Grundgleichung des inneren Aufbaus der Sterne dar und beschreibt den Zusammenhang zwischen der Leuchtkraft und dem Temperaturgradienten unter der Annahme, der Energietransport würde allein durch Wärmestrahlung geschehen. Mithilfe eines stark vereinfachten Modells soll zunächst verdeutlicht werden, wie effizient die Strahlung im Sterninneren zurückgehalten wird. Dadurch soll verdeutlicht werden, dass für ein tiefgehendes Verständnis des Energietransportes die Opazität der Sternmaterie in den Fokus gerückt werden muss.

### Energietransport - Random-Walk-Modell

Das Random-Walk-Modell (nach [Phi96]) modelliert den Weg eines Photons im Inneren eines Sterns hin zur Oberfläche. Ein Photon, welches im Zentrum freigesetzt wird, bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit zum Rand des Sterns. Könnte es sich ungehindert fortbewegen, so würde es

am Beispiel der Sonne nach der Zeit

$$t = \frac{R}{c} = 2,3 \text{ s} \quad (5.45)$$

die Oberfläche erreichen und ins All emittiert werden. Auf dem Weg zur Oberfläche werden die Photonen jedoch durch Wechselwirkungsprozesse mit der Sonnenmaterie aufgehalten. Die genauen Wechselwirkungsprozesse sollen zunächst außer Acht gelassen werden und sich vereinfacht als zufälliger Richtungswechsel des Photons äußern. Dieses kann im Schnitt die Strecke  $l$  zurücklegen, bis ein solcher Richtungswechsel erfolgt. Der Weg des Photons wird somit zu einem durch den Zufall geprägten Zick-Zack-Kurs. Nach  $N$  Richtungsänderungen befindet es sich am Ort

$$\vec{D} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \dots + \vec{l}_N, \quad (5.46)$$

wobei  $\vec{l}_i$  die zufälligen vektoriellen Richtungsänderungen mit der Länge  $l$  darstellen. Die Strecke, die das Photon effektiv auf dem Weg zur Oberfläche zurück gelegt hat, können wir bestimmen, indem wir das Quadrat des Vektors  $\vec{D}$  berechnen. Es gilt:

$$D^2 = l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_N^2 + 2 \cdot (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 + \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_3 + \dots) \quad (5.47)$$

Die Skalarprodukte der gemischten Vektoren in der Klammer ergeben Zufallszahlen, da es sich um Verschiebungen handelt, bei denen es keine Vorzugsrichtung gibt. Finden sehr viele Richtungsänderungen statt, so heben sich die Skalarprodukte in der Klammer auf, sodass vereinfacht gilt:

$$D^2 = l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_N^2 = N \cdot l^2 \quad (5.48)$$

Ein Photon, welches auf diesem Zufallspfad bis an die Oberfläche des Sterns gelangt, hat

$$N = \frac{D^2}{l^2} = \frac{R^2}{l^2} \quad (5.49)$$

Richtungsänderungen vollzogen. Nun können wir berechnen, wie lange es durchschnittlich dauert, bis ein Photon auf solch einem Zufallspfad den Stern verlassen kann. Zwischen zwei Richtungswechseln vergeht die Zeit

$$t = \frac{s}{v} = \frac{l}{c} \quad (5.50)$$

Insgesamt benötigt das Photon somit die Zeit

$$t_{ges} = N \cdot t = \frac{R^2}{l^2} \cdot \frac{l}{c} = \frac{R^2}{l \cdot c} \quad (5.51)$$

Im Vergleich zum direkten Weg verlängert sich die Zeit, die das Photon für den zufälligen Weg benötigt, um den Faktor  $\frac{R}{l}$ . Unter den Bedingungen im Sonneninneren würde ein Richtungswechsel bereits nach etwa  $l = 1 \text{ mm}$  (siehe [Phi96, S. 23]) stattfinden, da die Materie für elektromagnetische Strahlung äußerst undurchlässig ist. Es folgt somit:

$$t_{ges} \approx 16,3 \cdot 10^{11} \text{ s} \approx 50.000 \text{ a} \quad (5.52)$$

Anhand dieses stark vereinfachten Modells können wir bereits lernen, dass zwischen der Energiefreisetzung im Zentrum und der Emission ins All an der Sternoberfläche ein enormer Zeitraum liegt, für den es eine möglichst genaue physikalische Beschreibung bedarf. Wir müssen uns Gedanken darüber machen, welche physikalischen Prozesse dafür verantwortlich sein können, dass die im Zentrum freigesetzte Strahlung so effizient zurück gehalten werden kann. Aus der Atom- und Kernphysik sind die möglichen Mechanismen bereits bekannt.

Die Photonen können auf freie Elektronen treffen, wodurch ihre Richtung wie bei einem Stoß von Billardkugeln geändert wird (Compton-Effekt/Thomson-Streuung). Befindet sich gerade kein Atomkern in der Nähe des Elektrons, so kann das Photon nur gestreut, jedoch nicht absorbiert werden, da andernfalls die Energie- und Impulserhaltung nicht gleichzeitig erfüllt sein könnten.

Für Stoßprozesse, bei denen sich das Elektron im elektrischen Feld eines Atomkerns befindet, muss zwischen drei möglichen Absorptionsprozessen unterschieden werden.

- frei-frei Übergang: Die kinetische Energie des Elektrons muss groß genug sein, sodass es vor und nach der Absorption des Photons nicht an den Atomkern gebunden ist.
- gebunden-frei Übergang: Ein an den Atomkern gebundenes Elektron wird durch die Absorption eines energiereichen Photons aus der Bindung gelöst.
- gebunden-gebunden Übergang: Ein Elektron wird nach der Absorp-

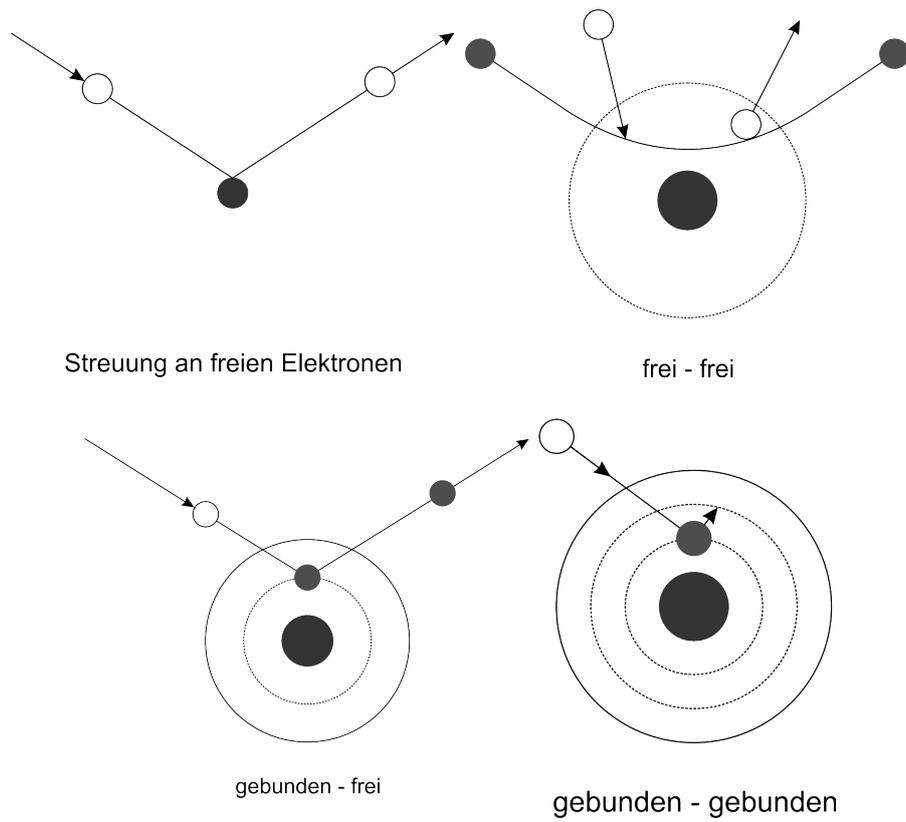


Abbildung 5.12: Die Wechselwirkung von Photonen und Elektronen, nach [Sch09, S. 59].

tion in einen energiereicheren gebundenen Zustand gebracht.

Alle vier Prozesse (siehe Abbildung 5.12) tragen dazu bei, dass die Sternmaterie für elektromagnetische Strahlung undurchlässig wird. Die Fähigkeit der Materie Strahlung zurückzuhalten wird als Opazität der Materie  $\kappa$  bezeichnet. Die Gesamtopazität der Materie ergibt sich aus der Summe der Einzelopazitäten der soeben genannten Prozesse:

$$\kappa = \kappa_{Th} + \kappa_{ff} + \kappa_{gf} + \kappa_{gg} \quad (5.53)$$

Eine präzise Kalkulation der Opazität im Inneren der Sonne stellt eine große Herausforderung dar, denn die zuvor genannten Prozesse hängen unter anderem von der Materieverteilung, dem Ionisationsgrad der Materie und der Frequenz der Strahlung ab. Eine detaillierte Analyse der Sternopazitäten würde somit zu einem äußerst komplexen Modell für den Strahlungstransport führen. Unser Ziel soll es sein, zunächst ein prinzipielles Verständnis der einzelnen Effekte zu entwickeln.

Bei den Temperaturen, die im Sterninneren vorherrschen, liegen Wasserstoff und Helium, wie auch einige schwerere Elemente, in nahezu vollständig ionisiertem Zustand vor, sodass nur sehr wenige Elektronen an einen Atomkern gebunden sind. Der Beitrag des gebunden-gebunden Übergangs sowie des gebunden-frei Übergangs wird daher im Folgenden nicht näher betrachtet.

Es soll nun ein einfaches Modell entwickelt werden, mit denen wir die durch die Thomson-Streuung und den frei-frei Übergang verursachten Opazitäten verstehen können.

### Die Thomson Streuung

Auch wenn man zu Beginn des 20. Jahrhunderts in der Lage war, die chemische Zusammensetzung der äußeren Schichten der Sonne durch spektroskopische Untersuchungen zu ermitteln, war den Forschern damals schon klar, dass diese Erkenntnisse nicht ohne Weiteres auf das Innere übertragen werden konnten. Seinerzeit ging Eddington davon aus, die Sonne besäße eine vergleichbare chemische Zusammensetzung wie die Erde und bestünde demnach zum Großteil aus schweren Elementen wie z.B. Eisen und nicht, wie wir heute wissen, hauptsächlich aus Wasserstoff und Helium. Durch die hohe Kernladungszahl von solch schweren Elementen sind die Elektronen weitaus stärker an den Kern gebunden,

als es bei Wasserstoff und Helium der Fall ist, sodass anzunehmen war, dass die Atome nicht vollständig ionisiert sein können. Bei seinen frühen Modellüberlegungen ging Eddington davon aus, dass noch etwa die Hälfte der Elektronen an den Kern gebunden sein müssten. Eisen besitzt im neutralen Zustand 26 Elektronen, sodass bei Eddingtons vermutetem Ionisationsgrad auf jeden Kern etwa 13 freie Elektronen kämen. Durch die postulierte chemische Zusammensetzung verliert der frei-frei Übergang an Bedeutung gegenüber der Thomson Streuung, da Wechselwirkungsprozesse zwischen Elektronen und Photonen im elektrischen Feld der Eisenkerne praktisch keine Rolle spielen. Eddington nahm daher an, dass die Opazität größtenteils durch die Thomson Streuung verursacht wird. Dem historischen Argument folgend werden wir diese nun genauer untersuchen.

Klassisch lassen sich Photonen als elektromagnetische Welle auffassen, also als senkrecht zur Ausbreitungsrichtung oszillierendes elektrisches und magnetisches Feld. Trifft solch eine elektromagnetische Welle auf ein Elektron, so wird dieses durch das elektrische Feld mit der selben Frequenz in Schwingung versetzt, sodass es seinerseits Strahlung emittiert. Die Frequenz der einfallenden Strahlung stimmt mit der Frequenz der emittierten Strahlung überein, es kann dabei zur Änderung der Ausbreitungsrichtung kommen.

