

**Numerische und experimentelle
Untersuchungen zur zerstörungsfreien
Charakterisierung von Hochleistungsbetonen
mittels linearer und nichtlinearer
Ultraschallwellen**

Von der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Universität Siegen genehmigte

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Ingenieurwissenschaften
(Dr.-Ing.)

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Benjamin Enis Ankay
aus Kirchen (Sieg)

Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. mult. Chuanzeng Zhang

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Claus-Peter Fritzen

Tag der mündlichen Prüfung: 11. November 2020

Siegen, im November 2020

Kurzfassung

Zunehmende Schadensfälle an Bauwerken in der vergangenen Zeit sowie der immer schlechter werdende Zustand der zivilen Infrastruktur als Folge der steigenden Anzahl von schweren Naturkatastrophen und einer immer höheren Verkehrsbelastung führen weltweit zu immensen Kosten für die Sanierungs- und Instandhaltungsarbeiten im Bauwesen. Zur Gewährleistung der Dauerhaftigkeit und zur Vorbeugung von schweren Schadensereignissen kommt der Entwicklung moderner Hochleistungswerkstoffe und der Zustandsüberwachung von Bauwerken eine stetig wachsende Bedeutung zu. Die zerstörungsfreie Prüfung unter der Verwendung ultraschallbasierter Verfahren kann hierzu einen wichtigen Beitrag leisten. Neben den konventionellen und bewährten linearen Ultraschallverfahren, wie der Impakt-Echo-Methode und der Laufzeitmessung, bieten insbesondere die sogenannten nichtlinearen Ultraschallverfahren das Potential zur zuverlässigen Materialcharakterisierung und Schädigungsbeurteilung von Werkstoffen. Dabei beziehen sich die nichtlinearen Ultraschallverfahren auf die nichtlinearen Eigenschaften eines Werkstoffes und sind durch eine hohe Sensitivität zur frühzeitigen Materialveränderung in Form von Mikroschädigungen gekennzeichnet, welche den konventionellen linearen Ultraschallverfahren meistens verborgen bleiben.

Für die praktische Anwendung neuartiger Ultraschallverfahren im Bauwesen ist es zunächst notwendig, die maßgebenden Zusammenhänge und akustischen Effekte der nichtlinearen Wellenausbreitungen in Werkstoffen zu verstehen. Hierfür eignen sich insbesondere numerische Simulationsverfahren, welche auch bei komplexen Materialeigenschaften und 3-D Problemen herangezogen werden können. Im numerischen Teil dieser Arbeit wird daher auf der Basis der klassischen CHEBYSHEV-Pseudospektralen-Kollokationsmethode ein effizientes numerisches Verfahren hoher Genauigkeit entwickelt, welches zudem die Implementierung beliebiger nichtlinearer Materialgesetze erlaubt. Anschließend werden die nichtlinearen Wellenausbreitungsprobleme im Beton unter der Berücksichtigung der Dämpfung und der Schädigung numerisch behandelt. Danach werden im experimentellen Teil dieser Arbeit die linearen und nichtlinearen Ultraschallverfahren zur Charakterisierung und Schädigungsbeurteilung in unbewehrtem und stahlbewehrtem Hochleistungsbeton erprobt. Ihre Anwendbarkeit zur ultraschalltechnischen Bestimmung der linearen und nichtlinearen Eigenschaften von Hochleistungsbetonen wird anhand von Beispielen gezeigt. Die Sensitivität der nichtlinearen Ultraschalltechnik zur Detektion mechanisch induzierter Schädigungen in Form von Mikrorissbildung und -wachstum wird untersucht und demonstriert.

Abstract

Increasing damages on building structures in recent times, as well as the deteriorating state of civil infrastructure resulting from the growing number of severe natural catastrophes and higher traffic load, are causing immense costs for refurbishment and maintenance work in the construction sector worldwide. To ensure the durability and to prevent serious damage events, the development of modern high-performance materials and health monitoring of buildings is becoming increasingly important. Non-destructive testing using ultrasound-based methods can make a valuable contribution on this. In addition to the conventional and proven linear ultrasound methods, such as the impact-echo method and the pulse-velocity measurement, especially the so-called nonlinear ultrasound methods offer the potential for reliable material characterization and damage assessment of construction materials. In this case, nonlinear ultrasound methods are related to the nonlinear elastic parameters of a material and are characterized by a high sensitivity to early material degradation in the form of micro-damage, which is usually hidden from the conventional linear ultrasound methods.

For the practical application of novel ultrasound methods in the construction sector, it is first necessary to understand the relevant relationships and acoustic effects of nonlinear wave propagation in construction materials. Numerical simulation methods, which can be used in the case of complex material properties and 3-D problems, are suitable for this purpose. Therefore, in the numerical part of this thesis, based on the classical Chebyshev-pseudospectral-collocation method, an efficient numerical method of high accuracy is developed, which allows to implement arbitrary nonlinear material laws. Subsequently the nonlinear wave propagation in concrete under the consideration of acoustic attenuation and damage is treated numerically. In the subsequent experimental part of this work the linear and nonlinear ultrasound techniques are tested for characterization and damage assessment in unreinforced and steel-reinforced high-performance concrete. Their applicability for the ultrasonic determination of the linear and nonlinear properties of high-performance concrete is shown by means of examples. The sensitivity of nonlinear ultrasound technology for the detection of mechanically induced damage in the form of microcrack formation and growth is examined and demonstrated.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Baustatik der Universität Siegen. Mein besonderer Dank gebührt Herrn Professor Dr.-Ing. habil. Chuanzeng Zhang für das Ermöglichen und Betreuen meiner Promotion. Seine wissenschaftlichen Ratschläge und seine hohe Fachkompetenz waren mir stets eine Inspiration wie auch Motivation zur Forschung und somit wesentlicher Bestandteil zum Gelingen meiner Promotion.

Herrn Professor Dr.-Ing. Claus-Peter Fritzen möchte ich recht herzlich für das Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme des Korreferats danken. Ferner bedanke ich mich ausdrücklich bei dem Vorsitzenden dieses Promotionsverfahrens Herrn Professor Dr.-Ing. Torsten Leutbecher sowie bei Herrn Professor Dr. rer. nat. habil. Xin Jiang für das Mitwirken in der Promotionskommission.

Ein großer Dank gilt außerdem meinen Arbeitskollegen, Herrn Dr.-Ing. Pedro Villamil, Herrn Elias Perras und Herrn Marius Mellmann, die während meiner Promotionszeit für eine freundschaftliche Arbeitsatmosphäre gesorgt haben und mir durch ihre fachlichen Ratschläge und Einschätzungen häufig eine große Unterstützung waren. Weiterhin danke ich Herrn Dr.-Ing. Oliver Carl für seine wissenschaftlichen Hinweise und Anmerkungen.

In besonderem Maß möchte ich mich bei Herrn Metje bedanken, der mich bei der Planung und Durchführung der experimentellen Versuche tatkräftig unterstützt hat und mit dem mich eine enge wissenschaftliche Zusammenarbeit verband. Auch danke ich Herrn André Arnolds und den studentischen Hilfskräften für die Unterstützung bei den Laborarbeiten sowie Herrn Konrad Denter für die Bereitstellung der Messtechnik.

Für die fachkundige und interessierte Beratung und Betreuung bei Fragen im Umgang mit dem Ultraschallmesssystem möchte ich außerdem Herrn Dr. Tobias P. Berndt danken, der mir in persönlichen Gesprächen stets weiterhelfen konnte.

Meiner liebevollen Ehefrau Sophia danke ich besonders für ihre Geduld, ihr Verständnis und ihr Vertrauen in dieser intensiven Zeit. Darüber hinaus bin ich meinen Schwiegereltern Dietmar und Bergit für ihren Rückhalt und ihre Hilfsbereitschaft in vielen Momenten mit großem Dank verpflichtet. Zuletzt will ich meinen Eltern Mahmut und Christiane für ihren Rat und die ungebrochene Unterstützung danken.

Siegen, im November 2020

Benjamin Enis Ankey

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis und Abkürzungen	V
1 Einleitung	1
1.1 Motivation und Ziele	1
1.2 Gliederung der Arbeit	7
2 Grundlagen der Elastodynamik	9
2.1 Kinematik.....	9
2.2 Materialgesetze.....	11
2.2.1 Lineare Materialgesetze.....	11
2.2.1.1 Linear-elastisches Materialverhalten	11
2.2.1.2 Linear-viskoelastisches Materialverhalten	12
2.2.2 Nichtlineare Materialgesetze	14
2.2.2.1 Hyperelastisch nichtlineares Materialverhalten	15
2.2.2.2 Hysteretisch nichtlineares Materialverhalten	16
2.3 Bewegungsgleichungen	20
2.3.1 Hyperbolische partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung.....	21
2.3.2 Hyperbolische partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung.....	22
2.4 Anfangs-Randwertprobleme und Randwertprobleme	23
2.4.1 Anfangs-Randwertprobleme	23
2.4.2 Randwertprobleme	24
2.5 1-D lineare Wellenausbreitungsprobleme im unberandeten Festkörper	25
2.5.1 1-D ungedämpfte lineare Wellenausbreitungsprobleme	25
2.5.2 1-D gedämpfte lineare Wellenausbreitungsprobleme	27
2.6 1-D nichtlineare Wellenausbreitungsprobleme im unberandeten Festkörper ...	30
2.6.1 1-D ungedämpfte nichtlineare Wellenausbreitungsprobleme	30
2.6.1.1 Quadratisch nichtlineares hyperelastisches Material	30
2.6.1.2 Kubisch nichtlineares hyperelastisches Material	32
2.6.1.3 Hysteretisch nichtlineares Material	34
2.6.2 1-D gedämpfte nichtlineare Wellenausbreitungsprobleme	35
2.6.2.1 Quadratisch nichtlineares hyperelastisches Material	36
2.6.2.2 Kubisch nichtlineares hyperelastisches Material	38
2.6.2.3 Hysteretisch nichtlineares Material	39
2.6.3 1-D akustoelastische Wellenausbreitungsprobleme	39

3 Numerische und experimentelle Methoden	43
3.1 Numerische Methoden	43
3.1.1 Finite-Differenzen-Verfahren	44
3.1.1.1 Grundlagen	44
3.1.1.2 Gestaffeltes Finite-Differenzen-Verfahren 2. Ordnung	45
3.1.1.3 Gestaffeltes Finite-Differenzen-Verfahren 4. Ordnung	47
3.1.1.4 Randbedingungen	48
3.1.2 Finite-Volumen-Verfahren.....	49
3.1.2.1 Grundlagen	49
3.1.2.2 Kurganov-Tadmor-Schema	51
3.1.2.3 Randbedingungen	53
3.1.3 Pseudospektrale Kollokationsmethoden	54
3.1.3.1 Chebyshev-Pseudospektrale-Kollokationsmethode	55
3.1.3.2 Modifizierte Chebyshev-Pseudospektrale-Kollokationsmethode	59
3.1.4 Convolutional Perfectly Matched Layers (CPML).....	60
3.1.5 Verifikation und Vergleich der numerischen Verfahren.....	63
3.1.5.1 1-D lineare und nichtlineare Wellenausbreitungsprobleme.....	64
3.1.5.2 2-D Wellenausbreitungsprobleme in einer linear-elastischen Halbebene	73
3.1.5.3 3-D Wellenausbreitungsprobleme in einem linear-elastischen Halbraum.....	80
3.2 Experimentelle Methoden.....	84
3.2.1 Sender und Empfänger der Ultraschalltechnik	85
3.2.2 Anordnung von Sender und Empfänger	86
3.2.3 Lineare Ultraschallverfahren	87
3.2.3.1 Impakt-Echo-Verfahren.....	87
3.2.3.2 Ultraschalllaufzeitmessung.....	89
3.2.3.3 Dämpfungsmessung.....	92
3.2.4 Nichtlineare Ultraschallverfahren.....	94
3.2.4.1 Frequenzanalyse der höherharmonischen Amplituden.....	94
3.2.4.2 Akustoelastische Verfahren	96
3.2.4.3 Weitere nichtlineare Ultraschallverfahren	97
4 Numerische Untersuchungen von geschädigtem Hochleistungsbeton	99
4.1 Verbundzonenschädigung im stahlbewehrten Beton.....	100
4.1.1 2-D nichtlineare Wellenausbreitung im unbewehrten Beton	100

4.1.2 2-D nichtlineare Wellenausbreitung im lokal geschädigten bewehrten Beton	105
4.2 2-D quadratisch nichtlinear-elastische und hysteretisch nichtlineare Betonschädigung	110
4.2.1 2-D gleichmäßig verteilte Schädigung in einem Betonkörper.....	112
4.2.2 2-D lokalisierte kreisförmige Schädigung in einem Betonkörper	118
4.3 3-D lokalisierte kugelförmige nichtlinear-elastische Betonschädigung.....	122
4.3.1 Quadratisch nichtlinear-elastische Betonschädigung	126
4.3.2 Hysteretisch nichtlinear-elastische Betonschädigung.....	127
5 Experimentelle Ultraschalluntersuchungen von Hochleistungsbetonen	129
5.1 Hochleistungsbetone	129
5.2 Messtechnik und Aufbau	133
5.3 Ultraschalluntersuchungen zur Faserorientierung in stahlbewehrtem ultrahochfestem Beton.....	135
5.3.1 Probenherstellung und Versuchsdurchführung	139
5.3.2 Ergebnisse und Diskussionen.....	145
5.4 Akustoelastische Ultraschalluntersuchungen von Hochleistungsbetonen	149
5.4.1 Probenherstellung und Versuchsdurchführung	150
5.4.2 Ergebnisse und Diskussionen.....	153
5.5 Ultraschall-Schädigungsuntersuchungen an druckbeanspruchten Hochleistungsbetonen	159
5.5.1 Probenherstellung und Versuchsdurchführung	160
5.5.2 Ergebnisse und Diskussionen.....	163
5.6 Ultraschalluntersuchungen zum Verbundverhalten von stahlbewehrten Hochleistungsbetonen	172
5.6.1 Probenherstellung und Versuchsdurchführung	176
5.6.2 Ergebnisse und Diskussionen.....	180
6 Zusammenfassung und Ausblick	197
6.1 Zusammenfassung.....	197
6.2 Ausblick	199
A Anhang	201
A.1 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor für einen quadratisch nichtlinear-elastischen Festkörper	201

A.2 Fourier-Transformation.....	202
A.3 Konstantes Q -Dämpfungsmodell für den 2-D isotropen Festkörper.....	202
A.4 Runge-Kutta-Verfahren.....	205
Literaturverzeichnis	207

Symbolverzeichnis und Abkürzungen

Lateinische Großbuchstaben

A, B	allgemeine Amplituden, gedämpfte Amplitude einer Welle
A^+, A^-	Verschiebungsamplitude einer in positiver bzw. negativer x -Richtung verlaufenden Welle
A_0	ungedämpfte Amplitude einer Welle
$A_{0,1}$	ungedämpfte Fundamentalamplitude einer Welle
$A_{0,2}$	ungedämpfte 2. Harmonische-Amplitude einer Welle
A_1	Fundamentalamplitude einer Welle
A_2	2. Harmonische-Amplitude einer Welle
A_3	3. Harmonische-Amplitude einer Welle
$A_{D,1}, A_{D,2},$ $A_{D,3}, A_{D,4}$	Hystereseparameter (DUHEM-Modell)
A_L	Amplitude der longitudinalen Welle
A_T	Amplitude der transversalen Welle
A_i	Partikelgeschwindigkeitsamplitude
C	COURANT-Zahl (CFL-Zahl)
C_{krit}	kritische COURANT-Zahl (CFL-Zahl)
\hat{C}	Elastizitätstensor des KELVIN-Eigensystems
C^V	Elastizitätstensor in VOIGT-Notation
C^K	Elastizitätstensor in KELVIN-Notation
D	Bauteildicke, Tiefe einer Grenzschicht
$D_x^+(\bullet), D_x^-(\bullet)$	Differentialoperatoren 4. Ordnung in x -Richtung
D_G	CHEBYSHEV-Differenzenmatrix (GAUSS-Knoten)
D_{GL}	CHEBYSHEV-Differenzenmatrix (GAUSS-LOBATTO-Knoten)
D_{ij}	Komponenten einer Differenzenmatrix

D_S	Durchmesser der kreisförmigen/ kugelförmigen Schädigung
D_T	Prüfkopfdurchmesser
E	Elastizitätsmodul
\mathbf{E}	Einheitsmatrix
F	Punktlast, aktuelle Last im Ausziehversuch
F_{\max}	Höchstlast im Ausziehversuch
\mathbf{F}	Deformationsgradient, Fluss-Tensor
G_{\parallel}	Gleitmodul in Vorzugsrichtung (Faserausrichtung)
G_{\perp}	Gleitmodul senkrecht zur Vorzugsrichtung (Faserausrichtung)
G_B	Gleitmodul des Betons
G_{St}	Gleitmodul des Stahls
I_1, I_2, I_3	Invarianten des Verzerrungstensors
\mathbf{I}_G	CHEBYSHEV-Interpolationsmatrix (GAUSS-Knoten)
\mathbf{I}_{GL}	CHEBYSHEV-Interpolationsmatrix (GAUSS-LOBATTO-Knoten)
I_{ij}	Komponenten der Interpolationsmatrix
M	Longitudinalmodul
\bar{M}	viskoser Longitudinalmodul
M_{NL}	nichtlinearer Longitudinalmodul
N	Knotenanzahl in beliebiger Richtung
N_f	Faseranzahl
N_{ges}	Gesamtknotenanzahl im Berechnungsgebiet
N_x, N_y, N_z	Knotenanzahl in der x -, y - und z -Richtung
\mathbf{P}	1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
P	Flächenlast, Materiepunkt
P_{ij}	Komponenten des 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
Q	Linienlast, allgemeiner Q -Faktor (akustischer Gütefaktor)
Q_L	longitudinaler Q -Faktor oder akustischer Gütefaktor
Q_T	transversaler Q -Faktor oder akustischer Gütefaktor

R	Reflexionsgrad
R^2	Bestimmtheitsmaß
R_{xy}	Korrelationskoeffizient
\mathbf{S}	Eigenvektor
$S(t)$	zeitabhängige Signalfunktion
$\dot{S}(t)$	1. Ableitung der Signalfunktion nach der Zeit
$\ddot{S}(t)$	2. Ableitung der Signalfunktion nach der Zeit
\mathbf{T}	Transformationsmatrix
T_{ges}	Gesamtzeit
T_k	CHEBYSHEV-Polynome
T_{Sig}	Signaldauer
W	elastische Formänderungsarbeit
\mathbf{X}	Ortsvektor in der Referenzkonfiguration
X_1, X_2, X_3	Koordinaten eines kartesischen Koordinatensystems

Lateinische Kleinbuchstaben

a	Kantenlängen eines Würfels
$\mathbf{a}_{i+1/2,j}, \mathbf{b}_{i+1/2,j}$	lokale Ausbreitungsgeschwindigkeiten
a_k	zeitabhängige Koeffizienten der Näherungslösung
$\mathbf{a}_{x,y}$	Parameter in der CPML-Implementierung
$\mathbf{b}_{x,y}$	Parameter in der CPML-Implementierung
c	allgemeine Wellengeschwindigkeit
c_L	Longitudinalwellengeschwindigkeit
c_T	Transversalwellengeschwindigkeit
\bar{c}_L	komplexe longitudinale Wellengeschwindigkeit
$c_{T,\parallel}$	Transversalwellengeschwindigkeit parallel zur Faserausrichtung

$c_{T,\perp}$	Transversalwellengeschwindigkeit senkrecht zur Faserausrichtung
$c_L/c_{L,0}$	relative Änderung der Longitudinalwellengeschwindigkeit
$d_f, d_{f2,i}$	Hauptachsen der Ellipse einer Faser i im Querschnitt
d_S	Durchmesser der Stahlbewehrung
$d\mathbf{x}, d\mathbf{X}$	Linienelemente
$\mathbf{d}_{x,y}$	Parameter in der CPML-Implementierung
f	Frequenz, allgemeine Funktion
\hat{f}	Feldgröße
$\hat{\mathbf{f}}$	Feldgrößenvektor
f/f_{ck}	Belastungsniveau bezogen auf die Druckfestigkeit
f_{ck}	Betondruckfestigkeit
$f_{ck,Würfel}$	Würfeldruckfestigkeit
f_{ct}	Betonzugfestigkeit
f_{Sig}	Signalfrequenz, Erregungsfrequenz
f_x, f_x^+, f_x^-	unterschiedliche Differenzenquotienten
$\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$	Flussfunktionen im kartesischen Koordinatensystem
$\mathbf{g}(x, y, z, t)$	3-D Verschiebungsfeld infolge vertikaler sprunghafter Anregung
$\mathbf{h}(x, y, t)$	2-D Verschiebungsfeld infolge vertikaler Impulsanregung
i	imaginäre Einheit
i, j, k	Zählindex
k_L, k_T	longitudinale und transversale Wellenzahl
\bar{k}_L	komplexe longitudinale Wellenzahl im viskoelastischen Fall
$\mathbf{k}_{x,y}$	Parameter in der CPML-Implementierung
l, m, n	MURNAGHAN-Konstanten
l_b	Verbundlänge
l_x, l_y, l_z	Längenabmessung in x -, y - und z -Richtung
m_c	Steigung der Ausgleichsgeraden

n	Zählindex
n_1, n_2, n_3	Exponent in der CPML-Implementierung
\mathbf{n}, n_j	Normaleneinheitsvektor
n_N	Exponent im NAZAROV-Modell
$p(F)$	Regressionspolynom in Abhängigkeit der Kraft F
$p_{0,1,2,\dots}$	Koeffizienten der polynomialen Regression
\mathbf{q}	Zustandsvektor
q	Zustandsgröße
\hat{q}	Näherungslösung der Zustandsgröße
r	Radius im sphärischen Koordinatensystem
s	Schlupf bzw. Relativverschiebung
$\mathbf{s}_{x,y}$	Parameter in der CPML-Implementierung
t	Zeit
\bar{t}	Zeitpunkt zur Momentankonfiguration
t_0, t_1	Laufzeit zweier Ultraschallsignale
t_B	Dicke der geschädigten Verbundzone im Stahlbeton
t_i	Spannungsvektor
\bar{t}_i	natürliche Randbedingungen
t_R	Rechenzeit
$\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$	Verschiebungs-, Geschwindigkeits-, und Beschleunigungsvektor
$\mathbf{u}(x, y, t)$	2-D zeitabhängiges Verschiebungsfeld
$\mathbf{u}(x, y, z, t)$	3-D zeitabhängiges Verschiebungsfeld
$\dot{\mathbf{u}}(x, y, t)$	2-D zeitabhängiges Geschwindigkeitsfeld
$\dot{\mathbf{u}}(x, y, z, t)$	3-D zeitabhängiges Geschwindigkeitsfeld
$ \dot{\mathbf{u}} $	2-D bzw. 3-D Feld der resultierenden Geschwindigkeitsbeträge
\tilde{u}	allgemeine Verschiebung im 1-D Fall
u_1, u_2, u_3	Verschiebungen im kartesischen Koordinatensystem
u, v, w	

u_0, u_1	linearer und nichtlinearer Verschiebungsanteil einer Welle
$\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3$ $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$	Geschwindigkeiten im kartesischen Koordinatensystem
$\ddot{u}, \ddot{v}, \ddot{w}$	Beschleunigungen im kartesischen Koordinatensystem
\bar{u}_i	wesentliche Randbedingungen
$u_{,x}, u_{,y}, u_{,z}$ $v_{,x}, v_{,y}, v_{,z}$ $w_{,x}, w_{,y}, w_{,z}$	1. Ableitung der Verschiebungen in x -, y - und z -Richtung
$u_{,xx}$	2. Ableitung der Verschiebung u in x -Richtung
$\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_T$	longitudinales und transversales Wellenfeld
u_r	longitudinale Wellenmode des Wellenstrefufeldes
u_φ, u_θ	transversale Wellenmoden des Wellenstrefufeldes
v	Standardabweichung
v_B	Volumenanteil des Betons
v_{St}	Volumenanteil des Stahls
\mathbf{x}	Ortsvektor in der Momentankonfiguration
x_1, x_2, x_3 x, y, z	Koordinaten eines kartesischen Koordinatensystems

Griechische Großbuchstaben

\mathcal{B}	elastischer Körper
$\Delta, \Delta x, \Delta y, \Delta z$	Schrittweite des Berechnungsgitters in x -, y - und z -Richtung
Δc	absolute Geschwindigkeitsänderung
$\Delta c_L / c_{L,0}$	relative Änderung der Longitudinalwellengeschwindigkeit
$\Delta c_{L,x} / c_{L,x}^0$	relative Änderung der Longitudinalwellengeschwindigkeit in x -Richtung
Δ_{\min}	minimale Schrittweite des Berechnungsgitters

$\Delta c_{T,\max}/c_{T,0}$	max. relative Änderung der Transversalwellengeschwindigkeit
$\Delta c_{T,x,y}/c_{T,x,y}^0$	relative Geschwindigkeitsänderung einer Transversalwelle in x -Richtung mit Partikelbewegung in y -Richtung
$\Delta c_{T,x,z}/c_{T,x,z}^0$	relative Geschwindigkeitsänderung einer Transversalwelle in x -Richtung mit Partikelbewegung in z -Richtung
$\Delta l_x, \Delta l_y$	CPML-Schichtdicke in x - bzw. y -Richtung
Δt	Laufzeitdifferenz, Zeitschritt
$\Delta \varphi$	Phasendifferenz
Γ	Rand eines Gebietes
Ω	physikalisches Gebiet, Berechnungsgebiet
Ω_j	Teilgebiet bei der numerischen Diskretisierung
Ω_0	Gebiet der Referenzkonfiguration

Griechische Kleinbuchstaben

α	hysteretischer Nichtlinearitätsparameter, Parameter zur Transformation des Berechnungsgitters
α_0	hysteretischer Nichtlinearitätsparameter im ungeschädigten Zustand
α'	relativer akustischer hysteretischer Nichtlinearitätsparameter
$\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$	unterschiedliche relative akustische Nichtlinearitätsparameter (hysteretisch nichtlinear)
α'_{ref}	relativer akustischer Nichtlinearitätsparameter (hysteretisch nichtlinear) ohne Dämpfungseinfluss
α_{D}	akustischer Dämpfungsparameter
$\alpha_{\text{D,L}}, \alpha_{\text{D,T}}$	longitudinaler/ transversaler akustischer Dämpfungsparameter
$\alpha_{\text{D,L,1}}$	longitudinaler Dämpfungsparameter der Fundamentalamplitude
$\alpha_{\text{D,L,2}}$	longitudinaler Dämpfungsparameter der 2. Harmonischen
$\alpha_{\text{D,L,3}}$	longitudinaler Dämpfungsparameter der 3. Harmonischen

$\alpha'_{D,L}$	relative Änderung des longitudinalen akustischen Dämpfungsparameters
$\alpha_N, \beta_{N,1}, \beta_{N,2}$	Hystereseparameter im NAZAROV-Modell
β	Nichtlinearitätsparameter (quadratisch nichtlinear)
β_0	Nichtlinearitätsparameter (quadratisch nichtlinear) im ungeschädigten Zustand
β'	relativer akustischer Nichtlinearitätsparameter (quadratisch nichtlinear)
$\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$	unterschiedliche relative akustische Nichtlinearitätsparameter (quadratisch nichtlinear)
β'_{ref}	relativer akustischer Nichtlinearitätsparameter (quadratisch nichtlinear) ohne Dämpfungseinfluss
γ	Nichtlinearitätsparameter (kubisch nichtlinear)
γ_0	Nichtlinearitätsparameter (kubisch nichtlinear) im ungeschädigten Zustand
γ'	relativer akustischer Nichtlinearitätsparameter (kubisch nichtlinear)
γ_{1-4}	Hystereseparameter im NAZAROV-Modell
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Schubverzerrungen im kartesischen Koordinatensystem
$\dot{\gamma}_{xy}, \dot{\gamma}_{xz}, \dot{\gamma}_{yz}$	Schubverzerrungsraten im kartesischen Koordinatensystem
δ_{L_2}	relativer Fehler nach der L_2 -Norm
$\boldsymbol{\varepsilon}$	GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor
ε_{ij}	Komponenten des GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensors
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$	GREEN-LAGRANGE-Verzerrungsratentensor
$\dot{\varepsilon}_{ij}$	Komponenten des GREEN-LAGRANGE-Verzerrungsratentensors
$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Verzerrungsvektor des KELVIN-Eigensystems
$\boldsymbol{\varepsilon}^K$	Verzerrungsvektor in KELVIN-Notation
ε_0	Dehnung im vergangenen Belastungsschritt
ε^*	Hystereseparameter im DUHEM-Modell
ε_m	maximale Dehnung im NAZAROV-Modell

$\varepsilon_{m+}, \varepsilon_{m-}$	maximale/minimale Dehnung im NAZAROV-Modell
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Normaldehnungen im kartesischen Koordinatensystem
$\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y, \dot{\varepsilon}_z$	Normaldehnraten im kartesischen Koordinatensystem
$\varepsilon_{x,\sigma_N}, \varepsilon_{y,\sigma_N}, \varepsilon_{z,\sigma_N}$	Normaldehnungen infolge der einachsigen Zugbeanspruchung σ_N
η	dynamische Viskosität
$\eta_{f,i}$	Faserorientierungsbeiwert der Faser i
η_S	Faserorientierungsbeiwert des Gesamtquerschnittes
η_V	volumetrischer Faserorientierungsbeiwert
θ	Polarwinkel im sphärischen Koordinatensystem, Rotationswinkel
θ_{\max}	Rotationswinkel bei maximaler Geschwindigkeitsänderung
θ_{90°	Rotationswinkel 90° zu θ_{\max}
λ	1. LAMÉ-Konstante, Eigenwerte, Wellenlänge
μ	2. LAMÉ-Konstante, Schubmodul
$\bar{\lambda}, \bar{\mu}$	dynamische Viskositäten im KELVIN-VOIGT-Modell
λ_L, λ_T	longitudinale und transversale Wellenlänge
ν	Querkontraktionszahl
ξ_i	GAUSS-LOBATTO-Punkte
$\bar{\xi}_i$	GAUSS-Punkte
ξ, η	GAUSS-LOBATTO/GAUSS-Punkte auf einem 2-D Einheitsgebiet
π	Kreiszahl
ρ_0	Massendichte im unbelasteten Zustand
ρ_B	Massendichte des Betons
ρ_f	Fasergehalt
ρ_{ges}	Gesamtmassendichte
ρ_{St}	Massendichte des Stahls
σ	CAUCHYScher Spannungstensor
$\hat{\sigma}$	Spannungsvektor des KELVIN-Eigensystems
σ^K	Spannungsvektor in KELVIN-Notation

$\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3,$ $\hat{\sigma}_4, \hat{\sigma}_5, \hat{\sigma}_6$	Spannungskomponenten des KELVIN-Eigensystems
σ_N	einachsige Zug- bzw. Druckbeanspruchung
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normalspannungen im kartesischen Koordinatensystem
τ	Zeitvariable, Zeitverschiebung
τ_b	Verbundspannung
$\tau_{b,\max}$	maximale Verbundspannung
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Schubspannungen im kartesischen Koordinatensystem
φ	Azimutwinkel im sphärischen Koordinatensystem
φ_0, φ_1	Phasenwinkel zweier Ultraschallsignale
Ψ_{A-G}	Hilfsvariablen in der CPML-Implementierung
ψ	Transformationsvariable
ω	Kreisfrequenz, Transformationsvariable

Mathematische Notationen

∇	Nabla-Operator
$\delta(\cdot)$	DIRAC-Delta-Funktion
δ_{ij}	KRONECKER-Delta
\in	Element aus einer Menge
$H(\cdot)$	HEAVISIDE-Funktion
$\mathbf{J}(\cdot)$	JACOBI-Matrix
$\text{rect}(\cdot)$	Rechteckfunktion
$\rho(\cdot)$	Spektralradius
$\text{sign}(\cdot)$	Vorzeichenfunktion, Signumfunktion
$*$	mathematische Faltung
\emptyset	arithmetischer Mittelwert
$ \cdot , \ \cdot\ $	EUKLIDISCHE Norm

Abkürzungen

ARWP	Anfangs-Randwertproblem
CFL	COURANT-FRIEDRICHS-LEWY-Zahl
CPML	Convolutional Perfectly Matched Layer
CPS	CHEBYSHEV-Pseudospektral
CPU	Central Processing Unit (Hauptprozessor)
CUDA	Compute Unified Device Architecture
FD	Finite-Differenzen
FFT	Fast Fourier Transform (schnelle FOURIER-Transformation)
FV	Finite-Volumen
GPU	Graphics Processing Unit (Grafikprozessor)
HPC	High Performance Concrete
ITZ	Interfacial Transition Zone (Verbundzone)
KT	KURGANOV-TADMOR
NL	nichtlinear
NLP	Nichtlinearitätsparameter
OPC	Ordinary Performance Concrete
PDG	partielle Differentialgleichung
PML	Perfectly Matched Layer
RWP	Randwertproblem
TVD	Total Variation Diminishing
UHPC	Ultra-High Performance Concrete
UHPFRC	Ultra-High Performance Fibre Reinforced Concrete

1 Einleitung

1.1 Motivation und Ziele

Aufgrund der fortschreitenden Entwicklung neuartiger und optimierter Konstruktionswerkstoffe, entsteht hieraus sogleich die Forderung nach einer sinnvollen Charakterisierung dieser Materialien vor dem werkstofftechnischen Hintergrund. Im Bauwesen konnten in den letzten Jahrzehnten Hochleistungsbetone entwickelt werden, die bei hohen Druckfestigkeiten und optimierten Eigenschaften im physikalischen und chemischen Verhalten gleichzeitig die Anforderungen für baupraktische Anwendungen erfüllen [8, 28, 53, 65, 109]. Die Kenntnis über die genauen mikromechanischen Vorgänge bei quasistatischer Beanspruchung sowie die Beurteilung von Schädigungsprozessen in diesen Materialien sind hierbei von entscheidender Bedeutung, um für zukünftige Anwendungen einen sicheren und optimalen Einsatz gewährleisten zu können. Weiterhin gewinnt infolge zunehmender Schadensfälle an Bauwerken und den damit steigenden Investitionskosten zur Sanierung bzw. Instandhaltung die zerstörungsfreie Zustandsüberwachung von Beton- und Stahlbetonkonstruktionen an Bedeutung. Der Grundgedanke hierbei ist, möglichst frühzeitig versagensrelevante bzw. die Gebrauchstauglichkeit und die Dauerhaftigkeit einschränkende Schäden zu erkennen und geeignete Erüchtigungsmaßnahmen zu treffen.

Neben anderen zerstörungsfreien Prüfmethoden ist im Ingenieurwesen insbesondere der Einsatz elastischer Ultraschallwellen zur Material- und Schädigungscharakterisierung weit verbreitet. Ein wesentlicher Vorteil der ultraschallbasierten Prüfverfahren liegt dabei unter anderem in der hohen Flexibilität und Robustheit dieser Verfahren sowie in der direkten Beziehung der maßgebenden Ultraschallparameter zu den mechanischen bzw. elastischen Eigenschaften des zu untersuchenden Materials. Heutzutage stehen im Ingenieurwesen unterschiedliche Ultraschallverfahren zur Verfügung. Der Großteil dieser Verfahren ermöglicht dabei die Visualisierung und Detektion sogenannter makroskopischer Inhomogenitäten, Schäden oder Fehler in einem Werkstoff. Im Bauwesen ist dabei insbesondere die Lokalisierung von Kiesnestern, Bewehrungseinlagen und Rissen von zentraler Bedeutung [38, 139]. Die hierfür eingesetzten Ultraschallverfahren, wie das Impakt-Echo-Verfahren [38], die Laufzeitmessung [9, 54, 139] oder die Dämpfungsmessung [160, 165, 196], basieren meist auf einer linearen Annahme der zugrundeliegenden Werkstoffeigenschaften und sind hinsichtlich des Auflösungsvermögens von Materialdefekten an die aus der Prüffrequenz resultierende Wellenlänge gebunden. Somit sind für die praktischen Anwendungen physikalische Grenzen bezüglich der Detektion

von Mikroschädigungen gesetzt. Neben diesen sogenannten „linearen Ultraschallverfahren“ existieren zahlreiche „nichtlineare Ultraschallverfahren“ [142], welche sich auf die nichtlinearen Eigenschaften eines Materials beziehen und ein Auflösungsvermögen von Materialveränderungen deutlich unterhalb der Wellenlänge des eingesetzten Ultraschallsignals ermöglichen. Somit sind diese nichtlinearen Ultraschallverfahren weitaus empfindlicher bezüglich frühzeitiger Schädigung (Mikrorissbildung im Beton) als vergleichbare lineare Ultraschallverfahren und stellen hiermit ein vielversprechendes Prüfverfahren zur Materialcharakterisierung und Schädigungsanalyse dar [188, 189, 225].

Zu den zentralen nichtlinearen Ultraschallverfahren dieser Arbeit zählen dabei die Frequenzanalyse der höherharmonischen Ultraschallamplituden und die akustoelastische Ultraschallprüfung.

Für Beton wurde die Frequenzanalyse der höherharmonischen Ultraschallamplituden bisher insbesondere zur Beurteilung des Schädigungsprozesses während statischer Beanspruchung verwendet [176, 187-189, 225]. In [188, 189] wurden dabei lineare und nichtlineare Ultraschalluntersuchungen an normalfesten Betonproben unter zunehmender einachsiger Druckbeanspruchung durchgeführt. Dabei zeigte sich, dass die Sensitivität der nichtlinearen Ultraschallparameter zum Beanspruchungsniveau (Schädigungszustand im Beton) deutlich höher ist als die der linearen Ultraschallparameter (Laufzeit-, und Dämpfungänderung). Weiterhin konnte hierbei festgestellt werden, dass das Maß der gemessenen materiellen Nichtlinearität durch den entsprechenden Wasser-Zement-Wert (w/z-Wert) des Betons und damit durch die Druckfestigkeit beeinflusst wird. Zudem konnte in [45] gezeigt werden, dass mittels der nichtlinearen Ultraschalltechnik die korrosionsbedingte Schädigung in stahlbewehrtem Beton beurteilt werden kann. Neben der klassischen Methode unter Verwendung longitudinaler Ultraschallwellen wurden in den letzten Jahren insbesondere auch nichtlineare Ultraschallverfahren unter Einsatz von RAYLEIGH-Wellen zur Schädigungsbeurteilung erprobt. Hiermit konnte die Schädigungsentwicklung infolge Kriechen [106], thermischer Beanspruchung [105], Karbonatisierung [104] und Ermüdung [106] in Betonstrukturen erfolgreich untersucht werden. In einer aktuellen Studie [228] wurde unter anderem eine vollständig luftgekoppelte nichtlineare Ultraschallmethode zur Beurteilung des Risswachstums im Beton vorgestellt [42]. Des Weiteren lässt sich die höherharmonische Frequenzanalyse unter Verwendung eines monochromatischen Signals auch auf eine Anregung mit unterschiedlichen Frequenzen und Wellenarten übertragen. Diese Art der nichtlinearen Ultraschalltechnik wird häufig auch als „nichtlineares Wellenmischen“ (engl.: *nonlinear wave-mixing*) bezeichnet [101, 133]. Dabei werden die resultierenden Summen- und Differenzfrequenzen zweier interagierender Ultraschallsignale unterschiedlicher Frequen-

zen untersucht. Das nichtlineare Wellenmischen ist dabei an bestimmte Interaktionsbedingungen zwischen den Ultraschallwellen gebunden. Unter anderem konnte gezeigt werden, dass mittels des nichtlinearen Wellenmischens lokalisierte Schädigungen detektiert werden können [101, 134, 201].

Die in der Literatur berichteten Forschungsarbeiten und Studien zeigen, dass die nichtlineare Ultraschalluntersuchung der höherharmonischen Amplituden bzw. das nichtlineare Wellenmischen geeignete Methoden zur frühzeitigen Schädigungsbeurteilung und Materialcharakterisierung sind und die Sensitivität dieser Methoden um ein Vielfaches höher liegt als bei den konventionellen linearen Ultraschallmethoden. Aufgrund des komplexen Materialverhaltens und der heterogenen Gefügestruktur von Beton stellen sich jedoch grundsätzliche Fragen mit Blick auf die wesentlichen Schädigungsmechanismen und deren Einflüsse auf das nichtlineare Materialverhalten. Die Hauptschwierigkeiten bzw. Herausforderungen bei der Anwendung der nichtlinearen Ultraschalltechnik zur Schädigungsbeurteilung im Beton sind dabei die starken Einflüsse der akustischen Dämpfung und Streuung auf die nichtlinearen akustischen Parameter. Weiterhin erschweren Nichtlinearitäten aus der Ultraschallmesstechnik und dem Kontakt selbst, sogenannte Systemnichtlinearitäten, die Auswertung der nichtlinearen Materialeigenschaften.

Die akustoelastische Ultraschallprüfung eignet sich unter anderem sehr gut zur absoluten Messung der nichtlinearen Materialparameter und damit zur detaillierten Materialcharakterisierung. Für Beton wurden in der Vergangenheit bereits zahlreiche akustoelastische Versuche zur Bestimmung der nichtlinearen Materialeigenschaften durchgeführt [40, 125, 132, 162, 166, 191, 195, 224]. Hierbei wurde insbesondere nachgewiesen, dass die gemessenen nichtlinearen Materialparameter von Beton deutlich höhere Werte aufweisen als die von homogenen Werkstoffen, wie Stahl. Weiterhin konnte eine starke Änderung der nichtlinearen Materialparameter mit zunehmender Schädigungsevolution beobachtet werden. Neben der klassischen Messmethodik unter Auswertung der Kopfwelle des Ultraschallsignals wurden auch neuartige Methoden zur Bestimmung der Geschwindigkeitsänderung, wie die „Coda-Wellen-Interferometrie (CWI)“, verwendet [80, 81, 137, 184]. Bei diesem Verfahren werden mittels geeigneter Korrelationsverfahren die Coda-Wellen eines Ultraschallsignals, welche nach mehrfacher Reflexion und Streuung im Beton am Empfängerprüfkopf ankommen, untersucht. Diese Vorgehensweise eignet sich insbesondere für stark heterogene Materialien und besitzt aufgrund der Tatsache, dass die analysierten Coda-Wellen bereits einen langen Weg durch das zu prüfende Material zurückgelegt haben, ein hohes Auflösungsvermögen auch bei sehr kleinen Laufzeitänderungen. Weiterhin wurden in den letzten Jahren die sogenannten

dynamo-akustoelastischen Versuche (DAE-Versuche) durchgeführt [171, 192]. Hierbei wird die Änderung der Wellengeschwindigkeit in Abhängigkeit eines dynamisch veränderlichen Beanspruchungsfeldes gemessen. Die DAE-Versuche bieten dabei die Möglichkeit eine Vielzahl von nichtlinearen und dehnratenabhängigen Eigenschaften und Effekten zu analysieren, welche in einem „klassischen“ akustoelastischen Versuch nicht auflösbar bzw. detektierbar sind. Somit können insbesondere hysteretische Effekte und Änderungen im nichtlinearen Materialverhalten detailliert untersucht werden.

Die bisher durchgeführten nichtlinearen Ultraschallexperimente zeigen das große Potential und die Vielfältigkeit dieser Verfahren hinsichtlich einer frühzeitigen Schädigungsbeurteilung und Materialcharakterisierung von Beton auf. Gleichzeitig ergeben sich bei der Anwendung der nichtlinearen Ultraschallverfahren auf komplexe und heterogene Materialien wie Beton aber auch zahlreiche ungeklärte Zusammenhänge. Diese beziehen sich insbesondere auf die wesentlichen nichtlinearen Materialeigenschaften und die mikrostrukturellen Schädigungsvorgänge im Beton sowie deren Einflüsse auf die nichtlinearen Ultraschallparameter. Daneben ist die Lokalisierung von Schädigung und die Charakterisierung der Schädigungsart mittels nichtlinearer Ultraschallverfahren ein Kernpunkt aktueller Forschungsarbeiten. Um einen Beitrag zur aktuellen Forschung im Bereich der nichtlinearen Ultraschalltechnik zu leisten und um das Einsatzpotential der linearen und nichtlinearen Ultraschallverfahren zur Materialcharakterisierung und Schädigungsbeurteilung im Beton zu beurteilen, sollen in dieser Arbeit zunächst realitätsnahe zweidimensionale (2-D) und dreidimensionale (3-D) nichtlineare Wellenausbreitungsprobleme numerisch simuliert werden und anschließend geeignete lineare und nichtlineare Ultraschallversuche an Hochleistungsbetonen experimentell durchgeführt werden.

Der numerischen Simulation kommt dabei insbesondere bei der Untersuchung der wesentlichen Effekte und Zusammenhänge der nichtlinearen Wellenausbreitung im Beton eine große Bedeutung zu, da hier für realitätsnahe 2-D bzw. 3-D nichtlineare Wellenausbreitungsprobleme in aller Regel keine analytischen Lösungen bereitstehen.

Die 2-D und 3-D nichtlineare Wellenausbreitung in Werkstoffen (Festkörpern) wurde bisher nur in vereinzelten Studien numerisch untersucht. In [119, 198] wurde dabei die 2-D Wellenausbreitung in einer quadratisch nichtlinear-elastischen Halbebene mittels einem speziellen Finite-Volumen-Verfahren (FV-Verfahren), dem sogenannten KURGANOV-TADMOR-Schema (KT-Schema), numerisch simuliert. Dieses Verfahren wurde unter anderem auch in [134, 198] verwendet, um das nichtlineare Wellenmischen in einem quadratisch nichtlinear-elastischen 2-D Gebiet zu untersuchen. Des Weiteren wurde das KT-Schema auch für eine numerische Studie zur eindimensionalen (1-D)

Wellenausbreitung in einem hysteretisch nichtlinearen Material verwendet. Hierbei konnte gezeigt werden, dass dieses Verfahren auch zur Simulation stark nichtlinearer Probleme unter Entstehung von Schockwellen gut geeignet ist.

Weiterhin wurde die Finite-Elemente-Methode (FEM) in [43, 55, 131] zur numerischen Untersuchung des nichtlinearen Wellenmischens von LAMB-Wellen in einem quadratisch nichtlinear-elastischen Festkörper eingesetzt. Hierbei wurden unter anderem die kommerziellen FE-Programme COMSOL-Multiphysics und ABAQUS verwendet. Auch zur Simulation der 2-D nichtlinearen Wellenausbreitung in einem durch Mikrorisse geschädigten Festkörper wurde die FE-Software ABAQUS eingesetzt. Weiterhin wurden mittels der FEM die Wellenausbreitungen in einem hysteretisch nichtlinearen Festkörper numerisch simuliert [13, 44, 235]. Hierbei wurden die hysteretisch nichtlinearen Materialeigenschaften durch die Verwendung des sogenannten PREISACH-MAYERGOYZ-Raums [168] berücksichtigt und dabei neuartige nichtlineare Ultraschallmethoden zur Lokalisierung einer Schädigung numerisch untersucht.

Zusätzlich wurde in [23] auch eine diskontinuierliche GALERKIN-FEM (DG-FEM) zur numerischen Simulation der Wellenausbreitung in einem nichtlinear hyperelastischen Festkörper entwickelt, um dabei die Vorteile der FEM hinsichtlich der geometrischen Flexibilität und die der FV-Verfahren hinsichtlich der parallelen Berechnungsstruktur in einem numerischen Verfahren zu vereinen.

Neben den bereits erwähnten numerischen Verfahren wurden insbesondere die Finiten-Differenzen-Verfahren (FD-Verfahren) zur Simulation der nichtlinearen Wellenausbreitung eingesetzt. Hierbei wurden in der Regel gestaffelte [219] und nicht-gestaffelte FD-Verfahren 2. Ordnung [113, 143] verwendet.

Schließlich wurde auch die sogenannte FOURIER-Pseudospektralmethode [68, 115-117] zur numerischen Simulation von nichtlinearen Wellenausbreitungsproblemen erprobt [22, 78, 227]. Diese kann vereinfacht als FD-Verfahren höchster Ordnung betrachtet werden und ist üblicherweise auf die Anwendung periodischer Probleme begrenzt.

Die bisher durchgeführten numerischen Untersuchungen zur nichtlinearen Wellenausbreitung in Festkörpern zeigen, dass generell alle eingesetzten numerischen Verfahren bei moderater materieller Nichtlinearität anwendbar und akkurat sind. Bei hohen Nichtlinearitäten führt jedoch das Vorhandensein von Schockwellen in der Lösung zu numerischen Stabilitätsproblemen infolge des sogenannten RUNGE-Phänomens [213], welches zu unphysikalischen Schwingungen an den Diskontinuitäten führt. In diesem Fall können nur spezielle Verfahren, wie das KT-Schema eingesetzt werden. Weiterhin kann festgestellt werden, dass die numerischen Verfahren niedriger Ordnung (z. B. die

FD-Verfahren 2. Ordnung) eine hohe Knotenanzahl pro Wellenlänge benötigen, um das Wellenausbreitungsproblem richtig wiederzugeben. Somit erhöht sich hier insbesondere für 2-D bzw. 3-D Probleme der Speicherplatzbedarf und die Rechenzeit erheblich. Dagegen bieten die sogenannten pseudospektralen Methoden den großen Vorteil der spektralen Konvergenz, die wiederum zu einer hohen Genauigkeit bei geringer Knotenanzahl pro Wellenlänge führt [49, 71]. Dieser Vorteil der pseudospektralen Methoden wirkt sich dabei insbesondere auf die numerische Untersuchung der wesentlichen akustischen Effekte bei der nichtlinearen Wellenausbreitung aus, da hier in der Regel sehr kleine nichtlineare Phänomene, wie die Entstehung der Höherharmonischen, analysiert werden.

Zur Wahl eines geeigneten numerischen Verfahrens für die Simulation der nichtlinearen 2-D und 3-D Wellenausbreitungsprobleme im Beton, sollen in dieser Arbeit neben dem KT-Schema [120] und den gestaffelten FD-Verfahren [66, 219] auch die sogenannten CHEBYSHEV-Pseudospektralen-Kollokationsmethoden (CPS-Methoden) [169, 205, 206] implementiert und untersucht werden. Dabei soll insbesondere auf Basis der klassischen CPS-Methode eine modifizierte (gestaffelte) CPS-Methode entwickelt und erprobt werden, welche die Vorteile der spektralen Methoden mit denen der gestaffelten FD-Verfahren verbinden soll.

Es ergeben sich also die folgenden Hauptziele für den numerischen Teil dieser Arbeit:

- Implementierung ausgewählter numerischer Verfahren zur Simulation der nichtlinearen Wellenausbreitung in Festkörpern.
- Vergleich und Gegenüberstellung der numerischen Verfahren hinsichtlich der Rechengenauigkeit, der Rechenzeit und der Anwendbarkeit komplexer nichtlinearer Materialgesetze.
- Auswahl eines geeigneten numerischen Verfahrens auf Basis dieser Voruntersuchungen.
- Numerische Untersuchung zu den Einflüssen der akustischen Dämpfung und lokalisierter Schädigung auf die wesentlichen Merkmale der nichtlinearen Wellenausbreitung.

Nachfolgend werden im experimentellen Teil dieser Arbeit lineare und nichtlineare Ultraschallmethoden zur Materialcharakterisierung und Schädigungsbeurteilung in Hochleistungsbetonen eingesetzt. Dabei werden die wesentlichen Erkenntnisse der numerischen Untersuchungen berücksichtigt und die folgenden Hauptziele aufgestellt:

- Bestimmung der linearen und nichtlinearen Materialeigenschaften von hochfestem und ultrahochfestem Beton mittels Ultraschalls.

- Materialcharakterisierung von hochfestem und ultrahochfestem Beton durch Einordnung der Ultraschallergebnisse in den mikrostrukturellen bzw. werkstofftechnischen Hintergrund der Betone.
- Bewertung des Einsatzpotentials linearer und nichtlinearer Ultraschalltechnik zur Schädigungsbeurteilung von mechanisch beanspruchten unbewehrten und stahlbewehrten Hochleistungsbetonen.
- Gegenüberstellung der Sensitivität linearer und nichtlinearer Ultraschalltechnik zur frühzeitigen Materialschädigung und Untersuchung des Einsatzpotentials dieser Verfahren zur Beschreibung verschiedener Schädigungsstadien in Hochleistungsbetonen.

1.2 Gliederung der Arbeit

Nach dieser Einleitung werden im **Kapitel 2** zunächst die für diese Arbeit wesentlichen elastodynamischen Grundgleichungen hergeleitet. Diese umfassen die kinematischen Grundgleichungen zur Beschreibung der Beziehungen zwischen den Verzerrungsgrößen und Verschiebungen, die konstitutiven Grundgleichungen zur Beschreibung des linearen und nichtlinearen Materialverhaltens und die entsprechenden Bewegungsgleichungen eines Festkörpers. Die behandelten nichtlinearen Materialgesetze beziehen sich dabei auf ein 3-D hyperelastisches Materialverhalten sowie auf ausgewählte skalare Hystereseamodelle aus der Literatur. Nach Aufstellung der zugehörigen Bewegungsgleichungen werden die Lösungen für die lineare und nichtlineare 1-D Wellenausbreitung unter Berücksichtigung unterschiedlicher Materialmodelle hergeleitet.

Das **Kapitel 3** dient im ersten Abschnitt der Beschreibung der numerischen Lösungsmethoden. Dabei werden für einige ausgewählte numerische Methoden die Herleitungen bzw. Lösungsalgorithmen erläutert. Im Anschluss finden eine Verifikation und ein Vergleich der in dieser Arbeit implementierten numerischen Methoden statt. Dabei liegt der Fokus dieses Kapitelabschnittes auf der Beschreibung der speziell für die numerische Untersuchung entwickelten CHEBYSHEV-Pseudospektralen-Kollokationsmethode. Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels werden die für diese Arbeit relevanten Grundlagen der Ultraschalltechnik erläutert und ein kurzer Überblick zu den wichtigsten linearen und nichtlinearen Ultraschallverfahren gegeben. Dabei liegt der Schwerpunkt auf der Beschreibung der Messmethodik.

Die numerische Untersuchung von ausgewählten elastodynamischen Wellenausbreitungsproblemen wird im **Kapitel 4** durchgeführt. Die in diesem Kapitel untersuchten

numerischen Beispiele sind dabei so gewählt, dass hierdurch auf phänomenologischer Ebene reale Schädigungszustände im Beton nachgebildet werden können. Zentrale Punkte der anschließenden Auswertung beziehen sich dabei auf die Auswahl geeigneter akustischer Nichtlinearitätsparameter (NLP) zur Schädigungsbeurteilung unter der Berücksichtigung von Dämpfungseffekten und lokalisierter Schädigung.

Die experimentellen Ultraschallversuche werden in **Kapitel 5** vorgestellt. Diese umfassen insgesamt vier getrennt durchgeführte Ultraschallexperimente an Hochleistungsbetonen. Zunächst wird der Begriff des Hochleistungsbetons erläutert und die eingesetzte Messtechnik beschrieben. Anschließend werden die einzelnen experimentellen Versuche präsentiert. Die ersten beiden Versuche sind im Kontext einer Materialcharakterisierung von hochfestem und ultrahochfestem Beton zu verstehen. Hierbei befasst sich der erste Versuch mit der Bewertung der Stahlfaserorientierung in stahlfaserverstärktem ultrahochfestem Beton mittels linearer Ultraschalltechnik und der zweite Versuch mit der Bestimmung der elastischen Konstanten von hochfestem und ultrahochfestem Beton. In den letzten beiden experimentellen Versuchen dieses Kapitels wird eine Schädigungsbewertung von unbewehrten und stahlbewehrten Betonproben mittels linearer und nichtlinearer Ultraschalltechnik durchgeführt.

Die wesentlichen Erkenntnisse der numerischen und experimentellen Untersuchungen werden im **Kapitel 6** zusammengefasst. Weiterhin wird ein Ausblick hinsichtlich der Entwicklung neuartiger numerischer Methoden und Ultraschallverfahren auf Basis der in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse gegeben.

Im **Anhang** werden zunächst die Spannungskomponenten des 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors für einen quadratisch nichtlinear-elastischen und isotropen 3-D Festkörper angegeben. Weiterhin wird die FOURIER-Transformation als zentrale Methode zur Überführung der Zeitbereichslösungen in den Frequenzbereich kurz beschrieben. Außerdem wird ein auf dem rheologischen Grundmodell des linearen Standard-Festkörpers basierendes Dämpfungsmodell (ZENER-Modell) vorgestellt. Zuletzt werden die in dieser Arbeit zur expliziten Zeitintegration verwendeten RUNGE-KUTTA-Verfahren aufgeführt.

2 Grundlagen der Elastodynamik

Die Elastodynamik beschreibt im Wesentlichen die zeitabhängige Bewegung eines elastischen Körpers aus seiner statischen Gleichgewichtslage infolge einer einwirkenden Beanspruchung und dient als Grundlage zur Beschreibung der elastischen bzw. der akustischen Wellenausbreitung. Die charakteristischen Eigenschaften der elastischen Wellen werden dabei durch die elastodynamischen Grundgleichungen der Kinematik, des Materialgesetzes und der Bewegungsgleichungen beschrieben. Daher werden in diesem Kapitel zunächst die kinematischen und konstitutiven Grundgleichungen eines isotropen und homogenen Festkörpers angegeben. Hierbei wird insbesondere die materielle Nichtlinearität als Kernthema dieser Arbeit ausführlich behandelt. Am Ende dieses Kapitels werden die wesentlichen Merkmale der linearen und nichtlinearen Wellenausbreitung anhand von ausgewählten 1-D Problemen im unberandeten Festkörper beschrieben.

2.1 Kinematik

Unter Einwirkung von Kräften erfährt ein Festkörper Verformungen. Der Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und den zugehörigen Dehnungs- und Verzerrungsgrößen des Kontinuums wird dabei durch die Kinematik beschrieben. Hierzu wird ein kontinuierlicher materieller Körper \mathcal{B} im 3-D euklidischen Raum betrachtet, dessen Materiepunkte P sich zum Ausgangszeitpunkt $t = 0$ in der Referenzkonfiguration auf dem Gebiet Ω_0 befinden und infolge der Bewegung (Deformation) des Körpers die Momentankonfiguration ($t = \bar{t}$) auf dem Gebiet Ω einnehmen (siehe Abbildung 2.1).

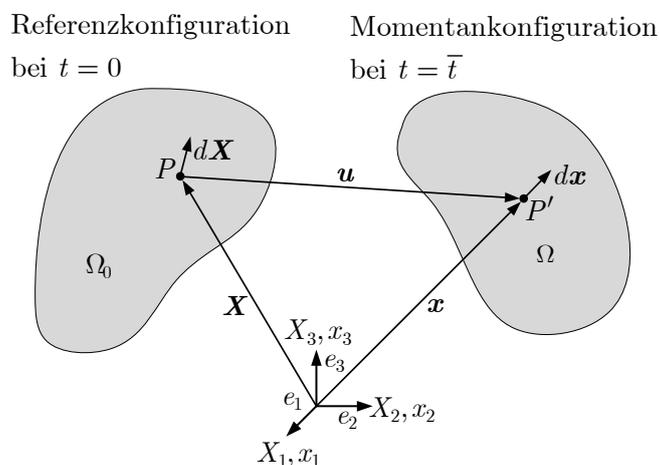


Abbildung 2.1: Verschiebungsvektor \mathbf{u} eines Körpers \mathcal{B} aus der Referenzkonfiguration zur Momentankonfiguration.

Dabei wird im kartesischen Koordinatensystem die Position der Punkte in der Referenzkonfiguration durch die materiellen Koordinaten $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]^T$ bestimmt und die Position der Punkte in der Momentankonfiguration durch die räumlichen Koordinaten $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ definiert.

Der Verschiebungsvektor \mathbf{u} des Körpers \mathcal{B} ergibt sich dabei nach der LANGRANGSchen Betrachtungsweise zu

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}. \quad (2.1)$$

Weiterhin sind die infinitesimalen Änderungen der Lage um die materiellen Punkte in der Referenzkonfiguration und der Momentankonfiguration durch die Linienelemente $d\mathbf{x}$ und $d\mathbf{X}$ definiert. Dabei sind die Linienelemente über den Deformationsgradienten \mathbf{F} verbunden

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial (\mathbf{X} + \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{1} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (2.2)$$

Der Deformationsgradient \mathbf{F} ist ein Tensor 2. Stufe und beinhaltet neben den Dehnungen und Verzerrungen auch die Starrkörperbewegungen (Rotation und Translation). Für die Elastodynamik sind ausschließlich die Dehnungen und Verzerrungen des Festkörpers von Bedeutung. Daher müssen diese zunächst aus dem Deformationsgradienten erhalten werden. Wählt man als Maß für die Dehnungen und Verzerrungen die Differenz der Quadrate der infinitesimalen Linienelemente, so ergibt sich unter Verwendung von Gleichung (2.2) der GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor zu

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}). \quad (2.3)$$

Hierbei wird die übliche Indexnotation mit $i, j, k = 1, 2, 3$ und die Ableitungsdefinition entsprechend $u_{i,j} = \partial u_i / \partial X_j$ verwendet.

Im Fall kleiner Verzerrungen können die quadratischen Anteile der Verschiebungsgradienten im Verzerrungstensor (2.3) vernachlässigt werden und man erhält den linearisierten GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor zu

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.4)$$

Des Weiteren wird die Gleichung (2.4) als geometrisch lineare Beziehung und die allgemeine Gleichung (2.3) als geometrisch nichtlineare Beziehung bezeichnet.

Unter Verwendung des zugehörigen Geschwindigkeitsvektors $\dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{u} / \partial t$ lässt sich analog zum GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor der Verzerrungsrate tensor 2. Stufe

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial X_i} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial X_j} \right) = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} + \dot{u}_{k,i} \dot{u}_{k,j}) \quad (2.5)$$

bzw. in linearisierter Form

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (2.6)$$

definieren. Verwendet man im weiteren Verlauf für die räumlichen Koordinaten, die Verschiebungen und die Geschwindigkeiten des Festkörpers die folgenden Zuordnungen

$$[X_1, X_2, X_3]^T = [x, y, z]^T, \quad [u_1, u_2, u_3]^T = [u, v, w]^T, \quad [\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3]^T = [\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}]^T, \quad (2.7)$$

so ergeben sich die zugehörigen Dehnungen und Verzerrungen in Matrizenform zu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Hierbei sind ε_x , ε_y und ε_z die Normalverzerrungen bzw. Dehnungen und γ_{xy} , γ_{yx} , γ_{xz} , γ_{zx} , γ_{yz} und γ_{zy} die Schubverzerrungen bzw. Gleitungen des Festkörpers. In gleicher Weise lassen sich die Verzerrungsraten in Matrizenform definieren.

2.2 Materialgesetze

2.2.1 Lineare Materialgesetze

Zunächst wird in diesem Abschnitt das lineare Materialverhalten eines isotropen und homogenen 3-D Festkörpers beschrieben. Dabei stehen die Spannungen des Festkörpers über konstante Materialparameter in einem linearen Zusammenhang mit den zugehörigen Verzerrungsgrößen bzw. Verzerrungsraten.

2.2.1.1 Linear-elastisches Materialverhalten

Unter der Voraussetzung eines isotropen, homogenen und linear-elastischen Materialverhaltens ergibt sich der Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Verzerrungen nach dem HOOKEschen Gesetz zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (2.9)$$

Hierbei sind λ und μ die sogenannten LAMÉ-Konstanten (elastische Konstanten 2. Ordnung) und δ_{ij} das KRONECKER-Delta. Der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ in (2.9) wird auch als CAUCHYScher Spannungstensor bezeichnet. Weiterhin lassen sich die beiden unabhängigen LAMÉ-Konstanten in den zugehörigen Elastizitätsmodul E , die Querkontraktionszahl ν und den Longitudinalmodul M überführen

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad M = \lambda + 2\mu. \quad (2.10)$$

Setzt man in der Gleichung (2.9) den linearisierten GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor (2.4) ein, so erhält man das grundlegende Materialgesetz eines geometrisch und materiell linearen isotropen 3-D Festkörpers in Matrizenform als

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

mit den Normalverzerrungen bzw. Dehnungen

$$\varepsilon_x = \partial u / \partial x, \quad \varepsilon_y = \partial v / \partial y, \quad \varepsilon_z = \partial w / \partial z \quad (2.12)$$

und den Schubverzerrungen bzw. Gleitungen

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \partial v / \partial x + \partial u / \partial y, \\ \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \partial w / \partial x + \partial u / \partial z, \\ \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \partial w / \partial y + \partial v / \partial z. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Weiterhin werden die Normalspannungen σ_x , σ_y und σ_z sowie die Schubspannungen τ_{xy} , τ_{xz} und τ_{yz} verwendet.

2.2.1.2 Linear-viskoelastisches Materialverhalten

Die lineare Visokoelastizität ist für die Beschreibung zahlreicher mechanischer Prozesse von einer zentralen Bedeutung. Hierbei wird das Spannungs-Dehnungsverhalten eines linear-elastischen Materials um einen viskosen verzerrungsratenabhängigen Anteil erweitert. Die beiden rheologischen Grundmodelle zur Beschreibung eines viskoelasti-

schen Materialverhaltens sind das KELVIN-VOIGT-Modell und das MAXWELL-Modell, welche aus der Parallelschaltung und der Reihenschaltung eines Feder-Elementes (HOOKEsches Element mit E) mit einem Dämpfer-Element (viskoser Anteil mit η) resultieren (siehe Abbildung 2.2). Auf Basis dieser Grundmodelle lassen sich eine Vielzahl weiterer Modelle entwickeln, um hiermit eine möglichst genaue Beschreibung des realen Materialverhaltens zu erzielen. Von besonderer Bedeutung für die Beschreibung der gedämpften Wellenausbreitung in Werkstoffen ist dabei das lineare Standardmodell der Festkörper (auch ZENER-Modell genannt). Dieses lässt sich gleichwertig entweder als Reihenschaltung eines KELVIN-VOIGT-Elements mit einem Federelement bilden oder als Parallelschaltung eines MAXWELL-Elementes mit einem Federelement (siehe Abbildung 2.2). Über die Zusammenschaltung mehrerer linearer Standard-Festkörpermodelle lässt sich das zeitabhängige Werkstoffverhalten und somit auch das viskoelastodynamische Verhalten sehr genau beschreiben.

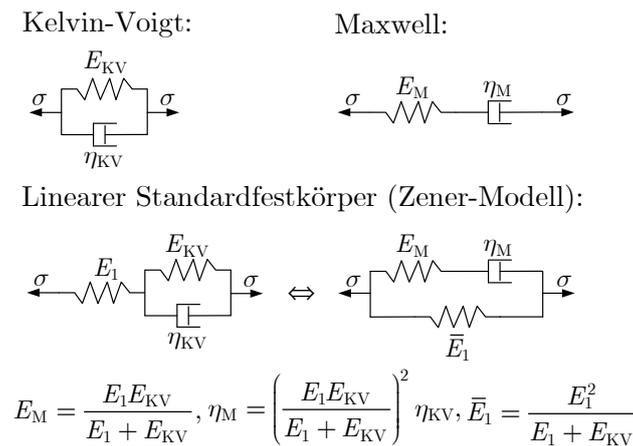


Abbildung 2.2: Rheologische Grundmodelle.

Ausgehend vom Materialgesetz (2.9) des isotropen und linear-elastischen 3-D Festkörpers lässt sich unter Verwendung des KELVIN-VOIGT-Modells der linear-viskoelastische Fall betrachten. Hierzu werden, in Anlehnung an das 1-D KELVIN-VOIGT-Modell mit

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad (2.14)$$

zusätzlich zu den linear-elastischen Konstanten λ und μ zwei weitere Konstanten $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ zur Berücksichtigung der dynamischen Viskosität η eingeführt und hiermit das folgende Materialgesetz eines isotropen und linear-viskoelastischen 3-D Festkörpers erhalten

$$\sigma = \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + \bar{\lambda} \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\bar{\mu} \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (2.15)$$

mit den linearisierten Dehnraten bzw. Dehngeschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \partial \boldsymbol{\varepsilon} / \partial t$ nach der Gleichung (2.6). Hieraus resultiert eine Matrizendarstellung ähnlich zu Gleichung (2.11) mit einer Elastizitätsmatrix (für die Verzerrungen) und einer Dämpfungsmatrix (für die Verzerrungsraten).

2.2.2 Nichtlineare Materialgesetze

Die grundlegenden Theorien zur nichtlinearen Wellenausbreitung gehen zurück auf die frühen Arbeiten von SIGNORINI [193], MURNAGHAN [151], TRUESDELL und TOUPIN [214], LANDAU und LIFSHITZ [123]. Die klassische Theorie basiert dabei auf einer nichtlinearen Betrachtung der konstitutiven und kinematischen Grundgleichungen (Hyperelastizitätstheorie). Dabei werden die Deformationen des elastischen Kontinuums nicht mehr als infinitesimal klein, sondern als endlich (geometrisch nichtlinear), angenommen. Zusätzlich wird eine nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung (materielle Nichtlinearität) vorausgesetzt. Den Ausgangspunkt zur Herleitung der maßgebenden nichtlinearen konstitutiven Gleichungen bildet dabei die Formulierung einer geeigneten elastischen Formänderungsenergiedichtefunktion. Hierbei kann die Formänderungsenergiedichte W für ein linear-elastisches Materialverhalten um elastische Anteile höherer Ordnungen erweitert werden, um beispielsweise einen quadratischen oder kubischen Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Dehnungen zu berücksichtigen. Für den klassischen quadratisch nichtlinear-elastischen Fall müssen bei der sogenannten „Fünf-Konstanten-Theorie“ neben den linear-elastischen Konstanten drei weitere nichtlinear-elastische Konstanten 3. Ordnung verwendet werden. Grundsätzlich beschreibt die Hyperelastizitätstheorie [148, 151, 172] ein reversibles und dehnratenunabhängiges nichtlinear-elastisches Materialverhalten, welches auf höhere Ordnung (vgl. [230]) erweiterbar ist. Für viele homogene und ungeschädigte Materialien kann mit einer solchen Theorie das zugrundeliegende elastische Materialverhalten ausreichend genau wiedergegeben werden. Betrachtet man jedoch stark heterogene und geschädigte Materialien, so zeigt sich hier ein sehr komplexes nichtlineares Materialverhalten, welches oftmals maßgeblich von der Dehngeschwindigkeit und der Belastungsgeschichte bzw. Vorbelastung abhängt. Daher wurden in den letzten Jahrzehnten basierend auf experimentellen Untersuchungen zusätzlich zur klassischen Nichtlinearitätstheorie mehrere (skalare), nichtlineare Materialgesetze entwickelt und vorgeschlagen [52, 85, 86, 152, 159]. Für die Beschreibung des nichtlinearen Materialverhaltens in Beton ist dabei insbesondere das, durch irreversible Reibungsvorgänge im Betongefüge hervorgerufene, hysteretisch nichtlineare Materialverhalten [82, 83, 155, 216, 232] von zentraler Bedeutung und soll

daher in dieser Arbeit neben dem hyperelastisch nichtlinearen Materialverhalten ausführlich behandelt werden.

2.2.2.1 Hyperelastisch nichtlineares Materialverhalten

Zur Beschreibung eines quadratisch nichtlinear-elastischen Materialverhaltens wird die Formänderungsenergiedichtefunktion W eines isotropen 3-D Festkörpers unter Berücksichtigung elastischer Terme bis zur 3. Ordnung als [79]

$$W = \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1^2 - 2\mu I_2 + \frac{l + 2m}{3} I_1^3 - 2m I_1 I_2 + n I_3 \quad (2.16)$$

definiert. Hierbei sind λ und μ die elastischen Konstanten 2. Ordnung und l , m und n die elastischen Konstanten 3. Ordnung (MURNAGHAN-Konstanten [151]). Die Invarianten I_1 , I_2 und I_3 des GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ (2.3) sind dabei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_z & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y \end{vmatrix}, \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Unter Verwendung des KRONECKER-Deltas δ_{ik} werden die zugehörigen Spannungen über den 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor

$$\mathbf{P} = P_{ij} = \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{kj}} \quad (2.18)$$

definiert. Sukzessives Einsetzen der Gleichungen (2.17) und (2.3) in die Formänderungsenergiedichtefunktion (2.16) und anschließendes Einsetzen in die Gleichung (2.18) liefert die im Anhang A.1 angegebenen Komponenten des 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors. Die nichtlinearen Anteile des Spannungstensors sind dabei grundsätzlich aus einem geometrisch nichtlinearen Anteil und einem physikalisch nichtlinearen Anteil zusammengesetzt. Der geometrisch nichtlineare Anteil wird dabei ausschließlich durch die linearen Materialkonstanten bestimmt und der physikalisch nichtlineare Anteil durch die zugehörigen nichtlinearen Materialkonstanten. Da in vielen Werkstoffen die nichtlinearen Materialkonstanten deutlich größere Werte annehmen als die entsprechenden linearen Parameter, ist es mit Blick auf die numerischen und experimentellen nichtlinearen Untersuchungen oftmals vertretbar, die geometrisch nichtlinearen Anteile

zu vernachlässigen. Hiermit gelangt man zur Beschreibung infinitesimaler Deformationen in einem klassischen nichtlinear-elastischen Medium und verlässt generell den Geltungsbereich endlicher Deformationen. Für diesen Sonderfall wird der 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor symmetrisch und entspricht dem CAUCHYSchen Spannungstensor (2.9). Daher lauten die Spannungskomponenten für den infinitesimalen nichtlinear-elastischen 3-D Fall (vgl. Abschnitt 2.2.1.1)

$$\begin{aligned} \sigma_x = & M\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_y + \varepsilon_z) + M_{\text{NL}}\varepsilon_x^2 + l(\varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + 2l\varepsilon_x(\varepsilon_y + \varepsilon_z) \\ & + \left(2(l - m) + n\right)\varepsilon_y\varepsilon_z + \frac{m}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2) - \frac{n}{4}\gamma_{yz}^2, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\sigma_y = \sigma_x(x \leftrightarrow y), \quad \sigma_z = \sigma_x(x \leftrightarrow z), \quad (2.20)$$

$$\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy} + m\gamma_{xy}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \frac{n}{4}(\gamma_{xz}\gamma_{yz} - 2\varepsilon_z\gamma_{xy}), \quad (2.21)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xy}(y \leftrightarrow z), \quad \tau_{yz} = \tau_{xy}(x \leftrightarrow z). \quad (2.22)$$

Dabei wurden die linearisierten Verzerrungskomponenten nach Gleichung (2.12) und Gleichung (2.13) verwendet. Zusätzlich wurden der Longitudinalmodul $M = \lambda + 2\mu$ und der „nichtlineare Longitudinalmodul“ $M_{\text{NL}} = l + 2m$ zur verkürzten Schreibweise verwendet.

2.2.2.2 Hysteretisch nichtlineares Materialverhalten

Zum grundlegenden Verständnis zeigt die Abbildung 2.3 exemplarisch die Spannungs-Dehnungs-Beziehung für den quadratisch nichtlinear-elastischen Fall und für den hysteretisch nichtlinearen Fall. Grundsätzlich beschreibt ein hysteretisch nichtlineares Materialverhalten einen pfadabhängigen und irreversiblen Prozess und unterscheidet sich somit ganz wesentlich vom vollständig reversiblen hyperelastischen Materialverhalten. Somit ist das zentrale Merkmal eines hysteretischen Materialverhaltens die hiermit verbundene Energiedissipation (Umwandlung von mechanischer Energie in Wärme). Aufgrund der starken Ausprägung dieses pfad- und verzerrungsratenabhängigen Materialverhaltens in Beton bedarf es neben den hyperelastischen Materialgesetzen zusätzlicher Hysterese Modelle zur vollständigen und möglichst realitätsnahen Beschreibung des zugrundeliegenden Materialverhaltens. Die Mehrzahl der Hysterese Modelle ist dabei nicht im Sinne eines viskoelastischen Materialverhaltens verzerrungsratenabhängig. Dies bedeutet ganz konkret, dass die Form der Hysterese nicht durch den Betrag der Verzerrungsrate selbst beeinflusst wird. In der Regel ist hierbei ausschließlich die Richtung bzw. das Vorzeichen der Verzerrungsrate von Bedeutung. Üblicherweise werden

Hysteresemodelle auch in passive und aktive Hysterese unterteilt. Dabei erlauben aktive Hysteresemodelle auch kleine Hystereselumläufe innerhalb der Haupthysteresese.

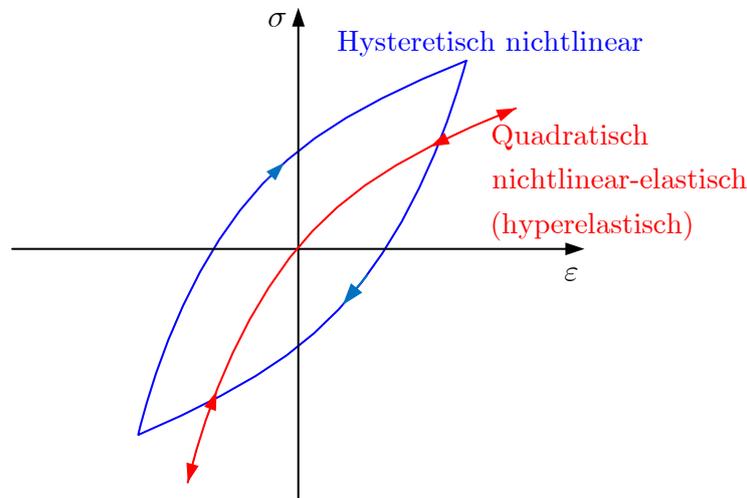


Abbildung 2.3: Spannungs-Dehnungs-Diagramm für ein hysteretisch nichtlineares und ein quadratisch nichtlinear-elastisches Materialverhalten.

Aufgrund der hohen Bedeutung der magnetischen Hysterese im Bereich der Elektrotechnik (Zusammenhang zwischen magnetischem Feld und Magnetisierung eines ferromagnetischen Materials) sind die meisten Hysteresemodelle zunächst für diesen Anwendungsbereich entwickelt worden und wurden erst später auf andere Wissenschaftsbereiche wie die Elastodynamik übertragen bzw. angewandt. Die meisten der in der Literatur verwendeten Hysteresemodelle sind dabei in skalarer Form aufgestellt. Für die elastodynamische Beschreibung aktiver Materialhysterese wurden dabei insbesondere das Duhem-Modell der Hysterese [46, 59, 93, 147] und das sogenannte Preisach-Mayergosz-Modell [145, 168, 216] verwendet. Hiermit lassen sich zahlreiche spezielle Hystereseeffekte berücksichtigen und experimentell ermittelte elastische Hysteresekurven detailliert abbilden. Zusätzlich wurden von Nazarov [152, 155, 156] analytische Beschreibungen für passive Hysterese eingeführt. Zur Erweiterung der skalaren 1-D Hysteresemodelle auf den allgemeinen 2-D bzw. 3-D Fall hat sich die sogenannte Kelvin-Dekompositionsmethode [44, 52, 78, 90, 219] in den letzten Jahren etabliert. Neben dieser Methodik wurde auch eine vollständige 3-D Berücksichtigung eines quadratisch hysteretisch nichtlinearen Materialverhaltens über eine entsprechende Definition der Formänderungsenergiedichtefunktion vorgeschlagen [84]. In dieser Arbeit wird dabei die Methodik unter Verwendung der Kelvin-Dekomposition eingesetzt, da diese eine große Freiheit und Flexibilität hinsichtlich der Implementierung komplexer Hysteresemodelle anbietet. Hierbei wird zum einen das Hysteresemodell nach Nazarov [155] und zum anderen das Duhem-Modell [147] verwendet. Im Folgenden sollen zunächst diese

beiden Modelle im konstitutiven Zusammenhang beschrieben werden und aufbauend hierauf die KELVIN-Dekompositionsmethode für den allgemeinen 3-D Fall erläutert werden.

Skalares Hysteresemodell nach NAZAROV

Die grundlegende Spannungs-Dehnungs-Beziehung wird nach NAZAROV [155] folgendermaßen definiert:

$$\sigma_x = E \left(\varepsilon - f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) \right). \quad (2.23)$$

Zur Definition der freien Funktion f werden dabei zwei Fälle unterschieden. Der erste Fall entspricht hierbei einer teilelastischen Hysterese mit

$$f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \alpha_N \varepsilon_m \varepsilon + \begin{cases} + \frac{\beta_{N,1}}{2} \varepsilon^2 - \frac{\beta_{N,1} + \beta_{N,2}}{4} \varepsilon_m^2, & \dot{\varepsilon} > 0, \\ - \frac{\beta_{N,2}}{2} \varepsilon^2 - \frac{\beta_{N,1} + \beta_{N,2}}{4} \varepsilon_m^2, & \dot{\varepsilon} < 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Hierbei sind α_N , $\beta_{N,1}$ und $\beta_{N,2}$ die hysteretischen Parameter zur Charakterisierung des nichtlinearen Materialverhaltens und ε_m die maximale Dehnung des aktuellen Hystereseumlaufs. Die Funktion f für den zweiten Fall einer rein elastischen Hysterese ist dabei folgendermaßen definiert:

$$f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \frac{1}{n_N} \begin{cases} \gamma_1 \varepsilon^{n_N}, & \varepsilon > 0 \quad \dot{\varepsilon} > 0, \\ -\gamma_2 \varepsilon^{n_N} + (\gamma_1 + \gamma_2) \varepsilon_{m+}^{n_N-1} \varepsilon, & \varepsilon > 0 \quad \dot{\varepsilon} < 0, \\ -\gamma_3 \varepsilon^{n_N}, & \varepsilon < 0 \quad \dot{\varepsilon} < 0, \\ \gamma_4 \varepsilon^{n_N} - (\gamma_3 + \gamma_4) \varepsilon_{m-}^{n_N-1} \varepsilon, & \varepsilon < 0 \quad \dot{\varepsilon} > 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Hierbei sind γ_{1-4} die hysteretischen Parameter und n_N der Exponent der Hysterese-funktion. Weiterhin sind ε_{m+} und ε_{m-} die maximale und die minimale Dehnung des aktuellen Hystereseumlaufs.

Skalares Hysteresemodell nach DUHEM

Die skalare Spannungs-Dehnungs-Beziehung für das DUHEM-Modell der Hysteresen ist wie folgt definiert [147]:

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = f(\varepsilon) + \left[\sigma(\varepsilon_0) - f(\varepsilon_0) \right] e^{\alpha \cdot s \cdot (\varepsilon_0 - \varepsilon)} + \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \left[g(\tau) - \frac{df(\tau)}{d\tau} \right] e^{\alpha \cdot s \cdot (\tau - \varepsilon)} d\tau. \quad (2.26)$$

Hierbei ist ε_0 die Dehnung im vorausgegangenen Belastungsschritt (Ausgangsdehnung) und α der sogenannte hysteretische Nichtlinearitätsparameter (NLP), welcher die

Ausprägung der Nichtlinearität angibt. Zusätzlich ist $s = \text{sign}(\dot{\varepsilon})$ die Vorzeichenfunktion, angewendet auf die Dehnrates bzw. die Dehngeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}$. Die Funktionen f und g werden nach HODGDON [93] folgendermaßen gewählt [147]:

$$f(\varepsilon) = A_{D,1} \tan(A_{D,2}\varepsilon), \quad g(\varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \left[1 - A_{D,3} e^{\frac{A_{D,4}|\varepsilon|}{\varepsilon^* - |\varepsilon|}} \right]. \quad (2.27)$$

Hierbei sind $A_{D,1}$, $A_{D,2}$, $A_{D,3}$, $A_{D,4}$, ε^* frei wählbare Parameter, welche die Eigenschaften bzw. die Form der Hysteresekurve bestimmen.

KELVIN-Dekompositionsmethode

Zur Erweiterung der zuvor beschriebenen 1-D hysteretischen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen auf den 2-D bzw. 3-D Fall wird in dieser Arbeit die KELVIN-Dekompositionsmethode verwendet. Hierbei wird für den linear-elastischen Fall zunächst der Elastizitätstensor 2. Stufe in der VOIGTschen Notation \mathbf{C}^V in die entsprechende KELVIN-Notation \mathbf{C}^K transformiert

$$\mathbf{C}^K = \mathbf{T} \mathbf{C}^V \mathbf{T}, \quad (2.28)$$

wobei die Transformationsmatrix $\mathbf{T} = \text{diag}([1, 1, 1, 2^{1/2}, 2^{1/2}, 2^{1/2}])$ verwendet wird. Die zugehörigen Spannungen und Verzerrungen in der KELVIN-Notation sind dabei folgendermaßen definiert:

$$\boldsymbol{\sigma}^K = \left[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sqrt{2}\tau_{xy}, \sqrt{2}\tau_{xz}, \sqrt{2}\tau_{yz} \right]^T, \quad (2.29)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^K = \left[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \sqrt{2}\varepsilon_{xy}, \sqrt{2}\varepsilon_{xz}, \sqrt{2}\varepsilon_{yz} \right]^T. \quad (2.30)$$

Anschließend wird das zugehörige Eigenwertproblem des KELVIN-Systems

$$\left(\mathbf{C}^K - \lambda \mathbf{E} \right) \boldsymbol{\varepsilon}^K = 0 \quad (2.31)$$

gelöst, womit das folgende linear unabhängige Eigensystem

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{C}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.32)$$

formuliert werden kann. Hierbei sind der Elastizitätstensor $\hat{\mathbf{C}}$, der Spannungsvektor $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ sowie der Verzerrungsvektor $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ des Eigensystems wie folgt definiert:

$$\hat{\mathbf{C}} = \text{diag} \left(\left[3\lambda + 2\mu, 2\mu, 2\mu, \mu, \mu, \mu \right] \right), \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\sigma}} &= \left[\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_3, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_4, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_5, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_6 \right]^T \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \frac{1}{\sqrt{6}}(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y), \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_y - \sigma_x), \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz} \right]^T,\end{aligned}\quad (2.34)$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \left[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_3, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_4, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_5, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_6 \right]^T \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), \frac{1}{\sqrt{6}}(2\varepsilon_z - \varepsilon_x - \varepsilon_y), \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_y - \varepsilon_x), \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \right]^T.\end{aligned}\quad (2.35)$$

In dem so erhaltenen konstitutiven Gleichungssystem (Eigensystem) sind die Spannungen voneinander unabhängig und „losgelöst“ vom ursprünglichen kartesischen Koordinatensystem. Somit wird bei einer Dehnung entlang einer ausgewählten Spannungsrichtung keine elastische Arbeit in den übrigen Spannungsrichtungen verrichtet (invariantes System) [219]. Daher können die skalaren hysteretisch nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen separat für jede Spannungsrichtung im Eigensystem definiert werden, z. B.:

$$\hat{\sigma}_1 = (3\lambda + 2\mu) \left[\hat{\varepsilon}_1 + f(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_1) \right]. \quad (2.36)$$

Zur Transformation der resultierenden Spannungen aus dem Eigensystem in das ursprüngliche KELVIN-System kann dann die inverse Operation zu (2.28)-(2.32) durchgeführt werden.

2.3 Bewegungsgleichungen

Nach dem 2. NEWTONschen Axiom steht die vektorielle Summe der auf einen Körper einwirkenden Kräfte im Gleichgewicht mit der zeitlichen Änderung des linearen Gesamtimpulses. Hieraus resultieren unter der Vernachlässigung von Volumenkräften und der Verwendung des CAUCHYschen Spannungstensors die grundlegenden Bewegungsgleichungen für einen 3-D Festkörper im kartesischen Koordinatensystem

$$\begin{aligned}\rho_0 \ddot{u} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}, \\ \rho_0 \ddot{v} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}, \\ \rho_0 \ddot{w} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}.\end{aligned}\quad (2.37)$$

Hierbei sind $\ddot{\mathbf{u}} = [\ddot{u}, \ddot{v}, \ddot{w}]^T$ die Partikelbeschleunigungen in den x -, y - und z -Richtungen und ρ_0 die Massendichte des undeformierten Festkörpers. Die Bewegungsgleichungen (2.37) lassen sich über die Indexnotation in kompakter Form darstellen als

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j} \Leftrightarrow \rho_0 \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j}. \quad (2.38)$$

Analog hierzu erhält man die Bewegungsgleichungen unter Verwendung des 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor zu

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial P_{ij}}{\partial X_j}. \quad (2.39)$$

2.3.1 Hyperbolische partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung

Wählt man als unbekannte Zustandsgrößen in den Bewegungsgleichungen die Verschiebungen \mathbf{u} , so ergibt sich hieraus ein Gleichungssystem aus hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen (PDG) 2. Ordnung. Dies bedeutet, dass die Verschiebungen \mathbf{u} zweimal nach der Zeit t und dem Weg \mathbf{X} (LAGRANGE-Koordinaten) abgeleitet werden. Im Folgenden werden die Bewegungsgleichungen 2. Ordnung für den linear-elastischen und den linear-viskoelastischen Fall aufgestellt.

Bewegungsgleichungen des linear-elastischen Festkörpers

Einsetzen des linear-elastischen Materialgesetzes (2.9) und des linearisierten GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensors (2.4) in die allgemeinen Bewegungsgleichungen (2.38) liefert die folgenden Bewegungsgleichungen für den linear-elastischen Festkörper in Indexnotation:

$$\rho_0 \ddot{u}_i = \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji}. \quad (2.40)$$

Bewegungsgleichungen des linear-viskoelastischen Festkörpers

In gleicher Weise ergeben sich nach Einsetzen des viskoelastischen Materialgesetzes (2.15) in die Gleichung (2.38) und unter Verwendung der linearisierten Verzerrungen und (2.4) Verzerrungsraten (2.6) die folgenden Bewegungsgleichungen für den linear-viskoelastischen Fall:

$$\rho_0 \ddot{u}_i = \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \bar{\mu} \dot{u}_{i,jj} + (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \dot{u}_{j,ji}. \quad (2.41)$$

Analog hierzu können die Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung geometrisch und physikalisch nichtlinearer Zusammenhänge aufgestellt werden. In vielen Fällen ist es jedoch zweckmäßig, gerade im Hinblick auf die komplexen nichtlinearen Zusammenhänge, die elastodynamischen Grundgleichungen auf ein PDG-System 1. Ordnung zu reduzieren.