Für die Thomson-Streuung gilt der Wirkungsquerschnitt für ein Elektron:

$$\sigma_{Th} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = \frac{1}{6\pi\epsilon_0^2} \frac{e^4}{m_e c^4} = 6,6 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2 \quad (5.54)$$

An dieser Stelle muss das Konzept des Wirkungsquerschnittes  $\sigma$  erläutert werden. Man stelle sich vor, Strahlung oder Partikel sollen eine transparente Zielscheibe mit der Querschnittsfläche  $A$  und der Dicke  $\Delta x$  durchdringen (siehe Abbildung 5.13). Innerhalb des Volumens der Zielscheibe sollen sich  $n$  Hindernisse pro Einheitsvolumen befinden, die die Strahlung bzw. die Teilchen absorbieren bzw. streuen können. Mit  $\sigma$  soll die Querschnittsfläche bezeichnet werden, an der das einfallende Teilchen bzw. die einfallende Strahlung an einem der Hindernisse gestreut werden kann.  $\sigma$  kann erheblich größer sein als die Querschnittsfläche die das Hindernis aufgrund seiner Geometrie einnimmt. Das elektrische Feld von Ionen kann beispielsweise dafür sorgen, dass andere Teilchen in einer Entfernung gestreut werden, die den Radius des Ions erheblich übersteigt. Man denke hier beispielsweise an die Schwierigkeiten bei der

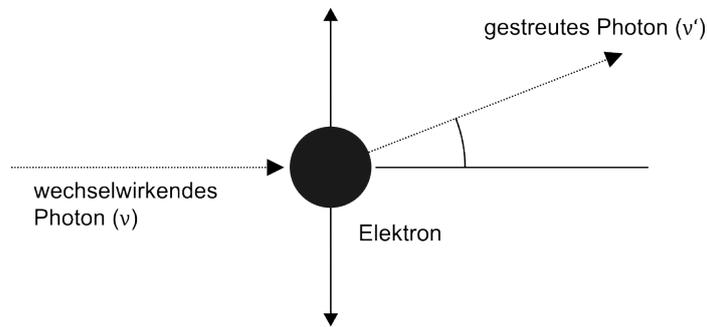


Abbildung 5.13: Die Streuung eines Photons an einem Elektron lässt sich klassisch beschreiben: Das oszillierende elektrische Feld der einfallenden elektromagnetischen Welle versetzt das Elektron in Schwingung mit Frequenz  $\nu$ . Nach den Gesetzen der Elektrodynamik emittiert ein schwingendes Elektron ebenfalls eine Elektromagnetische Welle mit selbiger Frequenz, jedoch nicht zwangsläufig in dieselbe Richtung. Man spricht daher von Streuung, nach [Sri11, S. 97].

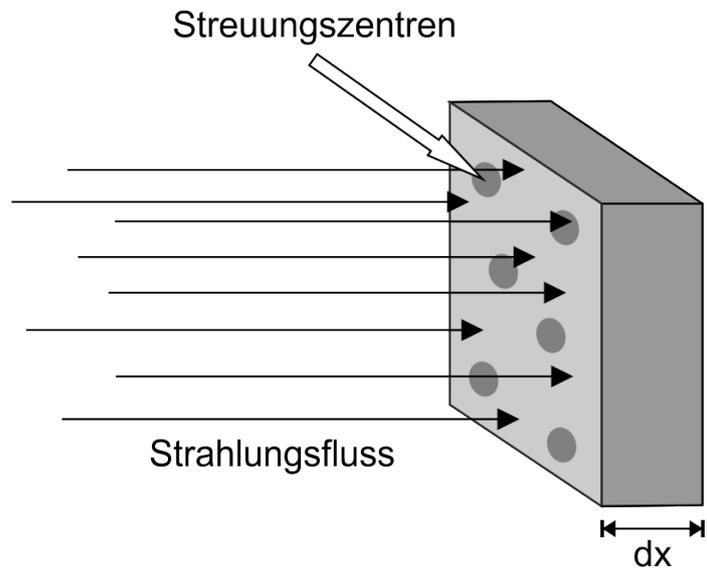


Abbildung 5.14: Strahlungsfluss durch einen Absorber der Dicke  $dx$ , nach [Sri11, S. 74].

Fusion zweier Protonen. Um nun zu ermitteln, welcher Anteil der Strahlung das Volumen ungehindert passieren kann, muss bestimmt werden, welchen Anteil die Querschnittsflächen der Hindernisse an der Stirnfläche des betrachteten Volumens einnehmen. Ist die Anzahl der Hindernisse pro Einheitsvolumen  $n$  sowie deren Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  bekannt, so lässt sich ermitteln, welche Strecke  $l$  ein Teilchen innerhalb der Zielscheibe zurücklegen kann, bis es das erste mal gestreut wird. Diese Strecke wird als mittlere freie Weglänge  $l$  bezeichnet und ergibt sich aus

$$l = \frac{1}{n\sigma} \quad (5.55)$$

Um das Modell besser verstehen zu können, wenden wir es auf eine analoge Situation aus dem Alltag an. Blickt man von einem Weg aus auf ein Waldstück, so kann man selbstverständlich nicht durch den gesamten Wald hindurch schauen, da die Sicht früher oder später durch einen der Bäume blockiert wird. Mithilfe des soeben vorgestellten Modells lässt sich abschätzen, wie tief unser Blick in den Wald hinein reicht. Die mittlere „Blicktiefe“ wird dadurch festgelegt, wie weit sich das an einem beliebigen Baum gestreute Sonnenlicht in Richtung Waldrand bewegen kann, ohne auf einen zweiten Baum zu treffen. Die mittlere freie Weglänge gibt hier die durchschnittlich Entfernung an, aus der ein Photon den Wald verlassen kann. Da die Höhe der Baumstämme, auf die sich unsere Überlegung bezieht, keine Rolle spielt, genügt eine zweidimensionale Betrachtung des Problems.

Blicken wir nun auf eine Waldfront der Breite  $a = 10$  m und ermitteln wie viele Bäume sich auf der dahinter liegenden Fläche der Tiefe  $b = 100$  m befinden. In einem Nutzforst werden ca. 1000 Bäume pro Hektar gepflanzt, sodass sich auf unserer betrachteten Fläche etwa 100 Bäume befinden. Es gilt daher:

$$n = \frac{100}{1000 \text{ m}^2} = 0,1 \text{ m}^{-2} \quad (5.56)$$

Der Durchmesser der Bäume  $d$  entspricht unmittelbar deren Wirkungsquerschnitt  $\sigma$ , den wir hier auf etwa 40 cm festlegen. Es folgt für die mittlere freie Weglänge:

$$l = \frac{1}{n\sigma} = \frac{1}{0,1 \frac{1}{\text{m}^2} \cdot 0,4 \text{ m}} = 25 \text{ m} \quad (5.57)$$

Wir wären somit in der Lage, etwa 25 m tief in diesen Wald hineinzuschauen. Doch nun zurück zu den Sternen:

Wir nutzen nun unsere Modellbetrachtung aus unserer Vorüberlegung, um zu berechnen, wie stark Strahlung abgeschwächt wird, wenn sie die zuvor definierte Zielscheibe durchdringt. Diese besitzt das Volumen  $V = Adx$  und enthält  $nAdx$  Absorber. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Photon absorbiert wird, ergibt sich aus der Querschnittsfläche der Absorber geteilt durch die Querschnittsfläche der Zielscheibe  $A$ :

$$P_{abs} = \frac{n\sigma Adx}{A} = n\sigma dx \quad (5.58)$$

Die Intensität mit der einfallenden Strahlung abnimmt  $dI$  entspricht der Intensität der einfallenden Strahlung  $I$  multipliziert mit der Absorptionswahrscheinlichkeit  $n\sigma dx$ :

$$dI = -In\sigma dx \quad (5.59)$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung kann durch Trennung der Variablen gelöst werden:

$$\frac{dI}{I} = -n\sigma dx = -\frac{dx}{l} \quad (5.60)$$

$$I = I_0 e^{-\frac{x}{l}} \quad (5.61)$$

Dabei stellt  $x$  die Strecke dar, die der Strahl innerhalb der Zielscheibe zurück gelegt hat. In der Theorie des inneren Aufbaus der Sterne wird statt dem Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  und der Teilchenzahl pro Einheitsvolumen  $n$  üblicherweise die Opazität  $\kappa$  und die Materiedichte  $\rho$  verwendet. Es besteht über die mittlere freie Weglänge  $l$  ein einfacher Zusammenhang zwischen beiden Formulierungen:

$$l = \frac{1}{n\sigma} = \frac{1}{\kappa\rho} \quad (5.62)$$

Es sei betont, dass unsere Überlegungen nur für monoenergetische Photonen gelten, da die Opazität, respektive der Wirkungsquerschnitt frequenzabhängig sind.

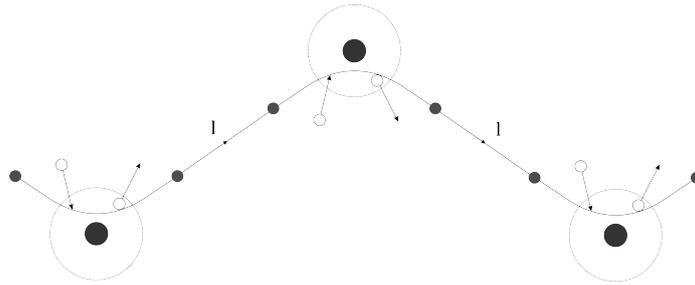


Abbildung 5.15: Bewegungsverlauf eines freien Elektrons. Nur wenn es sich nahe genug an einem Kern befindet, ist es in der Lage ein Photon zu absorbieren. Es muss die mittlere freie Weglänge  $l$  zurücklegen, um wieder in die Nähe eines weiteren Kerns zu gelangen, nach [Sch09, S. 59].

### Der frei-frei Übergang

Tief im Sterninneren liegt ein Gemisch von Photonen, Elektronen und ionisierten Elementen vor. Unser Ziel soll es nun sein, den frei-frei Übergang mit einem einfachen Modell zu beschreiben, so wie es in Abbildung 5.15 dargestellt ist. Ein Elektron ist nur dann in der Lage ein Photon zu absorbieren, wenn es sich innerhalb eines Abstandes  $\gamma$  von einem Atomkern befindet, andernfalls wird das Photon gestreut. Da das Elektron ständig in Bewegung ist, wird es diesen Bereich irgendwann verlassen und ist erst dann wieder in der Lage ein Photon zu absorbieren, wenn es erneut nah genug an einen Atomkern heran gekommen ist. Dabei muss es die mittlere freie Weglänge  $l$  zurücklegen.

Die zwischen den beiden Flächen  $A_1$  und  $A_2$  absorbierte Energie  $E$  pro Zeiteinheit  $t$  ist proportional zur vierten Potenz der Temperatur  $T$ , sowie der Fähigkeit der dazwischen liegenden Materie Energie zu absorbieren  $\eta$ :

$$\frac{E}{t} \propto T^4 \eta \quad (5.63)$$

Da sich die Photonen näherungsweise im thermodynamischen Gleichgewicht mit der Umgebung befinden, ist die mittlere Energie  $\bar{E}$  eines einzelnen Photons proportional zur Gastemperatur  $T$ . Daraus können wir ermitteln, wie viele Photonen pro Zeiteinheit absorbiert werden. Es gilt:

$$\frac{n}{t} \propto \frac{T^4 \eta}{T} = T^3 \eta \quad (5.64)$$

Folglich werden bei steigender Temperatur mehr Photonen absorbiert. Im Sterninneren steht, aufgrund der hohen Strahlungsintensität, nur eine be-

grenzte und konstante Zahl an Elektronen als Absorber zur Verfügung. Deren Fähigkeit zur Absorption kann nur gesteigert werden, indem sie die Strecke außerhalb des Wirkungsbereiches der Atomkerne  $l$  schneller durchlaufen. Wie viele Photonen  $n$  ein Elektron innerhalb des Zeitraumes  $t$  absorbieren kann, hängt also mit der Elektronengeschwindigkeit  $v$  zusammen. Es gilt:

$$v = \frac{nl}{t} \propto T^3 \eta l \quad (5.65)$$

Die mittlere freie Weglänge  $l$  verringert sich einerseits, je höher die Materiedichte ist und andererseits je größer der Bereich  $\gamma$  um die Atomkerne herum ist, bei denen das Elektron in Lage ist ein Photon zu absorbieren. Es gilt daher:

$$l \propto \frac{1}{\rho\gamma} \quad (5.66)$$

und somit

$$v \propto \frac{T^3 \eta}{\rho\gamma} \quad (5.67)$$

Da die kinetische Energie der Elektronen nach den Gasgesetzen proportional zur Temperatur ist, folgt:

$$v \propto T^{\frac{1}{2}} \quad (5.68)$$

und somit gilt nach Einsetzen von (5.68) in (5.67) und einer Umformung

$$\eta \propto \frac{\rho\gamma}{T^{\frac{5}{2}}} \quad (5.69)$$

Im Gegensatz zum Wirkungsquerschnitt bei der Thomson-Streuung ist  $\gamma$  nun keine konstante Größe, sondern wird maßgeblich von der kinetischen Energie der Elektronen beeinflusst. Elektronen, die sich mit geringer Geschwindigkeit an einem Atomkern vorbei bewegen, treten eher mit diesem in Wechselwirkung, als Elektronen mit sehr hoher Geschwindigkeit. Vereinfacht können wir daher annehmen, dass:

$$\gamma \propto \frac{1}{E_{kin}} \propto \frac{1}{T} \quad (5.70)$$

Wir können mit (5.70) und (5.69) für die Opazität folgern:

$$\eta \propto \rho T^{-\frac{7}{2}} \quad (5.71)$$

### 5.2.4 Eddingtons Standardmodell

Eddington ersetzte das von Lane postulierte Konvektionsgleichgewicht durch das Konzept des Strahlungsgleichgewichtes, um den Energietransport zur Sternoberfläche zu modellieren. Wie wir bereits gesehen haben, spielt die Beschaffenheit der Materie dabei eine maßgebliche Rolle, so dass Eddington einige Annahmen über diese treffen musste. Da er sich zunächst mit Riesensternen befasste, insbesondere mit Capella, konnte er als Zustandsgleichung das Gesetz des idealen Gases rechtfertigen, da die mittlere Dichte von solchen Himmelsobjekten vergleichbar ist mit der Dichte irdischer Gase. Des Weiteren postulierte er eine chemische Zusammensetzung der Sonne, die der irdischen sehr ähnlich sein sollte. Auch wenn dieser Ansatz aus heutiger Sicht nicht sehr naheliegend erscheint, hat es sich in der Geschichte der Astrophysik häufig als erfolgreich herausgestellt, irdische Bedingungen auf Himmelskörper zu übertragen. Speziell für die mittlere Teilchenmasse konnte Eddington zeigen, dass die genaue chemische Zusammensetzung wenig Einfluss auf seine Berechnungen haben sollte, da die mittlere Teilchenmasse für fast alle ionisierte Atome  $\bar{\mu} = 2$  u beträgt. Signifikante Abweichungen sollten nur für Himmelskörper zu erwarten sein, die größtenteils aus Wasserstoff bestehen – was, wie wir heute wissen, für viele Sterne tatsächlich der Fall ist.

Eddington nahm weiter an, dass die Thomsonstreuung den größten Beitrag zur Gesamtopazität von Sternen leisten sollte. Bei Temperaturen im Zentrum in der Größenordnung von  $10^7$  K sollte die Materie weitestgehend ionisiert sein, sodass er die Streuung an freien Elektronen als wichtigste Quelle für die Opazität ansah. Da er annahm, dass die Sonne weitestgehend aus schweren Elementen besteht, sollte die Anzahl freier Elektronen die Zahl der Atomkerne bei weitem übersteigen, sodass die meisten Stöße zwischen Photonen und Elektronen außerhalb des Wirkungsbereich eines Kerns stattfinden sollten. Details zu Energiefreisetzungsprozessen waren ihm weitestgehend unbekannt, er vermutete aber, dass entweder Annihilation von Materie oder Fusionsprozesse im Zentrum der Sterne stattfinden müssten.

Auf Grundlage der soeben geschilderten Überlegungen gelang Eddington die mathematische Formulierung eines Sternmodells, welches sich letztlich als Standardmodell für das Verständnis der Physik des Sterninneren durchsetzte. Fassen wir daher die wichtigsten Formeln noch einmal zusammen:

Grundgleichungen:

Masseverteilung:

$$\frac{dM}{dr} = \pi r^2 \rho \quad (5.72)$$

Hydrostatische Grundgleichung:

$$\frac{dp}{dr} = -G \cdot \frac{M(r)}{r^2} \cdot \rho \quad (5.73)$$

Energieerzeugungsrate:

$$\frac{dL(r)}{dr} = \epsilon \rho 4\pi r^2 \quad (5.74)$$

Strahlungsgleichgewicht:

$$L(r) = \frac{ac}{3\kappa\rho} \cdot \frac{dT^4}{dr} 4\pi r^2 \quad (5.75)$$

Materialgleichungen:

Einführung des Strahlungsdrucks:

$$p_{ges} = p_{rad} + p_{gas} \quad (5.76)$$

Gesetz des idealen Gases:

$$p \cdot V = nk_B T \quad (5.77)$$

Wirkungsquerschnitt durch Thomsonstreuung:

$$\sigma_{Th} = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{e^4}{m^2 c^4} \quad (5.78)$$

Energieerzeugung:

Hier waren ihm keine genauen Details bekannt.

Die vorliegenden Gleichungen zu lösen ist mathematisch keine einfache Aufgabe mehr. Durch eine geschickt gewählte Vereinfachung konnte Eddington zeigen, dass das physikalische Verhalten seiner Modellsterne näherungsweise durch eine Polytropengleichung beschrieben werden kann. Auf diese Weise konnte er die mathematischen Schwierigkeiten umgehen und sich auf das Studium der Physik von Sternen im Strahlungsgleichgewicht fokussieren. Er musste voraussetzen, dass das Verhältnis von Strahlungsdruck zu Gasdruck im gesamten Stern konstant ist.

Der Gasdruck  $p_G$  besitzt somit einen festen Anteil  $\beta$  am Gesamtdruck  $p$ :

$$p = \frac{p_G}{\beta} = \frac{R\rho T}{\beta\mu} \quad (5.79)$$

Der Strahlungsdruck  $p_S$  trägt folglich den Anteil  $1 - \beta$  zum Gesamtdruck bei:

$$p = \frac{p_S}{\beta} = \frac{aT^4}{3(1 - \beta)} \quad (5.80)$$

Löst man (5.80) nach  $T$  auf und setzt in Gleichung (5.79) ein, so ergibt sich

$$p = \frac{R\rho}{\mu\beta} \cdot \left(\frac{3p(1 - \beta)}{a}\right)^{1/4} \quad (5.81)$$

Mit einigen elementaren Umformungen folgt:

$$p = \left(\frac{3R^4(1 - \beta)}{\mu^4\beta^4a}\right)^{1/3} \cdot \rho^{4/3} \quad (5.82)$$

Durch Setzen von

$$c = \left(\frac{3R^4(1 - \beta)}{\mu^4\beta^4a}\right)^{1/3} \quad (5.83)$$

ergibt sich

$$p = c \cdot \rho^{4/3} \quad (5.84)$$

Wie wir anhand unserer Betrachtung sehen, ergibt sich für den Zusammenhang zwischen Druck und Dichte ein uns bereits vertrauter Zusammenhang in Form von einer Polytropengleichung. Voraussetzung für deren Gültigkeit ist allerdings die Annahme, dass das Verhältnis von Gasdruck zu Strahlungsdruck im gesamten Stern als gleichbleibend angesehen werden kann, nur dann stellt  $c$  tatsächlich eine Konstante dar. Des Weiteren ist erkennbar, dass sich nun der Polytropenexponent  $\gamma = 4/3$  ergibt, statt des Exponenten  $\gamma = 5/3$  im Modell des Konvektionsgleichgewichtes.

Eine wesentliche Stärke dieser Modellüberlegung liegt auf der Hand: Trotz der erheblich komplexeren physikalischen Grundlagen wurden bereits im vorangegangenen Kapitel alle notwendigen mathematischen Werkzeuge bereitgestellt, um eine Lösung der Gleichung ermitteln zu können. Eddington gelang es weiterhin, ausgehend von Gleichung (5.84), durch eine komplexe mathematische Untersuchung einen Zusammenhang zwischen  $\beta$  und der Sternenmasse  $M$  sowie der mittleren Teilchenmasse  $\bar{\mu}$  herzustellen.

In einem polytropen Stern gilt:

$$1 - \beta = 0,00309 \cdot \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^2 \mu^4 \beta^4 \quad (5.85)$$

Die obige Gleichung zeigt, dass die Anteile vom Gas- bzw. Strahlungsdruck am Gesamtdruck, welche durch  $\beta$  beschrieben werden, nur von zwei Variablen abhängen, der Sternmasse  $M$  und der mittleren Teilchenmasse  $\mu$ . mithilfe dieser Gleichung lässt sich studieren, wie sich eine Sternpopulation nach Eddingtons Sternmodell physikalisch verhalten müsste. Betrachten wir zunächst Repräsentanten, die ein identisches Verhältnis  $\beta$  von Strahlungsdruck zu Gasdruck aufweisen. In diesem Fall gilt:

$$\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^2 \propto \frac{1}{\mu^4} \quad (5.86)$$

Ein Stern mit der vierfachen Masse müsste unter den getroffenen Voraussetzungen eine halb so große mittlere Teilchenmasse besitzen, würde also eine erheblich andere chemische Zusammensetzung erforderlich machen oder besäße einen abweichenden Ionisationsgrad. Genauere Aussagen dazu wären mit der bislang dargelegten Theorie eher spekulativer Natur. Betrachten wir nun eine Gruppe von Sternen mit festem  $\mu$ . Durch Umstellen von Gleichung (5.85) folgt:

$$\frac{1 - \beta}{\beta^4} = 0,00309 \cdot \mu^4 \cdot \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^2 \quad (5.87)$$

Die Gleichung kann für Sterne mit größerer Masse  $M$  nur erfüllt sein, wenn im Gegenzug  $\beta$  kleiner wird. Physikalisch interpretiert bedeutet dies, dass der Gasdruck abnimmt und dafür der Strahlungsdruck an Bedeutung gewinnt. In sehr massereichen Sternen sollte also der Strahlungsdruck den großen Anteil am Gesamtdruck einnehmen, während massearme Sterne insbesondere durch den Gasdruck gegen die Schwerkraft stabilisiert werden.

Sind die mittlere Teilchenmasse  $\bar{\mu}$  sowie die Masse eines Modellsterns  $M$ , so lässt sich  $\beta$  durch Lösen der obigen Gleichung ermitteln. Dies ist beispielsweise mit Tools wie Wolfram-Alpha ([www.wolfram-alpha.com](http://www.wolfram-alpha.com)) oder vergleichbare Software komfortabel möglich. Eddington bestimmte  $1 - \beta$  für Modellsterne im Masseintervall  $[0, 25M_{\odot}; 50M_{\odot}]$  und einer mittleren Teilchenmasse von  $\mu = 2,2$ . Des Weiteren führte er die Berechnung für

Tabelle 5.2: Eddingtons ermittelte Werte für den Anteil des Strahlungsdrucks am Gesamtdruck  $1 - \beta$  für verschiedene Massen  $M$  und mittlere Teilchenmassen  $\mu$ , nach [Edd26, S. 117].

$Masse = \frac{M}{M_{\odot}}$	$\mu = 2, 2$	$\mu = 3, 5$	$\mu = 30$
1/4	0,004	0,026	0,738
1/2	0,017	0,082	0,810
1	0,057	0,195	0,864
2	0,151	0,344	0,903
4	0,292	0,492	0,931
8	0,444	0,620	0,951
50	0,747	0,836	0,980

$\mu = 3, 5$  und  $\mu = 30$  durch, um das physikalische Verhalten von Sternen abzubilden, die nur teilweise bzw. kaum ionisiert sind. Es erübrigt sich darauf hinzuweisen, dass Eddington seinerzeit noch unbekannt war, dass Hauptreihensterne hauptsächlich aus Wasserstoff und Helium bestehen. Derart hohe Werte für  $\mu$  sind aus heutiger Sicht der Astrophysik irreal. Er folgerte aus den Resultaten :

„For undissociated atoms we should expect a molecular weight 30 or higher and the table shows that very intense radiation pressure would result. It would be difficult to accept the conclusion that in Capelle 93 per cent. of the weight of the material is supported by pressure of the outrushing radiation; and it is satisfactory that the ionisation predicted by the thermodynamical theory renders the state of the star much less precarious.“ [Edd26, S.118]

Mit dem heutigen Kenntnisstand über die chemische Zusammensetzung von Sternen greift Eddingtons Argumentation nur noch zum Teil, da die mittlere Teilchenmasse bei schwacher Ionisation nicht so drastisch ansteigt, wie bei der damals vermuteten Zusammensetzung aus weitestgehend schweren Elementen. Dennoch trägt sie dazu bei, die denkbaren Parameter im Sterninneren einzugrenzen.