2.3.2 Hyperbolische partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

Führt man in der allgemeinen Bewegungsgleichung (2.38) den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{u} / \partial t$ als neue Zustandsgröße ein, so ergibt sich hieraus zunächst folgende Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \quad (2.42)$$

Nach Einführung der Verzerrungen als Zustandsgrößen und Berücksichtigung der linearisierten Verzerrungsraten

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.43)$$

lässt sich für den allgemeinen 3-D Fall im kartesischen Koordinatensystem das folgende System aus hyperbolischen Erhaltungsgleichungen 1. Ordnung formulieren [74]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{q}) + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{h}(\mathbf{q}). \quad (2.44)$$

Dabei sind die elastodynamischen Zustandsgrößen in dem Zustandsvektor \mathbf{q} zusammengefasst

$$\mathbf{q} = \left[\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \right]^T \quad (2.45)$$

und die Funktionen der Zustandsgrößen $\mathbf{f}(\mathbf{q})$, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ und $\mathbf{h}(\mathbf{q})$ als Fluss über das betrachtete 3-D Volumen unter Verwendung der kinematischen und konstitutiven Gleichungen wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{q}) &= \left[\rho_0^{-1} \sigma_x(\boldsymbol{\varepsilon}), \rho_0^{-1} \tau_{xy}(\boldsymbol{\varepsilon}), \rho_0^{-1} \tau_{xz}(\boldsymbol{\varepsilon}), \dot{u}, 0, 0, \dot{v}, \dot{w}, 0 \right]^T, \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \left[\rho_0^{-1} \tau_{xy}(\boldsymbol{\varepsilon}), \rho_0^{-1} \sigma_y(\boldsymbol{\varepsilon}), \rho_0^{-1} \tau_{yz}(\boldsymbol{\varepsilon}), 0, \dot{v}, 0, \dot{u}, 0, \dot{w} \right]^T, \\ \mathbf{h}(\mathbf{q}) &= \left[\rho_0^{-1} \tau_{xz}(\boldsymbol{\varepsilon}), \rho_0^{-1} \tau_{yz}(\boldsymbol{\varepsilon}), \rho_0^{-1} \sigma_z(\boldsymbol{\varepsilon}), 0, 0, \dot{w}, 0, \dot{u}, \dot{v} \right]^T. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Somit entspricht die zeitliche Änderung der Zustandsgrößen der räumlichen Änderung des Flusses im Kontrollvolumen. Das in diesem Abschnitt vorgestellte System aus Erhaltungsgleichungen bildet dabei die Grundlage der in dieser Arbeit untersuchten numerischen Berechnungsverfahren. Aufgrund der gewählten Zustandsgrößen kann diese Formulierung auch als Verzerrungs-Geschwindigkeits-Formulierung bezeichnet werden. Im Unterschied zu den 3 Verschiebungszustandsgrößen bei der Formulierung 2. Ordnung erhält man bei der Formulierung 1. Ordnung also insgesamt 9 Zustandsgrößen (3 Geschwindigkeiten und 6 Verzerrungen).

2.4 Anfangs-Randwertprobleme und Randwertprobleme

2.4.1 Anfangs-Randwertprobleme

Das Anfangs-Randwertproblem (ARWP) wird durch die Bewegungsgleichungen und die Anfangs- und Randbedingungen bestimmt. Betrachtet man dazu den in der Abbildung 2.4 dargestellten 3-D Bereich eines homogenen elastischen Kontinuums, so müssen in dem gesamten Bereich $\mathbf{X} \in \Omega$ die im Abschnitt 2.3 angegebenen Bewegungsgleichungen durch die gesuchte Lösung erfüllt werden. Die Anfangsbedingungen eines sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe befindlichen und kräftefreien Körpers lauten dabei

$$u_i(\mathbf{X}, t = 0) = \dot{u}_i(\mathbf{X}, t = 0) = 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (2.47)$$

$$t_i(\mathbf{X}, t = 0) = 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega. \quad (2.48)$$

Dabei ist der Spannungsvektor t_i in der Gleichung (2.48) als Produkt aus dem Spannungstensor σ_{ij} und dem Normaleneinheitsvektor n_j definiert durch

$$t_i(\mathbf{X}, t) = \sigma_{ij}(\mathbf{X}, t) n_j(\mathbf{X}). \quad (2.49)$$

Zuletzt muss das elastodynamische Problem durch die zugehörigen Randbedingungen definiert werden. Hierzu werden am Rand $\Gamma = \partial\Omega$ des Gebietes Ω die Verschiebungen und Kräfte vorgegeben

$$u_i(\mathbf{X}, t) = \bar{u}_i(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_u, \quad (2.50)$$

$$t_i(\mathbf{X}, t) = \bar{t}_i(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_t. \quad (2.51)$$

Dabei wird die Randbedingung (2.50) als die wesentliche Randbedingung (DIRICHLET-Randbedingung) bezeichnet und die Randbedingung (2.51) als die natürliche Randbedingung (NEUMANN-Randbedingung).

2.4.2 Randwertprobleme

Zur analytischen und numerischen Lösung von elastischen Wellenausbreitungsproblemen ist es oftmals sinnvoll das ursprüngliche ARWP vom Zeitbereich in den Frequenzbereich zu überführen. Hierbei erhält man nach Anwendung der FOURIER-Transformation (siehe Anhang A.2) auf die zeitabhängigen Bewegungsgleichungen (2.38) die folgenden frequenzabhängigen Bewegungsgleichungen

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{X}, \omega) = -\rho_0 \omega^2 u_i(\mathbf{X}, \omega), \quad \mathbf{X} \in \Omega. \quad (2.52)$$

In dieser Form enthalten die Bewegungsgleichungen keine zeitlichen Ableitungen bzw. Abhängigkeiten von der Zeit t , sodass das ursprüngliche Anfangs-Randwertproblem (ARWP) in ein Randwertproblem (RWP) überführt wird. Hierfür müssen nur die zugehörigen Bedingungen am Rand $\Gamma = \partial\Omega$ des Bereichs Ω

$$u_i(\mathbf{X}, \omega) = \bar{u}_i(\mathbf{X}, \omega), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_u, \quad (2.53)$$

$$t_i(\mathbf{X}, \omega) = \bar{t}_i(\mathbf{X}, \omega), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_t, \quad (2.54)$$

wie in Abbildung 2.4 dargestellt, vorgegeben werden.

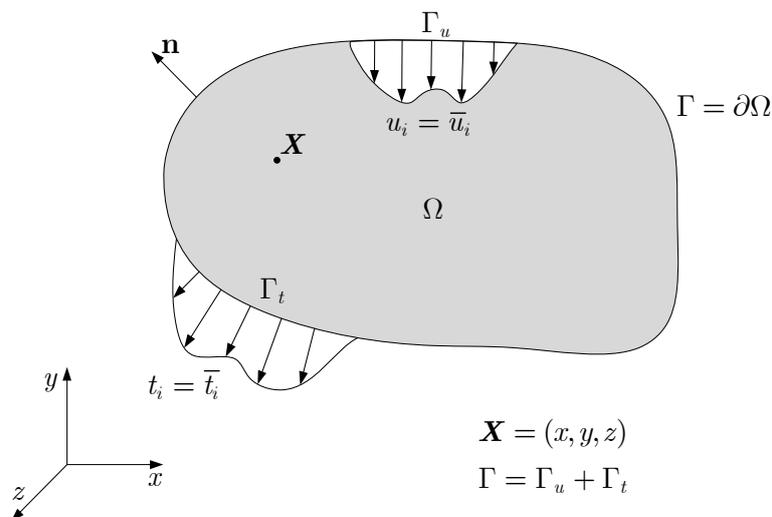


Abbildung 2.4: 3-D Körper und Randbedingungen.

2.5 1-D lineare Wellenausbreitungsprobleme im unberandeten Festkörper

Zum Verständnis der grundlegenden Zusammenhänge der elastischen Wellenausbreitung und der Akustik wird in diesem Abschnitt zunächst die 1-D lineare Wellenausbreitung behandelt. Hierbei liegen die konstitutiven und kinematischen Grundgleichungen in linearer Form vor. Zunächst soll dabei die 1-D ungedämpfte Wellenausbreitung in einem rein linear-elastischen Material betrachtet werden. Anschließend soll zur Beschreibung der maßgebenden Effekte die 1-D gedämpfte Wellenausbreitung in einem linear-viskoelastischen Festkörper (KELVIN-VOIGT-Material) behandelt werden.

2.5.1 1-D ungedämpfte lineare Wellenausbreitungsprobleme

Für die 1-D ungedämpfte lineare Wellenausbreitung in x -Richtung ergibt sich aus der Gleichung (2.40) die folgende allgemeine skalare Wellengleichung

$$c^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}. \quad (2.55)$$

Hierbei ist c die Wellengeschwindigkeit und \tilde{u} die Verschiebung. In einem isotropen unberandeten Festkörper sind die Longitudinalwelle und die Transversalwelle die beiden charakteristischen Wellenmoden bzw. Wellentypen. Dabei breitet sich die Longitudinalwelle mit der Longitudinalwellengeschwindigkeit

$$c_L = \sqrt{\frac{M}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}} \quad (2.56)$$

und die Transversalwelle (Scherwelle) mit der Transversalwellengeschwindigkeit

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} \quad (2.57)$$

im Festkörper aus. Da die allgemeine skalare Wellengleichung (2.55) die 1-D Wellenausbreitung für beide Wellenarten beschreibt, sollen die folgenden Definitionen bezüglich der Wellengeschwindigkeit c und der Verschiebung \tilde{u} gelten

$$\begin{aligned} c &= c_L, c_T, \\ \tilde{u} &= u, v, w, \end{aligned} \quad (2.58)$$

wobei sich für die betrachtete Ausbreitung in x -Richtung die Verschiebung u auf die longitudinale Wellenausbreitung bezieht und die beiden Verschiebungen v bzw. w auf die transversale Wellenausbreitung.

Die allgemeine Lösung der linearen homogenen hyperbolischen PDG 2. Ordnung (skalare Wellengleichung (2.55)) kann dabei geschrieben werden als

$$\tilde{u}(x, t) = f_1(x + ct) + f_2(x - ct). \quad (2.59)$$

Die Gleichung (2.59) ist hierbei die klassische Lösung nach D'ALEMBERT. Hierbei sind f_1 und f_2 beliebige aber mindestens zweimal differenzierbare Funktionen, welche so zu wählen sind, dass die zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen des 1-D Gebietes erfüllt werden. Grundsätzlich beschreibt diese allgemeine Lösung zwei in unterschiedliche Richtungen verlaufende Wellen. Üblicherweise wird für die Funktionen f_1 und f_2 der allgemeinen Lösung ein zeitharmonischer Exponentialansatz gewählt. Somit erhält man beispielsweise die folgende allgemeine Lösung für die 1-D longitudinale Wellenausbreitung in x -Richtung

$$\tilde{u}(x, t) = A^+ e^{i(2\pi ft - kx)} + A^- e^{i(2\pi ft + kx)} = A^+ e^{i(\omega t - kx)} + A^- e^{i(\omega t + kx)}. \quad (2.60)$$

Hierbei ist f die Frequenz, $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz, $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ die Kreiswellenzahl und λ die Wellenlänge der entsprechenden Wellenart. Weiterhin sind A^+ und A^- die zugehörigen Verschiebungsamplituden der in positiver und negativer x -Richtung verlaufenden Wellen. Neben der Lösung der skalaren Wellengleichung unter Verwendung von Exponentialfunktionen lässt sich diese auch mittels trigonometrischer Funktionen als

$$\tilde{u}(x, t) = A^+ \sin(\omega t - kx) + A^- \sin(\omega t + kx) \quad (2.61)$$

ausdrücken. Die 1-D Wellengleichung im Zeitbereich (2.55) lässt sich entsprechend zu Abschnitt 2.4.2 durch die Anwendung der FOURIER-Transformation (siehe Anhang A.2) in die 1-D Wellengleichung im Frequenzbereich transformieren

$$c^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \omega^2 \tilde{u} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + k^2 \tilde{u} = 0. \quad (2.62)$$

Diese Bewegungsgleichung wird auch als skalare HELMHOLTZ-Gleichung bezeichnet. Hierbei ist $\tilde{u}(x, \omega)$ die FOURIER-transformierte Verschiebung. Die Gleichung (2.62) ist hierbei eine gewöhnliche Differentialgleichung, für welche man unter Verwendung eines Exponentialansatzes folgende allgemeine Lösung erhält:

$$\tilde{u}(x, \omega) = A^+ e^{-ikx} + A^- e^{ikx}. \quad (2.63)$$

Für die Behandlung der 1-D Wellenausbreitung in diesem Kapitel sowie mit Blick auf den numerischen Teil dieser Arbeit ist der Sonderfall der Wellenausbreitung in unberandeten Medien von Bedeutung. Hierzu wird eine in positiver x -Richtung laufende sinusförmige Longitudinalwelle im unberandeten Medium betrachtet. In diesem Fall wird ausschließlich der erste Term aus der allgemeinen Lösung (2.61) berücksichtigt und mit $\tilde{u} = u$, $k = k_L = \omega/c_L$, $A^+ = A_L$ folgende Lösung für die 1-D longitudinale Wellenausbreitung im Zeitbereich erhalten:

$$u(x, t) = A_L \sin(\omega t - k_L x). \quad (2.64)$$

2.5.2 1-D gedämpfte lineare Wellenausbreitungsprobleme

Im folgenden Abschnitt soll die 1-D gedämpfte longitudinale Wellenausbreitung in einem linear-viskoelastischen KELVIN-VOIGT-Material behandelt werden. Hierbei treten für die rein lineare Wellenausbreitung zwei zentrale akustische Effekte auf. Zum einen die akustische Dämpfung, also das Abklingen der Wellenamplitude über den zurückgelegten Weg, sowie die akustische Dispersion, welche zu einer frequenzabhängigen Wellengeschwindigkeit bzw. Wellenzahl führt. Wie im Abschnitt 2.5.1 erhält man aus den 3-D viskoelastischen Bewegungsgleichungen (2.41) die folgende 1-D Wellengleichung für eine Longitudinalwelle

$$c_L^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\rho_0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.65)$$

Nimmt man für die Lösung dieser Bewegungsgleichung einen Exponentialansatz für die in positiver x -Richtung laufenden Longitudinalwelle

$$u(x, t) = A_L e^{i(\omega t - \bar{k}_L x)} \quad (2.66)$$

an und setzt diesen in die Gleichung (2.65) ein, so erhält man folgende Beziehung:

$$A_L e^{i(\omega t - \bar{k}_L x)} \left(-\bar{k}_L^2 c_L^2 - i\omega \bar{k}_L^2 \frac{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\rho_0} + \omega^2 \right) = 0. \quad (2.67)$$

Auflösen der Gleichung (2.67) nach der gesuchten Wellenzahl \bar{k}_L liefert unter Verwendung von Gleichung (2.56)

$$\bar{k}_L = \frac{k_L}{\sqrt{1 + i\omega \frac{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\lambda + 2\mu}}} = \pm(a_L - b_L i). \quad (2.68)$$

Somit ergibt sich für den viskoelastischen Fall eine komplexwertige Wellenzahl. Setzt man die positive Lösung in den Exponentialansatz (2.66) ein, so erhält man folgende Lösung für die longitudinale gedämpfte 1-D Wellenausbreitung in positiver x -Richtung:

$$u(x, t) = A_L e^{i(\omega t - (a_L - b_L i)x)} = A_L e^{-b_L x} e^{i(\omega t - a_L x)}. \quad (2.69)$$

Die Lösung besteht also allgemein aus einem reellen und einem imaginären Exponentialterm. Der erste Term in der Gleichung (2.69) bezieht sich auf die wegabhängige Dämpfung der Welle und der letzte Term auf die dispersive Wellenausbreitung. Hierbei sei hervorgehoben, dass die Wellenzahl für den vorliegenden viskoelastischen Fall komplexwertig ist und durch die frequenzabhängige Gleichung (2.68) definiert ist. Dies bedeutet, dass die Wellenzahl für den viskoelastischen Fall nicht mehr mit der Wellenzahl k_L des linear-elastischen Falls übereinstimmt. Aufgrund der Relevanz der akustischen Dämpfung in dieser Arbeit wird im Folgenden der Dämpfungsparameter der longitudinalen Wellenausbreitung $\alpha_{D,L} = b_L$ eingeführt. Nach [36, 37] kann der Dämpfungsparameter des KELVIN-VOIGT-Materials auf nachfolgende Weise bestimmt werden. Definiert man zunächst die komplexe longitudinale Wellengeschwindigkeit

$$\bar{c}_L = \sqrt{\frac{M + i\omega \bar{M}}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu + i\omega(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})}{\rho_0}}, \quad (2.70)$$

so lässt sich hieraus die frequenzabhängige Phasengeschwindigkeit über die Auswertung des Realteils der komplexen Wellengeschwindigkeit (2.70) bestimmen. Unter der Verwendung dieser Phasengeschwindigkeit lässt sich der Dämpfungsparameter über die nachfolgende Beziehung bestimmen [36]:

$$\alpha_{D,L} = \frac{\omega}{\text{Re}(\bar{c}_L)} \left(\sqrt{1 + Q_L^2} - Q_L \right). \quad (2.71)$$

Hierbei wird der sogenannte akustische Gütefaktor bzw. Q -Faktor verwendet. Dieser beschreibt im Wesentlichen, nach wie vielen Wellenlängen die Amplitude um den Faktor $1/e^1$ abgenommen hat, [37] und ist hierbei wie folgt definiert:

¹ EULERSche Zahl

$$Q_L = \frac{M}{\omega \bar{M}} = \frac{\lambda + 2\mu}{\omega(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})}. \quad (2.72)$$

Für kleine Dämpfungen $Q \gg 1$ ist der dispersive Einfluss vernachlässigbar und man erhält die folgende vereinfachte näherungsweise Gleichung für den Dämpfungsparameter

$$\alpha_{D,L} = \frac{\omega^2 \bar{M}}{2M \operatorname{Re}(\bar{c}_L)}. \quad (2.73)$$

Die hier für die Longitudinalwellenausbreitung angegebene Lösung und die zugehörigen akustischen Parameter lassen sich in gleicher Weise für die Transversalwellenausbreitung herleiten. Daher soll lediglich die für diese Arbeit relevante Definition des Q -Faktors der transversalen Wellenausbreitung als

$$Q_T = \frac{\mu}{\omega \bar{\mu}} \quad (2.74)$$

angegeben sein. Hiermit lässt sich analog zu der Gleichung (2.71) der Dämpfungsparameter der transversalen Wellenausbreitung $\alpha_{D,T}$ bestimmen.

Abschließend zeigt sich in der Gleichung (2.73) die für ein KELVIN-VOIGT-Material typische quadratische Abhängigkeit der Dämpfung von der Kreisfrequenz ($\alpha_{D,L} \propto \omega^2$). In der Praxis zeigen die meisten Werkstoffe im relevanten Ultraschallbereich meistens eine hiervon abweichende eher lineare Abhängigkeit der Dämpfung von der Kreisfrequenz ($\alpha_{D,L} \propto \omega$). Daher bedarf es häufig zur realistischen Abbildung des akustischen Dämpfungsverhaltens zusätzlicher rheologischer Materialmodelle. Eine gute Beschreibung realer Werkstoffe wird dabei mit einem Materialmodell erreicht, welches zu einem konstanten Q -Verlauf über den betrachteten Frequenzbereich führt. Im numerischen Teil dieser Arbeit wird zur Modellierung eines näherungsweise konstanten Q -Faktors die in [18, 19, 34, 64, 173] verwendete Methode implementiert. Hierbei wird als Grundmodell das bereits im Abschnitt 2.2.1.2 vorgestellte lineare Standardmodell der Festkörper verwendet. Durch die Zusammenschaltung mehrerer linearer Standardmodelle lässt sich damit das Relaxationsverhalten sehr genau beschreiben und ein konstanter Q -Verlauf über einen weiten Frequenzbereich erzielen. Eine Beschreibung dazu unter Verwendung eines einzelnen linearen Festkörper-Standardmodells ist im Anhang A.3 aufgeführt.

2.6 1-D nichtlineare Wellenausbreitungsprobleme im unberandeten Festkörper

Im Gegensatz zur linear-elastischen Wellenausbreitung führt die Wellenausbreitung in einem nichtlinear-elastischen Festkörper zu einer sukzessiven Änderung der zugehörigen Wellenform. Diese nichtlineare Wellenverzerrung ist auch in der Gas- und Fluid-dynamik im Zusammenhang mit der Schockwellen-Entstehung von zentraler Bedeutung. Daher sind hierzu gerade aus diesem Bereich umfangreiche analytische Gleichungen und Lösungen in der Literatur angegeben [15-17, 58, 231], welche auch auf den Festkörper übertragen werden können. Dabei entstehen zusätzlich zur eigentlichen Primär-, Fundamental- oder auch Grundfrequenz zusätzliche höherharmonische Anteile im Frequenzspektrum des Wellensignals. Grundsätzlich sind die Abweichungen von der linearen Lösung bzw. die nichtlinearen Anteile der Wellenamplitude abhängig von zahlreichen Eigenschaften der Welle selbst. Ein weiterer Unterschied zur linearen Wellenausbreitung besteht darin, dass in einem nichtlinearen Medium verschiedene Wellenmoden miteinander interagieren und dabei sogenannte nichtlineare Resonanzwellen entstehen [39, 84, 99, 111, 112]. Um diesen Zusammenhang theoretisch herzuleiten und die wesentlichen nichtlinearen Effekte hervorzuheben, soll in diesem Abschnitt zunächst die 1-D longitudinale Wellenausbreitung in x -Richtung in einem nichtlinearen Medium betrachtet werden.

2.6.1 1-D ungedämpfte nichtlineare Wellenausbreitungsprobleme

2.6.1.1 Quadratisch nichtlineares hyperelastisches Material

Im Fall der 1-D longitudinalen Wellenausbreitung in positiver x -Richtung in einem quadratisch nichtlinearen hyperelastischen Material vereinfachen sich die 3-D Bewegungsgleichungen (2.39) zu

$$\rho_0 \ddot{u} - M u_{,xx} = B u_{,x} u_{,xx} \quad (2.75)$$

mit $B = 2(M_{\text{NL}} + 1,5M)$, dem linearen Longitudinalmodul $M = \lambda + 2\mu$ und dem „nichtlinearen Longitudinalmodul“ $M_{\text{NL}} = l + 2m$. Unter der Annahme, dass die Gesamtlösung u dieser nichtlinearen Bewegungsgleichung (2.75) nicht stark von der linearen Lösung (2.64) abweicht, kann über die Störungstheorie die folgende Näherungslösung angenommen werden:

$$u = u_0 + u_1. \quad (2.76)$$

Hierbei wird angenommen, dass der nichtlineare Anteil u_1 in der Gesamtlösung klein gegenüber dem linearen Anteil u_0 ist, d. h. $u_1 \ll u_0$. Einsetzen der Näherungslösung (2.76) in die Bewegungsgleichung (2.75) liefert

$$\rho_0 \ddot{u}_0 + \rho_0 \ddot{u}_1 - M u_{0,xx} - M u_{1,xx} = B (u_{0,x} + u_{1,x}) (u_{0,xx} + u_{1,xx}). \quad (2.77)$$

Setzt man die Lösung des linearen Problems $\rho_0 \ddot{u}_0 - M u_{0,xx} = 0$ als bekannt voraus, so ergibt sich nach dem Einsetzen der linearen Lösung (2.64) in die Gleichung (2.77) und unter Vernachlässigung des quadratisch nichtlinearen Anteils von u_1 die folgende inhomogene PDG:

$$\rho_0 \ddot{u}_1 - M u_{1,xx} = B \frac{k_L^3 A_1^2}{2} \sin(2(\omega t - k_L x)). \quad (2.78)$$

Hierbei wurde die Amplitude A_L aus der Gleichung (2.64) durch die Amplitude A_1 ersetzt. Die inhomogene PDG (2.78) wird dabei durch die folgende Lösung erfüllt:

$$u_1(x, t) = \frac{B}{M} \frac{k_L^2 A_1^2 x}{8} \cos(2(\omega t - k_L x)). \quad (2.79)$$

Die Gesamtlösung ergibt sich dann durch das Einsetzen der Gleichungen (2.64) und (2.79) in die Gleichung (2.76) zu

$$u(x, t) = A_1 \sin(\omega t - k_L x) + \beta \frac{k_L^2 A_1^2 x}{8} \cos(2(\omega t - k_L x)). \quad (2.80)$$

Hierbei ist der longitudinale Nichtlinearitätsparameter (NLP) wie folgt definiert:

$$\beta = \beta_{\text{GNL}} + \beta_{\text{PNL}} = \frac{B}{M} = 3 + \frac{2(l + 2m)}{\lambda + 2\mu}. \quad (2.81)$$

Dabei setzt sich der NLP aus dem geometrisch nichtlinearen Anteil $\beta_{\text{GNL}} = 3$ und dem physikalisch nichtlinearen Anteil $\beta_{\text{PNL}} = 2(l + 2m)/(\lambda + 2\mu)$ zusammen. Da der geometrisch nichtlineare Anteil klein ist, wird dieser auch häufig in der Bestimmung des klassischen NLP vernachlässigt. In der Literatur findet sich neben dem hier vorgestellten NLP auch oft die folgende Definition:

$$\beta = \frac{3}{2} + \frac{(l + 2m)}{\lambda + 2\mu}. \quad (2.82)$$

Hierbei ist jedoch zu berücksichtigen, dass bei der Verwendung von Gleichung (2.82) die ursprüngliche Lösung (2.80) hinsichtlich des Vorfaktors des nichtlinearen Anteils abgeändert werden muss, d. h.

$$u(x, t) = A_1 \sin(\omega t - k_L x) + \beta \frac{k_L^2 A_1^2 x}{4} \cos(2(\omega t - k_L x)). \quad (2.83)$$

Für die weitere Betrachtung ist es sinnvoll die Gesamtlösung auf folgende Weise darzustellen:

$$u(x, t) = A_1 \sin(\omega t - k_L x) + A_2 \cos(2(\omega t - k_L x)). \quad (2.84)$$

Hierbei ist A_1 die Fundamentalamplitude bei der Grundfrequenz $f_1 = \omega/2\pi$. Die zweite Harmonische hat die doppelte Frequenz $f_2 = 2f_1$ und die zugehörige Amplitude

$$A_2 = \beta k_L^2 A_1^2 x / 8. \quad (2.85)$$

Diese Gleichung lässt sich nach dem NLP umstellen. Somit erhält man den sogenannten akustischen NLP als

$$\beta = \frac{8A_2}{k_L^2 A_1^2 x}, \quad (2.86)$$

der für die nichtlineare Ultraschalltechnik von entscheidender Bedeutung ist. Es lässt sich also zusammenfassen, dass im Falle der klassischen nichtlinear-elastischen Wellenausbreitung aus der Fundamentalwelle eine zweite Welle entsteht, deren Frequenz der doppelten Grundfrequenz entspricht und deren Amplitude zum einen linear von dem NLP β und dem Abstand x und zum anderen quadratisch von der Wellenzahl k_L und der Ausgangsamplitude A_1 abhängt.

2.6.1.2 Kubisch nichtlineares hyperelastisches Material

Neben der oben ausführlich beschriebenen nichtlinearen Wellenausbreitung in einem quadratisch nichtlinear-elastischen Medium lassen sich über entsprechende Erweiterungen der Formänderungsenergiedichtefunktion (2.16) auch Nichtlinearitäten höherer Ordnung behandeln [39, 230]. Die Vorgehensweise zur Herleitung der konstitutiven Gleichungen höherer Ordnung entspricht dabei dem für den quadratisch nichtlinear-elastischen Fall verwendeten Ablauf. Daher soll an dieser Stelle nur die Lösung für die 1-D Wellenausbreitung in einem klassischen kubisch nichtlinearen Medium erläutert werden. Zunächst wird angenommen, dass die Normalspannung in x -Richtung durch die folgende kubisch nichtlineare Erweiterung des HOOKEschen Gesetzes bestimmt ist:

$$\sigma_x = M u_{,x} + \frac{1}{3} M \gamma u_{,x}^3. \quad (2.87)$$

Hierbei wird auf eine Berücksichtigung der geometrisch nichtlinearen Beiträge verzichtet und der übliche CAUCHYSche Spannungstensor verwendet. Einsetzen der konstitutiven Gleichung (2.87) in die zugehörige Bewegungsgleichung (2.38) ergibt die Bewegungsgleichung für ein kubisch nichtlinear-elastisches Medium

$$\rho_0 \ddot{u} - Mu_{,xx} = \gamma Mu_{,x}^2 u_{,xx}. \quad (2.88)$$

Nach der Verwendung von Gleichung (2.88) mit der zugehörigen linearen Lösung (2.64) kann mittels der in Gleichung (2.76) getroffenen Näherung die folgende inhomogene PDG für den kubisch nichtlinear-elastischen Fall aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} \rho_0 \ddot{u}_1 - Mu_{1,xx} &= \gamma Mu_{0,x}^2 u_{0,xx} \\ &= -\frac{\gamma MA_1^3 k^4}{4} \left(\sin(\omega t - k_L x) + \sin(3(\omega t - k_L x)) \right). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Hierfür kann die folgende Lösung gefunden werden:

$$u_1(x, t) = -\gamma \frac{k_L^3 A_1^3 x}{8} \left(\cos(\omega t - k_L x) + \frac{1}{3} \cos(3(\omega t - k_L x)) \right). \quad (2.90)$$

Die Gesamtlösung für den kubisch nichtlinear-elastischen Fall ergibt sich somit zu

$$u(x, t) = A_1 \sin(\omega t - k_L x) - \gamma \frac{k_L^3 A_1^3 x}{8} \left(\cos(\omega t - k_L x) + \frac{1}{3} \cos(3(\omega t - k_L x)) \right) \quad (2.91)$$

bzw. zu

$$u(x, t) = A_1 \sin(\omega t - k_L x) - \left(A_{1, \text{NL}} \cos(\omega t - k_L x) + A_3 \cos(3(\omega t - k_L x)) \right). \quad (2.92)$$

Zusätzlich zur 3. Harmonischen A_3 bei der dreifachen Grundfrequenz $f_3 = 3f_1 = 3\omega/2\pi$ entsteht eine zusätzliche 1. Harmonische $A_{1, \text{NL}}$, welche eine 90° -Phasenverschiebung zu der Fundamentalwelle hat. Die Amplituden der Resonanzwellen (Höherharmonischen) sind dabei linear vom NLP γ und vom zurückgelegten Weg x sowie kubisch von der Wellenzahl k_L und der Fundamentalamplitude A_1 abhängig.

Für die experimentelle Untersuchung ist dabei die 3. Harmonische A_3 vorrangig von Bedeutung. Der zugehörige akustische NLP im Fall des kubisch nichtlinear-elastischen Materialverhaltens lautet somit

$$\gamma = \frac{24A_3}{k_L^3 A_1^3 x}. \quad (2.93)$$

Grundsätzlich ist die hier betrachtete nichtlineare longitudinale Wellenausbreitung ein Sonderfall der allgemeinen nichtlinearen Wellenausbreitung. Das entstandene Wellenfeld der 2. bzw. 3. Harmonischen kann dabei auch als resultierende Resonanzwelle zweier miteinander interagierender Longitudinalwellen gleicher Frequenz f_1 verstanden werden. Daneben sind weitere Interaktionen zwischen Wellen unterschiedlicher Frequenzen sowie zwischen unterschiedlichen Wellenmoden möglich. Teilweise sind hierbei bestimmte Bedingungen hinsichtlich des Polarisationswinkels, des Interaktionswinkels und der Wellenzahl selbst zu erfüllen, damit es zu einer Bildung des höherharmonischen Wellenfelds (nichtlineare Resonanz) kommt. In [111, 112] sind die wichtigsten Zusammenhänge und Bedingungen der Interaktionen von ebenen Wellen im quadratisch nichtlinear-elastischen Kontinuum beschrieben. In der Literatur wird das hier beschriebene nichtlineare Wechselwirken auch oft als nichtlineares Wellenmischen (*wave-mixing*) bezeichnet.

2.6.1.3 Hysteretisch nichtlineares Material

Für die Beschreibung der 1-D Wellenausbreitung in einem hysteretisch nichtlinearen Medium soll das teilelastische Hysteresemodell nach NAZAROV (2.24) verwendet werden. Hierbei ergibt sich für $\alpha_N = 0$, $\beta_{N,1} = \beta_{N,2} = -\alpha$ und $\varepsilon = u_{,x}$ die folgende 1-D Spannungs-Dehnungs-Beziehung für die Normalspannung

$$\sigma_x = M \left(u_{,x} + \left(\text{sign}(u_{,x,t}) \frac{\alpha}{2} u_{,x}^2 - \frac{\alpha}{2} \varepsilon_m^2 \right) \right). \quad (2.94)$$

Einsetzen des Materialgesetzes (2.94) in die zugehörige Bewegungsgleichung (2.38) ergibt die folgende Bewegungsgleichung für einen hysteretisch nichtlinearen Festkörper

$$\rho_0 \ddot{u} - M u_{,xx} = \alpha M u_{,x} u_{,xx} \text{sign}(u_{,x,t}). \quad (2.95)$$

Diese Gleichung ist ähnlich zu der Gleichung (2.75) für den quadratisch nichtlinear-elastischen Fall, mit dem einzigen Unterschied, dass der rechte Term der Gleichung (2.95) zusätzlich die Vorzeichenfunktion der Dehnrates enthält. Somit erhält man über die übliche Störungstheorie die folgende Lösung aus dem quadratisch nichtlinear-elastischen Fall, jedoch mit einer Vorzeichenfunktion abhängig von der Dehnrates

$$u(x, t) = A_1 \sin(\omega t - k_L x) + \frac{\alpha k_L^2 A_1^2 x}{8} \cos(2(\omega t - k_L x)) \text{sign}(\omega k_L A_1 \sin(\omega t - k_L x)). \quad (2.96)$$

Ersetzt man die Vorzeichenfunktion in Gleichung (2.96) durch die zugehörige FOURIER-Reihenentwicklung

$$\operatorname{sign}\left(\omega k_{\text{L}} A_1 \sin(\omega t - k_{\text{L}} x)\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n(\omega t - k_{\text{L}} x)\right) \quad (2.97)$$

und berücksichtigt nur die ersten Summenterme der Reihenentwicklung ($n = 1, 3$), so erhält man die folgende Näherungslösung

$$u(x, t) = A_1 \sin(\omega t - k_{\text{L}} x) - \frac{\alpha k_{\text{L}}^2 A_1^2 x}{12\pi} \left\{ 2 \sin(\omega t - k_{\text{L}} x) - 3 \sin\left[3(\omega t - k_{\text{L}} x)\right] - \sin\left[5(\omega t - k_{\text{L}} x)\right] \right\}. \quad (2.98)$$

Hierbei erkennt man, dass für eine hysteretische Nichtlinearität ausschließlich ungerade höherharmonische Anteile im Wellenfeld entstehen, welche die gleiche Abhängigkeit von der Amplitude A_1 , der Wellenzahl k_{L} und dem Weg x zeigen wie im quadratisch nichtlinear-elastischen Fall. Da für die nichtlineare Ultraschalltechnik die 3. Harmonische von besonderer Bedeutung ist, soll diese durch

$$u(x, t) = A_1 \sin(\omega t - k_{\text{L}} x) + A_3 \sin\left(3(\omega t - k_{\text{L}} x)\right) + \dots \quad (2.99)$$

berücksichtigt werden, wobei gilt:

$$A_3 = \alpha \frac{k_{\text{L}}^2 A_1^2 x}{4\pi}. \quad (2.100)$$

Aus der Gleichung (2.100) erhält man für den hysteretischen NLP

$$\alpha = \frac{4\pi A_3}{k_{\text{L}}^2 A_1^2 x}. \quad (2.101)$$

2.6.2 1-D gedämpfte nichtlineare Wellenausbreitungsprobleme

Aufgrund der Bedeutung und starken Ausprägung des viskoelastischen Materialverhaltens des Betons wird im folgenden Abschnitt der Einfluss der akustischen Dämpfung auf die nichtlineare Wellenausbreitung behandelt. Hierbei soll zunächst ausführlich die Herleitung der 1-D gedämpften longitudinalen Wellenausbreitung in einem quadratisch nichtlinear-elastischen Festkörper dargestellt werden und anschließend auf andere Materialgesetze erweitert werden. Die Herleitung bezieht sich dabei maßgeblich auf [30, 100].

2.6.2.1 Quadratisch nichtlineares hyperelastisches Material

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass die Abnahme der Amplitude A einer sich in x -Richtung ausbreitenden Welle wie im rein linear-viskoelastischen Fall (vgl. Gleichung (2.69)) näherungsweise durch einen exponentiellen Term wie folgt

$$u(x, t) = A_0 \sin(\omega t - k_L x) e^{-\alpha_{D,L} x} = A \sin(\omega t - k_L x) \quad (2.102)$$

beschrieben werden kann. Hierbei ist $\alpha_{D,L}$ der Dämpfungsparameter für die longitudinale gedämpfte und nichtlineare Wellenausbreitung und A_0 die (ungedämpfte) Anfangsamplitude der Welle. Betrachtet man also gemäß Gleichung (2.102) die Ausbreitung der Fundamentalwelle und der 2. Harmonischen-Welle getrennt voneinander, so erhält man die folgenden Gleichungen für die Fundamentalamplitude und die 2. Harmonische-Amplitude

$$A_1 = A_{0,1} e^{-\alpha_{D,L,1} x}, \quad (2.103)$$

$$A_2 = A_{0,2} e^{-\alpha_{D,L,2} x}. \quad (2.104)$$

Hierbei wird angenommen, dass die Fundamentalwelle und die 2. Harmonische-Welle unterschiedliche und voneinander unabhängige Dämpfungsparameter $\alpha_{D,L,1}$ und $\alpha_{D,L,2}$ besitzen. Die Änderungen der beiden Amplituden in x -Richtung erhält man aus den Gleichungen (2.103) und (2.104) zu

$$\frac{dA_1}{dx} = -\alpha_{D,L,1} A_1, \quad (2.105)$$

$$\frac{dA_2}{dx} = -\alpha_{D,L,2} A_2. \quad (2.106)$$

Zusätzlich muss die Änderung der 2. Harmonischen-Amplitude infolge der nichtlinear-elastischen Wellenausbreitung berücksichtigt werden. Betrachtet man zunächst die zugehörige Änderung ohne Dämpfung, so ergibt sich aus der Gleichung (2.85)

$$\frac{dA_{0,2}}{dx} = \frac{1}{8} \beta k_L^2 A_{0,1}^2. \quad (2.107)$$

Für die gedämpfte Wellenausbreitung muss dabei die gedämpfte Fundamentalamplitude nach der Gleichung (2.103) in die Gleichung (2.85) eingesetzt werden. Anschließend erhält man die Änderung der 2. Harmonischen-Amplitude unter der Berücksichtigung der Dämpfung der Fundamentalamplitude als

$$\frac{dA_2}{dx} = \frac{1}{8} \beta k_L^2 A_1^2 = \frac{1}{8} \beta k_L^2 A_{0,1}^2 e^{-2\alpha_{D,L,1}x}. \quad (2.108)$$

Aus den Gleichungen (2.106) und (2.108) resultiert die Gesamtänderung der 2. Harmonischen-Amplitude in einem gedämpften und nichtlinear-elastischen Medium zu

$$\frac{dA_2}{dx} = -\alpha_{D,L,2}A_2 + \frac{1}{8} \beta k_L^2 A_{0,1}^2 e^{-2\alpha_{D,L,1}x} \quad (2.109)$$

bzw.

$$\frac{dA_2}{dx} + \alpha_{D,L,2}A_2 = \frac{1}{8} \beta k_L^2 A_{0,1}^2 e^{-2\alpha_{D,L,1}x}. \quad (2.110)$$

Die Lösung dieser inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung lässt sich folgendermaßen angeben:

$$A_2 = \frac{1}{8} \beta k_L^2 A_{0,1}^2 \frac{\left(e^{-\alpha_{D,L,2}x} - e^{-2\alpha_{D,L,1}x} \right)}{\left(2\alpha_{D,L,1} - \alpha_{D,L,2} \right)}. \quad (2.111)$$

In experimentellen Untersuchungen sind meistens nur die empfangenen Amplituden bekannt. Daher bietet es sich an in Gleichung (2.111) anstelle der Anfangsamplitude $A_{0,1}$ die empfangene Amplitude A_1 zu verwenden. Mit

$$A_{0,1} = A_1 e^{\alpha_{D,L,1}x} \quad (2.112)$$

erhält man aus der Gleichung (2.111) die folgende alternative Darstellung:

$$A_2 = \frac{1}{8} \beta k_L^2 A_1^2 \frac{\left(e^{(2\alpha_{D,L,1} - \alpha_{D,L,2})x} - 1 \right)}{\left(2\alpha_{D,L,1} - \alpha_{D,L,2} \right)} = \frac{1}{8} \beta k_L^2 A_1^2 \frac{\left(1 - e^{(2\alpha_{D,L,1} - \alpha_{D,L,2})x} \right)}{\left(\alpha_{D,L,2} - 2\alpha_{D,L,1} \right)}. \quad (2.113)$$

Der zugehörige akustische NLP für den gedämpften Fall lautet demnach

$$\beta = \frac{8A_2}{k_L^2 A_1^2} \frac{\left(\alpha_{D,L,2} - 2\alpha_{D,L,1} \right)}{\left(1 - e^{(2\alpha_{D,L,1} - \alpha_{D,L,2})x} \right)}. \quad (2.114)$$

Aus der allgemeinen Beziehung (2.114) für die zwei voneinander unabhängigen Dämpfungsparameter $\alpha_{D,L,1}$ und $\alpha_{D,L,2}$ lassen sich die Lösungen für zwei viskoelastische Sonderfälle ableiten. Für ein klassisches KELVIN-VOIGT-Material ist der Dämpfungsparameter α_D in guter Näherung quadratisch abhängig von der Frequenz, d. h.

$$\alpha_D \propto f^2. \quad (2.115)$$

Im konkreten Fall der nichtlinear-elastischen Wellenausbreitung muss somit der Dämpfungsparameter der 2. Harmonischen viermal größer sein als der Dämpfungsparameter der Fundamentalamplitude. Es ergibt sich hieraus also die folgende Beziehung:

$$\alpha_{D,L,2} = 4\alpha_{D,L,1}. \quad (2.116)$$

Einsetzen der Gleichung (2.116) in die Gleichung (2.114) liefert den akustischen NLP für ein KELVIN-VOIGT-Material als

$$\beta = \frac{16A_2\alpha_{D,L,1}}{k_L^2 A_1^2 (1 - e^{-2\alpha_{D,L,1}x})}. \quad (2.117)$$

In vielen Werkstoffen ist eine lineare Abhängigkeit der Dämpfung von der jeweiligen Frequenz $\alpha_D \propto f$ zu beobachten. Daher soll auch die Lösung dieses Sonderfalls angegeben werden. Hierzu hat man für die Dämpfung der 2. Harmonischen

$$\alpha_{D,L,2} = 2\alpha_{D,L,1}. \quad (2.118)$$

Einsetzen von der Gleichung (2.118) in die Gleichung (2.114) liefert unter Anwendung der Regel von L'HOSPITAL den gesuchten akustischen NLP für diesen Sonderfall als

$$\beta = \frac{8A_2}{k_L^2 A_1^2 x}. \quad (2.119)$$

Der Vergleich mit der Gleichung (2.86) zeigt dabei, dass der für diesen Dämpfungsfall ermittelte akustische NLP gerade dem akustischen NLP im dämpfungsfreien Medium entspricht. In gleicher Weise lässt sich auch der kubische NLP (2.93) bzw. der hysteretische NLP (2.101) für den dämpfungsfreien Fall auf den gedämpften Fall übertragen.

2.6.2.2 Kubisch nichtlineares hyperelastisches Material

Betrachtet man zunächst ein kubisch nichtlinear-elastisches Material, so ergibt sich der NLP im Fall der voneinander unabhängigen Dämpfungsparameter $\alpha_{D,L,1}$ und $\alpha_{D,L,3}$ für die Fundamentalwelle und die zugehörige 3. Harmonische-Welle der folgende modifizierte kubische NLP

$$\gamma = \frac{24A_3}{k_L^3 A_1^3} \frac{(\alpha_{D,L,3} - 3\alpha_{D,L,1})}{(1 - e^{(3\alpha_{D,L,1} - \alpha_{D,L,3})x})}. \quad (2.120)$$

Im Sonderfall $\alpha_{D,L,3} = 3\alpha_{D,L,1}$ führt die Gleichung (2.120) dann zu

$$\gamma = \frac{24A_3}{k_L^3 A_1^3 x}. \quad (2.121)$$

Dies entspricht wieder dem kubischen NLP aus der Gleichung (2.93) für den ungedämpften Fall.

2.6.2.3 Hysteretisch nichtlineares Material

In einem hysteretisch nichtlinearen Material entsprechend Abschnitt 2.6.1.3 ergibt sich der gedämpfte hysteretische NLP als

$$\alpha = \frac{4\pi A_3}{k_L^2 A_1^2} \frac{(\alpha_{D,L,3} - 2\alpha_{D,L,1})}{(1 - e^{(2\alpha_{D,L,1} - \alpha_{D,L,3})x})}. \quad (2.122)$$

Dabei beziehen sich die verwendeten Dämpfungsparameter $\alpha_{D,L,1}$ und $\alpha_{D,L,3}$ auf die Fundamentalfrequenz und die 3. Harmonische-Frequenz. Für den Sonderfall $\alpha_{D,L,3} = 3\alpha_{D,L,1}$ führt die Gleichung (2.122) zu

$$\alpha = \frac{4\pi A_3}{k_L^2 A_1^2} \frac{\alpha_{D,L,1}}{(1 - e^{-\alpha_{D,L,1}x})}. \quad (2.123)$$

2.6.3 1-D akustoelastische Wellenausbreitungsprobleme

Neben der im vorigen Abschnitt beschriebenen Dispersion von elastischen Wellen in einem nichtlinear-elastischen Material ist der akustoelastische Effekt [95, 202, 212] auch von großer Bedeutung. Dieser beschreibt die Änderung der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit infolge einer überlagerten bzw. aufgebrachten Spannung. Dabei führt eine große Deformation infolge statischer oder dynamischer Last zu einer Steifigkeitsänderung im Material, wodurch gleichzeitig die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer hindurchlaufenden elastischen Welle verändert wird. Zwei Fälle sind hierbei von besonderer praktischer Bedeutung, nämlich der hydrostatische Spannungszustand und der einachsige Spannungszustand. Die folgende Herleitung der akustoelastischen Grundgleichungen basiert dabei auf der im Abschnitt 2.2.2.1 beschriebenen Hyperelastizitätstheorie für ein quadratisch nichtlinear-elastisches Material.

Um die grundsätzliche Vorgehensweise und die damit verknüpften Annahmen bei dieser Herleitung kurz darzustellen, wird die longitudinale Wellenausbreitung in x -Richtung in einem in z -Richtung einachsiger Zug beanspruchten 3-D Festkörper betrachtet. Es gilt für die Spannungen \mathbf{P} (1. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor) infolge der einachsigen Zugbeanspruchung σ_N :

$$P_z = \sigma_N, P_x = P_y = P_{xy} = P_{yx} = P_{xz} = P_{zx} = P_{yz} = P_{zy} = 0. \quad (2.124)$$

Unter der Vernachlässigung der nichtlinearen Terme in dem Materialgesetz (2.18) (siehe Anhang A.1) können mittels der Gleichung (2.124) die Dehnungen infolge der statischen Zugbeanspruchung σ_N ermittelt werden als

$$\varepsilon_{x,\sigma_N} = \varepsilon_{y,\sigma_N} = -\frac{\lambda\sigma_N}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad (2.125)$$

$$\varepsilon_{z,\sigma_N} = \frac{(\lambda + \mu)\sigma_N}{\mu(3\lambda + 2\mu)}. \quad (2.126)$$

Berücksichtigt man weiterhin, eine zeitharmonische Longitudinalwelle in dem beanspruchten 3-D Körper, so ergeben sich mit den in den Gleichungen (2.125) und (2.126) angegebenen Dehnungen die Gesamtverschiebungen zu

$$u(x, t) = \varepsilon_{x,\sigma_N} \cdot x + A \sin\left(\omega t - (1 + \varepsilon_{x,\sigma_N})k_L x\right), \quad (2.127)$$

$$v(x, t) = \varepsilon_{y,\sigma_N} \cdot y, \quad (2.128)$$

$$w(x, t) = \varepsilon_{z,\sigma_N} \cdot z. \quad (2.129)$$

Unter Beachtung, dass alle Verschiebungsgradienten bis auf u_x , u_{xx} , v_y und w_z null sind, und unter Verwendung der Gleichungen (2.127)-(2.129) erhält man die Bewegungsgleichung (2.39) für die Verschiebung u in folgender Form:

$$\rho_0 \ddot{u} = M u_{xx} + 2(M_{NL} + 1,5M) u_x u_{xx} + (2l + \lambda) u_{xx} (v_y + w_z). \quad (2.130)$$

Die zeitliche und räumliche Ableitung der in der Gleichung (2.130) gegebenen Verschiebungen entsprechend der benötigten Verschiebungsgradienten und anschließendes Einsetzen in die Bewegungsgleichung (2.130) führt schließlich zu

$$\rho_0 c_{L,x}^2 = M + 2(M_{NL} + 2,5M) \varepsilon_{x,\sigma_N} + (2l + \lambda) (\varepsilon_{y,\sigma_N} + \varepsilon_{z,\sigma_N}). \quad (2.131)$$

Hierbei werden nur die linearen Anteile der statischen Dehnungen berücksichtigt und gleichzeitig die gesuchte longitudinale Wellengeschwindigkeit in x -Richtung entsprechend $c_{L,x} = \omega/k_L$ eingesetzt. Nach Einsetzen der statischen Dehnungen aus den Gleichungen (2.125) und (2.126) sowie Elimination der elastischen Parameter M und M_{NL} ergibt sich aus der Gleichung (2.131) der folgende lineare Zusammenhang zwischen der statischen Beanspruchung σ_N und der Longitudinalwellengeschwindigkeit $c_{L,x}$:

$$\rho_0 c_{L,x}^2 = \rho_0 c_{L,y}^2 = \lambda + 2\mu + \frac{\sigma_N}{3\lambda + 2\mu} \left(2l - \frac{2\lambda}{\mu} (m + \lambda + 2\mu) \right). \quad (2.132)$$

In ähnlicher Weise lassen sich die Geschwindigkeiten für weitere Wellenmoden mit unterschiedlichen Partikelbewegungsrichtungen und Ausbreitungsrichtungen bezüglich der ausgewählten einachsigen Beanspruchung bestimmen. Von besonderer Bedeutung für die experimentellen Versuche sind neben der Gleichung (2.132) die folgenden akus-toelastischen Gleichungen für den einachsigen Spannungszustand in z -Richtung:

$$\rho_0 c_{L,z}^2 = \lambda + 2\mu + \frac{\sigma_N}{3\lambda + 2\mu} \left[2l + \lambda + \frac{\lambda + \mu}{\mu} (4m + 4\lambda + 10\mu) \right], \quad (2.133)$$

$$\rho_0 c_{T,z,x}^2 = \rho_0 c_{T,z,y}^2 = \mu + \frac{\sigma_N}{3\lambda + 2\mu} \left[m + \frac{\lambda n}{4\mu} + 4\lambda + 4\mu \right], \quad (2.134)$$

$$\rho_0 c_{T,x,z}^2 = \rho_0 c_{T,y,z}^2 = \mu + \frac{\sigma_N}{3\lambda + 2\mu} \left[m + \frac{\lambda n}{4\mu} + \lambda + 2\mu \right], \quad (2.135)$$

$$\rho_0 c_{T,x,y}^2 = \rho_0 c_{T,y,x}^2 = \mu + \frac{\sigma_N}{3\lambda + 2\mu} \left[m - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} n - 2\lambda \right]. \quad (2.136)$$

Hierbei beschreibt der zweite und der dritte Index die Wellenausbreitungsrichtung und die Richtung der Partikelbewegung der Longitudinalwelle bzw. der Transversalwelle.

3 Numerische und experimentelle Methoden

Mit Blick auf die numerischen und experimentellen Untersuchungen zur Materialcharakterisierung und Schädigungsbewertung von Hochleistungsbeton ist es zunächst notwendig, geeignete numerische und experimentelle Methoden auszuwählen. Daher beinhaltet dieses Kapitel eine detaillierte Beschreibung der verwendeten numerischen und experimentellen Methoden und deren wesentliche Eigenschaften.

3.1 Numerische Methoden

Die meisten naturwissenschaftlichen und ingenieurwissenschaftlichen Probleme werden durch die entsprechenden partiellen Differentialgleichungen (PDG) mit den zugehörigen Anfangs-Randbedingungen oder Randbedingungen beschrieben und sind nur für vereinfachte Betrachtungen und Sonderfälle analytisch exakt lösbar. Daher haben sich in verschiedenen Fachgebieten entsprechend der Problemstellung angepasste und optimierte numerische Methoden entwickelt, welche eine Näherungslösung liefern. Hierbei weisen insbesondere die Finite-Elemente-Methode (FEM), die Finite-Differenzen-Verfahren (FD-Verfahren), die Finite-Volumen-Verfahren (FV-Verfahren) und die Randelementmethode (BEM) ein großes Anwendungsspektrum auf und werden in der Praxis und Forschung häufig verwendet.

Für die numerische Simulation von nichtlinearen Wellenausbreitungsproblemen sind dabei gerade die FD-Verfahren, die FV-Verfahren und die Kollokationsverfahren weit verbreitet und bieten insbesondere Vorteile bei der Implementierung komplexer Materialgesetze. Daher sollen in den folgenden Abschnitten gerade diese numerischen Methoden beschrieben und verglichen werden. Im Speziellen wurden dabei die gestaffelten FD-Verfahren 2. und 4. Ordnung, das KURGANOV-TADMOR-Schema (KT-Verfahren), die klassische CHEBYSHEV-Pseudospektrale-Kollokationsmethode (CPS-Methode) und eine neuartige modifizierte CHEBYSHEV-Pseudospektrale-Kollokationsmethode implementiert und bei der numerischen Untersuchung verwendet. Im Folgenden sollen diese ausgewählten numerischen Methoden und deren wichtigste Grundlagen erläutert werden. Dabei soll insbesondere die modifizierte CPS-Methode als die zentrale numerische Methode dieser Arbeit detailliert beschrieben und diskutiert werden.

3.1.1 Finite-Differenzen-Verfahren

3.1.1.1 Grundlagen

Die FD-Verfahren basieren auf der bereichsweisen Approximation der grundlegenden Differentialgleichungen des Problems durch geeignete lokale Differenzenquotienten. Diese führen in der Regel zu einfachen, effektiven und robusten numerischen Verfahren, welche die entsprechenden ARWP bzw. RWP in natürlicher Weise diskretisieren und lösen. Daher sind die FD-Verfahren in vielen Wissenschaftsbereichen weit verbreitet.

Im Folgenden soll die Methodik der Verwendung von Differenzenquotienten als zentrales Merkmal und Element der FD-Verfahren kurz beschrieben werden. Ausgehend von einer Taylorreihenentwicklung um den betrachteten Gitterpunkt x_i eines 1-D Berechnungsgebietes ergibt sich für die Nachbarknoten

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x f_{,x}|_i + \frac{\Delta x^2}{2} f_{,xx}|_i + \frac{\Delta x^3}{6} f_{,xxx}|_i + \dots, \quad (3.1)$$

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x f_{,x}|_i + \frac{\Delta x^2}{2} f_{,xx}|_i - \frac{\Delta x^3}{6} f_{,xxx}|_i + \dots. \quad (3.2)$$

Hiernach erhält man eine Approximation 1. Ordnung für die 1. Ableitung der Funktion f am Punkt x_i :

$$f_{,x}^+ = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{Vorwärtsdifferenzenquotient}), \quad (3.3)$$

$$f_{,x}^- = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{Rückwärtsdifferenzenquotient}). \quad (3.4)$$

Die 1. Ableitung 2. Ordnung kann durch den zentralen Differenzenquotienten

$$f_{,x} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3.5)$$

beschrieben werden. Auf der Basis der oben dargestellten Differenzenquotienten lassen sich zahlreiche FD-Verfahren entwickeln und auf 2-D und 3-D Probleme erweitern.

In der Elastodynamik ist es oftmals zweckmäßig bei der Verwendung einer Formulierung 1. Ordnung (siehe Abschnitt 2.3.2) die zu ermittelnden Feldgrößen (Spannungen, Verzerrungen, Partikelgeschwindigkeiten) versetzt auf dem Berechnungsgitter anzusetzen und zu unterschiedlichen Zeitpunkten zu berechnen. Hiermit werden die grundlegenden Bewegungsgleichungen und konstitutiven Gleichungen getrennt voneinander behandelt und man erreicht neben einer verbesserten numerischen Stabilität und

Genauigkeit des FD-Verfahrens zusätzlich eine geringe Gitterdispersion bei stark heterogenen Strukturen [69, 129, 161, 220].

Im Allgemeinen ergeben sich unterschiedliche Varianten für die Anordnung der Feldgrößen auf einem gestaffelten Gitter. Die klassische Variante ist in der Abbildung 3.1 dargestellt. Hierbei liegen die Normalspannungen σ_x und σ_y bzw. die zugehörigen Dehnungen ε_x und ε_y auf gemeinsamen Knoten und die entsprechenden Partikelgeschwindigkeiten \dot{u} bzw. \dot{v} um den Abstand $\Delta x/2$ bzw. $\Delta y/2$ versetzt. Die Schubspannung τ_{xy} bzw. die zugehörige Schubverzerrung γ_{xy} sind wiederum in beiden Richtungen um $\Delta x/2$ und $\Delta y/2$ versetzt. Aufbauend auf dieser Gitteranordnung sollen die beiden im Verifikationsteil dieser Arbeit verwendeten FD-Verfahren erläutert werden. Diese unterscheiden sich lediglich in ihrer Ordnung und in den zugehörigen Differentialoperatoren.

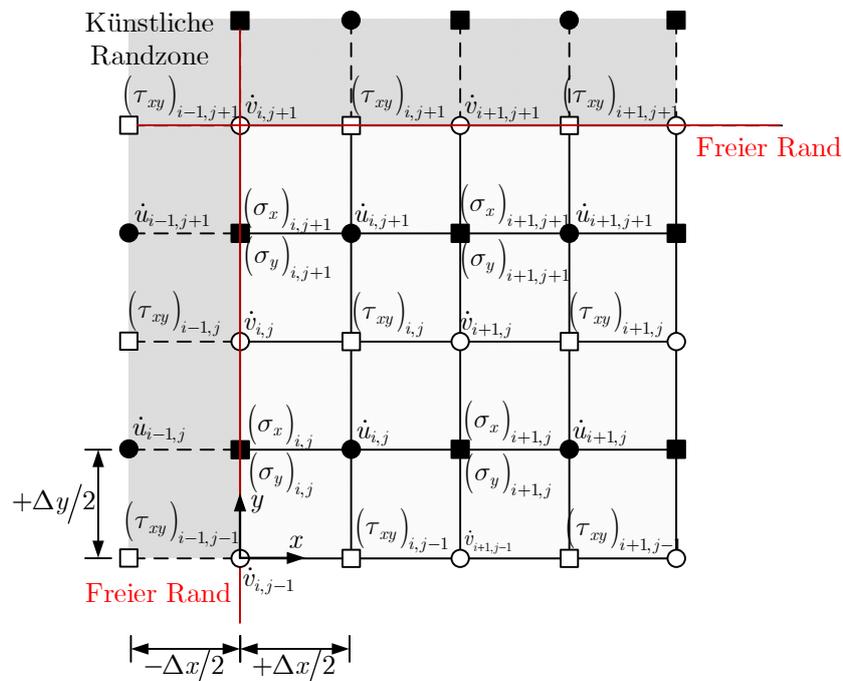


Abbildung 3.1: 2-D gestaffeltes, äquidistantes Berechnungsgitter mit freien Rändern in dem Finite-Differenzen-Verfahren.

3.1.1.2 Gestaffeltes Finite-Differenzen-Verfahren 2. Ordnung

Das „klassische“ gestaffelte FD-Verfahren 2. Ordnung entspricht für den Fall eines homogenen isotropen Festkörpers der sogenannten „Elastodynamischen Finiten Integrationstechnik (EFIT)“ [66, 219]. Daher wird an dieser Stelle die allgemeine Formulierung der EFIT-Methode angewendet, wenngleich angemerkt werden muss, dass dieses Verfahren seinem Ursprung nach aus einer integralen Betrachtung der zugrundeliegenden elastodynamischen Gleichungen resultiert und somit dem differentiellen Ansatz der FD-

Verfahren nicht entspricht. In diesem Verfahren werden die räumlichen Ableitungen in den Grundgleichungen durch die zentralen Differenzenquotienten nach der Gleichung (3.5) angenähert. Betrachtet man den ebenen Verzerrungszustand in der x - y -Ebene als 2-D Sonderfall des allgemeinen 3-D Problems aus dem Abschnitt 2.3.2, so ergibt sich für das FD-Verfahren 2. Ordnung die folgende diskretisierte Form der Bewegungsgleichungen

$$\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial t}\right)_{i,j}^{n-1/2} = \frac{2}{\rho_{0,i,j} + \rho_{0,i+1,j}} \left(\frac{\left((\sigma_x)_{i+1,j}^{n-1/2} - (\sigma_x)_{i,j}^{n-1/2}\right)}{\Delta x} + \frac{\left((\tau_{xy})_{i,j}^{n-1/2} - (\tau_{xy})_{i,j-1}^{n-1/2}\right)}{\Delta y} \right), \quad (3.6)$$

$$\left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial t}\right)_{i,j}^{n-1/2} = \frac{2}{\rho_{0,i,j} + \rho_{0,i,j+1}} \left(\frac{\left((\sigma_y)_{i,j+1}^{n-1/2} - (\sigma_y)_{i,j}^{n-1/2}\right)}{\Delta y} + \frac{\left((\tau_{xy})_{i,j}^{n-1/2} - (\tau_{xy})_{i-1,j}^{n-1/2}\right)}{\Delta x} \right) \quad (3.7)$$

und der kinematischen Gleichungen

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t}\right)_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta x} \left(\dot{u}_{i,j}^n - \dot{u}_{i-1,j}^n \right), \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t}\right)_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta y} \left(\dot{v}_{i,j}^n - \dot{v}_{i,j-1}^n \right), \quad (3.9)$$

$$\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t}\right)_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta x} \left(\dot{v}_{i+1,j}^n - \dot{v}_{i,j}^n \right) + \frac{1}{\Delta y} \left(\dot{u}_{i,j+1}^n - \dot{u}_{i,j}^n \right). \quad (3.10)$$

Hierbei stehen die tiefgestellten Indizes i und j für die Knotennummerierung in die x - und y -Richtungen ($i, j = 1 \dots N$) und der hochgestellte Index n für den Zeitschritt t . Um die aktuellen Partikelgeschwindigkeiten und Verzerrungen zu erhalten wird ein gestaffeltes „Leap-Frog-Schema“ als Zeitintegrationsverfahren verwendet. Hierbei werden zunächst die aktuellen Partikelgeschwindigkeiten zum Zeitpunkt $t = n\Delta t$ mit

$$\dot{u}_{i,j}^n = \dot{u}_{i,j}^{n-1} + \Delta t \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial t}\right)_{i,j}^{n-1/2}, \quad (3.11)$$

$$\dot{v}_{i,j}^n = \dot{v}_{i,j}^{n-1} + \Delta t \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial t}\right)_{i,j}^{n-1/2} \quad (3.12)$$

ermittelt und anschließend mit diesen Partikelgeschwindigkeiten die Dehnungen und Verzerrungen zum aktuellen Zeitpunkt $t = (n + 1/2)\Delta t$ mit

$$\left(\varepsilon_x\right)_{i,j}^{n+1/2} = \left(\varepsilon_x\right)_{i,j}^{n-1/2} + \Delta t \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t}\right)_{i,j}^n, \quad (3.13)$$

$$\left(\varepsilon_y\right)_{i,j}^{n+1/2} = \left(\varepsilon_y\right)_{i,j}^{n-1/2} + \Delta t \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t}\right)_{i,j}^n, \quad (3.14)$$

$$\left(\gamma_{xy}\right)_{i,j}^{n+1/2} = \left(\gamma_{xy}\right)_{i,j}^{n-1/2} + \Delta t \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t}\right)_{i,j}^n \quad (3.15)$$

bestimmt. Am Ende der Berechnung werden die Dehnungen und Verzerrungen in die entsprechenden konstitutiven Gleichungen eingesetzt und die aktuellen Spannungen zum Zeitpunkt $t = (n + 1/2)\Delta t$ berechnet. Weiterhin gilt zur Gewährleistung der Stabilität des Verfahrens das folgende Zeitschrittkriterium [219]:

$$\Delta t \leq \min(\Delta x, \Delta y) / (c_L \sqrt{2}). \quad (3.16)$$

3.1.1.3 Gestaffeltes Finite-Differenzen-Verfahren 4. Ordnung

Für das gestaffelte FD-Verfahren 4. Ordnung nach [129] werden die Differentialoperatoren 2. Ordnung durch die Approximationen 4. Ordnung ersetzt. Daher kann der Rechenablauf des FD-Verfahrens 2. Ordnung übernommen werden, wobei die Grundgleichungen entsprechend in

$$\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial t}\right)_{i,j}^{n-1/2} = \frac{2}{\rho_{0,i,j} + \rho_{0,i+1,j}} \left(D_x^+ \left(\sigma_x^{n-1/2} \right) + D_y^- \left(\tau_{xy}^{n-1/2} \right) \right), \quad (3.17)$$

$$\left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial t}\right)_{i,j}^{n-1/2} = \frac{2}{\rho_{0,i,j} + \rho_{0,i,j+1}} \left(D_y^+ \left(\sigma_y^{n-1/2} \right) + D_x^- \left(\tau_{xy}^{n-1/2} \right) \right), \quad (3.18)$$

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t}\right)_{i,j}^n = D_x^- \left(\dot{u}^n \right), \quad \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t}\right)_{i,j}^n = D_y^- \left(\dot{v}^n \right), \quad \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t}\right)_{i,j}^n = D_x^+ \left(\dot{v}^n \right) + D_y^+ \left(\dot{u}^n \right) \quad (3.19)$$

umgeschrieben werden können. Hierbei werden die folgenden Differentialoperatoren 4. Ordnung eingeführt:

$$\begin{aligned}
D_x^+(q) &= \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{24} (q_{i-1,j} - q_{i+2,j}) + \frac{9}{8} (q_{i+1,j} - q_{i,j}) \right), \\
D_x^-(q) &= \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{24} (q_{i-2,j} - q_{i+1,j}) + \frac{9}{8} (q_{i,j} - q_{i-1,j}) \right),
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
D_y^+(q) &= \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{1}{24} (q_{i,j-1} - q_{i,j+2}) + \frac{9}{8} (q_{i,j+1} - q_{i,j}) \right), \\
D_y^-(q) &= \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{1}{24} (q_{i,j-2} - q_{i,j+1}) + \frac{9}{8} (q_{i,j} - q_{i,j-1}) \right).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Die notwendige Zeitintegration kann dann wie bei dem FD-Verfahren 2. Ordnung über das „*Leap-Frog-Schema*“ erfolgen.

3.1.1.4 Randbedingungen

Da im Fall eines gestaffelten Berechnungsgitters die betrachteten Feldgrößen nicht alle an einem gemeinsamen Knoten definiert sind, führt dies in der Folge dazu, dass auch die zur Erfüllung der Randbedingungen erforderlichen Feldgrößen nicht auf einem gemeinsamen Rand definiert sind. Um diese Schwierigkeiten zu überwinden, hat sich das nachfolgend beschriebene Vorgehen bei den gestaffelten FD-Verfahren etabliert. Hierbei wird das physikalische Berechnungsgebiet zunächst um ein künstliches Randgebiet erweitert. Anschließend werden die nicht exakt am Rand angeordneten Feldgrößen unter Symmetriebetrachtungen in das künstliche Randgebiet übertragen bzw. gespiegelt (siehe Abbildung 3.1). Betrachtet man beispielweise den freien Rand des 2-D Gebietes in y -Richtung bei $x = 0$ und setzt man zusätzlich voraus, dass die Normalspannungen exakt am Rand angeordnet sind, so kann die Normalspannung σ_x hier sofort zu null gesetzt werden. Um auch für die um $\Delta x/2$ versetzt angeordnete Schubspannung die Randbedingung von $\tau_{xy} = 0$ am Rand zu erfüllen, wird das physikalische Gebiet um $\Delta x/2$ erweitert und der Wert für die Schubspannung an dieser Stelle durch antimetrische Spiegelung um den Rand erhalten. Somit ergibt sich für die Schubspannung τ_{xy} im künstlichen Randbereich

$$\tau_{xy}(x = -\Delta x/2, y) = -\tau_{xy}(x = +\Delta x/2, y). \tag{3.22}$$

Die ebenfalls um $\Delta x/2$ versetzt angeordnete horizontale Geschwindigkeit \dot{u} wird in diesem Fall über eine symmetrische Spiegelung um den Rand bei $x = 0$ erhalten, d. h.

$$\dot{u}(x = -\Delta x/2, y) = \dot{u}(x = +\Delta x/2, y). \tag{3.23}$$

Je nach Ordnung des FD-Verfahrens muss der künstliche Randbereich dabei um zusätzliche Knoten erweitert werden. Der physikalische Hintergrund dieser Technik basiert auf dem Grundprinzip der einfallenden und ausfallenden Wellen. Für den Fall, dass die Feldgröße am Rand null sein soll, muss die zugehörige Welle außerhalb des physikalischen Gebietes (einfallend) also Vorzeichen umgekehrt zur Welle innerhalb des Gebietes (ausfallend) laufen, daher antimetrisch. Generell liefert diese Art der Implementierung der Randbedingungen sehr gute und stabile numerische Ergebnisse und lässt sich recht einfach implementieren. Das prinzipielle Vorgehen kann dabei auch auf andere Randbedingungen (DIRICHLET) und höhere Dimensionen (3-D) übertragen werden. In der Literatur wird diese Methodik auch oft als „*Mirror-Technik*“ oder „*Image-Methode*“ bezeichnet [174].

3.1.2 Finite-Volumen-Verfahren

Das Finite-Volumen-Verfahren (FV-Verfahren) ist eine numerische Methode zur Lösung von PDG in Erhaltungsform. Häufige Anwendung findet es in Bereichen der Strömungsmechanik sowie allgemein bei der Behandlung nichtlinearer hyperbolischer Systeme (EULER-Gleichung, BURGERS-Gleichung). Das Verfahren basiert auf einer Zerlegung des Berechnungsgebietes Ω in eine endliche Anzahl von kleinen Teilvolumen Ω_j (finite Volumen) polygoner bzw. polyedrischer Gestalt. Der Vorteil dieses Verfahrens liegt in der geometrischen Flexibilität sowie in der Konservierung der grundlegenden Erhaltungsgrößen.

3.1.2.1 Grundlagen

Ausgehend vom folgenden System aus Erhaltungsgleichungen gemäß Abschnitt 2.3.2

$$\mathbf{q}_t = \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{q}), \quad (3.24)$$

mit dem Tensor $\mathbf{F}(\mathbf{q}) = [\mathbf{f}(\mathbf{q}), \mathbf{g}(\mathbf{q}), \mathbf{h}(\mathbf{q})]$ und dem Nabla-Operator ∇ lässt sich unter Verwendung des GAUSSschen Integralsatzes folgende integrale Darstellung der Erhaltungsgleichungen für eine ausgewählte Gitterzelle mit dem Volumen Ω_j erhalten:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_j} \mathbf{q} dV = - \int_{\partial\Omega_j} \mathbf{F}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.25)$$

Hierbei werden der Zustandsgrößenvektor \mathbf{q} über das Volumen Ω_j und der Flusstensor $\mathbf{F}(\mathbf{q})$ über den zugehörigen Rand $\partial\Omega_j$ integriert. Berechnung des Zustandsgrößenvektors \mathbf{q} im integralen Mittel mit

$$\bar{\mathbf{q}} = \frac{1}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} \mathbf{q} dV \quad (3.26)$$

und Zeitintegration über das Intervall $\{t_n, t_{n+1}\}$ führt auf die Evolutionsgleichung für die Mittelwerte eines finiten Volumens

$$\bar{\mathbf{q}}^{n+1} = \bar{\mathbf{q}}^n - \frac{1}{|\Omega_j|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial\Omega_j} \mathbf{F}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} dS dt. \quad (3.27)$$

Basierend auf dieser Gleichung werden die entsprechenden FV-Verfahren entwickelt. Anhand dieser Gleichung wird auch ersichtlich, dass die Zustandsgrößen innerhalb der Gitterzelle zu ermitteln sind und der zugehörige Fluss an den Rändern zu bestimmen ist. Daher muss der Fluss an den Rändern stets durch eine geeignete Rekonstruktion aus den Mittelwerten innerhalb der Zelle bestimmt werden.

Für den allgemeinen 2-D Fall lautet das System der Erhaltungsgleichungen (3.24):

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{q}) + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{g}(\mathbf{q}). \quad (3.28)$$

Dabei soll zur numerischen Lösung des 2-D Problems (3.28) das in der Abbildung 3.2 dargestellte Berechnungsgitter eines klassischen FV-Verfahrens mit einer äquidistanten Gitterweite $\Delta x = \Delta y = \Delta$ vorausgesetzt werden.

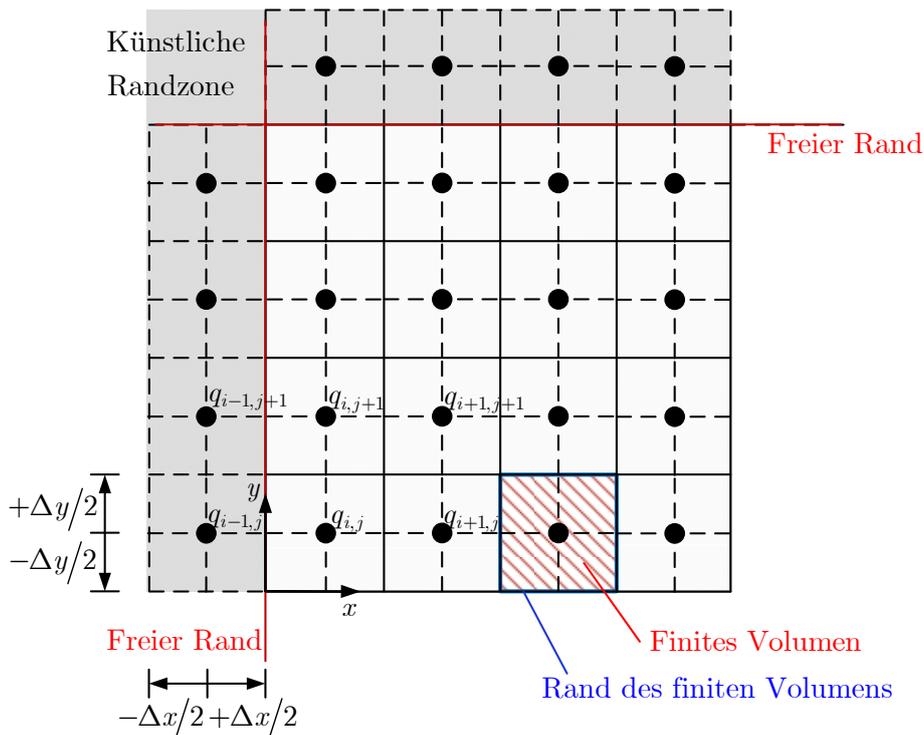


Abbildung 3.2: 2-D äquidistantes Berechnungsgitter mit freien Rändern im Finite-Volumen-Verfahren.

Hierfür erhält man aus der Gleichung (3.28) den folgenden semi-diskreten Ausdruck

$$\frac{d\mathbf{q}_{i,j}}{dt} = -\frac{1}{\Delta} \left[\left(\mathbf{f}_{i+1/2,j} - \mathbf{f}_{i-1/2,j} \right) + \left(\mathbf{g}_{i,j+1/2} - \mathbf{g}_{i,j-1/2} \right) \right]. \quad (3.29)$$

Werden die Zustandsgrößen in jeder Zelle als konstant angenommen, führt dies in einem *Upwind*-Verfahren 1. Ordnung, dem sogenannten GODUNOV-Schema, zu [74]

$$\frac{d\mathbf{q}_{i,j}}{dt} = -\frac{1}{\Delta} \left[\left(\mathbf{f}(\mathbf{q}_{i,j}) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_{i+1,j}) \right) + \left(\mathbf{g}(\mathbf{q}_{i,j}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_{i+1,j}) \right) \right]. \quad (3.30)$$

3.1.2.2 Kurganov-Tadmor-Schema

Mit dem Schema in der Gleichung (3.30) lassen sich FV-Verfahren höherer Ordnung entwickeln, welche jedoch nur für ausreichend glatte Probleme sinnvoll und genau sind. Denn gerade bei starken Diskontinuitäten und den sogenannten Schockwellen kommt es zu ungewöhnlichen Schwingungen an Stellen ausgeprägter Gradienten. Daher wurden die sogenannten hochauflösenden „TVD-Methoden“ entwickelt, die ein Überspringen an den Diskontinuitäten verhindern und die Lösung hoch nichtlinearer Prozesse ermöglichen. Die Abkürzung TVD steht hierbei für „*Total Variation Diminishing*“ und gewährleistet unter anderem die Monotonie der Lösung durch die Forderung, dass beispielsweise die „totale Variation“ im 2-D Berechnungsgebiet nach [209]

$$TV(\mathbf{q}^n) = \sum_i \sum_j \Delta \left[\left\| \mathbf{q}_{i+1,j}^n - \mathbf{q}_{i,j}^n \right\| + \left\| \mathbf{q}_{i,j+1}^n - \mathbf{q}_{i,j}^n \right\| \right] \quad (3.31)$$

in jedem Zeitschritt das folgende Kriterium

$$TV(\mathbf{q}^{n+1}) \leq TV(\mathbf{q}^n) \quad (3.32)$$

erfüllt. Generell basieren diese Verfahren auf einer Extrapolation der Zustandsgrößen auf den Rand einer Zelle unter Verwendung der sogenannten „*Slope-Limiter*-Funktionen“, die die TVD-Eigenschaft der Lösung gewährleisten.

Betrachtet man die Wellenausbreitung in nichtlinear-elastischen Festkörpern, können sich unter bestimmten Voraussetzungen auch Schockwellen entwickeln. Dennoch sind solche stark-nichtlineare Effekte in realen Ultraschallexperimenten an Festkörpern nicht zu beobachten, da die vorkommenden Nichtlinearitäten stets sehr klein sind und die nichtlineare Lösung somit nicht stark von der linearen Lösung abweicht.

Dementsprechend werden diese speziellen FV-Verfahren in dieser Arbeit nur zur Simulation starker nichtlinearer Wellenausbreitung verwendet. Hierfür wird das sogenannte KURGANOV-TADMOR-Schema (KT-Schema [120]) verwendet, welches auf dem

NESSYAHU-TADMOR-Schema [157] basiert und sich insbesondere durch eine geringere numerische Dispersion auszeichnet. Das Verfahren ist hiermit den zuvor beschriebenen hochauflösenden TVD-Verfahren zuzuordnen und ist ursprünglich ein zentrales Differenzschema 2. Ordnung. Im Weiteren soll dieses Verfahren für den semi-diskreten 2-D Fall kurz erläutert werden. Bezugnehmend auf die Ausgangsgleichung (3.29) ist der Fluss über den rechten und den unteren Rand der Zelle folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{f}_{i+1/2,j}(t) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{q}_{i+1/2,j}^+(t)) + \mathbf{f}(\mathbf{q}_{i+1/2,j}^-(t))}{2} - \frac{\mathbf{a}_{i+1/2,j}(t)}{2} (\mathbf{q}_{i+1/2,j}^+(t) - \mathbf{q}_{i+1/2,j}^-(t)), \quad (3.33)$$

$$\mathbf{g}_{i,j+1/2}(t) = \frac{\mathbf{g}(\mathbf{q}_{i,j+1/2}^+(t)) + \mathbf{g}(\mathbf{q}_{i,j+1/2}^-(t))}{2} - \frac{\mathbf{b}_{i,j+1/2}(t)}{2} (\mathbf{q}_{i,j+1/2}^+(t) - \mathbf{q}_{i,j+1/2}^-(t)). \quad (3.34)$$

Hierbei werden die lokalen Ausbreitungsgeschwindigkeiten über den Spektralradius ρ der JACOBI-Matrix des jeweiligen Flusses ermittelt

$$\mathbf{a}_{i+1/2,j}(t) = \max \left(\rho \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_{i+1/2,j}^+(t)) \right), \rho \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_{i+1/2,j}^-(t)) \right) \right), \quad (3.35)$$

$$\mathbf{b}_{i+1/2,j}(t) = \max \left(\rho \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_{i+1/2,j}^+(t)) \right), \rho \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_{i+1/2,j}^-(t)) \right) \right). \quad (3.36)$$

Die verwendeten Zwischenwerte ergeben sich hierbei aus den Zustandsgrößen benachbarter Zellen zu

$$\mathbf{q}_{i+1/2,j}^\pm(t) = \mathbf{q}_{i+1,j}(t) \mp \frac{\Delta}{2} (\mathbf{q}_x)_{i+1/2 \pm 1/2,j}(t), \quad (3.37)$$

$$\mathbf{q}_{i,j+1/2}^\pm(t) = \mathbf{q}_{i,j+1}(t) \mp \frac{\Delta}{2} (\mathbf{q}_y)_{i,j+1/2 \pm 1/2}(t). \quad (3.38)$$

Die Steigungen \mathbf{q}_x bzw. \mathbf{q}_y werden unter Verwendung der „*Slope-Limiter-Funktionen*“ berechnet, wie beispielsweise unter Verwendung eines sogenannten „*Minmod-Limiters*“. Dabei erhält man

$$(\mathbf{q}_x)_i = \text{minmod} \left(\theta \frac{\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}}{\Delta}, \frac{\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_{i-1}}{2\Delta}, \theta \frac{\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i}{\Delta} \right). \quad (3.39)$$

Mit dem Parameter θ ($1 \leq \theta \leq 2$) lässt sich die numerische Dispersion des Verfahrens regulieren. Die zugehörige „*Minmod-Funktion*“ ist nach [120] folgendermaßen definiert:

$$\text{minmod}(a, b, c) = \begin{cases} \min(a, b, c) & , \text{ falls } \{a, b, c\} > 0, \\ \max(a, b, c) & , \text{ falls } \{a, b, c\} < 0, \\ 0 & , \text{ andernfalls.} \end{cases} \quad (3.40)$$

Anschließend kann das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen z. B. durch ein RUNGE-KUTTA-Verfahren 2. Ordnung (siehe Anhang A.4) explizit gelöst werden. Hierbei ist die folgende COURANT–FRIEDRICHS–LEWY (CFL)-Stabilitätsbedingung einzuhalten [120]

$$\max\left(\frac{\Delta t}{\Delta} \mathbf{a}_{i+1/2,j}, \frac{\Delta t}{\Delta} \mathbf{b}_{i,j+1/2}\right) \leq \frac{1}{2}. \quad (3.41)$$

3.1.2.3 Randbedingungen

Für die FV-Verfahren werden in der Regel ähnliche Methoden zur Implementierung der Randbedingungen angewendet, wie bereits für die gestaffelten FD-Verfahren (Spiegelung um den physikalischen Rand [130]) beschrieben. Hierbei sind aber alle Feldgrößen an einem gemeinsamen Knoten angeordnet. So ergibt sich beispielsweise für den freien Rand bei $x = 0$ eines 2-D Gebietes in y -Richtung (siehe Abbildung 3.2) der folgende Zusammenhang zwischen den Feldgrößen im künstlichen Randbereich ($x = -\Delta x/2$) und denen innerhalb des physikalischen Rechengebietes ($x = +\Delta x/2$):

$$\begin{aligned} \sigma_x(x = -\Delta x/2, y) &= -\sigma_x(x = +\Delta x/2, y), \\ \tau_{xy}(x = -\Delta x/2, y) &= -\tau_{xy}(x = +\Delta x/2, y), \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y(x = -\Delta x/2, y) &= \sigma_y(x = +\Delta x/2, y), \\ \dot{u}(x = -\Delta x/2, y) &= \dot{u}(x = +\Delta x/2, y), \\ \dot{v}(x = -\Delta x/2, y) &= \dot{v}(x = +\Delta x/2, y). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Somit werden hier alle Feldgrößen über die Symmetriebetrachtungen der Randbedingungen definiert. Diese Technik lässt sich auch auf den unverschieblichen Rand übertragen bzw. erweitern. Zur Implementierung eines absorbierenden Randes ist es im Fall der FV-Verfahren oft ausreichend, die entsprechenden Feldgrößen innerhalb des physikalischen Gebietes über eine konstante Extrapolation [130] in den künstlichen Randbereich zu übertragen.

3.1.3 Pseudospektrale Kollokationsmethoden

Erhöht man stetig die Ordnung eines allgemeinen FD-Verfahrens, so lässt sich in Abhängigkeit der Knotenanzahl bzw. der räumlichen Diskretisierung eine maximale Ordnung des Verfahrens definieren. Für diesen Grenzfall bilden sich die Differenzenquotienten (Ableitungen) an einem betrachteten Knotenpunkt aus allen übrigen Funktionswerten des Gesamtgebietes entlang der betrachteten Ableitungsrichtung. Dieser Grenzfall eines „klassischen“ FD-Verfahrens wird üblicherweise als globales Verfahren bezeichnet. Im Gegensatz hierzu werden die räumlichen Ableitungen bei den „klassischen“ FD-Verfahren niedriger Ordnung ausschließlich aus den benachbarten Knotenwerten ermittelt, weshalb diese als lokale Verfahren zu verstehen sind.

Der Grundgedanke der numerischen Lösung des entsprechenden ARWP bzw. RWP unter Verwendung einer globalen Näherungsfunktion über das gesamte Berechnungsgebiet bildet den Ausgangspunkt für die Herleitung der (Pseudo-)spektralen-Kollokationsmethoden. Dazu wird unter Verwendung geeigneter orthogonaler Ansatzfunktionen die globale Näherungslösung über das Gesamtgebiet eingeführt. Dabei wird gefordert, dass die globale Näherungsfunktion die zugrundeliegenden PDG an den ausgewählten Punkten des Gesamtgebietes, den sogenannten Kollokationspunkten, exakt erfüllt. Der Begriff „spektral“ bezieht sich dabei auf die Transformation des physikalischen Problems in den spektralen Raum der orthogonalen Basisfunktionen und die Berechnung der zugehörigen spektralen Koeffizienten. Als Ansatzfunktionen für periodische Probleme werden dabei üblicherweise trigonometrische Näherungsfunktionen auf Basis einer Sinus-, Kosinus- oder FOURIER-Reihenentwicklung verwendet. Zur numerischen Behandlung allgemeiner nicht-periodischer Probleme (ARWP bzw. RWP mit wesentlichen und natürlichen Randbedingungen) haben sich Verfahren unter Verwendung orthogonaler Polynome (LEGENDRE-, LAGUERRE- und CHEBYSHEV-Polynome) etabliert [24, 33, 77].

Die Kollokations-Spektralmethode führt dabei, wie bereits erwähnt, auf ein Verfahren das vergleichbar mit einem globalen FD-Verfahren ist. Dabei lässt sich der notwendige Prozess der Transformation der PDG in den Spektralraum, Ableitung im Spektralraum und anschließende Rücktransformation durch Verwendung einer Differenzenmatrix (Ableitungsmatrix) ähnlich dem Vorgehen bei den FD-Verfahren durchführen. Da bei der Kollokationsmethode nur die räumlichen Ableitungen im spektralen Raum und die restlichen Rechenoperationen im Realraum durchgeführt werden, wird die Kollokations-Spektralmethode in Abgrenzung zur GALERKIN-Spektralmethode auch als Pseudospektralmethode bzw. pseudospektrale Kollokationsmethode bezeichnet. Generell führt eine pseudospektrale Kollokationsmethode [70] auf ein vergleichsweise einfaches

numerisches Verfahren, welches insbesondere im Hinblick auf die Implementierungen von nichtlinearen und komplexen PDG gewisse Vorteile gegenüber anderen Spektralmethoden aufweist. Die allgemeinen Stärken der Spektralmethoden im Vergleich zu anderen numerischen Verfahren liegen dabei in der typischerweise spektralen bzw. exponentiellen Konvergenz, der sehr geringen numerischen Dispersion und der guten Auflösung bei grober Diskretisierung. Betrachtet man beispielsweise die FOURIER-Pseudospektralmethode [68, 115-117], für ein ausreichend glattes Problem, so benötigt man hier eine Mindestanzahl von „2“ Gitterknoten [49, 71] pro Wellenlänge bzw. bei einer CHEBYSHEV-Pseudospektralmethode eine Mindestanzahl von „ π “, Gitterknoten pro Wellenlänge [76] zur Auflösung des Problems. Dagegen sind für ein „klassisches“ gestaffeltes FD-Verfahren 4. Ordnung üblicherweise ca. „5“ Gitterknoten pro (kleinster) Wellenlänge notwendig, um beispielsweise eine Gitterdispersion zu verhindern [129]. Dies führt insbesondere bei 3-D Berechnungen zu einer drastischen Reduzierung der Unbekannten und damit zu einem geringeren Arbeitsspeicherbedarf und Rechenaufwand.

Da die in dieser Arbeit betrachteten ARWP nicht-periodische Randbedingungen und teilweise komplexe konstitutive Gleichungen besitzen, wird zur numerischen Berechnung die CHEBYSHEV-Pseudospektrale-Kollokationsmethode verwendet. Dabei wird die im folgenden Abschnitt beschriebene klassische CHEBYSHEV-Pseudospektrale-Kollokationsmethode [169, 205, 206] weiterentwickelt bzw. hinsichtlich der konkreten Problemstellung und der numerischen Anforderungen modifiziert. Diese modifizierte Methode soll im zweiten Teil dieses Abschnittes beschrieben werden. Im weiteren Verlauf der Darstellung wird die CHEBYSHEV-Pseudospektrale-Kollokationsmethode verkürzt als CHEBYSHEV-Pseudospektrale-Methode (CPS-Methode) bezeichnet.

3.1.3.1 Chebyshev-Pseudospektrale-Kollokationsmethode

Die klassische CPS-Methode wurde bereits vor mehreren Jahrzehnten entwickelt und seither erfolgreich zur numerischen Lösung zahlreicher dynamischer Probleme im Bereich der Ingenieurwissenschaft, Geologie und Meteorologie angewendet. Hierbei bietet sich die Methode aufgrund der spektralen Konvergenz, der hohen Genauigkeit und der ausgeprägten parallelen Berechnungsstruktur insbesondere für die numerische Lösung 3-D Probleme an [36, 207]. Ausgehend von dem grundlegenden ARWP werden die zugehörigen Feldgrößen auf einem nicht-äquidistanten Berechnungsgitter angeordnet und berechnet. Hierbei werden die Gitterpunkte durch die zugehörigen GAUSS-LOBATTO-Punkte

$$\xi_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right), \quad i = 0, \dots, N, \quad (3.44)$$

definiert. Dies führt zu einer feineren bzw. dichteren Anordnung der Gitterpunkte an den Rändern des Berechnungsgitters. Hierdurch verhindert man im diskontinuierlichen Randbereich, wo die Lösung stark von der glatten Lösung des inneren Gebietes abweicht, ein Auftreten des sogenannten RUNGE-Phänomens [213], welches bei der Verwendung eines äquidistanten Gitters zu unphysikalischen Ausschlägen bzw. Schwingungen in der Nähe der Diskontinuitäten der Lösung führt. Die Abbildung 3.3 zeigt das maßgebende 2-D nicht-äquidistante Berechnungsgitter der klassischen CPS-Methode zur Berechnung der elastischen Wellenausbreitung in einem Festkörper. Dabei sind alle notwendigen Feldgrößen (Spannungen, Verzerrungen, Partikelgeschwindigkeiten) an einem gemeinsamen Knoten angeordnet.