### Masse-Leuchtkraft Beziehung

Durch die Analyse der aufgestellten Gleichungen gelang es Eddington, einen Zusammenhang zwischen der Masse und der Leuchtkraft eines

Sterns herzustellen, der als Masse-Leuchtkraft-Beziehung bekannt ist. Mit ihrer Hilfe wurde es ermöglicht, die bislang rein theoretischen Überlegungen der Sternmodelle an direkt beobachtbare Zustandsgrößen nicht nur der Sonne, sondern auch weit entfernter Sterne zu koppeln. Dieser Zusammenhang lässt sich durch eine Proportionalitätsbetrachtung auf mathematisch einfachem Wege begründen: Die linke Seite von Gleichung (5.73) lässt sich darstellen als

$$\frac{dp}{dr} \approx \frac{p}{R}. \quad (5.88)$$

Für die rechte Seite von Gleichung (5.73) folgt somit die Proportionalität:

$$\frac{p}{R} \propto \frac{M\rho}{R^2} \quad (5.89)$$

Weiter gilt für die mittlere Dichte:

$$\rho \propto \frac{M}{R^3} \quad (5.90)$$

Zusammen ergibt sich:

$$p \propto \frac{M^2}{R^4} \quad (5.91)$$

Wir beschränken uns nachfolgend auf die Betrachtung von Sternen, in denen der Gasdruck den Strahlungsdruck überwiegt. Dies ist der Fall bei leichten Sternen wie der Sonne, sodass gilt:

$$p_{ges} = p_{gas} + p_{rad} \approx p_{gas} = \frac{\rho k_B T}{\mu m_H} \quad (5.92)$$

Es folgt:

$$p \propto \frac{MT}{R^3} \quad (5.93)$$

Ersetzt man den Druck  $p$  in (5.93) durch (5.91), so folgt:

$$\frac{M^2}{R^4} \propto \frac{MT}{R^3} \quad (5.94)$$

bzw.

$$M \propto RT \quad (5.95)$$

Um den Zusammenhang zwischen der Masse und der Leuchtkraft herzustellen, müssen wir nun Gleichung (5.75) mit einbeziehen. Es gilt:

$$L \propto \frac{1}{\rho} \frac{T^4}{R} R^2 = \frac{T^4 R}{\rho} = \frac{(RT)^4}{M} \quad (5.96)$$

Durch Einsetzen von (5.95) folgt:

$$\boxed{L \propto M^3} \quad (5.97)$$

Interessanterweise scheint der Radius für Sterne mit identischer Masse keinen Einfluss auf dessen Leuchtkraft zu haben, obwohl nach der hydrostatischen Grundgleichung ein geringerer Radius für eine Erhöhung der Zentraltemperatur sorgen sollte, was letztlich eine größere Energiefreisetzung zur Folge haben müsste. Bei dieser Überlegung wurde jedoch der Einfluss der Opazität für Sterne im Strahlungsgleichgewicht außer Acht gelassen. Je nach Opazität wird ein Stern solche Werte für die Temperatur  $T$  und den Radius  $R$  annehmen, dass die Energiefreisetzung im Zentrum mit der geforderten Energieabgabe an der Oberfläche übereinstimmt. Würde die Energiefreisetzung die Energieabgabe überschreiten, so hätte dies zu Folge, dass sich die überschüssige Energie im Stern anstauen würde. Dies stünde im Widerspruch zum vorausgesetzten Strahlungsgleichgewicht. Die von Eddington im Jahre 1924 entdeckte Masse-Leuchtkraft-Beziehung konnte nun dazu verwendet werden, um sein Modell mit realen Beobachtungsdaten abzugleichen, was einen ganz entscheidenden Fortschritt für die Theorie des inneren Sternaufbaus darstellte.

Die Schwierigkeit bei der messtechnischen Bestimmung der Leuchtkraft eines Sterns ergibt sich aus der Problematik, dass ein nahegelegener Stern mit der Leuchtkraft  $L_1$  uns heller erscheinen kann, als ein weiterer Stern mit der Leuchtkraft  $L_2 > L_1$ , der sich in großer Distanz zu uns befindet. Nur mit der Kenntnis der genauen Distanz lässt sich eine Aussage darüber treffen, welcher der beiden Sterne die größere Leuchtkraft besitzt, bzw. wie groß diese Leuchtkraft absolut ist. Die Leuchtkraft entspricht der über alle Spektralbereiche aufsummierte Strahlungsleistung eines Sterns. Um diese messend zu erfassen, müsste man einen idealen schwarzen Empfänger konstruieren, was leider nur annähernd möglich ist. Darüber hinaus erwies sich seinerzeit die Entfernungsbestimmung als

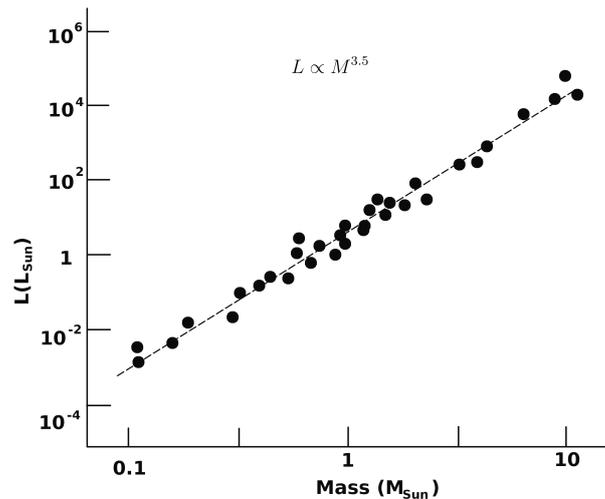


Abbildung 5.16: Die Masse-Leuchtkraft-Beziehung, nach [Sri11, S. 105].

weiteres Desiderat, das nur bei relativ wenigen Objekten geglückt war. Die Masse von Sternen lässt sich für bestimmte Sternklassen mit hoher Genauigkeit ermitteln, beispielsweise in solchen Doppelsternsystemen, in denen man astrometrisch den Umlauf der Komponenten bestimmen kann oder in solchen, in denen der Dopplereffekt die Umlaufbewegung erkennen lässt und zu dem (etwa bei Bedeckungsveränderlichen, durch Variation der Helligkeit die Periodendauer und die geometrischen Bahnverhältnisse feststellbar sind).

In Abbildung (5.16) ist eine Auswahl an Sternen dargestellt, für die beide Zustandsgrößen zugleich ermittelt werden konnten und von Eddington verwendet wurden. Durch die logarithmische Darstellungsweise zeigt sich die Masse-Leuchtkraft-Beziehung als Gerade. Um die hergeleitete Proportionalität mit den Beobachtungsdaten abgleichen zu können, muss diese zunächst in eine Gleichung umgewandelt werden, indem die Werte eines Referenzsterns eingesetzt werden – Eddington verwendete dazu Capella. Anschaulich kann die Kurve auch einfach durch einen gegebenen Punkt gelegt werden.

Für den Exponenten 3,5 ergibt sich auf diese Weise eine deutliche Übereinstimmung mit den Beobachtungsdaten. Der abweichende Exponent ergibt sich dabei aus einer komplexeren Herleitung als der von uns durchgeführten. Dennoch weichen beide Resultate nicht wesentlich voneinander ab.

## 5.3 Detaillierte Analyse der Verläufe von Zustandsgrößen

In Modul B wurde bereits ein Tool zur Berechnung von polytropen Gaskugeln erstellt, dieses kann mit nur geringen Anpassungen (Polytropenexponent  $\frac{4}{3}$  statt  $\frac{5}{3}$ ) unmittelbar wiederverwendet werden. Auf die Erstellung des Tools muss daher nicht näher eingegangen werden. Auf eine Darstellung der Umsetzung in Coach wird verzichtet, da die Ergebnisse identisch zu den mit Excel ermittelten sind.

### 5.3.1 Exceltool 5 - Polytrope Gaskugeln 2 (Sterne im Strahlungsgleichgewicht)

Analog zu Modul B können durch ein Probiervorgehen die Parameter so angepasst werden, bis sich ein Modell mit dem Radius und der Masse der Sonne ergibt. Daher wird nun lediglich auf die Ergebnisse eingegangen, welche in Abbildung 5.17 dargestellt sind.

Man erkennt, dass die Masse nun stärker im Zentrum konzentriert ist, als es im vollkonvektiven Modell der Fall war. Die Hälfte der gesamten Masse befindet sich hier innerhalb des Radius  $0,3 R$ , so wie auch in Abbildung 4.9 der Fall ist. Der Druck, die Dichte und die Temperatur im Zentrum sind zwar noch immer geringer als im dort dargestellten Modell, allerdings stimmen die Größenordnungen überein.

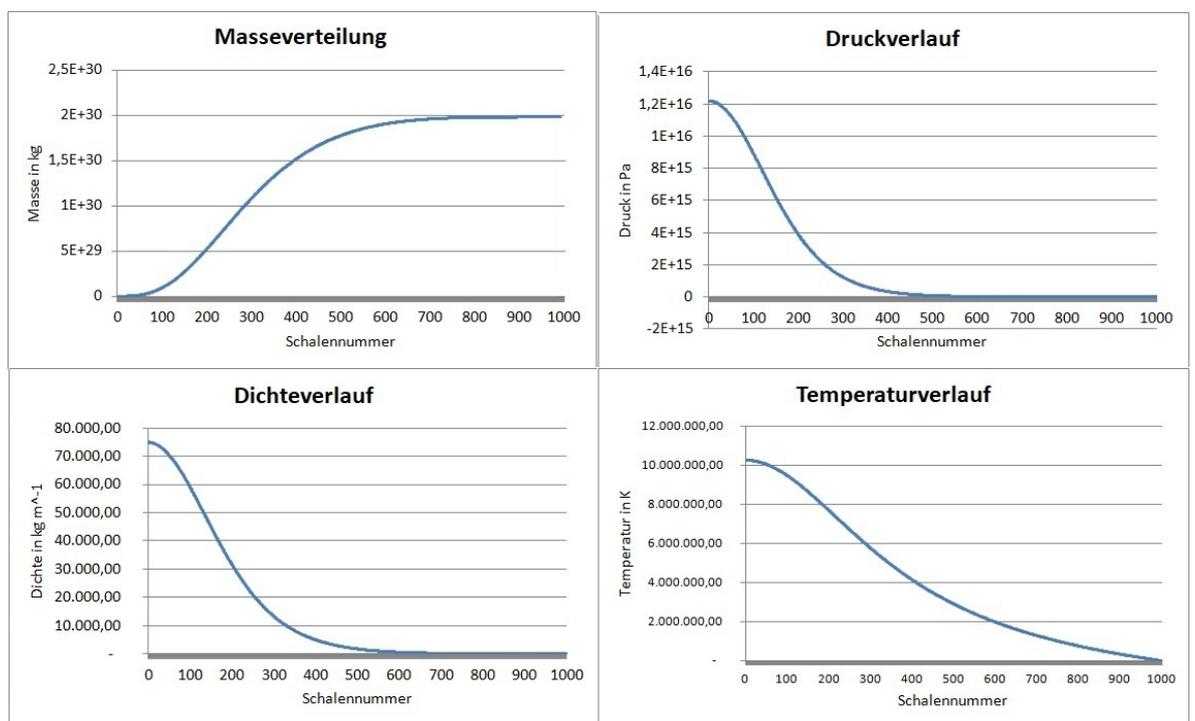


Abbildung 5.17: Masseverteilung, Druck-, Dichte- und Temperaturverlauf im Inneren eines polytrophen Sterns.

# Kapitel 6

## Modul D - Annäherung an die Sternentwicklung

In den vorangegangenen Kapiteln wurde bereits betont, dass historisch während der Entwicklung der Theorie des inneren Aufbaus der Sterne nicht bloß an einer Theorie zur Struktur von Sternen gearbeitet wurde, sondern zugleich immer Überlegungen angestellt wurden, wie sich Sterne im Laufe der Zeit entwickeln. Die Notwendigkeit einer Theorie zur Sternentwicklung ergibt sich, wie wir bereits wissen, aus dem Energieerhaltungssatz. Da Sterne Energie an ihre Umgebung abgeben, können sie dies nur für eine bestimmte Zeit tun, da es keine unerschöpfliche Energiequelle gibt. Es sind zwar verschiedene Energiequellen denkbar, früher oder später sind diese erschöpft und das Lebensende des Sterns wird eingeleitet. Wie das Leben eines Menschen kann die Existenz eines Sterns in drei wichtige Phasen eingeteilt werden:

- Geburt
- Leben
- Tod

Eine Theorie der Sternentwicklung, welche die erste Phase analysiert, muss betrachten, welche Voraussetzungen gegeben sein müssen, damit Sterne überhaupt entstehen können. Ein bekanntes Beispiel für ein Sternentstehungsgebiet sind die Säulen der Schöpfung im Adlernebel (siehe Abbildung (6.1)) Mit Theorien zur zweiten Phase haben wir uns bereits befasst, indem wir einfache Abkühlungssequenzen betrachtet und weiter festgestellt haben, dass solche Sequenzen das Leben eines Sterns



Abbildung 6.1: Das bekannte Sternentstehungsgebiet „Die Säulen der Schöpfung“ im Adlernebel [Fel15].

nicht in Gänze erfassen können, sondern bestenfalls geeignet sind, um bestimmte Lebensabschnitte zu beschreiben. Das Lane'sche Gesetz muss beachtet werden! In der dritten Phase werden die Endstadien von Sternen betrachtet, also unter welchen Voraussetzungen das Leben eines Sterns als Weißer Zwerg, Neutronenstern oder Schwarzes Loch endet. Eine vollständige Theorie zur Sternentwicklung kann in dieser Arbeit aufgrund der Komplexität nicht dargelegt werden. Nachfolgend wird die Untersuchung beschränkt auf die Entwicklung von Sternen während des Hauptreihenstadiums, in dem sie sich die längste Zeit ihres Lebens aufhalten.

Dass Sterne selbst auf der Hauptreihe nicht als unveränderliche Objekte angesehen werden können, sondern sich fortwährend verändern müssen, haben wir bereits durch die Tatsache erkannt, dass sie dem Energieerhaltungssatz genügen müssen. Es gibt keine Energiequelle, welche die Energieabgabe unendlich lange aufrecht erhalten kann. Doch auch wenn die Energiequelle im Zentrum von Sternen dafür sorgt, dass die an der Oberfläche freigesetzte Energie im Zentrum wieder erneuert wird, sodass der Stern nicht auskühlt, sorgt die Kernfusion selbst dafür, dass sich der Stern kontinuierlich verändert. Durch die Umwandlung von Wasserstoff zu Helium verändert sich die chemische Zusammensetzung, was zu ei-

ner Veränderung der mittleren Teilchenmasse  $\bar{\mu}$  führt. Diese steht, wie wir sehen werden, in direktem Zusammenhang mit einem Anwachsen der Leuchtkraft des Sterns. Um dies zu beweisen betrachten wir das Modell eines Sterns im Strahlungsgleichgewicht. Es gilt Gleichung (5.75) aus dem vorherigen Kapitel:

$$L(r) = \frac{ac}{3\kappa\rho} \cdot 4\pi r^2 \frac{dT^4}{dr} \quad (6.1)$$

Da wir uns hier nicht für detaillierte Verläufe der einzelnen Zustandsgrößen interessieren, sondern einen Zusammenhang für den Stern als Ganzes suchen, beschränken wir uns auf die Betrachtung von Mittelwerten der Zustandsgrößen zwischen dem Zentrum und der Sternoberfläche, wodurch sich einige Vereinfachungen vornehmen lassen. Es gilt:

$$L(r) \rightarrow L \quad (6.2)$$

$$\frac{1}{\rho} \rightarrow \frac{R^3}{M} \quad (6.3)$$

$$r^2 \rightarrow R^2 \quad (6.4)$$

$$\frac{dT^4}{dr} \rightarrow \frac{T^4}{R} \quad (6.5)$$

somit folgt:

$$L \propto \frac{R^3}{M} \cdot R^2 \frac{T^4}{R} \propto \frac{R^4 T^4}{M} \quad (6.6)$$

bzw.

$$\boxed{L \propto \frac{R^4 T^4}{M}} \quad (6.7)$$

Betrachten wir nun das Gesetz des idealen Gases:

$$p = \frac{\rho\kappa T}{\mu} \quad (6.8)$$

Für den Druck  $p$  können wir, wie wir bereits gezeigt haben, den Zusammenhang

$$p \propto \frac{M^2}{R^4} \quad (6.9)$$

verwenden. Lassen wir die Opazität  $\kappa$  zunächst außer Acht, so gilt:

$$\frac{M^2}{R^4} \propto \rho \frac{T}{\mu} = \frac{M}{R^3} \frac{T}{\mu} \quad (6.10)$$

$$\Rightarrow \frac{M}{R} \propto \frac{T}{\mu} \quad (6.11)$$

$$\Rightarrow T \propto \mu \cdot \frac{M}{R} \quad (6.12)$$

Einsetzen von 6.12 in 6.7

$$\Rightarrow L \propto \frac{R^4}{M} \cdot \frac{\mu^4 M^4}{R^4} = \mu^4 M^3 \quad (6.13)$$

Wie wir sehen, hängt die Leuchtkraft eines Sterns nicht nur von seiner Masse ab, sondern die chemische Zusammensetzung spielt ebenfalls eine nicht zu vernachlässigende Rolle. Insbesondere sehen wir, dass die Leuchtkraft eine zeitlich veränderliche Größe darstellt, da sich, bedingt durch die Fusion im Zentrum, die chemische Zusammensetzung verändert. Der Einfluss von  $\mu$  auf die Leuchtkraft  $L$  ist tatsächlich noch erheblich größer als in dieser Betrachtung, da schwerere Elemente für eine erheblich größere Opazität  $\kappa$  sorgen, die wiederum Auswirkung auf die Leuchtkraft hat. Durch eine genauere Analyse der Opazität  $\kappa$ , die wir zu Beginn unserer Betrachtung weggelassen haben (Siehe dazu [Sch08]), lässt sich zeigen, dass

$$L \propto \mu^{\frac{15}{2}} \quad (6.14)$$

Diese Proportionalität können wir nutzen, um abzuschätzen, wie groß die Leuchtkraft der Sonne zu Beginn ihres Lebens gewesen sein müsste und auch wie sie sich bedingt durch die Fusionsprozesse in ihrem Inneren im Laufe ihres Lebens verändert haben muss. Ausgehend von einer hypothetischen chemischen Zusammensetzung, werden wir zunächst abschätzen, wie groß die Leuchtkraft der Sonne vor  $4,6 \cdot 10^9$  a gewesen sein sollte, die Ermittlung des zeitlichen Verlaufs wird mithilfe von Exceltool 5 ermöglicht. Der Denkprozess wird zunächst grob skizziert:

Da wir wissen, wie viel Energie in einer Sekunde an der Oberfläche der Sonne freigesetzt wird, können wir daraus folgern, dass ebenso viel Energie durch Fusionsvorgänge im Zentrum nachgeliefert werden muss. Die Umwandlung von vier Wasserstoffatomen zu Helium hat Konsequenzen für die chemische Zusammensetzung, sodass anschließend abgeleitet werden kann, inwiefern sich die mittlere Teilchenmasse durch die Nukleosynthese verändert hat und welche Konsequenzen dies für die Leuchtkraft nach sich zieht. Da es sich hierbei um einen kontinuierlichen Prozess handelt, wird eine genaue zeitliche Auflösung des Vorgangs zwangsläufig auf die Betrachtung einer Differentialgleichung hinauslaufen, die wir aber numerisch mithilfe von Excel lösen können. Um uns der Lösung des Pro-

blems zu nähern und ein Gefühl für die Größenordnungen zu bekommen, übertragen wir den soeben dargelegten Gedankengang auf die gesamte Lebensdauer der Sonne und halten die Leuchtkraft und die Fusionsrate für den gesamten Zeitraum gedanklich konstant. Ziel soll es sein zunächst die Veränderung von  $\bar{\mu}$  grob abzuschätzen.

Betrachten wir zunächst die Bestandteile des Gasgemisches der Sonne, welches weitestgehend aus vollionisiertem Wasserstoff und Helium besteht, sowie einige schwerere Elemente. Letztere wollen wir hier jedoch außer Acht lassen (auch wenn die Beschreibung der Sonne dadurch ungenauer wird, lässt sich das Modell auf Sterne der ersten Generation anwenden, da es im frühen Universum noch keine schweren Elemente gab). Wasserstoff besteht aus einem Proton der Masse  $m_P$  als Atomkern sowie einem Elektron, dessen Masse verglichen mit dem Kern vernachlässigbar klein ist. Pro Wasserstoffatom liegen im ionisierten Zustand demnach zwei Teilchen vor, die im Mittel etwa die halbe Masse eines Protons besitzen. Es gilt:

$$\mu_H = \frac{m_P}{2} \quad (6.15)$$

Helium besteht aus einem Atomkern der sich aus zwei Protonen und zwei Neutronen zusammensetzt, welche näherungsweise die selbe Masse besitzen, sowie zwei Elektronen. Im Mittel verteilt sich die Masse von vier Protonen auf drei Teilchen, sodass gilt:

$$\mu_{He} = \frac{4m_P}{3} \quad (6.16)$$

Betrachtet man ein Gasgemisch aus vollständig ionisiertem Wasserstoff und Helium, so muss bekannt sein, zu welchem Anteil  $x$  es aus Wasserstoff und zu welchem Anteil  $(1 - x)$  es aus Helium besteht. Die mittlere Teilchenmasse des Gemisches folgt durch Bildung des gewichteten Mittelwertes:

$$\bar{\mu} = x \cdot \mu_H + (1 - x) \cdot \mu_{He} = x \cdot \frac{m_P}{2} + (1 - x) \cdot \frac{4m_P}{3} \quad (6.17)$$

Die Gewichte lassen sich ebenfalls durch die Anteile der Massen  $M_H$  bzw.  $M_{He}$  an der Gesamtmasse  $M$  ausdrücken:

$$\bar{\mu} = \frac{M_H}{M} \cdot \frac{m_P}{2} + \frac{M_{He}}{M} \cdot \frac{4m_P}{3} = \frac{m_P}{M} \cdot \left( \frac{1}{2}M_H + \frac{4}{3}M_{He} \right) \quad (6.18)$$

Wählen wir exemplarisch einen Wasserstoffanteil von 80%, so folgt:

$$\bar{\mu} = 0,67m_P \quad (6.19)$$

Unsere Aufgabe wird es nachfolgend sein, die Veränderung der mittleren Teilchenmasse  $\bar{\mu}$  im Laufe der Zeit zu beschreiben, die durch die Kernfusion hervorgerufen wird. Gesucht ist also der Gradient  $\frac{d\mu}{dt}$ . Formal lässt sich dieser durch Ableiten der obigen Gleichung ermitteln:

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{m_P}{M} \cdot \left( \frac{1}{2} \frac{dM_H}{dt} + \frac{4}{3} \frac{dM_{He}}{dt} \right) \quad (6.20)$$

Um unser Ziel zu erreichen, müssen wir nun die Veränderung der Masse an Wasserstoff und Helium mit der Zeit beschreiben und dazu den Fusionsprozess selbst miteinbeziehen. Vereinfacht können wir annehmen, dass die Fusion von Helium durch die Vereinigung von vier Wasserstoff Atomen geschieht, wohl wissend, dass der genaue Prozess komplizierter abläuft. Weiterhin lassen wir außer Acht, dass die Masse eines Heliumkerns etwas geringer ist, als die Masse von vier Wasserstoffkernen - der Massendefekt ist schließlich der Grund, dass bei der Fusion überhaupt Energie freigesetzt wird. Es gilt somit näherungsweise:

$$- \frac{dM_H}{dt} = \frac{dM_{He}}{dt} \quad (6.21)$$

Durch das Minuszeichen wird verdeutlicht, dass die Masse von Wasserstoff bei der Fusion abnimmt, während die Masse von Helium in gleichem Maße zunimmt. Setzen wir obigen Zusammenhang in 6.20 ein, so vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{m_H}{M} \cdot \left( \frac{1}{2} \frac{dM_H}{dt} - \frac{4}{3} \frac{dM_H}{dt} \right) = -\frac{5}{6} \frac{m_H}{M} \cdot \frac{dM_H}{dt} \quad (6.22)$$

Um den bislang unbekanntten Ausdruck  $\frac{dM_H}{dt}$  zu bestimmen, muss der Zusammenhang zwischen der Umwandlung der Wasserstoffmasse zu Helium und der freigesetzten Energie an der Sternoberfläche hergestellt werden. Da die Leuchtkraft der Sonne  $L$  bekannt ist, wird im Zeitraum  $dt$  die Energie

$$\epsilon = Ldt \quad (6.23)$$

freigesetzt. Durch Nachschlagen beispielsweise in einem Physik-Schulbuch der Oberstufe (oder rechnerisch über den Massendefekt), kann ermittelt

werden, dass die Fusion von vier Wasserstoffkernen zu einem Heliumkern die Energie  $\epsilon^* = 26,8$  MeV freigibt. Folglich muss, um die Energie  $\epsilon$  freizusetzen, die zugehörige Masse  $dM_H$  zu Helium fusioniert werden, sodass die Verhältnisgleichung

$$\frac{4m_H}{\epsilon^*} = \frac{dM_H}{\epsilon} = \frac{dM_H}{Ldt} \quad (6.24)$$

gilt und folglich:

$$L \cdot \frac{4m_H}{\epsilon^*} = \frac{dM_H}{dt} \quad (6.25)$$

Setzen wir diesen Zusammenhang in (6.22) ein, erhalten wir:

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{5 m_H}{6 M} \cdot L \cdot \frac{4m_H}{\epsilon^*} = -\frac{10}{3} \frac{m_H^2}{M \cdot \epsilon^*} L \quad (6.26)$$