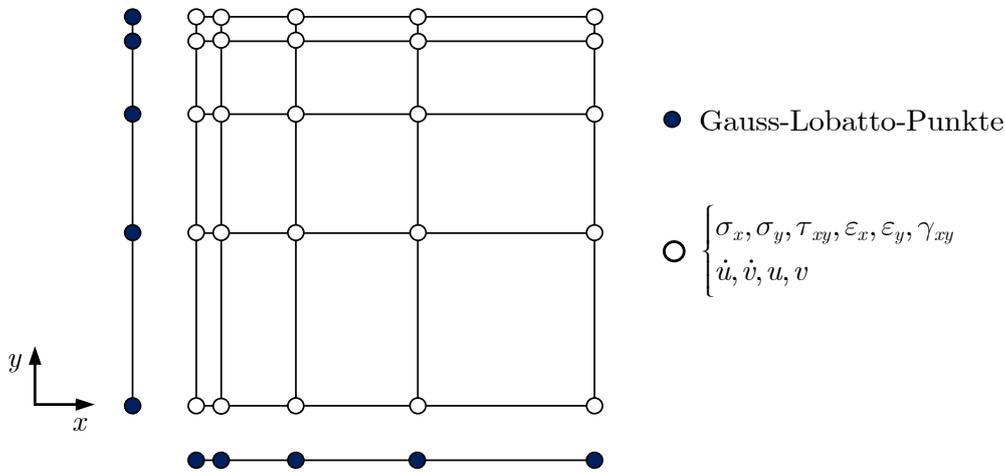


Abbildung 3.3: 2-D nicht-äquidistantes Berechnungsgitter in der klassischen CPS-Methode.

Die Lösung der Feldgrößen \hat{f} im Berechnungsgebiet $-1 \leq \xi \leq 1$ wird durch eine Reihe von CHEBYSHEV-Polynomen approximiert, d. h.

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(\xi). \quad (3.45)$$

Die räumliche Ableitung der Feldgrößen ergibt sich dann über die Ableitung der CHEBYSHEV-Polynome im transformierten Raum

$$\hat{f}_{,\xi} = \frac{\partial \hat{f}(\xi)}{\partial \xi} = \sum_{k=0}^N a_k \frac{\partial T_k(\xi)}{\partial \xi}. \quad (3.46)$$

Hierbei sind die CHEBYSHEV-Polynome T_k durch

$$T_k(\xi) = \cos(k \cos^{-1}(\xi)) \quad (3.47)$$

definiert. Somit stellt die Reihe der CHEBYSHEV-Polynome (3.45) eine koordinaten-transformierte Variante der Kosinus-Reihenentwicklung dar. Wodurch die räumlichen Ableitungen ähnlich der FOURIER-Pseudospektralmethode auch sehr effizient über die schnelle FOURIER-Transformation (FFT, siehe Anhang A.2) berechnet werden können. Wie bei den FD-Verfahren, lassen sich die räumlichen Ableitungen auf dem zugehörigen finiten nicht-äquidistanten Berechnungsgitter durch

$$\hat{f}_{,\xi}(\xi_i) = \mathbf{D}_{\text{GL}} \cdot \hat{f}(\xi_i), \quad i = 0, \dots, N, \quad (3.48)$$

direkt über eine Matrizenmultiplikation der Differenzenmatrix \mathbf{D}_{GL} mit dem zugehörigen Knotenvektor der Feldgrößen $\hat{\mathbf{f}} = \hat{f}(\xi_i)$ erhalten. Die zugehörige CHEBYSHEV-Differenzenmatrix für eine GAUSS-LOBATTO-Verteilung lautet nach [24]

$$\mathbf{D}_{\text{GL}} = D_{ij} = \begin{cases} \frac{2N^2 + 1}{6}, & i = j = 0, \\ \frac{\tilde{c}_i (-1)^{i+j+N}}{\tilde{c}_j (\xi_i - \xi_j)}, & i \neq j, \\ -\frac{x_i}{2(1 - \xi_i^2)}, & 0 < i = j < N, \\ -\frac{2N^2 + 1}{6}, & i = j = N, \end{cases} \quad (3.49)$$

mit $\tilde{c}_0 = \tilde{c}_N = 2$ und sonst $\tilde{c}_i = \tilde{c}_j = 1$. Betrachtet man ein 2-D ARWP nach Abschnitt 2.3.2 auf dem quadratischen Einheitsgebiet $(\xi, \eta) \in [1, -1] \times [1, -1]$ und setzt voraus, dass die Knotenanzahl in beiden Koordinatenrichtungen gleich ist ($N_x = N_y = N$), so resultiert hieraus die folgende semi-diskrete Form:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t} = \boldsymbol{\rho}^{-1} \left(\boldsymbol{\sigma}_x (\mathbf{D}_{\text{GL}})^{\text{T}} + \mathbf{D}_{\text{GL}} \boldsymbol{\tau}_{xy} \right), \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{v}}}{\partial t} = \boldsymbol{\rho}^{-1} \left(\boldsymbol{\tau}_{xy} (\mathbf{D}_{\text{GL}})^{\text{T}} + \mathbf{D}_{\text{GL}} \boldsymbol{\sigma}_y \right), \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_x}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}} (\mathbf{D}_{\text{GL}})^{\text{T}}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_y}{\partial t} = \mathbf{D}_{\text{GL}} \dot{\mathbf{v}}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{xy}}{\partial t} = \dot{\mathbf{v}} (\mathbf{D}_{\text{GL}})^{\text{T}} + \mathbf{D}_{\text{GL}} \dot{\mathbf{u}}. \quad (3.52)$$

Hierbei werden die räumlichen Ableitungen in x - und y -Richtung durch den entsprechenden CHEBYSHEV-Differentialoperator (3.49) ersetzt. Anschließend lassen sich die gewöhnlichen Differentialgleichungen mit einem geeigneten Zeitintegrationsverfahren lösen. In der Literatur werden dabei für die klassische CPS-Methode unter anderem RUNGE-KUTTA (RK)-Verfahren höherer Ordnung empfohlen [33, 34]. In dieser Arbeit

wird speziell das sogenannte „*Strong-Stability-Preserving* (SSP)“-RK-Verfahren 3. Ordnung [96] (siehe Anhang A.4) eingesetzt, welches insbesondere für nichtlineare Probleme geeignet ist. Schließlich müssen in jedem Zeitschritt die aktuellen Spannungen aus den aktuellen Dehnungen und Verzerrungen unter Verwendung der zugehörigen Materialgesetze berechnet werden (vgl. Abschnitt 3.1.1).

Aufgrund der feinen Diskretisierung an den Rändern des Berechnungsgebietes ergibt sich für ein explizites Zeitintegrationsverfahren in der Regel ein sehr strenges Stabilitätskriterium. Der gewählte Zeitschritt muss dabei die folgende Bedingung

$$\Delta t = O(N^{-2}) \quad (3.53)$$

erfüllen. Daher wird üblicherweise das nicht-äquidistante Berechnungsgitter, welches über die GAUSS-LOBATTO-Punkte definiert ist, durch die Verwendung geeigneter Transformationsfunktionen (*Mapping-Funktionen*) zu einem „eher äquidistanten“ Gitter transformiert. In der Literatur werden zahlreiche Transformationsfunktionen vorgeschlagen. In dieser Arbeit wird dabei die folgende Transformationsfunktion

$$\psi = g(\xi, \alpha) = \frac{\arcsin(\alpha\xi)}{\arcsin(\alpha)} \quad (3.54)$$

nach [114] gewählt. Hierbei werden die ursprünglichen Koordinaten ξ der GAUSS-LOBATTO-Knotenverteilung auf die neue Koordinate ψ transformiert. Der Parameter α steuert hierbei das Maß der Verzerrung bezogen auf die ursprüngliche Verteilung. So bedeutet $\alpha \rightarrow 1$ ein nahezu äquidistantes Gitter. Die räumlichen Ableitungen nach der neuen Koordinate ψ ergeben sich dann durch die Verwendung der Kettenregel gemäß

$$\frac{d\hat{f}}{d\psi} = \left(\frac{dg}{d\xi}\right)^{-1} \frac{d\hat{f}}{d\xi}. \quad (3.55)$$

Daher muss zur Ableitung nach der neuen Koordinate ψ der entsprechende CHEBYSHEV-Differentialoperator lediglich mit dem Kehrwert der Ableitung der gewählten Transformationsfunktion multipliziert werden. Dies führt zu einem verbesserten Zeitschrittkriterium

$$\Delta t = O(N^{-1}). \quad (3.56)$$

In dieser Arbeit wird für alle numerischen Berechnungen mittels der CPS-Methoden ein Wert von $\alpha = 0,93$ für die Transformationsfunktionen (3.54) verwendet. Dies stellt

einen guten Kompromiss zwischen der Genauigkeit der Lösung und der benötigten Rechenzeit dar.

3.1.3.2 Modifizierte Chebyshev-Pseudospektrale-Kollokationsmethode

Zur Verbesserung der Stabilität und zur Ausnutzung der Vorteile eines gestaffelten Verfahrens wurde die im vorigen Abschnitt erläuterte klassische CPS-Methode hinsichtlich der Anordnung der Feldgrößen im Rechengebiet modifiziert. Die folgenden Erläuterungen beziehen sich dabei auf den allgemeinen 2-D Fall und sind im Vorgehen an die in den Abschnitten 3.1.1.2 und 3.1.1.3 behandelten gestaffelten FD-Verfahren angelehnt.

Um die Feldgrößen des ARWP versetzt im Berechnungsgebiet anzuordnen, müssen hier zwei Berechnungsgitter verwendet werden. Dabei ist das erste Berechnungsgitter über die GAUSS-LOBATTO-Punkte durch die Gleichung (3.44) und das zweite Berechnungsgitter über die GAUSS-Punkte [103]

$$\bar{\xi}_{i+1/2} = \cos\left(\frac{2i+1}{2N}\pi\right), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (3.57)$$

definiert. Die Abbildung 3.4 zeigt hierzu das 2-D nicht-äquidistante und gestaffelte Berechnungsgitter der modifizierten CPS-Methode. Dabei sind die Normalspannungen, die Schubspannungen und die Partikelgeschwindigkeiten über die GAUSS-LOBATTO- und GAUSS-Knotenverteilung versetzt angeordnet.

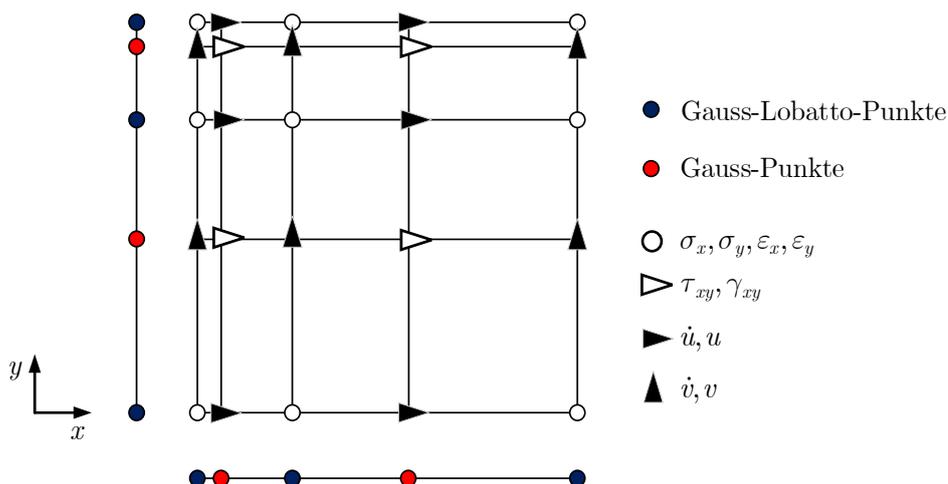


Abbildung 3.4: 2-D nicht-äquidistantes gestaffeltes Berechnungsgitter der modifizierten CPS-Methode.

Anschließend werden unter Anwendung der CHEBYSHEV-Polynome die Differenzenmatrizen für die beiden Knotenverteilungen hergeleitet. Hierbei erhält man für die GAUSS-LOBATTO-Knotenverteilung die Differenzenmatrix \mathbf{D}_{GL} (3.49) und für die GAUSS-Knotenverteilung die folgende Differenzenmatrix [24]

$$\mathbf{D}_G = D_{ij} = \begin{cases} \frac{\bar{\xi}_{i+1/2}}{2(1 - \bar{\xi}_{i+1/2}^2)}, & i = j, \\ (-1)^{i+j+1} \frac{\sqrt{(1 - \bar{\xi}_{j+1/2}^2)/(1 - \bar{\xi}_{i+1/2}^2)}}{\bar{\xi}_{i+1/2} - \bar{\xi}_{j+1/2}}, & i \neq j. \end{cases} \quad (3.58)$$

Zur Interpolation bzw. Übertragung der Feldgrößen zwischen den beiden versetzt angeordneten Gittern werden auf Basis der CHEBYSHEV-Polynome die Interpolationsmatrizen I_{ij} für die GAUSS-LOBATTO-Knotenverteilung und die GAUSS-Knotenverteilung hergeleitet und sie lauten [24, 103]:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{GL} = I_{ij} &= \frac{(-1)^{i+j+1} \sqrt{1 - \bar{\xi}_{i+1/2}^2}}{c_j N (\bar{\xi}_{i+1/2} - \xi_j)}, & i = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, N, \\ \mathbf{I}_G = I_{ij} &= \frac{(-1)^{i+j} \sqrt{1 - \bar{\xi}_{j+1/2}^2}}{N (\xi_i - \bar{\xi}_{j+1/2})}, & i = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Betrachtet man das 2-D elastodynamische Problem auf dem quadratischen Einheitsgebiet $(\xi, \eta) \in [1, -1] \times [1, -1]$, wie im Abschnitt 3.1.3.1 bereits vorgestellt, und setzt wiederum voraus, dass die Anzahl der Knoten in beiden Koordinatenrichtungen gleich ist ($N_x = N_y = N$), so resultiert hieraus die folgende semi-diskrete Form der Grundgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t} &= \boldsymbol{\rho}_0^{-1} \left(\boldsymbol{\sigma}_x (\mathbf{I}_{GL} \mathbf{D}_{GL})^T + \mathbf{I}_G \mathbf{D}_G \boldsymbol{\tau}_{xy} \right), \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}}{\partial t} &= \boldsymbol{\rho}_0^{-1} \left(\boldsymbol{\tau}_{xy} (\mathbf{I}_G \mathbf{D}_G)^T + \mathbf{I}_{GL} \mathbf{D}_{GL} \boldsymbol{\sigma}_y \right), \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_x}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}} (\mathbf{I}_G \mathbf{D}_G)^T, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_y}{\partial t} = \mathbf{I}_G \mathbf{D}_G \dot{\mathbf{v}}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{xy}}{\partial t} = \dot{\mathbf{v}} (\mathbf{I}_G \mathbf{D}_G)^T + \mathbf{I}_G \mathbf{D}_G \dot{\mathbf{u}}. \quad (3.61)$$

Zur Verbesserung des Stabilitätskriteriums kann bei der hier vorgestellten gestaffelten CPS-Methode ebenfalls die im Abschnitt 3.1.3.1 behandelte Methode unter Verwendung einer Transformationsfunktion verwendet werden. Hierbei ist folglich die Koordinatentransformation auf beide Gitter anzuwenden. Zur endgültigen Lösung der semi-diskreten Grundgleichungen (3.60)-(3.61) bietet es sich an, das bereits für die FD-Verfahren vorgestellte gestaffelte „Leap-Frog-Zeitintegrationschema“ einzusetzen.

3.1.4 Convolutional Perfectly Matched Layers (CPML)

Zur numerischen Simulation der Wellenausbreitung in unberandeten Medien ist es häufig zweckmäßig, die sogenannten absorbierenden bzw. nicht-reflektierenden Ränder zu

verwenden. Neben den numerischen Implementierungstechniken, die auf der Betrachtung der charakteristischen Variablen [35, 67] des Systems basieren, gibt es hierüber zahlreiche weitere Verfahren, die auf der Einführung eines absorbierenden künstlichen Randbereichs basieren. Hierbei wird in der Regel versucht die aus dem physikalischen Gebiet einfallende Welle im absorbierenden Randbereich in der Weise zu dämpfen, dass die Amplitude stetig verkleinert und gleichzeitig möglichst nicht reflektiert wird.

Die Technik der „*Perfectly Matched Layers* (PML)“ [14, 88] wurde ursprünglich zur Lösung elektromagnetischer Wellenausbreitungsprobleme entwickelt und dann auch auf akustische und elastodynamische Probleme erweitert. Das Verfahren zeichnet sich dabei durch die hohe Stabilität und die gute Absorption bei vergleichsweise geringer Reflexion aus. Weiterhin lässt es sich auch auf allgemeine anisotrope und komplexe Materialgesetze anwenden. Eine Weiterentwicklung bzw. modifizierte Variante dieser Technik sind die sogenannten „*Convolutional Perfectly Matched Layers* (CPML)“ [21, 57, 175]. Im Vergleich zu der konventionellen PML-Technik zeichnet sich die CPML-Technik insbesondere durch ein verbessertes Absorptionsvermögen für flach einfallende Körperwellen, Oberflächenwellen und Langzeitsignale aus [135, 136, 175]. Weiterhin basiert die Implementierung der CPML auf der ursprünglichen Formulierung des elastodynamischen Problems, wodurch sich die Methode leicht in bestehende numerische Lösungsverfahren integrieren lässt [135]. Zum grundlegenden Verständnis der Implementierung der CPML-Technik zeigt die Abbildung 3.5 ein 3-D physikalisches Berechnungsgebiet, welches zur Absorption der an den Rändern auftreffenden Wellenfeldern von CPML-Schichten umrandet ist.

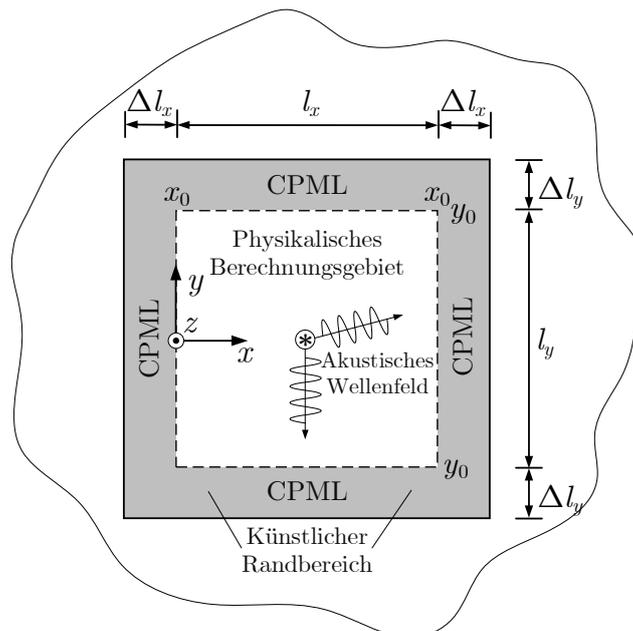


Abbildung 3.5: 3-D physikalisches Berechnungsgebiet umrandet von CPML-Schichten zur Simulation der Wellenausbreitung in einem unendlich ausgedehnten 3-D Körper.

Im Folgenden sollen für den allgemeinen 2-D isotropen Fall die grundlegenden Gleichungen dargestellt werden. Hierbei werden die Bewegungsgleichungen und die kinematischen Beziehungen wie folgt modifiziert [135]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t} &= \rho_0^{-1} \left[\frac{1}{\mathbf{k}_x} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_x}{\partial x} + \boldsymbol{\psi}_A \right) + \frac{1}{\mathbf{k}_y} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{xy}}{\partial y} + \boldsymbol{\psi}_B \right) \right], \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}}{\partial t} &= \rho_0^{-1} \left[\frac{1}{\mathbf{k}_x} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{xy}}{\partial x} + \boldsymbol{\psi}_C \right) + \frac{1}{\mathbf{k}_y} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_y}{\partial y} + \boldsymbol{\psi}_D \right) \right],\end{aligned}\quad (3.62)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_x}{\partial t} &= \frac{1}{\mathbf{k}_x} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial x} + \boldsymbol{\psi}_E \right), \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_y}{\partial t} = \frac{1}{\mathbf{k}_y} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{v}}}{\partial y} + \boldsymbol{\psi}_F \right), \\ \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{xy}}{\partial t} &= \frac{1}{\mathbf{k}_x} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{v}}}{\partial x} + \boldsymbol{\psi}_G \right) + \frac{1}{\mathbf{k}_y} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial y} + \boldsymbol{\psi}_H \right).\end{aligned}\quad (3.63)$$

Die in den Gleichungen (3.62) und (3.63) verwendeten Hilfsvariablen $\boldsymbol{\psi}_{A-H}$ (*Memory-Variablen*) sind dabei durch die folgenden Gleichungen zu ermitteln [135]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_A}{\partial t} &= -\mathbf{d}_x \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_x}{\partial x} - \mathbf{b}_x \boldsymbol{\psi}_A, & \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_B}{\partial t} &= -\mathbf{d}_y \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{xy}}{\partial y} - \mathbf{b}_y \boldsymbol{\psi}_B, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_C}{\partial t} &= -\mathbf{d}_x \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{xy}}{\partial x} - \mathbf{b}_x \boldsymbol{\psi}_C, & \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_D}{\partial t} &= -\mathbf{d}_y \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_y}{\partial y} - \mathbf{b}_y \boldsymbol{\psi}_D, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_E}{\partial t} &= -\mathbf{d}_x \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial x} - \mathbf{b}_x \boldsymbol{\psi}_E, & \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_F}{\partial t} &= -\mathbf{d}_y \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}}{\partial y} - \mathbf{b}_y \boldsymbol{\psi}_F, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_G}{\partial t} &= -\mathbf{d}_x \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}}{\partial x} - \mathbf{b}_x \boldsymbol{\psi}_G, & \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_H}{\partial t} &= -\mathbf{d}_y \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial y} - \mathbf{b}_y \boldsymbol{\psi}_H,\end{aligned}\quad (3.64)$$

mit $\mathbf{d}_{x,y} = \mathbf{s}_{x,y} / \mathbf{k}_{x,y}$ und $\mathbf{b}_{x,y} = \mathbf{d}_{x,y} + \mathbf{a}_{x,y}$. Die hierbei verwendeten Parameter $\mathbf{a}_{x,y}$, $\mathbf{k}_{x,y}$ und $\mathbf{s}_{x,y}$ ergeben sich beispielsweise für eine CPML-Schicht in x -Richtung zu

$$\mathbf{k}_x = 1 + k_{\max} \left(\frac{\mathbf{x} - x_0}{\Delta l_x} \right)^{n_1}, \quad \mathbf{s}_x = s_{\max} \left(\frac{\mathbf{x} - x_0}{\Delta l_x} \right)^{n_1 + n_2}, \quad \mathbf{a}_x = a_{\max} \left(\frac{\Delta l_x - \mathbf{x} - x_0}{\Delta l_x} \right)^{n_3}, \quad (3.65)$$

mit $a_{\max} = 2\pi f$, $s_{\max} = [c_L(1+n_1+n_2) \cdot \log(R^{-1})] / (2\Delta l_x)$ und $k_{\max} = 0$ (keine akustische Evaneszenz [135]). Hierbei definiert x_0 den Ursprung der CPML-Schicht in x -Richtung und Δl_x die entsprechende Schichtdicke. Weiterhin ist f die wesentliche Anregungsfrequenz und R der gewünschte Reflexionsgrad. Hierbei ist zu beachten, dass die aufgestellten Grundgleichungen nur für die künstlichen CPML-Schichten gelten und innerhalb des eigentlichen physikalischen Rechengebietes die Grundgleichungen des ursprünglichen ARWP anzuwenden sind, also $\mathbf{d}_{x,y} = \mathbf{b}_{x,y} = 0$.

Für alle Berechnungen in dieser Arbeit werden die zur Implementierung der CPML notwendigen Parameter als

$$R = 10^{-6}, \quad n_1 = 2, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 3, \quad \Delta l_x = \frac{l_x}{8} \quad (3.66)$$

gewählt. Hierbei ist die Schichtdicke der CPML um den Faktor 8 kleiner als die Länge l_x des physikalischen Berechnungsgebietes in x -Richtung gewählt. Dieses Verhältnis zwischen der Schichtdicke der CPML und der Länge des jeweiligen physikalischen Berechnungsgebietes wird auch für die 2-D und 3-D numerischen Untersuchungen in y - und z -Richtungen verwendet.

3.1.5 Verifikation und Vergleich der numerischen Verfahren

In diesem Abschnitt sollen die zuvor beschriebenen numerischen Verfahren durch den Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den entsprechenden analytischen Lösungen für ausgewählte elastodynamische Probleme verifiziert werden. Weiterhin sollen die Verfahren hinsichtlich der Konvergenz, der Stabilität, der benötigten Rechenzeit und der Genauigkeit vergleichend beurteilt werden. Insbesondere soll hierbei die Eignung der Verfahren zur numerischen Simulation nichtlinearer Wellenausbreitungsprobleme untersucht werden. Hierfür werden die beiden gestaffelten FD-Verfahren (siehe Abschnitte 3.1.1.2 und 3.1.1.3), das KT-Schema (siehe Abschnitt 3.1.2.2), und die klassische und die modifizierte CPS-Methode (siehe Abschnitte 3.1.3.1 und 3.1.3.2) mit der Software MATLAB implementiert. Die numerischen Simulationen sowie die zugehörigen Vergleiche werden zunächst für den 1-D Fall durchgeführt und anschließend auf den 2-D und 3-D Fall erweitert. Für die in diesem Abschnitt durchgeführten Berechnungen werden die Materialparameter entsprechend einem typischen Betonwerkstoff ausgewählt. Zur Implementierung der wesentlichen bzw. natürlichen Randbedingungen (siehe Abschnitt 2.4.1) wird für das KT-Schema die Methode aus dem Abschnitt 3.1.2.3 und für die beiden gestaffelten FD-Verfahren 2. und 4. Ordnung die „*Mirror-Technik*“ (siehe Abschnitt 3.1.1.4) verwendet. Weiterhin werden die entsprechenden Randbedingungen für die klassische CPS-Methode durch die sogenannten charakteristischen Randbedingungen nach [35] und für die modifizierte CPS-Methode durch eine direkte Implementierung berücksichtigt. Die absorbierenden Randbedingungen werden für das KT-Schema ebenfalls durch die Methodik aus dem Abschnitt 3.1.2.3 (konstante Extrapolation [130]) implementiert und für alle anderen Verfahren durch die Verwendung von den CPML realisiert. Zur Wahl der CPML-Parameter sei hier nochmals auf die Gleichung (3.66) verwiesen.

Für die nachfolgenden numerischen Berechnungen und Vergleiche dient das folgende CFL-Kriterium

$$\Delta t = \frac{C \cdot \Delta_{\min}}{c_L}, \quad \Delta_{\min} = \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z). \quad (3.67)$$

zur Bestimmung des entsprechenden Zeitschrittes Δt . Hierbei wird C als dimensionslose COURANT-Zahl oder CFL-Zahl und Δ_{\min} als minimale Schrittweite des Berechnungsgitters verwendet.

3.1.5.1 1-D lineare und nichtlineare Wellenausbreitungsprobleme

Für die in diesem Abschnitt durchgeführte numerische Untersuchung wird das in der Abbildung 3.6 dargestellte 1-D Problem eines in x -Richtung halb-unendlich ausgedehnten Gebietes betrachtet, welches zeitabhängig aus der Ruhelage in longitudinaler Richtung erregt wird. Hierfür wird die horizontale Partikelgeschwindigkeit \dot{u} am linken Rand durch die zeitabhängige Funktion $S(t)$ vorgegeben:

$$\dot{u}(x=0, t) = A \cdot S(t), \quad (3.68)$$

$$S(t) = \frac{1}{2} \sin(2\pi f_{\text{Sig}} t) \cdot \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{t}{T_{\text{Sig}}}\right) \right) \cdot H(T_{\text{Sig}} - t). \quad (3.69)$$

Hierbei ist A die Signalamplitude, f_{Sig} die Erregerfrequenz (Signalfrequenz) und T_{Sig} die Signaldauer. Weiterhin ist $H(\bullet)$ die HEAVISIDE-Funktion. Wie in der Abbildung 3.6 dargestellt, hat das betrachtete physikalische Gebiet eine Länge l_x und soll im Zeitintervall zwischen $t = 0$ bis $t = T_{\text{ges}}$ untersucht werden. In der Tabelle 3.1 sind die hierfür verwendeten Material- und Simulationsparameter angegeben.

Tabelle 3.1: Material- und Simulationsparameter zur numerischen Untersuchung der 1-D longitudinalen Wellenausbreitung.

ρ_0	λ	μ	l_x	A	f_{Sig}	T_{Sig}	T_{ges}
[kg/m ³]	[GPa]	[GPa]	[m]	[m/s]	[MHz]	[μ s]	[μ s]
2350	9,75	15	0,10	1,00	0,5	16	48

Nachfolgend soll das elastodynamische Problem aus der Abbildung 3.6 für den linear-elastischen sowie für den quadratisch nichtlinear-elastischen Fall numerisch behandelt werden.

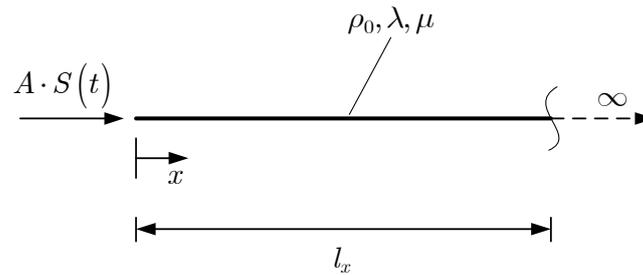


Abbildung 3.6: 1-D longitudinale Wellenausbreitung in einem halb-unendlichen Gebiet.

Lineare Wellenausbreitungsprobleme

Zunächst wird der Sonderfall eines rein linear-elastischen Körpers untersucht und dabei die numerische Lösung für die Partikelgeschwindigkeit \dot{u} am Ende des physikalischen Berechnungsgebietes bei $x = l_x$ mit der zugehörigen analytischen Lösung verglichen. Hierfür wird das folgende 1-D linear-elastische Materialgesetz

$$\sigma_x = M\varepsilon_x = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_x \quad (3.70)$$

angewendet. Um zunächst die Stabilität der einzelnen numerischen Verfahren zu untersuchen und den Einfluss des Zeitschrittes Δt auf die Genauigkeit der numerischen Lösung zu beurteilen, werden verschiedene Simulationen unter Änderung der COURANT-Zahl C (Verfeinerung des Zeitschrittes Δt) durchgeführt und der relative L_2 -Fehler² δ_{L_2} , bezogen auf die exakte Lösung, ausgewertet. Hierbei wird individuell für jedes numerische Verfahren die Knotenanzahl N so gewählt, dass das lineare Wellenausbreitungsproblem aufgelöst werden kann (notwendige Knotenanzahl pro Wellenlänge). Grundsätzlich benötigen die Verfahren niedriger Ordnung hier eine höhere Knotenanzahl N pro Wellenlänge (siehe Abschnitt 3.1.3).

In der Abbildung 3.7 ist beispielhaft die numerische Lösung der modifizierten CPS-Methode mit einer Knotenanzahl $N = 64$ und einer COURANT-Zahl $C = 0,5$ sowie die entsprechende analytische Lösung des Zeitsignals der Partikelgeschwindigkeit an der Stelle $x = l_x$ dargestellt. Beachtet man, dass in diesem Fall die maximale Gitterbreite des nicht-äquidistanten Berechnungsgitters bei $\Delta x_{\max} \approx 2,209$ mm und die Wellenlänge des sinusförmigen Signals bei $\lambda_L = c_L/f \approx 8,225$ mm liegt, so ergibt sich hier für die modifizierte CPS-Methode bereits bei ca. 3,72 Knoten pro Wellenlänge eine sehr hohe Genauigkeit der numerischen Lösung mit einem relativen L_2 -Fehler von $\delta_{L_2} \approx 0,885\%$.

² Definition des relativen L_2 -Fehlers: $\delta_{L_2} = \|\hat{q} - q\|_2 / \|q\|_2 = \sqrt{\sum_i |\hat{q} - q|^2 / \sum_i |q|^2}$ mit der exakten Lösung q und der numerischen Näherungslösung \hat{q} .

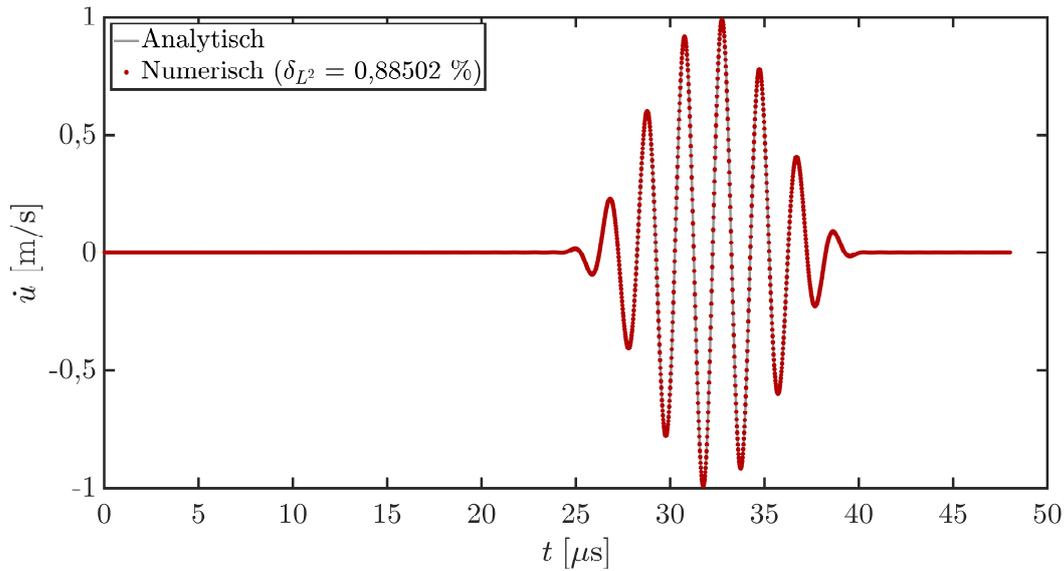


Abbildung 3.7: Mittels modifizierter CPS-Methode berechnete numerische Lösung ($N = 64, C = 0,5$) für die 1-D linear-elastische Wellenausbreitung der Partikelgeschwindigkeit \dot{u} bei $x = l_x$ und zugehörige exakte Lösung.

Betrachtet man die Ergebnisse der Stabilitätsuntersuchung in der Abbildung 3.8, so stellt man fest, dass alle numerischen Methoden aufgrund des expliziten Integrationschemas einen kritischen Zeitschritt Δt_{krit} aufweisen, ab dem die numerische Lösung instabil wird. Nach Erreichen der zugehörigen kritischen COURANT-Zahl C_{krit} wurde die numerische Berechnung abgebrochen.

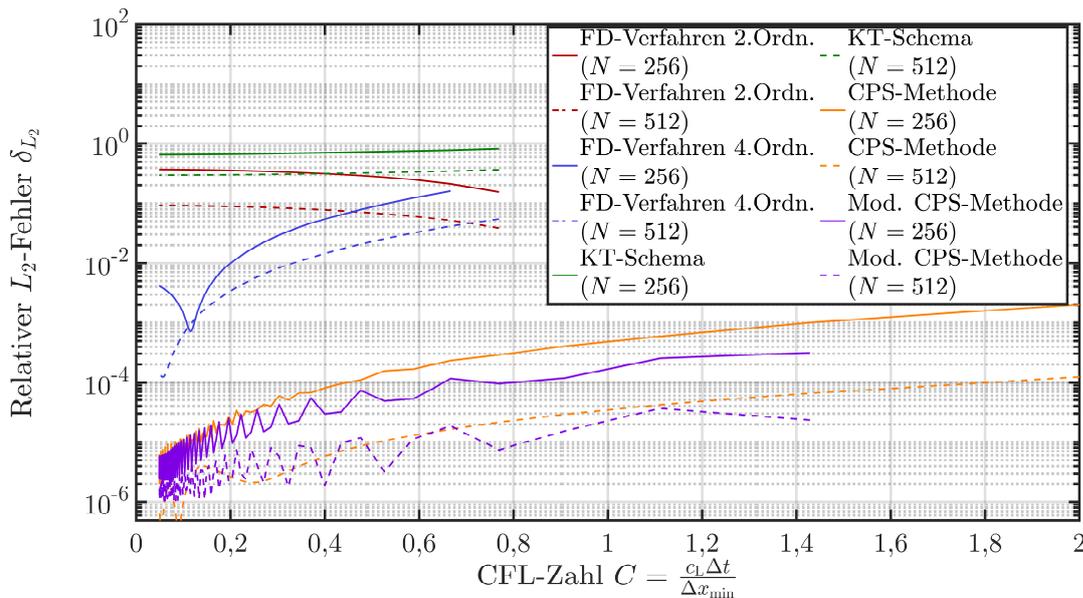


Abbildung 3.8: Relativer L_2 -Fehler δ_{L_2} der numerischen Lösung für die Partikelgeschwindigkeit \dot{u} bei $x = l_x$ in Abhängigkeit der COURANT-Zahl C für unterschiedliche Methoden und Knotenanzahlen N (1-D lineare Wellenausbreitung).

Die kritischen COURANT-Zahlen C_{krit} sind für die verwendeten Verfahren in der Tabelle 3.2 zusammengetragen. Für die FD-Verfahren und das KT-Schema erkennt man, dass der kritische Zeitschritt hier gut mit dem Stabilitätskriterium nach der Gleichung (3.16) übereinstimmt. Die höhere COURANT-Zahl für die CPS-Methoden ergeben sich aus der nicht-äquidistanten räumlichen Diskretisierung und der Verfeinerung der Schrittweite Δx am Rand des Rechengebietes. Bezieht man hier das Stabilitätskriterium auf die maximale Schrittweite (in der Mitte des Rechengebietes) ergeben sich hier ähnliche kritische COURANT-Zahlen C_{krit} wie bei den anderen numerischen Verfahren.

Tabelle 3.2: Kritische COURANT-Zahlen C_{krit} für unterschiedliche numerische Methoden.

	FD-Verfahren 2. Ordnung	FD-Verfahren 4. Ordnung	KT-Schema	CPS- Methode	Mod. CPS- Methode
C_{krit}	0,77	0,67	0,77	2,00	1,43

Außerdem lässt sich aus der Abbildung 3.8 ablesen, dass insbesondere für die CPS-Methoden und das FD-Verfahren 4. Ordnung die Genauigkeit der Näherungslösung stark mit sinkender COURANT-Zahl C zunimmt. Da die (räumliche) Ordnung der Verfahren selbst (vierter bzw. spektraler Ordnung) in diesen Fällen die Ordnung der verwendeten Zeitintegrationsverfahren (2. Ordnung) übersteigt, muss der Zeitschritt wesentlich kleiner gewählt werden, um die maximal mögliche Genauigkeit des Verfahrens zu erreichen bzw. die Ordnung des Zeitintegrationsverfahrens zu erhöhen. Schließlich zeigt die Abbildung 3.8, dass ab einem Fehler von ca. $\delta_{L_2} \approx 0,001\%$ die Genauigkeit der Lösung stagniert. Hier kann vermutet werden, dass insbesondere die verwendeten CPML-Schichten Reflektionen erzeugen, welche eine Genauigkeitssteigerung in der numerischen Lösung beschränken.

Um anschließend das Konvergenzverhalten der numerischen Verfahren genauer zu untersuchen, wird die numerische Lösung der Partikelgeschwindigkeit \dot{u} an der Stelle $x = l_x$ hinsichtlich des relativen L_2 -Fehlers für eine unterschiedliche Anzahl von Knoten ausgewertet. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist in der Abbildung 3.9 dargestellt. Zur Beurteilung des Zeitschritteinflusses auf das Konvergenzverhalten werden pro Verfahren jeweils zwei unterschiedliche COURANT-Zahlen C verwendet. Die Simulation bei einer COURANT-Zahl von $C = 1/\sqrt{2}$ stellt dabei eine Berechnung nahe am Stabilitätskriterium der jeweiligen Methode dar und die Simulation bei $C = 0,05$ steht stellvertretend für eine sehr feine zeitliche Diskretisierung.

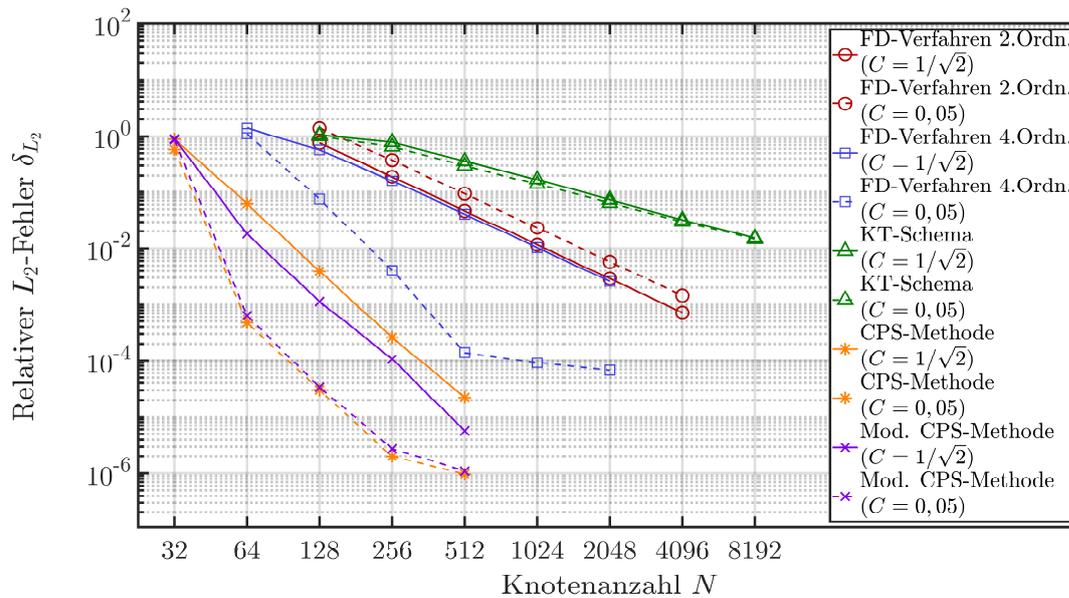


Abbildung 3.9: Relativer L_2 -Fehler δ_{L_2} der numerischen Lösung für die Partikelgeschwindigkeit u bei $x = l_x$ in Abhängigkeit der Knotenanzahl N mit unterschiedlichen Methoden und COURANT-Zahlen C (1-D lineare Wellenausbreitung).

Das in dieser Arbeit verwendete KT-Schema konvergiert unabhängig vom gewählten Zeitschritt nur sehr langsam gegen die exakte Lösung (siehe Abbildung 3.9). Das FD-Verfahren gleicher Ordnung zeigt ein deutlich besseres Konvergenzverhalten für beide COURANT-Zahlen. Für das FD-Verfahren 4. Ordnung hängt das Konvergenzverhalten stark von der zeitlichen Diskretisierung ab. So erhält man für eine COURANT-Zahl von $C = 1/\sqrt{2}$ ein Konvergenzverhalten vergleichbar mit dem des FD-Verfahrens 2. Ordnung, da in diesem Fall die Konvergenz von der niedrigeren Ordnung des Zeitintegrationsverfahrens bestimmt wird. Wählt man jedoch die COURANT-Zahl mit $C = 0,05$, so entspricht das Konvergenzverhalten einem FD-Verfahren 4. Ordnung. Die klassische und die modifizierte CPS-Methode zeigen dabei insbesondere für eine COURANT-Zahl $C = 0,05$ die typische spektrale Konvergenz. Setzt man hier beispielsweise eine Abweichung der numerischen Lösung von der exakten Lösung von ca. 1% als ausreichend genau an, so ergibt sich für die beiden pseudospektralen Methoden eine notwendige Knotenanzahl von ca. $N = 64$, für das FD-Verfahren 2. und 4. Ordnung $N = 256$ und $N = 1024$, und zuletzt für das KT-Schema $N = 8192$. Dies zeigt sehr deutlich den großen Vorteil der spektralen Methoden im Hinblick auf die benötigte Knotenanzahl und somit die Anzahl an Unbekannten in der numerischen Berechnung. Diese Eigenschaft ist gerade bei 3-D Berechnungen von großer Bedeutung mit Blick auf die Speicherplatznutzung und die benötigte Rechenzeit.

Um an dieser Stelle einen praxistauglichen Rechenzeitvergleich zwischen den einzelnen Verfahren durchzuführen, werden die obengenannten minimalen Knotenanzahlen eines jeden Verfahrens ausgewählt und eine Feinabstimmung über die Wahl der zugehörigen COURANT-Zahlen durchgeführt. Das Ergebnis dieses Rechenzeitvergleichs ist in der Abbildung 3.10 dargestellt. Da die ermittelten relativen L_2 -Fehler δ_{L_2} für alle numerischen Verfahren auf gleichem Niveau bei ca. $\delta_{L_2} \approx 1,0 \%$ liegen ist die Vergleichbarkeit der Rechenzeiten hier gewährleistet. Zunächst zeigen sich die großen Unterschiede bei den Rechenzeiten t_R der einzelnen Verfahren. Die Rechenzeiten t_R werden dabei maßgeblich durch die zur Erzielung der Genauigkeitsanforderungen notwendigen Knotenanzahlen N und den damit verbundenen Rechenaufwand bestimmt. Die modifizierte CPS-Methode weist hierbei die geringste Rechenzeit von $t_R \approx 1$ ms auf. Im Vergleich hierzu liegt die Rechenzeit für die klassische CPS-Methode aufgrund der geringeren COURANT-Zahl von $C = 0,28$ etwa doppelt so hoch. Die beiden FD-Verfahren weisen Rechenzeiten auf gleichem Niveau auf, die deutlich über den Rechenzeiten der CPS-Methoden liegen (Faktor 10). Der Vorteil der Verwendung eines FD-Verfahrens 4. Ordnung im Vergleich zu dem FD-Verfahren 2. Ordnung ist also nicht im Zusammenhang mit der Rechenzeit zu sehen, sondern eher im Hinblick auf die Speicherplatznutzung, da hier eine deutlich geringere Knotenanzahl N bei gleicher Genauigkeit benötigt wird. Das KT-Schema übersteigt die Rechenzeiten der übrigen Verfahren mit $t_R \approx 5$ s erheblich.

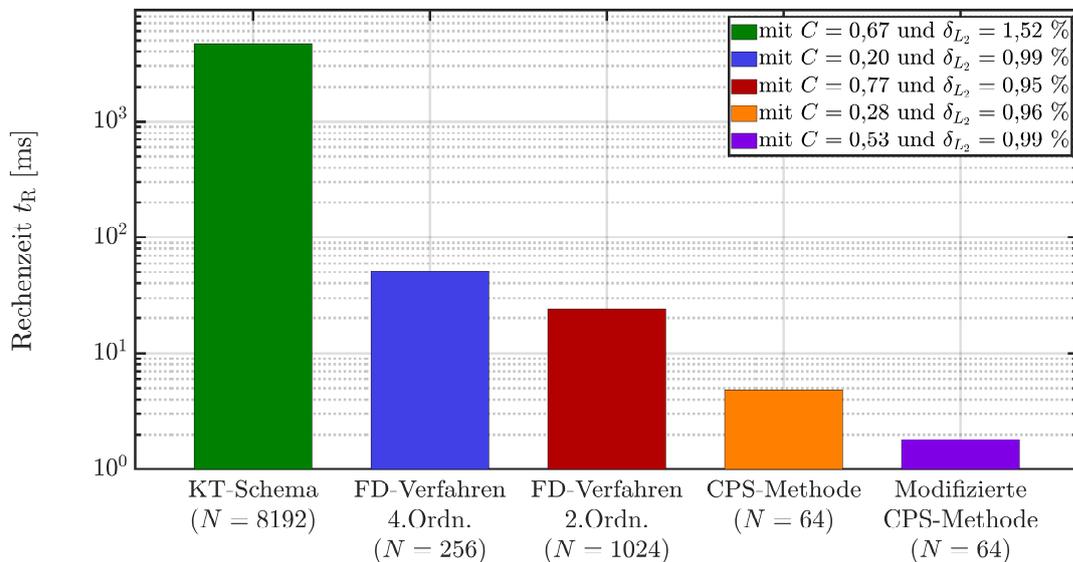


Abbildung 3.10: Rechenzeiten t_R der unterschiedlichen numerischen Methoden bei einem relativen L_2 -Fehler von $\delta_{L_2} \approx 1,0 \%$ (1-D lineare Wellenausbreitung).

Nichtlineare Wellenausbreitung

Um die Verifikation für den nichtlinearen Fall zu zeigen, wird an dieser Stelle die 1-D Wellenausbreitung in einem quadratisch nichtlinear-elastischen Körper (siehe Abschnitt 2.2.2.1) durch die entsprechenden numerischen Verfahren simuliert und anschließend mit der analytischen Störungslösung (in Anlehnung an [211]) verglichen. Hierbei wird in den konstitutiven Gleichungen auf die Berücksichtigung der geometrisch nichtlinearen Anteile verzichtet. Somit ergibt sich aus der allgemeinen Gleichung (2.19) die 1-D nichtlinear-elastische konstitutive Gleichung in x -Richtung zu

$$\sigma_x = M\varepsilon_x + M_{\text{NL}}\varepsilon_x^2 = M\varepsilon_x + M_{\text{NL}}\varepsilon_x^2 = M\left(\varepsilon_x + \beta\varepsilon_x^2\right). \quad (3.71)$$

Die Problemstellung und die gewählten Simulations- und Materialparameter entsprechen dabei der linear-elastischen Untersuchung aus dem letzten Abschnitt. Weiterhin wird der Nichtlinearitätsparameter als $\beta = 4$ gewählt. Entsprechend werden die MURNAGHAN-Konstanten unter Berücksichtigung von der Gleichung (2.82) durch $l = 5\lambda = 39$ GPa und $m = 4\mu = 60$ GPa definiert. Da die nichtlinearen Effekte für den hier betrachteten Fall sehr klein sind, wird zunächst eine Untersuchung im Frequenzbereich durchgeführt. Hierfür wird das Zeitsignal der Partikelgeschwindigkeit \dot{u} an der Stelle $x = l_x$ über die FFT ins zugehörige Frequenzspektrum transformiert (siehe Anhang A.2). Anschließend wird die charakteristische Amplitude der 2. Harmonischen im Frequenzspektrum der numerischen Lösung mit der analytischen Lösung der 2. Harmonischen-Amplitude verglichen.

Um einen Eindruck zur Größenordnung der hier untersuchten 2. Harmonischen zu erhalten, ist in der Abbildung 3.11 für alle Verfahren das Frequenzspektrum der numerischen Lösung und die zugehörige analytische Lösung für die Partikelgeschwindigkeit \dot{u} an der Stelle $x = l_x$ dargestellt. Hierbei wurden die Knotenanzahl N und die COURANT-Zahl C der einzelnen numerischen Methoden unter Betrachtung der Konvergenzuntersuchung für den linear-elastischen Fall gewählt. In der Abbildung 3.11 ist dabei deutlich die 2. Harmonische bei einer Frequenz von $f \approx 1,0$ MHz und die 3. Harmonische bei einer Frequenz von $f \approx 1,5$ MHz zu erkennen. Die zugehörige Amplitude der 2. Harmonischen ist um ca. 30 dB kleiner gegenüber der Fundamentalamplitude bei $f = f_{\text{Sig}} = 0,5$ MHz. Diese Darstellung zeigt zum einen, dass alle numerische Verfahren qualitativ eine gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung aufweisen, und zum anderen wird an dieser Stelle deutlich, dass für die folgenden Untersuchungen im Frequenzbereich sehr kleine nichtlineare Effekte betrachtet und analysiert werden.

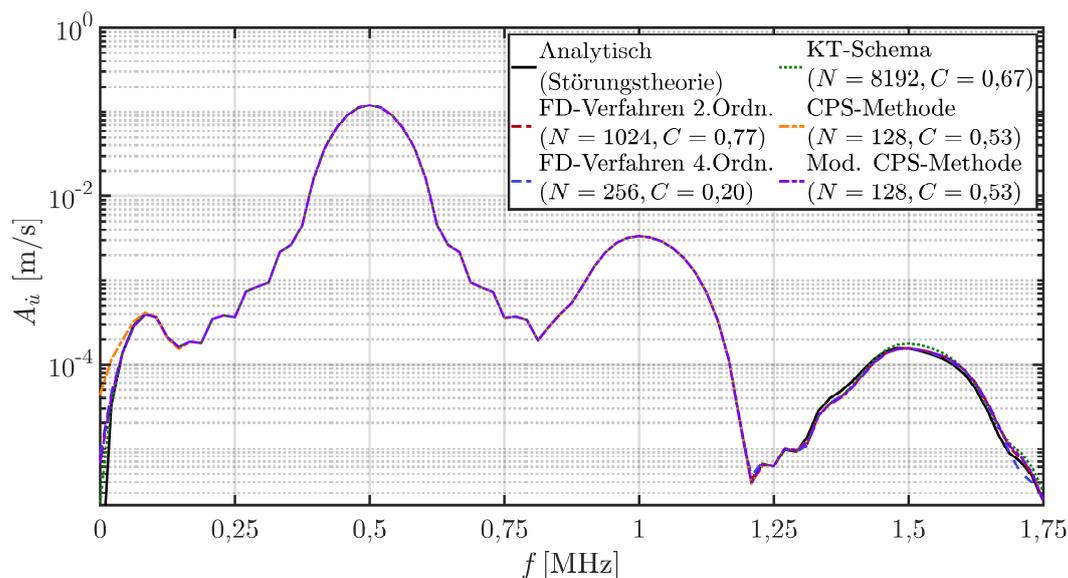


Abbildung 3.11: Frequenzspektrum der numerischen Lösung für die 1-D nichtlinear-elastische Wellenausbreitung der Partikelgeschwindigkeit \dot{u} bei $x = l_x$.

Die Abbildung 3.12 zeigt das Ergebnis der Konvergenzuntersuchung des 1-D quadratisch nichtlinear-elastischen Problems. Es kann festgestellt werden, dass alle Verfahren gegen die analytische Lösung konvergieren. Grundsätzlich ergibt sich hier das gleiche Konvergenzverhalten wie für den linear-elastischen Fall (vgl. Abbildung 3.9). Dabei ist zu erkennen, dass die beiden CPS-Methoden bereits mit 128 Knoten sehr genaue Lösungen liefern.

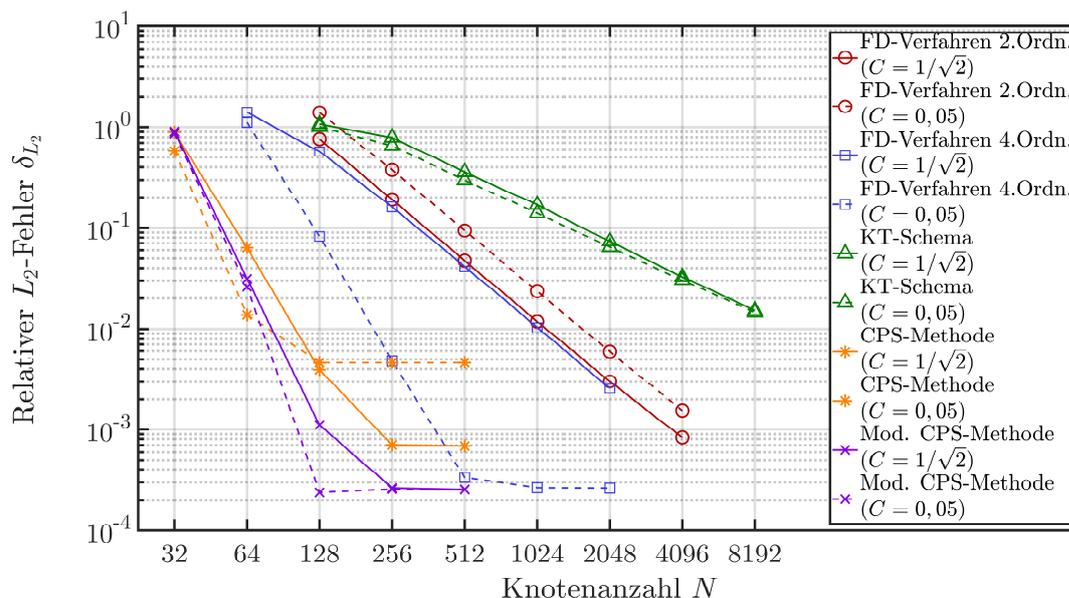


Abbildung 3.12: Relativer L_2 -Fehler δ_{L_2} der numerischen Lösung für die 2. Harmonische-Amplitude der Partikelgeschwindigkeit \dot{u} bei $x = l_x$ in Abhängigkeit der Knotenanzahl N mit unterschiedliche Methoden und COURANT-Zahlen C (1-D nichtlineare Wellenausbreitung).

Weiterhin fällt bei der Betrachtung von Abbildung 3.12 auf, dass die CPS-Methoden und das FD-Verfahren 4. Ordnung ab einem relativen L_2 -Fehler von $\delta_{L_2} \approx 10^{-3}$ stagnieren und sich nicht weiter verbessern. Dies ist sicherlich vor dem Hintergrund zu sehen, dass der hier untersuchte Fehler sich bereits auf eine sehr kleine Kenngröße im Signal bezieht. Weiterhin muss hierbei berücksichtigt werden, dass Einflüsse aus der FFT selbst das Ergebnis beeinflussen können und dass die analytische Lösung selbst keine exakte Lösung im üblichen Sinne darstellt, sondern auf den Näherungsannahmen der Störungstheorie basiert.

Wie bereits erwähnt, sind die bei vielen realen Ultraschallexperimenten vorkommenden nichtlinearen Effekte in der Regel sehr klein. Daher können diese lediglich im Frequenzspektrum des empfangenen Zeitsignals detektiert werden. Dennoch kann es für die theoretischen Untersuchungen und in Sonderfällen notwendig sein, auch starke nichtlineare Effekte zu analysieren bzw. zu simulieren. In solchen Fällen werden die elastischen Wellen während der Ausbreitung derart durch die nichtlinearen Effekte verzerrt, dass sich Schockwellen und Diskontinuitäten entwickeln können. Dies führt bei den konventionellen numerischen Verfahren zu Stabilitätsproblemen, da die Lösung im Berechnungsgebiet stark von einer glatten Funktion abweicht und zudem eine starke lokale Variation der Ausbreitungsgeschwindigkeit vorliegt. Diese numerischen Schwierigkeiten bei der Simulation stark nichtlinearer Prozesse sind insbesondere bei den spektralen Methoden ausgeprägt, da in diesem Fall die hohe Ordnung der Verfahren zu den bereits erläuterten unphysikalischen RUNGE-Schwingungen [213] nahe den Diskontinuitäten der Lösung führt.

Um diesen Sachverhalt zu veranschaulichen, werden mittels der modifizierten CPS-Methode und dem KT-Schema numerische Berechnungen für drei betragsmäßig unterschiedliche NLP β durchgeführt. Die Knotenanzahl wird für das KT-Schema mit $N = 8192$ sehr hoch gewählt, um eine nahezu exakte Vergleichslösung zu erhalten. Die Abbildung 3.13 zeigt dazu das zugehörige Zeitsignal der Partikelgeschwindigkeit \dot{u} bei $x = l_x$ für die drei ausgewählten NLP. Man erkennt einerseits, dass die Lösung für einen niedrigen NLP mit $\beta = 30$ richtig wiedergegeben wird und mit der Referenzlösung aus dem KT-Schema übereinstimmt, aber andererseits die bei einem hohen NLP ($\beta = 60$ bzw. $\beta = 120$) entstehende Schockwelle von der modifizierten CPS-Methode nicht mehr korrekt beschrieben werden kann. Das KT-Verfahren hingegen kann die zunehmende „Aufsteilung“ der Welle auch für hohe NLP bis zum Erreichen eines „Sägezahnprofils“ korrekt wiedergeben.

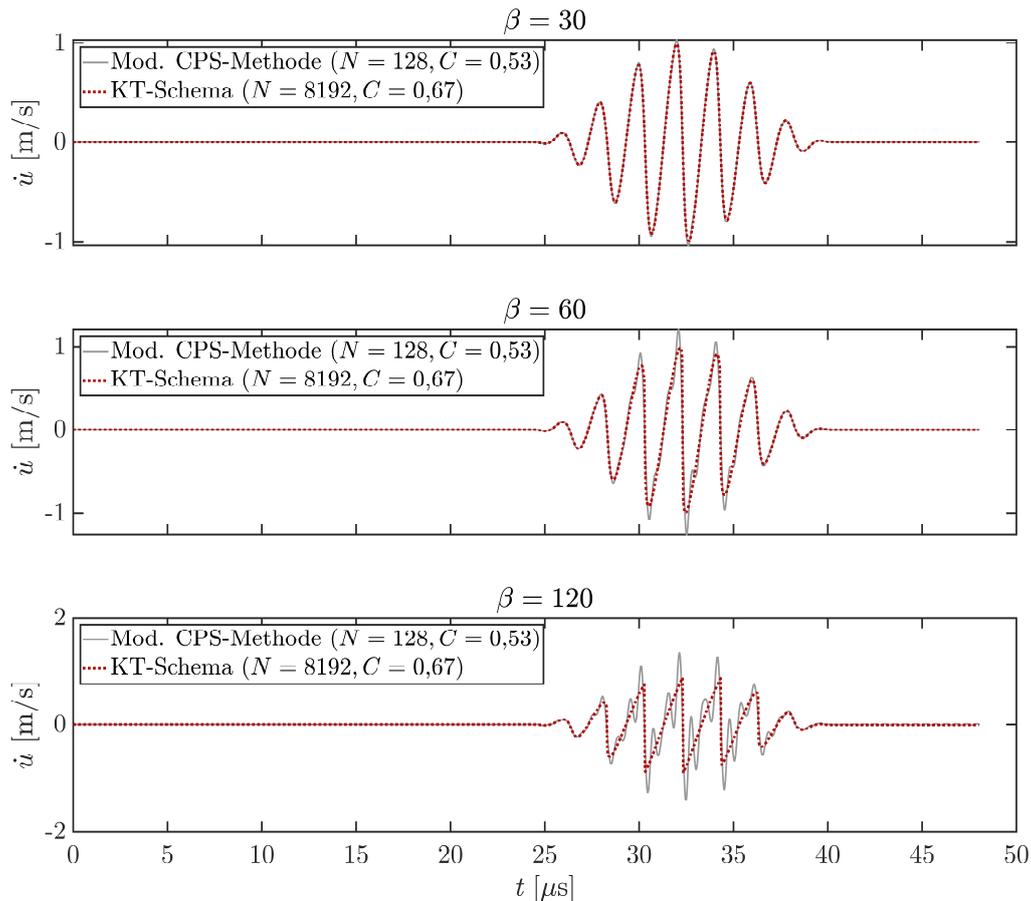


Abbildung 3.13: Mittels modifizierter CPS-Methode und KT-Schema berechnete numerische Lösung der 1-D nichtlinearen Wellenausbreitung der Partikelgeschwindigkeit \dot{u} bei $x = l_x$ für unterschiedliche Nichtlinearitätsparameter β .

Die Schockwelle wird also mit dem KT-Schema richtig approximiert und es entstehen keine unphysikalischen Schwingungen in der Nähe der Diskontinuitäten. Ähnliche Untersuchungen wurden im Zuge dieser Arbeit auch für die anderen numerischen Verfahren durchgeführt und auch diese konnten die entstehenden Schockwellen nicht mehr richtig beschreiben und sind daher für die Simulation hochgradig nichtlinearer Probleme ungeeignet.

3.1.5.2 2-D Wellenausbreitungsprobleme in einer linear-elastischen Halbebene

Da im letzten Abschnitt für den 1-D Fall bereits eine Untersuchung der wesentlichen Eigenschaften der numerischen Verfahren (Stabilität, Konvergenz und Genauigkeit) durchgeführt wurde und die hieraus abgeleiteten Schlussfolgerungen in ähnlicher Weise auf den 2-D Fall übertragen werden können, steht in diesem Abschnitt in besonderem Maße die benötigte Rechenzeit der jeweiligen Verfahren im Vordergrund und wird vergleichend analysiert. Da im 2-D Fall keine exakte Lösung für die nichtlineare

Wellenausbreitung existiert (mit der Ausnahme des Sonderfalls einer ebenen Wellenausbreitung, vergleichbar mit dem 1-D Fall), werden die Verifikation und der Vergleich hier auf den linear-elastischen Fall beschränkt.

Im Folgenden wird das in den Abbildungen 3.14 und 3.15 dargestellte ARWP einer 2-D linear-elastischen Halbebene unter Einwirkung einer zeitveränderlichen Punkterregung, nach Gleichung (3.69), am freien Rand des 2-D Gebietes bei $x = 0$ und $y = 0$ (sogenanntes 2-D LAMB-Problem) betrachtet.

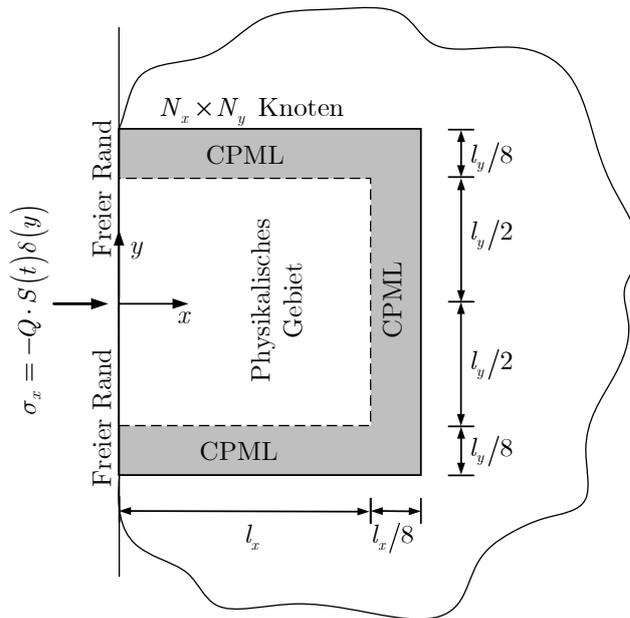


Abbildung 3.14: Prinzipskizze des Berechnungsgebietes einer 2-D elastischen Halbebene unter einer punktförmigen Erregung.

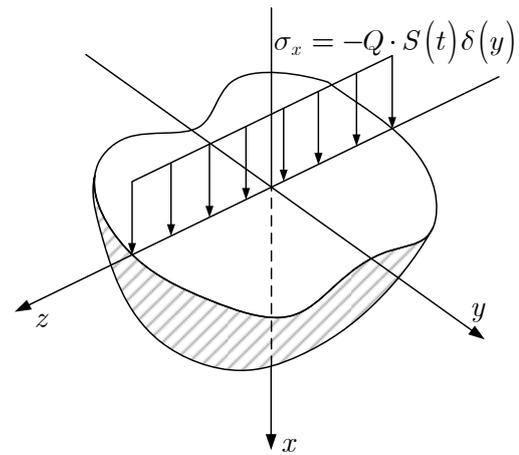


Abbildung 3.15: Elastischer Halbraum unter Einwirkung einer Linienlast in x -Richtung.

Dabei werden die Abmessungen aus dem 1-D Fall auf das zugehörige 2-D Gebiet in beiden Richtungen übertragen und die maßgebenden Material- und Simulationsparameter bis auf die Signalamplitude A und die Gesamtzeit T_{ges} (hier: $T_{\text{ges}} = 64 \mu\text{s}$) aus der Tabelle 3.1 übernommen. Außerdem wird hier ein quadratisches Gebiet mit $l_x = l_y$ untersucht.

Die zugehörigen konstitutiven Gleichungen für den entsprechenden ebenen Verzerungszustand in der x - y -Ebene lauten

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y, \quad \sigma_y = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}. \quad (3.72)$$

Die 2-D elastische Halbebene soll sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe befinden und kräftefrei sein, daher ergeben sich die Anfangsbedingungen aller Feldgrößen zu

$$q(x, y, t = 0) = 0. \quad (3.73)$$

Die Randbedingungen des freien Randes bei $x = 0$ sind unter Verwendung der Signalfunktion $S(t)$ nach der Gleichung (3.69) wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x = 0, y, t) &= -Q \cdot S(t) \cdot \delta(y), \\ \tau_{xy}(x = 0, y, t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Dabei ist $\delta(\bullet)$ die DIRAC-Delta-Funktion. Weiterhin ist die Punktlast bzw. Linienlast mit $Q = 10^4$ N/m festgelegt. Für alle numerischen Berechnungen und Verfahren wird die Knotenanzahl in beiden Koordinatenrichtungen gleich gewählt, d. h. $N_x = N_y = N$.

Zur numerischen Simulation des freien Randes werden für die beiden FD-Verfahren die „Mirror-Technik“ (Abschnitt 3.1.1.4), für das KT-Schema die Methode nach Abschnitt 3.1.2.3 und für die klassische CPS-Methode die Methode unter Verwendung der charakteristischen Randbedingungen [35] verwendet. Des Weiteren wird für die modifizierte CPS-Methode eine direkte Berücksichtigung der zugehörigen Randbedingungen des freien Randes gewählt, wobei die nicht direkt am Rand angeordneten Spannungsgrößen unter Verwendung der Interpolationsmatrizen aus Abschnitt 3.1.3.2 auf diesen übertragen werden. Die absorbierenden Ränder des 2-D Rechengebietes werden für alle Verfahren bis auf das KT-Schema (konstante Extrapolation) mittels der CPML-Technik realisiert mit den Parametern nach der Gleichung (3.66).

Zur Bestimmung der exakten Referenzlösung wird das „2-D LAMB-Problem“ [122] unter Verwendung der „CAGNIARD-DE HOOP-Methode“ [29, 51] gelöst. Für eine ausführliche Herleitung hierzu sei auf [1, 138] verwiesen. Zur Bestimmung der Lösung des Problems wird eine Faltung des Verschiebungsfeldes $\mathbf{h}(x, y, t) = [h_u(x, y, t), h_v(x, y, t)]^T$ infolge einer vertikalen Impulsanregung am freien Rand (ursprüngliches 2-D LAMB-Problem) mit dem Anregungssignal $S(t)$ durchgeführt, d. h.

$$\mathbf{u}(x, y, t) = S(t) * \mathbf{h}(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) \cdot \mathbf{h}(x, y, t - \tau) d\tau. \quad (3.75)$$

Somit stellt $\mathbf{u}(x, y, t) = [u(x, y, t), v(x, y, t)]^T$ das resultierende 2-D Verschiebungsfeld der elastischen Halbebene infolge der zeitabhängigen Anregung $S(t)$ dar. In analoger Weise wird das zugehörige Geschwindigkeitsfeld aus der Impulsantwort durch

$$\dot{\mathbf{u}}(x, y, t) = \dot{S}(t) * \mathbf{h}(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\tau) \cdot \mathbf{h}(x, y, t - \tau) d\tau, \quad (3.76)$$

bestimmt. Hierbei wird das Faltungstheorem der Impulsantwort $\mathbf{h}(x, y, t)$ mit der Signalfunktionsableitung $\dot{S}(t) = \partial S(t)/\partial t$ ausgewertet.

Zur Veranschaulichung der 2-D Wellenausbreitung in der elastischen Halbebene sowie zur Verdeutlichung der idealen absorbierenden Eigenschaften der CPML, ist in der Abbildung 3.16 für drei unterschiedliche Zeitpunkte die mittels der modifizierten CPS-Methode berechnete Lösung für die Partikelgeschwindigkeitsbeträge $|\dot{\mathbf{u}}| = \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}$ im 2-D Berechnungsgebiet dargestellt. Zusätzlich ist in der Abbildung 3.17 die zugehörige analytische Lösung des resultierenden Geschwindigkeitsfeldes für die drei ausgewählten Zeitpunkte als Vergleich angegeben. Man erkennt dabei qualitativ eine gute Übereinstimmung zwischen der numerischen Lösung und der analytischen Referenzlösung.

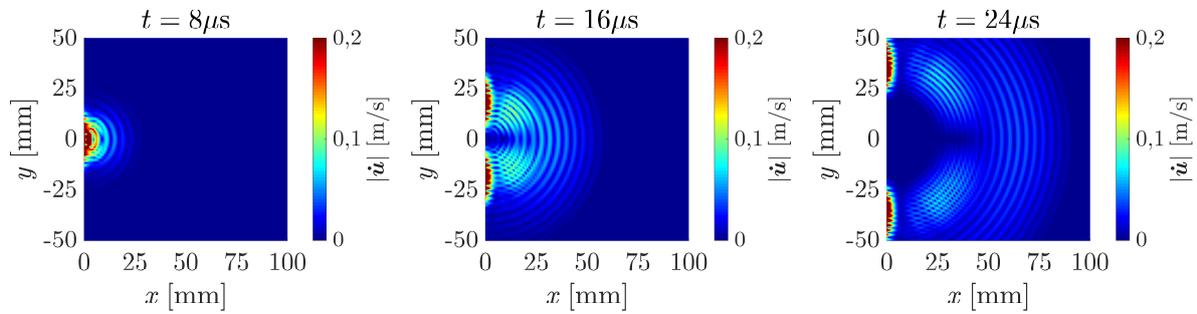


Abbildung 3.16: Numerische Lösung der 2-D linearen Wellenausbreitung des Partikelgeschwindigkeitsbetrages $|\dot{\mathbf{u}}|$ in der elastischen Halbebene zu verschiedenen Zeitpunkten t (modifizierte CPS-Methode, Knotenanzahl $N_{\text{ges}} = 128^2$, COURANT-Zahl $C = 0,5$).

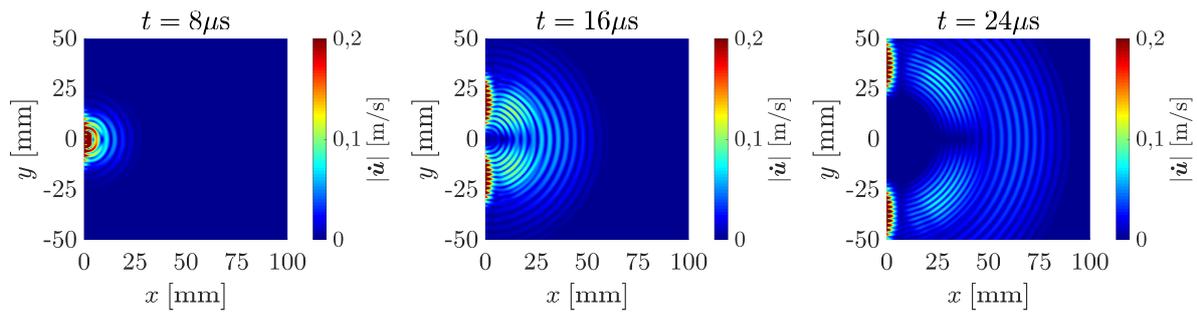


Abbildung 3.17: Analytische Lösung der 2-D linearen Wellenausbreitung des Partikelgeschwindigkeitsbetrages $|\dot{\mathbf{u}}|$ in der elastischen Halbebene zu verschiedenen Zeitpunkten t .

Das Ziel der folgenden Untersuchung ist es, die Rechenzeit bzw. den Rechenaufwand der hier verwendeten numerischen Verfahren zu evaluieren. Um hierbei einen sinnvollen Vergleich durchzuführen, wird die Knotenanzahl so gewählt, dass die jeweiligen numerischen Verfahren eine ähnliche Genauigkeit in Bezug auf die analytische Lösung erreichen. Hierfür wird ein relativer Fehler von ca. 1% als Beispiel gewählt. Für die anschließende Untersuchung wird das Zeitsignal der horizontalen Partikelgeschwindigkeit

\dot{u} in der Mitte des physikalischen Betrachtungsgebietes an der Stelle $x = l_x/2$ und $y = 0$ ausgewertet. Weiterhin wird an dieser Stelle überprüft, welches zusätzliche Leistungspotential eine GPU³-basierte Berechnung bietet. Hierzu werden neben den konventionellen CPU⁴-basierten auch GPU-basierte Implementierungen der hier verwendeten numerischen Verfahren vorgenommen. Insbesondere wird dabei auf speziell für die GPU-Berechnung optimierte MATLAB-Befehle zurückgegriffen, welche wiederum auf einer vom Hersteller NVIDIA entwickelten Programmier- und Rechen-Technologie (CUDA⁵) zur parallelen Berechnungsstruktur basieren.

In der Abbildung 3.18 ist das mittels der modifizierten CPS-Methode berechnete Zeitsignal der horizontalen Partikelgeschwindigkeit \dot{u} und die zugehörige analytische Lösung angegeben. Hierbei wird eine Gesamtknotenanzahl von $N_{\text{ges}} = N^2 = 128^2$ und eine COURANT-Zahl von $C = 0,5$ verwendet. Es kann festgestellt werden, dass die numerische Lösung sehr gut mit der analytischen Lösung übereinstimmt. Weiterhin erkennt man in der Abbildung 3.18 am Ende des Wellenbandes die bereits stark abgeklungenen RAYLEIGH-Wellen, die zeitlich versetzt zur longitudinalen Körperwelle ankommen.

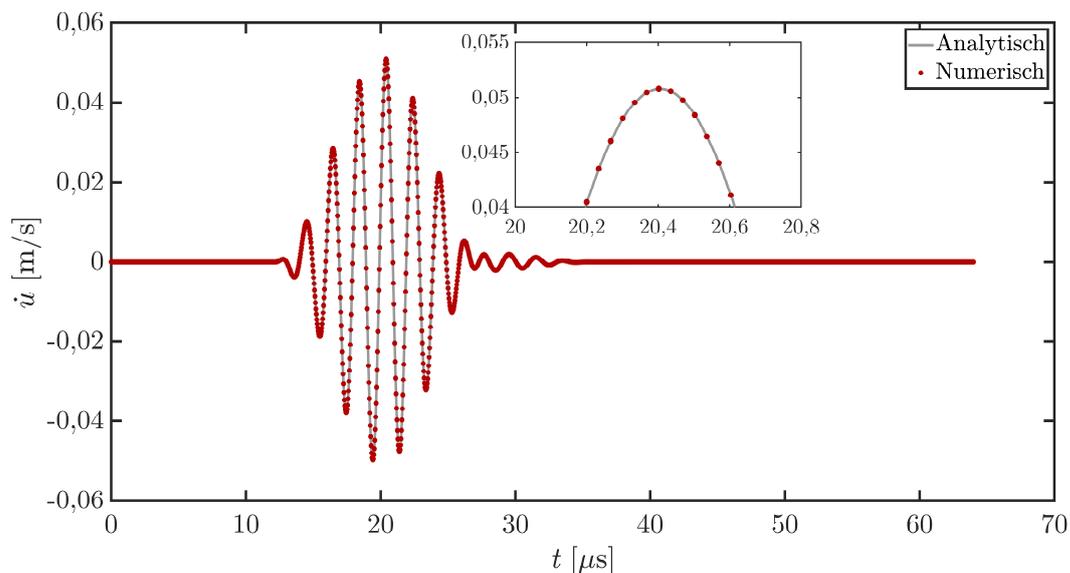


Abbildung 3.18: Mittels modifizierter CPS-Methode ($N_{\text{ges}} = 128^2, C = 0,5$) berechnete numerische Lösung für die 2-D linear-elastische Wellenausbreitung der horizontalen Partikelgeschwindigkeit \dot{u} bei $x = l_x/2, y = 0$ und zugehörige exakte Lösung.

In den folgenden Abbildungen 3.19 und 3.20 sind die relativen L_2 -Fehler und die benötigten Rechenzeiten t_R für die entsprechenden numerischen Verfahren logarithmisch angetragen. Zusätzlich ist die verwendete Knotenanzahl N_{ges} für jedes Verfahren in

³ GPU: Graphics Processing Unit (Grafikprozessor)

⁴ CPU: Central Processing Unit (Hauptprozessor)

⁵ CUDA: Compute Unified Device Architecture

Klammern mit angegeben. Für alle Berechnungen wurde dabei eine COURANT-Zahl von $C = 0,5$ zur Gewährleistung der Stabilität der numerischen Simulationen verwendet.

Betrachtet man in der Abbildung 3.19 zunächst die Ergebnisse der Rechengenauigkeit (relativer L_2 -Fehler), so zeigt sich, dass alle Verfahren bis auf das KT-Schema den angestrebten Wert des relativen Fehlers von 1% erreichen bzw. unterschreiten. Somit ist eine gute Vergleichbarkeit der Verfahren hinsichtlich der Rechenzeit gegeben. Weiterhin fällt an dieser Stelle auf, dass die GPU-basierten numerischen Verfahren generell einen größeren Fehler bei den Berechnungen aufweisen. Eine wesentliche Ursache hierfür ist die Tatsache, dass für die GPU-basierten Implementierungen die Rechenvariablen anstatt mit der üblichen doppelten Genauigkeit (*Double Precision*, 64 Bit) mit einfacher Genauigkeit (*Single Precision*, 32 Bit) behandelt werden. Dieses Vorgehen ist in diesem Fall zweckmäßig, da die hier verwendete Grafikkarte „NVIDIA GeForce GTX 1080“ (8GB Arbeitsspeicher, 2560 CUDA-Kerne) auf einer Berechnungsstruktur aufbaut, die hinsichtlich der einfachen Genauigkeit optimiert ist. Somit lässt sich hierüber gerade die benötigte Rechenzeit gegenüber einer Implementierung mit doppelter Genauigkeit deutlich reduzieren. Grundsätzlich ist mit Blick auf insbesondere 3-D Berechnungen abzuwägen, ob eine doppelte Genauigkeit für das zu berechnende Problem notwendig ist oder ob man zu Gunsten des Arbeitsspeicherbedarfs eine einfache Genauigkeit vorzieht.

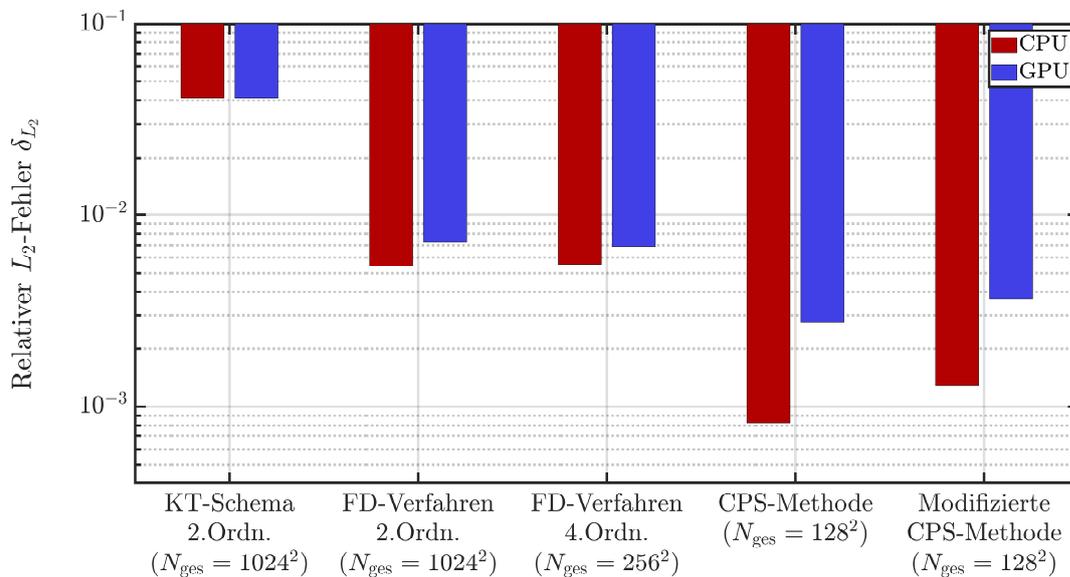


Abbildung 3.19: Vergleich des relativen L_2 -Fehlers für die unterschiedlichen Verfahren/Implementierungen mit der entsprechenden Knotenanzahl N_{ges} (2-D linear-elastische Wellenausbreitung).

Untersucht man im Weiteren die Rechenzeit (siehe Abbildung 3.20), dann kann man feststellen, dass im vorliegenden Fall das KT-Schema ca. 100- bzw. 300-mal länger für

die gleiche Berechnung benötigt. Für die beiden CPS-Methoden und das FD-Verfahren 4. Ordnung braucht man geringe Rechenzeiten von 10 bis 30 s. Hierbei ist im Wesentlichen die geringere Knotenanzahl ausschlaggebend. Die CPU-basierte Variante des FD-Verfahrens 2. Ordnung benötigt bei $N_{\text{ges}} = 1024^2$ im Vergleich ca. 10- bis 30-mal länger für die gleiche Berechnung. Es fällt weiterhin auf, dass die Verfahren niedriger Ordnung aufgrund der Größe des Gleichungssystems mit beispielsweise $N_{\text{ges}} = 1024^2$ Knoten deutlich von einer GPU-basierten Implementierung profitieren. Für die Verfahren höherer Ordnung ist dagegen in diesem Fall die CPU-Berechnung sogar etwas schneller als die entsprechende GPU-Variante.

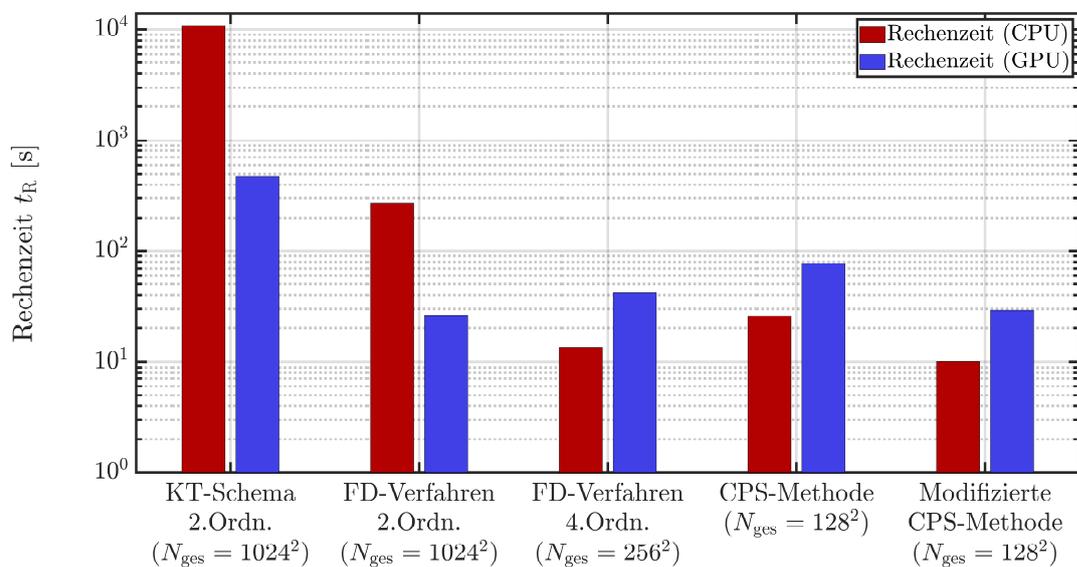


Abbildung 3.20: Vergleich der Rechenzeit t_{R} für die unterschiedlichen Verfahren/Implementierungen unter Vorgabe eines relativen L_2 -Fehlers der numerischen Lösung von $\delta_{L_2} \leq 10^{-2}$ (2-D linear-elastische Wellenausbreitung).

Um den Einfluss der Größe des Gleichungssystems bzw. der Anzahl der unbekannt Feldgrößen noch einmal zu illustrieren, ist in der Abbildung 3.21 die benötigte Rechenzeit t_{R} in Abhängigkeit von der Knotenanzahl N_{ges} für die CPU-basierte sowie für die GPU-basierte Variante der modifizierten CPS-Methode dargestellt. Hierbei erkennt man, dass die CPU-basierte Variante für eine geringe Knotenanzahl deutlich schneller ist, aber mit zunehmender Knotenanzahl zwischen $N_{\text{ges}} = 128^2$ und $N_{\text{ges}} = 256^2$ Knoten die beiden Varianten vergleichbar sind. Ab diesem Punkt nimmt die Rechenzeit der CPU-Variante deutlich zu, wobei der Anstieg der GPU-Variante deutlich geringer ausfällt.

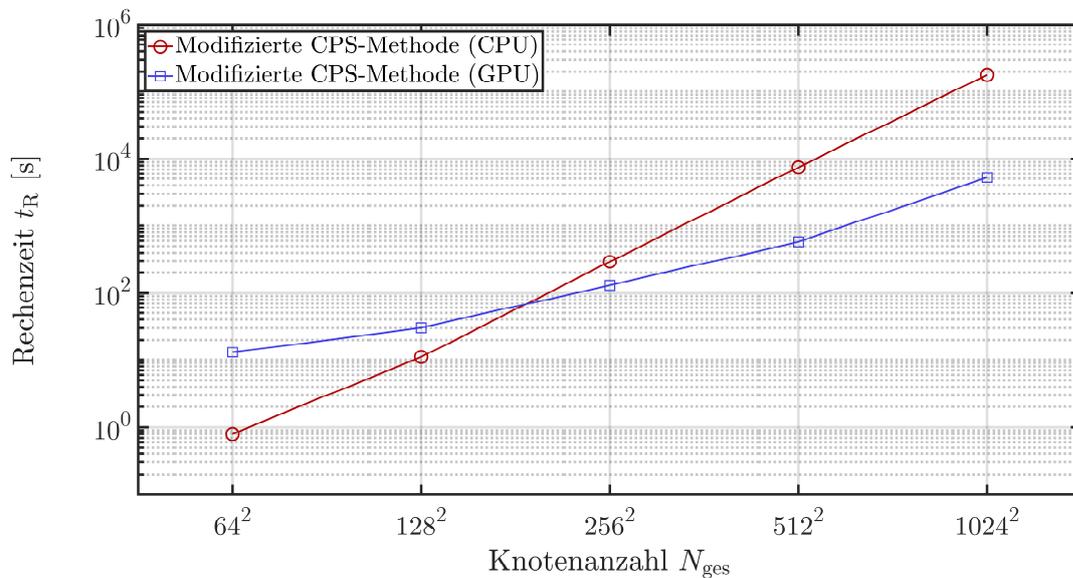


Abbildung 3.21: Vergleich der Rechenzeit t_R für die CPU-basierte und die GPU-basierte Variante der modifizierten CPS-Methode in Abhängigkeit von der Knotenanzahl N_{ges} (2-D linear-elastische Wellenausbreitung).

3.1.5.3 3-D Wellenausbreitungsprobleme in einem linear-elastischen Halbraum

Zuletzt wird eine Verifikation für den 3-D linear-elastischen Fall durchgeführt. Betrachtet wird dabei das 3-D LAMB-Problem entsprechend den Abbildungen 3.22 und 3.23.

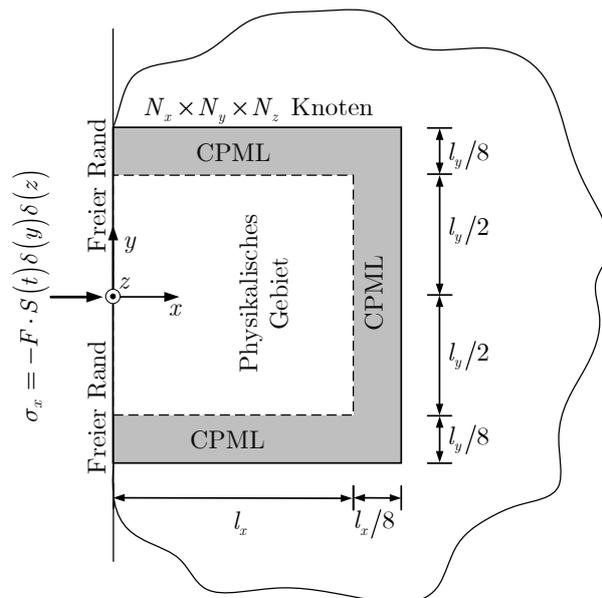


Abbildung 3.22: Prinzipskizze des Berechnungsgebietes eines 3-D elastischen Halbraumes unter einer punktförmigen Erregung.

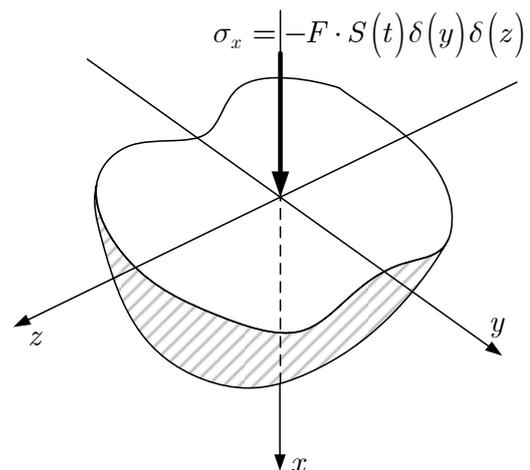


Abbildung 3.23: Elastischer Halbraum unter Einwirkung einer zeitabhängigen Punktlast in x -Richtung.

Hierbei wird ein 3-D linear-elastischer Halbraum unter Einwirkung einer zeitabhängigen Punkterregung nach Gleichung (3.69) am Koordinatenursprung ($x = y = z = 0$) der freien Oberfläche untersucht. Dabei sind die Abmessungen sowie Material- und Simulationsparameter aus dem 2-D Fall übernommen. In Anlehnung an das zuvor betrachtete 2-D Problem wird ein würfelförmiger 3-D Körper mit $l_x = l_y = l_z$ und $N_x = N_y = N_z = N = 128$ untersucht. Die zugehörigen 3-D konstitutiven Gleichungen sind dabei durch die Gleichung (2.9) bzw. (2.11) für einen linear-elastischen Festkörper gegeben. Die Randbedingungen an der freien Oberfläche sind unter Verwendung der Signalfunktion $S(t)$ nach der Gleichung (3.69) wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\sigma_x(x=0, y, z, t) &= -F \cdot S(t) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z), \\ \tau_{xy}(x=0, y, z, t) &= 0, \\ \tau_{xz}(x=0, y, z, t) &= 0.\end{aligned}\tag{3.77}$$

Dabei ist der Betrag der Punktlast als $F = 10^4$ N gewählt. Da im weiteren Verlauf dieser Arbeit ausschließlich die modifizierte CPS-Methode zur 3-D Berechnung verwendet wird, bezieht sich die im Folgenden durchgeführte Verifikation nur auf diese numerische Methode, wobei hier ihre CPU- und GPU-Varianten untersucht werden. Das für diese numerische Simulation verwendete gestaffelte 3-D Berechnungsgitter und die Anordnung der maßgebenden Feldgrößen sind in der Abbildung 3.24 dargestellt.

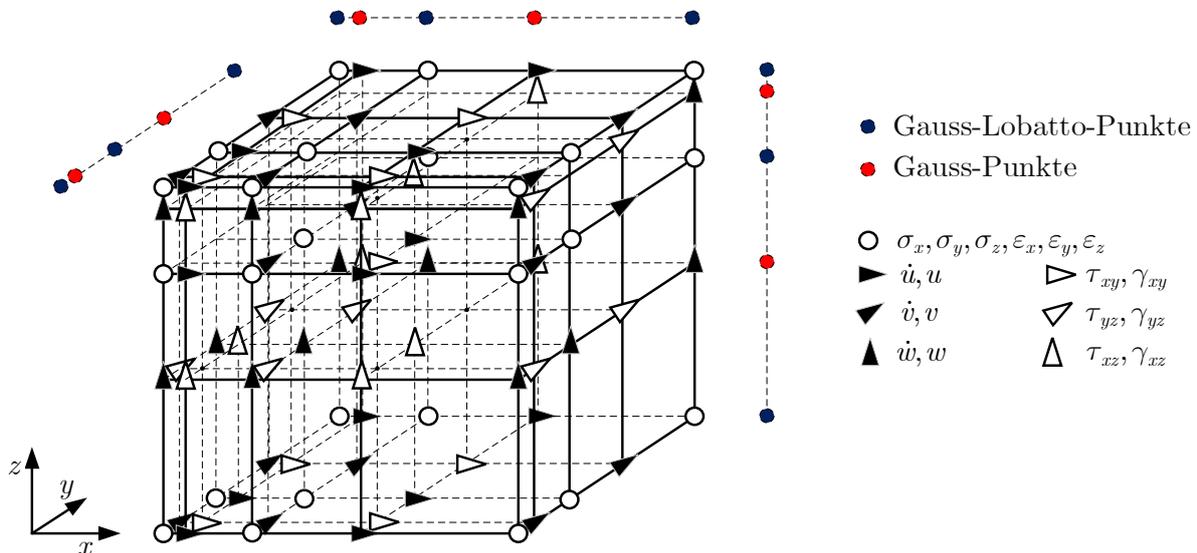


Abbildung 3.24: 3-D gestaffeltes Berechnungsgitter und die Anordnung der Feldgrößen für die modifizierte CPS-Methode.

Zur Bestimmung der exakten Referenzlösung werden die in [2, 98, 102] vorgestellten Lösungen für das Verschiebungsfeld $\mathbf{g}(x, y, z, t) = [g_u(x, y, z, t), g_v(x, y, z, t), g_w(x, y, z, t)]^T$ infolge einer sprunghaft aufgebrachtten Vertikallast auf der freien Oberfläche des 3-

D Halbraums verwendet. Um die entsprechende Lösung für die zeitabhängige Erregung $S(t)$ zu erhalten, wird das Faltungstheorem der Verschiebungsantwort $\mathbf{g}(x, y, z, t)$ und der Ableitung des Zeitsignals $\dot{S}(t)$ gemäß

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \dot{S}(t) * \mathbf{g}(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\tau) \cdot \mathbf{g}(x, y, z, t - \tau) d\tau \quad (3.78)$$

ausgewertet. Somit stellt $\mathbf{u}(x, y, z, t) = [u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)]^T$ das resultierende 3-D Verschiebungsfeld des elastischen Halbraums infolge der zeitabhängigen Erregung $S(t)$ dar. In gleicher Weise wird das zugehörige Geschwindigkeitsfeld

$$\dot{\mathbf{u}}(x, y, z, t) = \ddot{S}(t) * \mathbf{g}(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{S}(\tau) \cdot \mathbf{g}(x, y, z, t - \tau) d\tau \quad (3.79)$$

aus der Sprungantwort $\mathbf{g}(x, y, z, t)$ bestimmt. Indem eine Faltung der Sprungantwort mit der zweifachen Ableitung des Zeitsignals $\ddot{S}(t) = \partial^2 S(t) / \partial t^2$ durchgeführt wird.

Zum grundlegenden Verständnis der Wellenausbreitung im 3-D linear-elastischen Halbraum ist in der Abbildung 3.25 für drei unterschiedliche Zeitpunkte die mittels der modifizierten CPS-Methode berechnete Lösung für die Partikelgeschwindigkeitsbeträge $|\dot{\mathbf{u}}| = \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2}$ in der x - y -Ebene bei $z = 0$ dargestellt. Zusätzlich ist in der Abbildung 3.26 die zugehörige analytische Vergleichslösung gegeben. Wie für den 2-D Fall (siehe Abschnitt 3.1.5.2) zeigt sich hier eine gute Übereinstimmung zwischen der numerischen Lösung und der analytischen Referenzlösung.

In der Abbildung 3.27 ist das Zeitsignal der horizontalen Partikelgeschwindigkeit \dot{u} an dem Punkt $P(x = l_x/2, y = 0, z = 0)$ innerhalb des physikalischen Betrachtungsraumes dargestellt. Auch hier wird die sehr gute Übereinstimmung mit der analytischen Vergleichslösung deutlich. Der große Unterschied in der Amplitude der horizontalen Partikelgeschwindigkeit \dot{u} für den 2-D und 3-D Fall ergibt sich aus der Tatsache, dass im 2-D Fall eine Linienlast Q und im 3-D Fall eine Punktlast F vorgegeben ist, wobei die Höhe der beiden Amplituden gleich gewählt wurde. Die Abbildung 3.27 präsentiert dabei das Ergebnis der GPU-basierten Berechnung mit einem relativen L_2 -Fehler von $\delta_{L_2} = 0,147 \%$ und einer Rechenzeit von $t_R \approx 614,10$ s. Für die CPU-basierte Berechnung liegt der relative L_2 -Fehler bei $\delta_{L_2} = 0,052 \%$ und die benötigte Rechenzeit bei $t_R \approx 6830,90$ s. Auf der einen Seite führt die CPU-basierte Berechnung zu einem 3-mal geringeren Fehler gegenüber der GPU-basierten Berechnung, und auf der anderen Seite erhöht sich aber gleichzeitig die Rechenzeit um das Zehnfache. Aufgrund des bereits sehr niedrigen Fehlers in beiden Berechnungen wird daher die geringere Rechenzeit bei der Auswahl der geeigneten numerischen Methode maßgebend sein.

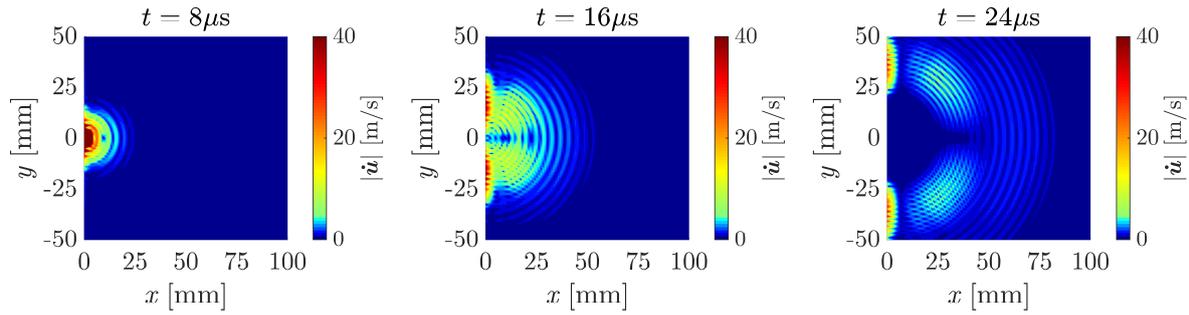


Abbildung 3.25: Numerische Lösung der 3-D linearen Wellenausbreitung des Partikelgeschwindigkeitsbetrages $|\dot{\mathbf{u}}|$ in der x - y -Ebene bei $z = 0$ zu verschiedenen Zeitpunkten t (modifizierte CPS-Methode, Knotenanzahl $N_{\text{ges}} = 128^3$, COURANT-Zahl $C = 0,5$).

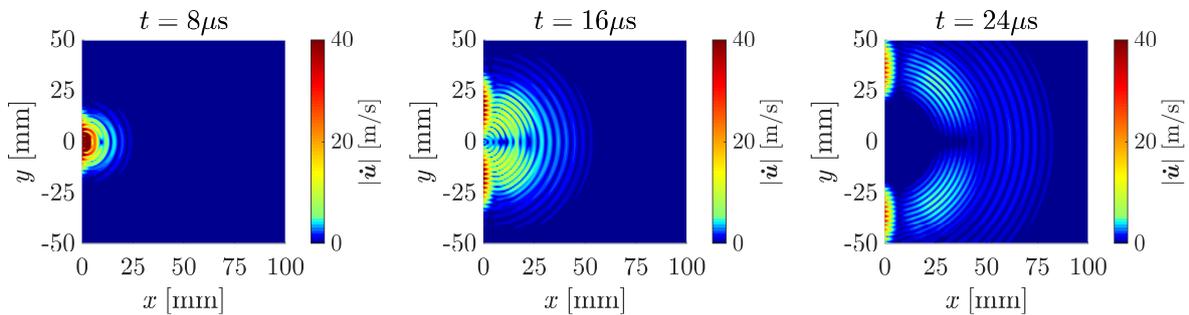


Abbildung 3.26: Analytische Lösung der 3-D linearen Wellenausbreitung des Partikelgeschwindigkeitsbetrages $|\dot{\mathbf{u}}|$ in der x - y -Ebene bei $z = 0$ zu verschiedenen Zeitpunkten t .

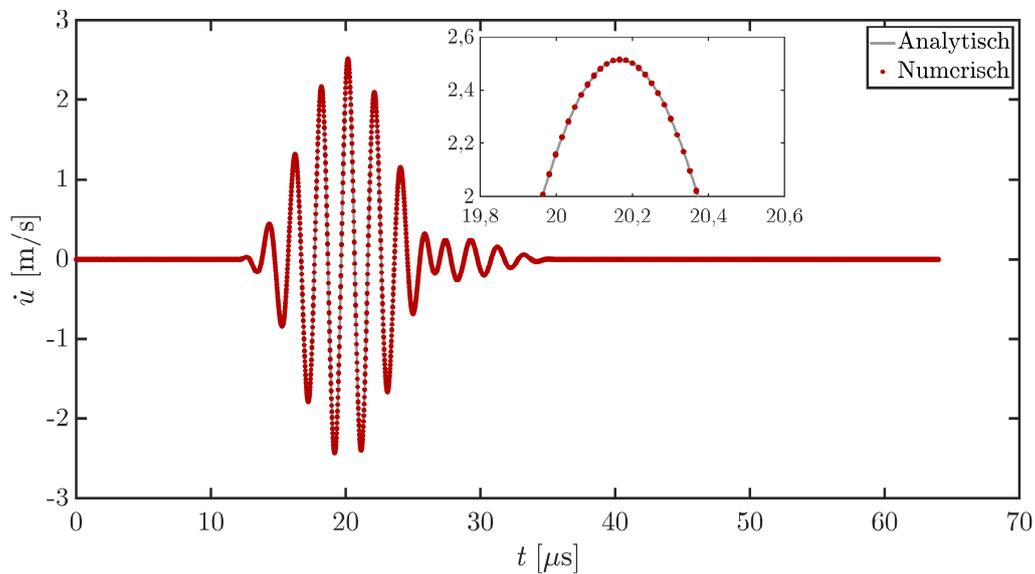


Abbildung 3.27: Mittels modifizierter CPS-Methode ($N_{\text{ges}} = 128^3$, $C = 0,5$) berechnete numerische Lösung für die 3-D linear-elastische Wellenausbreitung der horizontalen Partikelgeschwindigkeit \dot{u} bei $x = l_x/2, y = 0, z = 0$ und zugehörige exakte Lösung.

Abschließend lässt sich zusammenfassen, dass die implementierte modifizierte CPS-Methode ein sehr stabiles und effizientes Verfahren zur numerischen Simulation der Wellenausbreitungsprobleme ist. Insbesondere die GPU-basierte Variante zeichnet sich

dabei durch eine geringe Rechenzeit für höherdimensionale Probleme aus. Weiterhin kann festgestellt werden, dass die CPS-Methode trotz der spektralen Ordnung für die üblichen nichtlinear-elastischen Berechnungen, in denen die nichtlineare Lösung nicht stark von der linearen Lösung abweicht, sehr gut geeignet ist. In Sonderfällen (z. B. bei Schockwellen) versagen diese Verfahren jedoch und es muss auf andere Verfahren wie das KT-Schema zurückgegriffen werden, welche jedoch mit einem immensen Zuwachs in der Rechenzeit verbunden sind. Jedoch zeigt sich auch hierbei, dass eine GPU-basierte Berechnung die Rechenzeit im betrachteten Beispiel um den Faktor 30 reduzieren kann. Aufgrund der zuvor diskutierten Vorteile der CPS-Methode hinsichtlich der Rechenzeit, Konvergenz und Genauigkeit wird für die folgenden numerischen Untersuchungen zur nichtlinearen Wellenausbreitung im nächsten Kapitel nur diese Methode verwendet.

3.2 Experimentelle Methoden

Die zuvor betrachtete Wellenausbreitung in einem elastischen Festkörper ist nur ein Spezialfall der allgemeinen Wellenausbreitung in einem elastischen Kontinuum. Grundsätzlich lässt sich die Ausbreitung mechanischer Wellen in Flüssigkeiten und Gasen in ähnlicher Weise behandeln. Voraussetzung dieser sogenannten Schallausbreitung ist hierbei ein elastisches Übertragungsmedium. Hiermit unterscheiden sich diese Wellen grundsätzlich von den elektromagnetischen Wellen und den Gravitationswellen, welche sich auch im Vakuum ausbreiten. Für die technische Anwendung ist es oftmals sinnvoll den Schall hinsichtlich des zugehörigen Frequenzbereiches zu unterteilen. Von besonderer Relevanz ist hierbei der Frequenzbereich oberhalb der Hörschwelle des menschlichen Gehörs. Dieser Bereich wird allgemein als Ultraschall bezeichnet und bezieht sich auf einen Frequenzbereich zwischen 20 kHz bis 1 GHz. Unterhalb einer Frequenz von 500 kHz wird auch häufig von niederfrequentem Ultraschall gesprochen.

In der Bildgebung, der Navigation und der Ortung werden heutzutage Ultraschall-basierte Methoden in vielfältiger Weise erfolgreich eingesetzt. Die Anwendung reicht hier von der Medizintechnik, der Automobiltechnik bis hin zur Sonartechnik. Daneben haben sich insbesondere im Bereich der zerstörungsfreien Materialprüfung vielfältige Ultraschallverfahren etabliert, welche gerade im Hinblick auf die Qualitätskontrolle und Schädigungsüberwachung bzw. Zustandsüberwachung von Bauwerken eine immer wichtigere Bedeutung erfahren.

Neben den bildgebenden Ultraschallverfahren, welche die akustischen Effekte der Reflexion, Brechung, Beugung und Streuung ausnutzen, um ein Abbild der inneren Struktur zu erhalten, lässt sich über die ultraschalltechnische Beurteilung der elastischen bzw. akustischen Eigenschaften (Elastizitätsmodul, Schubmodul, Wellengeschwindigkeit, akustische Dämpfung) eines Materials dessen Strukturaufbau und Schädigungszustand gut beurteilen. In dieser Arbeit soll diese letztere Aufgabe verfolgt werden.

3.2.1 Sender und Empfänger der Ultraschalltechnik

Zur Erzeugung und zum Empfang von Ultraschallwellen in realen Strukturen existieren je nach Anwendung und zu prüfendem Material unterschiedliche Schallwandler und Sensoren. Am häufigsten werden dabei piezoelektrische Ultraschallprüfköpfe eingesetzt. Diese nutzen den piezoelektrischen Effekt, welcher bewirkt, dass sich spezielle Piezokristalle (Piezokeramiken) durch die angelegte elektrische Spannung elastisch verformen (indirekter piezoelektrischer Effekt) bzw. bei mechanischer Beanspruchung selbst eine elektrische Spannung erzeugen (direkter piezoelektrischer Effekt). Hiermit lässt sich ein elektrisches Signal in ein mechanisches Ultraschallsignal umwandeln und umgekehrt. Die Fähigkeit des piezoelektrischen Wandlers bzw. Sensors ein Ultraschallsignal mit der gewünschten Prüffrequenz zu erzeugen bzw. zu empfangen hängt dabei maßgeblich von ihrer Geometrie ab. So besitzt jeder Prüfkopf bzw. piezoelektrische Wandler eine charakteristische Resonanzfrequenz (auch Mittenfrequenz genannt), bei der die Schwingungsamplitude maximal ist und somit der akustische Wirkungsgrad am größten ist. Mit zunehmender Distanz zu dieser Resonanzfrequenz nimmt der akustische Wirkungsgrad stark ab. Um den technisch nutzbaren Frequenzbereich zu vergrößern, werden kommerziell erhältliche Ultraschallprüfköpfe zusätzlich mit einer Dämpfungsschicht ausgeführt. Diese bewirkt, dass die Schwingung des Wandlers schneller abklingt. Ein stark gedämpfter Prüfkopf hat dabei einen breiten Nutzfrequenzbereich und wird daher auch als breitbandiger Prüfkopf bezeichnet. Dagegen erzeugt ein nahezu ungedämpfter Prüfkopf ein schmalbandiges Signal um die Resonanzfrequenz. Neben Kristallen, wie z. B. Quarz (SiO_2) und Turmalin, welche auf natürliche Weise piezoelektrische Effekte aufweisen, werden heutzutage überwiegend Sinterkeramiken wie Bleizirkonat-Titanat (PZT), Bariumtitanat (BaTiO_3), Lithiumsulfat (LiSO_4) und Bleimetaniobat (PbNb_2O_6) als Piezowandler eingesetzt. Aufgrund der hohen akustischen Impedanzunterschiede zwischen Luft und Festkörper wird zur sogenannten Kontaktprüfung zwischen Prüfkopfoberfläche und dem zu prüfenden Material ein Koppelmittel aufgetragen. Die Notwendigkeit zur Verwendung eines Koppelmittels stellt mit Blick auf die Reproduzierbarkeit und Automatisierung der Ultraschallprüfung immer eine Herausforderung, wenn nicht sogar ein Problem, dar. Daher wurden in den letzten Jahrzehnten

leistungsfähige luftgekoppelte Ultraschallprüfköpfe entwickelt, welche spezielle Anpassungsschichten aufweisen und kein Koppelmittel erfordern. Darüber hinaus existieren Laser-Ultraschallverfahren. Die Erzeugung von Ultraschallwellen basiert hierbei maßgeblich auf einem thermoelastischen Zusammenhang. Hierbei führt die durch einen intensiven Laserimpuls eingebrachte Wärme im Prüfstück zu einer elastischen Verformung bzw. mechanischen Ultraschallwelle. Zur optischen Detektion von Ultraschallwellen stehen heutzutage kommerziell erhältliche Messgeräte, wie Laservibrometer bzw. Laserinterferometer, zur Verfügung. Für metallische Werkstoffe können neben den bereits beschriebenen Verfahren auch elektromagnetische Wandler und Sensoren (*Electromagnetic Acoustic Transducer*, EMAT) oder auch kapazitative Verfahren eingesetzt werden.

3.2.2 Anordnung von Sender und Empfänger

In der Ultraschalltechnik ist die Anordnung der Prüfköpfe von grundlegender Bedeutung. In der Ultraschallprüfung mittels Körperwellen (reine Longitudinalwellen bzw. Transversalwellen) unterscheidet man grundsätzlich die Impuls-Echo Methode und die Durchschallungsmethode (siehe Abbildung 3.28). In der ersten Methode wird ein „Einkopfbetrieb“ durchgeführt. Hierbei sendet der „Sender/Empfänger-Prüfkopf“ (SE-Prüfkopf) ein Ultraschallsignal in das Prüfstück, an einer Grenzfläche/ Berandung des zu prüfenden Materials erfolgt dann die Reflexion und die Erzeugung eines Echos, welches wieder vom SE-Prüfkopf empfangen wird. Hiermit lässt sich anhand der empfangenen Echos beispielsweise ein Bild der inneren Gefügestruktur rekonstruieren bzw. generieren. Dabei ist grundsätzlich zu beachten, dass Defekte mit einer Abmessung unterhalb der Wellenlänge des Ultraschallsignals messtechnisch nicht mehr auflösbar sind. Somit muss für eine bessere Auflösung sehr kleiner Defekte die Wellenlänge verringert und damit die zugehörige Frequenz erhöht werden. Die Durchschallungsmethode wird im „Zweikopfbetrieb“ durchgeführt. Hierbei erzeugt der Sender-Prüfkopf ein Ultraschallsignal im Probekörper, welches auf der gegenüberliegenden Bauteilseite von einem Empfänger-Prüfkopf empfangen wird. Diese Methode basiert maßgeblich auf der Transmission elastischer Wellen. Der Nachteil dieser Methode ist, dass ein beidseitiger Zugang zum Prüfkörper gewährleistet sein muss, was in realen Bauwerken oftmals nur schwer zu realisieren ist. Jedoch ist für stark schallabsorbierende Materialien wie Beton und Kunststoff oftmals nur die Durchschallungsmethode zweckmäßig. Große Bedeutung für die zerstörungsfreie Prüfung haben auch Verfahren unter Verwendung von Oberflächenwellen oder geführten Wellen. Hierbei werden spezielle Winkelprüfköpfe

oder Keile eingesetzt, um die Wellen auf der Grundlage des akustischen Brechungsgesetzes im Festkörper zu erzeugen und zu empfangen.

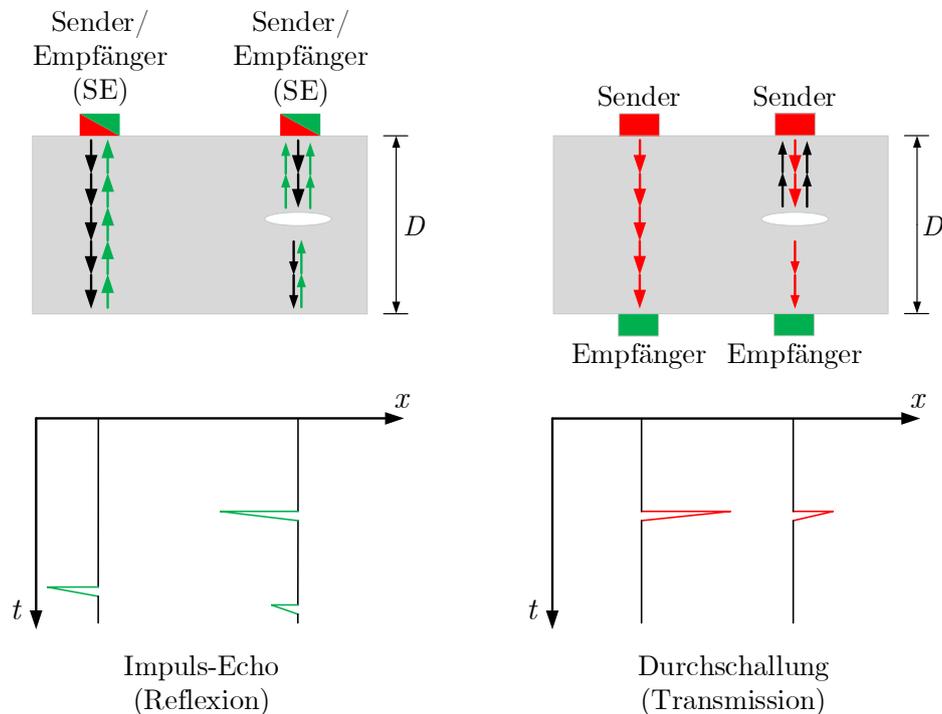


Abbildung 3.28: Prüfkopfanzordnung bei der Ultraschalltechnik.

3.2.3 Lineare Ultraschallverfahren

Die lineare Ultraschalltechnik gehört mittlerweile im Ingenieurwesen zu einer sehr verbreiteten und bewährten Standardmethode zur zerstörungsfreien Prüfung von elastischen Strukturen. Hiermit lassen sich die mechanischen Eigenschaften und Gefügestrukturen darstellen und beschreiben. Insbesondere sind die nachfolgend beschriebenen Methoden hervorzuheben, die sich in der praktischen Anwendung etabliert haben.

3.2.3.1 Impakt-Echo-Verfahren

Anfang der 1980er Jahre entwickelte das „National Bureau of Standards“ (NBS) als Folge zunehmender Schädigungsfälle an Betontragwerken ein zerstörungsfreies Prüfungsverfahren, um dem globalen Versagen bzw. Ausfall eines Bauwerks frühzeitig entgegenzuwirken. Dieses sogenannte Impakt-Echo-Verfahren ist mittlerweile ein Standardverfahren zur Schädigungsbeurteilung und zur Bauteildickenmessung von Betonkonstruktionen und kann als Vorreiter der zerstörungsfreien Prüfung mittels Ultraschallwellen im Bauwesen betrachtet werden. Bei diesem Verfahren wird das Bauteil durch einen mechanischen Impuls an der Oberfläche angeregt. Die hierbei in das Material ausgesendeten elastischen Wellen werden an den Grenzflächen, makroskopischen

Rissen oder den Rändern des Bauteils reflektiert und von einem Sensor (piezoelektrischer Aufnehmer) an der Bauteiloberfläche empfangen (siehe Abbildung 3.29). Das empfangene Zeitsignal wird anschließend in den Frequenzbereich transformiert und analysiert.

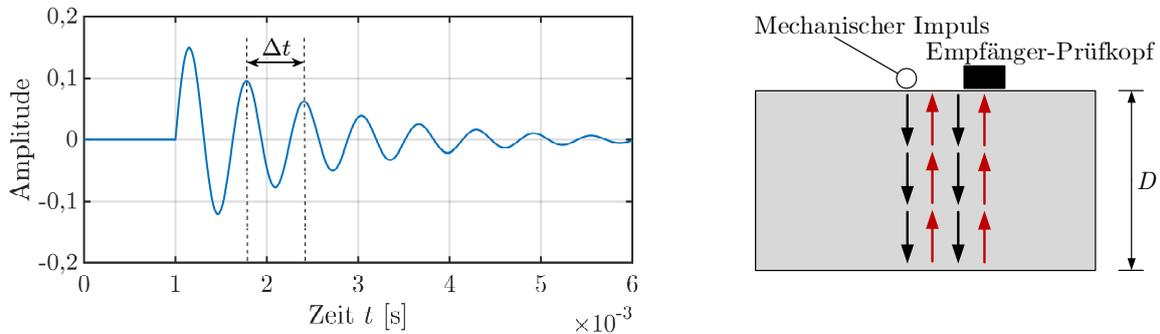


Abbildung 3.29: Prinzipskizze zum Impakt-Echo-Verfahren.

Setzt man voraus, dass Longitudinalwellen die Signalantwort dominieren, so steht das Zeitintervall Δt zwischen zwei aufeinander folgenden Echos in nachstehendem Zusammenhang mit der longitudinalen Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c_L und der Bauteildicke D bzw. Tiefe der jeweiligen Grenzfläche

$$\Delta t = \frac{2D}{c_L}. \quad (3.80)$$

Weiterhin führt die Auswertung des entsprechenden Zeitsignals zu einem charakteristischen Frequenzspektrum. Hierbei ergibt sich die gesuchte Frequenz f als Folge der mehrfachen Reflexionen an der Grenzfläche zu

$$f = \frac{1}{\Delta t} = \frac{c_L}{2D}. \quad (3.81)$$

Nach Umstellen dieser Gleichung kann man unter Betrachtung der dominierenden Frequenzen im Frequenzspektrum die Bauteildicke bzw. die Tiefe einer Grenzschicht (Risse, Poren etc.)

$$D = \frac{c_L}{2f} \quad (3.82)$$

ermitteln. Grundsätzlich ist zu beachten, dass infolge der Anregung unterschiedlicher Wellenarten und durch die heterogene Materialstruktur die Auswertung der Signalantwort teilweise recht aufwendig ist und viel Erfahrung mit dieser Methode vorausgesetzt werden muss. Falls richtig angewendet, kann das Impakt-Echo-Verfahren eine Vielzahl

von makroskopischen Defekten sicher feststellen und lokalisieren. So wurde das Verfahren in der Vergangenheit erfolgreich zur Detektion von Poren, Kiesnestern und Delaminationen in Betonstrukturen eingesetzt [38]. Hierbei zeichnet sich das Verfahren insbesondere durch die geringen Anschaffungskosten, die Robustheit und die Flexibilität aus.

3.2.3.2 Ultraschalllaufzeitmessung

Bei der Ultraschalllaufzeitmessung wird die Zeit gemessen, die eine Ultraschallwelle benötigt um vom Ausgangspunkt (Sender) bis zum Endpunkt (Empfänger) zu gelangen. Mit Kenntnis dieser Laufzeit lässt sich dann abhängig von der Prüfkopfanzordnung die Wellengeschwindigkeit des Mediums berechnen. Im Fall der Durchschallungsmethode ergibt sich dabei die folgende Gleichung zur Bestimmung der Wellengeschwindigkeit

$$c = \frac{D}{\Delta t}. \quad (3.83)$$

Hierbei ist D die Bauteildicke und Δt die Laufzeit, auch „*Time of Flight* (ToF)“ genannt. Zur Bestimmung der Wellengeschwindigkeit im Impuls-Echo Verfahren wird der gleiche Zusammenhang wie in Gleichung (3.83) verwendet, jedoch mit geänderter Pfadlänge, da das Signal (erstes Echo) die doppelte Strecke (doppelte Bauteildicke) bis zum Empfangspunkt zurücklegt. Somit erhält man hier

$$c = \frac{2D}{\Delta t}. \quad (3.84)$$

Im Impuls-Echo Betrieb lässt sich zudem bei Kenntnis der Wellengeschwindigkeit des Mediums und der Laufzeit des Grenzflächenechos auf die Tiefe des zugehörigen Risses, Einschlusses oder Fehlers schließen. Zur Bestimmung des Absolutwertes der Laufzeit wird im Durchschallungsmodus in der Regel eine Messung an einer Referenzprobe durchgeführt. Für die Impuls-Echo-Konfiguration lässt sich der Absolutwert über die Laufzeitdifferenz zwischen dem ersten und zweiten Echo bestimmen. Um die Laufzeit messtechnisch zu erfassen, sind in der Literatur verschiedene Methoden vorgeschlagen. Der einfachste Ansatz besteht darin, den Beginn des auszuwertenden Signals auf der Zeitachse zu bestimmen. Um diesen Nullstellenpunkt mit hoher Genauigkeit zu ermitteln, bedarf es dabei einer Mittelwertbildung des Signals über mehrere Zeitpunkte und einer Nullstelleninterpolation. Somit kann das Rauschen aus dem Material und der Messtechnik eliminiert werden. Eine weitere häufig verwendete Methode zur Laufzeitberechnung besteht in der Kreuzkorrelation zweier Signale. Im Impuls-Echo-Modus kann dabei das erste Signalecho mit dem zweiten Signalecho verglichen werden. Die

gesuchte Laufzeit ergibt sich hierbei an der Stelle, wo der Korrelationskoeffizient sein Maximum erreicht, und somit die höchstmögliche Übereinstimmung der beiden Signale erzielt wird. Hiermit können sehr hohe Genauigkeiten bzw. sehr kleine Änderungen der Laufzeit erfasst werden. In dieser Arbeit wird im experimentellen Teil größtenteils die sogenannte Phasenverschiebungsmethode zur Laufzeitbestimmung verwendet. Diese basiert auf der Untersuchung der Phasenspektren der zu untersuchenden Signale. Aufgrund der Relevanz für diese Arbeit soll diese Methode kurz dargestellt werden. Setzt man zwei sinusförmige Signale u_0 und u_1 mit gleicher Frequenz f und Wellengeschwindigkeit c voraus (erstes Signalecho und zweites Signalecho)

$$u_0 = A \sin(2\pi f t_0) = A \sin(\varphi_0), \quad (3.85)$$

$$u_1 = B \sin(2\pi f t_1) = B \sin(\varphi_1), \quad (3.86)$$

mit den Phasenwinkeln φ_0 und φ_1 sowie den Laufzeiten t_0 und t_1 , so erhält man hieraus den folgenden Zusammenhang zur Bestimmung der Laufzeit beider Signale:

$$t_0 = \frac{\varphi_0}{2\pi f}, \quad (3.87)$$

$$t_1 = \frac{\varphi_1}{2\pi f}. \quad (3.88)$$

Bei bekannter Dicke bzw. Pfadlänge D ergibt sich somit nach der Gleichung (3.84) die gesuchte absolute Wellengeschwindigkeit c zu

$$c = \frac{2D}{t_1 - t_0}. \quad (3.89)$$

Diese Vorgehensweise lässt sich auch auf die Messung der relativen Geschwindigkeitsänderung übertragen. Hierbei setzt man voraus, dass die zwei Signale durch die Gleichungen (3.85) und (3.86) gegeben sind. Dabei handelt es sich für die beiden Signale um beispielsweise das erste Signalecho jedoch mit jeweils unterschiedlichen Wellengeschwindigkeiten. Hieraus erhält man zwei unterschiedliche Phasenwinkel und Laufzeiten entsprechend den Gleichungen (3.87) und (3.88). Wie in der Gleichung (3.89) liegt somit eine Zeitdifferenz

$$\Delta t = t_0 - t_1 = \frac{\Delta\varphi}{2\pi f} \quad (3.90)$$

zwischen den beiden Signalen vor, mit der Phasendifferenz $\Delta\varphi = \varphi_0 - \varphi_1$. Da die Pfadlänge bzw. der zurückgelegte Weg bei einer relativen Messung unveränderlich ist und nur die Wellengeschwindigkeit infolge beispielsweise einer Materialschädigung abnimmt, lässt sich mit der Gleichung (3.90) die hieraus resultierende relative Änderung der Laufzeit direkt auf die relative Geschwindigkeitsänderung

$$\frac{\Delta c}{c_0} = \frac{\Delta t}{t_0} \quad (3.91)$$

übertragen. Bestimmt man für die beiden grundlegenden Wellentypen in einem isotropen elastischen Festkörper die Wellengeschwindigkeiten mittels Gleichung (3.83) bzw. (3.84), so lassen sich bei Kenntnis der Massendichte ρ_0 und unter Verwendung der Zusammenhänge aus den Gleichungen (3.83) bzw. (3.84) die elastischen Konstanten 2. Ordnung bestimmen. In der Regel werden die elastischen Kenngrößen, welche mit einer ultraschalltechnischen Untersuchung bestimmt werden, in Unterscheidung zu den aus statischen Versuchen ermittelten elastischen Parametern, als dynamische elastische Parameter bezeichnet (z. B. dynamischer Elastizitätsmodul oder Schubmodul). Für homogene Materialien stimmen die statischen und dynamischen Parameter in der Regel sehr gut überein. Für heterogene und dispersive Medien wie Beton ist es oftmals schwer eine gute Übereinstimmung zu erhalten. Trotz dieser möglichen Diskrepanz besteht ein zweifelsfreier Zusammenhang zwischen den Wellengeschwindigkeiten und den elastischen Eigenschaften und der Morphologie des Werkstoffes. In der Vergangenheit konnte insbesondere bestätigt werden, dass die Wellengeschwindigkeit eine starke Abhängigkeit von der Betonart, dem Wasserzementwert (kurz: w/z-Wert), dem Betonalter und der Gesteinskörnung [139, 165] zeigt. Weiterhin wurde festgestellt, dass generell eine hohe Druckfestigkeit mit einer hohen longitudinalen Wellengeschwindigkeit c_L korreliert [165]. Dennoch ist dieser Zusammenhang lediglich qualitativer Natur und kann nicht zur eindeutigen Bestimmung der Druckfestigkeit verwendet werden [167]. Aufgrund der Sensitivität der Wellengeschwindigkeit bzw. Laufzeit hinsichtlich der Struktur und des Aufbaus des Betons kann dieses Ultraschallverfahren in gewissem Umfang zur Qualitätsprüfung bzw. Zustandskontrolle genutzt werden. So ist dieses Ultraschallverfahren mittlerweile in zahlreichen nationalen und internationalen Normen des Bauwesens enthalten und beschrieben [9, 54, 108]. Grundsätzlich kann die Laufzeitmessung auch zur Detektion von makroskopischen Schäden und Defekten im Beton eingesetzt werden [181, 197]. Einige Beispiele für solche Defekte sind hierbei Risse, Poren, Einschlüsse oder größere Inhomogenitäten in der Struktur [139]. Zur Detektion frühzeitiger Schädigungen im Mikrorissstadium ist diese Methode jedoch in der Regel ungeeignet.

3.2.3.3 Dämpfungsmessung

Neben der ultraschalltechnischen Bestimmung der linear elastischen Materialparameter (dynamischer Elastizitätsmodul und Schubmodul) mittels der im vorigen Abschnitt beschriebene Laufzeitmessung ist insbesondere auch die Ultraschall-Dämpfungsmessung von zentraler Bedeutung hinsichtlich einer möglichst vollständigen bzw. detaillierten Materialcharakterisierung. Im Allgemeinen beschreibt die akustische Dämpfung alle Effekte, die zu einer kontinuierlichen Verringerung der Wellenamplitude entlang der Ausbreitungsrichtung führen. Hierbei unterteilt man die Dämpfung in einen extrinsischen und einen intrinsischen Anteil. Zum Verständnis der extrinsischen Dämpfung sei eine ideal-elastische sphärische Welle betrachtet, die sich von ihrem Erregungspunkt über die Zeit t im Raum ausbreitet. Dabei wird durch die Punktquelle der Erregung dem System mechanische Energie zugeführt. Diese Energie wird in einem vollständig reversiblen Vorgang für die Bewegung der Welle im Raum erhalten. Jedoch ändert sich mit nach außen zunehmender Ausbreitung die Intensität dieser Welle und hiermit ihre Amplitude, da sich die Durchflussfläche (Oberfläche der sphärischen Welle) kontinuierlich vergrößert. Dieser Dämpfungseffekt wird auch geometrische Divergenz genannt. Dabei ist die Änderung der Wellenamplitude umgekehrt proportional zur zurückgelegten Strecke. Die extrinsische Dämpfung ist also hauptsächlich von der Geometrie des akustischen Strahlers, der Wellenlänge und dem Abstand von der Quelle abhängig. Daher ist diese Art der Dämpfung in jeder realen Dämpfungsmessung implizit enthalten und kann mittels mathematischer Gleichungen berücksichtigt bzw. exakt bestimmt werden. Die für die Materialcharakterisierung relevante Dämpfung ist jedoch die intrinsische oder materielle Dämpfung, welche aus der akustischen Absorption und Streuung resultiert. Absorptionsverluste sind dabei hauptsächlich auf die Reibungsprozesse innerhalb des Materialgefüges zurückzuführen (z. B. Kontaktzone zwischen Zementsteinmatrix und Gesteinskörnung). Die Verluste infolge von Streuung sind auf die stark inhomogene Struktur des Betons zurückzuführen und hängen dabei stark von der Art der akustischen Streuer (Luft-/Gelporen, Lunker, Risse, Gesteinskörnung etc.) sowie deren Abmessung, deren Verteilung und deren akustischer Impedanz ab. Bei Ultraschallmessungen an realen Betonstrukturen treten die erwähnten Dämpfungsmechanismen gemeinsam auf und können in der Regel nicht getrennt voneinander behandelt bzw. untersucht werden. Daher wird in den üblichen Ultraschall-Dämpfungsmessungen ohne Berücksichtigung des zugrundeliegenden Dämpfungsmechanismus der in der Gleichung (2.71) verwendete Dämpfungsparameter α_D experimentell aus der Abnahme der Signalamplitude A über die Ausbreitungslänge bzw. Dicke des Bauteils D in x -Richtung ermittelt. Hierbei wird in der Regel der folgende Zusammenhang für die Bestimmung des Dämpfungsparameters verwendet:

$$\alpha_D = \frac{1}{D} \ln \left(\frac{A(x=0)}{A(x=D)} \right). \quad (3.92)$$

Grundsätzlich kann hierbei die Amplitude direkt aus dem Ultraschall-Zeitsignal ermittelt werden. Aufgrund der ausgeprägten Streuung und Reflexion von Ultraschallwellen im Beton ist es jedoch oftmals sinnvoll die Amplitude über einer Auswertung im Frequenzspektrum zu erhalten. Da die akustische Dämpfung eng mit den zugrundeliegenden mikromechanischen Veränderungen bzw. Bedingungen im Material selbst verknüpft ist, kann über die Auswertung der Dämpfungseigenschaften ein sehr detailliertes Bild über den Materialzustand erhalten werden. Aufgrund der hohen Sensitivität der Ultraschall-Dämpfungsmessung hinsichtlich des Materialzustandes von Beton wurde dieses Verfahren in der Vergangenheit bereits erfolgreich zur Materialcharakterisierung und zur Schädigungsbeurteilung angewandt. Hierbei wurden in [73, 107, 124, 160, 164, 165] die Einflüsse unterschiedlicher Wasserzementwerte und Gesteinskörnungen auf die akustische Dämpfung untersucht. In [186, 190, 196] konnte gezeigt werden, dass der Dämpfungsparameter gut mit dem zunehmenden Mikrorisswachstum infolge statischer bzw. dynamischer Beanspruchung korreliert. Hierbei zeigte sich insbesondere eine weitaus höhere Sensitivität im Vergleich zur reinen Laufzeitmessung. Weiterhin konnte gezeigt werden, dass die Dämpfungsmessung auch zur Detektion von Alkali-Kieselsäure und Frost-Tau-Wechsel bedingten Schäden [75, 100, 180] und Korrosionsschäden in stahlbewehrten Betonen [63, 190, 229] geeignet ist. Generell ist jedoch festzuhalten, dass die Anwendbarkeit bzw. der Einsatz dieser Ultraschalltechnik durch einige Faktoren beschränkt oder beeinträchtigt wird. Zum einen ist aus messtechnischer Sicht eine wiederholbare Dämpfungsmessung mittels Kontaktprüfung oft schwer realisierbar, da in der Regel die veränderlichen Kontaktbedingungen die eigentliche Messung der Materialdämpfung stark beeinflussen. Weiterhin ist es für die stark heterogenen Betonstrukturen schwer festzulegen, welcher Bereich des Empfangssignals für die Auswertung relevant ist. Zuletzt ist anzumerken, dass meistens nur Defekte in der Größenordnung der Wellenlänge detektierbar sind bzw. zu einer messbaren Änderung der Dämpfung des Signals führen. Somit werden gerade niederfrequente Ultraschallsignale, welche bei der Prüfung von Beton zu bevorzugen bzw. üblich sind, oftmals nicht wesentlich durch die Schädigungen unterhalb der Wellenlänge beeinflusst.

Neben den zuvor beschriebenen Verfahren existieren darüber hinaus weitere lineare Ultraschallverfahren, wie die akustischen Emissionsverfahren [60, 72] oder sogenannte diffuse Ultraschallverfahren [125]. Anschließend sollen aufgrund des thematischen Schwerpunktes dieser Arbeit auf die nichtlineare Ultraschalltechnik die wichtigsten Ultraschallverfahren aus diesem Bereich beschrieben werden.

3.2.4 Nichtlineare Ultraschallverfahren

Die im vorigen Abschnitt betrachteten linearen Ultraschallverfahren beziehen sich in ihrem elastodynamischen Hintergrund auf die im Abschnitt 2.5 dargestellten linear-elastischen bzw. linear-viskoelastischen Wellenausbreitungsprobleme. In der Realität können jedoch gerade die akustischen Effekte der nichtlinearen Wellenausbreitung zusätzliche und wertvolle Hinweise auf den Zustand des Materials liefern. In der Vergangenheit wurden hierzu zahlreiche spezielle nichtlineare Ultraschallverfahren entwickelt, welche im Folgenden kurz vorgestellt werden sollen.

3.2.4.1 Frequenzanalyse der höherharmonischen Amplituden

Die ersten Ultraschalluntersuchungen zur Bestimmung der höherharmonischen Amplituden (kurz: Höherharmonischen) des Empfangssignals wurden Anfang der 1960er Jahre durchgeführt. Hierbei wurden zunächst für homogene Materialien wie Aluminium [25], Kupfer [26], Quarzglas [210] etc. die akustischen NLP experimentell bestimmt und mit den mikrostrukturellen Mechanismen (Gitternichtlinearität, Versetzungen etc.) in Zusammenhang gebracht. In den folgenden Jahrzehnten wurde diese nichtlineare Ultraschalltechnik auch zur Detektion von zahlreichen Schädigungen in Werkstoffen genutzt [142].

Die Grundlage dieses Ultraschallverfahrens bildet dabei die im Abschnitt 2.6 beschriebene Wellenausbreitung in einem nichtlinearen Medium. Dabei wird die elastische Welle auf ihrem Weg durch das nichtlineare Medium sukzessive verzerrt und es entstehen neben der Fundamentalwelle mit der Grundfrequenz die charakteristischen höherharmonischen Wellenanteile. Bezieht man sich im Folgenden auf die typischen Werkstoffe und realistischen Größenordnungen der Ultraschallamplituden, so sind die erzeugten höherharmonischen Anteile in der Regel sehr viel kleiner als die Fundamentalamplitude (-40 dB). Daher bedarf es hier grundsätzlich spezieller Analyseverfahren und Messtechnik, um diese höherharmonischen Anteile im Frequenzspektrum unter dem stets vorhandenen Messrauschen sicher zu registrieren.

Mit der Kenntnis der höherharmonischen Anteile lässt sich dann auf die nichtlinearen Eigenschaften des Materials schließen, welche für eine Materialcharakterisierung und Schädigungsbeurteilung von entscheidender Bedeutung sein können. Eine wichtige und vielfach angewendete nichtlineare Ultraschallmethode ist dabei die sogenannte „*Second Harmonic-Generation-Measurement*“ (SHG-Measurement, dt.: Messung der zweiten harmonischen Entstehung). Diese soll im Folgenden stellvertretend für die ultraschalltechnische Analyse des höherharmonischen Frequenzspektrums behandelt werden.

Ausgehend von einem monofrequenten longitudinalen Ultraschallsignal ist der zentrale Untersuchungsparameter hier der im Abschnitt 2.6.1.1 eingeführte akustische NLP nach der Gleichung (2.86). Grundsätzlich unterscheidet man hier zwischen absoluten und relativen Ultraschallmessungen der zweiten harmonischen Amplitude. In beiden Fällen muss zunächst die Fundamentalamplitude und die zweite harmonische Amplitude aus dem Frequenzspektrum ermittelt werden. Im Fall einer absoluten Messung des akustischen NLP mittels piezoelektrischer Prüfköpfe muss jedoch das Spannungssignal des Empfängers zunächst in die entsprechende Verschiebungsamplitude umgerechnet werden. Dies lässt sich beispielsweise mit einem reziproken Verfahren nach [48] erreichen. Die restlichen physikalischen Größen, wie die Wellenzahl k_L und der zurückgelegte Weg x , sind in der Regel bekannt und der absolute Wert des akustischen NLP lässt sich bestimmen. Eine Schwierigkeit bei der absoluten Messung des akustischen NLP ergibt sich aus mehreren Gründen. Zum einen ist bei einer Kontaktprüfung stets der nichtlineare Anteil aus dem Kontakt selbst enthalten. Hinzu kommen die Nichtlinearitäten aus dem elektrischen Stromkreislauf und den verwendeten Piezomaterialien. Die Gesamtheit dieser Nichtlinearitäten wird häufig auch als Systemnichtlinearität bezeichnet. Zuletzt muss ein möglicher Dämpfungseinfluss während der nichtlinearen Ultraschallprüfung berücksichtigt werden, beispielsweise über die Gleichung (2.114). Aufgrund dieser hohen Empfindlichkeit einer absoluten Messung in Bezug auf umgebende Störgrößen gestaltet sich die Reproduzierbarkeit dieser Messmethodik oftmals schwierig und ist meist auf den Laborversuch beschränkt.

Für eine relative Messung werden die Lage der Prüfköpfe, die Erregungsamplitude und die Frequenz in der Regel nicht verändert. Somit kann zur Beurteilung der Änderung der nichtlinearen Materialeigenschaften ein relativer akustischer NLP verwendet werden. Häufig findet man in der Literatur hierzu die folgende Definition des akustischen NLP [142, 225]

$$\beta = \frac{A_2}{A_1^2}. \quad (3.93)$$

Ein übliches Vorgehen zur Eliminierung des Einflusses der Systemnichtlinearitäten auf die Messung ist dabei die Signalamplitude schrittweise zu erhöhen und die empfangene Fundamentalamplitude A_1 und die zugehörige zweite Harmonische A_2 zu messen. Anschließend lässt sich dann der relative NLP als Steigung der linearen Ausgleichgeraden zwischen A_2 und A_1^2 erhalten. Da die Systemnichtlinearitäten in der Regel einen linearen bzw. quadratischen Zusammenhang mit der Fundamentalamplitude A_1 aufweisen, erhält man nun für zwei Messungen neben dem veränderlichen Anteil aus den

Materialnichtlinearitäten einen für beide Messungen konstanten Anteil aus den Systemnichtlinearitäten [142]. Dieser kann anschließend eliminiert werden.

Im Abschnitt 2.6.1.1 wurde bereits gezeigt, dass der akustische NLP mit den nichtlinearen Materialkonstanten in direktem Zusammenhang steht. Grundsätzlich ist es daher möglich diese nichtlinearen Materialparameter aus einer nichtlinearen Ultraschallmessung zu erhalten. Zur Schädigungsbeurteilung mittels nichtlinearer Ultraschalltechnik ist es zunächst notwendig die Zusammenhänge zwischen dem akustischen NLP und den mikrostrukturellen Eigenschaften des jeweiligen Materials zu kennen. Neben der stets vorhandenen aber vergleichsweise geringen Nichtlinearität auf atomarer und molekularer Ebene (Gitternichtlinearität) sind insbesondere die Versetzungsmechanismen und der Einfluss von Ausscheidungen die Hauptursache für die messbare Nichtlinearität in homogenen kristallinen Strukturen, wie Stahl und Aluminium. Hierfür gibt es in der Literatur zahlreiche Ansätze zur Ermittlung des zugehörigen NLP [30, 32, 91]. Für Beton ist insbesondere der nahezu lineare Zusammenhang zwischen der Mikrostrissdichte und dem NLP von Bedeutung [27, 154], da hierbei die Nichtlinearität insbesondere durch ein zunehmendes Mikrorisswachstum beeinflusst wird. Hinzu kommt der nichtlineare Anteil, der maßgeblich aus der Verbundzone zwischen der Zementmatrix und den hierin eingeschlossenen Gesteinskörnern resultiert. Aufgrund des direkten Zusammenhangs des akustischen NLP mit den mikrostrukturellen Eigenschaften ist die nichtlineare Ultraschalltechnik ein geeignetes Verfahren zur frühzeitigen Schädigungsbeurteilung und detaillierten Materialcharakterisierung.

3.2.4.2 Akustoelastische Verfahren

Im Jahr 1953 bestimmten HUGHES und KELLY zum ersten Mal die elastischen Konstanten 3. Ordnung von Polystyren, Eisen und Pyrexglas über einen akustoelastischen Versuch [95]. Seitdem wurden für zahlreiche weitere Materialien die nichtlinearen Konstanten akustoelastisch ermittelt [31, 62, 185, 208, 212].

Die akustoelastischen Verfahren basieren dabei auf dem zweiten Effekt der elastischen Wellenausbreitung innerhalb eines nichtlinearen Mediums, dem akustoelastischen Effekt. Entsprechend der Herleitung aus dem Abschnitt 2.6.3 ist dabei die Wellengeschwindigkeit abhängig von dem Spannungszustand. In einem akustoelastischen Versuch wird also die Wellengeschwindigkeit während einer veränderlichen statischen oder quasistatischen Beanspruchung gemessen. Aus der Steigung zwischen der Wellengeschwindigkeitsänderung und der Spannungsänderung lassen sich dann, wie bei der Analyse der zweiten Harmonischen (Abschnitt 3.2.4.1), die nichtlinearen Eigenschaften (z. B. die elastischen Konstanten 3. Ordnung) bestimmen. In einem klassischen

akustoelastischen Versuch wird dabei die Geschwindigkeitsmessung unter einem hydrostatischen bzw. einachsigen Spannungszustand durchgeführt. Unter Verwendung der Gleichungen (2.133)-(2.136) lassen sich dann beispielsweise die nichtlinearen Konstanten nach MURNAGHAN berechnen. Um den Schädigungszustand in realen Strukturen zu analysieren, reicht es oftmals aus, die Geschwindigkeitsänderung für eine ausgewählte Wellenart, beispielsweise für eine Longitudinalwelle, zu messen. Die Änderung der Wellengeschwindigkeit in Abhängigkeit der Spannung ist dann proportional zur Änderung des akustischen NLP und kann auch als Schädigungsparameter verwendet werden.

3.2.4.3 Weitere nichtlineare Ultraschallverfahren

Neben den in den Abschnitten 3.2.4.1 und 3.2.4.2 beschriebenen nichtlinearen Ultraschallverfahren existieren weitere Verfahren, die zur Untersuchung der nichtlinearen Eigenschaften des Materialverhaltens eingesetzt werden können. Eine wichtige Gruppe dieser Verfahren stellt die sogenannte nichtlinear-elastische Wellenspektroskopie (NEWS) dar, welche sich wiederum in die nichtlineare Resonanz-Ultraschallspektroskopie (NRUS) [41, 89, 163, 203, 218] und die nichtlineare Wellenmodulationsspektroskopie (NWMS) [217] unterteilt. Die NRUS basiert dabei auf der Messung der Resonanzfrequenzänderung in Abhängigkeit der Anregungsamplitude. Diese Änderung ist dann ein Maß für die betrachtete Nichtlinearität im Material. Die NWMS untersucht die infolge einer Amplituden- oder Phasenmodulation entstehenden Modulationsfrequenzen. Hierfür wird die Probe mit einer niederfrequenten Erregung hoher Amplitude („Pump-Welle“, engl.: *Pump-wave*) und einem höherfrequenten Ultraschallsignal niedriger Amplitude („Test-Welle“, engl.: *Probe-wave*) angeregt. Das Verfahren basiert dabei auf der Aktivierung von Defekten durch die „Pump-Welle“. Hiermit ändern sich die elastischen Eigenschaften des Materials in Abhängigkeit der Frequenz der „Pump-Welle“ und die hindurchlaufende „Test-Welle“ wird dadurch moduliert.

4 Numerische Untersuchungen von geschädigtem Hochleistungsbeton

Mit Blick auf die in dieser Arbeit durchgeführten Experimente und unter Einbeziehung unterschiedlicher nichtlinearer konstitutiver Gleichungen soll in diesem Kapitel eine realitätsnahe bzw. praxisrelevante numerische Untersuchung durchgeführt werden.

Viele Werkstoffe wie beispielsweise Beton zeigen neben einem stark nichtlinear-elastischen Verhalten zudem ein ausgeprägtes viskoelastisches Materialverhalten. In der Regel führt eine zunehmende Schädigungsentwicklung in solchen Werkstoffen zu einem Anstieg der Dämpfung und der nichtlinearen Materialkonstanten. Gerade zu einem frühzeitigen Schädigungszeitpunkt werden insbesondere die nichtlinearen Materialeigenschaften durch ein stetiges Mikrorisswachstum beeinflusst. Dabei ergibt sich für ein moderates Mikrorisswachstum ein nahezu linearer Zusammenhang zwischen der Mikrorissdichte ρ_m (Mikrorisskonzentration) und dem akustischen NLP ($\beta \propto \rho_m$) [153, 233]. Dieser direkte Zusammenhang zwischen den mikrostrukturellen Änderungen (Mikrorisswachstum) und den akustischen NLP ermöglicht somit den Schädigungszustand durch Ultraschallexperimente in geeigneter Weise zu quantifizieren. Dabei ist es also wichtig zwischen der materiellen Nichtlinearität im ungeschädigten Zustand $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ und jenem im geschädigten Zustand (α, β, γ) zu unterscheiden. Neben der Änderung der nichtlinearen Materialeigenschaften führt insbesondere ein fortgeschrittenes Risswachstum im geschädigten Zustand zu einer teils starken Dämpfungsänderung im Beton. Daher müssen hinsichtlich einer zuverlässigen Anwendung der nichtlinearen Ultraschalltechnik zur Schädigungsbeurteilung in Beton unter anderem die wesentlichen Zusammenhänge und Einflüsse dieser beiden akustischen Effekte bei der Wellenausbreitung evaluiert werden. Daher soll in diesem Kapitel insbesondere der Einfluss der Dämpfung auf die nichtlineare Wellenausbreitung analysiert werden. Da im experimentellen Teil dieser Arbeit meistens eine relative Auswertung der nichtlinearen Effekte (siehe Abschnitt 3.2.4.1) stattfindet, ist die numerische Untersuchung auf die Analyse geeigneter Ansätze unter Verwendung eines relativen NLP beschränkt. Neben dem Dämpfungseinfluss soll in den nachfolgenden numerischen Beispielen auch die mit einer lokalisierten Schädigung (modelliert durch einen stark nichtlinear-elastischen Einschluss innerhalb eines linear-elastischen Mediums) verbundenen elastodynamischen Effekte untersucht werden. Hierbei soll insbesondere das nichtlineare Wellenstreuproblem untersucht werden.

4.1 Verbundzonenschädigung im stahlbewehrten Beton

Stahlbeton ist ein Verbundwerkstoff aus Beton und Bewehrungsstahl. In diesem Verbundwerkstoff dient der eingelegte Bewehrungsstahl hauptsächlich der Aufnahme von auftretenden Zugspannungen. Während der Lebensdauer werden Bauwerke aus Stahlbeton unterschiedlichen Einwirkungen aus beispielsweise zyklischer Belastung und Korrosion ausgesetzt, welche die Verbundeigenschaften zwischen dem Beton und dem Bewehrungsstahl sukzessive schädigen und zu einer verminderten Tragfähigkeit der entsprechenden Stahlbetonkonstruktion führen können. In der Regel geht hierbei einem globalen Versagen des Verbunds zunächst ein zunehmendes Wachstum der Verbundzonenschädigungen voraus.

Mit Blick auf die im experimentellen Teil dieser Arbeit durchgeführten Ultraschallexperimente an stahlbewehrten Betonproben wird in diesem Abschnitt insbesondere der Schädigungszustand in der Verbundzone zwischen Beton und Stahlbewehrung unter Verwendung eines linear-viskoelastischen (KELVIN-VOIGT-Modell, siehe Abschnitt 2.5.2) und eines quadratisch nichtlinear-elastischen Materialgesetzes modelliert [3]. Bei der anschließenden numerischen Simulation der Ultraschallwellenausbreitung in der 2-D Verbundstruktur im ebenen Verzerrungszustand sollen die Einflüsse der Stahlbewehrung und der veränderlichen Dämpfung in der Verbundschicht auf die akustischen Parameter analysiert werden, um hiermit mögliche Rückschlüsse auf die nichtlinearen Ultraschallexperimente im nächsten Kapitel zu ziehen.

4.1.1 2-D nichtlineare Wellenausbreitung im unbewehrten Beton

Als erstes Beispiel zur Analyse der maßgebenden linearen und nichtlinearen Effekte wird zunächst ein unbewehrter, also homogener isotroper Betonfestkörper, numerisch untersucht. Die Abbildungen 4.1 und 4.2 zeigen hierzu das grundlegende Berechnungsgebiet einer 2-D Halbebene unter Einwirkung einer zeitabhängigen Erregung nach der Gleichung (3.69) am freien Rand bei $x = 0$. Dabei wirkt die Erregung zur Berücksichtigung eines endlichen Prüfkopfdurchmessers hier als Linienlast (bzw. Flächenlast) über eine Länge $D_T = 0,04$ m am freien Rand. Wie für alle numerischen Berechnungen in diesem Kapitel wird ein quadratisches Gebiet mit $l_x = l_y = 0,10$ m untersucht. Die zugehörigen linear-viskoelastischen und nichtlinear-elastischen konstitutiven Gleichungen für den ebenen Verzerrungszustand in der x - y -Ebene lauten unter Verwendung der Gleichungen (2.15) und (2.19)-(2.21):

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= M\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + \bar{M}\dot{\varepsilon}_x + \bar{\lambda}\dot{\varepsilon}_y + M_{\text{NL}}\varepsilon_x^2 + l\varepsilon_y(2\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{m}{2}\gamma_{xy}^2, \\
\sigma_y &= M\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_x + \bar{M}\dot{\varepsilon}_y + \bar{\lambda}\dot{\varepsilon}_x + M_{\text{NL}}\varepsilon_y^2 + l\varepsilon_x(2\varepsilon_y + \varepsilon_x) + \frac{m}{2}\gamma_{xy}^2, \\
\tau_{xy} &= \gamma_{xy}\mu + \dot{\gamma}_{xy}\bar{\mu} + m\gamma_{xy}(\varepsilon_x + \varepsilon_y).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Die Randbedingungen des freien Randes werden über die Signalfunktion $S(t)$ (siehe Gleichung (3.69)) wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\sigma_x(x=0, y, t) &= -P \cdot S(t) \cdot \text{rect}(y/D_T), \\
\tau_{xy}(x=0, y, t) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Dabei ist $\text{rect}(\bullet)$ die Rechteckfunktion. Für alle numerischen Berechnungen wird die entsprechende Knotenanzahl in beiden Koordinatenrichtungen gleich gewählt, d. h., $N_x = N_y = 128$.

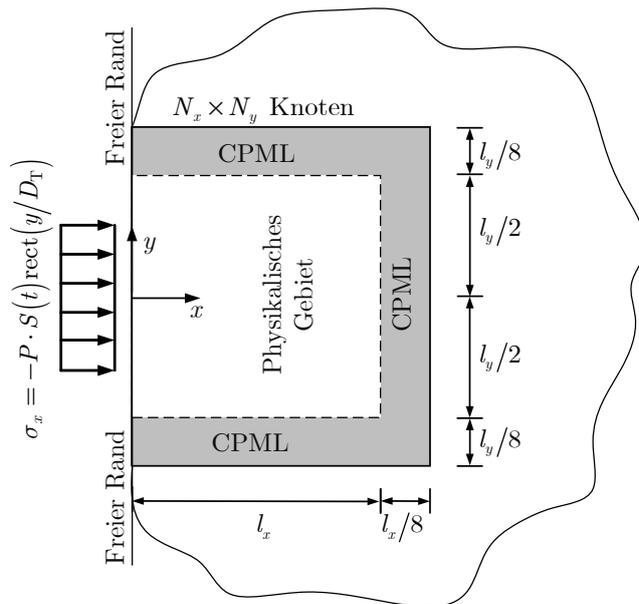


Abbildung 4.1: Prinzipische Skizze des Berechnungsgebietes einer 2-D Halbebene unter einer zeitabhängigen linienförmigen Erregung.

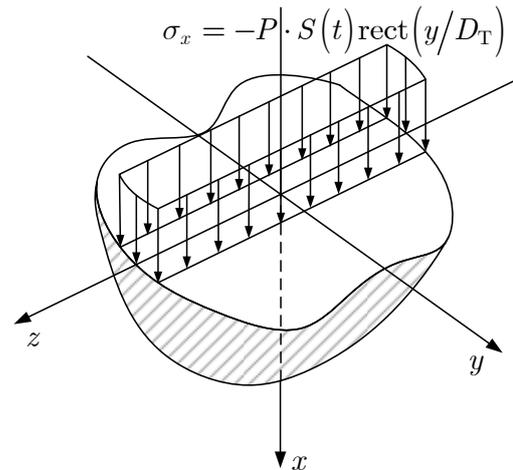


Abbildung 4.2: Elastischer Halbraum unter einer zeitabhängigen Flächenlast in x -Richtung.

Die maßgebenden Materialparameter und Simulationsparameter sind in den Tabellen 4.1 und 4.2 zusammengefasst. Dabei orientieren sich die gewählten Materialparameter an den Materialeigenschaften der im experimentellen Teil dieser Arbeit untersuchten hochfesten Betonproben im ungeschädigten Zustand. Hierbei ist zu erwähnen, dass die viskoelastischen Konstanten in der Tabelle 4.1 mittels der Gleichungen (2.72) und (2.74) für die Q -Faktoren $Q_L = Q_T = 60$ bestimmt wurden. Im weiteren Verlauf dieser

Untersuchung wird die Dämpfung (bzw. der Q -Faktor) variiert, womit auch die viskoelastischen Konstanten in dieser numerischen Untersuchung variieren. Weiterhin wird zur Gewährleistung der Stabilität der Zeitschritt Δt unter Verwendung einer COURANT-Zahl von $C = 0,5$ (siehe Tabelle 4.2) gewählt.

Tabelle 4.1: Materialparameter für Beton.

ρ_0	λ	μ	l	m	$\bar{\lambda}_{Q=60}$	$\bar{\mu}_{Q=60}$
$[\text{kg}/\text{m}^3]$	$[\text{GPa}]$	$[\text{GPa}]$	$[\text{GPa}]$	$[\text{GPa}]$	$[\text{Pa} \cdot \text{s}]$	$[\text{Pa} \cdot \text{s}]$
2360	9,05	14,70	-600	-700	104,37	169,53

Tabelle 4.2: Simulationsparameter.

P	f_{Sig}	T_{Sig}	T_{ges}	Δt
$[\text{MPa}]$	$[\text{kHz}]$	$[\mu\text{s}]$	$[\mu\text{s}]$	$[\mu\text{s}]$
5,58	230	34,78	104,35	0,051

Zur Veranschaulichung der Wellenausbreitung innerhalb des homogenen ungeschädigten Betonfestkörpers zeigt die Abbildung 4.3 für vier unterschiedliche Zeitpunkte die mittels der modifizierten CPS-Methode berechnete Lösung für die Partikelgeschwindigkeitsbeträge $|\dot{\mathbf{u}}| = \sqrt{u^2 + v^2}$ im 2-D Berechnungsgebiet.

Die in diesem Abschnitt durchgeführte numerische Untersuchung bezieht sich dabei ausschließlich auf die Auswertung des Empfangssignals der horizontalen Partikelgeschwindigkeit \dot{u} an einem ausgewählten Punkt innerhalb des Berechnungsgebietes bei $x = l_x$ und $y = 0$. Um zunächst den Einfluss des Q -Faktors bzw. der Dämpfung auf das empfangene Zeitsignal zu zeigen, ist in der Abbildung 4.4 die numerische Lösung der horizontalen Partikelgeschwindigkeit \dot{u} bei $x = l_x$ und $y = 0$ für unterschiedliche Q -Faktoren dargestellt. Hierbei ist zu sehen, wie sich die Signalamplitude mit abnehmendem Q -Faktor verringert, da die Dämpfung des Signals mit abnehmendem Q -Faktor zunimmt. Das zugehörige Frequenzspektrum der in der Abbildung 4.4 dargestellten Zeitsignale ist in der Abbildung 4.5 in Abhängigkeit vom Q -Faktor angegeben. Hierbei ist die Abnahme der Amplitude A_1 bei der Fundamentalfrequenz $f = 230$ kHz mit abnehmendem Q -Faktor deutlich zu erkennen. Zusätzlich zeigt sich, dass die 2. Harmonische-Amplitude A_2 bei $f = 460$ kHz wesentlich stärker als die Fundamentalamplitude von der Dämpfungsänderung beeinflusst wird.

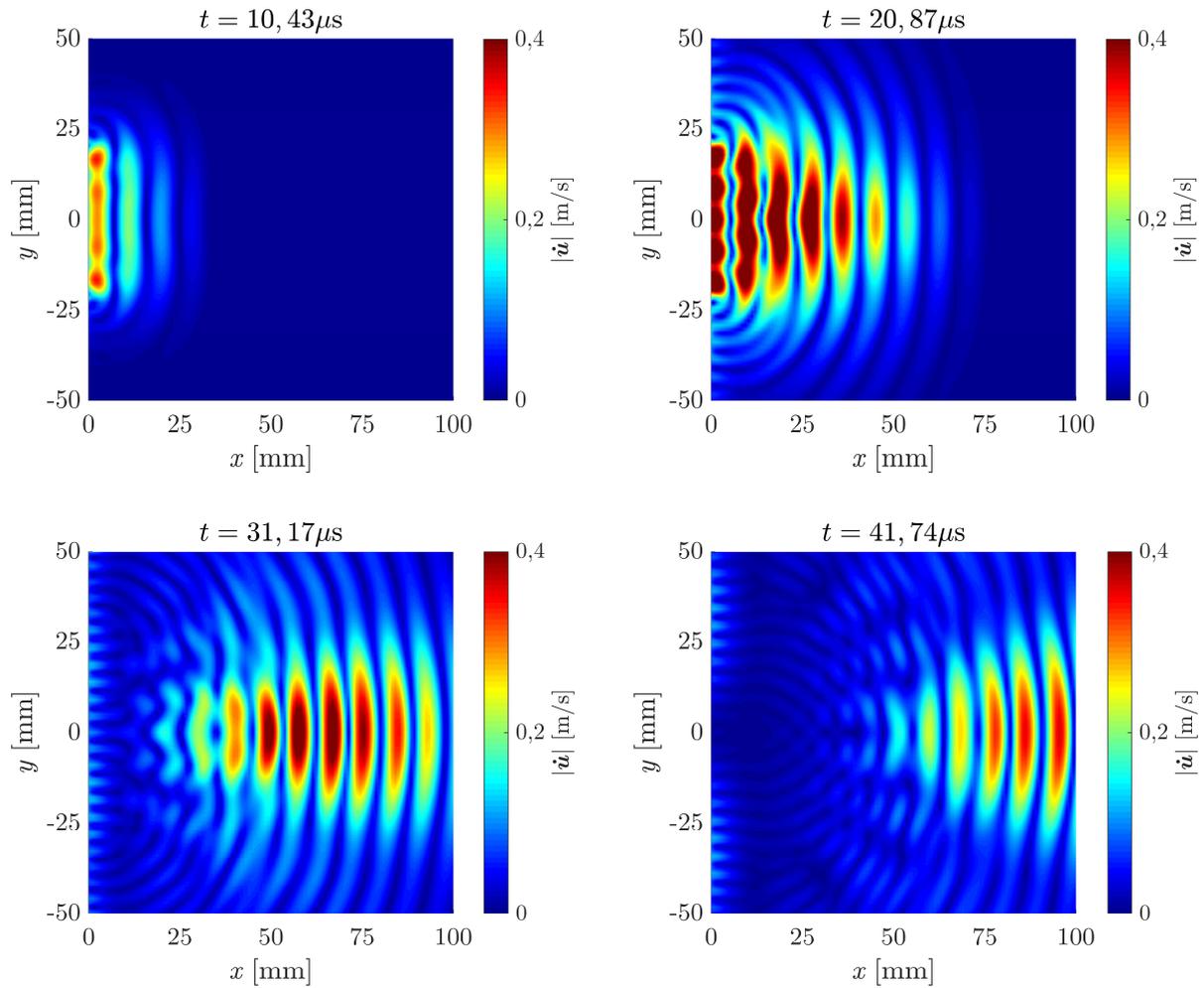


Abbildung 4.3: Numerische Lösung der 2-D gedämpften nichtlinear-elastischen Wellenausbreitung des Partikelgeschwindigkeitsbetrages $|\dot{\mathbf{u}}|$ in der elastischen Halbebene des unbewehrten Betons zu verschiedenen Zeitpunkten t (modifizierte CPS-Methode, Knotenanzahl $N_{\text{ges}} = 128^2$, COURANT-Zahl $C = 0,5$).

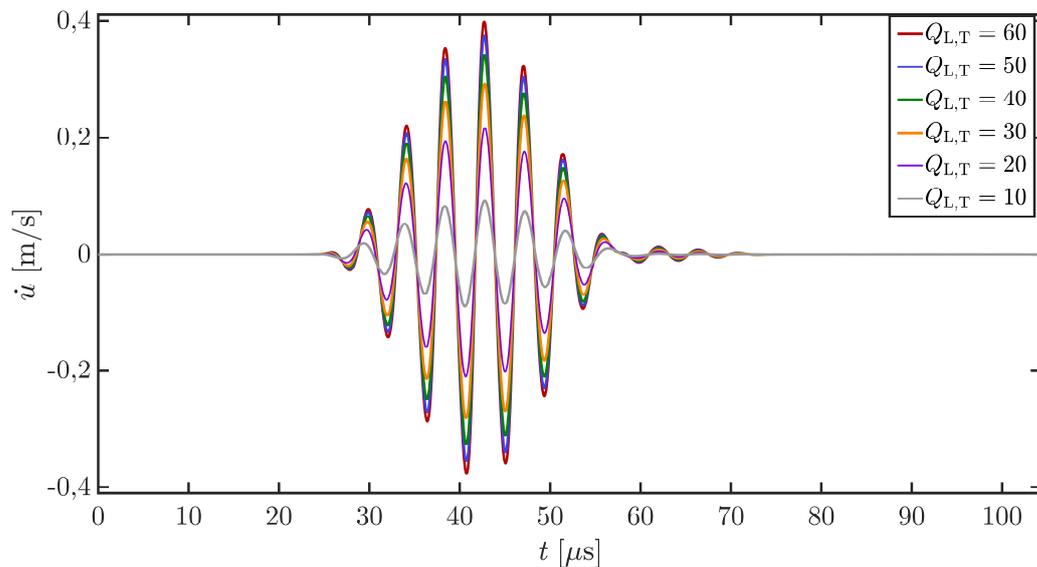


Abbildung 4.4: Zeitsignal der horizontalen Partikelgeschwindigkeit $\dot{u}(x = l_x, y = 0, t)$ für verschiedene Q -Faktoren.

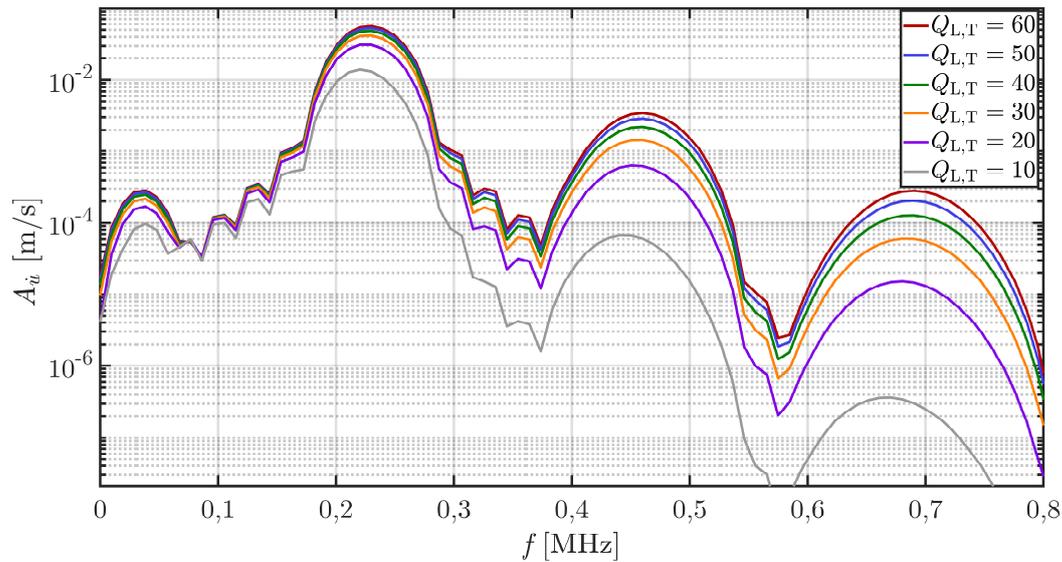


Abbildung 4.5: Frequenzspektrum des Zeitsignals der horizontalen Partikelgeschwindigkeit $\dot{u}(x = l_x, y = 0, t)$ in Abhängigkeit vom Q -Faktor.

Im Weiteren wird für den hier betrachteten Fall eines 2-D homogenen viskoelastischen und nichtlinear-elastischen Festkörpers untersucht, welche Aussagekraft die üblichen relativen akustischen NLP haben. Der Begriff des akustischen NLP grenzt sich hierbei vom materiellen NLP in der Weise ab, als dass dieser rein aus den akustischen Messgrößen ermittelt wird und daher nicht unbedingt dem exakten NLP auf Basis der nichtlinearen Materialgesetze entsprechen muss (siehe Abschnitt 2.6.2.1). Zur Bestimmung des relativen akustischen NLP werden hierzu die üblichen Ansätze aus der Literatur verwendet. Generell wird hierbei nur die Änderung des NLP zum Ausgangszustand analysiert. Da in dieser numerischen Simulation wie bei einer realen relativen Messung der Abstand x , die Frequenz f und die Erregungsamplitude P nicht variiert werden, ergeben sich hier vereinfachte Gleichungen zur Bestimmung der relativen akustischen NLP.

Die Abbildung 4.6 zeigt hierzu unter logarithmischer Auftragung die Änderung des relativen akustischen NLP in Abhängigkeit vom abnehmenden Q -Faktor für drei typische Ansätze [189, 225] zur Bestimmung des relativen NLP β' . Für diese numerischen Berechnungen werden die nichtlinear-elastischen Konstanten l und m nicht verändert. Da sich in diesem Fall der materielle NLP β nicht ändert, sondern lediglich die Dämpfung, sollte ein zuverlässiger bzw. sinnvoller relativer akustischer NLP unabhängig von der Dämpfung möglichst konstant bleiben. Der 3. NLP β'_3 basiert dabei auf der Lösung der 1-D nichtlinearen Wellenausbreitung in einem KELVIN-VOIGT-Modell (siehe Gleichung (2.117)). Dementsprechend zeigt dieser akustische NLP korrekterweise nahezu

keine Änderung der materiellen Nichtlinearität an ($\beta'_3 \approx 1 \approx \text{konst.}$). Der zweite NLP β'_2 kann gerade bei hohen Dämpfungen (niedrigen Q -Faktoren) die materielle Nichtlinearität nicht richtig wiedergeben und zeigt einen Abfall des NLP an. Der erste NLP β'_1 berücksichtigt lediglich die Änderung der 2. Harmonischen-Amplitude und kann somit die vorhandene Dämpfung nicht berücksichtigen. Daher ist hier der Unterschied zwischen den drei akustischen NLP sehr groß.

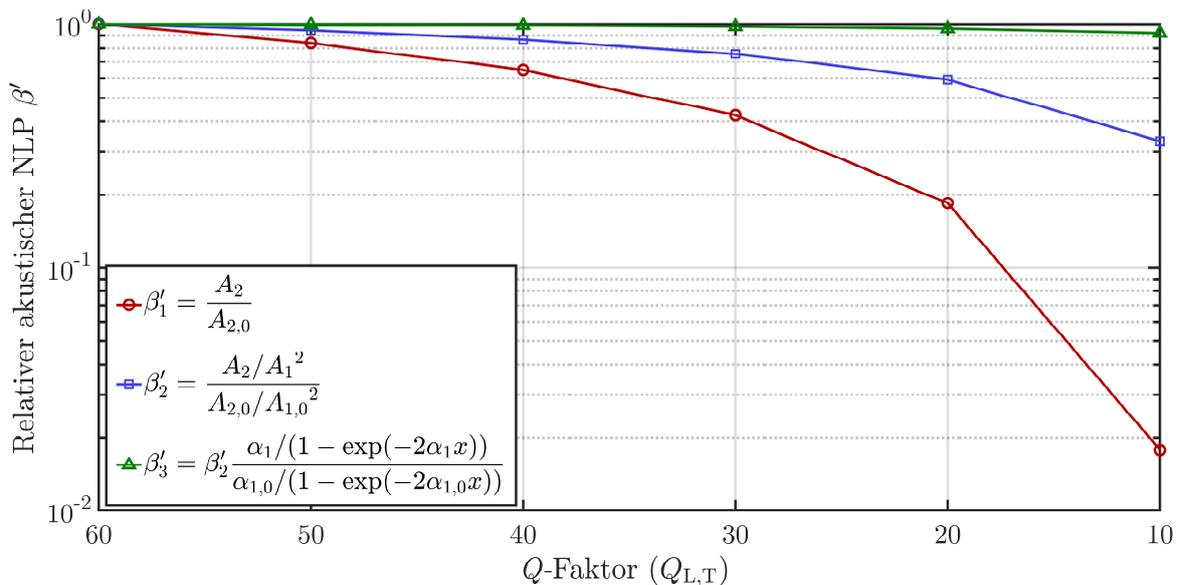


Abbildung 4.6: Ausgewählte relative akustische NLP β' in Abhängigkeit eines veränderlichen Q -Faktors (KELVIN-VOIGT-Modell) bei konstanter materieller Nichtlinearität ($l = m = \text{konst.}$).

4.1.2 2-D nichtlineare Wellenausbreitung im lokal geschädigten bewehrten Beton

In diesem Abschnitt soll die Untersuchung eines „homogenen“ unbewehrten Betons auf den Fall eines „heterogenen“ stahlbewehrten Betons erweitert werden. Dabei wird zunächst die Verbundzone bzw. der Übergang zwischen dem Beton und Stahlbewehrung als perfekt vorausgesetzt und anschließend als geschädigt betrachtet. Hierbei wird die zuvor betrachtete 2-D Halbebene aus dem Beton durch eine mittig angeordnete Kreisfläche aus Stahl (Bewehrungsstahl) modelliert. Für den darauffolgenden Fall einer geschädigten Verbundschicht wird außerdem eine zusätzliche Ringfläche zwischen dem perfekten Beton und dem Bewehrungsstahl eingeführt, welche durch eine veränderliche materielle Nichtlinearität und Dämpfung zur Modellierung der Verbundschädigung beschrieben wird. Die Abbildung 4.7 zeigt dabei das zu behandelnde 2-D Problem.

Hierbei werden die Materialeigenschaften des Betons aus der Tabelle 4.1 übernommen und die zugehörigen Werte des Bewehrungsstahls (B500B) nach der Tabelle 4.3

verwendet. Dabei wird der Bewehrungsstahl aufgrund der vergleichsweise geringen Nichtlinearität und Dämpfung als ideal linear-elastisch angenommen.

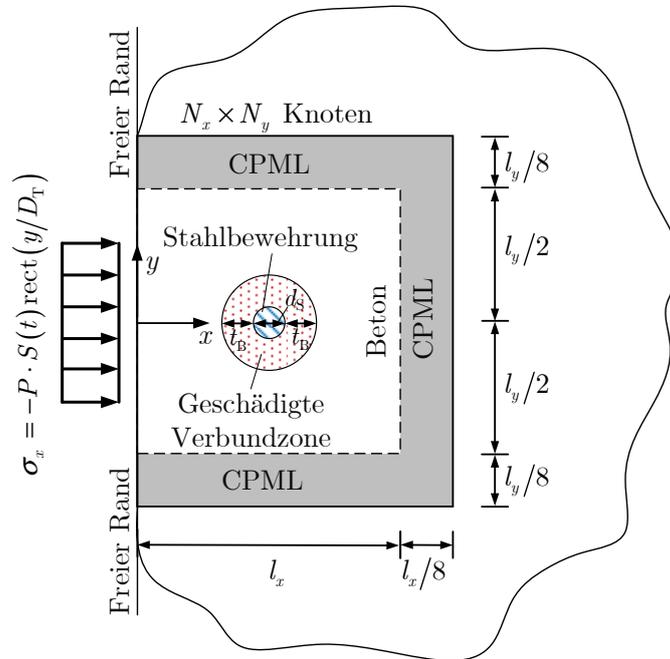


Abbildung 4.7: Prinzipskizze des Berechnungsgebietes einer 2-D Halbebene aus stahlbewehrtem Beton unter einer zeitabhängigen linienförmigen Erregung.

Tabelle 4.3: Materialparameter für den Bewehrungsstahl (B500B).

ρ_0	λ	μ
[kg/m ³]	[GPa]	[GPa]
7850	115,8	79,90

Die nichtlinearen und viskoelastischen Materialwerte für die Verbundschicht werden bei der numerischen Untersuchung variiert. Die maßgebenden Simulationsparameter werden ebenfalls aus dem vorigen Berechnungsbeispiel übernommen (siehe Tabelle 4.2). Weiterhin wird der Durchmesser der Stahlbewehrung mit $d_s = 12$ mm und die Schichtdicke ebenfalls als $t_B = 12$ mm gewählt.

Um zunächst den reinen Einfluss der Stahlbewehrung auf das Empfangssignal zu zeigen, werden im ersten Fall die Materialwerte der Verbundzone gleich denen des umgebenden ungeschädigten Betons gewählt. Hierzu zeigt die Abbildung 4.8 für vier unterschiedliche Zeitpunkte die mittels der modifizierten CPS-Methode berechnete Lösung für die Partikelgeschwindigkeitsbeträge $|\dot{\mathbf{u}}|$ im 2-D Berechnungsgebiet. Man erkennt dabei gut die starke Streuung und Reflexion der elastischen Wellen bei Erreichen der Stahlbewehrung

(gestrichelter roter Kreisring in Abbildung 4.8) und die deutliche Abnahme der Partikelgeschwindigkeitsamplitude im Vergleich zum unbewehrten Fall (vgl. Abbildung 4.3).

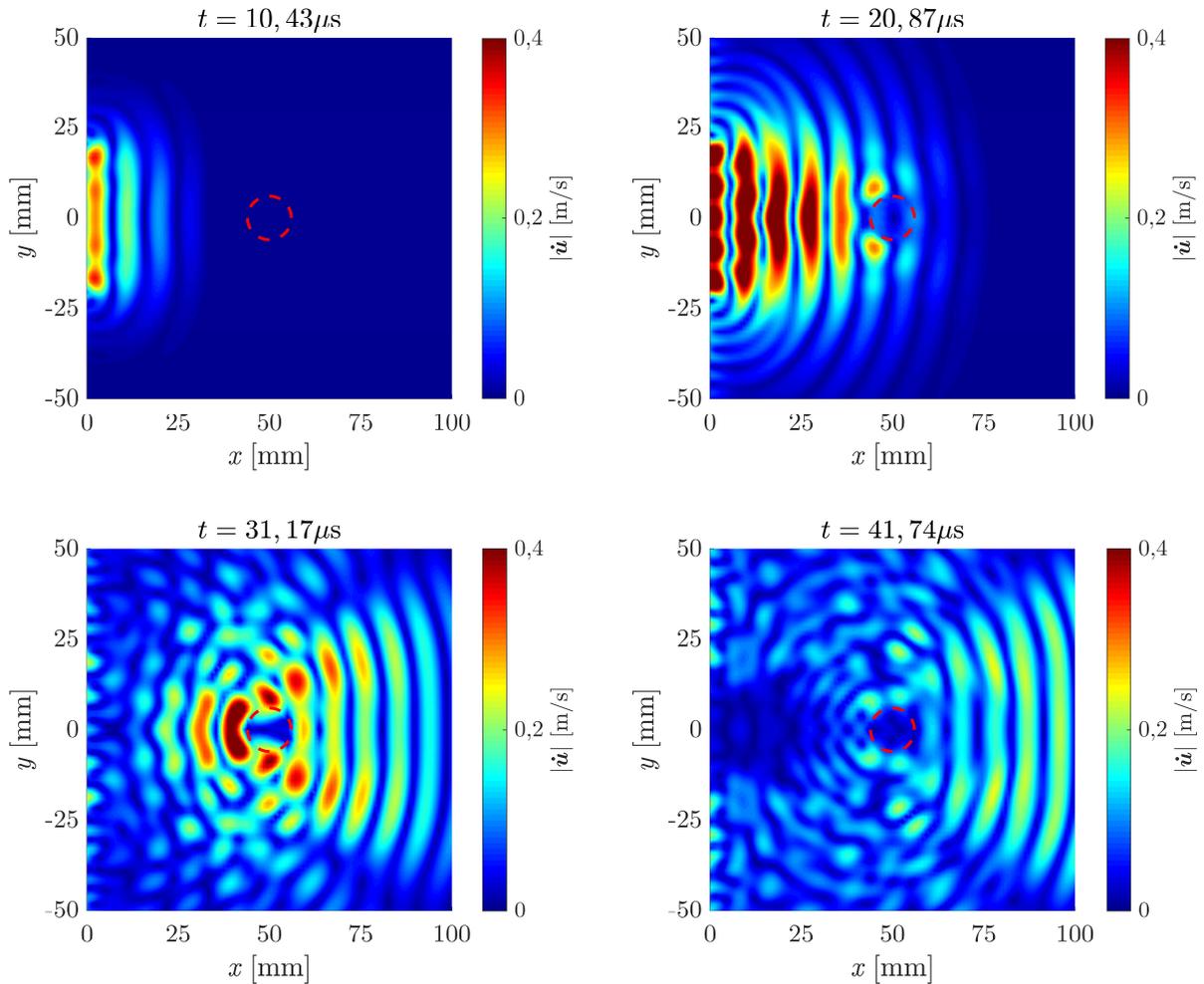


Abbildung 4.8: Numerische Lösung der 2-D gedämpften nichtlinear-elastischen Wellenausbreitung des Partikelgeschwindigkeitsbetrages $|\dot{\mathbf{u}}|$ in der elastischen Halbebene des stahlbewehrten Betons zu verschiedenen Zeitpunkten t (mod. CPS-Methode, Knotenanzahl $N_{\text{ges}} = 128^2$, COURANT-Zahl $C = 0,5$).