Da wir uns zunächst auf die Untersuchung von zwei Zeitpunkten beschränken wollen, können wir vom Differentialquotienten  $\frac{d\mu}{dt}$  übergehen zum Differenzenquotienten  $\frac{\Delta\mu}{\Delta t} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{t_2 - t_1}$ , sodass die Lösung der Differentialgleichung nicht erforderlich ist. Durch Umstellen folgt für die Veränderung der mittleren Teilchenmasse  $\Delta\mu$ :

$$\Delta\mu = -\frac{10}{3} \frac{m_H^2}{M \cdot \epsilon^*} L \cdot \Delta t = 6,28 \cdot 10^{-29} \text{ kg} \quad (6.27)$$

Da wir nun alle Größen auf der rechten Seite der Gleichung bestimmen können, ist es uns nun möglich, die momentane Änderungsrate der mittleren Teilchenmasse der Sonne zu bestimmen und somit durch Lösen der Differentialgleichung auch einen zeitlichen Verlauf der mittleren Teilchenmasse sowie der Leuchtkraft darzustellen. Eine analytische Darstellung ist in ([Sch08]) zu finden, in Exceltool 1 wird eine numerische Herangehensweise dargelegt. Als Vorbereitung müssen wir die zuvor hergeleiteten Gleichungen diskretisieren und in eine Form bringen, in der sie für Excel handhabbar wird. Diskretisieren von Gleichung (6.26) führt zu:

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta t} = \frac{m_H}{M} \cdot \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta M_H}{\Delta t} + \frac{4}{3} \frac{\Delta M_{He}}{\Delta t} \right) \quad (6.28)$$

mit

$$-\frac{\Delta M_H}{\Delta t} = \frac{\Delta M_{He}}{\Delta t} \quad (6.29)$$

gilt

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta t} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\Delta t} = -\frac{5 m_H}{6 M} \frac{\Delta M_H}{\Delta t} \quad (6.30)$$

Bei der Fusion von 4 Wasserstoffatomen zu Helium wird eine Energie von  $\epsilon^* = 26,8 \text{ MeV} = 4,29 \cdot 10^{-12} \text{ J}$  frei. Die gesamte freigesetzte Energie beträgt also:

$$\epsilon = L \cdot \Delta t \quad (6.31)$$

$$\frac{4m_H}{\epsilon^*} = \frac{\Delta M_H}{\epsilon} \quad (6.32)$$

$$\frac{\Delta M_H}{\Delta t} = -\frac{4m_H L}{\epsilon^*} \quad (6.33)$$

$$\frac{\Delta \mu}{\Delta t} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\Delta t} = -\frac{10 m_H^2 L}{3 \epsilon^* M} \quad (6.34)$$

$$\frac{10 m_H^2 L}{3 \epsilon^* M} \cdot \Delta t + \mu_1 = \mu_2 \quad (6.35)$$

Durch Einsetzen aller Werte folgt:

$$\mu_2 = \frac{10}{3} \cdot \frac{(1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg})^2 \cdot 3,86 \cdot 10^{26} \text{ W}}{4,29 \cdot 10^{-12} \text{ J} \cdot 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}} \cdot 1,45 \cdot 10^{17} \text{ s} + 1,139 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (6.36)$$

$$= 1,076 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Durch Quotientenbildung können wir nun abschätzen, wie die mittlere Teilchenmasse zu Beginn ausgesehen haben sollte:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = 0,945 \quad (6.37)$$

Vor 4,6 Milliarden Jahren war die mittlere Teilchenmasse demnach um mehr als 5 Prozent geringer. Ermitteln wir nun, welchen Einfluss dies auf die Leuchtkraft hat. Dies hätte bei Anwendung von Gleichung (6.14) zu folgendem Effekt in der Leuchtkraft geführt:

$$\frac{L_1}{L_2} \propto \frac{\mu_1^{\frac{15}{2}}}{\mu_2^{\frac{15}{2}}} = 0,978^{\frac{15}{2}} = 0,653 \quad (6.38)$$

Die Leuchtkraft wäre demnach um mehr als 35% geringer als zum heutigen Zeitpunkt. Dieses Phänomen wird in der modernen Klimatologie als „young faint sun“ Phänomen bezeichnet. Die angemessene Schlussfolgerung lautet, dass man den Vorgang zwar grob linearisieren darf, eine Schrittweise Iteration aber zu empfehlen ist. Dies soll nachfolgend geschehen.

## 6.1 Detaillierte Analyse der zeitlichen Entwicklung von Zustandsgrößen im Hauptreihenstadium

### 6.1.1 Exceltool 5 - Entwicklung der Leuchtkraft

- Leuchtkraft L:  $B3 = 3,86 * 10^{(26)}$
- Alter t:  $B4 = 1,45 * 10^{(17)}$
- freigesetzte Energie pro fusioniertem Heliumkern:  
 $B5 = 4,29 * 10^{(-12)}$
- Masse Wasserstoffkern:  $B6 = 1,7 * 10^{(-27)}$
- Masse Sonne:  $B7 = 2 * 10^{(30)}$
- Wasserstoffanteil:  $B8 = 0,8$
- Heliumanteil:  $B9 = 0,2$
- mittlere Teilchenmasse:  $B10 = 1,13 * 10^{(-27)}$
- Schrittweite in Millionen Jahren:  $B11 = -100$

Ähnlich wie im vorangegangenen Kapitel soll jeder Spalte eine Variable zugeordnet werden. Die Beschriftungen werden hier in Zeile 14 eingegeben. Folgende Zuordnung von Spalte zu Variable wurde hier exemplarisch gewählt:

- A: Iteration
- B: Vergangene Zeit seit Entstehung des Sterns in Sekunden
- C: epsilon
- D:  $\frac{dM_H}{dt}$
- E:  $\frac{d\mu}{dt}$
- F:  $\mu$
- G:  $\frac{dL}{dt}$
- H: Leuchtkraft  $L$

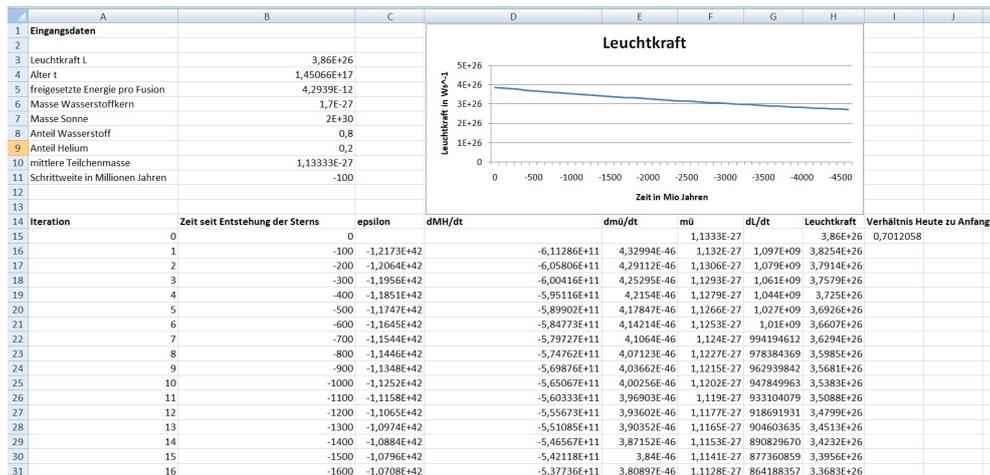


Abbildung 6.2: Darstellung des Exceltools zur Berechnung des zeitlichen Verlaufes der Leuchtkraft der Sonne.

- I: Verhältnis der Leuchtkraft von heute zu anfangs

Eine mögliche Realisation des Tools ist in Abbildung 6.2 dargestellt.

Zeile 15 soll nun wie in den vorherigen numerischen Modellen dazu verwendet werden, eine Formel in solch allgemeiner Darstellung zu finden, sodass sie mithilfe des Ausfüllkästchens auf die darunterliegenden Zeilen übertragen werden können, was in diesem Beispiel für jeweils frühere Zeitpunkte steht. In das Feld A16 genügt es eine „1“ einzugeben. In Zelle B16 wird die Zeit nach einem Iterationsschritt in Millionen Jahren angegeben und in solch allgemeiner Form gehalten, sodass über Zelle B11 die gewünschte Schrittweite eingeht.

$$B16 = \$B\$11 * A16 \tag{6.39}$$

Im Intervall  $\Delta t = t_2 - t_1$  wird die Energie  $\epsilon = L(t_1) \cdot \Delta t$  freigesetzt. Die Gleichung wird in Zelle C16 wie folgt übertragen und die Zeit in Sekunden umgerechnet:

$$C16 = (B16 - B15) * H15 * 365 * 24 * 60 * 60 * 10^6 \tag{6.40}$$

Die Abnahme der Wasserstoffmasse mit der Zeit  $\frac{dM_H}{dt}$  lässt sich ermitteln, indem die Anzahl an Fusionen, welche sich aus dem Quotienten aus Leuchtkraft zu freigesetzter Energie pro Fusion ergibt, mit der Masse der vier fusionierten Wasserstoffkerne multipliziert wird:

$$D16 = -4 * \$B\$6 * H15 / \$B\$5 \tag{6.41}$$

Mithilfe von Formel (6.35) kann daraus ermittelt, inwiefern sich die mittlere Teilchenmasse  $\mu$  im Laufe der Zeit verändert und kann in Zelle E15 wie folgt eingegeben werden:

$$E16 = 4/3 * B6^2 * H15 / B5 / B7 \quad (6.42)$$

Aus der Kenntnis der zeitlichen Änderungsrate der mittleren Teilchenmasse lässt sich nun mithilfe des Tangentenverfahrens die mittlere Teilchenmasse zum Zeitpunkt  $t_2$  ermitteln:

$$F16 = F15 + E16 * (B16 - B15) * 365 * 24 * 60 * 60 * 10^6 \quad (6.43)$$

Aus der neu errechneten mittleren Teilchenmasse lässt sich nun mit Gleichung 6.38 die zeitliche Änderungsrate der Leuchtkraft in Zelle G16 bestimmen:

$$G16 = 15/2 * (F16 / B10)^{(13/2)} * B3 / B10 * E16 \quad (6.44)$$

Über erneutes Anwenden des Tangentenverfahrens lässt sich daraus schließlich bestimmen, wie groß die Leuchtkraft zum Zeitpunkt  $t_2$  ist:

$$H16 = H15 + G16 * (B16 - B15) * 365 * 24 * 60 * 60 * 10^6 \quad (6.45)$$

Durch Markieren des Zellbereichs A15 bis G16 können die soeben aufgestellten Gleichungen auf die darunterliegenden Zellen bis Zeile 61 übertragen werden, sodass die Werte für den gesamten Zeitraum bis hin zum Zeitpunkt der Entstehung der Sonne bestimmt werden können.

In Zelle I15 kann nun das Verhältnis der Leuchtkraft der Sonne zur Zeit der Entstehung zur Leuchtkraft zum jetzigen Zeitpunkt bestimmt werden:

$$I15 = \frac{H61}{H15} = 0,701 \quad (6.46)$$

Dies bedeutet, dass die Leuchtkraft bei der Sonnenentstehung etwa um 30% geringer war, als heute. Das Resultat liegt – wie zu erwarten – oberhalb unserer vorherigen Betrachtung, da hier die Wechselwirkung zwischen langsam ansteigender Fusionsrate und der Leuchtkraft berücksichtigt wurde, anstatt, wie zunächst angenommen, eine konstante Fusionsrate auf heutigem Niveau vorherrscht.

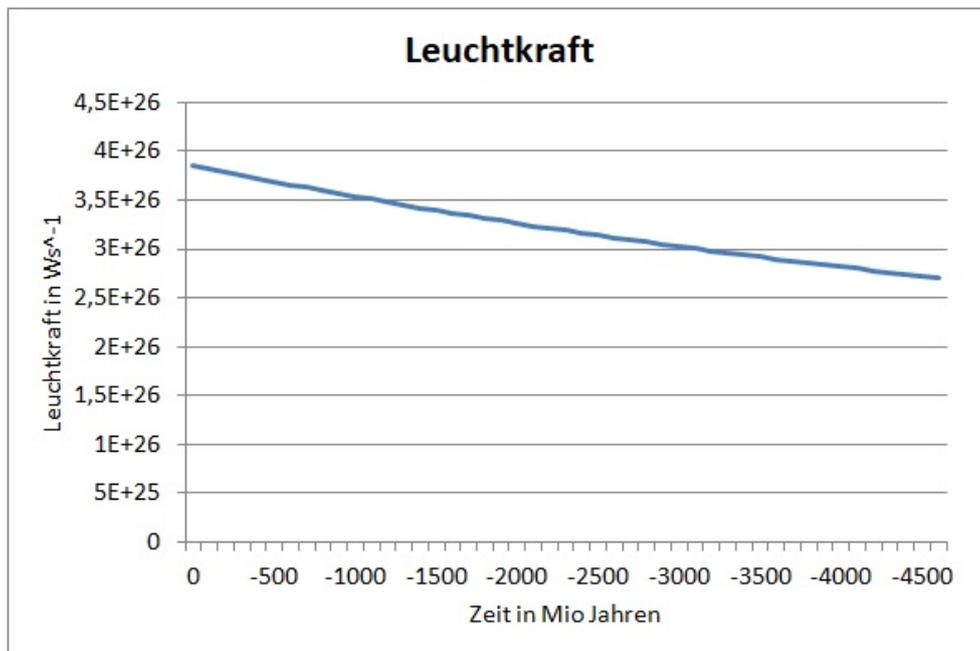


Abbildung 6.3: Zeitliche Entwicklung der Leuchtkraft der Sonne.