Weiterhin sind in der Abbildung 4.9 die Zeitverläufe der horizontalen Partikelgeschwindigkeit \dot{u} bei $x = l_x$ und $y = 0$ für den unbewehrten und den bewehrten Beton exemplarisch gegenübergestellt. Hierbei zeigt sich deutlich, dass die maximale Amplitude durch die Stahlbewehrung sichtbar reduziert wird und sich die Signalform leicht verändert.

Im zugehörigen Frequenzspektrum (siehe Abbildung 4.10) erkennt man generell eine überproportionale Reduzierung der 2. und 3. Harmonischen-Amplitude als Folge der Stahlbewehrung. Somit wird hier deutlich, dass die Stahlbewehrung die höherharmonische Signalanalyse im Frequenzspektrum erschwert.

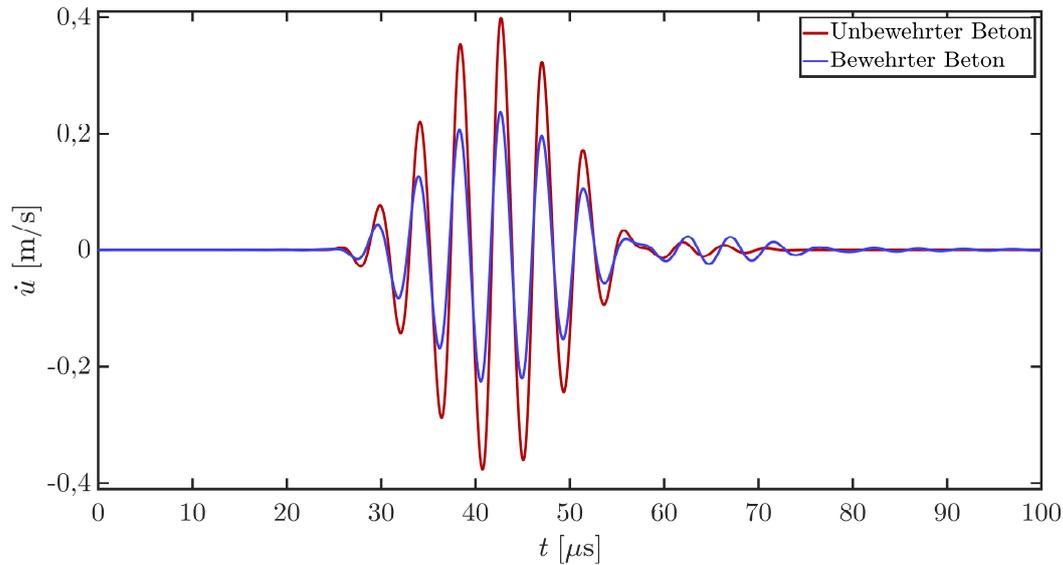


Abbildung 4.9: Zeitsignal der horizontalen Partikelgeschwindigkeit $\dot{u}(x = l_x, y = 0, t)$ für den unbewehrten und bewehrten Beton.

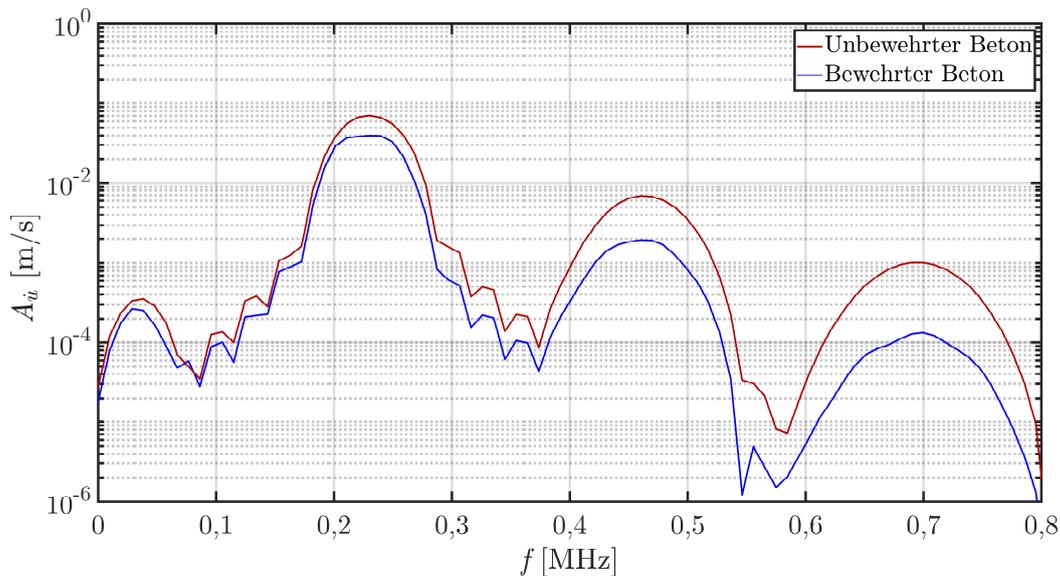


Abbildung 4.10: Frequenzspektrum des Zeitsignal der Partikelgeschwindigkeit $\dot{u}(x = l_x, y = 0, t)$ für den unbewehrten und bewehrten Beton.

Um eine mögliche Schädigung in der Verbundzone zwischen dem Beton und der Stahlbewehrung numerisch zu modellieren, werden im nächsten Schritt gleichzeitig die viskoelastischen und nichtlinear-elastischen Materialparameter in der Verbundschicht verändert. Dabei bezieht sich die nachfolgende Auswertung wiederum auf das Frequenzspektrum der horizontalen Partikelgeschwindigkeit \dot{u} bei $x = l_x$ und $y = 0$.

In der Tabelle 4.4 sind für verschiedene Schädigungszustände „1“ bis „5“, welche durch veränderte materielle NLP und Q -Faktoren in der Verbundschicht beschrieben werden,

die zugehörigen relativen akustischen NLP β'_1 bis β'_3 zur Beurteilung der Schädigungsentwicklung angeben. Hierbei sind die relativen akustischen NLP wie folgt definiert:

$$\beta'_1 = \frac{A_2}{A_{2,0}}, \quad \beta'_2 = \frac{A_2/A_1}{A_{2,0}/A_{1,0}}, \quad \beta'_3 = \frac{A_2/A_1^2}{A_{2,0}/A_{1,0}^2}. \quad (4.3)$$

Dabei kennzeichnet der Index „0“ die Amplitude im ungeschädigten Ausgangszustand. Weiterhin ist als „dämpfungsfreie“ Referenz der relative akustische NLP β'_{ref} angegeben. Für dessen Berechnung die Gleichung gemäß β'_1 verwendet wird und in allen Schädigungszuständen der Q -Faktor mit $Q_{L,T} = 60$ konstant ist. Weiterhin ist der materielle Nichtlinearitätsparameter im ungeschädigten Zustand über $\beta_0 = (l + 2m)/(\lambda + 2\mu)$ mit den Materialwerten nach Tabelle 4.1 definiert.

Tabelle 4.4: Ausgewählte relative akustische NLP β'_1 - β'_3 für unterschiedliche Q -Faktoren (KELVIN-VOIGT-Modell) und unterschiedliche materielle NLP β (Stadien einer Verbundschädigung) und relativer akustischer NLP β'_{ref} für $Q_{L,T} = 60 = \text{konst.}$

	Materialparameter		Relativer akustischer NLP			
			β'_1	β'_2	β'_3	β'_{ref}
0	β/β_0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
	$Q_{L,T}$	60				
1	β/β_0	1,2	1,011	1,017	1,024	1,048
	$Q_{L,T}$	50				
2	β/β_0	1,4	1,006	1,023	1,039	1,096
	$Q_{L,T}$	40				
3	β/β_0	1,6	0,974	1,006	1,039	1,144
	$Q_{L,T}$	30				
4	β/β_0	1,8	0,881	0,940	1,002	1,192
	$Q_{L,T}$	20				
5	β/β_0	2,0	0,617	0,724	0,849	1,241
	$Q_{L,T}$	10				

Zunächst wird aus der Tabelle 4.4 ersichtlich, dass der Anstieg der materiellen Nichtlinearität bis zum simulierten Schädigungsstadium „2“ für alle relativen akustischen NLP erkennbar ist, wobei insbesondere der relative NLP β'_3 hier eine gute Übereinstimmung zum Referenzparameter β'_{ref} aufweist und daher trotz des Dämpfungseinflusses (Dämpfungsänderung) die Änderung des materiellen NLP β am besten wiedergibt. Über das Schädigungsstadium „2“ hinaus sinken alle drei relativen NLP wieder und beschreiben damit eine Abnahme der materiellen Nichtlinearität, die aber nicht dem

weiteren Anstieg der Nichtlinearität in der Schädigungszone entspricht. Diese falsche Vorhersage der Änderung der materiellen Nichtlinearität entsteht hier durch den zunehmenden Dämpfungseinfluss bzw. durch den stetig sinkenden Q -Faktor in diesem numerischen Beispiel. Generell zeigt sich jedoch, dass der relative akustische NLP β'_3 bei moderaten Dämpfungsänderungen eine gute Übereinstimmung zum dämpfungs-freien Fall aufweist und somit zur frühzeitigen Schädigungsbewertung im stahlbewehrten Beton geeignet ist.

4.2 2-D quadratisch nichtlinear-elastische und hysteretisch nichtlineare Betonschädigung

Ziel der numerischen Untersuchung in diesem Abschnitt ist es die Unterschiede der nichtlinearen Wellenausbreitungen in einem quadratisch nichtlinear-elastischen und einem hysteretisch nichtlinearen homogenen Betonkörper hervorzuheben und anschließend die Wellenausbreitung in einem kreisförmig geschädigten Beton mittels der genannten nichtlinearen Materialmodelle zu simulieren und zu analysieren [7]. Zusätzlich wird der Dämpfungseffekt auch berücksichtigt. Hierfür wird anstelle des KELVIN-VOIGT-Modells die in [18, 19, 34] vorgestellte Methode auf Basis des ZENER-Modells in die modifizierte CPS-Methode implementiert (siehe Anhang A.3). Hierdurch lässt sich der in der Regel lineare Zusammenhang zwischen der Frequenz f und dem Dämpfungsparameter α_D mittels einem über einen weiten Frequenzbereich konstant gehaltenen Q -Faktor besser wiedergeben. Des Weiteren wird zur Implementierung des hysteretischen Materialverhaltens das 1-D DUHEM-Modell (siehe Abschnitt 2.2.2.2) verwendet und mittels der KELVIN-Methode (siehe Abschnitt 2.2.2.2) auf das 2-D Problem erweitert. Das 2-D Ausgangsproblem mit den zugehörigen Randbedingungen nach der Gleichung (4.2) entspricht hierbei dem zuvor betrachteten Beispiel in der Abbildung 4.1. Dabei werden für den Fall eines quadratisch nichtlinear-elastischen Betons nach der Gleichung (4.1) die Materialwerte aus der Tabelle 4.5 und für den hysteretisch nichtlinearen Fall die in der Tabelle 4.6 angegebenen Werte verwendet, welche sich wiederum an den Materialdaten aus den in dieser Arbeit durchgeführten experimentellen Versuchen an hochfesten Betonproben orientieren. Weiterhin wird das hysteretisch nichtlineare Verhalten nur für die volumetrische Formänderung angesetzt. Das bedeutet, dass bei der KELVIN-Dekompositionsmethode das skalare NAZAROV-Modell nur in die 1. Hauptrichtung des Eigensystems (siehe Gleichung (2.36)) eingesetzt wird. Die restlichen Formänderungen werden daher als linear-elastisch angesetzt mit den

Materialwerten aus der Tabelle 4.5. Weiterhin werden die Simulationsparameter aus der Tabelle 4.7 für die numerischen Berechnungen in diesem Abschnitt verwendet.

Tabelle 4.5: Materialparameter des quadratisch nichtlinear-elastischen Betons.

ρ_0	λ	μ	l	m
[kg/m ³]	[GPa]	[GPa]	[GPa]	[GPa]
2350	9,75	15,00	-600	-700

Tabelle 4.6: Materialparameter des hysteretisch nichtlinearen Betons (DUHEM-Modell).

ρ_0	$A_{D,1}$	$A_{D,2}$	$A_{D,3}$	$A_{D,4}$	ε^*	α
[kg/m ³]	[GPa]	[—]	[—]	[—]	[—]	[—]
2350	15,99	1,599	-1,00	0	0,003	500

Tabelle 4.7: Simulationsparameter.

P	f_{Sig}	T_{Sig}	T_{ges}	Δt
[MPa]	[kHz]	[μs]	[μs]	[μs]
3,88	200	40	100	0,070

Zur Veranschaulichung und zum Vergleich des Materialverhaltens zeigt die Abbildung 4.11 die einachsige Spannungs-Dehnungs-Beziehung für das quadratisch-nichtlinear-elastische Materialgesetz und für das hysteretisch nichtlineare Materialgesetz.

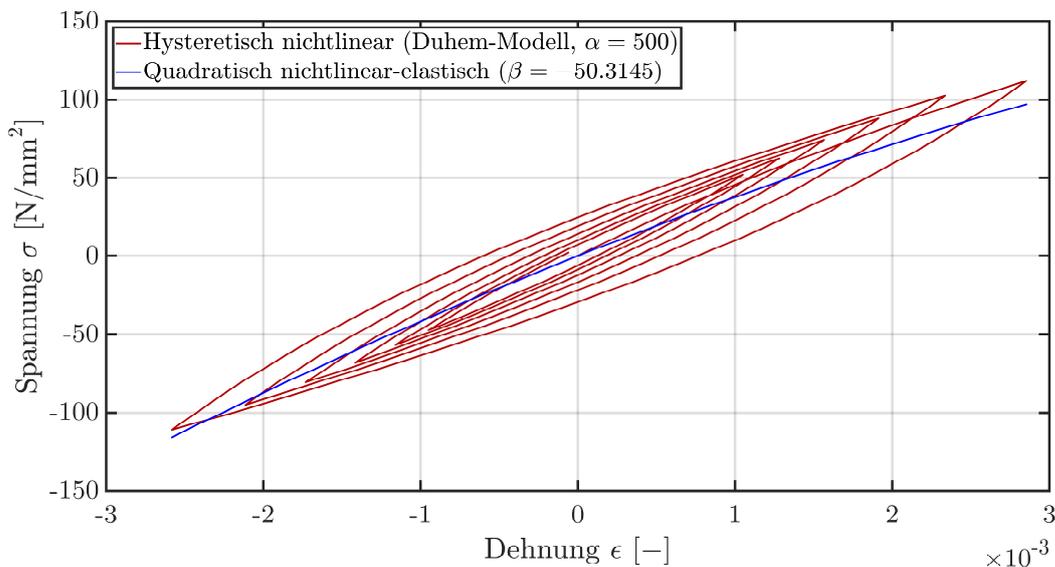


Abbildung 4.11: Spannungs-Dehnungs-Beziehung für das quadratisch nichtlinear-elastische Materialgesetz und für das hysteretisch nichtlineare Materialgesetz (DUHEM-Modell).

Hierbei wird die zeitlich abklingende Dehnung $\varepsilon(t) = 0,003 \cdot \sin(2\pi ft) \cdot e^{-40000 \cdot t}$ als bekannt vorgegeben, siehe Abbildung 4.12.

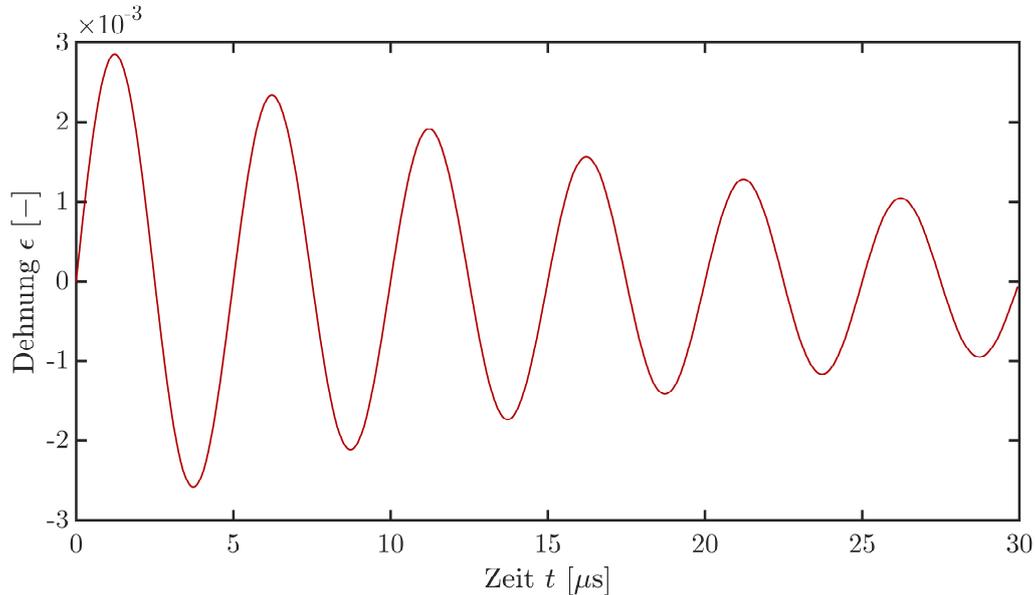


Abbildung 4.12: Vorgegebener Zeitverlauf der Dehnung $\varepsilon(t)$ zur Bestimmung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung in der Abbildung 4.11.

Man erkennt in der Abbildung 4.11 die für ein hysteretisches Materialverhalten typischen Hystereseumläufe. Dabei folgt der Belastungspfad nicht dem Entlastungspfad, wie bei dem quadratisch nichtlinear-elastischen Vergleichsfall. Weiterhin beschreibt die in der Abbildung 4.11 dargestellte Spannungs-Dehnungs-Kurve für den hysteretisch nichtlinearen Fall eine teilelastische Hysterese, da im spannungsfreien Zustand für $\sigma = 0$ eine plastische Dehnung verbleibt.

4.2.1 2-D gleichmäßig verteilte Schädigung in einem Betonkörper

Um die grundlegenden Unterschiede der beiden Materialmodelle sowie die damit verbundenen elastodynamischen Effekte darzustellen, wird zunächst eine numerische Berechnung ohne Berücksichtigung der akustischen Dämpfung in einem nichtlinearen Beton durchgeführt. Die Abbildungen 4.13 und 4.14 zeigen hierzu die Signalantwort der horizontalen Partikelgeschwindigkeit \dot{u} an der Stelle $x = l_x$ und $y = 0$ für den quadratisch nichtlinear-elastischen Fall und den hysteretisch nichtlinearen Fall.

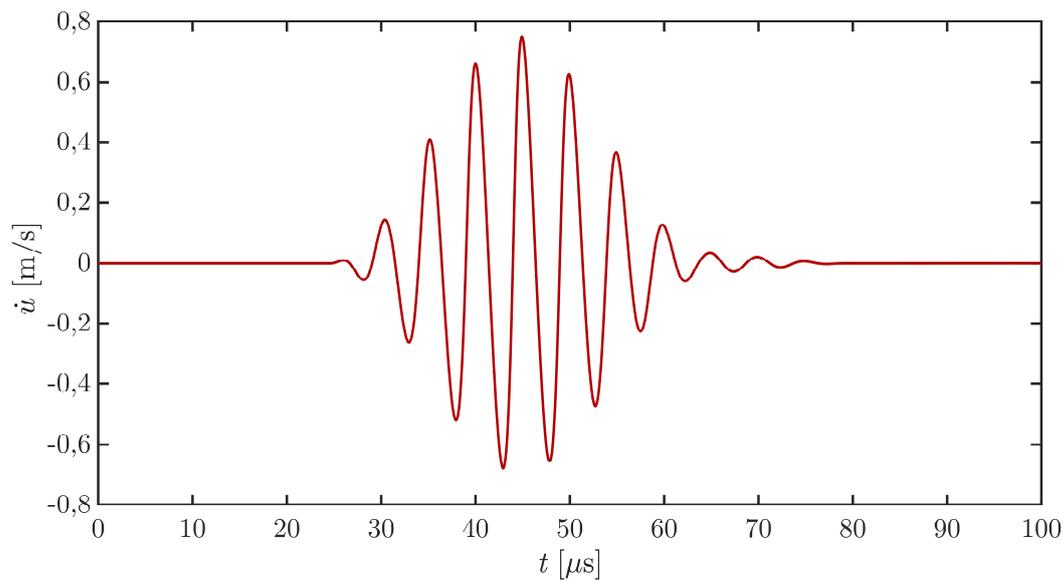


Abbildung 4.13: Zeitsignal der horizontalen Partikelgeschwindigkeit $\dot{u}(x = l_x, y = 0, t)$ im quadratisch nichtlinear-elastischen Beton.

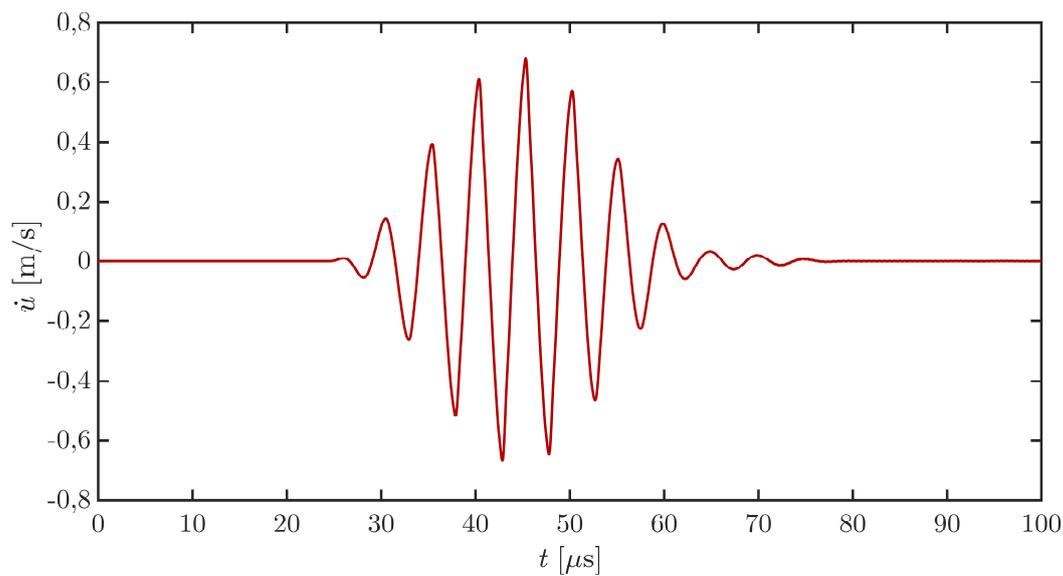


Abbildung 4.14: Zeitsignal der horizontalen Partikelgeschwindigkeit $\dot{u}(x = l_x, y = 0, t)$ im hysteretisch nichtlinearen Beton.

Betrachtet man im Folgenden das zugehörige Frequenzspektrum dieser beiden Zeitsignale in den Abbildungen 4.15 und 4.16, so lässt sich hier das typische ungerade harmonische Profil im hysteretisch nichtlinearen Fall erkennen, welches dadurch gekennzeichnet ist, dass die geraden Harmonischen (2. Harmonische bei $f = 400$ kHz) nicht existieren, sondern nur die ungeraden Harmonischen (3. Harmonische bei $f = 600$ kHz).

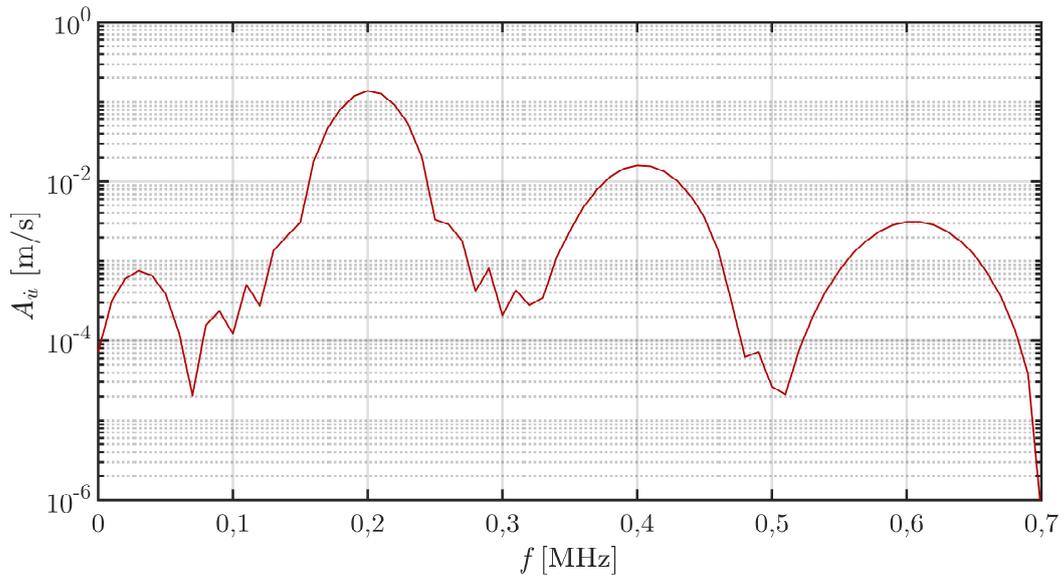


Abbildung 4.15: Frequenzspektrum des Zeitsignals der horizontalen Partikelgeschwindigkeit $\dot{u}(x = l_x, y = 0, t)$ im quadratisch nichtlinear-elastischen Beton.

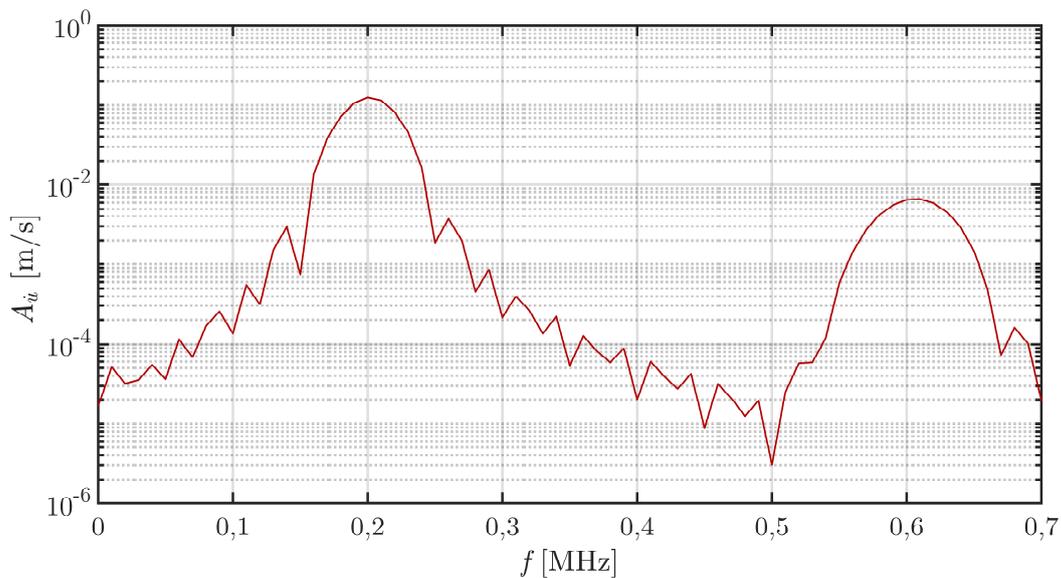


Abbildung 4.16: Frequenzspektrum des Zeitsignals der horizontalen Partikelgeschwindigkeit $\dot{u}(x = l_x, y = 0, t)$ im hysteretisch nichtlinearen Beton.

Nun wird zusätzlich zum nichtlinearen Materialverhalten eine akustische Dämpfung im Betonkörper berücksichtigt. Der wesentliche Unterschied zwischen dem hier verwendeten Dämpfungsmodell und dem KELVIN-VOIGT-Modell besteht in der Abhängigkeit des Dämpfungsparameters von der Frequenz. Für das hier gewählte konstante Q -Modell, welches auf dem linearen Standard-Festkörpermodell (siehe Abschnitt 2.2.1.2 und Anhang A.3) basiert, erhält man einen näherungsweise linearen Zusammenhang zwischen der Dämpfung α_D und der Frequenz f ($\alpha_D \propto f^2$ im KELVIN-VOIGT-Modell). Dieses so

gewählte viskoelastische Materialverhalten gibt insbesondere Beton über einen weiten Frequenzbereich sehr gut wieder. Wie im Abschnitt zuvor soll an dieser Stelle die Verwendung eines relativen akustischen NLP zur Beurteilung der Änderung der Nichtlinearität unter gleichzeitiger Dämpfungsänderung untersucht werden. Dabei werden für den quadratisch nichtlinear-elastischen Fall die relativen akustischen NLP nach der Gleichung (4.3) verwendet und für den hysteretisch nichtlinearen Fall die folgenden relativen akustischen NLP:

$$\alpha'_1 = \frac{A_3}{A_{3,0}}, \quad \alpha'_2 = \frac{A_3/A_1}{A_{3,0}/A_{1,0}}, \quad \alpha'_3 = \frac{A_3/A_1^2}{A_{3,0}/A_{1,0}^2}. \quad (4.4)$$

Dabei bezieht sich der Index „0“ wiederum auf den ungeschädigten Ausgangszustand im Beton. Des Weiteren wird der materielle hysteretische NLP im ungeschädigten Ausgangszustand α_0 aus Tabelle 4.6 (siehe hysteretischer NLP α) und der materielle NLP im ungeschädigten Ausgangszustand des quadratisch nichtlinear-elastischen Betons über $\beta_0 = (l + 2m)/(\lambda + 2\mu)$ mit den Materialwerten nach Tabelle 4.5 verwendet.

Die Auswertung für den quadratisch nichtlinear-elastischen Fall ist in der Tabelle 4.8 dargestellt.

Tabelle 4.8: 2-D gleichmäßig verteilte Schädigung (quadratisch nichtlinear-elastisch); Ausgewählte relative akustische NLP $\beta'_1 - \beta'_3$ für unterschiedliche Q -Faktoren (ZENER-Modell) und unterschiedliche materielle NLP β und relativer akustischer NLP β'_{ref} für $Q_{L,T} = 60 = \text{konst.}$

	Materialparameter		Relativer akustischer NLP			
			β'_1	β'_2	β'_3	β'_{ref}
0	β/β_0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
	$Q_{L,T}$	60				
1	β/β_0	1,2	1,082	1,141	1,202	1,195
	$Q_{L,T}$	50				
2	β/β_0	1,4	1,085	1,236	1,408	1,387
	$Q_{L,T}$	40				
3	β/β_0	1,6	0,973	1,255	1,620	1,575
	$Q_{L,T}$	30				
4	β/β_0	1,8	0,688	1,128	1,849	1,760
	$Q_{L,T}$	20				
5	β/β_0	2,0	0,232	0,729	2,292	1,941
	$Q_{L,T}$	10				

Man erkennt in der Tabelle 4.8 das insbesondere der relative akustische NLP β'_1 den Anstieg der Nichtlinearität und damit der Schädigung falsch wiedergibt und bei einer zunehmenden Dämpfung (bzw. bei einem simulierten späteren Schädigungsstadium) sogar ein Absinken der Nichtlinearität β angibt. Lediglich der relative akustische NLP β'_3 gibt über alle hier modellierten Schädigungszustände die Änderung der materiellen Nichtlinearität β/β_0 korrekt an und zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit dem dämpfungsfreien Referenzfall (vgl. mit β'_{ref}).

In der Tabelle 4.9 sind die Ergebnisse der Untersuchung für den hysteretisch nichtlinearen Schädigungsfall zusammengefasst. Die grundlegenden Beobachtungen aus dem zuvor betrachteten quadratisch nichtlinear-elastischen Fall lassen sich in gleicher Weise auf den hysteretisch nichtlinearen Fall übertragen. So ergibt sich auch hier für den 3. NLP α'_3 eine hervorragende Übereinstimmung mit dem dämpfungsfreien Referenzfall α'_{ref} . Daher lässt sich auch hier festhalten, dass der relative akustische NLP α'_3 eine geeignete Wahl bei der Bestimmung der hysteretisch nichtlinearen Materialveränderungen im Beton ist.

Tabelle 4.9: 2-D gleichmäßig verteilte Schädigung (hysteretisch nichtlinear); Ausgewählte relative akustische NLP $\alpha'_1 - \alpha'_3$ für unterschiedliche Q -Faktoren (ZENER-Modell) und unterschiedliche materielle NLP α und relativer akustischer NLP α'_{ref} für $Q_{L,T} = 60 = \text{konst.}$

	Materialparameter		Relativer akustischer NLP			
			α'_1	α'_2	α'_3	α'_{ref}
0	α/α_0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
	$Q_{L,T}$	60				
1	α/α_0	1,2	1,149	1,164	1,182	1,179
	$Q_{L,T}$	50				
2	α/α_0	1,4	1,277	1,313	1,358	1,354
	$Q_{L,T}$	40				
3	α/α_0	1,6	1,379	1,466	1,527	1,517
	$Q_{L,T}$	30				
4	α/α_0	1,8	1,438	1,554	1,689	1,680
	$Q_{L,T}$	20				
5	α/α_0	2,0	1,372	1,598	1,854	1,862
	$Q_{L,T}$	10				

Um die räumliche 2-D Verteilung der Harmonischen darzustellen bietet es sich an, für jeden Punkt des Berechnungsgebietes das betrachtete Zeitsignal in das zugehörige Frequenzspektrum zu überführen. Somit kann für eine ausgewählte Frequenz die zugehörige Amplitudenverteilung im 2-D Berechnungsgebiet dargestellt werden. Hierbei ergeben sich für den 2-D quadratisch nichtlinear-elastischen Fall im ungeschädigten Zustand die in den Abbildungen 4.17 und 4.18 dargestellten Verteilungen der Fundamentalamplitude A_1 und der zugehörigen 2. Harmonische-Amplitude A_2 der horizontalen Partikelgeschwindigkeit \dot{u} . Es ist dabei zu erkennen, dass die Fundamentalamplitude im Kernbereich des Prüfkopfdurchmessers D_T ein hohes Niveau besitzt und nur leicht divergiert. Die 2. Harmonische zeigt den zu erwartenden linearen Anstieg der Amplitude mit zunehmender Ausbreitungsentfernung. Überdies fällt das stärker ausgeprägte divergente Ausbreitungsverhalten bei der 2. Harmonischen auf.

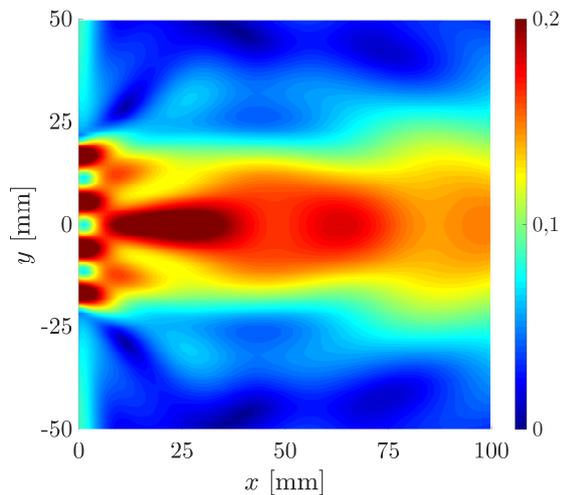


Abbildung 4.17: Räumliche Verteilung der Partikelgeschwindigkeitsamplitude A_u bei der Fundamentalfrequenz $f = 200$ kHz für den quadratisch nichtlinear-elastischen Fall.

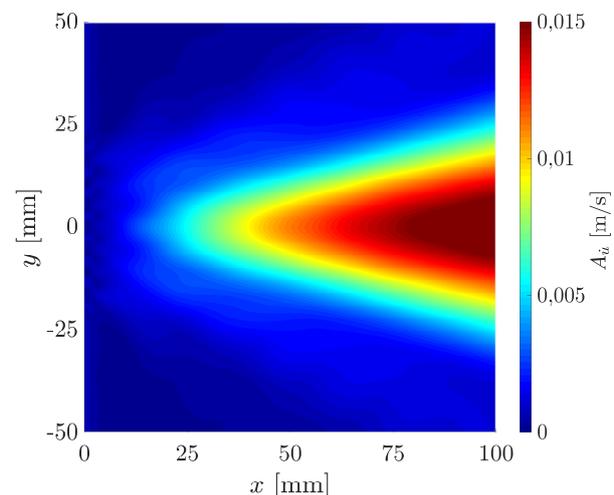


Abbildung 4.18: Räumliche Verteilung der Partikelgeschwindigkeitsamplitude A_u bei der 2. Harmonischen-Frequenz $f = 400$ kHz für den quadratisch nichtlinear-elastischen Fall.

Das entsprechende Ergebnis für den hysteretisch nichtlinearen Fall ist in den Abbildungen 4.19 und 4.20 illustriert. Die Verteilung der Fundamentalamplitude ist dabei ähnlich zu dem quadratisch nichtlinear-elastischen Fall, wobei der Absolutwert der Fundamentalamplitude aufgrund der hysteretisch nichtlinearen Dämpfung etwas geringer ausfällt. Die 3. Harmonische-Amplitude zeigt ebenfalls den zu erwartenden linearen Anstieg über den zurückgelegten Weg x der Wellenausbreitung. Weiterhin ist die Divergenz etwas flacher als im quadratisch nichtlinear-elastischen Fall.

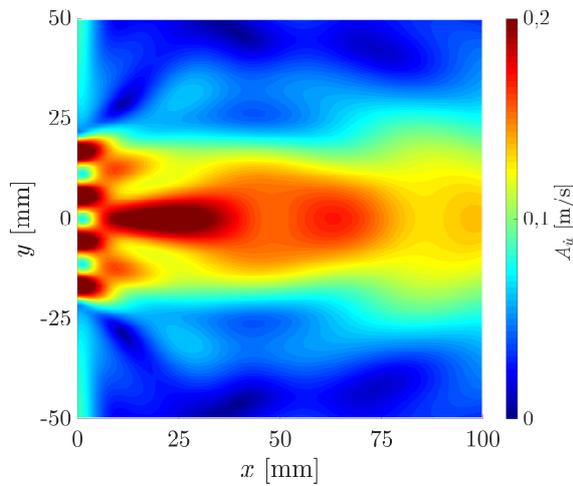


Abbildung 4.19: Räumliche Verteilung der Partikelgeschwindigkeitsamplitude A_u bei der Fundamentalfrequenz $f = 200$ kHz für den hysteretisch nichtlinearen Fall.

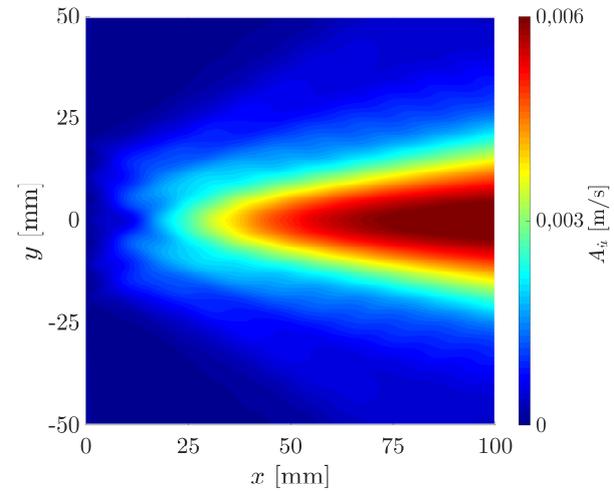


Abbildung 4.20: Räumliche Verteilung der Partikelgeschwindigkeitsamplitude A_i bei der 3. Harmonischen-Frequenz $f = 600$ kHz für den hysteretisch nichtlinearen Fall.

4.2.2 2-D lokalisierte kreisförmige Schädigung in einem Betonkörper

Im nächsten Schritt wird das 2-D elastodynamische Problem der nichtlinearen Wellenausbreitung in einem lokal geschädigten Beton numerisch untersucht. Hierfür wird nach Abbildung 4.21 das ursprüngliche 2-D Berechnungsgebiet eines Betonkörpers (vgl. Abbildung 4.1) um einen mittig angeordneten kreisförmigen Schädigungsbereich erweitert.

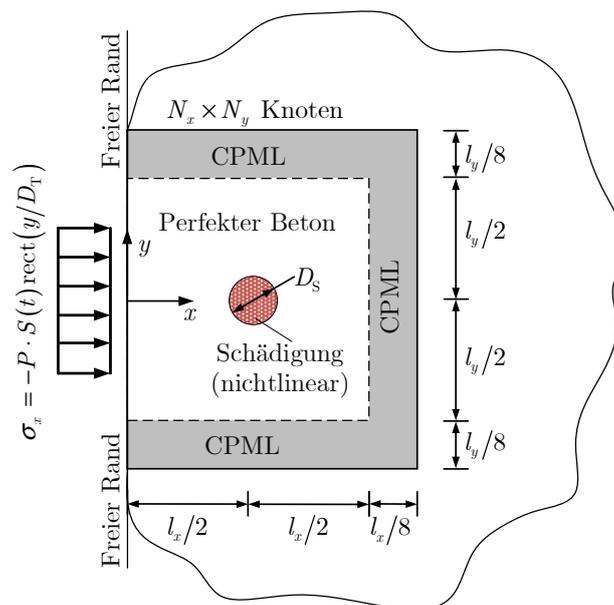


Abbildung 4.21: Prinzipskizze des Berechnungsgebietes mit einer lokalisierten, kreisförmigen Schädigung für eine 2-D Halbebene unter einer zeithabhängigen linienförmigen Erregung.

Dabei wird das als perfekt angenommene Gebiet um den Schädigungsbereich als ideal linear-elastisch mit den linearen Materialeigenschaften nach der Tabelle 4.5 beschrieben und der geschädigte Bereich durch ein nichtlinear-elastisches Materialverhalten modelliert. Wie im vorigen Abschnitt wird hierbei das quadratisch nichtlinear-elastische sowie das hysteretisch nichtlineare Materialverhalten (DUHEM-Modell) berücksichtigt. Die zugehörigen nichtlinearen Parameter werden ebenfalls aus den Tabellen 4.5 und 4.6 übernommen. Weiterhin werden die Simulationsparameter aus Tabelle 4.7 verwendet.

Zunächst wird untersucht, welche Einflüsse der Prüfkopfdurchmesser D_T und der Durchmesser D_S des kreisförmigen Schädigungsbereiches auf den akustischen NLP haben. Hierzu wird der akustische NLP entsprechend $\beta = A_2/A_1^2$ analysiert. Die hierfür notwendige Auswertung der Harmonischen-Amplituden A_1 und A_2 im Frequenzspektrum bezieht sich dabei, wie bisher, auf das Zeitsignal der horizontalen Partikelgeschwindigkeit $\dot{u}(x = l_x, y = 0, t)$. Die beiden Durchmesser D_T und D_S werden variiert und die zugehörigen Werte für den akustischen NLP β werden in der Abbildung 4.22 aufgetragen. Man erkennt hierbei, dass sich der akustische NLP β mit steigendem Prüfkopfdurchmesser D_T leicht erhöht. Durch die geringere Divergenz bei größerem Durchmesser des akustischen Strahls nimmt hier die Signalamplitude mit zunehmendem Abstand x entsprechend langsamer ab als bei einem kleineren Durchmesser. Somit steht aufgrund der eher gebündelten Fundamentalstrahlung mehr mechanische Energie für die Erzeugung höherharmonischer Anteile zur Verfügung. Weiterhin erkennt man, dass der akustische NLP nahezu quadratisch vom Durchmesser D_S des geschädigten Bereiches abhängt. Dieses Verhalten wurde prinzipiell schon in [118] festgestellt.

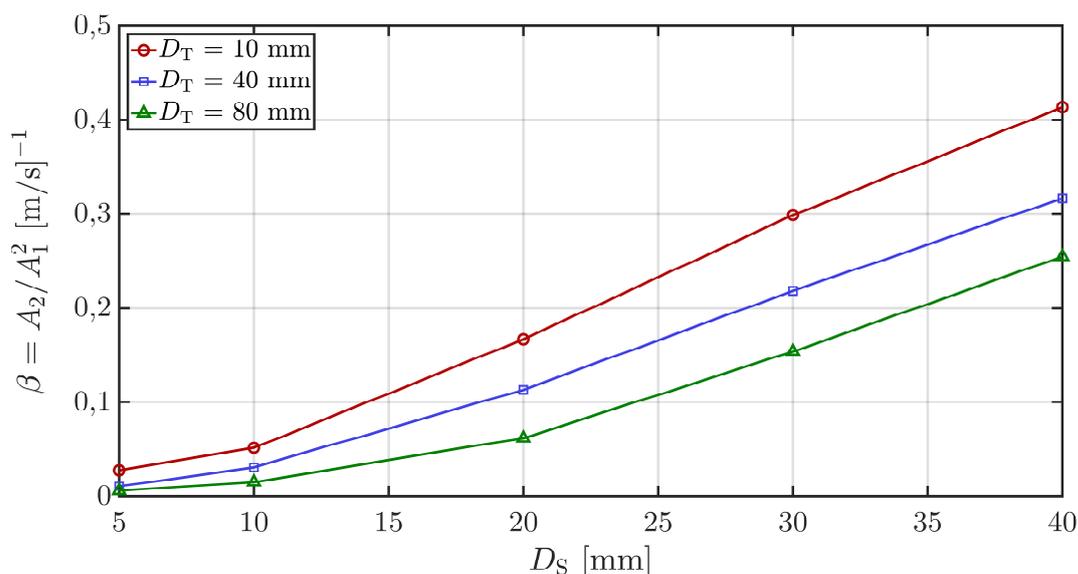


Abbildung 4.22: Änderung des akustischen NLP $\beta = A_2/A_1^2$ in Abhängigkeit vom Prüfkopfdurchmesser D_T und des Durchmessers D_S der Schädigung.

Wie für den gleichmäßig geschädigten Fall im Abschnitt zuvor sollen im Folgenden die unterschiedlichen relativen akustischen NLP nach den Gleichungen (4.3) und (4.4) für einen simulierten Schädigungszustand untersucht werden. Hierzu wird der Durchmesser der kreisförmigen Schädigung mit $D_s = 20$ mm festgelegt und der quadratisch nichtlinear-elastische und hysteretisch nichtlineare Fall getrennt behandelt.

Die Ergebnisse dieser Auswertung in den Tabellen 4.10 und 4.11 zeigen dabei deutlich, dass auch in diesem Fall die beiden relativen akustischen NLP β'_3 und α'_3 den Verlauf der materiellen NLP (β und α) am besten wiedergeben. Generell sind jedoch die Abweichungen zum dämpfungsfreien Referenzfall β'_{ref} und α'_{ref} bei der quadratisch nichtlinear-elastischen wie auch bei der hysteretisch nichtlinearen Schädigung (siehe Tabellen 4.10 und 4.11) deutlich ausgeprägter als bei der zuvor betrachteten gleichmäßig verteilten Schädigung (vgl. Tabellen 4.8 und 4.9).

Tabelle 4.10: 2-D lokale kreisförmige Schädigung (quadratisch nichtlinear-elastisch); Ausgewählte relative akustische NLP $\beta'_1 - \beta'_3$ für unterschiedliche Q -Faktoren (ZENER-Modell) und unterschiedliche materielle NLP β und relativer akustischer NLP β'_{ref} für $Q_{L,T} = 60 = \text{konst.}$

	Materialparameter		Relativer akustischer NLP			
			β'_1	β'_2	β'_3	β'_{ref}
0	β/β_0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
	$Q_{L,T}$	60				
1	β/β_0	1,2	1,174	1,182	1,191	1,204
	$Q_{L,T}$	50				
2	β/β_0	1,4	1,323	1,346	1,369	1,408
	$Q_{L,T}$	40				
3	β/β_0	1,6	1,423	1,473	1,524	1,612
	$Q_{L,T}$	30				
4	β/β_0	1,8	1,421	1,520	1,626	1,816
	$Q_{L,T}$	20				
5	β/β_0	2,0	1,149	1,348	1,582	2,020
	$Q_{L,T}$	10				

Tabelle 4.11: 2-D lokale kreisförmige Schädigung (hysteretisch nichtlinear); Ausgewählte relative akustische NLP $\alpha'_1 - \alpha'_3$ für unterschiedliche Q -Faktoren (ZENER-Modell) und unterschiedliche materielle NLP α und relativer akustischer NLP α'_{ref} für $Q_{L,T} = 60 = \text{konst.}$

	Materialparameter		Relativer akustischer NLP			
			α'_1	α'_2	α'_3	α'_{ref}
0	α/α_0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
	$Q_{L,T}$	60				
1	α/α_0	1,2	1,174	1,181	1,188	1,193
	$Q_{L,T}$	50				
2	α/α_0	1,4	1,331	1,350	1,370	1,384
	$Q_{L,T}$	40				
3	α/α_0	1,6	1,457	1,498	1,540	1,573
	$Q_{L,T}$	30				
4	α/α_0	1,8	1,514	1,597	1,685	1,760
	$Q_{L,T}$	20				
5	α/α_0	2,0	1,366	1,554	1,768	1,945
	$Q_{L,T}$	10				

Je nach Größe, Form und Art des Schädigungsbereiches entsteht in diesem heterogenen elastodynamischen Fall ein charakteristisches nichtlineares Wellenstreufeld. Zur Visualisierung dieses Effektes wird wie bei dem gleichmäßig geschädigten Fall das Zeitsignal der horizontalen Partikelgeschwindigkeit \dot{u} in allen Knotenpunkten des 2-D Berechnungsgebietes gespeichert und anschließend das zugehörige Frequenzspektrum des Gesamtgebietes erstellt. In der Abbildung 4.23 ist dazu die räumliche Verteilung der 2. Harmonischen-Amplitude im 2-D Berechnungsgebiet für den quadratisch nichtlinear-elastischen Fall dargestellt. Dabei ist zu erkennen, dass die höherharmonische Welle im Kernbereich des nichtlinearen Schädigungsgebiets entsteht und sich von dort in positiver x -Richtung ausbreitet. Für den hysteretisch nichtlinearen Fall ergibt sich ein ähnliches Bild (siehe Abbildung 4.24), wobei sich in diesem Fall das Wellenstreufeld deutlich fokussierter in x -Richtung ausbreitet. Dabei ist zu beachten, dass die Ausprägung und die Orientierung des Wellenstreufeldes stark vom Verhältnis der Wellenlänge der Fundamentalwelle zum Durchmesser der Schädigung abhängen. Dieser Zusammenhang und die Eigenschaften des nichtlinearen Wellenstreufeldes sollen im folgenden letzten Abschnitt dieses Kapitels detaillierter betrachtet werden.

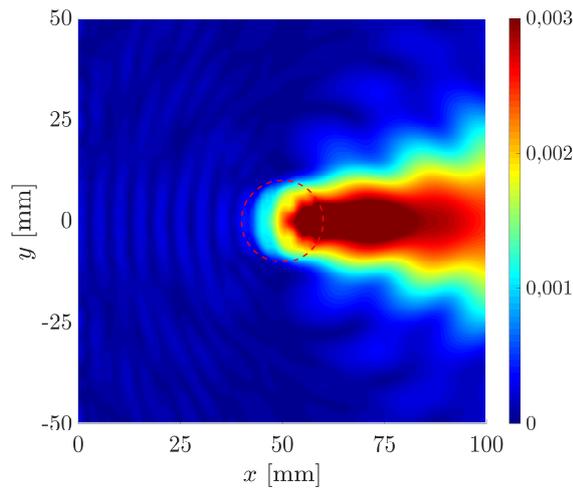


Abbildung 4.23: Räumliche Verteilung der Partikelgeschwindigkeitsamplitude A_i bei der 2. Harmonischen-Frequenz $f = 400$ kHz für eine lokalisierte und quadratisch nichtlinear-elastische Schädigung.

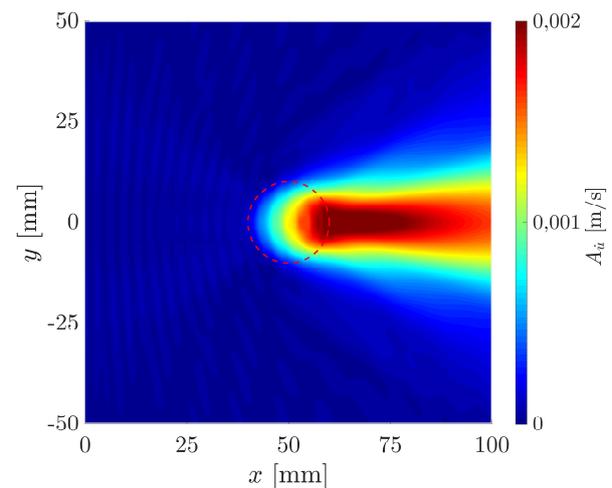


Abbildung 4.24: Räumliche Verteilung der Partikelgeschwindigkeitsamplitude A_i bei der 3. Harmonischen-Frequenz $f = 600$ kHz für eine lokalisierte und hysteretisch nichtlineare Schädigung.

Zusammenfassend lässt sich aus den bisher durchgeführten numerischen Untersuchungen feststellen, dass für unterschiedliche Dämpfungsmodelle sowie für den gleichmäßig geschädigten und den lokalisiert geschädigten Fall die Beschreibung der Änderung der Nichtlinearität mit den relativen akustischen NLP in guter Näherung möglich ist. Weiterhin wird herausgestellt, dass insbesondere die Größe bzw. der Durchmesser D_S der lokalen Schädigung einen entscheidenden Einfluss auf die Ausprägung des nichtlinearen Wellenstreufeldes haben.

4.3 3-D lokalisierte kugelförmige nichtlinear-elastische Betonschädigung

Im Folgenden soll das nichtlineare Wellenstreufeld infolge eines lokal geschädigten Bereiches in einem linear-elastischen ungeschädigten Betonkörper insbesondere im Hinblick auf die charakteristische Form des Wellenstreufeldes untersucht werden [5].

Hierzu wird eine 3-D numerische Simulation durchgeführt. Dabei wird die Schädigung innerhalb eines kugelförmigen Bereiches in einem physikalischen Berechnungsgebiet zum einen als quadratisch nichtlinear-elastisch und zum anderen als hysteretisch nichtlinear-elastisch angenommen. Der 3-D Halbraum wird im ersten Fall durch eine zeitabhängige Normalspannung σ_x (siehe Abbildungen 4.25 und 4.26) und im zweiten Fall

durch eine zeitabhängige Schubspannung τ_{xy} (siehe Abbildungen 4.27 und 4.28) auf der freien Oberfläche bei $x = 0$ beansprucht. Dabei wird ein würfelförmiges physikalisches Berechnungsgebiet mit den Abmessungen $l_x = l_y = l_z = 20$ mm und der Knotenanzahl $N_x = N_y = N_z = 100$ numerisch simuliert.

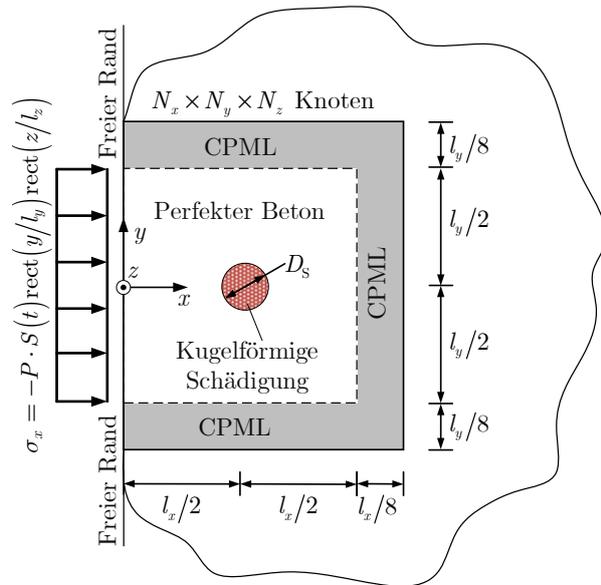


Abbildung 4.25: Prinzipskizze des Berechnungsgebietes eines 3-D Halbraumes unter einer zeitabhängigen flächenförmigen Erregung.

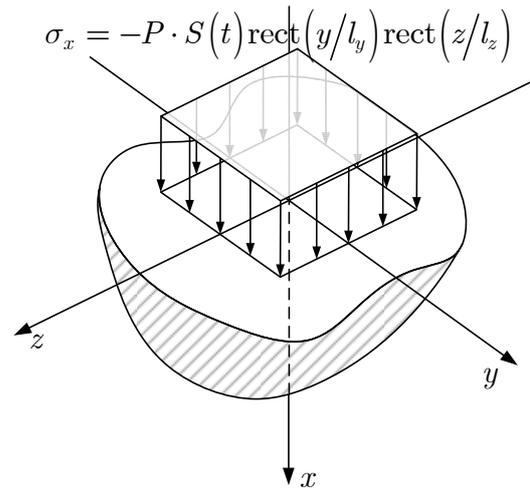


Abbildung 4.26: 3-D Halbraum unter Einwirkung einer zeitabhängigen Flächenlast in x -Richtung.

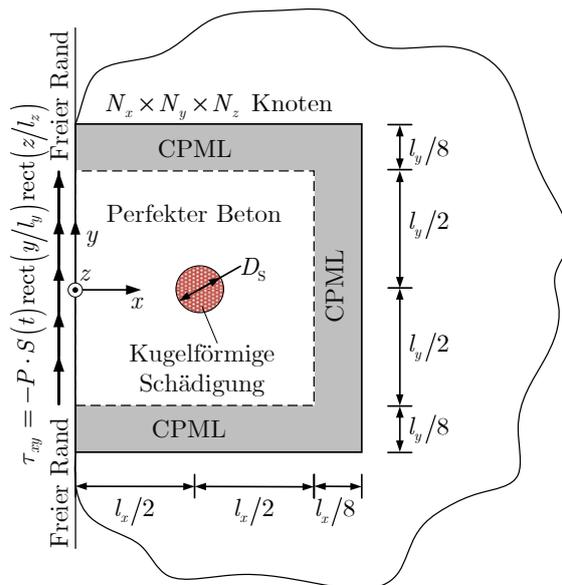


Abbildung 4.27: Prinzipskizze des Berechnungsgebietes eines 3-D Halbraumes unter einer zeitabhängigen flächenförmigen Erregung.

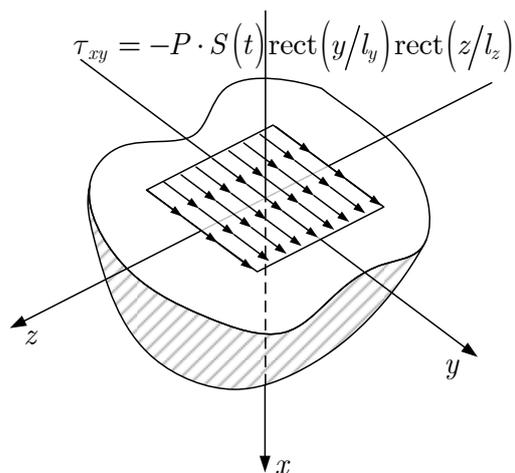


Abbildung 4.28: 3-D Halbraum unter Einwirkung einer zeitabhängigen Flächenlast in x -Richtung.

Die Randbedingungen werden für die normale Erregung durch

$$\begin{aligned}\sigma_x(x=0, y, z, t) &= -P \cdot S(t) \cdot \text{rect}(y/l_y) \cdot \text{rect}(z/l_z), \\ \tau_{xy}(x=0, y, z, t) &= 0, \\ \tau_{xz}(x=0, y, z, t) &= 0,\end{aligned}\tag{4.5}$$

und für die tangentielle Erregung durch

$$\begin{aligned}\sigma_x(x=0, y, z, t) &= 0, \\ \tau_{xy}(x=0, y, z, t) &= -P \cdot S(t) \cdot \text{rect}(y/l_y) \cdot \text{rect}(z/l_z), \\ \tau_{xz}(x=0, y, z, t) &= 0\end{aligned}\tag{4.6}$$

definiert. Da in dieser Untersuchung nur das nichtlineare Wellenstreuungfeldproblem analysiert werden soll, wird auf eine Berücksichtigung der Dämpfung in den konstitutiven Gleichungen verzichtet. Zur Modellierung des hysteretisch nichtlinear-elastischen Materialverhaltens wird auf das rein elastische und 1-D Hysteresemodell nach NAZAROV (siehe Gleichung (2.25)) zurückgegriffen. Hierbei wird das übliche Vorgehen zur Übertragung der 1-D konstitutiven Gleichung auf den 3-D Fall unter Verwendung der KELVIN-Methode herangezogen und das hysteretisch nichtlinear-elastische Verhalten für alle sechs unabhängigen Hauptrichtungen des KELVIN-Eigensystems (siehe Gleichungen (2.33)-(2.35)) angesetzt. Die zugehörigen Materialwerte für die quadratisch nichtlinear-elastischen wie die hysteretisch nichtlinear-elastischen Berechnungen sind in den Tabellen 4.12 und 4.13 angegeben. Weiterhin sind die maßgebenden Simulationsparameter der Tabelle 4.14 zu entnehmen. Hierbei werden die Materialwerte wieder in Anlehnung an die im experimentellen Teil dieser Arbeit untersuchten Betonproben gewählt.

Tabelle 4.12: Materialparameter des quadratisch nichtlinear-elastischen Betons.

ρ_0	λ	μ	l	m	n
$[\text{kg}/\text{m}^3]$	$[\text{GPa}]$	$[\text{GPa}]$	$[\text{GPa}]$	$[\text{GPa}]$	$[\text{GPa}]$
2350	9,75	15,00	-2000	-2000	-2000

Tabelle 4.13: Materialparameter des hysteretisch nichtlinear-elastischen Betons (NAZAROV-Modell).

ρ_0	λ	μ	α_N	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	n_N
$[\text{kg}/\text{m}^3]$	$[\text{GPa}]$	$[\text{GPa}]$	$[-]$	$[-]$	$[-]$	$[-]$	$[-]$	$[-]$
2350	9,75	15,00	0	300	300	300	300	2

Tabelle 4.14: Simulationsparameter.

P	f_{Sig}	T_{Sig}	T_{ges}	Δt
[MPa]	[kHz]	[μs]	[μs]	[μs]
-31,05	100	60	67,92	0,0015

Die einachsige Spannungs-Dehnungs-Beziehung ist in der Abbildung 4.29 dargestellt. Wie im Abschnitt 4.2 wird dabei die Dehnungsfunktion $\varepsilon(t) = 0,003 \cdot \sin(2\pi ft) \cdot e^{-40000 \cdot t}$ vorgegeben und in der Abbildung 4.12 gezeigt. Im Unterschied zu der in Abbildung 4.11 dargestellten Hysterese handelt es sich in diesem Fall nicht um eine teilelastische Hysterese sondern um eine vollständig elastische Hysterese, da, wie in der Abbildung 4.29 zu erkennen, im spannungsfreien Zustand auch die Dehnung gleich null ist.

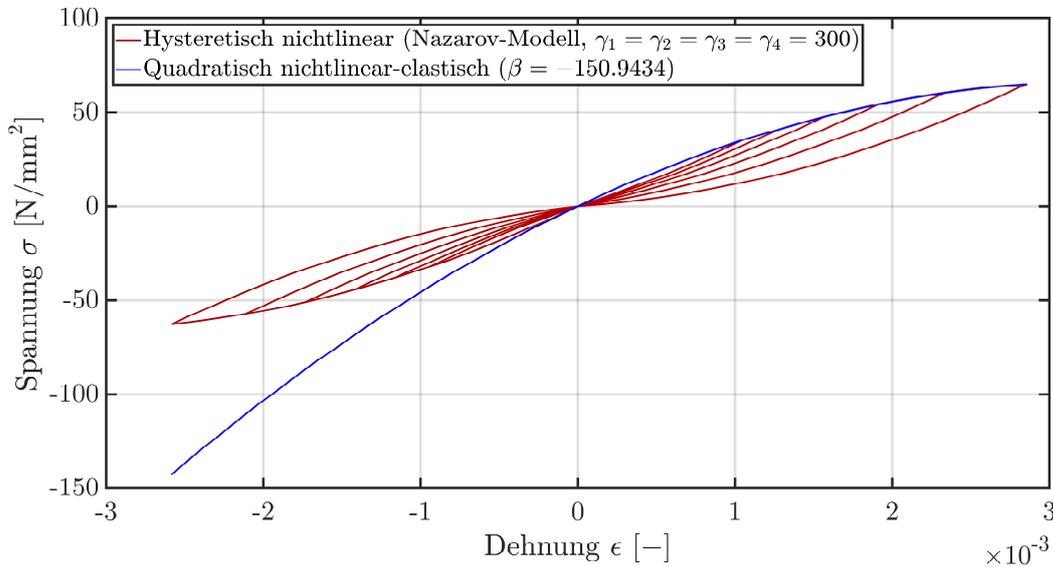


Abbildung 4.29: Einachsige Spannungs-Dehnungs-Beziehung für das quadratisch nichtlinear-elastische Materialgesetz und für das hysteresisch nichtlinear-elastische Materialgesetz (NAZAROV-Modell).

Im Folgenden wird der Durchmesser der kugelförmigen Schädigung als $D_S = 2 \text{ mm} \ll \lambda_{\text{min}} = \lambda_T \approx 25,26 \text{ mm}$ gewählt, um hiermit klar im Bereich der klassischen RAYLEIGH-Streuung ($D_S \ll \lambda_{\text{min}}$) zu sein. Die nachfolgende numerische Untersuchung der nichtlinearen Wellenstreuung bezieht sich dabei auf die Verschiebungsamplituden im 3-D Raum. Um hierbei die in einem unberandeten isotropen Festkörper vorkommenden wesentlichen Wellenmoden (longitudinal und transversal) in Bezug auf den kugelförmigen nichtlinearen Streukörper anschaulich zu machen, werden die Zeitbereichslösungen der Partikelverschiebungen im kartesischen Koordinatensystem (u, v und w) auf ein sphärisches Koordinatensystem, wie in der Abbildung 4.30 dargestellt, mit Ursprung in der Mitte des kugelförmigen Einschlusses transformiert. Dies erfolgt über die folgenden Transformationsbeziehungen:

$$\begin{aligned}
 u_r &= \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \cdot u + \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \cdot v + \cos(\theta) \cdot w, \\
 u_\theta &= \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) \cdot u + \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) \cdot v - \sin(\theta) \cdot w, \\
 u_\varphi &= -\sin(\varphi) \cdot u + \cos(\varphi) \cdot v.
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

Hierbei sind r , φ und θ der Radius, der Azimutwinkel und der Polarwinkel des sphärischen Koordinatensystems. Des Weiteren beschreibt die Verschiebung u_r die longitudinale Wellenmode und u_φ bzw. u_θ die transversale Wellenmode des Wellenstrefeldes in Bezug auf das Koordinatensystem der kugelförmigen Schädigung.

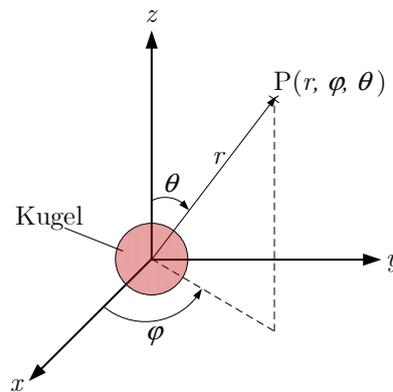


Abbildung 4.30: Sphärisches Koordinatensystem.

4.3.1 Quadratisch nichtlinear-elastische Betonschädigung

Die Entstehung von harmonischen Wellen in einem quadratischen nichtlinear-elastischen Medium ist hauptsächlich mit einem ausgeprägten Wellenfeld der 2. Harmonischen verbunden. Daher wird in diesem Abschnitt nur der Anteil der 2. Harmonischen am gesamten Wellenstrefeld betrachtet. Für den Fall einer Longitudinalwellenanregung σ_x ist der gestreute longitudinale Anteil des Wellenfeldes der 2. Harmonischen durch zwei vorwärts und rückwärts gerichtete „Hauptkeulen“ charakterisiert (siehe Abbildung 4.31a)). Das gestreute Wellenfeld der 2. Harmonischen beider Transversalwellenmoden u_φ (siehe Abbildung 4.31b)) und u_θ (siehe Abbildung 4.31c)) zeigt vier „Hauptkeulen“ mit nahezu gleicher Amplitude in diagonalen Richtungen. In der Abbildung 4.32 ist die räumliche Verteilung des von einer primären Transversalwellenanregung τ_{xy} erzeugten Wellenstrefeldes der 2. Harmonischen dargestellt. Hier wird ein longitudinales Wellenstrefeld der 2. Harmonischen erzeugt (Abbildung 4.32a)) mit einer nahezu gleichmäßigen Verteilung über den gesamten Umfang der Kugel. Das transversale Wellenstrefeld besteht nur aus der Wellenmode u_θ (Abbildung 4.32c)), welches wiederum aus vier „Keulen“ in diagonalen Richtungen besteht. Die schwach ausgeprägte Transversalwellenmode u_φ innerhalb der Schädigung (Abbildung 4.32b)) kann als nicht ausbreitungsfähige Wellenmode interpretiert werden und trägt nicht zur

gesamten harmonischen Wellenstreuung bei. Die grundlegenden Beobachtungen und Ergebnisse in diesem Abschnitt stimmen gut mit den entsprechenden analytischen Lösungen in [118, 199, 200] überein.

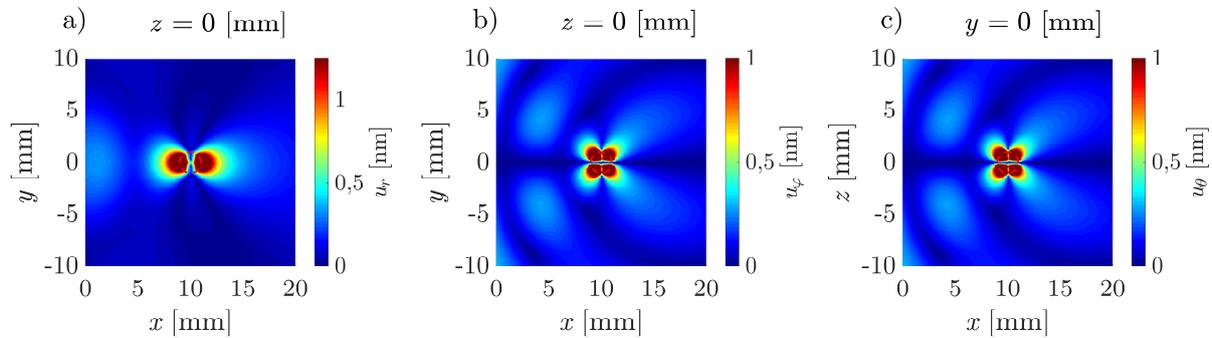


Abbildung 4.31: Wellenstreuungsfeld der 2. Harmonischen ($f = 200$ kHz) bei normaler Anregung σ_x und quadratisch nichtlinear-elastischer Schädigung: a) Longitudinales Wellenstreuungsfeld (u_r) und b)-c) transversales Wellenstreuungsfeld (u_φ und u_θ).

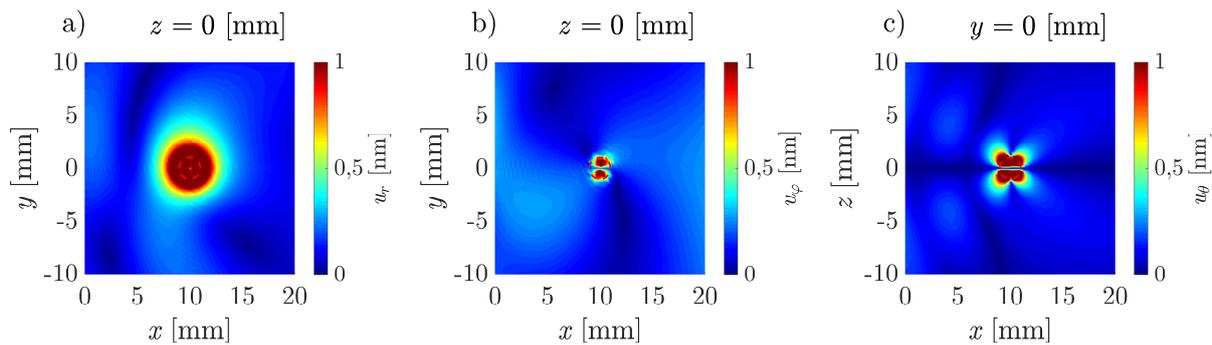


Abbildung 4.32: Wellenstreuungsfeld der 2. Harmonischen ($f = 200$ kHz) bei tangentialer Anregung τ_{xy} und quadratisch nichtlinear-elastischer Schädigung: a) Longitudinales Wellenstreuungsfeld (u_r) und b)-c) transversales Wellenstreuungsfeld (u_φ und u_θ).

4.3.2 Hysteretisch nichtlinear-elastische Betonschädigung

Für den hysteretisch nichtlinear-elastischen Fall wird ein ausgeprägtes Feld der 3. Harmonischen erzeugt und daher in der nachfolgenden Untersuchung näher analysiert. Die harmonischen Wellenstreuungsfelder der Longitudinal- und Transversalwellen für ausgewählte Schnittebenen werden in den Abbildungen 4.33 und 4.34 dargestellt. Für eine normale Wellenanregung besteht das gestreute Longitudinalwellenfeld der 3. Harmonischen aus einem ausgeprägten Dipol in x -Richtung und einem weniger ausgeprägten Dipol in y -Richtung (Abbildung 4.33a)). Weiterhin werden zwei transversale Wellenstreuungsfelder der 3. Harmonischen (u_φ und u_θ) erzeugt, die durch vier diagonal ausgerichtete „Keulen“ gekennzeichnet sind (Abbildungen 4.33b) und c)). Die gestreuten höherharmonischen Wellenfelder für eine Transversalwellenanregung sind in der Abbildung 4.34 dargestellt. In diesem Fall ist das longitudinale Wellenstreuungsfeld der

3. Harmonischen ebenfalls durch vier diagonal orientierte „Keulen“ nahezu gleicher Größe gekennzeichnet (Abbildung 4.34a)). Bei dem transversalen höherharmonischen Wellenstreufeld ist hier zu beachten, dass nur die Transversalwellenmode mit einer Partikelverschiebung u_φ in Richtung des Azimutwinkels φ erzeugt wird (Abbildung 4.34b)), und die Transversalwellenmode u_θ verschwindet (Abbildung 4.34c)). Dieser Zusammenhang erklärt sich dabei aus der Abhängigkeit des transversalen Wellenstreufeldes von der jeweiligen Polarisation der einfallenden primären Transversalwelle. Somit entsteht in diesem konkreten Fall nur ein transversales Wellenstreufeld der 3. Harmonischen, dessen Polarisation, mit der der primären Transversalwelle übereinstimmt. Abschließend lässt sich zusammenfassen, dass die hier verwendete Methode unter Betrachtung der räumlichen Verteilung der Höherharmonischen im zugehörigen Frequenzspektrum eine gute Aussage hinsichtlich der Form und Ausprägung des nichtlinearen Wellenstreufeldes ermöglicht. Grundsätzlich zeigt die Untersuchung, dass abhängig von der Wellenmode und der Art der Nichtlinearität immer bestimmte charakteristische Formen des höherharmonischen Wellenstreufeldes entstehen können.

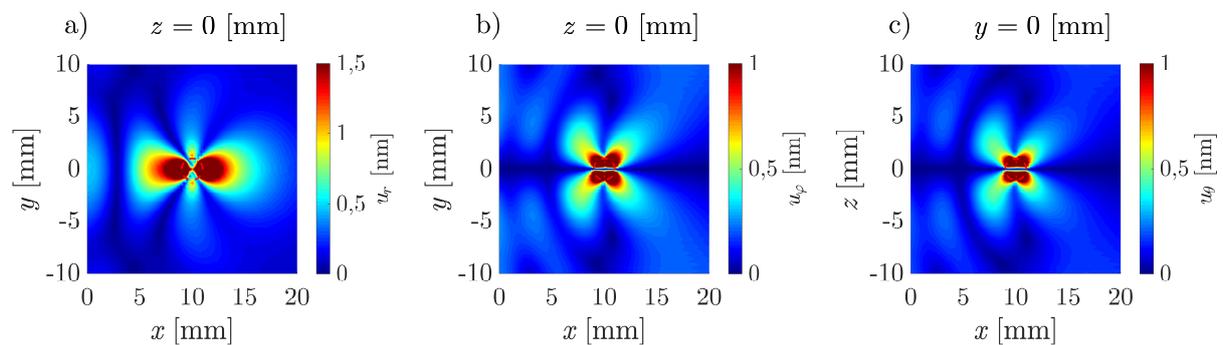


Abbildung 4.33: Wellenstreufeld der 3. Harmonischen ($f = 300$ kHz) bei normaler Anregung σ_x und hysteretisch nichtlinear-elastischer Schädigung: a) Longitudinales Wellenstreufeld (u_r) und b)-c) transversales Wellenstreufeld (u_φ und u_θ).

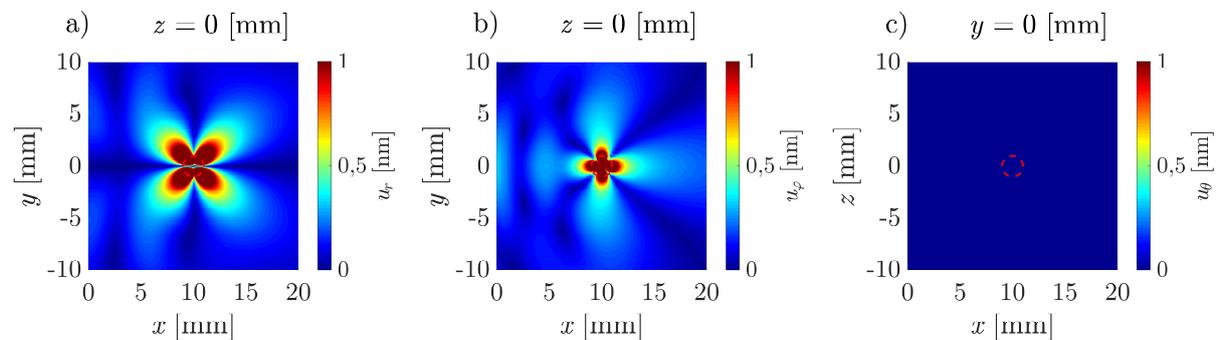


Abbildung 4.34: Wellenstreufeld der 3. Harmonischen ($f = 300$ kHz) bei tangentialer Anregung τ_{xy} und hysteretisch nichtlinear-elastischer Schädigung: a) Longitudinales Wellenstreufeld (u_r) und b)-c) transversales Wellenstreufeld (u_φ und u_θ).

5 Experimentelle Ultraschalluntersuchungen von Hochleistungsbetonen

In diesem Kapitel werden die Materialeigenschaften und insbesondere die Schädigungsentwicklung in Hochleistungsbetonen mittels Ultraschalltechnik untersucht. Dabei werden die wesentlichen Unterschiede zu normalfestem Beton beschrieben und die maßgebenden Einflussfaktoren auf der mikrostrukturellen Ebene diskutiert. Daneben wird die Sensitivität linearer und nichtlinearer Ultraschalltechnik hinsichtlich der frühzeitigen Materialschädigung kritisch beurteilt und gegenübergestellt. Hierzu werden im Wesentlichen die Laufzeitmessung, die Dämpfungsmessung und die Analyse der höherharmonischen Signalanteile eingesetzt. Dabei wird unter anderem der im vorigen Kapitel behandelte Dämpfungseinfluss auf die nichtlineare Ultraschallwellenausbreitung berücksichtigt.

5.1 Hochleistungsbetone

Aus werkstofftechnischer Sicht stellt Beton einen porösen und heterogenen Verbundwerkstoff dar. Dabei ist die Gesteinskörnung (Sand und Kies unterschiedlicher Größe und Formen) in der festen Zementmatrix (Zement und Wasser) eingebunden. Die zentrale chemische Reaktion bei der Erhärtung des Zementleims zum Zementstein ist dabei die Hydratation. Diese beschreibt das Abbinden des Zements unter Wasserzugabe zu ineinander verzahnten Hydratphasen. Die wesentlichen Hydratphasen, welche ca. 50-60% des Gesamtvolumens des hydratisierten Zements ausmachen [146] und entscheidenden Einfluss auf die Druckfestigkeit des Betons haben, sind dabei die sogenannten Calciumsilikathydrat-Phasen (kurz CSH-Phasen). Neben weiteren chemischen Verbindungen (Calcium-Hydroxid, Calcium Sulfoaluminate) bilden sich insbesondere unterschiedliche Poren (Gelporen, Kapillarporen, Luftporen, Verdichtungsporen) in der hydratisierten Zementmatrix, welche einen großen Einfluss auf die Festigkeitsentwicklung von Beton haben. Zudem bestimmt die Verbundschicht zwischen der Gesteinskörnung und der Zementmatrix in besonderem Maße die Eigenschaften des Betons [28, 109]. Diese Zwischenschicht bzw. Verbundschicht wird in der Literatur häufig als *Interfacial Transition Zone* (ITZ) bezeichnet. Aufgrund der behinderten bzw. eingeschränkten CSH-Bildung ist diese Verbundzone insbesondere durch ein gehäuftes Vorkommen von Calciumhydroxid und Etringit-Verbindungen sowie durch eine ausgeprägte Porosität charakterisiert (siehe Abbildung 5.1a)) [28, 109]. Hierdurch wird die Festigkeit in

diesem Bereich deutlich herabgesetzt. Betrachtet man daher das Bruchverhalten von normalfestem Beton, so lässt sich feststellen, dass aufgrund der deutlichen Festigkeitsdifferenz und der damit einhergehenden Spannungskonzentration zwischen der Gesteinskörnung und der Verbundzone das Risswachstum (Mikrorisswachstum) in der Regel in diesem Bereich beginnt und von dort fortschreitet. Aufgrund der vergleichsweise hohen Heterogenität und Porosität sowie infolge der „schwachen“ ITZ ergibt sich für normalfesten bzw. konventionell hergestellten Beton ein Maximum der erreichbaren Druckfestigkeit von ca. 50 MPa [28, 109]. Um diese nachteiligen festigkeitsmindernden Einflüsse von normalfestem Beton zu minimieren bzw. die Materialeigenschaften zu optimieren, wurden die sogenannten Hochleistungsbetone entwickelt. Der Begriff des Hochleistungsbetons bezieht sich dabei auf Betone, deren Materialeigenschaften oder Leistungsfähigkeiten diejenigen eines konventionellen Betons substanziell übersteigen bzw. übertreffen. Dabei bezieht man sich wiederum mit der Definition der Leistungsfähigkeiten insbesondere auf die erreichbare Festigkeit, Dauerhaftigkeit und Duktilität eines Betons [28]. Da mit zunehmender Festigkeit des Betons in der Regel auch die übrigen Materialeigenschaften günstig beeinflusst werden, hat sich zur Bezeichnung eines hochfesten Betons der Begriff des *High Performance Concrete* (HPC, dt.: Hochleistungsbeton) in Abgrenzung zum *Ordinary Performance Concrete* (OPC, dt.: Normalleistungsbeton) bzw. normalfesten Beton etabliert [53, 109].

Bezugnehmend auf die oben beschriebenen leistungsfähigkeits- bzw. festigkeitsmindernden Einflüsse des OPC, liegt der grundlegende werkstofftechnische Ansatz zur Erzielung optimierter Betoneigenschaften in der Verdichtung und Homogenisierung des Materialgefüges, welche im Wesentlichen durch die Verwendung niedriger Wasserzementwerte und die Zugabe von reaktiven Feinststoffen, wie Quarzmehl und Silikastaub, erreicht werden kann. Hierbei führt der niedrige Wasserzementwerte ($w/z \leq 0,35$) infolge der unvollständigen Hydratation zu einer Minimierung des ungebundenen Wassers innerhalb der Zementmatrix und damit zur Reduzierung des Kapillarporenanteils. Weiterhin bewirken die reaktiven Feinststoffe eine Mikroverdichtung des Betons, indem diese die Poren zwischen den sehr viel größeren Zementkörnern auffüllen. Zudem wird hierdurch die Verbundzone positiv beeinflusst, indem der erhöhte Calcium- und Etringitgehalt in diesem Bereich unter anderem durch eine puzzolanische Sekundärreaktion deutlich gesenkt wird (siehe Abbildung 5.1b)). Durch das sehr dichte Materialgefüge und die optimierte Verbundzone erreicht man somit einen zunehmend defektfreien und homogenen Beton, dessen Druckfestigkeit Werte weit über den üblichen 50 MPa eines OPC erreicht. Um dabei die Verarbeitbarkeit und Fließfähigkeit zu gewährleisten, werden zudem geeignete Fließmittel eingesetzt.

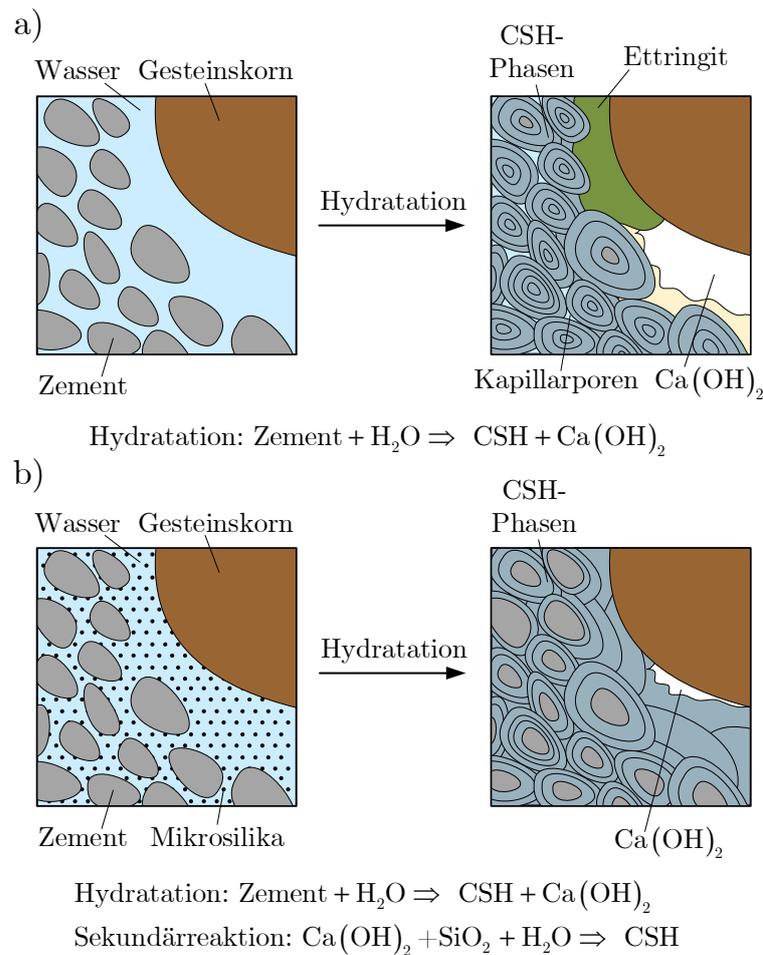


Abbildung 5.1: Hydratation eines a) normalfesten Betons und b) hochfesten Betons nach [109].

Mit zunehmendem betontechnologischem Fortschritt konnten in den letzten Jahren Hochleistungsbetone mit einer Druckfestigkeit von über 150 MPa entwickelt werden [65]. Um diese von den bereits genormten hochfesten Betonen (HPC) der Festigkeitsklasse C55/67 bis C100/115 abzugrenzen, wurde hierzu der Begriff der ultrahochfesten Betone eingeführt, welche auch als *Ultra-High Performance Concretes* (UHPC, dt.: Ultrahochleistungsbetone) bezeichnet werden. Für eine derart hohe Druckfestigkeit erhält man einen sehr homogenen und dichtgepackten Beton mit einem sprödem Materialverhalten. Dabei kann der ultrahochfeste Beton bei Erreichen der Druckfestigkeit schlagartig und ohne Vorankündigung versagen. Um diesem Materialverhalten entgegenzuwirken und zur Verbesserung des Nachrissverhaltens, werden dem ultrahochfesten Beton üblicherweise Stahlfasern zugegeben. Insbesondere dienen die Fasern dabei der Übertragung von Zugkräften über die Rissflanken nach dem Überschreiten der Matrixzugfestigkeit. Somit wirken sich die Fasern günstig auf das Mikrorissverhalten des UHPC aus, indem die Rissbreiten verkleinert werden und eine gleichmäßigere Verteilung der Risse über das Betongefüge erzielt wird [126, 127].

In der Literatur wird faserverstärkter UHPC häufig als *Ultra-High Performance Fibre Reinforced Concrete* (UHPRFC, dt.: ultrahochfester faserverstärkter Beton) bezeichnet. Zusätzlich lässt sich eine Unterteilung des UHPC in Grobkorn- bzw. Feinkorn-UHPC machen. Für einen Grobkorn-UHPC werden in der Regel Gesteinskörnungen hoher Festigkeit, wie Basalt oder Quarz, mit einer Größtkornabmessung zwischen 1 mm und 16 mm verwendet. UHPC-Rezepturen mit einer maximalen Korngröße von unter 1 mm werden dabei üblicherweise zur Herstellung eines Feinkorn-UHPC verwendet. Generell führt die sukzessive Steigerung der Festigkeit eines Betons auch zu einer Änderung im linear- und nichtlinear-elastischen Verhalten. Die Abbildung 5.2 zeigt qualitativ die Spannungs-Dehnungskurven eines OPC, HPC und UHPC. Es wird hierbei deutlich, dass mit zunehmender Druckfestigkeit der ausgeprägte nichtlineare Bereich eines OPC ab ca. 50% der Druckfestigkeit für den HPC und UHPC deutlich verkleinert ist und erst bei einem hohen Spannungsniveau auftritt. Die Minimierung des nichtlinear-elastischen bzw. plastischen Materialverhaltens hin zu einem nahezu ideal linear-elastischen Verhalten liegt dabei insbesondere in der optimierten ITZ begründet. Gerade diese Unterschiede im Materialverhalten, in der Gefügestruktur und bei der Schädigungsentwicklung sollen im nachfolgenden experimentellen Teil dieser Arbeit zur Beurteilung der Ergebnisse der Ultraschalluntersuchung herangezogen und diskutiert werden.

Für die nachfolgenden experimentellen Versuche werden dabei drei ausgewählte Betonsorten verwendet und geprüft: Ein HPC, ein Feinkorn-UHPC sowie ein stahlfaserverstärkter Feinkorn-UHPC (UHPRFC). Die zugehörigen Betonrezepturen sind dabei in den Tabellen 5.1-5.3 aufgeführt.

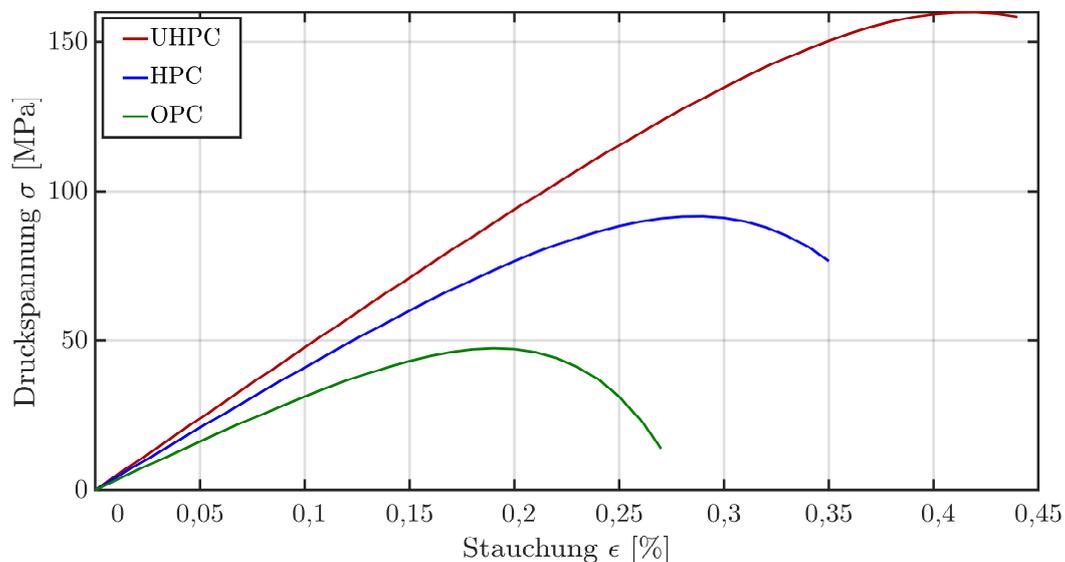


Abbildung 5.2: Spannungs-Dehnungs-Kurve für einen OPC, HPC und UHPC.

Tabelle 5.1: Zusammensetzung des hochfesten Betons (HPC-Mischung).

Zement (52,5 R)	505,00 [kg/m ³]
Fließmittel	2,00 [kg/m ³]
Wasser	184,70 [kg/m ³]
Sand (0/2)	413,40 [kg/m ³]
Kies (2/8)	715,90 [kg/m ³]
Kies (8/16)	498,30 [kg/m ³]
w/z-Wert ¹⁾	0,37

¹⁾ unter Berücksichtigung des Fließmittels**Tabelle 5.2:** Zusammensetzung des ultrahochfesten Betons (UHPC-Mischung).

Zement (52,5 R)	790,55 [kg/m ³]
Fließmittel	22,76 [kg/m ³]
Wasser	186,13 [kg/m ³]
Quarzsand (0,125/0,5)	982,24 [kg/m ³]
Silikastaub	167,62 [kg/m ³]
Feinquarz (0/0,125)	200,70 [kg/m ³]
w/z-Wert ¹⁾	0,26

¹⁾ unter Berücksichtigung des Fließmittels**Tabelle 5.3:** Zusammensetzung des stahlfaserverstärkten ultrahochfesten Betons (UHPFRC-Mischung).

Zement (52,5 R)	765,67 [kg/m ³]
Fließmittel	26,22 [kg/m ³]
Wasser	194,73 [kg/m ³]
Quarzsand (0,125/0,5)	950,67 [kg/m ³]
Silikastaub	160,79 [kg/m ³]
Feinquarz (0/0,125)	194,62 [kg/m ³]
Stahlfasern (10/0,175 ¹⁾)	196,25 [kg/m ³]
w/z-Wert ²⁾	0,28

¹⁾ Fasergehalt: 2,5 [Vol.-%]²⁾ unter Berücksichtigung des Fließmittels

5.2 Messtechnik und Aufbau

In der Abbildung 5.3 ist der für die nachfolgend durchgeführten Ultraschallexperimente maßgebende Ultraschallmessaufbau dargestellt. Das Kernstück bildet dabei das Ultraschallmesssystem RAM-5000 SNAP der Firma Ritec. Dieses wurde speziell für die Analyse und Messung kleinster Änderungen im Empfangssignal entwickelt. Auf der Senderseite verfügt dieses Gerät über Hochleistungs-Torschaltverstärker (Gated-Amplifier), welche ein Hochfrequenzsignal (HF-Signal) hoher Amplitude (bis zu 1700 V) mit sehr geringer nichtlinearer Verzerrung (elektrische Oberschwingungen) erzeugen. Diese Eigenschaft ist insbesondere für die nichtlineare Ultraschalltechnik unabdingbar, da zur Visualisierung der sehr kleinen höherharmonischen Anteile (materielle Nichtlinearität) eine hohe Wellenamplitude (Fundamentalamplitude) notwendig ist, welche zudem mit Blick auf eine zuverlässige Ultraschallmessung nicht durch höherharmonische Anteile aus dem elektronischen Stromkreislauf überlagert sein sollte.

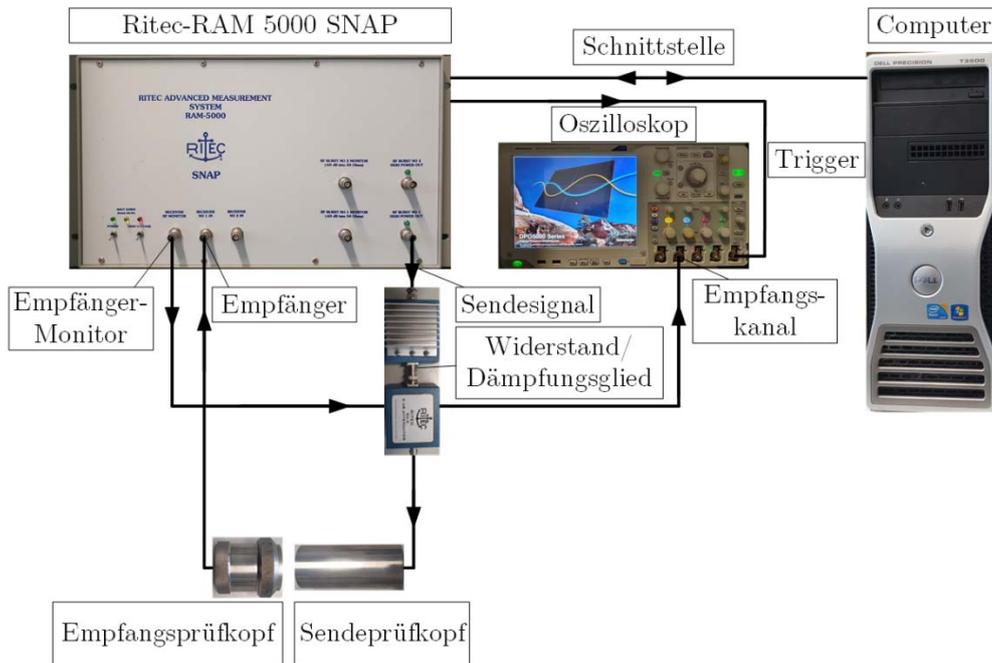


Abbildung 5.3: Schematische Darstellung des Ultraschallmessaufbaus.

Auf der Empfängerseite ist das RAM-5000-SNAP System überdies mit einem phasensensitiven Überlagerungsempfänger ausgestattet. Hiermit lässt sich das Frequenzspektrum des Empfangssignals mit hoher Auflösung analog erzeugen. Weiterhin ist über die interne Phasenauswertung des Signals die Messung sehr kleiner Laufzeitänderungen im Signal möglich. Die benutzerdefinierten Einstellungen werden über eine PC-Schnittstelle unter Verwendung der integrierten Systemsoftware vorgenommen. Hiermit lassen sich auf der Senderseite die Signalfrequenz, die Signaldauer und die Signalamplitude vorgeben. Auf Empfängerseite bietet die Software unterschiedliche Einstellungen zur Steuerung der integrierten Hochpass- und Tiefpassfilter des Systems. Weiterhin kann hier der Bereich des auszuwertenden Signals angegeben werden. Zur Visualisierung der Zeitsignale auf der Sender- und Empfängerseite ist das Ultraschallmesssystem mit einem digitalen Oszilloskop der Firma Tektronix (DPO 5034) ausgestattet. Zur Umwandlung der elektronischen Signale in mechanische Wellen bzw. zum Senden der Ultraschallsignale werden größtenteils schmalbandige Niederfrequenz-Longitudinalwellenprüfköpfe der Firma General-Electrics mit einer Mittenfrequenz von ca. 200 kHz verwendet (siehe Abbildung 5.4, links). Auf der Empfängerseite werden für die meisten Versuche breitbandige Niederfrequenzprüfköpfe der Firma General Electric mit einer Mittenfrequenz von ca. 500 kHz eingesetzt (siehe Abbildung 5.4, mittig). Zusätzlich werden Niederfrequenz-Transversalwellenprüfköpfe mit einer Mittenfrequenz von ca. 400 kHz verwendet (siehe Abbildung 5.4, rechts). Da sich in Vorversuchen ein

zunehmend nichtlineares Verhalten der Prüfköpfe bei zu hohen Eingangsspannungen zeigte, wurde der Spitze-Tal-Wert der Eingangsspannung mit ca. 500 V so gewählt, dass man auf der einen Seite eine ausreichend hohe Signalamplitude für die nichtlineare Ultraschallprüfung erzielte, aber gleichzeitig nicht in den unerwünschten nichtlinearen Bereich der Prüfköpfe selbst gelangte. Zur Ankopplung der Longitudinalwellen-Prüfköpfe wurde in den nachfolgenden Experimenten aufgrund der rauen Betonoberfläche technische Vaseline verwendet und im Fall der Transversalwellen-Prüfköpfe zur Übertragung der Scherwellen kristallisierte Honig (aufgekocht) eingesetzt. Weiterhin wurden für den Großteil der experimentellen Versuche die Proben im Durchschallungsmodus („Zwei-Kopf-Betrieb“) getestet. Lediglich zur Bestimmung der longitudinalen und transversalen Wellengeschwindigkeiten in UHPC/UHPFRC wurde eine Prüfung im Impuls-Echo-Modus durchgeführt. Zur Fixierung der Ultraschall-Prüfköpfe während der Versuche wurden Halterungen aus Holz bzw. Schraubzwingen eingesetzt.



Abbildung 5.4: Verwendete Niederfrequenz-Ultraschallprüfköpfe.

5.3 Ultraschalluntersuchungen zur Faserorientierung in stahlbewehrtem ultrahochfestem Beton

Stahlfasern erhöhen nicht nur die Duktilität des UHPFRC, sondern ermöglichen dem Beton auch die Übertragung von Zugspannungen über die Rissflanken. Hiermit lässt sich insbesondere das Nachrisszugverhalten [126, 127] verbessern und eine deutliche Erhöhung der Tragfähigkeit von UHPFRC-Bauteilen unter Biege-, Schub- und/oder Torsionsbelastungen erzielen [65]. Um von diesen positiven Effekten und Eigenschaften in der Tragwerksplanung zu profitieren, ist die Kenntnis der genauen Faserverteilung und -orientierung innerhalb eines Bauteils erforderlich und von entscheidender Bedeutung [144, 223].

Derzeit stehen verschiedene zerstörungsfreie Prüfmethode zur Beurteilung der Faser-
verteilung bzw. Faserorientierung zur Verfügung, z. B., die Computertomographie, die
Impedanzspektroskopie, die Mikrowellenmethode und die elektromagnetische Indukti-
ionsmethode [215, 222]. Die Anwendung dieser Methoden ist jedoch technologischen
Grenzen unterworfen und sie werden üblicherweise im Labormaßstab und für kleine
Probengrößen durchgeführt. Daneben hat sich als zerstörende Prüfmethode in diesem
Feld die optoanalytische bzw. fotooptische Methode etabliert.

In dieser Studie wird eine neuartige lineare Ultraschallmethode zur Bestimmung der
Hauptorientierung der Stahlfasern im UHPFRC erprobt. Hierzu werden im Impuls-
Echo-Modus die Wellengeschwindigkeitsänderungen polarisierter Ultraschall-Transver-
salwellen unter Prüfkopfrotation ermittelt. Hieraus ergibt sich ein charakteristischer
Verlauf der Wellengeschwindigkeitsänderung in Abhängigkeit des zugehörigen Rotati-
onswinkels, welcher als Ausgangspunkt zur Bestimmung der Hauptorientierung der Fa-
sern in den UHPFRC-Proben dient. Um die mittels der Ultraschalltechnik vorherge-
sagten Hauptorientierung der Fasern mit der tatsächlichen Ausrichtung der Fasern im
UHPFRC zu vergleichen, wurden die Proben anschließend mittels der optoanalytischen
Methode hinsichtlich der Faserverteilung und -orientierung untersucht [8].

Ultraschallprüfungen von UHPC wurden bisher nur gelegentlich durchgeführt. Es
wurde bereits festgestellt, dass UHPC aufgrund seiner dichten Mikrostruktur und ver-
gleichsweise hohen Homogenität besonders für hochauflösende Ultraschallprüfungen ge-
eignet ist [221]. Insbesondere wurde gezeigt, dass der durch die Ultraschallmessung
bestimmte dynamische Elastizitätsmodul außerdem gut mit dem aus den einachsigen
Druckprüfungen erhaltenen statischen Elastizitätsmodul übereinstimmt. Für Feinkorn-
UHPC können überdies hohe Prüffrequenzen im Bereich von 1 MHz verwendet werden,
da die maximale Korngröße im Bereich von ca. 1 mm immer noch deutlich unter der
zugehörigen Wellenlänge liegt, was wiederum zu einer höheren Auflösung der Beton-
struktur führt. Für den UHPFRC kann ein ähnlicher Frequenzbereich verwendet wer-
den, da die Fasern hier keinen wesentlichen Einfluss auf das Signal-Rausch-Verhältnis
haben.

Eine faserinduzierte Anisotropie wurde bereits bei den UHPFRC-Proben unter stati-
scher Druckbelastung beobachtet [47]. Dort wurden verschiedene Ansätze unter Be-
rücksichtigung der transversalen Isotropie angewendet, die je nach Belastungsrichtung
eine Variation der elastischen Parameter zwischen 5 und 10% vorhersagen. In [144]
wurden direkte Zugversuche an UHPFRC-Proben mit unterschiedlichen Faserorientie-
rungen durchgeführt. In dieser Studie variierte der Elastizitätsmodul ebenfalls im Be-
reich zwischen 5 bis 10% abhängig von der jeweiligen Faserorientierung.

Der Betrag der Änderung bzw. Variation legt nahe, dass die Anisotropie der elastischen Parameter auch durch die Ultraschallmessungen unter der Verwendung elastischer Wellen erfasst werden kann. Die Herausforderung besteht jedoch darin, die infolge des geringen Faservolumenanteils (hier: 2,5 Vol.-%) ebenfalls kleinen Änderungen in den akustischen Parametern, wie der Wellengeschwindigkeit, messtechnisch zu erfassen. Da eine absolute Messung der akustischen Parameter und deren anschließender Vergleich häufig durch die erreichbare Messgenauigkeit begrenzt ist, wurde in dieser Studie eine relative Ultraschallmessung durchgeführt, um die zu erwartenden geringen Wellengeschwindigkeitsänderungen zu bestimmen. Wie oben bereits erwähnt, wurde hierzu eine Ultraschallmethode auf der Basis von polarisierten Transversalwellen eingesetzt.

Die Verwendung von Transversalwellen für die Ultraschallprüfung ist eine etablierte Methode zur Bestimmung der Materialanisotropie, die durch die Struktur selbst oder durch die gerichteten Schädigungseffekte verursacht wird. Ähnliche Methoden, die auf dem Prinzip der Scherwellen-Doppelbrechung beruhen, wurden kürzlich auf faserverstärkte Kunststoffe [170, 194] und auf anisotrope Materialien wie Holz [182] angewendet. Im Allgemeinen ist der „Anisotropiegrad“ bei dieser Art von Materialien im Vergleich zu faserverstärktem Beton viel größer. Die Studien [170, 194] zeigen jedoch, dass mit dieser Methode auch geringe Änderungen im Materialverhalten detektierbar sind. Um vorab die Größenordnung der zu erwartenden richtungsabhängigen Wellengeschwindigkeitsänderungen im UHPFRC zu bestimmen, soll im Folgenden eine analytische Untersuchung des faserverstärkten UHPC-Festkörpers (siehe Abbildung 5.5) unter der Verwendung der Gleichungen aus [12] durchgeführt werden.

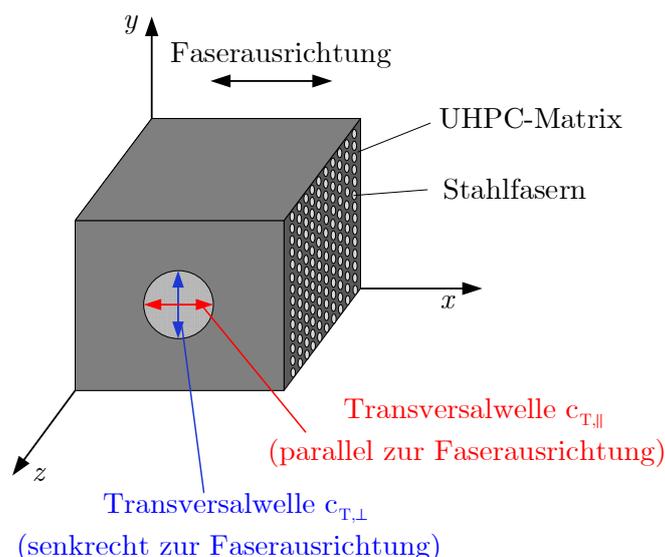


Abbildung 5.5: Transversalwellenausbreitung in einem als transversal isotropen Festkörper betrachteten faserverstärkten UHPC.

Hierfür wird die Faserausrichtung innerhalb der UHPC-Zementmatrix als eindimensional betrachtet und somit eine transversale Isotropie mit Vorzugsrichtung angenommen (siehe Abbildung 5.5). Setzt man zusätzlich voraus, dass der faserverstärkte Beton nur aus den beiden Materialien Stahl und UHPC zusammengesetzt ist und andere Bestandteile in guter Näherung vernachlässigt werden können, so ergibt sich nach [12] der Gleitmodul G_{\parallel} für eine Partikelbewegung parallel zur Vorzugsrichtung bzw. Faserausrichtung zu

$$G_{\parallel} = \frac{G_{\text{St}}G_{\text{B}} \left[v_{\text{St}} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{G_{\text{B}}}{G_{\text{St}}} \right) v_{\text{B}} \right]}{v_{\text{St}}G_{\text{B}} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{G_{\text{B}}}{G_{\text{St}}} \right) v_{\text{B}}G_{\text{St}}} \quad (5.1)$$

und der Gleitmodul G_{\perp} für eine Partikelbewegung senkrecht zur Faserausrichtung zu

$$G_{\perp} = \frac{G_{\text{St}}G_{\text{B}} \left[v_{\text{St}} + \frac{3 - 4v_{\text{B}} + G_{\text{B}}/G_{\text{St}}}{4(1 - v_{\text{B}})} v_{\text{B}} \right]}{v_{\text{St}}G_{\text{B}} + \frac{3 - 4v_{\text{B}} + G_{\text{B}}/G_{\text{St}}}{4(1 - v_{\text{B}})} v_{\text{B}}G_{\text{St}}} \quad (5.2)$$

Hierbei werden für Stahl und Beton die Gleitmoduln G_{St} und G_{B} sowie die Volumenanteile v_{St} und v_{B} verwendet. Weiterhin kann die resultierende Gesamtmasendichte ρ_{ges} des faserverstärkten UHPC über

$$\rho_{\text{ges}} = \rho_{\text{St}}v_{\text{St}} + \rho_{\text{B}}v_{\text{B}} \quad (5.3)$$

bestimmt werden. Damit ist die Wellengeschwindigkeit für eine Transversalwelle mit Ausbreitung in y - bzw. z -Richtung und Partikelbewegung in x -Richtung parallel zur Faserausrichtung über

$$c_{\text{T},\parallel} = \sqrt{\frac{G_{\parallel}}{\rho_{\text{ges}}}} \quad (5.4)$$

und die Wellengeschwindigkeit für eine Transversalwelle mit Ausbreitung in x -, y - oder z -Richtung und Partikelbewegung senkrecht zur Faserausrichtung über

$$c_{\text{T},\perp} = \sqrt{\frac{G_{\perp}}{\rho_{\text{ges}}}} \quad (5.5)$$

definiert. Für ein konkretes Zahlenbeispiel sollen die Massendichten von Stahl und UHPC mit $\rho_{\text{St}} = 7850 \text{ kg/m}^3$ und $\rho_{\text{B}} = 2350 \text{ kg/m}^3$ gewählt werden und die

Gleitmoduln beider Materialien mit $G_{\text{St}} = 80 \text{ GPa}$ und $G_{\text{B}} = 20 \text{ GPa}$ definiert sein. In Bezug auf die üblichen Faservolumenanteile in UHPFRC werden die Volumenanteile beider Materialien als $v_{\text{St}} = 0,025$ und $v_{\text{B}} = 0,975$ gewählt. Dies bedeutet, dass der Volumenanteil des Stahls am Gesamtvolumen mit 2,5% angenommen wird. Für diese Wahl der Materialeigenschaften ergeben sich unter Verwendung der Gleichungen (5.1)-(5.5) folgende Werte für die beiden Transversalwellengeschwindigkeiten

$$\begin{aligned} c_{\text{T},\parallel} &\approx 2878 \text{ m/s}, \\ c_{\text{T},\perp} &\approx 2831 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Die Geschwindigkeit einer Transversalwelle mit einer Partikelbewegung parallel zur Faserausrichtung ergibt daher einen um +1,7% höheren Absolutwert als die entsprechende Geschwindigkeit einer Transversalwelle mit einer Partikelbewegung senkrecht zur Faser. Dies gibt eine gute Abschätzung der bei den Ultraschallexperimenten an UHPFRC-Proben zu erwartenden Geschwindigkeitsänderungen.

5.3.1 Probenherstellung und Versuchsdurchführung

Um eine ausgeprägte Faserausrichtung in den UHPFRC-Proben zu erzeugen, wurden dünne Platten in unterschiedlicher Anordnung (3 x stehend/ 1 x liegend) sowie mit unterschiedlichen Einfüllmethoden hergestellt. Bereits in den früheren experimentellen Untersuchungen konnte der Einfluss der Einfüllmethode auf das Fließverhalten des Frischbetons und damit auf die Verteilung und Orientierung der Fasern innerhalb der Probe nachgewiesen werden [144, 234].

Für die Studie in dieser Arbeit wurde ein Feinkorn-UHPFRC entsprechend der Betonrezeptur aus der

Tabelle 5.3 verwendet. Die hergestellten Platten waren etwa 450 mm hoch, 1200 mm lang und 40 mm tief. Der Beton wurde von einer Seite eingefüllt. Die Form der 3 vertikal befüllten Platten war an ihrem Ende, an dem der Beton in die Form eingefüllt wurde, um einen Winkel von 63° geneigt, um eine gleichmäßige Fließgeschwindigkeit zu gewährleisten (siehe Abbildung 5.6a)). Die Form der horizontal eingefüllten liegenden Platte war gegenüber der Horizontalen um einen Winkel von ca. 4° geneigt (siehe Abbildung 5.6b)). Unter Verwendung eines Trichters betrug die Einfüllzeit pro Platte ungefähr 7 Minuten. Die mittlere Würfeldruckfestigkeit $f_{\text{ck,Würfel}}$ (Würfel mit einer Kantenlänge 100 mm) betrug 106 MPa, 136 MPa und 165 MPa, gemessen 2, 7 bzw. 28 Tage nach dem Einfüllen.

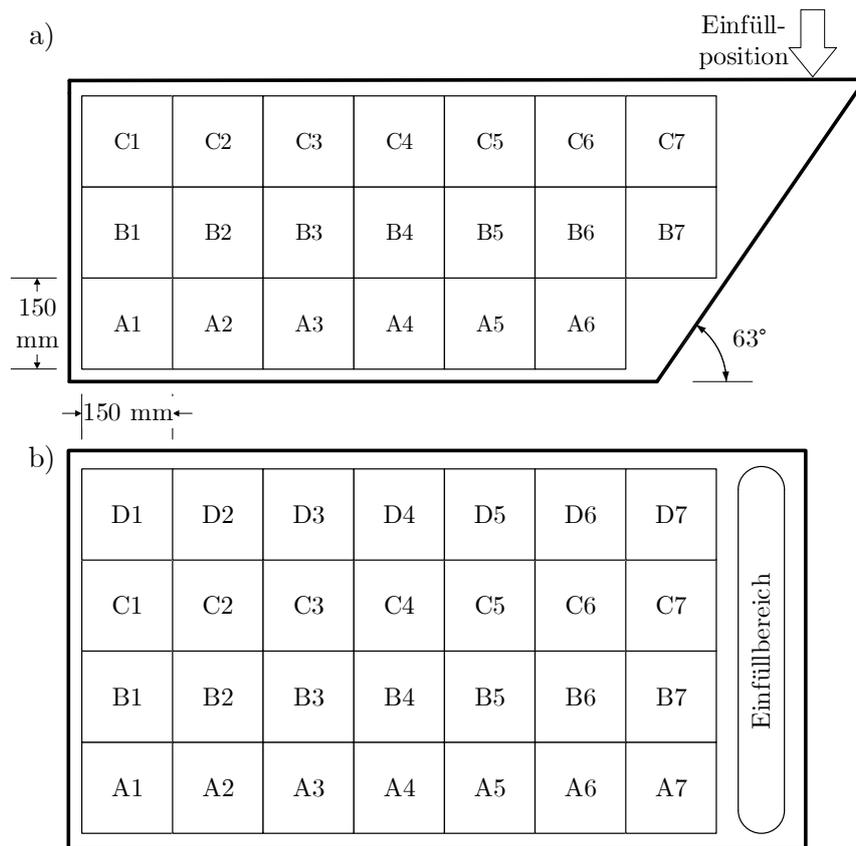


Abbildung 5.6: a) Vorderansicht der vertikal gefüllten Platten, b) Draufsicht der horizontal gefüllten Platte.

Nach dem Aushärten wurden die Platten zur Ultraschallprüfung in quadratische Probekörper mit einer Seitenlänge von 150 mm zersägt. Die Einzelproben wurden dabei gemäß der Abbildung 5.6 nummeriert.

Ultraschall-Transversalwellenprüfung

Für die Ultraschallversuche wurde ein niederfrequenter Transversalwellenprüfkopf im Impuls-Echo-Modus eingesetzt. Das verwendete sinusförmige Ultraschallsignal hatte dabei eine Frequenz von 400 kHz und eine Schwingdauer von 4 Zyklen. Die Geschwindigkeiten der Transversalwellen wurde direkt über das Ritec-RAM 5000-SNAP-Messsystem unter Verwendung der Phasendifferenzmessung (siehe Abschnitt 3.2.3.2) bestimmt. Der grundlegende Versuchsaufbau zu diesem Ultraschall-Experiment ist in der Abbildung 5.7 dargestellt.

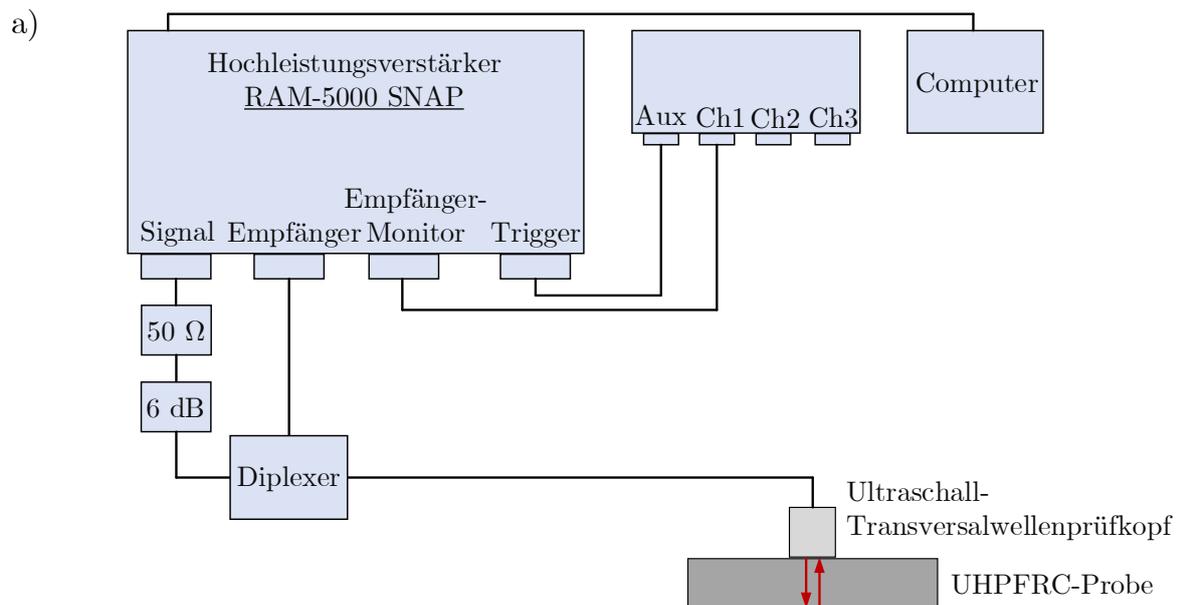


Abbildung 5.7: Versuchsaufbau zur Transversalwellen-Prüfung im Impuls-Echo-Modus: a) Schematische Darstellung, b) Reales Experiment.

Im Folgenden wurden die transversalen Wellengeschwindigkeiten c_T für unterschiedliche Prüfkopfstellungen θ (Rotationswinkel) gemessen. Dabei wurde der Transversalwellenprüfkopf, ausgehend von der vorher festgelegten Anfangsposition ($\theta = 0^\circ$), in 15° -Schritten um die eigene Achse gedreht und die zugehörigen relativen Änderungen der Wellengeschwindigkeit in Bezug auf die Startposition aufgezeichnet (siehe Abbildung 5.8).

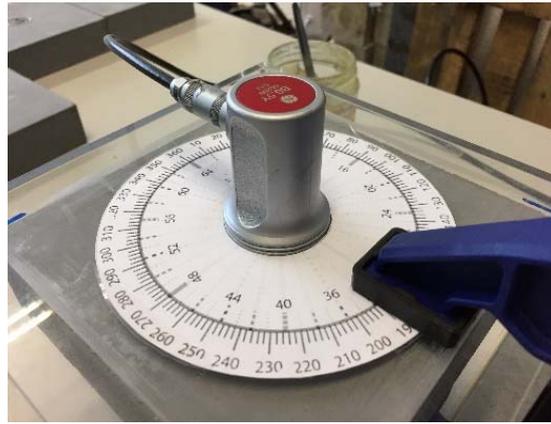


Abbildung 5.8: Ultraschallmessung mit einem Transversalwellenprüfkopf und einer Plexiglasscheibe mit Messskala.

Schließlich führt diese Ultraschallmessung zu einem Diagramm, welches beispielhaft in der Abbildung 5.9 dargestellt ist. Hier ist die prozentuale Änderung der Transversalwellengeschwindigkeit c_T als Funktion des Rotationswinkels θ angegeben. Dabei wurde die relative Änderung der Wellengeschwindigkeit Δc_T auf den Absolutwert der Wellengeschwindigkeit $c_{T,0}$ in der Anfangsposition $\theta = 0$ bezogen.

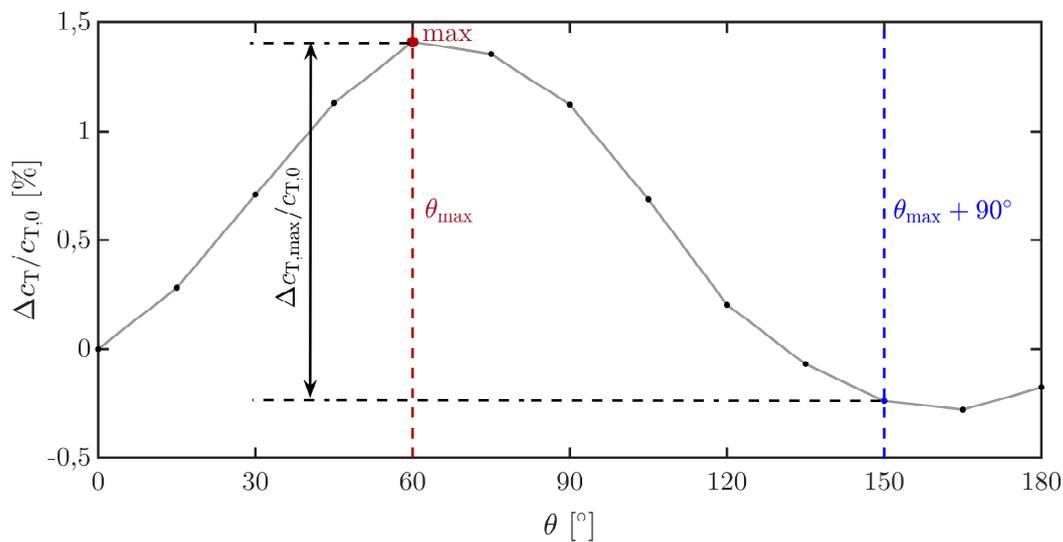


Abbildung 5.9: Prozentuale Änderung der transversalen Wellengeschwindigkeit c_T als Funktion des Rotationswinkels θ .

Anhand dieses Diagramms wurden für jede Probe die maximale Wellengeschwindigkeitsänderung $\Delta c_{T,\max} / c_{T,0}$ und der zugehörige Rotationswinkel θ_{\max} ermittelt. Letztere beschreibt dabei die prognostizierte Hauptfaserorientierung am betrachteten Punkt der jeweiligen Probe. Anschließend wurde die Wellengeschwindigkeitsänderung in der Prüfkopfstellung senkrecht zur Position der maximalen Wellengeschwindigkeitsände-

zung bestimmt ($\theta_{90^\circ} = \theta_{\max} + 90^\circ$) und auf den entsprechenden Maximalwert bezogen. So kann der Anstieg der Transversalwellengeschwindigkeit von der Prüfkopfstellung in Faserrichtung (θ_{\max}) zur Stellung senkrecht der Faserrichtung (θ_{90°) in geeigneter Weise wiedergegeben werden.

Optoanalytische Prüfmethode

Im Anschluss an die Ultraschallprüfung wurden einige Proben mit besonders großen Unterschieden in den relativen Wellengeschwindigkeitsänderungen für die anschließende optische Analyse der Faserorientierung ausgewählt. Ziel war es, die Ergebnisse der zerstörungsfreien Ultraschallmessung mittels einer etablierten Prüfmethode zur Bewertung der Faserverteilung und -orientierung zu validieren. Wie bereits in [87, 92, 140, 183, 215] beschrieben, hat sich die optoanalytische Methode als ein hierfür geeignetes Werkzeug erwiesen.

Die quadratischen Ausgangsproben (150x150 mm) wurden parallel und senkrecht zum Rotationswinkel θ_{\max} , welcher durch die bereits durchgeführten Ultraschalluntersuchungen vorhergesagt wurde, gesägt, um damit die tatsächliche Faserausrichtung optisch zu überprüfen (siehe Abbildung 5.10).

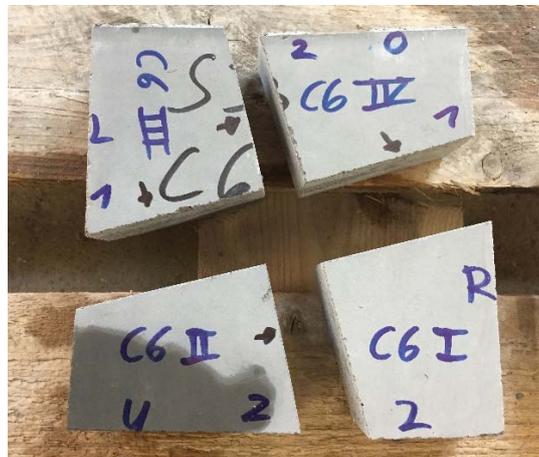
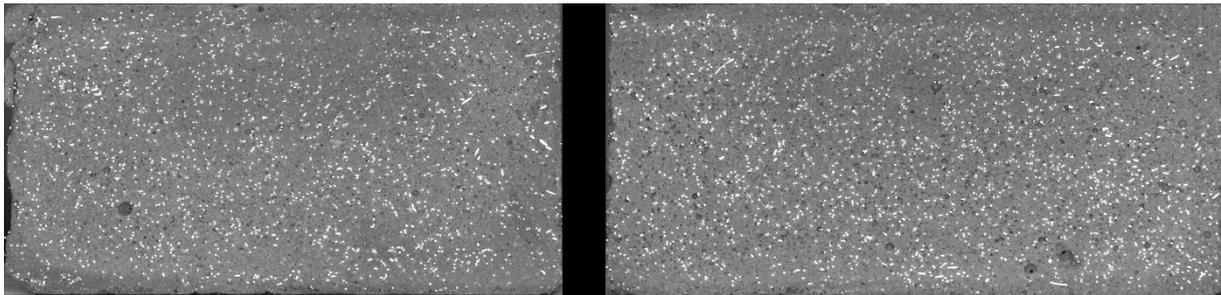


Abbildung 5.10: Senkrecht und parallel zur Hauptfaserausrichtung θ_{\max} gesägte UHPFRC-Probe.

Durch das Sägen wurden die Stahlfasern an der Schnittfläche aufgeschmolzen und zeigten deformierte Formen. Daher wurden die Schnittflächen zusätzlich poliert, um die reale Form der Faserquerschnitte wiederherzustellen. Nach dem Polieren wurden die Querschnitte fotografiert und mit der Auswertungs-Software FiDiOr [215] analysiert. Die Abbildung 5.11 zeigt hierzu für eine ausgewählte UHPFRC-Probe die polierten Querschnittsflächen senkrecht und parallel zur prognostizierten Hauptfaserorientierung.

Aus dem Kontrast zwischen dem dunklen Beton und dem hellen Stahl ermittelt FiDiOr über die Grauwertanalyse die elliptischen Formen der geschnittenen Fasern. Dies liefert die Anzahl, die individuellen Koordinaten, die lange und kurze Hauptachse und die Querschnittsfläche der Ellipsen (Fasern). Mit diesen Daten kann die Neigung der Ellipsen-Hauptachse gegen die Achse der Querschnittsebene sowie deren Neigung α außerhalb der Ebene berechnet werden.

a)



b)

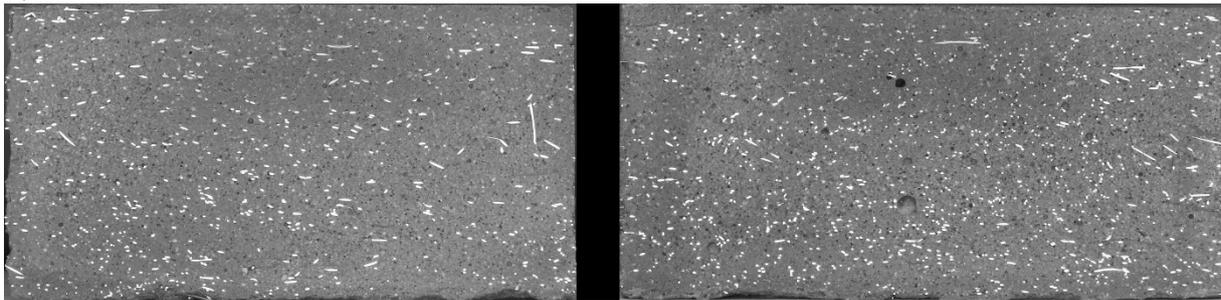


Abbildung 5.11: Fotos eines polierten UHPFRC-Probenschnittes: a) Senkrecht zur Hauptfaserorientierung θ_{\max} , und b) parallel zur Hauptfaserorientierung θ_{\max} .

Die Abbildung 5.12 zeigt dazu den grundlegenden Zusammenhang und die Notationen für eine geneigte Faser in der Schnittebene.

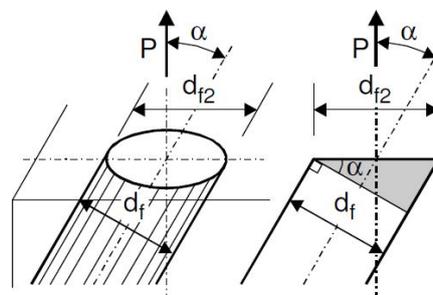


Abbildung 5.12: Geneigte Faser in der Schnittebene [140].

Für eine einzelne Faser kann der zugehörige Faserorientierungsbeiwert wie folgt berechnet werden:

$$\eta_{f,i} = \cos \alpha = \frac{d_f}{d_{f2,i}}. \quad (5.7)$$

Hierbei bezeichnen d_f und $d_{f2,i}$ die kurze (Faserdurchmesser) und die lange Hauptachse der elliptischen Querschnittsfläche der Faser i . Nach der Auswertung der einzelnen Fasern im Schnittbild kann der gemittelte Faserorientierungsbeiwert η_S des Gesamtquerschnittes wie folgt bestimmt werden [87, 92, 140, 183, 215]:

$$\eta_S = \frac{1}{N_f} \cdot \sum_{i=1}^{N_f} \eta_{f,i}, \quad (5.8)$$

mit der Faseranzahl N_f im Gesamtquerschnitt. Um jedoch die Faserorientierung auf das zugehörige Gesamtvolumen zu beziehen, wird in der Regel der folgende volumetrische Faserorientierungsbeiwert

$$\eta_V = \frac{N_f}{\sum_{i=1}^{N_f} \frac{1}{\eta_{f,i}}} \quad (5.9)$$

verwendet [87]. Unter der Verwendung des volumetrischen Faserorientierungsbeiwertes η_V und der Gesamtquerschnittsfläche des Betons A_c kann anschließend der Fasergehalt ρ_f (Faservolumenanteil) bestimmt werden [87, 92, 215] als

$$\rho_f = \frac{N_f \cdot \pi \cdot d_f^2}{4 \cdot A_c \cdot \eta_V}. \quad (5.10)$$

5.3.2 Ergebnisse und Diskussionen

Die Ergebnisse der Ultraschallprüfung und der optoanalytischen Untersuchung sind in der Tabelle 5.4 zusammengefasst. Die Versuchsdaten sind in 4 Gruppen unterteilt, die den 4 UHPFRC-Platten entsprechen und aus denen die Probekörper nach der Abbildung 5.6 entnommen wurden. Die Platten 1, 3 und 4 wurden dabei vertikal eingefüllt und Platte 2 wurde horizontal eingefüllt. Wie oben bereits erwähnt, wurde die optoanalytische Auswertung in zwei senkrecht zueinander liegenden Schnitten durchgeführt. Für eine eindeutige Unterscheidung wird der Querschnitt senkrecht zur vorhergesagten Hauptfaserorientierung durch den Index „max“ gekennzeichnet, während der Querschnitt parallel dazu durch den Index „90°“ markiert ist.

Tabelle 5.4: Volumetrischer Faserorientierungsbeiwert, ermittelter Fasergehalt, Faseranzahl und prozentuale Änderung der Wellengeschwindigkeit für die ausgewählten Proben, entnommen aus den Platten 1 bis 4.

Nr.	$\eta_{V,\max}$ [-]	$\eta_{V,90^\circ}$ [-]	ρ_{\max} [%]	ρ_{90° [%]	N_{\max} [-]	N_{90° [-]	$\Delta c_{T,\max}/c_{T,0}$ [%]
1_A1	0,738	0,466	2,604	2,388	4289	2484	1,948
1_A6	0,709	0,475	2,502	2,534	3712	2536	1,633
1_B2	0,752	0,433	2,159	1,864	3734	1835	1,416
1_B3	0,736	0,395	2,374	1,917	4088	1772	1,658
1_C1	0,802	0,363	2,069	1,840	3281	1208	1,647
1_C4	0,699	0,513	1,969	1,906	2685	1817	1,244
1_C7	0,764	0,513	2,074	1,737	3063	1620	1,562
2_A1	0,746	0,497	2,363	2,006	3179	1784	0,709
2_A4	0,815	0,380	2,267	2,116	3321	1447	0,697
2_A6	0,796	0,393	2,262	1,873	3125	1287	0,849
2_B1	0,746	0,439	2,236	2,017	2847	1513	0,678
2_C4	0,776	0,412	2,382	2,056	3182	1466	0,862
3_A1	0,717	0,474	2,774	2,801	4376	2991	1,253
3_A3	0,712	0,454	2,573	2,476	4009	2491	1,603
3_A6	0,601	0,620	2,217	2,370	2920	3203	1,443
3_B1	0,764	0,439	2,290	2,228	3493	1976	1,585
3_B7	0,709	0,407	2,347	2,137	3528	1821	1,167
3_C6	0,681	0,517	2,198	1,867	2956	1794	1,144
4_A1	0,743	0,492	2,430	2,277	4000	2540	1,102
4_A2	0,754	0,436	2,611	2,112	4529	2109	0,992
4_A4	0,752	0,418	2,268	1,944	4066	1950	0,905
4_A6	0,748	0,425	2,325	2,197	4041	2170	0,938
4_B1	0,787	0,375	2,342	1,835	4183	1579	1,039
4_C1	0,788	0,341	2,317	1,963	3528	1119	1,423
\varnothing	0,743	0,445	2,331	2,103	3589	1938	1,229
v	6,14 %	13,90 %	8,01 %	12,54 %	14,96 %	27,91 %	29,29 %

Im Speziellen sind die aus der optoanalytischen Auswertung erhaltenen Werte für den Faserorientierungsbeiwert η_V , den Fasergehalt ρ_f und die Anzahl der Fasern N jeder Probe in der Tabelle 5.4 aufgeführt. Zusätzlich ist die maximale prozentuale Wellengeschwindigkeitsänderung $\Delta c_{T,\max}/c_{T,0}$ angegeben, die durch die Ultraschallmethode gemessen wurde. Die Mittelwerte \varnothing und die zugehörigen Variationskoeffizienten v sind am Ende der Tabelle 5.4 angegeben. Betrachtet man den Fasergehalt, so fällt auf, dass die Werte für einzelne Proben um bis zu 20 % vom tatsächlichen Fasergehalt der

verwendeten Betonmischung 2,5 % abweichen, was unter Umständen auf eine Sedimentation der Fasern im Frischbeton zurückzuführen ist.

Die relativen Wellengeschwindigkeitsänderungen $\Delta c_{T,\max}/c_{T,0}$ der einzelnen Platten weichen teilweise um bis zu 30% ab. Während die Platten 1 und 3 vergleichsweise hohe Werte für die Geschwindigkeitsänderung im Bereich von 1,24 bis 1,95 % und 1,14 bis 1,60 % aufweisen, zeigen die Platten 2 und 4 deutlich niedrigere Werte im Bereich von 0,71 bis 0,86 % bzw. 0,91 bis 1,44 %. Da die visuelle Inspektion der Querschnitte einen stark erhöhten Anteil an Luftporen für die Platten 2 und 4 lieferte, können diese Luftporen mögliche Ursache für die zuvor genannten Abweichungen zwischen den einzelnen Platten sein. Die Luftporen sind dabei auf eine unzureichende Belüftung während des Einfüllvorgangs und einer unzureichenden Verdichtung zurückzuführen. Generell beeinflussen die Luftporen die Ultraschallmessung in Abhängigkeit von ihrer Form und Verteilung im Beton. Um die beobachteten Abweichungen in den Geschwindigkeitsänderungen genauer zu untersuchen, sind jedoch weitere Untersuchungen notwendig. Mit einem Wert von $\eta_{V,\max} = 0,74$ weisen die Querschnitte senkrecht zum Rotationswinkel θ_{\max} im Mittel einen hohen Faserorientierungsbeiwert auf, während der mittlere Faserorientierungsbeiwert parallel zu θ_{\max} mit $\eta_{V,90^\circ} = 0,44$ signifikant kleiner ist. Grundsätzlich kann also festgestellt werden, dass die erprobte Ultraschallmethode die Richtungen mit einem hohen Faserorientierungsbeiwert bzw. die Hauptfaserorientierung qualitativ richtig detektieren kann. Eine quantitative Bewertung eines konkreten Faserorientierungsbeiwertes für die jeweilige Probe hängt jedoch von zahlreichen Faktoren ab, die in weiteren Studien untersucht werden müssen. Als Haupteinflussfaktoren sind dabei die Inhomogenitäten wie Luftporen, Gesteinskörnungen etc. sowie die heterogene Faserverteilung im Beton zu erwähnen. Darüber hinaus wird die Ultraschallmessung zusätzlich durch die veränderlichen Kontaktbedingungen zwischen dem Prüfkopf und der Probenoberfläche gestört bzw. beeinflusst.

Zuletzt soll das Potential der eingesetzten Ultraschallmethode zur Analyse der Faserverteilung bzw. der Faserorientierung am Gesamtbauteil beurteilt werden. Hierzu zeigt die Abbildung 5.13 die durch die Ultraschallmessung ermittelten Hauptfaserorientierungen aller geprüften Proben des Gesamtbauteils (Platten 1 bis 4). Dabei stellen die rot markierten Doppelpfeile die Geschwindigkeitsänderungen über 1 % dar. Somit lässt sich hierüber auch die Ausprägung bzw. das Ausmaß der Faserorientierung beurteilen. Weiterhin sind in der Abbildung 5.13 die für die optoanalytische Prüfung ausgewählten Einzelproben grau hinterlegt.

Generell fällt hierbei auf, dass bei allen stehend bzw. vertikal befüllten Platten (Abbildungen 5.13a), c) und d)) mit zunehmender Plattenhöhe eine ausgeprägte senkrechte

Anordnung der Fasern festzustellen ist. Somit ergibt sich gerade in der obersten Reihe „C“ ein gleichmäßiges Bild senkrecht angeordneter Fasern. In den unteren Reihen „A“ und „B“ flacht die Hauptfaserorientierung allmählich ab und folgt zunehmend der dortigen Fließrichtung des Betons.

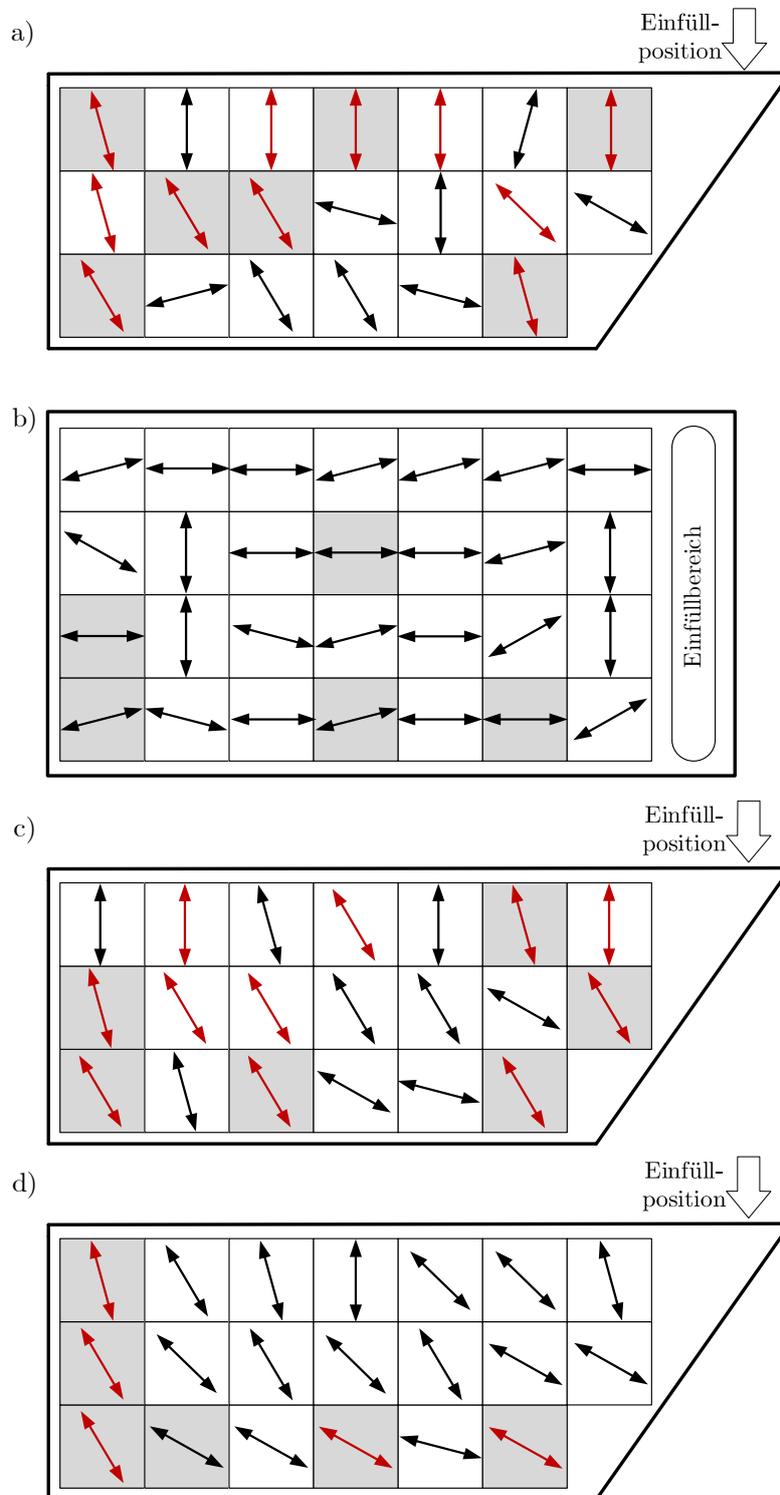


Abbildung 5.13: Ultraschall-Transversalwellenprüfung: Hauptfaserorientierungen für a) Platte 1, b) Platte 2, c) Platte 3, d) Platte 4.

Zusätzlich lässt sich feststellen, dass die unter Verdichtung befüllten Platten 1 und 3 mehr Proben mit einer Geschwindigkeitsänderung von über 1 % aufweisen. Daher kann vermutet werden, dass die eingebrachte Verdichtungsenergie den Effekt der Senkrechtstellung der Fasern verstärkt und zusätzlich den bereits erwähnten Luftporeneinfluss verringert.

Betrachtet man die liegend befüllte Platte, so ergibt sich hierbei ein anderes Bild. Zunächst scheint die Faserausrichtung mit Blick auf die geringen Geschwindigkeitsänderungen nicht sehr ausgeprägt zu sein. Weiterhin fällt auf, dass die mittels Ultraschalls prognostizierte Faserausrichtung mit der Fließrichtung des Frischbetons übereinstimmt. Die hieraus gewonnenen Erkenntnisse bezüglich der Faserverteilung bzw. Faserorientierung stimmen insbesondere im Hinblick auf den beschriebenen Effekt der Senkrechtstellung der Fasern mit den Beobachtungen aus [223, 234] gut überein.

5.4 Akustoelastische Ultraschalluntersuchungen von Hochleistungsbetonen

Wie bereits im Abschnitt 3.2.4.2 erwähnt, wurden zur Materialcharakterisierung und zur Beurteilung der Schädigungsentwicklung im Beton bereits zahlreiche akustoelastische Versuche durchgeführt. Darüber hinaus wurden auch andere Ultraschallmethoden wie die nichtlineare Resonanzultraschallspektroskopie (NRUS) verwendet, um das komplexe nichtlineare Verhalten von zementbasierten Materialien tiefergehend zu untersuchen [89, 163, 171, 203, 218]. In einigen dieser Studien wurden dabei Betone unterschiedlicher Festigkeit experimentell untersucht und die resultierenden Unterschiede in den nichtlinear-elastischen Eigenschaften analysiert [40, 132, 163]. Dabei zeigte sich, dass die normalfesten Betone weitaus „nichtlinearer“ sind als die üblichen homogenen Werkstoffe wie Stahl oder Aluminium und dass die Verbundzone (ITZ) in zementbasierten Materialien die nichtlinear-elastischen Materialeigenschaften entscheidend beeinflusst [163]. In diesem Kontext soll in diesem Abschnitt zunächst eine Charakterisierung von hochfesten und ultrahochfesten Betonen mittels der ultraschalltechnischen Untersuchung des nichtlinearen Materialverhaltens durchgeführt werden. Anschließend sollen die Ergebnisse bezüglich ihres mikrostrukturellen Hintergrundes und unter Berücksichtigung der zuvor genannten Ergebnisse aus der Literatur diskutiert werden. Hierzu wurden akustoelastische Versuche an quaderförmigen Betonproben unter einachsiger Druckbelastung durchgeführt und die nichtlinearen Materialkonstanten 3. Ordnung ermittelt [6].

5.4.1 Probenherstellung und Versuchsdurchführung

In diesem Experiment wurden jeweils vier quaderförmige HPC- und UHPC-Proben, wie in der Abbildung 5.14 gezeigt, hergestellt und nach Erreichen der 28-Tage-Festigkeit untersucht. Um eine ebene Oberfläche für die Lasteinleitung und die Ankopplung der Prüfköpfe sicherzustellen, wurden alle Flächen der Probekörper sorgfältig poliert. Die verwendeten Betonrezepturen für den HPC und den UHPC sind dabei aus den Tabellen 5.1 und 5.2 zu entnehmen. Zusätzlich zu diesen Betonproben wurde eine quaderförmige Stahlprobe (S 235 JR) akustoelastisch untersucht, um hiermit die experimentellen Versuche anhand von den entsprechenden Referenzwerten aus der Literatur zu verifizieren.

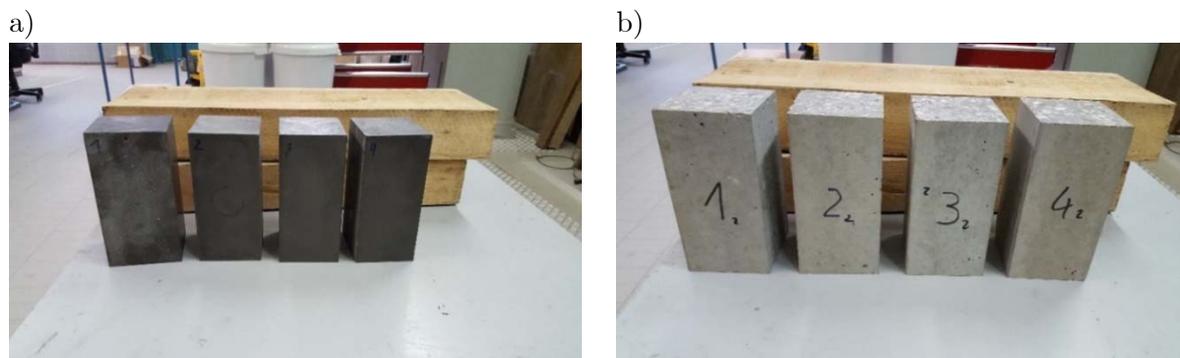


Abbildung 5.14: Probekörper: a) UHPC-Quader (195x100x90 mm), b) HPC-Quader (195x100x90 mm).

Akustoelastische Ultraschallversuche

Wie im Abschnitt 2.6.3 bereits erläutert, beschreibt der akustoelastische Effekt die spannungsinduzierte Wellengeschwindigkeitsänderung in einem elastischen Medium. Für die nachfolgende Bestimmung der insgesamt 3 unabhängigen Elastizitätskonstanten 3. Ordnung (MURNAGHAN-Konstanten) wird die akustoelastische Grundgleichung (2.133) für den einachsigen Spannungszustand verwendet. Somit beschränkt sich die nachfolgende Ultraschalluntersuchung auf die Messung der relativen Wellengeschwindigkeitsänderungen der senkrecht zur einwirkenden einachsigen Druckbelastung durch die Proben ausbreitenden Longitudinalwellen mit $(\Delta c_{L,x}/c_{L,x}^0)$ und Transversalwellen mit $(\Delta c_{T,x,z}/c_{T,x,z}^0, \Delta c_{T,x,y}/c_{T,x,y}^0)$. Die Laufzeitänderungen des Signals bzw. die Geschwindigkeitsänderungen werden dabei unmittelbar über die Messung der zugehörigen Phasenverschiebung bestimmt (siehe Abschnitt 3.2.3.2). Während der Laufzeitmessung wurden die Betonproben mit einer servohydraulischen Presse bis etwa 20% der Würfeldruckfestigkeit $f_{ck,Würfel}$ belastet, um im elastischen Bereich des jeweiligen Betons zu

bleiben. Die Druckbelastung wurde mit einer Geschwindigkeit von 0,8 MPa/s bis zum vordefinierten Belastungsniveau kraftgesteuert aufgebracht. Weiterhin wurden die Ultraschallmessungen im Durchschallungsmodus durchgeführt. Um die Ultraschallsignale zu generieren und zu empfangen, wurden jeweils zwei Longitudinal- bzw. zwei Transversalwellenprüfköpfe an gegenüberliegenden Seiten der Probekörper montiert (siehe Abbildungen 5.15 und 5.16). Die verwendete Prüffrequenz des sinusförmigen Ultraschallsignals wurde hierbei auf 400 kHz festgelegt bei einer Signaldauer von 5 Schwingungszyklen.

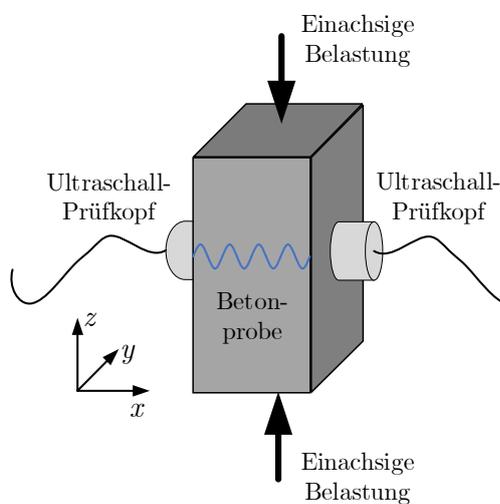


Abbildung 5.15: Schematische Darstellung der akustoelastischen Geschwindigkeitsmessung unter Druckbeanspruchung.

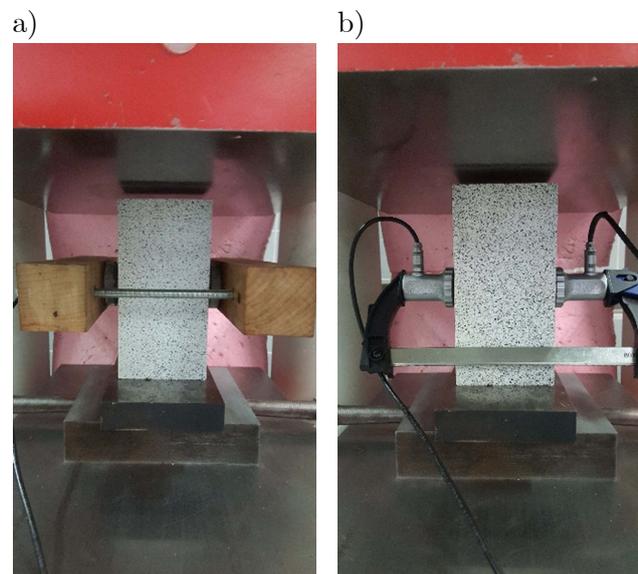


Abbildung 5.16: Realer Versuchsaufbau: Ultraschallmessung der a) longitudinalen Wellengeschwindigkeitsänderung $\Delta c_{L,x} / c_{L,x}^0$ und b) der transversalen Wellengeschwindigkeitsänderung $\Delta c_{T,x,z} / c_{T,x,z}^0$.

In der Abbildung 5.17 ist der grundlegende experimentelle Versuchsaufbau gezeigt. Dieser besteht aus dem Hochleistungsverstärker (Ritec RAM-5000), der mit dem Sender-Prüfkopf verbunden ist. Der Empfänger-Prüfkopf überträgt das Empfangssignal an den Überlagerungsempfänger, welcher das ankommende Signal hinsichtlich der Phasenverschiebung analysiert und hierüber die zugehörige Änderung der Signallaufzeit ermittelt. Zur Visualisierung des Zeitbereichssignals und zur Auswahl des entsprechenden Zeitintervalls sind ein Oszilloskop sowie ein PC an das Messsystem angeschlossen. Vor den eigentlichen akustoelastischen Messungen wurden zunächst die absoluten Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeiten jeder Probe ermittelt.

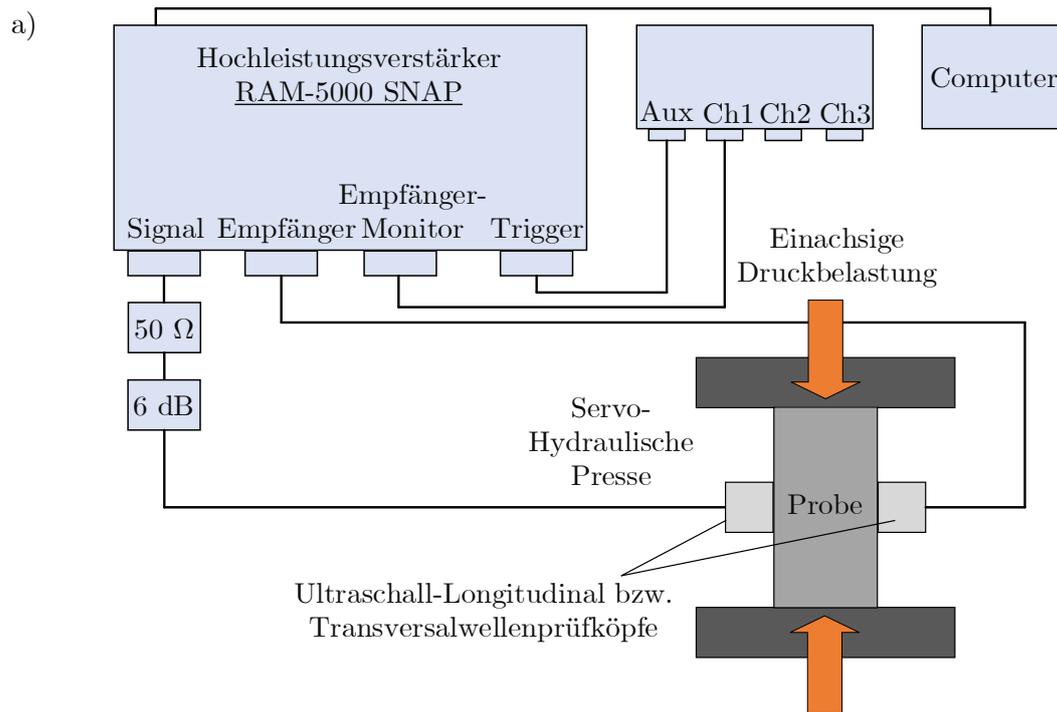


Abbildung 5.17: Akustoelastischer Versuchsaufbau: a) Schema, b) reales Experiment.

Digitale Bildkorrelation (DIC)

Im Anschluss an die akustoelastischen Versuche wurden die Proben monoton und einachsig bis zum endgültigen Versagenszustand belastet. Hierbei wurden gleichzeitig die Oberflächenverformungen über ein digitales Bildkorrelationssystem (*Digital Image Correlation*, DIC) des Herstellers GOM aufgezeichnet ([191]). Für diesen Versuch mussten die Proben zunächst mit einem sogenannten „Speckle-Muster“ versehen werden (siehe Abbildung 5.16). Die Abbildung 5.18 zeigt dabei den grundsätzlichen Aufbau des

optischen Messsystems. Dabei sind die Kameras und die auf dem Stativ montierte Beleuchtung auf die Proben ausgerichtet. Anschließend wurden die ermittelten Daten über eine spezielle Software ausgewertet, um hierüber die elastischen Konstanten 2. Ordnung und die Spannungs-Dehnungs-Kurven der einzelnen Proben zu bestimmen.



Abbildung 5.18: Versuchsaufbau des digitalen Bildkorrelationssystems (Aramis, GOM) zur kontaktlosen Dehnungsmessung.

5.4.2 Ergebnisse und Diskussionen

In der Abbildung 5.19 sind die Spannungs-Dehnungs-Kurven für eine ausgewählte UHPC- und eine HPC-Probe dargestellt. Diese Kurven wurden dabei aus den DIC-Daten erhalten, indem zu jedem Belastungsschritt die Längsdehnung als Mittelwert über den mittleren Bereich der untersuchten Probenoberfläche bestimmt wurde. Hierbei wird die hohe Druckfestigkeit und der ausgeprägte linear-elastische Bereich des UHPC im Vergleich zum HPC deutlich. Für den HPC erhält man eine starke Abweichung vom linear-elastischen Bereich ab ca. 70% der Druckfestigkeit. Für den UHPC wird dieser Punkt erst ab ca. 90% der Druckfestigkeit erreicht.

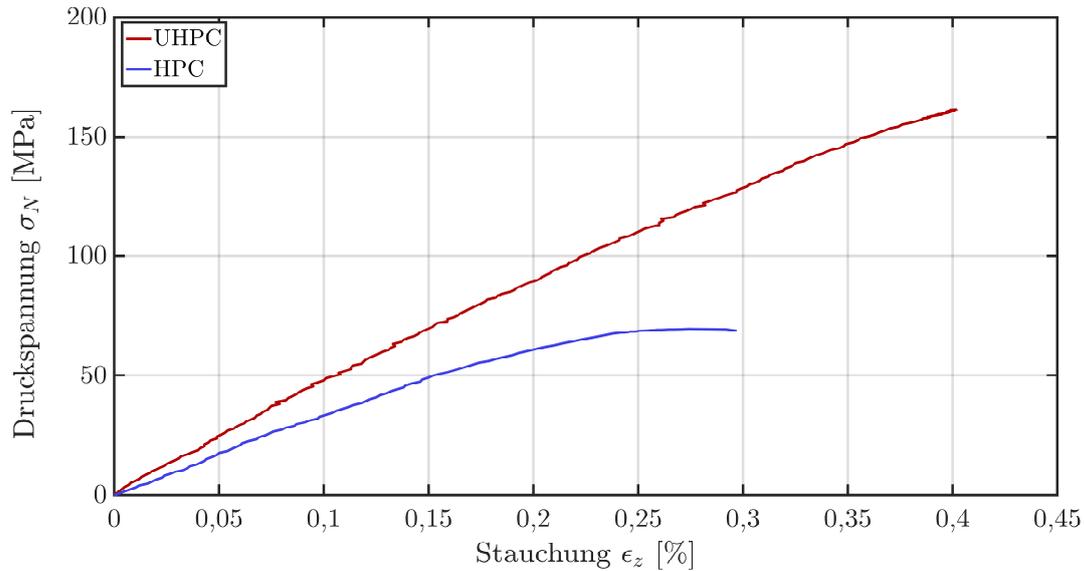


Abbildung 5.19: Spannungs-Dehnungs-Kurven für eine ausgewählte HPC- und UHPC-Probe aus der DIC-Messung.

In der Abbildung 5.20 sind die relativen Geschwindigkeitsänderungen $\Delta c/c^0$ in Abhängigkeit von der einwirkenden Druckspannung σ_N für den HPC, den UHPC und für den Stahl dargestellt. Weiterhin sind hierbei die Steigungen der Ausgleichsgeraden $m_c = (\Delta c/c^0)/\sigma_N$ pro [MPa] für die drei Wellenmoden sowie das zugehörige Bestimmtheitsmaß R^2 mit angegeben. Dabei bestätigen die Werte des Bestimmtheitsmaßes R^2 , dass die gemessenen Daten für den hier untersuchten Bereich in sehr guter Näherung durch eine lineare Beziehung beschrieben werden können. Darüber hinaus fällt auf, dass die relativen Geschwindigkeitsänderungen im UHPC (siehe Abbildung 5.20b)) um den Faktor 20 kleiner sind als im HPC (siehe Abbildung 5.20a)). In Anbetracht der für die Stahlprobe ermittelten Werte (siehe Abbildung 5.20c)) lässt sich feststellen, dass die Geschwindigkeitsänderungen im Stahl und UHPC auf einem vergleichbar niedrigen Niveau liegen. Hierbei ist zu beachten, dass bei den UHPC- und HPC-Proben die Wellengeschwindigkeiten aller drei Wellenmoden (P-, SV- und SH-Welle⁶) mit der Druckspannung zunehmen. Diese Tatsache steht im Gegensatz zu den Daten der Stahlprobe, bei der nur die Transversalwelle mit Partikelbewegung parallel zur einachsigen Belastung (SV-Welle) eine Zunahme der Geschwindigkeit aufweist, während für die anderen beiden Wellenmoden die Geschwindigkeit abnimmt. Weiterhin zeigt sich, dass in allen getesteten Proben die SV-Welle sensitiver auf die Druckspannungsänderungen ist als die anderen beiden Wellenmoden.

⁶ P-Welle: Primärwelle (Longitudinalwelle, $c_{L,x}$)

SV-Welle: Vertikal polarisierte Sekundärwelle (Transversalwelle, $c_{T,x,z}$)

SH-Welle: Horizontal polarisierte Sekundärwelle (Transversalwelle, $c_{T,x,y}$)

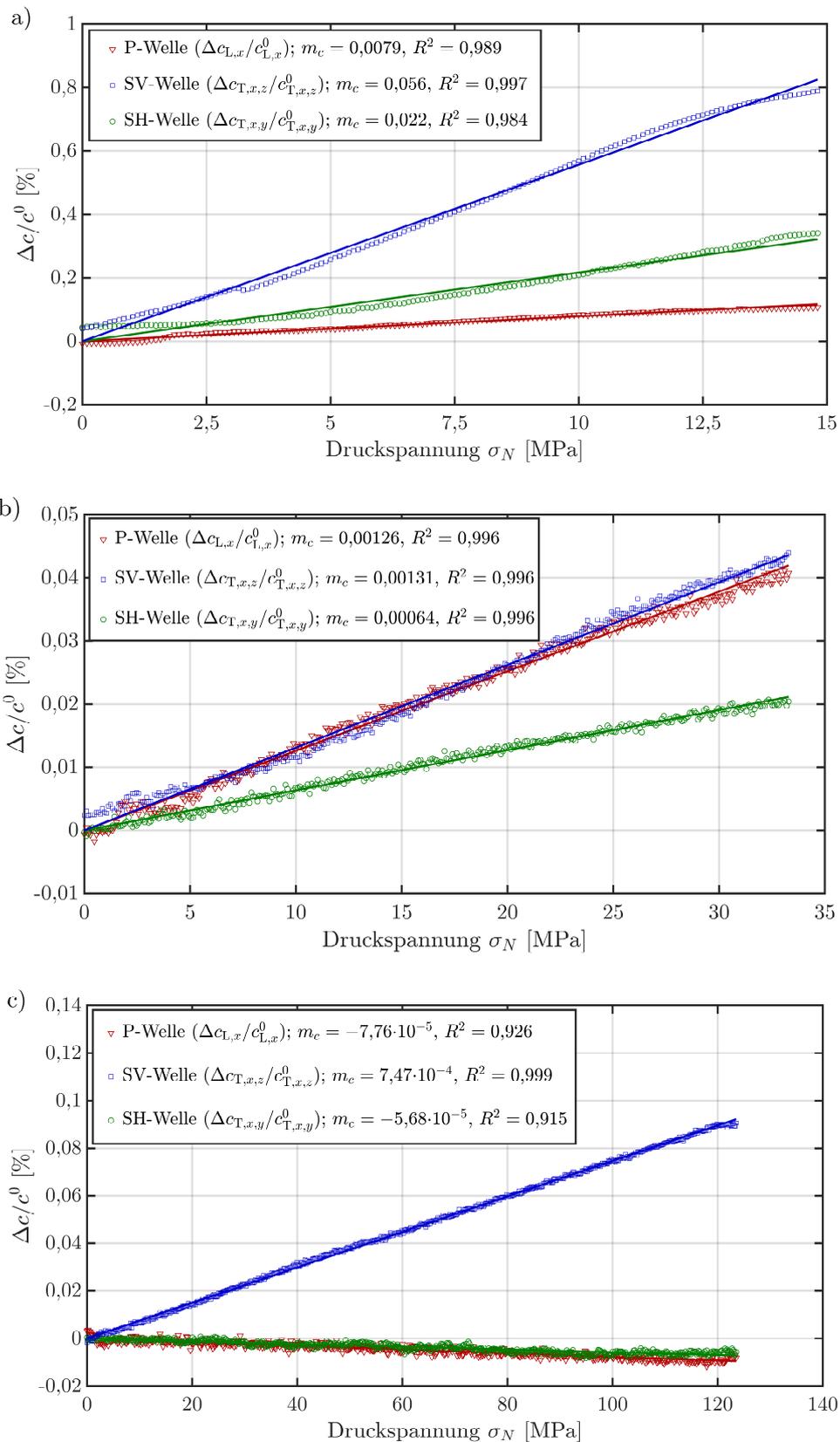


Abbildung 5.20: Relative Änderung der Wellengeschwindigkeit in Abhängigkeit von der einachsigen Druckbeanspruchung für eine a) HPC-Probe, b) UHPC-Probe, c) Stahlprobe.

In den Tabellen 5.5-5.7 sind die ermittelten elastischen Konstanten 2. und 3. Ordnung für den HPC, den UHPC und den S 235 JR Stahl angegeben. Die elastischen Konstanten 2. Ordnung für den HPC und den UHPC wurden aus den entsprechenden DIC-Daten der Spannungs-Dehnungs-Kurve einer jeden Probe berechnet. Für die Stahlprobe wurden die Ultraschalldaten verwendet, um die elastischen Konstanten 2. Ordnung zu bestimmen. Nach der Bestimmung der relativen Geschwindigkeitsänderungen im akustoelastischen Experiment wurden die entsprechenden Elastizitätskonstanten 3. Ordnung aus den Gleichungen (2.132), (2.135) und (2.136) berechnet. Zusätzlich enthalten die letzten Zeilen der Tabellen 5.5 und 5.6 die Durchschnittswerte der Materialparameter mit den entsprechenden Standardabweichungen.

Tabelle 5.5: Materialparameter von HPC.

Probe	ρ_0 [kg/m ³]	E [GPa]	μ [GPa]	λ [GPa]	l [GPa]	m [GPa]	n [GPa]
1	2356	35,66	14,87	9,79	-645,02	-491,53	-259,84
2	2357	35,59	14,91	9,40	-680,14	-782,80	-580,10
3	2366	32,81	13,87	8,00	-432,04	-508,52	-303,40
4	2375	35,91	15,13	9,02	-696,27	-908,42	-686,94
\emptyset	2364	34,99	14,70	9,05	-613,36	-672,82	-457,57
v	7,70	1,27	0,49	0,67	106,32	178,51	180,62

Tabelle 5.6: Materialparameter von UHPC.

Probe	ρ_0 [kg/m ³]	E [GPa]	μ [GPa]	λ [GPa]	l [GPa]	m [GPa]	n [GPa]
1	2221	46,11	19,65	10,45	-56,63	-72,91	-99,45
2	2215	46,99	19,50	13,52	-66,63	-76,86	-101,81
3	2227	46,72	19,82	11,00	-62,92	-76,06	-101,76
4	2218	47,45	20,08	11,47	-57,00	-80,16	-108,98
\emptyset	2220	46,82	19,76	11,61	-60,80	-76,50	-104,50
v	4,44	0,48	0,22	0,22	4,19	2,58	3,58

Tabelle 5.7: Materialparameter von Stahl (S 235 JR).

Probe	ρ_0 [kg/m ³]	E [GPa]	μ [GPa]	λ [GPa]	l [GPa]	m [GPa]	n [GPa]
1	7820	203,26	79,01	105,88	-332,15	-584,39	-717,75
Lit. [62]	7800	—	82,40	110,70	-302,00	-616,00	-724,00

Ein Vergleich der Elastizitätskonstanten 3. Ordnung für den HPC und den UHPC zeigt, dass sich diese um einen Faktor von 10 unterscheiden. Weiterhin fällt auf, dass die Standardabweichungen v insbesondere für die Elastizitätskonstanten 3. Ordnung beim HPC sehr hoch sind (ca. 25% um den Durchschnittswert). Diese hohen Standardabweichungen werden beim UHPC nicht beobachtet. Der Grund für diese Tatsache ist die sehr viel homogenere Mikrostruktur des UHPC im Gegensatz zu der relativ stark streuenden inhomogenen Mikrostruktur des HPC. In der Tabelle 5.7 werden die für die Stahlprobe experimentell bestimmten elastischen Konstanten 3. Ordnung mit den Referenzwerten aus der Literatur [62] verglichen. Es zeigt sich hier eine recht gute Übereinstimmung. Darüber hinaus weisen alle getesteten Proben nur negative nichtlinear-elastische Parameter auf, was typisch für die meisten Werkstoffe ist und einer anfänglichen Verfestigung im unteren Druckbeanspruchungsbereich entspricht.

Für einen besseren Vergleich und zur Einordnung der Nichtlinearität der geprüften Proben wird der NLP aus den experimentell bestimmten elastischen Konstanten 3. Ordnung unter der Verwendung von Gleichung (2.82) berechnet. Die entsprechenden NLP für den UHPC, den HPC und den Stahl sind in der Tabelle 5.8 angegeben. Hierbei fällt zunächst auf, dass der NLP der UHPC-Proben im Mittel um einen Faktor von ca. 18 kleiner ist als der entsprechende Durchschnittswert der HPC-Proben. Weiterhin ist hier zu beachten, dass der NLP vom UHPC noch unter dem der Stahlprobe liegt. In der Tabelle 5.9 sind einige Referenzwerte für normalfeste Betone aufgeführt. Berücksichtigt man hierbei die oft sehr große Streubreite der Betoneigenschaften und die ausgeprägte Heterogenität der Gefügestruktur, so kann man feststellen, dass die für den HPC ermittelten NLP in guter Übereinstimmung mit den Referenzwerten stehen.

Tabelle 5.8: NLP β aus den Experimenten.

Probe	β_{HPC}	β_{UHPC}	β_{Stahl}
1	-39,67	-2,57	-4,19
2	-55,75	-2,69	—
3	-39,04	-2,75	—
4	-62,48	-2,71	—
\emptyset	-49,24	-2,68	-4,19
v	10,17	0,07	0,00

Tabelle 5.9: NLP β aus der Literatur.

Literaturquellen	β_{HPC}
Schurr, D. P. et al. (2011) [184]	-36
Larose, E. et al. (2009) [125]	-40
Shokouhi, P. et al. (2010) [191]	-75
Payan, C. et al. (2009) [162]	-157

Im letzten Teil dieser Studie wird das hysteretische Materialverhalten untersucht. Hierzu zeigt die Abbildung 5.21 die relativen Geschwindigkeitsänderungen der drei Wellenmoden auf den Be- und Entlastungspfaden für den UHPC und den HPC. Hierfür wurden wieder die Mittelwerte über die vier geprüften HPC- und UHPC-Proben gebildet und die zugehörigen Abweichungen, dargestellt in Form von Fehlerbalken,

angegeben. Für den UHPC sind dabei die Unterschiede der relativen Geschwindigkeitsänderungen im Be- und Entlastungszustand für alle drei Wellenmoden vernachlässigbar klein (siehe Abbildung 5.21b)), was darauf hindeutet, dass hier offensichtlich keine ausgeprägten hysteretischen bzw. viskoelastischen Effekte auftreten. Im Gegensatz dazu unterscheiden sich die Geschwindigkeitsänderungen bei den HPC-Proben auf dem Be- und Entlastungspfad beträchtlich (siehe Abbildung 5.21a)). Dies bestätigt die Annahme, dass im HPC sehr ausgeprägte hysteretische Effekte bereits im quasi-elastischen Bereich vorhanden sind [163].

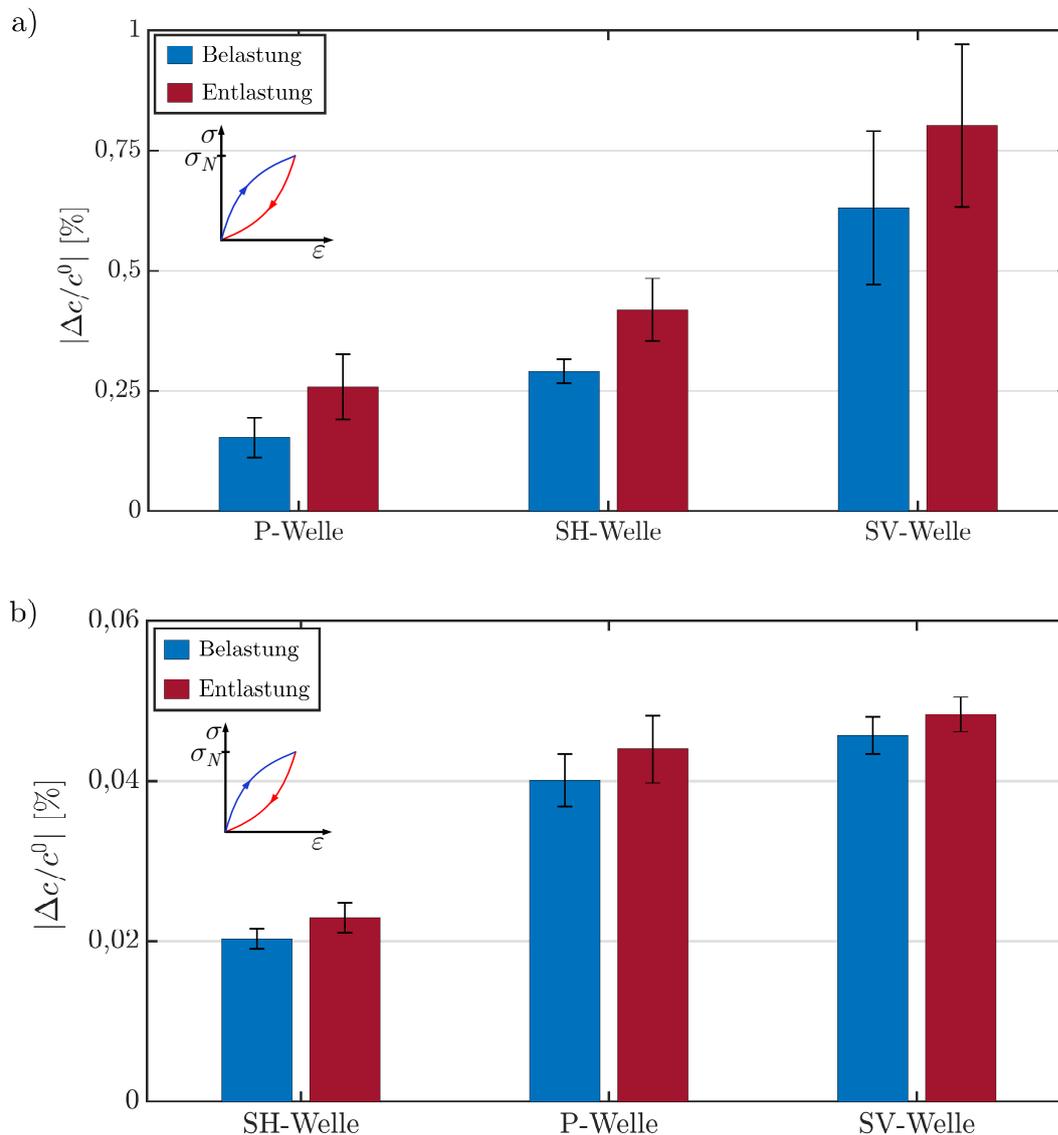


Abbildung 5.21: Relative Geschwindigkeitsänderungen auf dem Be- und Entlastungspfad für den a) HPC und b) UHPC.

Die vorliegende akustoelastische Untersuchung zeigt, dass die Nichtlinearität des UHPC mit der von homogenen Werkstoffen wie Stahl oder Aluminium vergleichbar ist [62, 95]. Im Vergleich zum HPC zeigt sich, dass der NLP des UHPC etwa um den Faktor 18 kleiner ist. Es ist anzunehmen, dass die Schlüsselfaktoren für diese geringe Nichtlinearität in den verbesserten Verbundeigenschaften des UHPC liegen, die eine Hauptursache für die ausgeprägte Nichtlinearität in normalfestem Beton darstellen [163]. Zusätzlich verringert die relativ fehlerarme Mikrostruktur weitere nichtlinear-elastische Effekte. Generell bestätigen die vorliegenden akustoelastischen Experimente, dass die Transversalwellen mit der Partikelbewegung parallel zur einwirkenden Druckbelastung (SV-Wellen) empfindlicher auf die Spannungsänderung reagieren als die beiden anderen Wellenmoden [40, 132]. Schließlich zeigen die Ergebnisse, dass im betrachteten Belastungsbereich die hysteretischen Effekte im UHPC nur von untergeordneter Bedeutung sind. Dies ist ein Materialverhalten, welches typisch für homogene und sehr schwach nichtlineare Werkstoffe ist. Diese experimentelle Untersuchung stützt damit die These, dass eine verbesserte Verdichtung und Homogenisierung der Mikrostruktur im Beton zu einer abnehmenden Nichtlinearität führt, was mit den anderen experimentellen Beobachtungen für verschiedene Arten von zementbasierten Materialien sehr gut übereinstimmt [40, 132, 163].

5.5 Ultraschall-Schädigungsuntersuchungen an druckbeanspruchten Hochleistungsbetonen

Die Schädigungsentwicklung bzw. das Risswachstum im normalfesten Beton unter einachsiger Druckbeanspruchung lässt sich in Anlehnung an das Spannungs-Dehnungsverhalten gesteinsartiger Materialien unter Druckbelastung in vier maßgebende Phasen unterteilen [61, 141]. Dabei werden im Anfangsstadium der Belastung zunächst bereits vorhandene Poren und Mikrorisse im Beton geschlossen. In dieser ersten Phase kann der Elastizitätsmodul mit zunehmender Belastung leicht ansteigen. Das zweite Stadium beschreibt einen nahezu ideal linear-elastischen Bereich bis ca. 20-30% der Druckfestigkeit. Dabei findet in diesem frühen Stadium noch keine Mikrorissbildung im Beton statt. Im dritten Stadium folgt auf den linear-elastischen Bereich ein nichtlinear-elastischer und teilweise plastischer Bereich, welcher durch ein zunehmendes Mikrorisswachstum gekennzeichnet ist. Ab einem bestimmten Beanspruchungsniveau (70-75% der Druckfestigkeit [50]) wird das vierte Stadium erreicht. Hierbei wachsen die Mikrorisse allmählich zu Makrorissen (typische Spalt- und Diagonalrisse) zusammen und das

Materiaverhalten wird stark nichtlinear. Beim Erreichen der zugehörigen Druckfestigkeit versagt der Beton anschließend.