# Kapitel 7

## Schlussbetrachtung und Ausblick

### 7.1 Thesen

Das Hauptziel dieser Arbeit ist eine Darstellung des Themengebietes „Innerer Aufbau der Sterne und Sternentwicklung“ in aufeinander aufbauende Lernmodulen, welche inhaltlich an den Meilensteinen der historischen Entwicklung der Theorie ausgerichtet sind. Dabei muss stets deutlich werden, warum das jeweils betrachtete Modell aus der fachlichen und der historischen Perspektive weiterentwickelt wurde. Erkenntnisse werden dabei möglichst auf elementare Weise gewonnen, um sie einer breiten Zielgruppe zugänglich zu machen. Die Hauptzielgruppe der Arbeit sind Lehramtsstudierende für die Sekundarstufe II und Physiker im Bachelorstudiengang.

Um dieses Ziel zu erreichen wird in den Modulen A - B ein Weg aufgezeigt, der Lernende durch die historische Entwicklung der Theorie führt, allerdings ohne alle Irrwege und Fehlinterpretationen aufzugreifen, die typischerweise in jedem wissenschaftlichen Prozess stattfinden. Dabei werden Elementarisierungsvorschläge unterbreitet, mit denen die physikalischen Gegebenheiten im Sterninneren modelliert werden können, um Mittelwerte und Zustandsgrößen der Sterne abzuschätzen und deren Verläufe vom Sterninneren hin zum Rand darzustellen. Dabei spielt der Computer als Hilfsmittel eine zentrale Rolle. Es erübrigt sich fast explizit zu sagen, dass nicht jede in den Lernmodulen vorgestellte Idee, nicht jeder Gedankengang, auch nicht jede Elementarisierung vom Autor dieser Promotionsschrift stammen kann. Es wurde sorgfältig darauf Wert

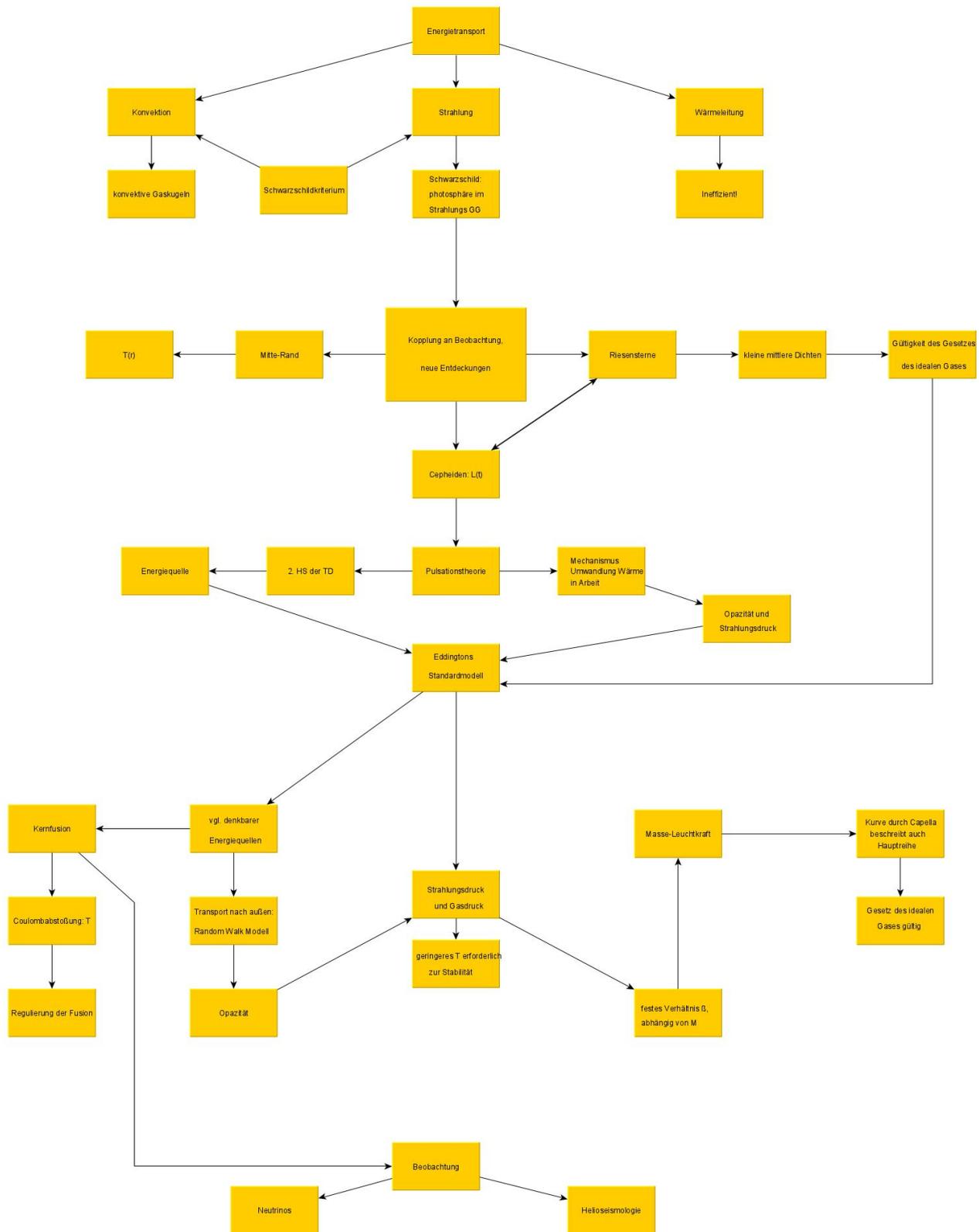


Abbildung 7.1: Schematische Darstellung des Erkenntnisprozesses.

gelegt, solche Beiträge im Literaturverzeichnis aufzulisten. Die Hauptarbeit bestand vielmehr darin, die Lernmodule so zu strukturieren und aufeinander zu beziehen, dass Lernende mit Diesen einen in sich schlüssigen Zugang zur Theorie erhalten. Der dabei gewählte Aufbau wird in dem Flussdiagramm 7.1 wiedergegeben. Die nachfolgenden Thesen spiegeln die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit wider:

- Die zentrale These der Arbeit lautet: Es ist möglich allein durch elementare Hilfsmittel (im Hinblick auf die mathematischen Methoden und die benutzte Computer Standardsoftware) ein modulares Lerncurriculum zum inneren Aufbau der Sterne zu formulieren.

Dort, wo es aufgrund der Fachlogik notwendig war und wo die aktuelle astronomische Fachdidaktik noch Desiderate aufwies, hat der Autor eigenständige Elementarisierungsvorschläge unterbreitet und im Detail ausgearbeitet. Diese sind in die jeweiligen Lernmodule eingeflossen, sollen aber nachfolgend in Form von gesonderten Thesen herausgestellt werden.

- Es ist bereits im Rahmen einfacher Überlegungen möglich zu zeigen, dass die Existenz eines stabilen Sterns auf einem Druckgleichgewicht beruht. Neben elementaren Betrachtungen mit dem bekannten Halbkugelmodell, kann hierzu auch ein Federmodell dienen, sowie die kritische Analyse eines Excelmodells, das unter der Annahme erstellt wurde, dass im Stern kein Gegendruck existieren würde.
- Die Simulation von Sternmodellen mit konstanter Dichte stellt einen gangbaren Weg dar, um einige Grundannahmen über realistische Sterne aufzuspüren und zu definieren.
- Die Diskussion historischer Kontexte trägt dazu bei, gewisse Stolpersteine beim tieferen Verstehen von Sternmodellen aufzuspüren, wie etwa die Tatsache, dass man die Sonne im 19. Jahrhundert wegen ihrer hohen mittleren Dichte für eine Flüssigkeitskugel hielt.
- Ebenso wie Modelle konstanter Dichte führen auch Modelle mit konstanter Temperatur zu physikalisch widersprüchlichen Resultaten, die fundamentalen Eigenschaften der Sonne als selbstleuchtendes Objekt zuwider laufen.

- Zu wesentlichen Erkenntnissen über die Physik polytroper Sterne gelangt man bereits mit einem einfachen Tangentenverfahren, das bereits für Lernende in der gymnasialen Oberstufe verfügbar ist. Für Lernende auf jeden Fall hilfreich sind Visualisierungen zu den Teilschritten im Rechenablauf innerhalb der Tabellenkalkulation von Excel.
- Bereits im Rahmen einer einfachen Excelprogrammierung kann man die langsame Zunahme der Leuchtkraft eines Hauptreihensterns nachvollziehen.
- Ein neuartiger und in der Promotionsschrift erprobter Weg für eine elementarisierte Untersuchung des Sterninneren ist die Verwendung von Modellbildungssoftware, hier exemplarisch die Software CMA Coach 6.0. Mit Coach können die Modellverknüpfungen besonders erkennbar gemacht werden bei gleichzeitiger Reduzierung des sichtbaren Formelapparates.

# Kapitel 8

## Notationsverzeichnis

Formelzeichen	Bedeutung
$\bar{X}$	Mittelwert der Größe $X$
$\beta$	Anteil des Gasdruckes am Gesamtdruck
$\chi$	Adiabatexponent
$\Delta$	Differenz zweier Werte
$\epsilon(r)$	Energieerzeugungsrate pro kg im Abstand $r$ vom Zentrum einer Kugel
$\kappa$	Opazität
$\lambda$	Zerfallskonstante
$\mu$	mittlere Teilchenmasse
$\odot$	Indexbezeichnung für die Sonne
$\omega$	Kreisfrequenz
$\Phi(r)$	Gravitationspotential im Abstand $r$ vom Zentrum einer Kugel
$\rho$	Dichte
$\rho(r)$	Dichte im Abstand $r$ vom Zentrum
$\sigma$	Wirkungsquerschnitt
$1 - \beta$	Anteil des Strahlungsdruckes am Gesamtdruck
$A$	Fläche
$a$	Beschleunigung
$c_p$	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
$c_v$	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen
$dL$	Differential der Leuchtkraft
$dM$	Differential der Masse
$dp$	Differential der Dichte

$dQ$	Differential der Wärmemenge
$dr$	Differential des Radius
$dT$	Differential der Temperatur
$dV$	Differential des Volumens
$E$	Energie
$E_{kin}$	Kinetische Energie
$E_{pot}$	Potentielle Energie
$F$	Kraft
$f$	Freiheitsgrad
$F_{Rad}(r)$	Energiefluss pro Quadratmeter durch eine Kugel mit Radius $r$
$F_c$	Coulombkraft
$F_G$	Gravitationskraft
$g$	Gravitationsbeschleunigung
$H_s$	Heizwert
$I$	Strahlungsintensität
$k$	Federkonstante
$K$	Polytropenkonstante
$l$	Länge
$L(r)$	Leuchtkraft einer Kugel mit Radius $r$
$m$	Masse
$M$	Masse (der Sonne/des Sterns)
$M(r)$	Masse, die sich innerhalb einer Kugel mit Radius $r$ befindet
$n$	Teilchenanzahl
$p$	Druck
$p_{Gas}$	Gasdruck
$p_{Ges}$	Gesamtdruck
$p_{Rad}$	Strahlungsdruck
$Q$	Wärmemenge
$r$	Abstand vom Zentrum des Sterns
$R$	Radius (der Sonne/eines Sterns)
$S$	Strahlungsleistung
$T$	Temperatur
$t$	Zeit

$U$	Innere Energie
$V$	Volumen
$v$	Geschwindigkeit
$W$	Arbeit
$Z$	Kernladung

Tabelle 8.1: In dieser Arbeit verwendete Notation, Abweichungen davon sind an den entsprechenden Stellen gesondert erläutert.