Wie bereits erwähnt, ist die nichtlineare Ultraschalltechnik bzw. der akustische NLP aufgrund des direkten nahezu linearen Zusammenhangs mit den mikrostrukturellen Veränderungen (hier insbesondere zum Mikrorisswachstum) sehr sensitiv auf eine frühzeitige Materialveränderung. Dennoch ist hierbei zu berücksichtigen, dass die Mikrorisse und ihr Wachstum auch zu einer merklichen Dämpfungsänderung des Ultraschallsignals führen und damit auch den akustischen NLP beeinflussen können.

Um das Potential der linearen und nichtlinearen Ultraschalltechnik zur Schädigungsbeurteilung im Beton zu analysieren und den Einfluss der Dämpfung auf die nichtlineare Wellenausbreitung experimentell zu beurteilen, sollen in diesem Abschnitt unter einachsiger Druckbeanspruchung lineare und nichtlineare Ultraschallmessungen an würfelförmigen HPC-, UHPC- und UHPFRC-Proben durchgeführt werden [4].

5.5.1 Probenherstellung und Versuchsdurchführung

Insgesamt wurden für diesen Versuch 24 würfelförmige Probekörper (je Betonmischung 8 Proben) nach den Betonrezepturen aus den Tabellen 5.1-5.3 hergestellt und nach Erreichen der 28-Tage-Festigkeit geprüft. Anschließend wurden aus jeweils 3 Proben pro Mischung die mittleren Druckfestigkeiten f_{ck} ermittelt (siehe Tabelle 5.10). Hierfür wurden die Proben in einer servohydraulischen Presse kontinuierlich bis zum globalen Versagen auf Druck beansprucht. Da die Seitenflächen der Betonwürfel bereits eine ausreichend ebene und glatte Oberfläche aufwiesen, wurde auf eine nachträgliche maschinelle Bearbeitung (Polieren) verzichtet. Die restlichen 5 Proben pro Mischung (siehe Abbildung 5.22) wurden anschließend stufenweise bis auf 80% der zugehörigen mittleren Druckfestigkeit beansprucht. Dabei wurde die eigentliche Ultraschallmessung während der Druckprüfung durchgeführt.

Tabelle 5.10: Mittlere Druckfestigkeiten aus 3 Begleitproben für HPC, UHPC und UHPFRC.

Betonsorte	HPC	UHPC	UHPFRC
Mittlere Druckfestigkeit f_{ck} [MPa]	91,97	158,08	165,29

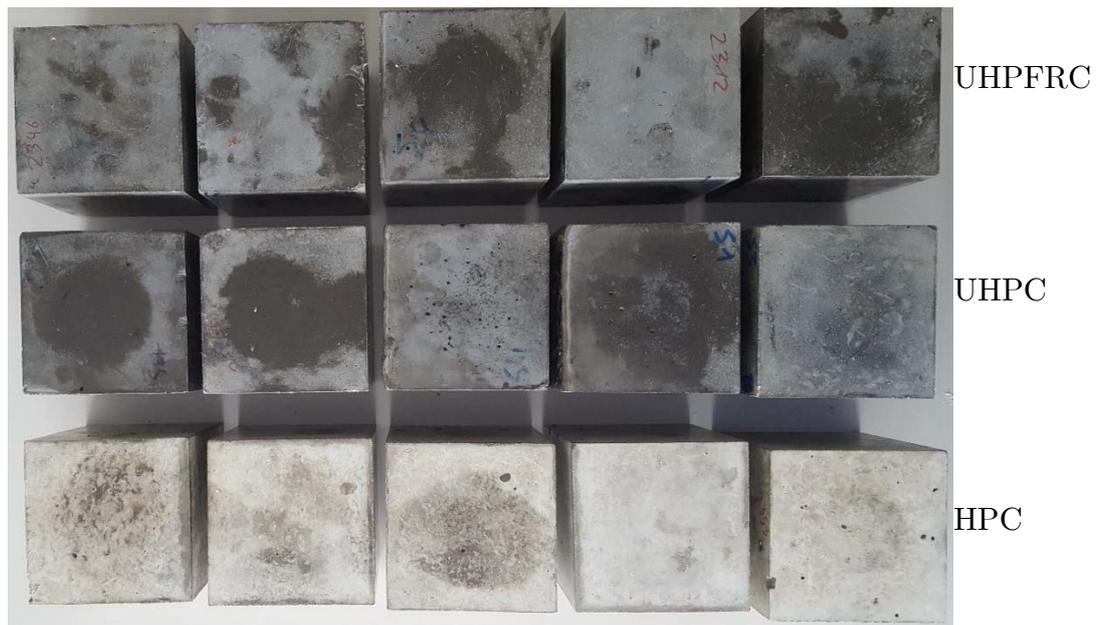


Abbildung 5.22: Würfelförmige Betonproben (Seitenlänge 100 mm) für die Ultraschalluntersuchung unter Druckbeanspruchung.

Der Versuchsaufbau in der Abbildung 5.23 entspricht im Wesentlichen dem des akustoelastischen Versuches, wobei in diesem Versuch nur Longitudinal-Ultraschallwellenprüfköpfe zur Prüfung der Betonproben eingesetzt wurden.

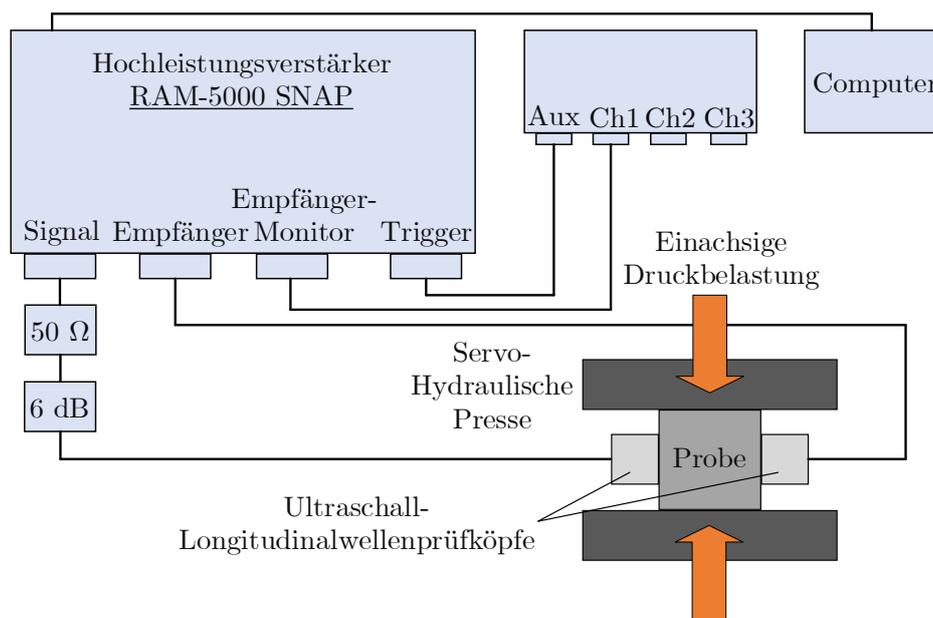


Abbildung 5.23: Schematische Darstellung der Ultraschallmessung an einer einachsigen druckbeanspruchten Betonprobe.

Im Speziellen wurden zur Durchschallungsmessung ein schmalbandiger Longitudinal-Niederfrequenzprüfkopf mit einer Mittenfrequenz von ca. 200 kHz (Sender) und ein breitbandiger Longitudinal-Niederfrequenzprüfkopf mit einer Mittenfrequenz von ca. 500 kHz (Empfänger) verwendet. Diese Konfiguration der Ultraschall-Prüfköpfe ist für eine nichtlineare Ultraschallmessung üblich. Man erreicht hiermit, dass das Ausgangssignal (lineares Signal, ohne höherharmonische Anteile) möglichst nur aus einer sehr starken Fundamentalamplitude besteht und die sehr kleinen höherharmonischen Amplituden bei zweifacher oder dreifacher Erregungsfrequenz im Empfangssignal bestmöglich verstärkt werden.

Im Vorfeld der eigentlichen Ultraschallmessung wurde zunächst festgestellt, welcher Frequenzbereich für die jeweilige Betonmischung im Hinblick auf die nichtlineare Messung optimal ist. Dabei spielt der Dämpfungseffekt im Beton eine maßgebende Rolle. Grundsätzlich ist es sinnvoll die Erregungsfrequenz möglichst hoch zu wählen. Aufgrund der quadratischen Abhängigkeit der 2. Harmonischen von der Erregerfrequenz erhält man hier rein theoretisch bei zunehmender Fundamentalfrequenz eine starke Vergrößerung der Höherharmonischen im Empfangssignal. Es ist jedoch gerade bei Beton zu beachten, dass der Dämpfungseffekt hier genau in umgekehrter Weise wirkt. Somit erhöht sich die Dämpfung stark mit zunehmender Frequenz. Schließlich wurde auf Grund der beschriebenen Erwägungen und Voruntersuchungen für den stark heterogenen HPC eine Erregungsfrequenz von 150 kHz und für den faserverstärkten UHPC eine Erregungsfrequenz von 230 kHz gewählt.

Im Folgenden wurden die Änderungen der Schallgeschwindigkeit, der Dämpfung und der nichtlinearen Parameter untersucht. Zusätzlich zum klassischen NLP, der sich auf die 2. Harmonische bezieht, wurde auch der NLP für die 3. Harmonische ausgewertet. Die gesamte Signalanalyse und die anschließende Auswertung wurden in diesem Fall auf Basis des Ritec-Messsystems mit dem zugehörigen Software-Paket durchgeführt. Prinzipiell ist es zweckmäßig, die Eingangsamplitude möglichst hoch zu wählen. Das Ritec-Messsystem verfügt hierzu über ausreichende Leistungskapazitäten, um sehr hohe unverzerrte und „reine Signale“ zu erzeugen. Dennoch zeigte sich wie bereits am Anfang des Kapitels erwähnt, dass bei zu hohen Amplituden die verwendeten Prüfköpfe zunehmend mit einem nichtlinearen Verhalten reagierten. Daher wurden die Prüfköpfe bei ca. 500 V betrieben, was sich als ein sinnvoller Kompromiss zwischen der möglichst hohen Erregungsamplitude und der möglichst geringen Systemnichtlinearität ergab. Um eine gute Auflösung im Frequenzspektrum zu erhalten und gleichzeitig die Nichtlinearitäten infolge von Interferenzen zu verhindern, wurde die Signaldauer auf 6-8 Schwingungszyklen festgelegt.

5.5.2 Ergebnisse und Diskussionen

Im ersten Versuchsteil sollte zunächst geprüft werden, in welchem Zusammenhang die gemessenen höherharmonischen Amplituden zur Anregungsamplitude bzw. Fundamentalamplitude stehen. Dies ist zur Überprüfung der Messmethodik sowie zur Definition des zugrundeliegenden nichtlinearen Materialverhaltens von zentraler Bedeutung. Hierzu wurden zunächst die Ultraschalluntersuchungen an den noch unbelasteten Proben unter stetiger Erhöhung der Eingangsamplitude bzw. Eingangsspannung durchgeführt. Anschließend wurden die Harmonischen-Amplituden im Frequenzspektrum des Empfangssignals für unterschiedliche Eingangsspannungen ausgewertet. Die Abbildung 5.24 zeigt dabei das resultierende Frequenzspektrum für eine ausgewählte unbelastete HPC-Probe. Hierbei wurde die Betonprobe mit einer Prüffrequenz von 150 kHz für unterschiedliche Signalamplituden (Änderung der Eingangsspannung in 2dB Schritten) getestet und das empfangene Zeitsignal mittels FFT ins Frequenzspektrum transformiert. Man erkennt dabei deutlich die 2. und 3. Harmonische im Frequenzspektrum bei ca. 285 kHz und ca. 430 kHz, welche leicht von den theoretischen Werten bei 300 kHz für die 2. Harmonische und 450 kHz für die 3. Harmonische abweichen. Die Ursachen hierfür können vielfältig sein, sind jedoch nicht ungewöhnlich für reale Messungen an einem stark heterogenen Festkörper wie Beton. Weiterhin zeigt die Abbildung 5.25 das Ergebnis der gleichen Untersuchung an einer unbelasteten UHPC-Probe. Hierbei wurde eine Prüffrequenz von 230 kHz verwendet. Auch hier sind die 2. und 3. Harmonische bei ca. 460 kHz und 690 kHz gut zu erkennen.

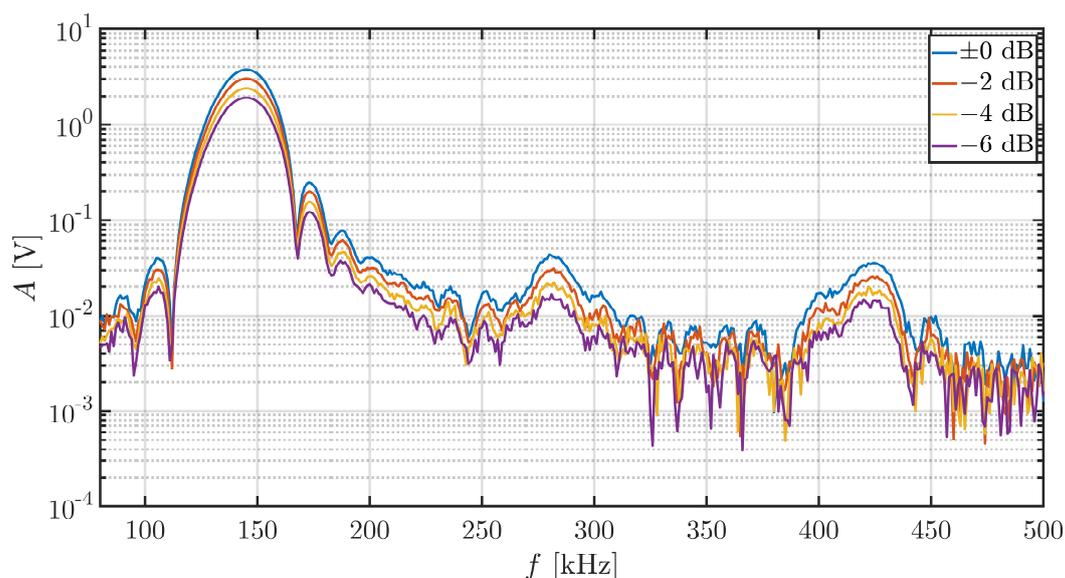


Abbildung 5.24: Frequenzspektrum des Empfangssignals für unterschiedliche Eingangsamplituden bei unbelasteter HPC-Probe.

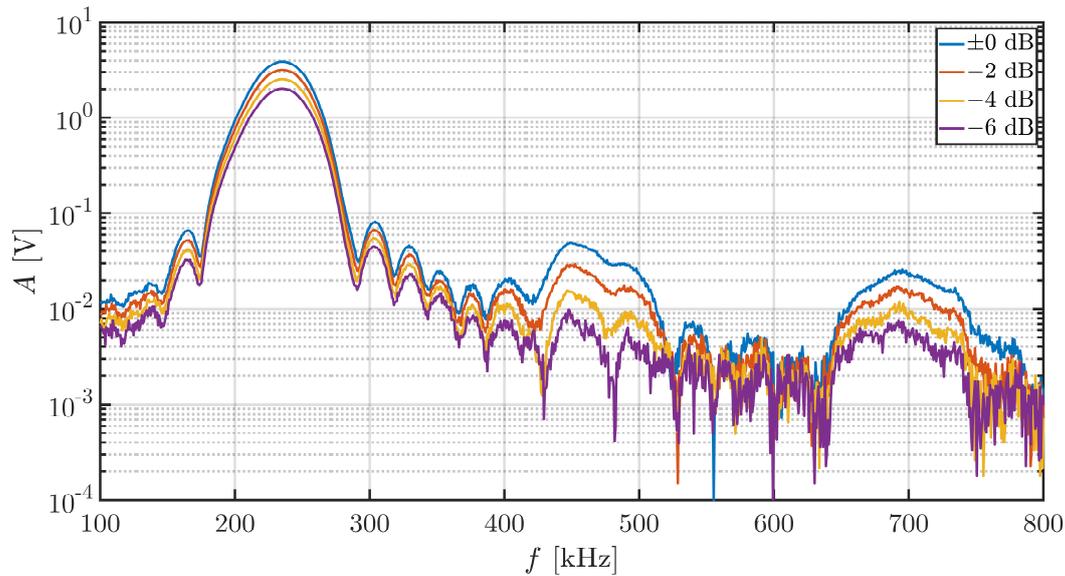


Abbildung 5.25: Frequenzspektrum des Empfangssignals für unterschiedliche Eingangsamplituden bei unbelasteter UHPC-Probe.

Die Abbildungen 5.26 und 5.27 stellen die Änderungen der 2. Harmonischen-Amplitude A_2 in Abhängigkeit von der Fundamentalamplitude A_1 für eine HPC- und eine UHPC-Probe dar. Für den HPC wie auch für den UHPC zeigt sich anhand des hohen Bestimmtheitsmaßes von $R^2 \approx 0,88$ (siehe Abbildung 5.26) bzw. $R^2 \approx 0,98$ (siehe Abbildung 5.27), dass die Abhängigkeit von der Fundamentalamplitude am besten durch einen quadratischen Zusammenhang beschrieben wird ($A_2 \propto A_1^2$). Dies stimmt auch mit der klassischen quadratisch nichtlinear-elastischen Theorie überein.

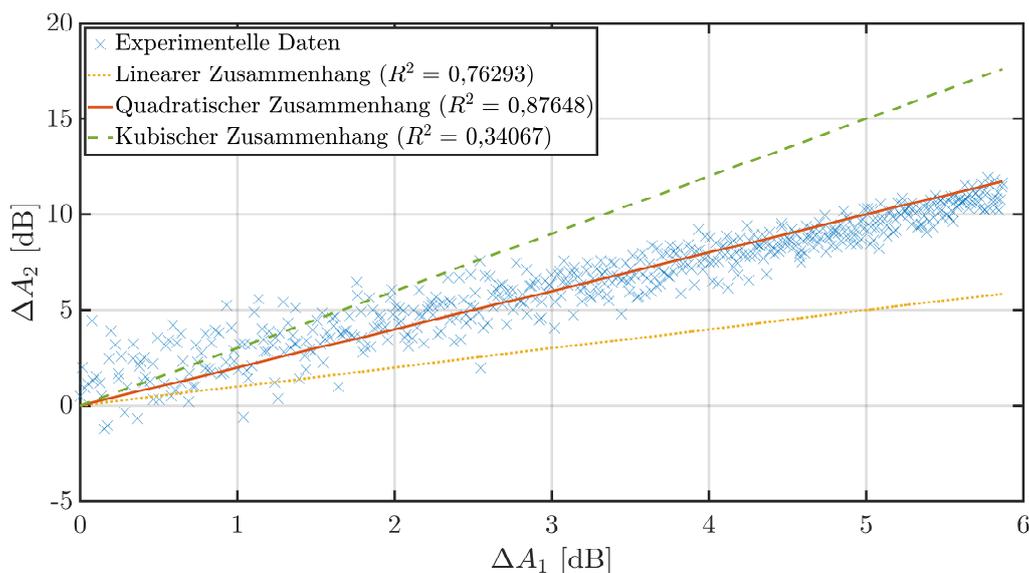


Abbildung 5.26: Änderung der Amplitude A_2 der 2. Harmonischen in Abhängigkeit der Fundamentalamplitude A_1 für den HPC.

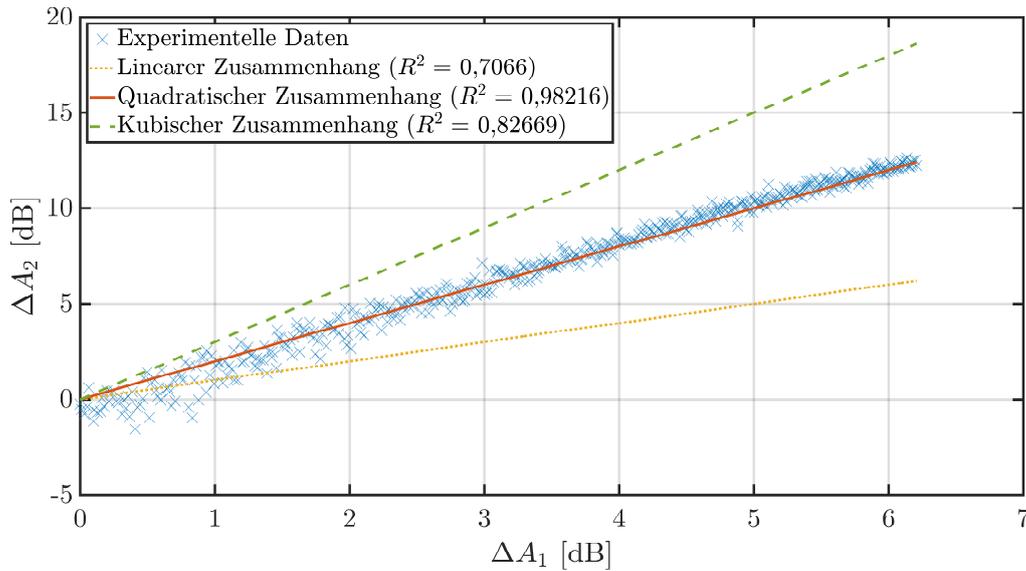


Abbildung 5.27: Änderung der Amplitude A_2 der 2. Harmonischen in Abhängigkeit der Fundamentalamplitude A_1 für den UHPC.

Betrachtet man die Änderung der 3. Harmonischen in Abhängigkeit von der Fundamentalamplitude, so lässt sich der Zusammenhang zwischen den beiden Amplituden im Fall des HPC (siehe Abbildung 5.28) am besten durch einen quadratischen Zusammenhang ($A_3 \propto A_1^2$) und für den UHPC (siehe Abbildung 5.29) über einen kubischen Zusammenhang ($A_3 \propto A_1^3$) beschreiben.

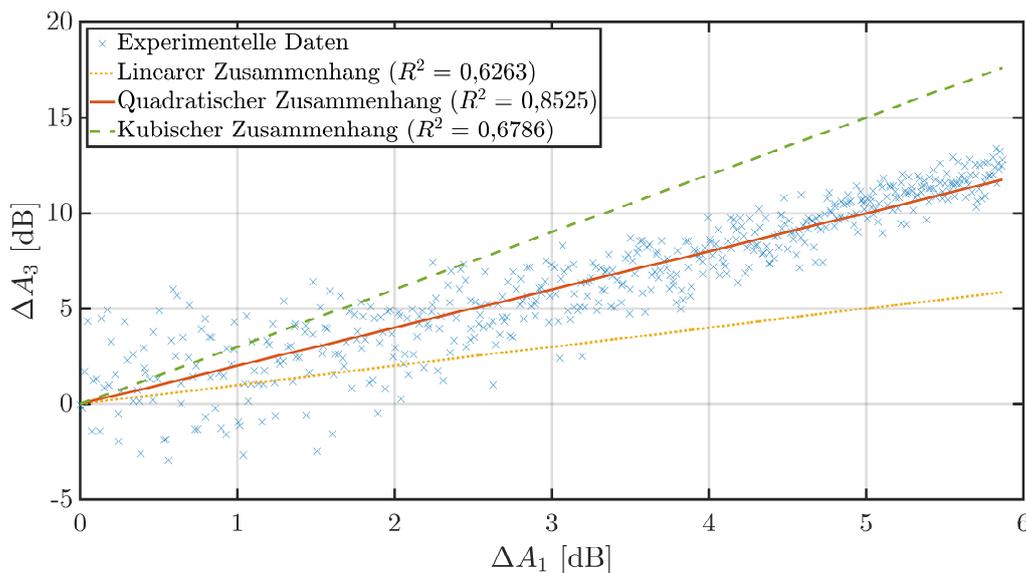


Abbildung 5.28: Änderung der Amplitude A_3 der 3. Harmonischen in Abhängigkeit der Fundamentalamplitude A_1 für den HPC.

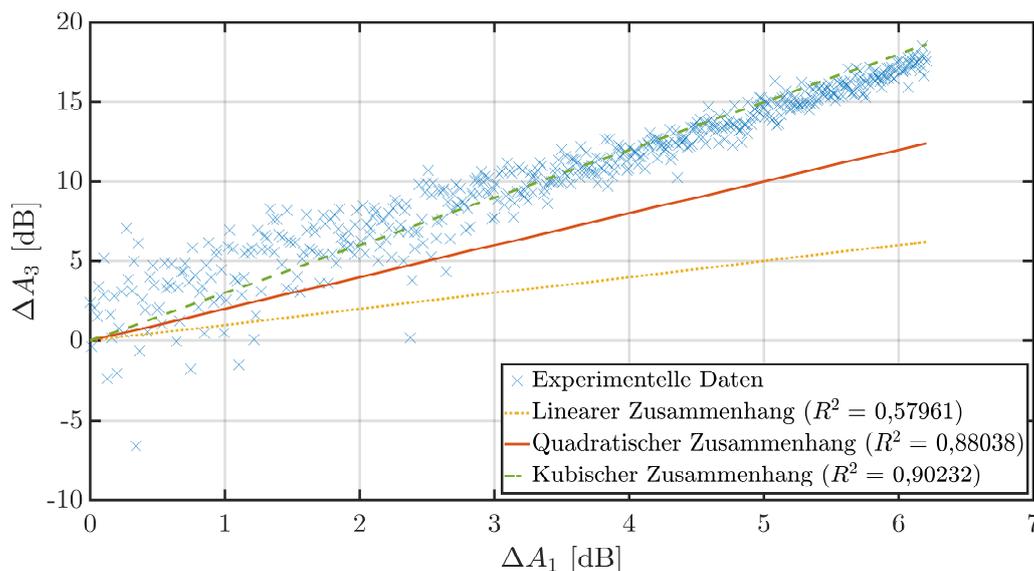


Abbildung 5.29: Änderung der Amplitude A_3 der 3. Harmonischen in Abhängigkeit der Fundamentalamplitude A_1 für den UHPC.

Das quadratische Verhalten bezüglich der 3. Harmonischen beim HPC ist dabei charakteristisch für ein hysteretisch nichtlineares Material, wobei das Verhalten der 3. Harmonischen beim UHPC auf ein klassisches kubisch nichtlinear-elastisches Verhalten hindeutet. Somit zeigt sich auch hier der bereits in den akustoelastischen Versuchen festgestellte Unterschied im hysteretischen Verhalten vom HPC und UHPC. Für die weiteren nichtlinearen Ultraschalluntersuchungen der 3. Harmonischen kann also auf Basis dieser Voruntersuchungen beim HPC von einem eher hysteretischen Materialverhalten und beim UHPC von einem eher kubisch nichtlinear-elastischen Materialverhalten ausgegangen werden.

Im Anschluss an die Voruntersuchungen der unbelasteten Proben wurden die Ultraschallmessungen an den druckbeanspruchten Betonproben durchgeführt. Hierbei wurden die relativen Änderungen der longitudinalen Wellengeschwindigkeit, der akustischen Dämpfung und der NLP ermittelt. Dabei wurden für die nachfolgende Auswertung die Mittelwerte über die 5 Betonproben pro Mischung mit den zugehörigen Standardabweichungen gebildet und grafisch dargestellt.

In der Abbildung 5.30 ist zunächst die relative Änderung der longitudinalen Wellengeschwindigkeit $\Delta c_L/c_{L,0}$ in Abhängigkeit von der Druckbeanspruchung dargestellt. Für alle Betone (HPC, UHPC und UHPFRC) lässt sich zunächst bei 20% der Druckfestigkeit der für die am Anfang dieses Abschnittes beschriebene 1. Phase typische Effekt einer leichten Geschwindigkeitszunahme (bzw. Steigerung des E-Moduls) beobachten, welcher auf das Schließen von Luftporen und Mikrorissen zurückzuführen ist.

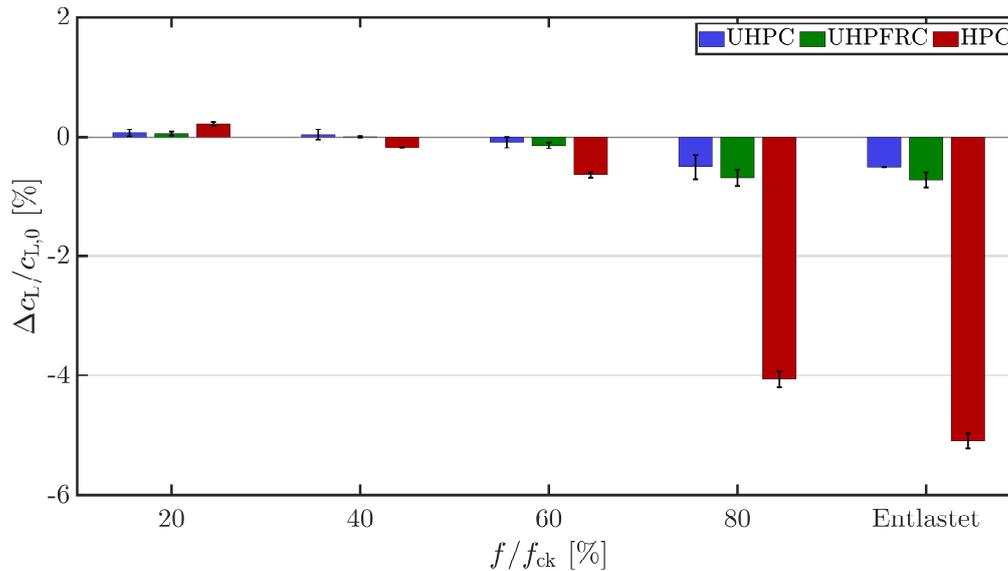


Abbildung 5.30: Relative Änderung der longitudinalen Wellengeschwindigkeit $\Delta c_L/c_{L,0}$ in Abhängigkeit vom Beanspruchungsniveau bezogen auf die Druckfestigkeit f_{ck} für den HPC, den UHPC und den UHPFRC.

Mit zunehmender Belastung nimmt die longitudinale Wellengeschwindigkeit langsam ab. Bei ca. 60% der Druckfestigkeit zeigen alle Proben eine deutliche Abnahme der Wellengeschwindigkeit zum unbelasteten Ausgangszustand. Dies lässt auf ein vermehrtes Einsetzen der Mikrorissbildung und eine Zunahme irreversibler Vorgänge schließen. Hierbei ist zu bemerken, dass der HPC in diesem Stadium bereits eine deutlich höhere Änderung der Wellengeschwindigkeit im Vergleich zum UHPC bzw. UHPFRC aufweist, was wiederum auf ein verzögertes Mikrorisswachstum im UHPC und UHPFRC hindeutet. Bei der Maximalbeanspruchung von 80% der Druckfestigkeit sind für alle Betonproben die Wellengeschwindigkeitsänderungen sehr deutlich erkennbar, womit eine klare Festigkeitsänderung und eine irreversible Schädigung im Beton verbunden ist. Dass sich eine bleibende Schädigung im Material eingestellt hat, wird insbesondere durch die bleibende Wellengeschwindigkeitsabnahme nach der Entlastung deutlich. Daher kann der Ausgangszustand selbst nach Entlastung nicht mehr hergestellt werden.

Im Folgenden wird die Änderung des akustischen Dämpfungsparameters $\alpha'_{D,L}$ für die Fundamentalfrequenz, für die 2. Harmonische-Frequenz und für die 3. Harmonische-Frequenz in Abhängigkeit des Beanspruchungsniveaus betrachtet. Dabei wurden während der Druckbelastung die Ultraschallfrequenzen des Senderprüfkopfes auf die zu untersuchenden Frequenzen eingestellt und die zugehörigen Fundamentalamplituden (bzw. die Dämpfung) gemessen. Somit lässt sich insbesondere der Dämpfungseinfluss auf die höherharmonischen Amplituden mit Blick auf die nachfolgenden nichtlinearen Ultraschalluntersuchungen möglichst präzise berücksichtigen.

Für den HPC (siehe Abbildung 5.31) zeigt sich für alle drei Frequenzen ein ähnliches Bild, wie bei der Untersuchung der Wellengeschwindigkeit. So steigt die Dämpfung erst signifikant um bis zu 10% beim Erreichen eines Beanspruchungsniveaus von 60% der Druckfestigkeit. Bei 80% der Druckfestigkeit zeigt sich insbesondere für die höheren Frequenzen 300 kHz und 450 kHz eine deutliche Zunahme der Dämpfung von bis zu 40% im Vergleich zum Ausgangszustand. Auch nach der Entlastung ist die veränderte Dämpfung deutlich erkennbar. Eine hohe akustische Dämpfung deutet dabei auf ein vermehrtes Vorhandensein von stark reflektierenden und streuenden Grenzflächen und damit auf zunehmende Risse im HPC hin.

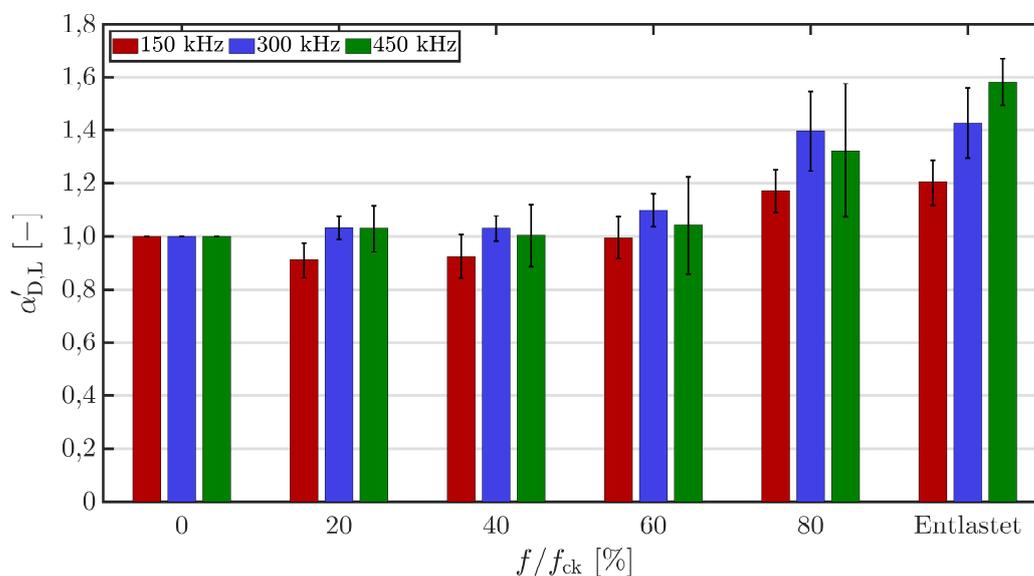


Abbildung 5.31: Relative Änderung des akustischen Dämpfungsparameters $\alpha'_{D,L}$ für verschiedene Frequenzen (150 kHz, 300 kHz, 450 kHz) in Abhängigkeit vom Druckbeanspruchungsniveau f/f_{ck} beim HPC.

Betrachtet man die Dämpfungsänderung im UHPC (siehe Abbildung 5.32), so fällt hier auf, dass die Dämpfung für alle Frequenzen aber insbesondere für die hohen Frequenzen im unteren Belastungsbereich bis ca. 40% der Druckfestigkeit abnimmt. Eine mögliche Erklärung hierfür ist, dass ohne Belastung die vorhandenen Poren und Risse im UHPC geschlossen werden und hierdurch die akustischen Verluste infolge Streuung, Reflexion und Absorption relativ gering sind. Erst bei ca. 80% der Druckfestigkeit steigt die Dämpfung für sehr hohe Frequenzen bei 690 kHz leicht um etwa 8% im Vergleich zum Ausgangszustand an. Nach der Entlastung wird bis auf die messtechnischen Schwankungen der Ausgangszustand nahezu erreicht. Dies bedeutet, dass bis zur maximalen Beanspruchung von 80% der Druckfestigkeit keine neuen Schädigungen größer als die zugehörige Wellenlänge (bei $f = 690$ kHz, $\lambda = c_L/f \approx 7$ mm) im UHPC entstehen.

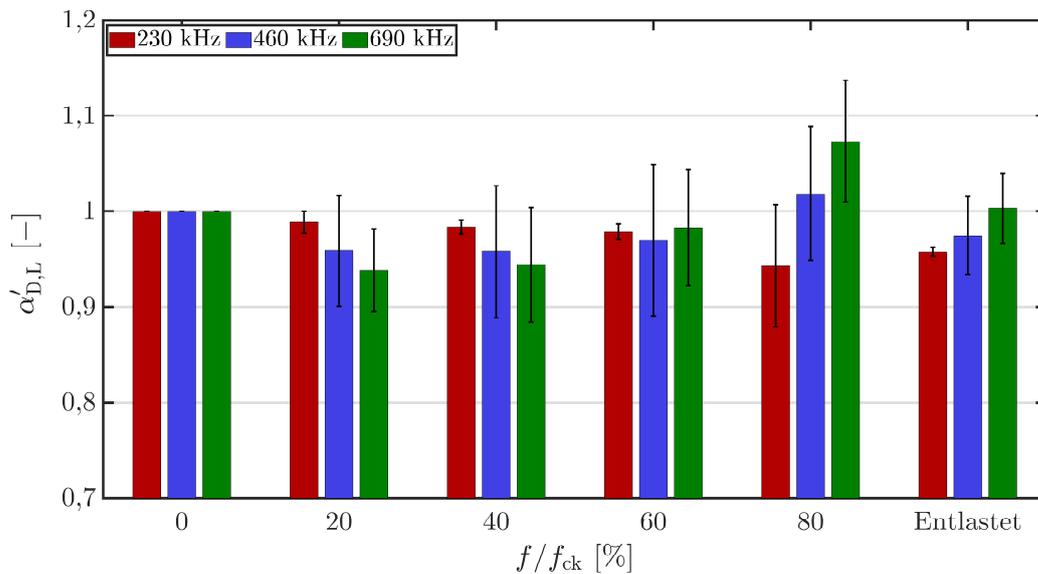


Abbildung 5.32: Relative Änderung des akustischen Dämpfungsparameters $\alpha'_{D,L}$ für verschiedene Frequenzen (230 kHz, 460 kHz, 690 kHz) in Abhängigkeit vom Druckbeanspruchungsniveau f/f_{ck} beim UHPC.

Für den UHPFRC (siehe Abbildung 5.33) ergibt sich bezüglich der Dämpfungsänderung ein ähnliches Verhalten. Auch hier nimmt die Dämpfung erst beim Erreichen eines hohen Beanspruchungsniveaus von 60% bis 80% der Druckfestigkeit leicht zu (ca. um 12 % bei 690 kHz) und sinkt nach der Entlastung wieder deutlich ab (auf ca. 5% bei 690 kHz). Somit sind die für den UHPC angestellten Vermutungen zum Schädigungszustand auch hier zutreffend.

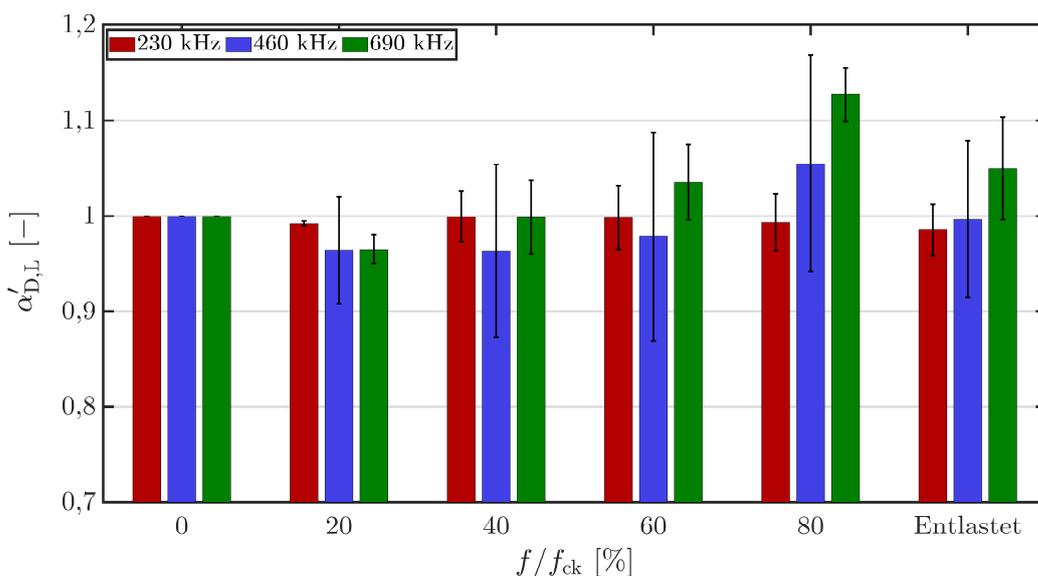


Abbildung 5.33: Relative Änderung des akustischen Dämpfungsparameters $\alpha'_{D,L}$ für verschiedene Frequenzen (230 kHz, 460 kHz, 690 kHz) in Abhängigkeit vom Druckbeanspruchungsniveau f/f_{ck} beim UHPFRC.

Zuletzt werden unter der Verwendung der jeweiligen Dämpfungsparameter $\alpha_{D,L}$ jeder Probe und der Gleichungen (2.114), (2.120) und (2.122) die relativen Änderungen der NLP aus den höherharmonischen Amplituden ermittelt. Die Abbildung 5.35 zeigt die Änderung des relativen akustischen NLP β' für den HPC, UHPC und UHPFRC.

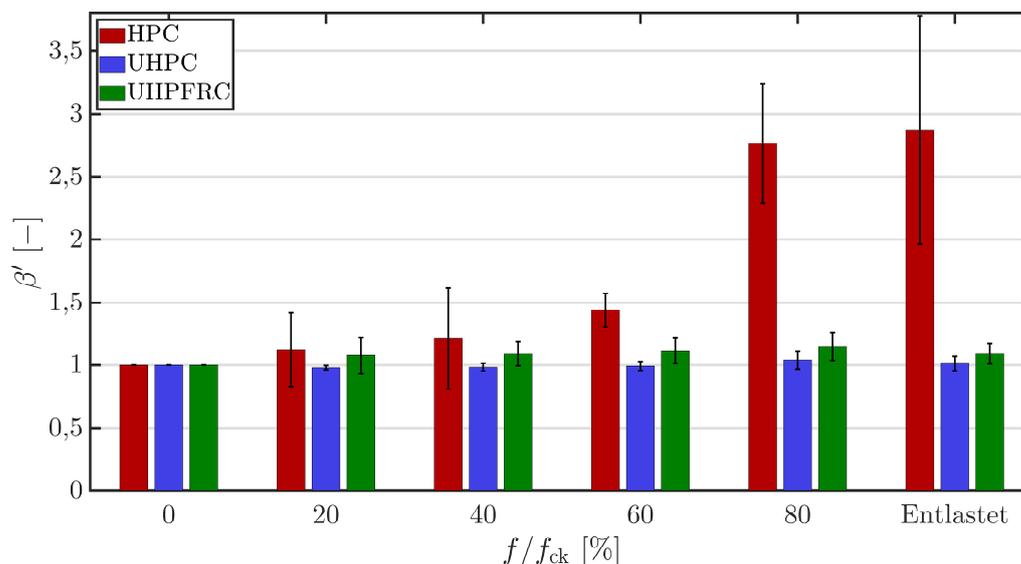


Abbildung 5.34: Relative Änderung des akustischen NLP β' in Abhängigkeit vom Druckbeanspruchungsniveau f/f_{ck} für den HPC, UHPC und UHPFRC.

Für den HPC erkennt man zunächst sehr deutlich den nahezu linearen Anstieg des relativen akustischen NLP β' bis zu einer Beanspruchung von 60% der Druckfestigkeit. Bis zu diesem Beanspruchungsniveau hat sich der akustische NLP bereits um ca. 40% im Vergleich zum Ausgangszustand erhöht. Dies bedeutet, dass hier auch von einem nahezu linearen Anstieg der Mikrorissdichte auszugehen ist. Nach der Erhöhung der Druckspannung auf 80% der Druckfestigkeit steigt der akustische NLP drastisch an. Somit ist in diesem Fall von einem beschleunigten und möglicherweise makroskopischen Risswachstum innerhalb des HPC auszugehen, welches zu einem deutlichen Anstieg des akustischen NLP führt. Grundsätzlich zeigt sich für den HPC, dass mittels des relativen akustischen NLP β' der Schädigungszustand bzw. die Materialveränderung gut beurteilt werden kann und die Sensitivität der Methode deutlich höher ist als die der zuvor betrachteten linearen Ultraschallmethode (vgl. Abbildungen 5.30 und 5.31).

Für den UHPC und den UHPFRC lässt sich in der Abbildung 5.34 ebenfalls eine Zunahme des relativen akustischen NLP β' beobachten, wobei die Veränderungen hier vergleichsweise gering ausfallen und für den UHPC im unteren Beanspruchungsniveau sogar eine leichte Abnahme des akustischen NLP β' auftritt. Die maximale Erhöhung des NLP bei 80% der Druckfestigkeit bezogen auf den unbelasteten Zustand liegt dabei

für den UHPC bei ca. 5% und für den UHPFRC bei ca. 14%. Somit gilt hier für die beiden Betone, dass in diesem Fall noch keine ausgeprägte Schädigung bzw. kein wesentliches Mikrorisswachstum vorhanden ist. Vergleicht man die Werte des relativen akustischen NLP β' bei einer Maximalbeanspruchung von 80% mit dem Wert des relativen akustischen NLP β' für den HPC (siehe Abbildung 5.34), so erhält man hier einen Schädigungszustand der vergleichbar ist mit dem des HPC unter einer Beanspruchung bei ca. 40% der Druckfestigkeit. Daran kann man gut erkennen, dass die Schädigungsevolution bzw. das Mikrorisswachstum im UHPC und UHPFRC deutlich verzögert eintritt und erst bei einer Druckbeanspruchung von ca. 80% der Druckfestigkeit bemerkbar wird.

Abschließend sollen die Ergebnisse für den relativen hysteretischen NLP α' bzw. den relativen kubischen NLP γ' durch die Auswertung der 3. Harmonischen-Amplituden im Frequenzspektrum analysiert werden (siehe Abbildungen 5.35 und 5.36). Für den HPC ist bis 60% der Druckfestigkeit kein eindeutiger Anstieg des hysteretischen NLP α' und des kubischen NLP γ' festzustellen. Bei einer maximalen Beanspruchung von 80% der Druckfestigkeit steigt jedoch der relative hysteretische NLP α' und der kubischen NLP γ' beträchtlich um ca. 25%. Nach Entlastung wird dieses Niveau für den hysteretischen NLP α' näherungsweise beibehalten und steigt für den kubischen NLP γ' noch weiter um ca. 25% an. Berücksichtigt man, dass der hysteretische NLP α' und der kubische NLP γ' insbesondere bei stark geschädigten Materialien ausgeprägt sind, so lässt sich in diesem Stadium eine makroskopische Schädigung im HPC vermuten.

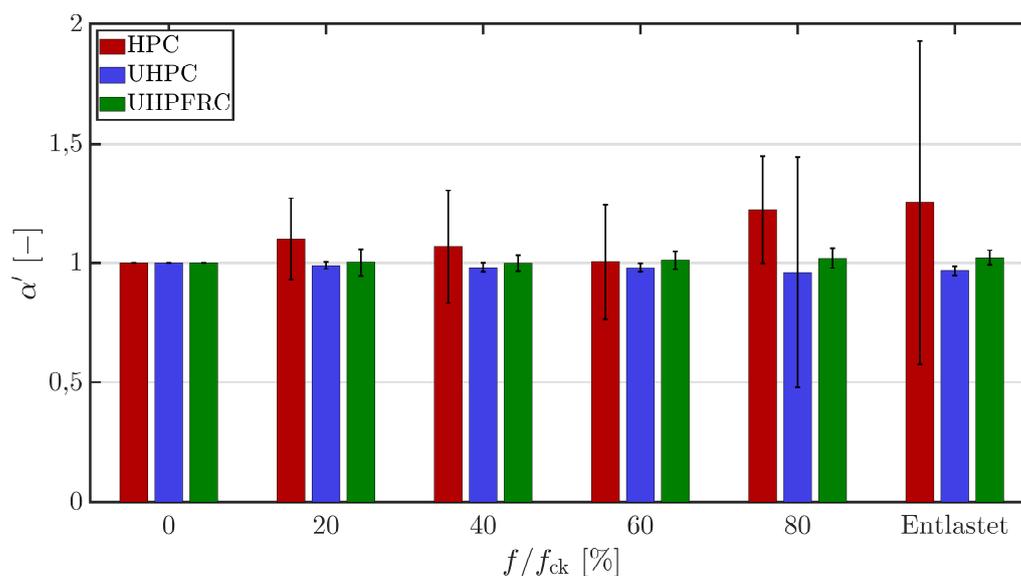


Abbildung 5.35: Relative Änderung des akustischen NLP α' in Abhängigkeit vom Druckbeanspruchungsniveau f/f_{ck} für den HPC, UHPC und UHPFRC.

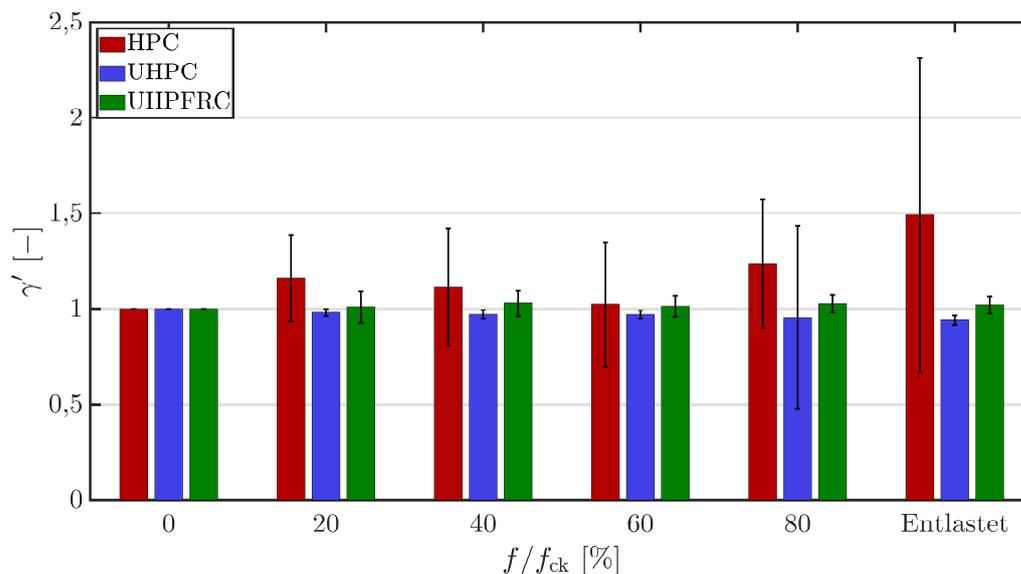


Abbildung 5.36: Relative Änderung des akustischen NLP γ' in Abhängigkeit vom Druckbeanspruchungsniveau f/f_{ck} für den HPC, UHPC und UHPFRC.

Betrachtet man in den Abbildungen 5.35 und 5.36 schließlich die Werte des relativen hysteretischen NLP α' und des relativen kubischen NLP γ' für den UHPC und den UHPFRC, so lässt sich hier kein deutlicher Anstieg dieser NLP mit der zunehmenden Beanspruchung erkennen. Im Fall des UHPC nimmt dabei der relative hysteretische NLP α' und der relative kubische NLP γ' sogar leicht ab. Dies untermauert die Vermutung, dass hier keine nennenswerte makroskopische Schädigung im Beton vorliegt und die NLP α' und γ' in diesem Fall eher ungeeignet für eine frühzeitige Schädigungsbeurteilung sind.

5.6 Ultraschalluntersuchungen zum Verbundverhalten von stahlbewehrten Hochleistungsbetonen

Stahlbeton ist heutzutage der wohl am häufigsten verwendete Verbundwerkstoff der industriellen Welt. Aufgrund der geringen Zugfestigkeit von Beton dient dabei die Stahlbewehrung der Aufnahme der vorhandenen Zugspannungen. Der Materialverbund und damit das Tragverhalten sind dabei in besonderem Maße vom Verbundzustand zwischen der Stahlbewehrung und dem Beton abhängig. Während der Lebensdauer eines Bauwerks können Überlastungen, zyklische Beanspruchung und Korrosionen die Verbundzone stark schädigen und hiermit die Tragfähigkeit deutlich reduzieren. Um die Schädigungsprozesse in der Verbundzone frühzeitig zu erkennen und diese im Sinne

einer Zustandsüberwachung zu kontrollieren, ist es notwendig die Anwendbarkeit bzw. Sensitivität zerstörungsfreier Prüfmethode, wie die Ultraschalltechnik, in diesem Anwendungsbereich zu erproben.

In der vorliegenden experimentellen Arbeit soll die Schädigung bzw. Änderung der Verbundzone durch den sogenannten Ausziehversuch (*Pull-Out* Versuch) untersucht werden. Hierbei wird der zentrisch in einem Betonwürfel eingebettete Betonstahl durch die einwirkende Zugkraft allmählich aus der Probe herausgezogen. Dadurch lässt sich die Verbundspannungs-Schlupfbeziehung, welche charakteristisch für das Verbundverhalten des Stahlbetons ist, ableiten. Der Verbundmechanismus von gerippten Betonstählen kann dabei in 4 maßgebende Phasen unterteilt werden (siehe Abbildung 5.37).

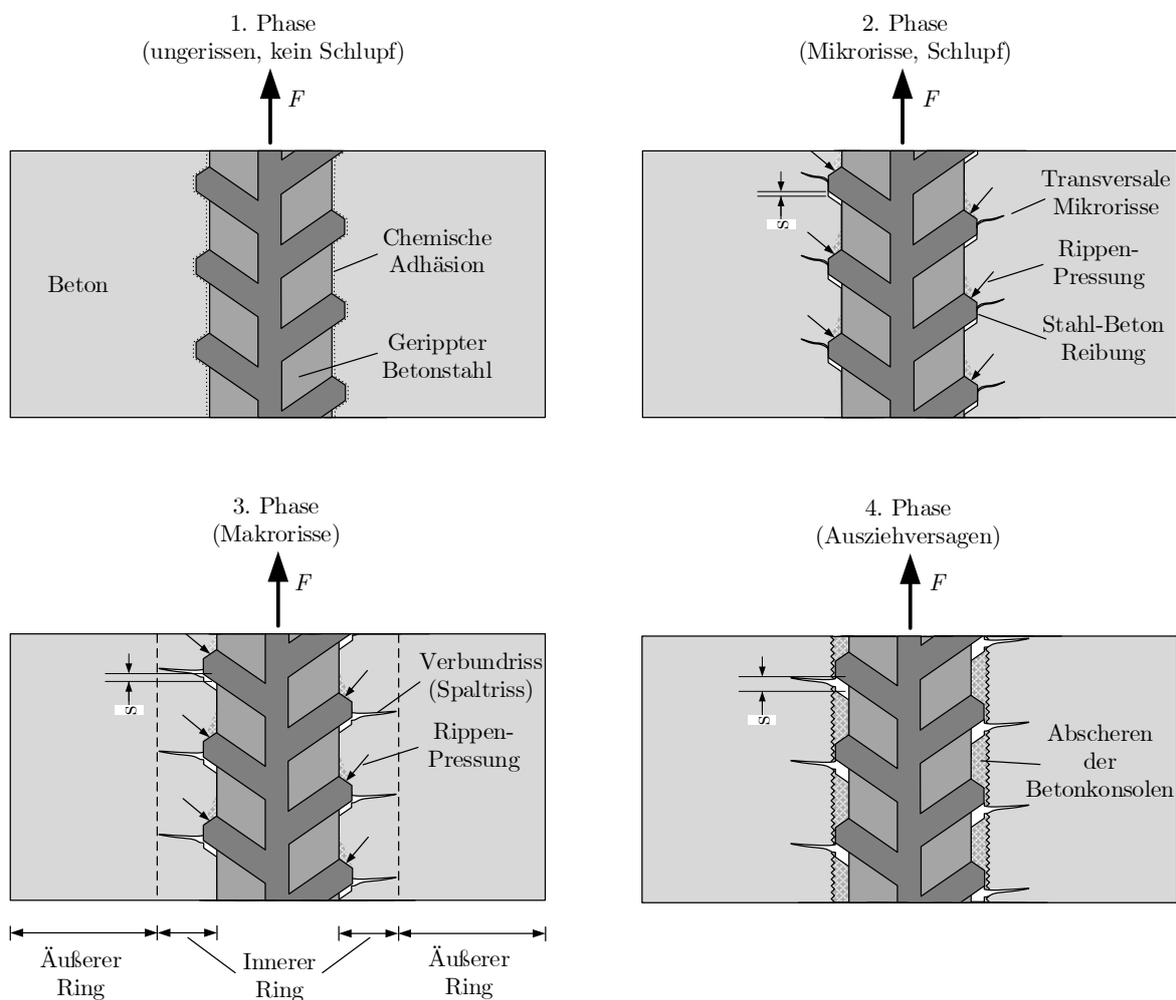


Abbildung 5.37: Hauptphasen des Verbundverhaltens von Stahlbetonproben im Ausziehversuch [72].

In der ersten Phase ist die Verbundzone des Betons noch ungerissen und es findet keine Relativverschiebung (Schlupf) zwischen dem Beton und dem Bewehrungsstahl statt.

Die Verbundkräfte werden in dieser Anfangsphase ausschließlich durch die chemische Adhäsion bzw. Haftung übertragen. Nach Überwinden des adhäsiven Verbundes, ab einer gemittelten Verbundspannung τ_b zwischen dem 0,2- bis 0,8-fachen der zugehörigen Betonzugfestigkeit f_{ct} , setzt die zweite Phase ein, welche durch ein Abstützen der Betonstahlrippen auf den umgebenden Beton gekennzeichnet ist. Infolge der zunehmenden Druckspannungen nahe der Betonstahlrippen entstehen senkrecht dazu Zugspannungen, welche zu einer Entstehung von geneigten Verbundrissen (Mikrorissen) in diesem Bereich führen. Neben dem Scherverbund wirkt gleichzeitig auch die Reibung zwischen der Betonoberfläche und der Stahloberfläche. In dieser Phase ist die Keilwirkung vernachlässigbar und es treten keine Spalt- bzw. Makrorisse auf. In der dritten Phase wird die maximale Verbundspannung $\tau_{b,max}$ erreicht ($\tau_b \geq (1 - 3)f_{ct}$). Dabei überschreiten die Ringzugspannungen die Zugfestigkeit des Betons und es entstehen stetig radialverlaufende makroskopische Längs- bzw. Spaltrisse (siehe Abbildung 5.38).

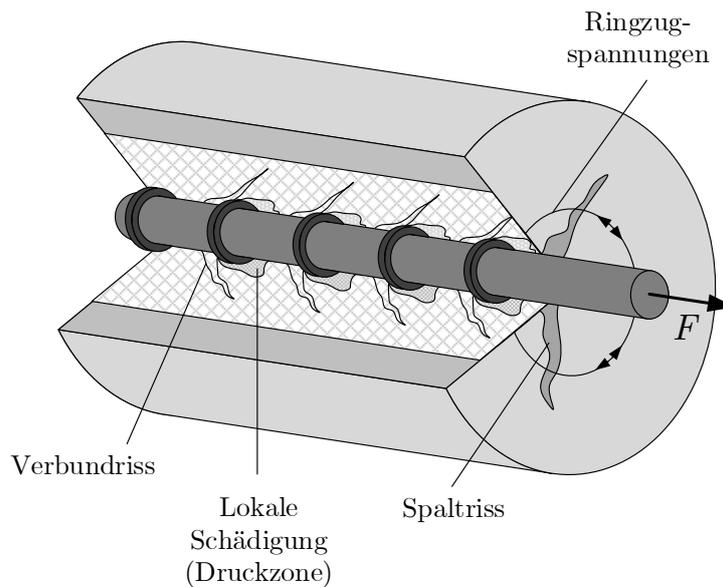


Abbildung 5.38: Rissbildung infolge der Verbundwirkung nach [150, 204].

Bei einer ausreichenden Betondeckung beschränkt sich die Schädigung auf einen inneren Bereich der Stahlbetonprobe, wobei ein äußerer Ring ungeschädigt verbleibt. In der letzten Phase werden die Betonkonsolen zwischen den Stahlrippen zerdrückt bzw. abgeschert. Anschließend wird der Verbund nur über die Reibung zwischen dem Beton und dem Stahl aufrecht gehalten und es kommt zum Ausziehen des Betonstahls. Ein guter Überblick zum Verbundverhalten von stahlbewehrten Betonstrukturen und den wesentlichen Mechanismen kann in [20, 204] gefunden werden.

In der Vergangenheit wurden bereits zahlreiche Ausziehversuche an HPC-Verbundproben [10, 11, 97] sowie UHPC- und UHPFRC-Verbundproben [94, 128] durchgeführt. Hierbei konnten im Allgemeinen steifere Verbundeigenschaften und höhere Verbundspannungen im Vergleich zu normalfestem Beton beobachtet werden.

Ultraschalluntersuchungen zum Verbundverhalten wurden bisher nur an normalfesten Betonen durchgeführt. In [177, 178] wurden dabei Ultraschallversuche an zentrisch auf Zug beanspruchten stahlbewehrten Betonprismen durchgeführt. In diesen Versuchen konnte gezeigt werden, dass die Zeitbereichs- und insbesondere die Frequenzbereichsanalyse der empfangenen Ultraschallsignale wertvolle Informationen zum Schädigungszustand der Stahlbetonproben unter einer Zugbeanspruchung liefert. Daneben wurden unter der Verwendung ultraschallbasierter Verfahren die Stadien der Schädigungsentwicklung in biegebeanspruchten Betonproben untersucht [60, 149, 158]. In diesen Studien wurden unterschiedliche Parameter und Analysemethoden zur Schädigungsbeurteilung vorgeschlagen, welche sich hauptsächlich auf die Änderung der Wellengeschwindigkeit und der Signalamplituden sowie auf die Verschiebung von Frequenzen (*Frequency-Shift*) beziehen. Hiermit konnten die Mikro- und Makroschädigungen infolge der zunehmenden Biegebeanspruchung in geeigneter Weise wiedergegeben werden. Zudem wurde unter anderem eine kontaktlose nichtlineare Ultraschalltechnik zur Schädigungsbewertung von biegebeanspruchten Stahlbetonproben vorgestellt [42]. In der zugehörigen Studie konnte die hohe Sensitivität des NLP hinsichtlich der fortschreitenden Rissentwicklung im Beton beobachtet werden. Da neben der mechanisch induzierten Schädigung insbesondere die korrosionsbedingte Verbundschädigung ein Hauptproblem bei der Gewährleistung der Dauerhaftigkeit einer Stahlbetonkonstruktion darstellt, wurden in den letzten Jahrzehnten verschiedene Ultraschalluntersuchungen zur Überwachung der Korrosion in stahlbewehrten Betonproben durchgeführt. Hierbei wurden lineare [63, 190, 229] und nichtlineare Ultraschalltechniken [56, 110, 226] zur Beurteilung des Verbundzustandes erfolgreich eingesetzt.

Basierend auf diesen Erkenntnissen soll in der nachfolgenden ultraschalltechnischen Untersuchung versucht werden, die im oberen Abschnitt beschriebenen Phasen der Schädigungsentwicklung und dabei insbesondere den Übergang der Mikrorissbildung zur Makrorissbildung besser zu verstehen. Aufgrund der grundsätzlichen Fokussierung auf die frühzeitige Schädigungsentwicklung wurden aber keine vollständigen Ausziehversuche durchgeführt. Daher bezieht sich diese Untersuchung im Wesentlichen auf die zuvor beschriebenen Phasen 1 bis 3 im Verbundverhalten.

5.6.1 Probenherstellung und Versuchsdurchführung

Für diesen Versuch wurden insgesamt 30 (10 für jede Betonrezeptur) würfelförmige Stahlbeton-Verbundproben (Kantenlänge $a = 100$ mm) mit einem zentrisch einbetonierten (4-reihig) gerippten Betonstahl (B500B, Stabdurchmesser $d_s = 12$ mm) hergestellt. Dabei wurden die drei Betonrezepturen aus den Tabellen 5.1-5.3 für den HPC, UHPC und UHPFRC verwendet. Die Abmessung der Ausziehproben bzw. die ausgeschalteten Versuchskörper sind dabei in den Abbildungen 5.39 und 5.40 dargestellt. Um eine gleichmäßige Beanspruchung in der Verbundzone zu erzielen, wurde die Verbundlänge mit $l_b = 5d_s = 60$ mm mittig in der würfelförmigen Betonprobe angesetzt. Dazu erzeugten zwei Plastikhüllen rund um die Einbettungslänge eine verbundfreie Zone. Diese wurden zuvor an den vordefinierten Abständen mittels Heißkleber am Betonstahl fixiert.

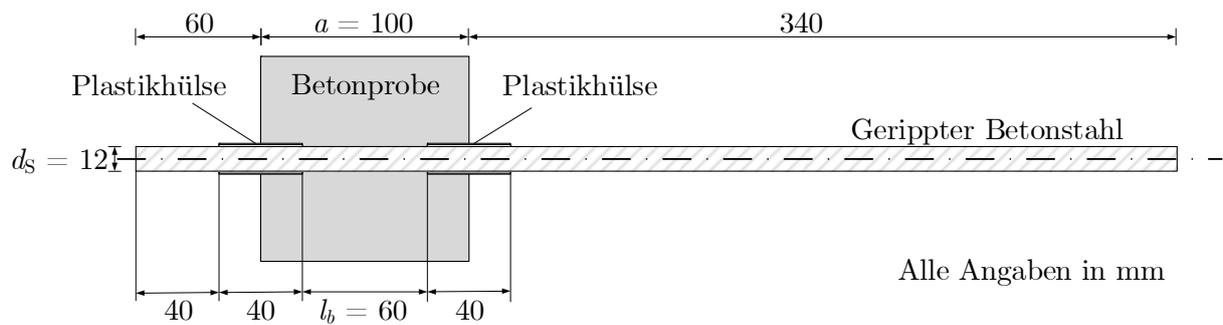


Abbildung 5.39: Probengeometrie und Abmessungen.



Abbildung 5.40: Stahlbetonverbundproben aus HPC, UHPC und UHPFRC.

Die Abbildung 5.41 zeigt die zur Herstellung der Ausziehproben verwendete Holzschalung. Vor dem Betonieren wurden zunächst die Betonstähle in die hierfür vorgesehenen Bohrungen an den Seitenwänden der Schalung eingesetzt (siehe Abbildung 5.42) und anschließend die Schalung mit dem Frischbeton befüllt. Nach dem Einfüllvorgang wurden die Frischbeton-Proben auf einem Rütteltisch für ca. 60 s verdichtet. Die Ausschalung der Proben erfolgte ca. 24 Stunden nach dem Betonieren. Die nachfolgenden Prüfungen wurden nach dem Erreichen der 28-Tage-Festigkeit durchgeführt.

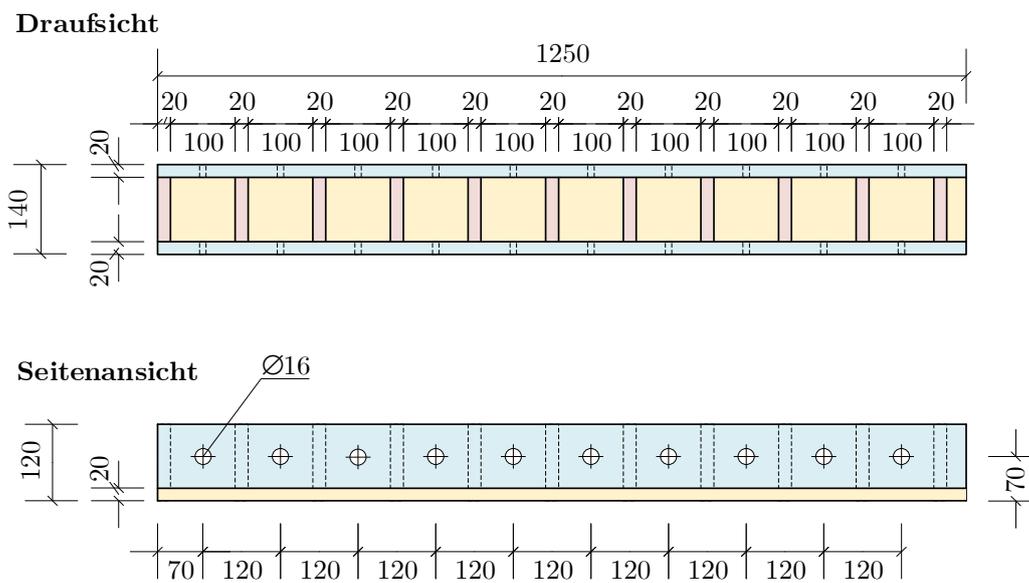


Abbildung 5.41: Schalungsplan zur Herstellung der Ausziehproben.



Abbildung 5.42: Holzschalung zur Herstellung der Ausziehproben mit eingesetzten Bewehrungsstählen.

Die anschließenden Ausziehversuche wurden an einem speziell dafür konstruierten Versuchsaufbau durchgeführt (siehe Abbildungen 5.43 und 5.44). Dabei lagert die Stahlbetonverbundprobe auf einem Holzunterbau, dessen obere Auflageplatte in der Mitte eine Durchgangsbohrung mit einem Durchmesser von 60 mm besitzt. Oberhalb des Probekörpers liegen die Kraftmessdose und der Hydraulik-Hubzylinder (Lastkapazität von 200 kN) auf, welche jeweils durch eine Stahlplatte mit einer Durchgangsbohrung ($\varnothing 20$ mm) voneinander räumlich getrennt sind. Im oberen Bereich des Versuchsaufbaus dient eine Presshülse am Betonstahl (Keilverbinding) der Einspannung der Verbundprobe. Während des Ausziehversuches wird der Hydraulikdruck im Hubzylinder per Handpumpe stufenweise erhöht. Hierdurch wird der Kolben des Hydraulik-Hubzylinders in vertikaler Richtung ausgefahren und es wirkt über die festgezogene Presshülse eine Zugkraft am Betonstahl. Die sich einstellende Druck- bzw. Zugkraft wird dabei von der zwischenliegenden Kraftmessdose erfasst. Weiterhin sind am unteren Ende des Betonstahls insgesamt drei induktive Wegaufnehmer zur Aufzeichnung des sich entwickelten Schlupfes s angebracht. Anschließend werden die Daten der Kraftmessdose und der Wegaufnehmer zur weiteren Analyse und insbesondere zur Visualisierung an einen PC übertragen.



Abbildung 5.43: Realer experimenteller Aufbau zur Durchführung der Ausziehversuche und der Ultraschallmessung.

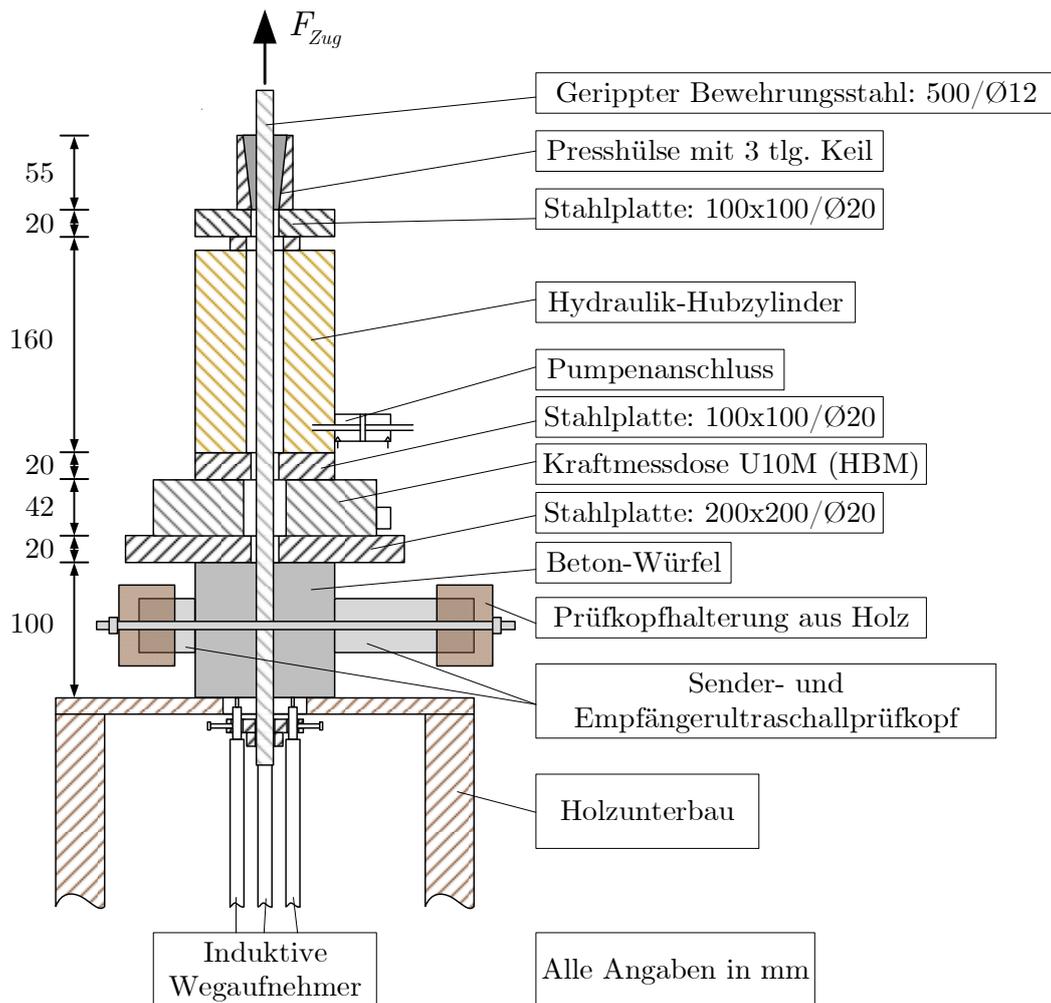


Abbildung 5.44: Schematische Darstellung des experimentellen Aufbaus zur Durchführung der Ausziehversuche und der Ultraschallmessung.

Die Ultraschalluntersuchungen wurden während des oben beschriebenen Ausziehversuches durchgeführt. Hierzu wurden an den zwei gegenüberliegenden freien Seiten der Verbundprobe niederfrequente Longitudinalwellenprüfköpfe über eine Holzhalterung angebracht. Für alle Versuche wurde dabei eine Ultraschalluntersuchung im Durchschallungsmodus durchgeführt. Dabei wurde ein schmalbandiger Prüfkopf (Sender) mit einer Mittenfrequenz von 200 kHz und ein breitbandiger Prüfkopf (Empfänger) mit einer Mittenfrequenz von 500 kHz eingesetzt. Der prinzipielle Messaufbau ist dabei im Wesentlichen identisch zu dem der in den vorigen Abschnitten beschriebenen Versuchen (siehe Abbildung 5.45).

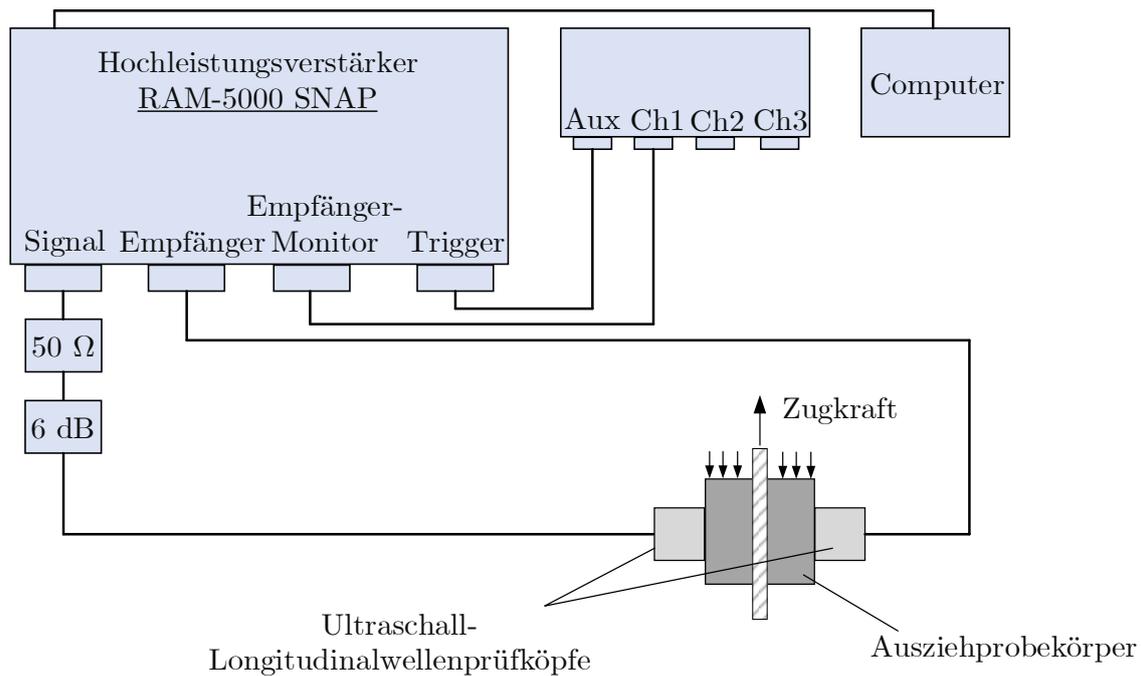


Abbildung 5.45: Schematische Darstellung der Ultraschallmessung an der durch eine Zugkraft beanspruchten würfelförmigen Ausziehverbundprobe.

Im Unterschied zu den bisherigen Versuchen wurde die Signalanalyse direkt über das am Oszilloskop empfangene Zeitsignal und mittels des integrierten Empfangsmoduls des Ritec-RAM 500 SNAP Systems durchgeführt. Um ein möglichst glattes (rauscharmes) Zeitsignal für die spätere Auswertung am PC zu erhalten, wurden die aufgezeichneten Zeitsignale am Oszilloskop aus dem Mittelwert über 256 „Samples“ gebildet. Für die nachfolgenden Ultraschalluntersuchungen wurde ein Eingangssignal mit einer Amplitude von ca. 500 V bei einer Frequenz von 220 kHz und einer Signaldauer von 8 Schwingungszyklen für alle Betonmischungen verwendet.

5.6.2 Ergebnisse und Diskussionen

Im Vorfeld der Ultraschallexperimente wurde zunächst an jeweils drei Verbundproben pro Betonmischung die maximal aufnehmbare Zugkraft F_{\max} bestimmt. Dabei versagten die HPC- und UHPC-Proben ausschließlich durch ein Sprenggrissversagen (longitudinale Spaltrisse, siehe Abbildungen 5.46 und 5.47), was als Folge der geringen Betondeckung vor dem Schubversagen auftritt. Für die UHPFRC-Proben ergab sich aufgrund der hohen Verbundfestigkeit (bzw. hohen Matrixzugfestigkeit) ein Versagen durch das Erreichen der Fließgrenze des Betonstahls.

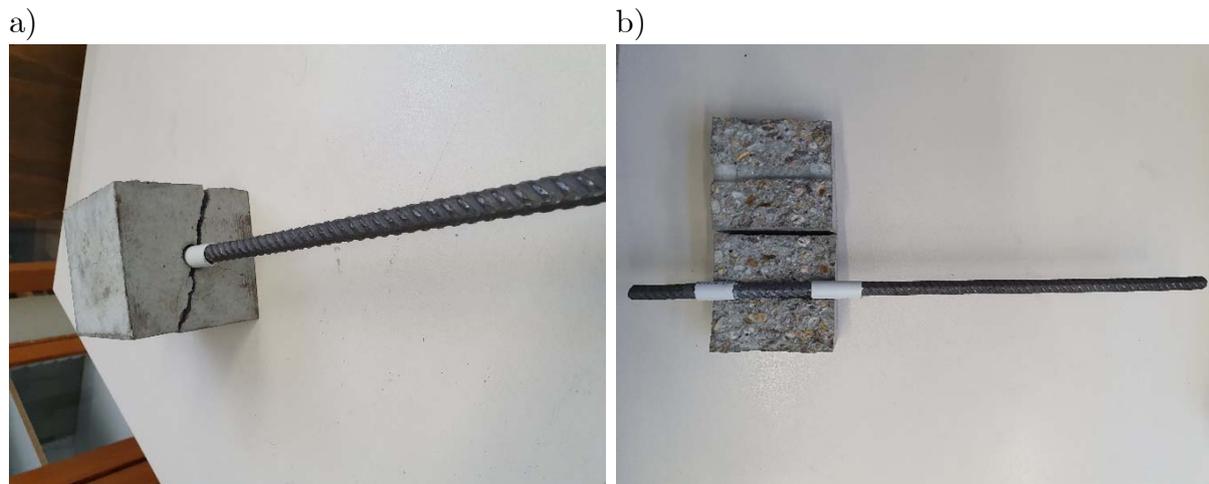


Abbildung 5.46: Sprenggrissversagen der HPC-Ausziehprobe: a) Aussenansicht und b) Innenansicht.

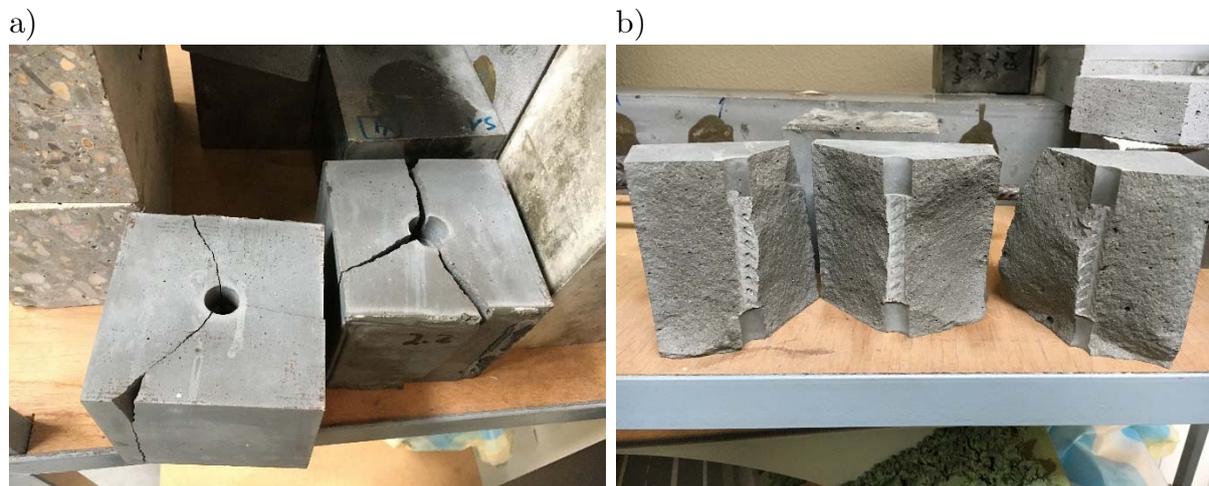


Abbildung 5.47: Sprenggrissversagen der UHPC-Ausziehprobe: a) Aussenansicht und b) Innenansicht.

Entsprechend dieser Voruntersuchungen wurden die nachfolgenden Ausziehversuche bis nahe der maximal aufnehmbaren Zugkraft durchgeführt. Diese lag für die HPC-Proben bei $F_{\max} = 45 \text{ kN}$, für die UHPC-Proben bei $F_{\max} = 25 \text{ kN}$ und für die UHPFRC-Proben bei $F_{\max} = 65 \text{ kN}$. Hierbei muss angemerkt werden, dass die maximal aufnehmbare Zugkraft für den UHPC deutlich niedriger lag als für die HPC-Proben. Vermutlich wirkte sich hier das sehr spröde Materialverhalten des UHPC negativ auf das Zugtragverhalten aus und es lagen keine plastischen Tragreserven wie beim HPC vor. Ausgehend vom unbelasteten Zustand wurde die Zugbelastung stufenweise bis F_{\max} aufgebracht und die zugehörigen Ultraschallzeitsignale sowie die Relativverschiebungen zwischen Betonstahl und Beton gemessen.

Für die nachfolgende ultraschalltechnische Bewertung der Schädigungsentwicklung dienen die relativen Änderungen der longitudinalen Wellengeschwindigkeit $c_{L,0}/c_L$ und der longitudinalen Dämpfung $\alpha'_{D,L}$ sowie die relativen Änderungen der akustischen NLP (α' , β' und γ') als die zentralen Untersuchungsgrößen. Hierzu wurden zur Dämpfungsmessung nur die Fundamentalamplituden A_1 bei $f = 220$ kHz ausgewertet. Zur Bestimmung der Änderungen der akustischen NLP wurden die 2. bzw. 3. Harmonischen-Amplituden (A_2 und A_3) analysiert und entsprechend der numerischen Untersuchungen aus dem Abschnitt 4.1.2 die folgenden relativen akustischen NLP

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{(A_3/A_1^2)}{(A_{3,0}/A_{1,0}^2)}, \quad \beta' = \frac{\beta}{\beta_0} = \frac{(A_2/A_1^2)}{(A_{2,0}/A_{1,0}^2)}, \quad \gamma' = \frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{(A_3/A_1^3)}{(A_{3,0}/A_{1,0}^3)} \quad (5.11)$$

für die Schädigungsbewertung verwendet. Die relativen Änderungen der maßgebenden Ultraschallparameter beziehen sich dabei alle auf den ungeschädigten Ausgangszustand (Index „0“) vor der Belastung.

Zur Erprobung einer digitalen Signalanalysemethode wurde im Gegensatz zu den vorherigen experimentellen Versuchen die Änderung der longitudinalen Wellengeschwindigkeit nicht über die Software des RAM 5000-Messsystems durchgeführt, sondern mittels der Kreuzkorrelation zweier Zeitsignale. Zur Veranschaulichung dieses Vorgehens zeigt die Abbildung 5.48 die empfangenen Ultraschall-Zeitsignale (UHPFRC-Probe) für den unbeanspruchten ($F = 0$ kN) und den beanspruchten Zustand ($F = 65$ kN). Wie hier deutlich zu erkennen ist, sind die Signale auf der Zeitachse leicht verschoben und weisen damit eine Zeitverschiebung auf.

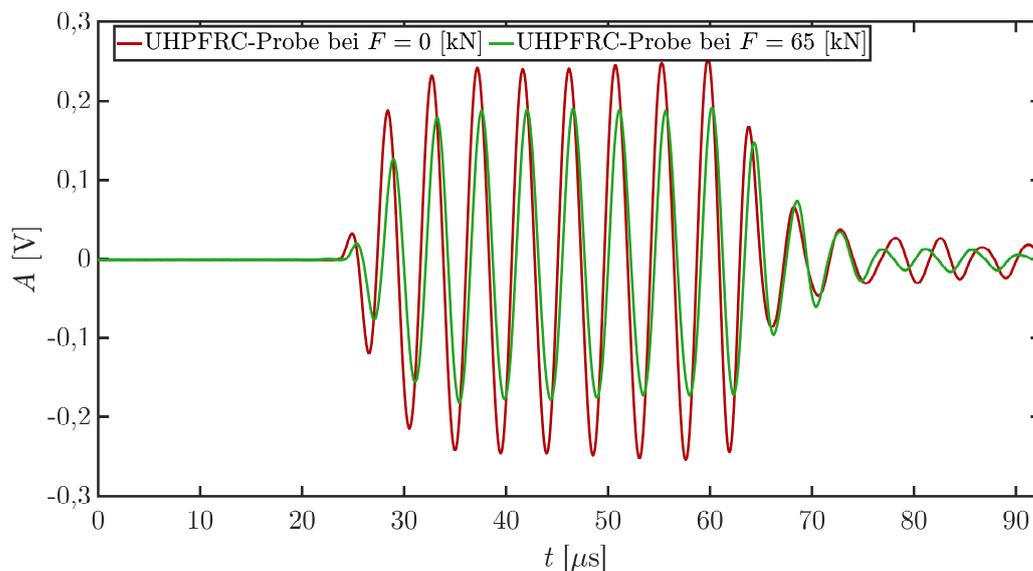


Abbildung 5.48: Empfangene Ultraschall-Zeitsignale für eine UHPFRC-Verbundprobe im unbelasteten Ausgangszustand bei $F = 0$ kN und im belasteten Zustand bei $F = 65$ kN.

Um die zeitliche Verschiebung beider Signale im beanspruchten und unbeanspruchten Zustand möglichst exakt zu bestimmen, wird nun der Korrelationskoeffizient R_{xy} in Abhängigkeit von der Zeitverschiebung gebildet, wobei der Index „ xy “ hierbei für die zwei zu korrelierenden Signale x und y steht. Dabei erhält man an der Stelle τ des maximalen Korrelationskoeffizienten R_{xy} die beste Übereinstimmung zwischen den beiden Signalen und hiermit die gesuchte Laufzeitdifferenz Δt . Nach der Bestimmung des Absolutwertes der Laufzeit t_0 des Ultraschallsignals im unbelasteten Zustand lässt sich hieraus bei einer konstanten Pfadlänge (Dicke a des Bauteils) die relative longitudinale Wellengeschwindigkeitsänderung mit $\Delta c_L/c_{L,0} = \Delta t/t_0$ bestimmen.

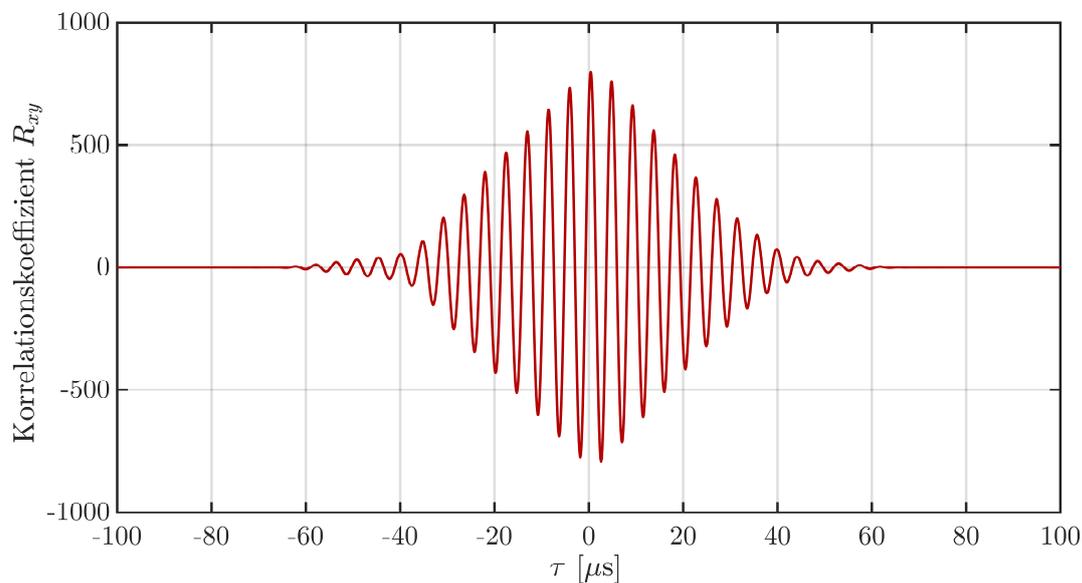


Abbildung 5.49: Kreuzkorrelationskoeffizient in Abhängigkeit von der Zeitverschiebung τ ermittelt aus den Signalen in der Abbildung 5.48.