Formelzeichen	Bedeutung	Wert
$\epsilon_0$	Elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ AsV}^{-1}\text{m}^{-1}$
$\pi$	Kreiszahl Pi	$\pi = 3,1415$
$\sigma$	Stefan-Boltzmann-Konstante	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{k}^{-4}$
$a$	Strahlungskonstante	$a = 7,7567 \cdot 10^{-16} \text{ Jm}^{-3}\text{K}^{-4}$
$c$	Lichtgeschwindigkeit	$c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-2}$
$e$	Elektronenladung	$e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
$G$	Gravitationskonstante	$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
$h$	Plancksches Wirkungsquantum	$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
$k_B$	Boltzmann Konstante	$k_B = 1,380 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$
$m_e$	Masse eines Elektrons	$m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
$m_P$	Masse eines Protons	$m_P = 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
$R_G$	Gaskonstante	$R_G = 8,314 \text{ kgm}^2\text{s}^{-2}\text{mol}^{-1}\text{K}^{-1}$

Tabelle 8.2: In dieser Arbeit verwendete Konstanten

# Literaturverzeichnis

- [AI71] ABRAHAM, ZULEMA und ICKO IBEN: *More Solar Models and Neutrino Fluxes*. *Astrophysical Journal*, (170):S. 157, 1971.
- [Bor06a] BORB: *FusionintheSun*.  
<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FusionintheSun.svg>, 03.04.2006. letzter Aufruf: 29.07.2019.
- [Bor06b] BORB2: *Overview of the CNO-I Cycle*.  
[https://en.wikipedia.org/wiki/CNO\\_cycle#/media/File:CNO\\_Cycle.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/CNO_cycle#/media/File:CNO_Cycle.svg), 10.10.2006. letzter Aufruf: 29.07.2019.
- [Bun19] BUNDESMINISTERIUM FÜR WIRTSCHAFT UND ENERGIE: *Zahlen und Fakten Energiedaten: Nationale und Internationale Entwicklung*.  
[https://www.bmwi.de/Redaktion/DE/Binaer/Energiedaten/energiedaten-gesamt-xls.xlsx?\\_\\_blob=publicationFile&v=95](https://www.bmwi.de/Redaktion/DE/Binaer/Energiedaten/energiedaten-gesamt-xls.xlsx?__blob=publicationFile&v=95), 2019. letzter Aufruf: 31.07.2019.
- [Cha67] CHANDRASEKHAR, SUBRAHMANYAN: *An introduction to the study of stellar structure*. Dover books on astronomy. Dover, Mineola, NY, unabridged and corr. republ. of the work originally publ. in 1939 Auflage, 1967.
- [Cor21] CORTIE, ALOYSIUS LAURENCE: *Sir Norman Lockyer, 1836-1920*. *The Astrophysical Journal*, 53:233, 1921.
- [DD05] DANCKWERTS, RAINER und VOGEL DANKWART: *Elementare Analysis*. Books on Demand, Norderstedt, unveränd. Neuaufl. des letztmalig im Jahre 1991 bei J. B. Metzler unter dem Titel "Analysis für den Leistungskurs 12/13" Auflage, 2005.

- [Dem96] DEMTRÖDER, WOLFGANG: *Experimentalphysik 3: Atome, Moleküle und Festkörper*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg and s.l., 1996.
- [Dem01] DEMTRÖDER, WOLFGANG: *Mechanik und Wärme: Mit 9 Farbtafeln, zahlreichen durchgerechneten Beispielen und 168 Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen*, Band 1 der Reihe *Springer-Lehrbuch*. Springer, Berlin, 2., überarb. und erw. Aufl. Korrigierter Nachdruck Auflage, 2001.
- [Die14] DIERKS, PAY OVE AND RETZBACH, JOACHIM AND HÖFLER, TIM AND KÖNNEKER, CARSTEN AND PARCHMANN, ILKA: *Naturwissenschaften lernt man nicht nur in der Schule! Interessen von Jugendlichen an Beiträgen in Wissenschaftsmagazinen*. MNU, 67(4):215–221, 2014.
- [EB28] EDDINGTON, ARTHUR STANLEY und OTTO FRIEDRICH BOLLNOW: *Sterne und Atome: Mit 11 Abbildungen*. Springer, Berlin, 1928.
- [Edd26] EDDINGTON, ARTHUR STANLEY: *The internal constitution of the stars*. Univ. Press, Cambridge, 1926.
- [Emd07] EMDEN, ROBERT: *Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme*. Teubner, Leipzig u.a., 1907.
- [Emd22] EMDEN, ROBERT: *Thermodynamik der Himmelskörper*. In: SCHWARZSCHILD, K., S. OPPENHEIM und W. DYCK (Herausgeber): *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Seiten 373–532. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden and s.l., 1922.
- [Fan05] FANGHONG: *Matroschka*.  
[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d2/Russian-Matroschka\\_no\\_bg.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d2/Russian-Matroschka_no_bg.jpg), 02.03.2005. letzter Aufruf: 15.09.2017.
- [Fas08] FASTFISSION: *Binding energy curve - common isotopes*.  
[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Binding\\_](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Binding_)

- [energy\\_curve\\_-\\_common\\_isotopes\\_DE.svg](#), 14.04.2008.  
letzter Aufruf: 29.07.2019.
- [Fel15] FELICIA CHOU: *Adlernebel*.  
<https://hubblesite.org/contents/media/images/2015/01/3471-Image.html>, 05.01.2015. letzter Aufruf: 28.07.2019.
- [Fén96] FÉNYI, JULIUS: *Über einen neuen Gesichtspunkt und neue Erklärungen der Erscheinungen auf der Sonne*. Astronomische Nachrichten, 140:S. 289, 1896.
- [FM97] FÜRST, DIETMAR und LOTHAR MEYER (Herausgeber): *Astronomie: Sekundarstufe II*. Paetec Ges. für Bildung und Technik, Berlin, 2., überarb. Aufl. Auflage, 1997.
- [Ham06] HAMEL, JÜRGEN: *Meilensteine der Astronomie: Von Aristoteles bis Hawking*. Kosmos, Stuttgart, 2006.
- [Han14] HANSLMEIER, ARNOLD: *Einführung in Astronomie und Astrophysik*. Springer Spektrum, Berlin, 3. Aufl. Auflage, 2014.
- [Har13] HARRIS, RANDY: *Moderne Physik: Lehr- und Übungsbuch*. Physik. Pearson, München, 2. aktualisierte Auflage Auflage, 2013.
- [Hel47] HELMHOLTZ, HERMANN VON: *Über die Erhaltung der Kraft, eine physikalische Abhandlung*, 1847.
- [Hun72] HUND, FRIEDRICH: *Geschichte der physikalischen Begriffe*, Band 543 der Reihe *BI-Hochschultaschenbücher*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1972.
- [KKZ97] KLAPDOR-KLEINGROTHAUS, HANS VOLKER und KAI ZUBER: *Teilchenastrophysik*. Teubner Studienbücher. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 1997.
- [KWW13] KIPPENHAHN, RUDOLF, ALFRED WEIGERT und ACHIM WEISS: *Stellar structure and evolution*. Astronomy and astrophysics library. Springer, Berlin, New York, 2 Auflage, 2013.

- [Lan70] LANE, JONATHAN HOMER: *On the Theoretical Temperatur of the Sun; under the Hypothesis of a Gaseous Mass maintaining its Volume by its Internal Heat, and depending on the Laws of Gases as known to Terrestrial Experiment.* American Journal of Science and Arts, Seiten 57–74, 1870.
- [Lin06] LINDNER, KLAUS: *Die Zustandsgrößen der Sterne im Unterricht.* *Astronomie und Raumfahrt*, 43(2):17–19, 2006.
- [NAS] NASA: *The Photosphere.*  
[https://solarscience.msfc.nasa.gov/images/w920607\\_sm.jpg](https://solarscience.msfc.nasa.gov/images/w920607_sm.jpg). letzter Aufruf: 28.07.2019.
- [Par05] PAR: *Limb darkening layers.*  
[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c2/Limb\\_darkening\\_layers.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c2/Limb_darkening_layers.png), 18.03.2005. letzter Aufruf: 28.07.2019.
- [Phi96] PHILLIPS, ANTHONY C.: *The physics of stars.* The Manchester physics series. Wiley, Chichester, Reprinted. Auflage, 1996.
- [Pös] PÖSSEL, MARKUS: *Astronomie im Bildungsplan 2016.*  
<http://www.haus-der-astronomie.de/3467747/astronomie-physik-nwt-v12.pdf>. letzter Aufruf: 28.04.2019.
- [Rei08] REINHARDT, HANS-JÜRGEN: *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen: Anfangs- und Randwertprobleme.* de Gruyter Lehrbuch. de Gruyter, Berlin, [Elektronische Resource] Auflage, 2008.
- [Sal08] SALZMANN, WIEBKE.  
[https://physik.wissenstexte.de/stern\\_schwer.png](https://physik.wissenstexte.de/stern_schwer.png), November 2008. letzter Aufruf: 28.07.2019.
- [Sch92] SCHWARZ, OLIVER: *Zur historischen Entwicklung der Theorie des inneren Aufbaus der Sterne von 1861 bis 1926.* Veröffentlichung der Archenhold-Sternwarte Nr. 22, Berlin-Treptow, 1992.

- [Sch97a] SCHRADER, G.: *Photospheric granulation: Swedish Vacuum Solar Telescope*.  
<https://solarscience.msfc.nasa.gov/images/granules.jpg>, 10.07.1997. letzter Aufruf: 28.07.2019.
- [Sch97b] SCHWARZ, OLIVER: *Experimente zur Physik der Sonne*. *Astronomie und Raumfahrt*, 34(1):30–33, 1997.
- [Sch08] SCHWARZ, OLIVER: *Ausgewählte kosmische und anthropogene Einflüsse auf die Energiebilanz der Erde in elementarischer Darstellung; Habilitationsschrift*. Fachbereich 7: Natur- und Umweltwissenschaften der Universität Koblenz-Landau, 2008.
- [Sch09] SCHWARZ, OLIVER: *Die Leuchtkraftzunahme der Sonne in elementarer Darstellung*. *Astronomie und Raumfahrt*, 46(3-4):56–60, 2009.
- [Sch10] SCHWARZ, OLIVER: *Astronomie im Physikunterricht*. *Astronomie und Raumfahrt*, 47(3-4):13–16, 2010.
- [Sch18] SCHOLZ, MATHIAS: *Die Physik der Sterne*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2018.
- [Sri11] SRINIVASAN, GANESAN: *What are the stars? The present revolution in astronomy*. Univervsiets Press, Hyderabad, 2011.
- [Tho62] THOMSON, WILLIAM: *On the Age of the Sun's Heat*. *Macmillan's Magazine*, (5):388–393, 1862.
- [Tho11] THOMASK VBG: *Lichtkurve vom Prototyp der klassischen Cepheiden Delta Cephei*.  
[https://de.wikipedia.org/wiki/Cepheiden#/media/Datei:Delta\\_Cephei\\_lightcurve.jpg](https://de.wikipedia.org/wiki/Cepheiden#/media/Datei:Delta_Cephei_lightcurve.jpg), 25.02.2011. letzter Aufruf: 28.07.2019.
- [TM85] TAYLER, ROGER JOHN und HANS MICHAEL MAITZEN: *Sterne: Aufbau und Entwicklung*. Spektrum der Astronomie. Vieweg, Braunschweig [u.a.], 1985.

- [TMPB07] TIPLER, PAUL ALLEN, GENE MOSCA, DIETRICH PELTE und MICHAEL BASLER: *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Spektrum Akad. Verl., Berlin, 2., dt. Aufl., rev. Nachdr Auflage, 2007.
- [UB05] UNSÖLD, ALBRECHT und BODO BASCHEK: *Der neue Kosmos: Einführung in die Astronomie und Astrophysik*. Springer, Berlin, 7. Aufl., 1. korrigierter Nachdr Auflage, 2005.
- [Whi97] WHITLOCK, LAURA A.: *The Life Cycles of Stars*. <https://imagine.gsfc.nasa.gov/educators/lifecycles/Imagine2.pdf>, 1997. letzter Aufruf: 28.07.2019.
- [Whi07] WHITE, ROBERT. S.: *The Age of the Earth*. Faraday Paper, (8):1–5, 2007.
- [Win61] WINNECKE, AUGUST: *Ueber die Sonne*. St. Petersburg, 1861.
- [Win74] WINNENBURG, WOLFRAM: *Gedanken zum Unterricht in Astronomie*. Der Physikunterricht, 8(1):S. 40, 1974.
- [WW89] WEIGERT, ALFRED und HEINRICH J. WENDKER: *Astronomie und Astrophysik: Ein Grundkurs*. VCH, Weinheim [u.a.], 2 Auflage, 1989.
- [You83] YOUNG, CHARLES A.: *Die Sonne*, Band 58 der Reihe *Internationale wissenschaftliche Bibliothek*. Brockhaus, Leipzig, Autoris. Ausg Auflage, 1883.
- [Zöl61] ZÖLLNER, JOHANN CARL FRIEDRICH: *Über die Natur der Cometen: Beiträge zur Geschichte und Entwicklung der Erkenntnis*. Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1861.