Für die weitere Analyse des Frequenzspektrums wurden die entsprechenden Zeitsignale unter der Verwendung eines „Hanning-Fensters“ und der FFT in den Frequenzbereich transformiert. Die Abbildung 5.50 zeigt hierzu exemplarisch das empfangene Ultraschall-Zeitsignal im unbeanspruchten Zustand bei $F = 0$ kN und im beanspruchten Zustand bei $F = 32,5$ kN für eine ausgewählte UHPFRC-Verbundprobe. Unter der Betrachtung des zugehörigen Frequenzspektrums in der Abbildung 5.51 sind die Harmonischen-Amplituden bei 220 kHz, 440 kHz und 660 kHz deutlich sichtbar. Weiterhin lässt sich feststellen, dass die 2. und 3. Harmonischen für die beanspruchte Verbundprobe größer sind.

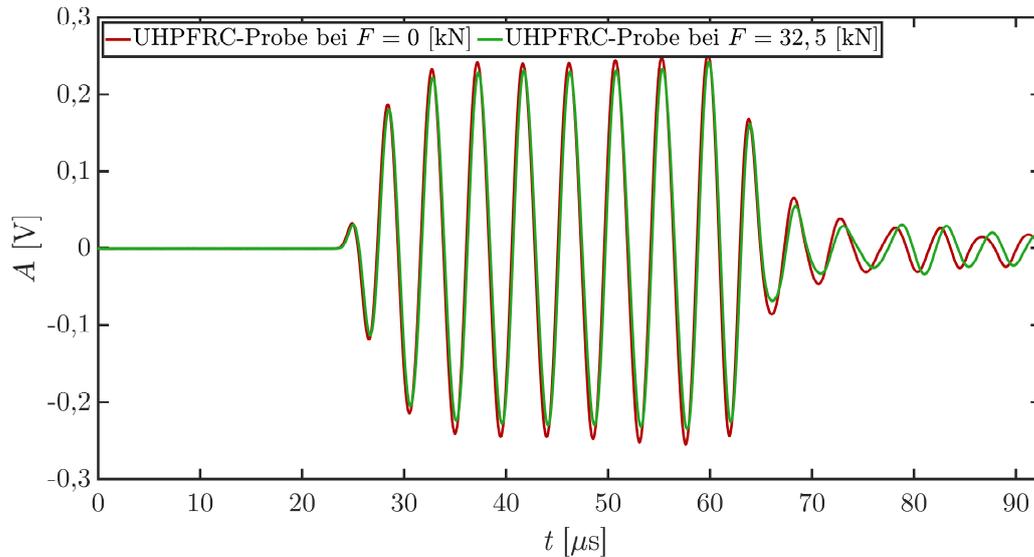


Abbildung 5.50: Empfangene Ultraschall-Zeitsignale für eine UHPFRC-Verbundprobe im unbelasteten Ausgangszustand bei $F = 0$ kN und im belasteten Zustand bei $F = 32,5$ kN.

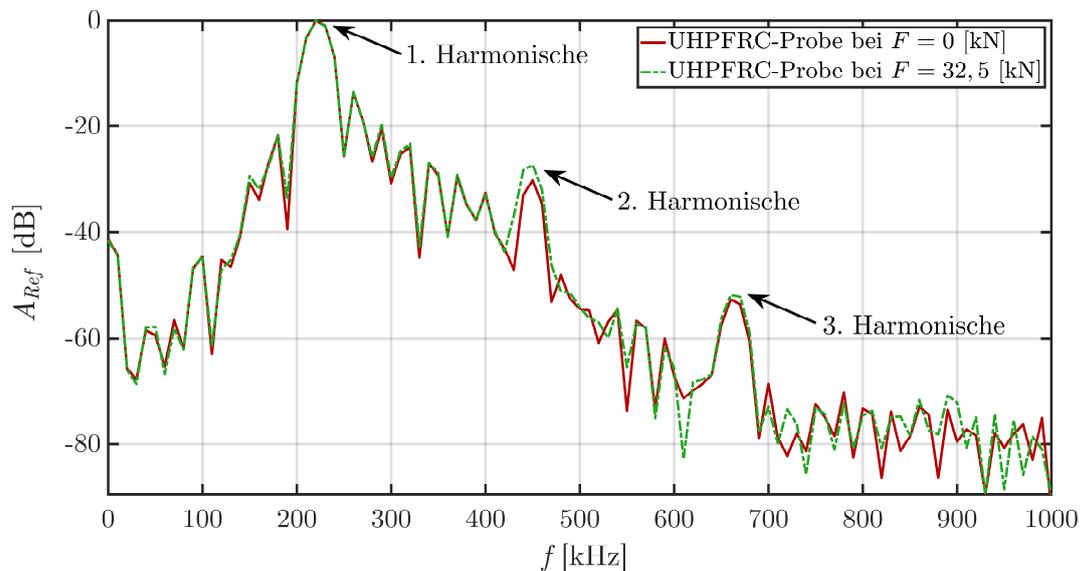


Abbildung 5.51: Normierte Frequenzspektren der Ultraschall-Zeitsignale in der Abbildung 5.50.

In der weiteren Auswertung wurden die experimentellen Daten für die HPC-, UHPC- und UHPFRC-Verbundproben über eine Mittelwertbildung aller getesteten Verbundproben pro Betonmischung bestimmt. Zur Bestimmung der Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen bzw. Schlupf-Kraft-Beziehungen der HPC-, UHPC- und UHPFRC-Verbundproben, wurde die Abhängigkeit des gemessenen Schlupfes (Mittelwert aller Proben) von der Ausziehungskraft (Kraftmessdose) für jede Betonrezeptur über eine polynomiale Regression 3. Grades (Ausgleichskurve) nach

$$s(F) = p_0 + p_1F^1 + p_2F^2 + p_3F^3 \quad (5.12)$$

angenähert. Hierbei sind F die Ausziehungskraft, s der Schlupf und p_{0-3} die Koeffizienten des kubischen Näherungspolynoms. Die entsprechenden Koeffizienten der polynomialen Regression p_{0-3} sind in der Tabelle 5.11 für die HPC-, UHPC- und UHPFRC-Verbundproben mit den zugehörigen Bestimmtheitsmaßen R^2 angegeben.

Tabelle 5.11: Koeffizienten des Regressionspolynoms 3. Grades zur Bestimmung der Schlupf-Kraft-Ausgleichskurven für den HPC, UHPC und UHPFRC und das zugehörige Bestimmtheitsmaß R^2 .

	p_0 [μm]	p_1 [$\mu\text{m}/\text{kN}$]	p_2 [$\mu\text{m}/\text{kN}^2$]	p_3 [$\mu\text{m}/\text{kN}^3$]	R^2 [–]
HPC	0,55882909	-0,2064780	0,02527691	0,00017955	0,9981
UHPC	-0,64364919	-0,95696594	0,38839493	-0,00906011	0,9291
UHPFRC	-0,33020383	0,02408580	0,00012758	0,00001542	0,8968

Man erkennt anhand des hohen Bestimmtheitsmaßes die gute Übereinstimmung der Ausgleichskurven mit den realen gemittelten Schlupf-Kraft-Messdaten. Hierbei zeigt die Abbildung 5.52 die Ausgleichskurven und die zugehörigen gemittelten Messdaten als Schlupf-Kraft-Kurve für die HPC-, UHPC- und UHPFRC-Verbundproben. Im Folgenden wurde die Verbundspannung näherungsweise über die Gleichung

$$\tau_b = \frac{F}{\pi d_s l_b} \quad (5.13)$$

bestimmt und die Ausgleichskurven sowie die gemittelten Messdaten der Schlupf-Kraft-Beziehungen übernommen, um hiermit die für Ausziehversuche üblichen Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen für den HPC, UHPC und UHPFRC zu ermitteln.

Betrachtet man in den Abbildungen 5.52 und 5.53 zunächst die Verläufe für die HPC-Verbundproben, so lässt sich feststellen, dass bis ca. $F = 9 \text{ kN}$ bzw. ca. $\tau_b = 5 \text{ N/mm}^2$ kein Schlupf registriert wird. Bis zu diesem Punkt hat man somit näherungsweise einen adhäsiven schlupffreien Verbund (Phase 1). Bei einer weiteren Laststeigerung entwickelt sich die Schlupfbildung deutlich. Dies stellt den Übergang zum Scherverbund dar. Im Folgenden werden sukzessive die Phasen 2 und 3 (Mikrorissbildung und Makrorissbildung) des Verbundverhaltens erreicht.

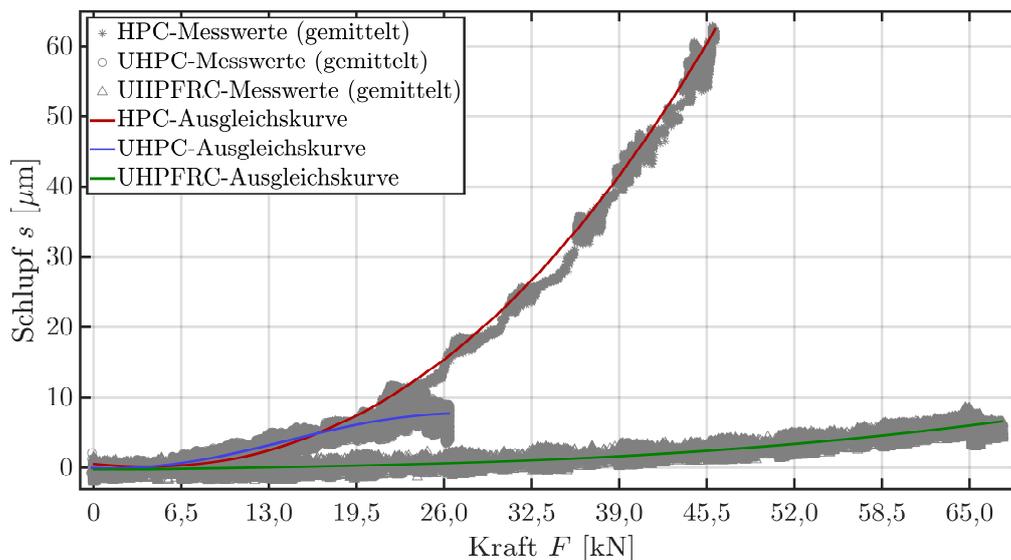


Abbildung 5.52: Mittelwerte und zugehörige Ausgleichskurven des Schlupfes in Abhängigkeit von der Zugkraft F (Schlupf-Kraft-Kurven) für die HPC-, UHPC- und UHPFRC-Verbundproben.

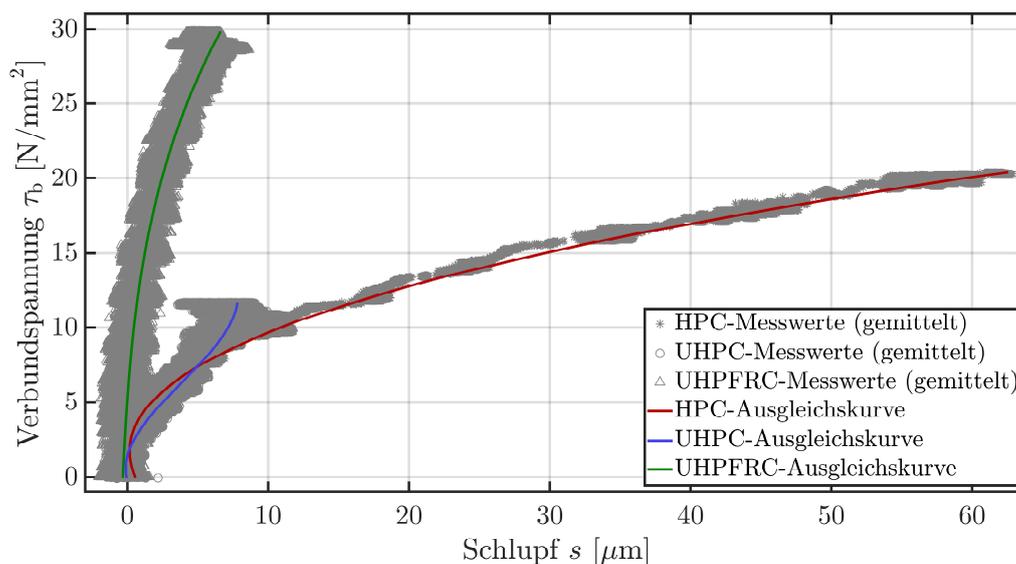


Abbildung 5.53: Mittelwerte und zugehörige Ausgleichskurven der Verbundspannung in Abhängigkeit vom Schlupf (Verbundspannungs-Schlupf-Kurven) für die HPC-, UHPC- und UHPFRC-Verbundproben.

Für die UHPC-Verbundproben zeigt sich in den Abbildungen 5.52 und 5.53 generell nur ein geringer Schlupf bis zum näherungsweisen Erreichen der maximalen Verbundfestigkeit. Die Überwindung der adhäsiven Haftung und damit der Übergang zum Scherverbund fängt dabei frühzeitig ab ca. $\tau_b = 2 \text{ N}/\text{mm}^2$ bzw. ca. $F = 2,5 \text{ kN}$ an. Dabei tritt bis zum Sprengversagen keine ausgeprägter Schlupfbildung auf, was wiederum das sehr spröde Materialverhalten des faserfreien UHPC unterstreicht.

Betrachtet man hingegen die Verläufe der faserverstärkten UHPC-Verbundproben (UHPFRC) in den Abbildungen 5.52 und 5.53, so stellt man fest, dass die Verbundfestigkeit deutlich höher liegt als bei den faserfreien UHPC-Verbundproben. Bis zum Erreichen der Fließgrenze des Betonstahls bei der Maximallast tritt auch hier keine ausgeprägte Schlupfbildung auf ($s \leq 10 \mu\text{m}$). Der nahezu schlupffreie Verbund wird dabei bis zu einer Verbundspannung von $\tau_b = 8 \text{ N/mm}^2$ bzw. einer Last von ca. $F = 13 \text{ kN}$ aufrecht gehalten.

Nachfolgend sollen die zugehörigen Änderungen der Ultraschallparameter analysiert und in Zusammenhang mit den oben dargestellten Schlupfbeziehungen gebracht werden. Um hierbei die relativen Änderungen der Ultraschallparameter für die HPC-, UHPC- und UHPFRC-Verbundproben in Abhängigkeit vom Beanspruchungsniveau (Belastungsniveau) direkt miteinander vergleichen zu können, wird das Beanspruchungsniveau als Verhältnis zwischen der gemessenen Ausziehungskraft F und der maximal aufnehmbaren Zugkraft F_{max} definiert.

In der Abbildung 5.54 sind zunächst die relativen Änderungen der longitudinalen Wellengeschwindigkeit $c_L/c_{L,0}$ in Abhängigkeit vom Beanspruchungsniveau F/F_{max} für die HPC-, UHPC- und UHPFRC-Verbundproben angegeben.

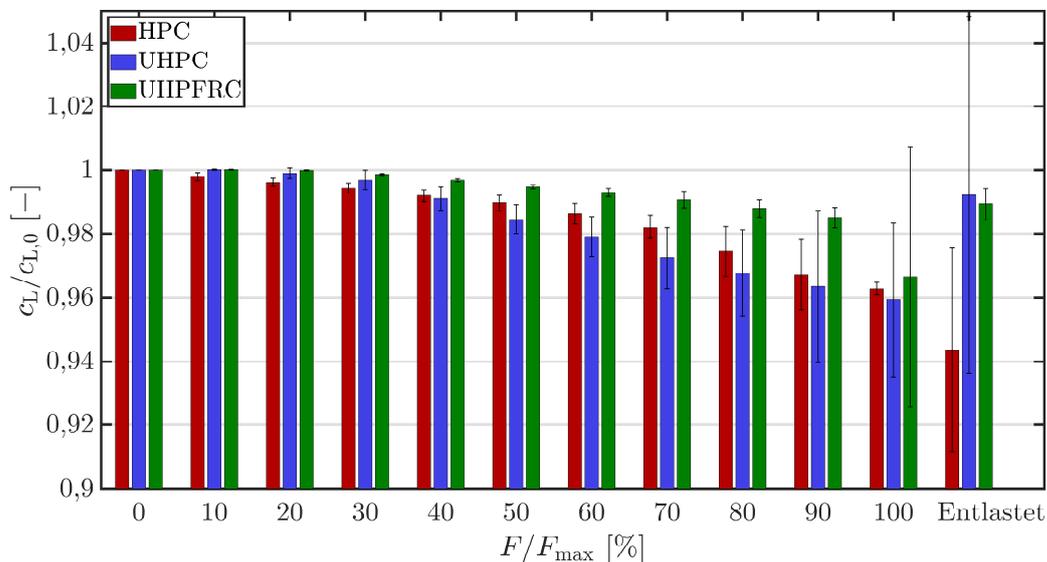


Abbildung 5.54: Relative Änderung der longitudinalen Wellengeschwindigkeit $c_L/c_{L,0}$ in Abhängigkeit vom Beanspruchungsniveau F/F_{max} für die HPC-, UHPC- und UHPFRC-Verbundproben.

Für die HPC-Verbundproben zeigt sich bis zu einem Beanspruchungsniveau von ca. 50% ($F = 22,5 \text{ kN}$) nur eine geringfügige Abnahme der longitudinalen Wellengeschwindigkeit c_L . Bei einer weiteren Laststeigerung über dieses Niveau hinaus nimmt die Wellengeschwindigkeit stark ab und man erhält nach der Entlastung eine bleibende

Änderung von ca. 6% im Vergleich zum unbelasteten Ausgangszustand. Dies zeigt deutlich, dass nach der Maximalbeanspruchung die Steifigkeit des Verbundkörpers stark abgenommen hat und eine makroskopische Schädigung im Bauteil vorhanden ist.

Für die UHPC-Verbundproben ergibt sich, wie in der Abbildung 5.54 dargestellt, beim unteren Beanspruchungsniveau bis 10% ($F = 2,5$ kN) keine messbare Wellengeschwindigkeitsänderung. Über diese Belastung hinaus nimmt die Geschwindigkeitsänderung jedoch deutlich zu und man erhält bei der Maximalbeanspruchung von 100% ($F = 25$ kN) eine Geschwindigkeitsabnahme von ca. 4%, welche jedoch nach der Entlastung deutlich auf ca. 1% zurück geht. Hierbei ist die Streuung in den jeweiligen Proben infolge der starken Schädigung sehr groß.

Im Fall der UHPFRC-Verbundproben (siehe Abbildung 5.54) lässt sich bis zum Erreichen eines Beanspruchungsniveaus von ca. 20% ($F = 13$ kN) keine Geschwindigkeitsänderung feststellen. Darüber hinaus nimmt die Wellengeschwindigkeit leicht ab. Unter einer Maximalbeanspruchung von 100% ($F = F_{\max} = 65$ kN) ist dann eine rapide Abnahme der Wellengeschwindigkeit um ca. 3% im Vergleich zum Ausgangszustand zu verzeichnen, welche teilweise auch nach der Entlastung noch vorhanden ist (ca. 1%). Somit kann man daraus ableiten, dass die Steifigkeitsverluste und das Schädigungswachstum im UHPFRC erst beim Erreichen der Höchstlast bemerkbar auftreten.

In der Abbildung 5.55 sind die relativen Änderungen des longitudinalen Dämpfungsparameters $\alpha'_{D,L}$ in Abhängigkeit vom Beanspruchungsniveau F/F_{\max} für die HPC-, UHPC- und UHPFRC-Verbundproben dargestellt.

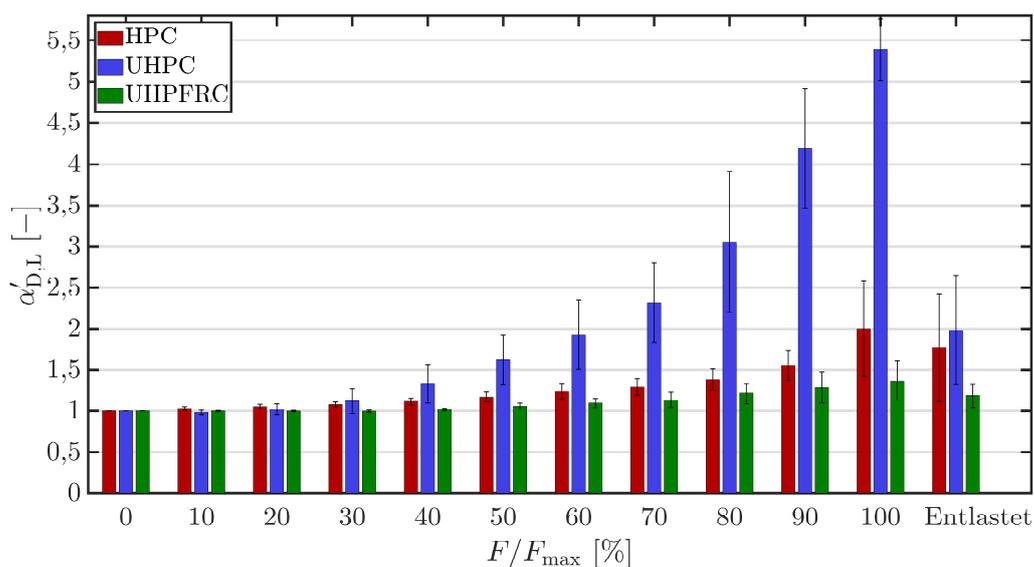


Abbildung 5.55: Relative Änderung des akustischen Dämpfungsparameters $\alpha'_{D,L}$ bei $f = 220$ kHz in Abhängigkeit vom Beanspruchungsniveau F/F_{\max} für die HPC-, UHPC- und UHPFRC-Verbundproben.

Für alle Betone zeigt sich eine deutlich höhere Sensitivität des Dämpfungsparameters zum Beanspruchungsniveau bzw. zur Schädigung.

Betrachtet man hier zunächst die Änderungen für die HPC-Verbundproben, so kann man hier bereits bei geringer Belastung bis zu einem Beanspruchungsniveau von 50% (bei $F = 22,5$ kN) eine leichte Zunahme des Dämpfungsparameters um bis zu 20% feststellen. Darüber hinaus nimmt die relative Änderung des Dämpfungsparameters $\alpha'_{D,L}$ stark zu. Unter Höchstbeanspruchung von 100% (bei $F = F_{\max} = 45$ kN) erhält man nahezu eine Verdopplung des Dämpfungsparameters, welcher auch nach der Entlastung auf einem hohen Niveau verbleibt.

Der Dämpfungsparameter $\alpha_{D,L}$ für die UHPC-Verbundproben bleibt bis zu einem Beanspruchungsniveau von ca. 20% ($F = 5$ kN) kaum verändert (siehe Abbildung 5.55). Anschließend steigt die Dämpfung rapide an und ist bei der Maximalbeanspruchung von 100% (bei $F = F_{\max} = 25$ kN) mehr als verfünffacht gegenüber dem Ausgangszustand. Nach der Entlastung geht diese Änderung deutlich zurück und bleibt jedoch auf einem hohen Niveau bei ca. 200%.

Für die UHPFRC-Verbundproben (siehe Abbildung 5.55) verändert sich der Dämpfungsparameter $\alpha_{D,L}$ bis zu einem Beanspruchungsniveau von 30% ($F = 19,5$ kN) zunächst kaum und steigt dann allmählich bis auf ca. 35% an. Nach der Entlastung bleibt auch hier eine Änderung des Dämpfungsparameters bestehen. Im Vergleich zum HPC und UHPC fällt hierbei die deutlich geringere Dämpfungsänderung bei der Höchstbeanspruchung auf.

Schließlich sollen die relativen Änderungen der akustischen NLP in Abhängigkeit vom Beanspruchungsniveau F/F_{\max} für die HPC-, UHPC- und UHPFRC-Verbundproben dargestellt werden. Die Abbildung 5.56 zeigt hierzu die relative Änderung des klassischen NLP β' (siehe Gleichung (5.11)) in Abhängigkeit vom Beanspruchungsniveau F/F_{\max} für die HPC-, UHPC- und UHPFRC-Verbundproben.

Für die HPC-Verbundproben erkennt man in der Abbildung 5.56 bereits zu Beginn der Beanspruchung eine gleichmäßige nahezu lineare Zunahme des relativen akustischen NLP β' bis zur Höchstbeanspruchung von 100%. Das Änderungsniveau liegt dabei im Bereich der zuvor betrachteten Dämpfungsänderung. Nach der Entlastung geht der relative akustische NLP β' wieder zurück, bleibt jedoch deutlich über dem Ausgangsniveau im unbelasteten Zustand.

Bei den UHPC-Verbundproben (siehe Abbildung 5.56) bleibt der NLP β' bis zu einem Beanspruchungsniveau von 10% nahezu unverändert. Anschließend steigt dieser ähnlich zu den HPC-Verbundproben linear bis zum Erreichen eines Beanspruchungsniveaus

von 70% ($F = 17,5$ kN) an. Über dieses Beanspruchungsniveau hinaus nimmt die Änderung des NLP β' stark zu und ist bei Höchstbeanspruchung mehr als verdreifacht.

Weiterhin zeigt sich unter Betrachtung der Abbildung 5.56, dass der relative akustische NLP β' bei den UHPFRC-Verbundproben bis zu einem Beanspruchungsniveau von 20% unverändert bleibt. Anschließend wächst der relative NLP moderat und gleichmäßig bis zur Höchstbeanspruchung an und erreicht hier eine Zunahme von ca. 68% im Vergleich zum Ausgangszustand.

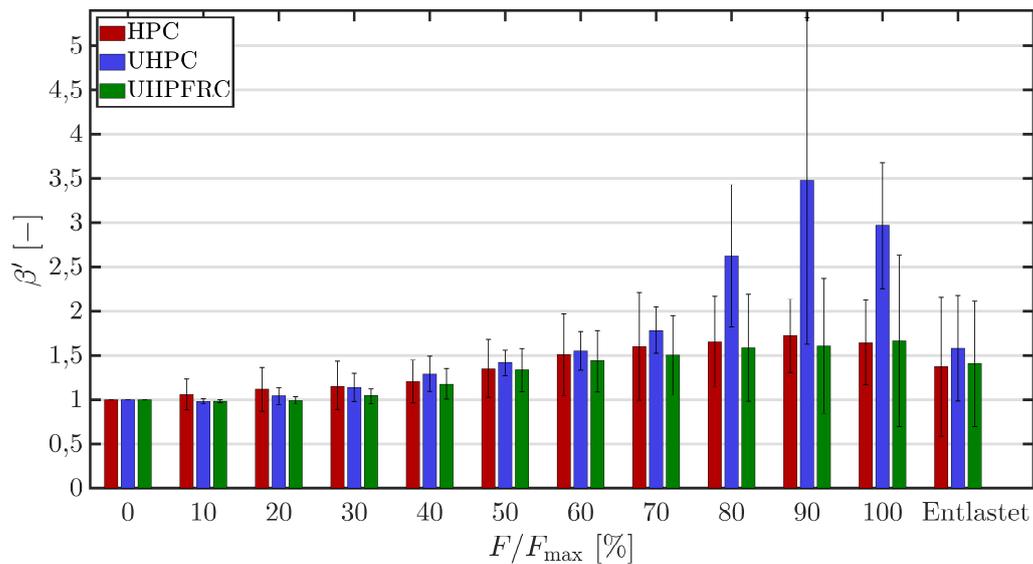


Abbildung 5.56: Relative Änderung des akustischen Nichtlinearitätsparameters β' in Abhängigkeit vom Beanspruchungsniveau F/F_{max} für die HPC-, UHPC- und UHPFRC-Verbundproben.

Die Abbildungen 5.57 und 5.58 zeigen die relativen Änderungen des hysteretischen NLP α' und des kubischen NLP γ' (siehe Gleichung (5.11)) in Abhängigkeit vom Beanspruchungsniveau F/F_{max} für die HPC-, UHPC- und UHPFRC-Verbundproben. Hierbei wurde aufgrund der großen betragsmäßigen Unterschiede in den Änderungen der NLP auf eine logarithmische Antragung zurückgegriffen.

Für die HPC-Verbundproben ergibt sich für die beiden relativen NLP α' und γ' , wie beim NLP β' , eine deutliche und gleichmäßige Zunahme bis zu einer Beanspruchung von 70%, wobei insbesondere die relativen Änderungen des kubischen NLP γ' die des quadratischen NLP β' übersteigen (siehe Abbildungen 5.57 und 5.58). Anschließend steigen die relativen NLP α' und γ' rasch um das Fünffache bzw. Zehnfache im Vergleich zum Ausgangszustand an und verbleiben auch nach der Entlastung auf hohem Niveau.

Die relativen Änderungen der akustischen NLP α' bzw. γ' für die UHPC-Verbundproben zeigen einen ähnlichen Verlauf wie die der HPC-Verbundproben (Abbildungen 5.57 und 5.58), wobei die Zuwachsraten auf deutlich höherem Niveau liegen und bis zur Höchstbeanspruchung für den NLP α' bzw. γ' um das 17-fache bzw. 90-fache im Vergleich zum Ausgangszustand ansteigen. Weiterhin ist ein besonders starker Anstieg des hysteretischen und des kubischen NLP ab ca. 60% des maximalen Beanspruchungsniveaus zu verzeichnen. Dieser rapide Anstieg deutet insbesondere auf die beschleunigte Schädigung des Verbundes und das zugenommene Risswachstum hin.

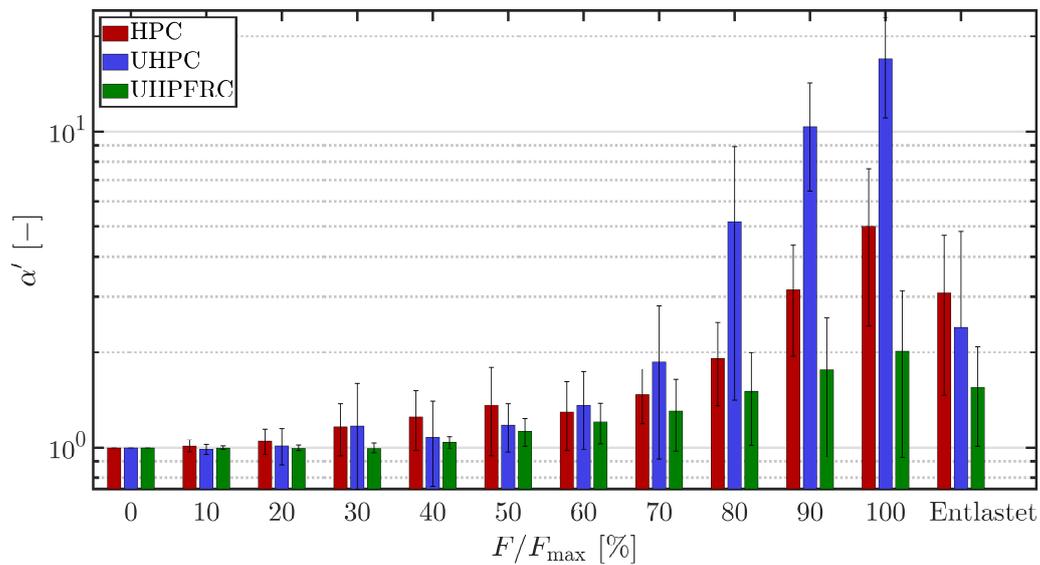


Abbildung 5.57: Relative Änderung des akustischen Nichtlinearitätsparameters α' in Abhängigkeit vom Beanspruchungsniveau F/F_{\max} für die HPC-, UHPC- und UHPFRC-Verbundproben.

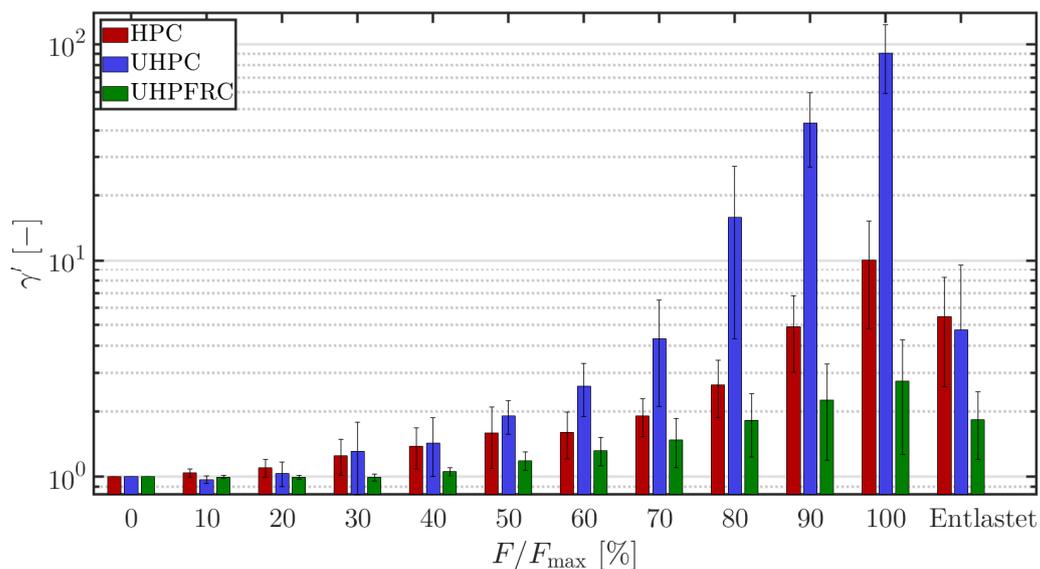


Abbildung 5.58: Relative Änderung des akustischen Nichtlinearitätsparameters γ' in Abhängigkeit vom Beanspruchungsniveau F/F_{\max} für die HPC-, UHPC- und UHPFRC-Verbundproben.

Für die UHPFRC-Verbundproben ergibt sich für die beiden relativen NLP α' und γ' bis zu einem Beanspruchungsniveau von 30% keine Änderung. Anschließend steigen die relativen Änderungen der NLP α' und γ' nahezu linear bis zur Höchstbeanspruchung an und verdoppeln bzw. verdreifachen sich nahezu im Vergleich zum Ausgangszustand. Generell zeigt die Analyse der relativen akustischen NLP, dass der hysteretische α' und der kubische NLP γ' die eintretende makroskopische Materialschädigung bei den HPC- und insbesondere bei den UHPC-Verbundproben durch einen deutlichen Anstieg anzeigen. Für die UHPFRC-Verbundproben zeigt sich die hohe Sensitivität aller hier untersuchten relativen NLP, wobei der NLP β' insbesondere im niedrigen Beanspruchungsniveau größere Änderungen aufweist, was auf die hohe Sensitivität dieses Parameters zur frühzeitigen Schädigungsevolution im Beton hindeutet. Somit zeigt die Untersuchung, dass die akustischen NLP als geeignete Bewertungsparameter zur Beurteilung der Mikro- und Makroschädigung verwendet werden können.

Zum Schluss sollen für den HPC, UHPC und UHPFRC die Änderungen aller untersuchten Ultraschallparameter in einer gemeinsamen Abbildung zusammengefasst werden. Hierfür werden die relativen Änderungen der gemittelten Ultraschallparameter in Abhängigkeit von der Belastung über eine polynomiale Regression (Ausgleichskurven) angenähert. Für die HPC- und UHPFRC-Verbundproben konnte eine gute Übereinstimmung mittels einer polynomialen Regression 4. Grades gemäß

$$p(F) = p_0 + p_1F^1 + p_2F^2 + p_3F^3 + p_4F^4 \quad (5.14)$$

gefunden werden. Dabei bezeichnet $p(F)$ die polynomiale Näherungslösung der relativen Ultraschallparameteränderung als Funktion der Belastung F . Die zugehörigen Polynom-Koeffizienten und die Bestimmtheitsmaße für die HPC- und UHPC-Verbundproben sind dabei in den Tabellen 5.12 und 5.13 angegeben.

Tabelle 5.12: Koeffizienten der Regressionspolynome 4. Grades zur Bestimmung der Ausgleichskurven der gemittelten relativen Ultraschallparameteränderungen für die HPC-Verbundproben und das zugehörige Bestimmtheitsmaß R^2 .

	p_0 [—]	p_1 [kN ⁻¹]	p_2 [kN ⁻²]	p_3 [kN ⁻³]	p_4 [kN ⁻⁴]	R^2 [—]
$c_L/c_{L,0}$	1,0003	-853,71E-6	60,08E-6	-2,46E-6	25,06E-9	0,9971
$\alpha'_{D,L}$	1,0139	-10,02E-3	2,20E-3	-94,30E-6	1,35E-6	0,9939
α'	1,0115	-37,22E-3	7,97E-3	-400,04E-6	6,34E-6	0,9983
β'	1,0054	14,64E-3	-840,23E-6	59,60E-6	-912,22E-9	0,9950
γ'	1,0246	-932,09E-6	2,14E-3	-64,07E-6	927,29E-9	0,9960

Tabelle 5.13: Koeffizienten der Regressionspolynome 4. Grades zur Bestimmung der Ausgleichskurven der gemittelten relativen Ultraschallparameteränderungen für die UHPFRC-Verbundproben und das zugehörige Bestimmtheitsmaß R^2 .

	p_0 [—]	p_1 [kN ⁻¹]	p_2 [kN ⁻²]	p_3 [kN ⁻³]	p_4 [kN ⁻⁴]	R^2 [—]
$c_L/c_{L,0}$	0,9993	693,16E-6	-68,52E-6	1,84E-6	-16,43E-9	0,9801
$\alpha'_{D,L}$	1,0013	-876,29E-6	11,08E-6	2,40E-6	-15,78E-9	0,9985
α'	1,0019	-1,49E-3	23,49E-6	3,51E-6	3,15E-9	0,9989
β'	1,0141	-18,33E-3	1,59E-3	-27,68E-6	153,58E-9	0,9950
γ'	1,0033	-2,87E-3	118,61E-6	1,74E-6	54,62E-9	0,9990

Bei den UHPC-Verbundproben konnte für die relativen akustischen NLP α' und γ' keine sinnvolle Näherung über ein Polynom 4. Grades gefunden werden. Daher wurde in diesem Fall die Näherungslösung über ein Polynom 7. Grades bestimmt, wobei die Änderungen der restlichen Ultraschallparameter über ein Polynom 4. Grades angenähert wurden. Die entsprechenden Polynom-Koeffizienten und die Bestimmtheitsmaße für die UHPC-Verbundproben sind dabei in der Tabelle 5.14 angegeben.

Tabelle 5.14: Koeffizienten der Regressionspolynome 4. bzw. 7. Grades zur Bestimmung der Ausgleichskurven der gemittelten relativen Ultraschallparameteränderungen für die UHPC-Verbundproben und das zugehörige Bestimmtheitsmaß R^2 .

	$c_L/c_{L,0}$	$\alpha'_{D,L}$	α'	β'	γ'
p_0 [—]	0,9996	0,9968	0,9972	0,9049	1,0031
p_1 [kN ⁻¹]	1,13E-3	-25,89E-3	33,43E-3	168,18E-3	-766,53E-3
p_2 [kN ⁻²]	-277,18E-6	8,32E-3	-20,88E-3	-37,31E-3	608,13E-3
p_3 [kN ⁻³]	8,27E-6	-411,72E-6	2,62E-3	2,85E-3	-175,30E-3
p_4 [kN ⁻⁴]	-62,44E-9	16,16E-6	344,93E-6	-59,26E-6	24,19E-3
p_5 [kN ⁻⁵]			-76,84E-6		-1,69E-3
p_6 [kN ⁻⁶]			4,30E-6		56,98E-6
p_7 [kN ⁻⁷]			-73,12E-9		-719,12E-9
R^2 [—]	0,9987	0,9987	0,9995	0,9440	1,0000

In den nachfolgenden Abbildungen 5.59-5.61 sind die mittels der polynomialen Näherungen bestimmten Ausgleichskurven und die zugehörigen Mittelwerte der relativen Änderungen in Abhängigkeit von der Belastung F für die HPC-, UHPC- und UHPFRC-Verbundproben grafisch dargestellt.

Für alle Betone zeigt sich dabei eine hohe Sensitivität der relativen akustischen NLP zur fortschreitenden Schädigungsentwicklung im Beton. Dabei liegt die Sensitivität der NLP zur frühzeitigen Verbundschädigung deutlich über der der linearen Parameter (Dämpfungsänderung und Wellengeschwindigkeitsänderung), was durch eine früh einsetzende Änderung der NLP im unteren Belastungsbereich deutlich wird. Aus dem Verlauf der akustischen NLP lässt sich somit der Verbundzustand bzw. der Schädigungsgrad im Beton beurteilen.

Für die HPC-Verbundproben (siehe Abbildung 5.59) stellt man bereits bei einer Belastung von $F = 4,5$ kN ($\tau_b \approx 2$ MPa) eine Zunahme des relativen akustischen NLP β' fest. Hieraus kann abgeleitet werden, dass bereits zu diesem Zeitpunkt eine moderate Mikrorissbildung in der Nähe der Rippen auftritt, welche unter der stetigen Laststeigerung stabil fortschreitet (Phase 2). Ab einer Belastung von $F = 31,5$ kN ($\tau_b \approx 14$ MPa) steigt der relative akustische NLP β' stark an, was mit der Entstehung makroskopischer Schädigung in Form von Spaltrissen in Verbindung gebracht werden kann (Phase 3).

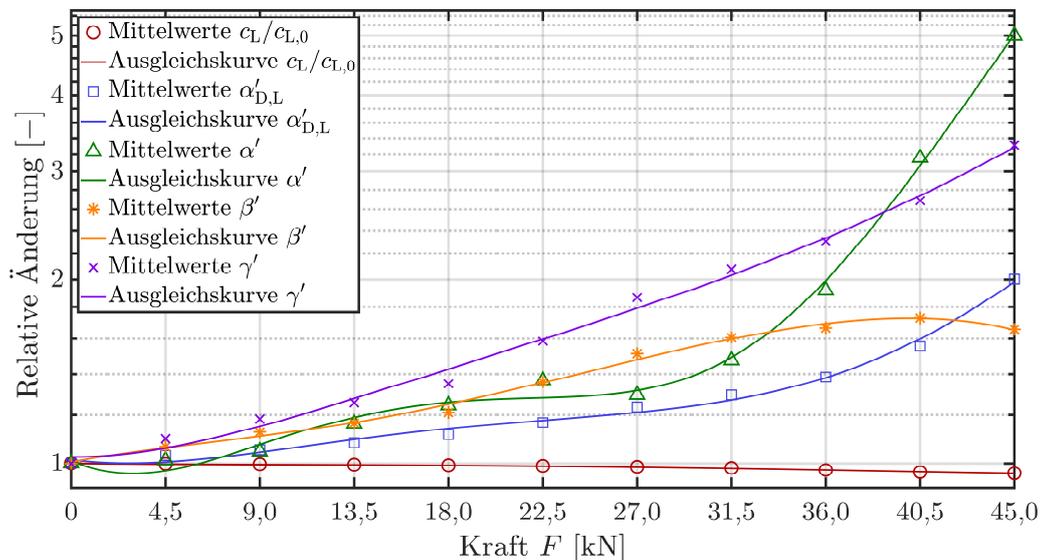


Abbildung 5.59: Mittelwerte und zugehörige Ausgleichskurven der relativen Ultraschallparameteränderungen in Abhängigkeit von der Zugkraft F für die HPC-Verbundproben.

In ähnlicher Weise lässt sich anhand der Änderungen der relativen akustischen NLP die Schädigungsentwicklung bei den UHPC-Verbundproben beschreiben (siehe Abbildung 5.60). Auch hierbei kann vermutet werden, dass aufgrund des Anstieges aller relativen akustischen NLP bei einer Belastung von $F = 5$ kN ($\tau_b \approx 2,2$ MPa) bereits die Mikrorissbildung im Bereich der Verbundzone beginnt. Im Vergleich zum HPC ist hier ein deutlich steilerer Anstieg der NLP erkennbar, was unter anderem auf ein

beschleunigtes Risswachstum hindeutet und mit dem sehr spröden Materialverhalten korreliert. Beim Erreichen eines Belastungsniveaus von $F = 17,5$ kN ($\tau_b \approx 7,7$ MPa) ist aufgrund des rapiden Anstiegs des hysteretischen und kubischen NLP α' und γ' von einem ausgeprägten makroskopischen Risswachstum auszugehen.

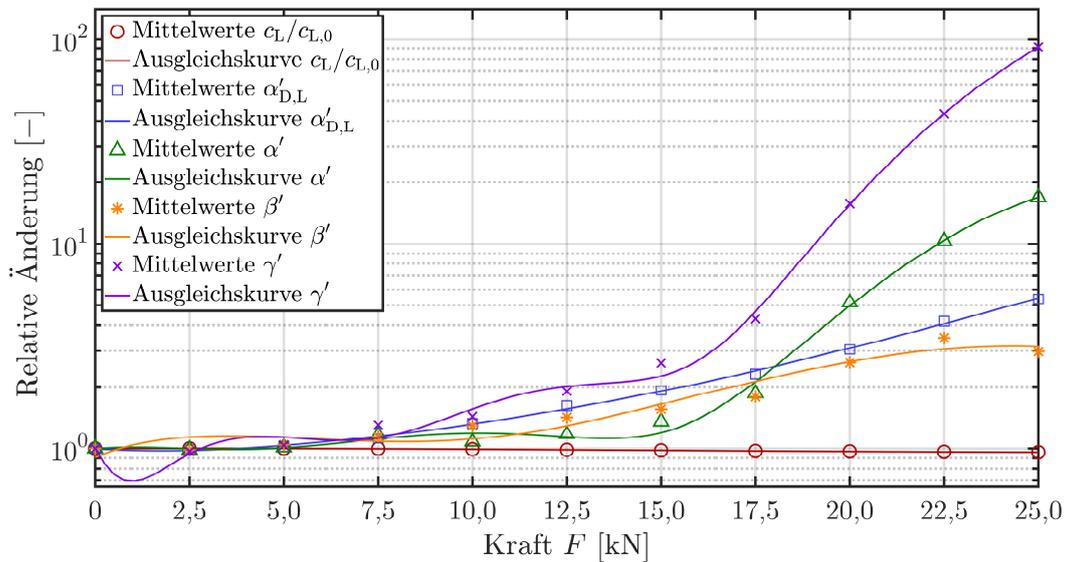


Abbildung 5.60: Mittelwerte und zugehörige Ausgleichskurven der relativen Ultraschallparameteränderungen in Abhängigkeit von der Zugkraft F für die UHPC-Verbundproben.

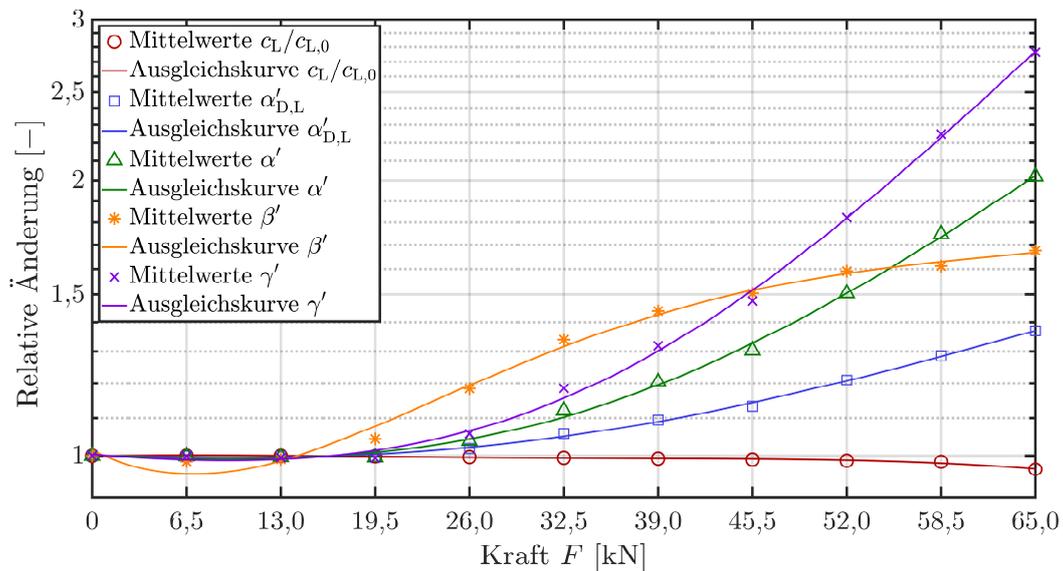


Abbildung 5.61: Mittelwerte und zugehörige Ausgleichskurven der relativen Ultraschallparameteränderungen in Abhängigkeit von der Zugkraft F für die UHPFRC-Verbundproben.

Auch für die UHPFRC-Verbundproben lässt sich unter Betrachtung der NLP-Verläufe eine Einteilung des Verbundzustandes in drei Phasen vornehmen (siehe Abbildung 5.61). Da erst ab einer Belastung von $F = 13 \text{ kN}$ ($\tau_b \approx 5,7 \text{ MPa}$) eine messbare Änderung des relativen akustischen NLP β' detektiert wird, kann diese Belastung als Startpunkt der Mikrorissbildung betrachtet werden. Darüber hinaus steigen alle relativen akustischen NLP deutlich an (Phase 2). Ab einer Belastung von $F = 45,5 \text{ kN}$ ($\tau_b \approx 20,1 \text{ MPa}$) steigen der Dämpfungsparameter und die beiden relativen NLP α' und γ' noch einmal deutlich an. So muss ab dieser Belastung von einer signifikanten Änderung im Verbundverhalten des stahlbewehrten UHPFRC ausgegangen werden, was wiederum auf den Beginn einer makroskopischen Schädigung im UHPFRC hindeutet (Phase 3).

Die hier auf der Grundlage der Ultraschallparameter gemachten Aussagen zur Schädigungsentwicklung im Verbund, stimmen im Wesentlichen mit denen aus den Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen (vgl. Abbildung 5.53) sehr gut überein.

Die in diesem Abschnitt dargestellten Ultraschallversuche zur Bewertung des Verbundverhaltens von stahlbewehrten Betonproben zeigen, dass insbesondere nahe der Versagensgrenzen die linearen und speziell die nichtlinearen Ultraschallparameter stark ansteigen und somit als ein geeigneter Indikator für die Schädigungsbewertung im Verbund herangezogen werden können. Weiterhin können aufgrund der hohen Sensitivität der nichtlinearen Ultraschalltechnik die maßgebenden Schädigungsphasen im Verbundverhalten unter zunehmender Verbundbeanspruchung detektiert bzw. offenbart werden. Dabei erweist sich der akustische NLP β als besonders sensitiv zur frühzeitigen Schädigung und der akustische NLP α bzw. γ als besonders empfindlich auf die fortgeschrittene Schädigung.

6 Zusammenfassung und Ausblick

6.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit den numerischen und experimentellen Untersuchungen zur zerstörungsfreien Charakterisierung und Schädigungsbewertung von Hochleistungsbetonen. Zu diesem Zweck werden genaue und effiziente numerische Methoden implementiert und geeignete Ultraschalltechniken herangezogen. Dabei werden sowohl lineare als auch nichtlineare Ultraschallwellen verwendet, um die linearen und nichtlinearen Materialparameter sowie den Schädigungszustand vom HPC, UHPC und UHPFRC zu bestimmen bzw. zu bewerten.

Im numerischen Teil der vorliegenden Arbeit werden zunächst einige ausgewählte numerische Verfahren (gestaffelte Finite-Differenzen-Verfahren, KURGANOV-TADMOR-Schema, CHEBYSHEV-Pseudospektrale-Kollokationsmethode) zur Lösung linearer und nichtlinearer Wellenausbreitungsprobleme implementiert. Dabei wird für jedes Verfahren neben der klassischen CPU-basierten Implementierung eine verbesserte GPU-basierte Variante entwickelt, welche die parallele Berechnungsarchitektur der Grafikkarte nutzt. Die Verifikation der numerischen Verfahren für ausgewählte 1-D, 2-D und 3-D Probleme durch die entsprechenden Referenzlösung und der anschließende Vergleich der numerischen Verfahren liefern dabei die folgenden Erkenntnisse:

- Alle implementierten numerischen Verfahren sind prinzipiell für die Simulation der elastischen Wellenausbreitung in moderat nichtlinearen Festkörpern geeignet. Erst bei sehr hoher materieller Nichtlinearität, welche zu einer sichtbaren Verzerrung des Zeitsignals oder Entstehung von Schockwellen führt, werden spezielle numerische Verfahren, wie das KURGANOV-TADMOR-Schema, benötigt.
- Das Konvergenzverhalten der implementierten numerischen Verfahren entspricht dabei generell der Ordnung des Verfahrens. So erhält man insbesondere für die beiden CPS-Methoden ein spektrales Konvergenzverhalten, welches zu einer Mindestanzahl von Knoten pro Wellenlänge führt und somit eine drastische Reduzierung des Speicherplatzbedarfs bei 3-D Berechnungen bewirkt.
- Die in dieser Arbeit implementierte „gestaffelte CPS-Methode“ vereint die Vorteile eines gestaffelten FD-Verfahrens (hohe Stabilität und einfache Behandlung der Randbedingungen) mit denen der CPS-Methode (spektrale Konvergenz und hohe Genauigkeit).

- Mit der GPU-basierten Berechnung kann für fast alle implementierten Verfahren eine deutliche Reduzierung der benötigten Rechenzeit, insbesondere bei einer hohen Knotenanzahl und bei 3-D Problemen, gegenüber der konventionellen CPU-Berechnung erzielt werden.

Anschließend werden einige ausgewählte nichtlineare Wellenausbreitungsprobleme mittels der modifizierten CPS-Methode berechnet. In den numerischen Beispielen werden die Einflüsse der akustischen Dämpfung infolge von kontinuierlicher Schädigung und lokalisierter Schädigung auf die nichtlineare Wellenausbreitung im Beton analysiert. Dabei konnten die folgenden Erkenntnisse gewonnen werden:

- Die Art und Ausprägung der akustischen Dämpfung hat einen wesentlichen Einfluss auf die nichtlineare Wellenausbreitung und somit auf die Entstehung höherharmonischer Amplituden im Frequenzspektrum
- Sowohl unter dem Dämpfungseinfluss als auch im Fall einer lokalisierten Schädigung lässt sich die Änderung der Nichtlinearität durch die relativen akustischen NLP bestimmen. Die Änderung der Nichtlinearität im quadratisch nichtlinear-elastischen Fall kann dabei in guter Näherung durch den akustischen NLP $\beta = A_2/A_1^2$ beschrieben werden. Im Fall eines hysteretischen Materialverhaltens ist der akustische NLP $\alpha = A_3/A_1^2$ geeignet.
- Für eine lokalisierte kugelförmige nichtlinear-elastische Schädigung in einem ungeschädigten linear-elastischen Festkörper ergibt sich abhängig von der Erregungsart (Longitudinalwelle oder Transversalwelle) und dem zugrundeliegenden nichtlinear-elastischen Materialgesetz (quadratisch nichtlinear oder hysteretisch nichtlinear) ein charakteristisches höherharmonisches Wellenstreufeld, welches bestimmte Rückschlüsse auf die Art und die Ausprägung der Schädigung zulässt.

Im experimentellen Teil dieser Arbeit werden lineare und nichtlineare Ultraschallmethoden zur Materialcharakterisierung und Schädigungsbeurteilung von Hochleistungsbetonen eingesetzt. Die Auswertung der Ergebnisse zeigt dabei die folgenden maßgebenden Erkenntnisse:

- In stahlfaserverstärktem UHPC lässt sich die Faserorientierung qualitativ durch die Verwendung polarisierter Ultraschall-Transversalwellen bestimmen.
- Der NLP vom Hochleistungsbeton nimmt mit der steigenden Festigkeit und Verdichtung des Materialgefüges ab. Für den UHPC erhält man einen NLP vergleichbar mit denen der üblichen homogenen Werkstoffe wie Stahl und Aluminium.

- Das hysteretische Materialverhalten vom UHPC ist im Vergleich zu dem vom HPC deutlich geringer ausgeprägt.
- Für eine gleichmäßig verteilte Betonschädigung infolge einer einachsigen Druckbeanspruchung lässt sich der Einfluss der Dämpfung auf den akustischen NLP durch die in dieser Arbeit vorgestellten akustischen NLP berücksichtigen.
- Die linearen Ultraschallparameter sind generell weniger sensitiv zur frühzeitigen Schädigungsentwicklung im Hochleistungsbeton als die entsprechenden nichtlinearen Ultraschallparameter.
- Für den UHPC und den UHPFRC ändern sich die nichtlinearen Eigenschaften auch bei relativ hohen Druckbeanspruchungen nahe der Versagensgrenze nur geringfügig. Im Gegensatz dazu treten die Änderungen der NLP bereits bei einem viel niedrigeren Beanspruchungsniveau auf. Als mögliche Ursache dafür sind insbesondere die verbesserte Verbundzone und das sehr homogene Materialgefüge im UHPC zu nennen.
- Die durchgeführten Ausziehversuche an stahlbewehrten Hochleistungsbetonen zeigen, dass die begleitende Ultraschalluntersuchung in der Lage ist, die einzelnen Schädigungsphasen im Verbundverhalten zu identifizieren. Insbesondere die akustischen NLP weisen hierbei eine hohe Sensitivität auf. Dabei kann festgestellt werden, dass der NLP β besonders sensitiv zur anfänglichen Schädigung (Mikrorissbildung im Verbund) und der NLP α bzw. γ sehr empfindlich auf die fortgeschrittene makroskopische Schädigung ist.

6.2 Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird das Potential einer ultraschallbasierten Materialcharakterisierung und Schädigungsbeurteilung von Hochleistungsbetonen demonstriert. Dabei sind insbesondere die in dieser Arbeit erprobten nichtlinearen Ultraschallmethoden als effektive zerstörungsfreie Prüfmethoden zur Schädigungs- bzw. Zustandsüberwachung von Bauwerken vielversprechend. Um diese Ultraschallmethoden mit Blick auf baupraktische Anwendungen weiterzuentwickeln, sind die folgenden zukünftigen Forschungsarbeiten sinnvoll:

- Entwicklung kontaktfreier Ultraschallmethoden, wie luftgekoppelter Ultraschalltechnik oder lasergestützter Prüfverfahren, zur Minimierung der Einflüsse aus dem Kontakt und zur bestmöglichen Reproduzierbarkeit und Automatisierung von Ultraschallmessungen.

- Erweiterung der in dieser Arbeit verwendeten Körperwellen auf Plattenwellen und Oberflächenwellen mit dem Ziel der Entwicklung praktischer Verfahren zur Prüfung großformatiger Bauteile und Strukturen.
- Experimentelle Ultraschallversuche zur quantitativen Detektion und Beschreibung des nichtlinearen Wellenstreuungsfeldes infolge lokalisierter Schädigung und begleitende weiterführende numerische Simulationen zu diesem Forschungsfeld.
- Entwicklung eines virtuellen Ultraschallprüflabors unter der Verwendung der in dieser Arbeit implementierten numerischen Verfahren. Damit können die Menge und der Aufwand realer Versuche durch eine geeignete Kombination des virtuellen Ultraschallprüflabors mit dem realen Ultraschallprüflabor effektiv und kostengünstig reduziert werden.

Abschließend soll erwähnt werden, dass hierbei trotz des thematisch gesetzten Schwerpunktes auf die Ultraschalluntersuchung von Hochleistungsbetonen die Methodik und die gewonnenen Erkenntnisse in dieser Arbeit eine gewisse Allgemeingültigkeit besitzen und somit auch auf viele andere Werkstoffe übertragbar sind.

A Anhang

A.1 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor für einen quadratisch nichtlinear-elastischen Festkörper

$$\begin{aligned}
P_{11} = & Mu_x + \lambda(v_y + w_z) + \left(M_{\text{NL}} + \frac{3}{2}M \right) u_x^2 + \left(l + \frac{\lambda}{2} \right) (v_y^2 + w_z^2) \\
& + (2l + \lambda) u_x (v_y + w_z) + (2(l - m) + n) v_y w_z \\
& + \frac{1}{2} (m + M) (u_y^2 + v_x^2 + w_x^2 + u_z^2) - \left(\frac{n}{4} + \mu \right) (v_z^2 + w_y^2) \\
& + (m + \mu) (u_y v_x + u_z w_x + v_z w_y) - \left(\frac{n}{2} + \mu \right) v_z w_y,
\end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
P_{12} = & \mu(u_y + v_x) + (M + m) u_y (u_x + v_y) + (\mu + m) v_x (u_x + v_y) \\
& + \left(\lambda + m - \frac{n}{2} \right) u_y w_z + \left(\mu + \frac{n}{4} \right) (u_z v_z + u_z w_y + w_x w_y) + \left(m - \frac{n}{2} \right) v_x w_z \\
& + \frac{n}{4} w_x v_z,
\end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
P_{13} = & \mu(u_z + w_x) + (M + m) u_z (u_x + w_z) + (\mu + m) w_x (w_z + u_x) \\
& + \left(\lambda + m - \frac{n}{2} \right) u_z v_y + \left(\mu + \frac{n}{4} \right) (u_y v_z + u_y w_y + v_x v_z) + \left(m - \frac{n}{2} \right) v_y w_x \\
& + \frac{n}{4} v_x w_y,
\end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
P_{23} = & \mu(v_z + w_y) + (M + m) v_z (v_y + w_z) + (\mu + m) w_y (v_y + w_z) \\
& + \left(\lambda + m - \frac{n}{2} \right) u_x v_z + \left(\mu + \frac{n}{4} \right) (u_y u_z + u_z v_x + v_x w_x) + \left(m - \frac{n}{2} \right) u_x w_y \\
& + \frac{n}{4} u_y w_x.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Hierbei werden die räumlichen Ableitungen entsprechend $u_x = \partial u / \partial x$, der Longitudinalmodul $M = \lambda + 2\mu$ und der „nichtlineare Longitudinalmodul“ $M_{\text{NL}} = l + 2m$ zur verkürzten Schreibweise verwendet. Weiterhin wurden bei der Herleitung nur Terme bis zur quadratischen Ordnung im Verschiebungsgradienten berücksichtigt. Die restlichen Spannungskomponenten

$$\begin{aligned}
P_{22} &= P_{11}(x \leftrightarrow y, u \leftrightarrow v), P_{33} = P_{11}(x \leftrightarrow z, u \leftrightarrow w), \\
P_{21} &= P_{12}(x \leftrightarrow y, u \leftrightarrow v), P_{31} = P_{13}(x \leftrightarrow z, u \leftrightarrow w), \\
P_{32} &= P_{23}(y \leftrightarrow z, v \leftrightarrow w)
\end{aligned} \tag{A.5}$$

lassen sich dann durch Vertauschen der Variablen aus den bereits aufgestellten Gleichungen (A.1) bis (A.4) erhalten.

A.2 Fourier-Transformation

Die FOURIER-Transformation dient im Allgemeinen der Überführung einer kontinuierlichen aperiodischen Funktion in das zugehörige Spektrum. Für eine zeitabhängige Funktion erhält man durch die FOURIER-Transformation das entsprechende Frequenzspektrum der Funktion. Dabei ist die direkte FOURIER-Transformation wie folgt definiert:

$$\mathcal{F}u(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-i\omega t} dt, \tag{A.6}$$

wobei ω der Transformationsparameter bzw. die Kreisfrequenz ist. Die inverse Operation, also die Rücktransformation in den Zeitbereich, ist dann folgendermaßen definiert:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}u(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \tag{A.7}$$

In der Praxis erfolgt die Auswertung von Gleichung meistens durch die schnelle FOURIER-Transformation (Fast Fourier Transform oder kurz FFT), während die Rücktransformation (A.7) durch die inverse FFT realisiert wird.

A.3 Konstantes Q -Dämpfungsmodell für den 2-D isotropen Festkörper

Zur Berücksichtigung einer akustischen Dämpfung mit einem im betrachteten Frequenzbereich konstanten Q -Verlauf wird in dieser Arbeit auf die Methodik nach [18, 34, 173] zurückgegriffen. Hierbei dient der lineare Standard-Festkörper als rheologisches Grundmodell. Nachfolgend werden zum besseren Verständnis die maßgebenden

Grundgleichungen für den 2-D linear-viskoelastischen ebenen Verzerrungszustand unter Verwendung eines einzelnen linearen Standardfestkörpers angegeben.

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right), \\ \dot{v} &= \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right).\end{aligned}\tag{A.8}$$

Kinematische Beziehungen:

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}, \quad \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial \dot{v}}{\partial y}, \quad \dot{\gamma}_{xy} = \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \right).\tag{A.9}$$

Konstitutive Gleichungen:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})\varepsilon_x + \hat{\lambda}\varepsilon_y + (\lambda + \mu)e_1 + \mu e_2, \\ \sigma_y &= \hat{\lambda}\varepsilon_x + (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})\varepsilon_y + (\lambda + \mu)e_1 - \mu e_2, \\ \tau_{xy} &= \hat{\mu}\gamma_{xy} + \mu e_3.\end{aligned}\tag{A.10}$$

Hierbei sind die Grenzwerte der LAMÉ-Konstanten bei $\omega \rightarrow \infty$ durch

$$\hat{\lambda} = (\lambda + \mu)\hat{M}_L - \mu\hat{M}_T, \quad \hat{\mu} = \mu\hat{M}_T\tag{A.11}$$

gegeben. Für einen linearen Standard-Festkörper wird die Relaxations-Funktion \hat{M}_ν zum Zeitpunkt $t = 0$ folgendermaßen definiert:

$$\hat{M}_\nu = \frac{\tau_\varepsilon^{(\nu)}}{\tau_\sigma^{(\nu)}}, \quad \nu = L, T.\tag{A.12}$$

Dabei steht $\nu = L$ für die longitudinale Wellenmode und $\nu = T$ für die transversale Wellenmode des Festkörpers. Weiterhin ist $\tau_{\sigma l}^{(\nu)}$ die Spannungs-Relaxationszeit und $\tau_{\varepsilon l}^{(\nu)}$ die Dehnungs-Retardationszeit.

Zur Bestimmung der in den Gleichungen (A.10) verwendeten „Memory-Variablen“ e_1 , e_2 und e_3 sind deren zeitliche Ableitungen über

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= \phi_L (\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{e_1}{\tau_\sigma^{(L)}}, \\
\dot{e}_2 &= \phi_L (\varepsilon_x - \varepsilon_y) - \frac{e_2}{\tau_\sigma^{(T)}}, \\
\dot{e}_3 &= \phi_\Gamma \gamma_{xy} - \frac{e_3}{\tau_\sigma^{(T)}},
\end{aligned} \tag{A.13}$$

mit

$$\phi_\nu = \frac{1}{\tau_\sigma^{(\nu)}} \left(1 - \frac{\tau_\varepsilon^{(\nu)}}{\tau_\sigma^{(\nu)}} \right), \quad \nu = \text{L, T} \tag{A.14}$$

definiert. Somit dienen hier die Relaxationszeit τ_σ und die Retardationszeit τ_ε der Steuerung des entsprechenden Q -Faktors und damit der akustischen Dämpfung α_D über den betrachteten Frequenzbereich ω . Weiterhin ergibt sich der folgende Zusammenhang für die beiden Wellenmoden [18, 19]:

$$Q(\omega, \tau_\sigma, \tau) = \frac{1 + \frac{\omega^2 \tau_\sigma^2}{1 + \omega^2 \tau_\sigma^2} \tau}{\frac{\omega^2 \tau_\sigma^2}{1 + \omega^2 \tau_\sigma^2} \tau} = 1 + \frac{1 + \omega^2 \tau_\sigma^2}{\omega^2 \tau_\sigma^2 \tau}, \tag{A.15}$$

mit

$$\tau = \frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} - 1. \tag{A.16}$$

Generell muss das aus der Gleichung (A.15) resultierende Optimierungsproblem in der Weise gelöst werden, dass für den gewünschten Frequenzbereich die Q -Werte „bestmöglich“ konstant bleiben. In [19] wurden die beiden Optimierungsparameter τ_σ und τ (bzw. τ_ε) mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ermittelt. Hiernach soll die folgende Zielfunktion

$$J(\tau_\sigma, \tau) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left(Q^{-1}(\omega, \tau_\sigma, \tau) - \tilde{Q}^{-1} \right)^2 d\omega \tag{A.17}$$

minimiert werden. Dabei wird Q durch die Gleichung (A.15) definiert und \tilde{Q} ist der Zielwert des Q -Faktors. In dieser Arbeit wird unter anderem die in [19] vorgeschlagene vereinfachte Näherungsbeziehung $\tau = 2/Q$ verwendet.

A.4 Runge-Kutta-Verfahren

Für die explizite Zeitintegration werden in dieser Arbeit insbesondere die RUNGE-KUTTA Verfahren 2. und 3. Ordnung [121, 179] verwendet. Im Folgenden werden die diese Verfahren angegeben. Dabei steht q für die gesuchte Zustandsgröße und L für einen allgemeinen und nicht weiter spezifizierten Differentialoperator.

RUNGE-KUTTA-Verfahren 2. Ordnung (Modifiziertes EULER-Verfahren):

$$\begin{aligned} q^{(1)} &= q^n + \frac{1}{2} \Delta t L(q^n), \\ q^{n+1} &= q^n + \Delta t L(q^{(1)}). \end{aligned} \tag{A.18}$$

RUNGE-KUTTA-Verfahren 3. Ordnung (HEUN-Verfahren):

$$\begin{aligned} q^{(1)} &= q^n + \frac{1}{3} \Delta t L(q^n), \\ q^{(2)} &= q^n + \frac{2}{3} \Delta t L(q^{(1)}), \\ q^{n+1} &= q^n + \frac{1}{4} \Delta t \left(L(q^n) + 3L(q^{(2)}) \right). \end{aligned} \tag{A.19}$$

Neben diesen „klassischen“ RK-Verfahren existieren auch die sogenannten *Strong-Stability-Preserving* (SSP) RK-Verfahren, die auch bei stark nichtlinearen Problemen eine hohe numerische Stabilität gewährleisten. In dieser Arbeit werden die in [96] vorgestellten SSP-RK-Verfahren verwendet.

SSP-RUNGE-KUTTA-Verfahren 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} q^{(1)} &= q^n + \Delta t L(q^n), \\ q^{n+1} &= \frac{1}{2} q^n + \frac{1}{2} q^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta t L(q^{(1)}). \end{aligned} \tag{A.20}$$

SSP-RUNGE-KUTTA-Verfahren 3. Ordnung:

$$\begin{aligned} q^{(1)} &= q^n + \Delta t L(q^n), \\ q^{(2)} &= \frac{3}{4} q^n + \frac{1}{4} q^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t L(q^{(1)}), \\ q^{n+1} &= \frac{1}{3} q^n + \frac{2}{3} q^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t L(q^{(2)}). \end{aligned} \tag{A.21}$$

Literaturverzeichnis

- [1] ACHENBACH, J. D. : *Wave Propagation in Elastic Solids*. Elsevier, 1974.
- [2] AKI, K. ; RICHARDS, P. : *Quantitative Seismology*. University Science Books, U.S., 2002.
- [3] ANKAY, B. ; ZHANG, C. : Numerical simulation of nonlinear elastic wave propagation in locally damaged reinforced concretes. *9th International Conference on Computational Methods (ICCM 2018)*, Rom, Italien, 2018.
- [4] ANKAY, B. ; ZHANG, C. : Schädigungsbewertung in hochfestem/ultrahochfestem Beton mittels linearer und nichtlinearer Ultraschalltechnik. *Baustatik-Forschungskolloquium*, Grasellenbach, Deutschland, 2018, S. 1–3.
- [5] ANKAY, B. ; ZHANG, C. : 3-D numerical simulation of nonlinear elastic wave propagation in locally damaged materials. *Proceedings of the 23rd International Congress on Acoustics (ICA 2019)*, Aachen, Deutschland, 2019, S. 4746–4753.
- [6] ANKAY, B. ; ZHANG, C. : Acoustoelastic evaluation of ultra-high performance concretes. *AIP Conference Proceedings*, Bd. 2102, Nr. 1, 110002, 2019.
- [7] ANKAY, B. ; ZHANG, C. : Numerical study of nonlinear elastic wave propagation in locally damaged engineering structures. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM)*, Bd. 19, Nr. 1, 201900154, 2019.
- [8] ANKAY, B. ; METJE, K. ; MÖNIG, T. ; ZHANG, C. ; LEUTBECHER, T. : Ultrasonic characterisation of steel fibre orientation in ultra-high performance concrete. *20. GMA/ITG-Fachtagung Sensoren und Messsysteme*, 2019, Nürnberg, Deutschland, 2019, S. 310–317.
- [9] ASTM C597-16 : *Test Method for Pulse Velocity Through Concrete*. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2016.
- [10] AZIZINAMINI, A. ; STARK, M. ; ROLLER, J. J. ; GHOSH, S. K. : Bond performance of reinforcing bars embedded in high-strength concrete. *ACI Structural Journal*, Bd. 90, Nr. 5, S. 554–561, 1993.
- [11] AZIZINAMINI, A. ; CHISALA, M. ; GHOSH, S. K. : Tension development length of reinforcing bars embedded in high-strength concrete. *Engineering Structures*, Bd. 17, Nr. 7, S. 512–522, 1995.
- [12] BANK, L. C. : Properties of FRP reinforcements for concrete. *Fiber-Reinforced-Plastic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures: Properties and Applications*, S. 59–86, 1993.
- [13] BARBIERI, E. ; MEO, M. ; POLIMENO, U. : Nonlinear wave propagation in damaged hysteretic materials using a frequency domain-based PM space formulation. *International Journal of Solids and Structures*, Bd. 46, Nr. 1, S. 165–180, 2009.

- [14] BERENGER, J.-P. : A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, Bd. 114, Nr. 2, S. 185–200, 1994.
- [15] BLACKSTOCK, D. T. : Propagation of plane sound waves of finite amplitude in nondissipative fluids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 34, Nr. 1, S. 9–30, 1962.
- [16] BLACKSTOCK, D. T. : On plane, spherical, and cylindrical sound waves of finite amplitude in lossless fluids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 36, Nr. 1, S. 217–219, 1964.
- [17] BLACKSTOCK, D. T. : Thermoviscous attenuation of plane, periodic, finite-amplitude sound waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 36, Nr. 3, S. 534–542, 1964.
- [18] BLANCH, J. O. ; ROBERTSSON, J. O. A. ; SYMES, W. W. : Modeling of a constant Q: Methodology and algorithm for an efficient and optimally inexpensive viscoelastic technique. *Geophysics*, Bd. 60, Nr. 1, S. 176–184, 1995.
- [19] BOHLEN, T. : Parallel 3-D viscoelastic finite difference seismic modelling. *Computers & Geosciences*, Bd. 28, Nr. 8, S. 887–899, 2002.
- [20] *Bond of Reinforcement in Concrete*. International Federation for Structural Concrete, 2000.
- [21] BOU MATAR, O. ; PREOBRAZHENSKY, V. ; PERNOD, P. : Two-dimensional axisymmetric numerical simulation of supercritical phase conjugation of ultrasound in active solid media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 118, Nr. 5, S. 2880–2890, 2005.
- [22] BOU MATAR, O. : Pseudospectral simulation of elastic waves propagation in heterogeneous nonlinear hysteretic medium. *AIP Conference Proceedings*, Bd. 838, Nr. 1, S. 95–98, 2006.
- [23] BOU MATAR, O. ; GUERDER, P.-Y. ; LI, Y. ; VANDEWOESTYNE, B. ; VAN DEN ABEELE, K. : A nodal discontinuous Galerkin finite element method for nonlinear elastic wave propagation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 131, Nr. 5, S. 3650–3663, 2012.
- [24] BOYD, J. P. : *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover Publications Inc., 2001.
- [25] BREAZEALE, M. A. ; THOMPSON, D. O. : Finite amplitude ultrasonic waves in aluminum. *Applied Physics Letters*, Bd. 3, Nr. 5, S. 77–78, 1963.
- [26] BREAZEALE, M. A. ; FORD, J. : Ultrasonic studies of the nonlinear behavior of solids. *Journal of Applied Physics*, Bd. 36, Nr. 11, S. 3486–3490, 1965.
- [27] BRODA, D. ; STASZEWSKI, W. J. ; MARTOWICZ, A. ; UHL, T. ; SILBERSCHMIDT, V. V. : Modelling of nonlinear crack–wave interactions for damage detection based on ultrasound-A review. *Journal of Sound and Vibration*, Bd. 333, Nr. 4, S. 1097–1118, 2014.

- [28] BÜYÜKÖZTÜRK, O. ; LAU, D. : *High Performance Concrete: Fundamentals and Application*. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, USA, 2007.
- [29] CAGNIARD, L. : *Réflexion et Réfraction des Ondes Sismiques Progressives*. PhD thèse, Faculté des Sciences de Paris, Frankreich, 1939.
- [30] CANTRELL, J. : Fundamentals and applications of nonlinear ultrasonic non-destructive evaluation. *Ultrasonic Nondestructive Evaluation*, S. 363–434, 2003.
- [31] CANTRELL, J. H. ; SALAMA, K. : Acoustoelastic characterisation of materials. *International Materials Reviews*, Bd. 36, Nr. 1, S. 125–145, 1991.
- [32] CANTRELL, J. H. : Substructural organization, dislocation plasticity and harmonic generation in cyclically stressed wavy slip metals. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Bd. 460, Nr. 2043, S. 757–780, 2004.
- [33] CANUTO, C. ; HUSSAINI, M. Y. ; QUARTERONI, A. ; ZANG, T. A. : *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer Berlin Heidelberg, 1988.
- [34] CARCIONE, J. M. : Modeling anelastic singular surface waves in the earth. *Geophysics*, Bd. 57, Nr. 6, S. 781–792, 1992.
- [35] CARCIONE, J. M. : Boundary conditions for wave propagation problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, Bd. 16, 3-4, S. 317–327, 1994.
- [36] CARCIONE, J. M. ; POLETTO, F. ; GEI, D. : 3-D wave simulation in anelastic media using the Kelvin–Voigt constitutive equation. *Journal of Computational Physics*, Bd. 196, Nr. 1, S. 282–297, 2004.
- [37] CARCIONE, J. M. : *Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and Electromagnetic Media (Handbook of Geophysical Exploration: Seismic Exploration 38)*. Elsevier Science, 2014.
- [38] CARINO, N. J. : The impact-echo method: An overview. *Proceedings of the 2001 Structures Congress & Exposition, American Society of Civil Engineers*, Washington, D.C., USA, 2001.
- [39] CATTANI, C. ; RUSHCHITSKII, Y. Y. : Plane waves in cubically nonlinear elastic media. *International Applied Mechanics*, Bd. 38, Nr. 11, S. 1361–1365, 2002.
- [40] CHAIX, J.-F. ; LILLAMAND, I. ; PLOIX, M.-A. ; GARNIER, V. ; CORNELOUP, G. : Study of acoustoelasticity behavior of concrete material under uniaxial compression. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 123, Nr. 5, 3847, 2008.
- [41] CHAKRAPANI, S. K. ; BARNARD, D. J. : Determination of acoustic nonlinearity parameter (β) using nonlinear resonance ultrasound spectroscopy: Theory and experiment. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 141, Nr. 2, S. 919–928, 2017.

- [42] CHEN, J. ; YANG, C. ; GUO, Q. : Evaluation of surface cracks of bending concrete using a fully non-contact air-coupled nonlinear ultrasonic technique. *Materials and Structures*, Bd. 51, Nr. 4, S. 104, 2018.
- [43] CHO, H. ; HASANIAN, M. ; SHAN, S. ; LISSENDEN, C. J. : Nonlinear guided wave technique for localized damage detection in plates with surface-bonded sensors to receive Lamb waves generated by shear-horizontal wave mixing. *NDT & E International*, Bd. 102, S. 35–46, 2019.
- [44] CIAMPA, F. ; BARBIERI, E. ; MEO, M. : Modelling of multiscale nonlinear interaction of elastic waves with three-dimensional cracks. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 135, Nr. 6, S. 3209–3220, 2014.
- [45] CLIMENT, M. ; MIRÓ, M. ; CARBAJO, J. ; POVEDA, P. ; VERA, G. ; RAMIS, J. : Use of non-linear ultrasonic techniques to detect cracks due to steel corrosion in reinforced concrete structures. *Materials*, Bd. 12, Nr. 5, 813, 2019.
- [46] COLEMAN, B. D. ; HODGDON, M. L. : On a class of constitutive relations for ferromagnetic hysteresis. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Bd. 99, Nr. 4, S. 375–396, 1987.
- [47] CURBACH, M. ; SPECK, K. : *Versuchstechnische Ermittlung und mathematische Beschreibung der mehraxialen Festigkeit von Ultra-Hochfestem Beton – Zweiaxiale Druckfestigkeit*. Arbeitsbericht zum Forschungsvorhaben CU 37/6-1 der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG), 2007.
- [48] DACE, G. E. ; THOMPSON, R. B. ; BUCK, O. : Measurement of the acoustic harmonic generation for materials characterization using contact transducers. *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, Bd. 11, B, S. 2069–2076, 1992.
- [49] DAUDT, C. R. ; BRAILE, L. W. ; NOWACK, R. L. ; CHIANG, C. S. : A comparison of finite-difference and fourier method calculations of synthetic seismograms. *Bulletin of the Seismological Society of America*, Bd. 79, Nr. 4, S. 1210–1230, 1989.
- [50] DAVIDSON, D. ; CHAN, K. ; MCCLUNG, R. ; HUDAK, S. : Small fatigue cracks. *Comprehensive Structural Integrity*, Bd. 4, S. 129–161, 2003.
- [51] DE HOOP, A. T. : A modification of cagniard’s method for solving seismic pulse problems. *Applied Scientific Research, Section B*, Bd. 8, Nr. 1, S. 349–356, 1960.
- [52] DELSANTO, P. P. : *Universality of Nonclassical Nonlinearity*. Springer New York, 2006.
- [53] DIEDERICHS, U. ; MERTZSCH, O. : *Ultra High Performance Concrete (UHPC)*. Kassel University Press, 2008.
- [54] DIN EN 12504-4:2004-12 : Prüfung von Beton in Bauwerken - Teil 4: Bestimmung der Ultraschallgeschwindigkeit; Deutsche Fassung EN 12504-4:2004. *Beuth Verlag GmbH, Berlin*, 2004.

- [55] DING, X. ; ZHAO, Y. ; HU, N. ; LIU, Y. ; ZHANG, J. ; DENG, M. : Experimental and numerical study of nonlinear lamb waves of a low-frequency S_0 mode in plates with quadratic nonlinearity. *Materials*, Bd. 11, Nr. 11, 2096, 2018.
- [56] DONSKOY, D. M. ; FERRONI, K. ; SUTIN, A. ; SHEPPARD, K. : A nonlinear acoustic technique for crack and corrosion detection in reinforced concrete. *Nondestructive Characterization of Materials*, VIII, S. 555–560, 1998.
- [57] DROSSAERT, F. H. ; GIANNOPOULOS, A. : Complex frequency shifted convolution PML for FDTD modelling of elastic waves. *Wave Motion*, Bd. 44, Nr. 7-8, 593–604, 2007.
- [58] DU, G. ; BREAZEALE, M. A. : Harmonic distortion of a finite amplitude Gaussian beam in a fluid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 80, Nr. 1, S. 212–216, 1986.
- [59] DUHEM, F. : Die dauernden Änderungen und die Thermodynamik. *Zeitschrift für Physikalische Chemie*, 34U, Nr. 1, S. 312–377, 1897.
- [60] DUMOULIN, C. ; KARAIKOS, G. ; DERAEMAEKER, A. : Monitoring of crack propagation in reinforced concrete beams using embedded piezoelectric transducers. *Acoustic Emission and Related Non-Destructive Evaluation Techniques in the Fracture Mechanics of Concrete 2015*, S. 161–175.
- [61] EBERHARDT, E. ; STEAD, D. ; STIMPSON, B. : Quantifying progressive pre-peak brittle fracture damage in rock during uniaxial compression. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Bd. 36, Nr. 3, S. 361–380, 1999.
- [62] EGGLE, D. M. ; BRAY, D. E. : Measurement of acoustoelastic and third-order elastic constants for rail steel. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 60, Nr. 3, S. 741–744, 1976.
- [63] ERVIN, B. L. ; KUCHMA, D. A. ; BERNHARD, J. T. ; REIS, H. : Monitoring corrosion of rebar embedded in mortar using high-frequency guided ultrasonic waves. *Journal of Engineering Mechanics*, Bd. 135, S. 9–19, 2009.
- [64] FABIEN-OUELLET, G. ; GLOAGUEN, E. ; GIROUX, B. : Time-domain seismic modeling in viscoelastic media for full waveform inversion on heterogeneous computing platforms with OpenCL. *Computers & Geosciences*, Bd. 100, S. 142–155, 2017.
- [65] FEHLING, E. ; SCHMIDT, M. ; WALRAVEN, J. ; LEUTBECHER, T. ; FRÖHLICH, S. : *Ultra-High Performance Concrete UHPC*. Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, 2014.
- [66] FELLINGER, P. ; MARKLEIN, R. ; LANGENBERG, K. J. ; KLAHOLZ, S. : Numerical modeling of elastic wave propagation and scattering with EFIT — Elastodynamic finite integration technique. *Wave Motion*, Bd. 21, Nr. 1, S. 47–66, 1995.

- [67] FITZGIBBON, W. E. ; WHEELER, M. F. : *Computational Methods in Geosciences*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [68] FORNBERG, B. : On a fourier method for the integration of hyperbolic equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Bd. 12, Nr. 4, S. 509–528, 1975.
- [69] FORNBERG, B. : High-order finite differences and the pseudospectral method on staggered grids. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Bd. 27, Nr. 4, S. 904–918, 1990.
- [70] FORNBERG, B. : *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*. Cambridge University Press, 1998.
- [71] FURUMURA, T. ; TAKENAKA, H. : 2.5-D modelling of elastic waves using the pseudospectral method. *Geophysical Journal International*, Bd. 124, Nr. 3, S. 820–832, 1996.
- [72] GALLEGO, A. ; BENAVENT-CLIMENT, A. ; SUAREZ, E. : Concrete-galvanized steel pull-out bond assessed by acoustic emission. *Journal of Materials in Civil Engineering*, Bd. 28, Nr. 2, 04015109, 2016.
- [73] GAYDECKI, P. A. ; BURDEKIN, F. M. ; DAMAJ, W. ; JOHN, D. G. : The propagation and attenuation of medium-frequency ultrasonic waves in concrete: a signal analytical approach. *Measurement Science and Technology*, Bd. 3, Nr. 1, S. 126–134, 1992.
- [74] GODLEWSKI, E. ; RAVIART, P.-A. : *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Springer New York, 1996.
- [75] GONG, P. ; PATTON, M. E. ; LIU, C. ; OPPENHEIM, I. J. ; GREVE, D. W. ; HARLEY, J. B. ; JUNKER, W. R. : Ultrasonic detection of the alkali-silica reaction damage in concrete. *2014 IEEE International Ultrasonics Symposium*, S. 361–364, 2014.
- [76] GOTTLIEB, D. ; Orszag, (joint author.) U.S. National Science Foundation : *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1977.
- [77] GOTTLIEB, D. ; HESTHAVEN, J. S. : Spectral methods for hyperbolic problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Bd. 128, 1-2, S. 83–131, 2001.
- [78] GOURSOLLE, T. ; SANTOS, S. D. ; MATAR, O. B. ; CALLÉ, S. : Non-linear based time reversal acoustic applied to crack detection: Simulations and experiments. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Bd. 43, Nr. 3, S. 170–177, 2008.
- [79] GREEN, R. E. : *Ultrasonic Investigation of Mechanical Properties: Treatise on Materials Science and Technology 3*. Academic Press, 1973.
- [80] GRÊT, A. ; SNIEDER, R. ; ÖZBAY, U. : Monitoring in situ stress changes in a mining environment with coda wave interferometry. *Geophysical Journal International*, Bd. 167, Nr. 2, S. 504–508, 2006.

- [81] GRÊT, A. ; SNIEDER, R. ; SCALES, J. : Time-lapse monitoring of rock properties with coda wave interferometry. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, Bd. 111, B3, 2006.
- [82] GUSEV, V. ; BAILLIET, H. ; LOTTON, P. ; BRUNEAU, M. : Interaction of counterpropagating acoustic waves in media with nonlinear dissipation and in hysteretic media. *Wave Motion*, Bd. 29, Nr. 3, S. 211–221, 1999.
- [83] GUSEV, V. : Propagation of acoustic pulses in material with hysteretic nonlinearity. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 107, Nr. 6, S. 3047–3058, 2000.
- [84] GUSEV, V. : Theory of non-collinear interactions of acoustic waves in an isotropic material with hysteretic quadratic nonlinearity. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 111, Nr. 1, S. 80–94, 2002.
- [85] GUSEV, V. E. ; LAURIKS, W. ; THOEN, J. : Dispersion of nonlinearity, nonlinear dispersion, and absorption of sound in micro-inhomogeneous materials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 103, S. 3216–3226, 1998.
- [86] GUYER, R. A. ; JOHNSON, P. A. : Nonlinear mesoscopic elasticity: Evidence for a new class of materials. *Physics Today*, Bd. 52, Nr. 4, S. 30–36, 1999.
- [87] HADL, P. ; KIM, H. H. ; NGUYEN, V. T. : Experimental investigations on the scattering in the post cracking tensile behaviour of UHPFRC. *Proceedings of HiPerMat 2016, 4th International Symposium on Ultra-High Performance Concrete and High Performance Materials*, S. 75–76, Kassel, 2016.
- [88] HASTINGS, F. D. ; SCHNEIDER, J. B. ; BROCHAT, S. L. : Application of the perfectly matched layer (PML) absorbing boundary condition to elastic wave propagation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 100, Nr. 5, S. 3061–3069, 1996.
- [89] HAUPERT, S. ; RENAUD, G. ; RIVIÈRE, J. ; TALMANT, M. ; JOHNSON, P. A. ; LAUGIER, P. : High-accuracy acoustic detection of nonclassical component of material nonlinearity. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 130, Nr. 5, S. 2654–2661, 2011.
- [90] HELBIG, K. : A formalism for the consistent description of non-linear elasticity of anisotropic media. *Revue de l'Institut Français du Pétrole*, Bd. 53, Nr. 5, S. 693–708, 1998.
- [91] HIKATA, A. ; CHICK, B. B. ; ELBAUM, C. : Dislocation contribution to the second harmonic generation of ultrasonic waves. *Journal of Applied Physics*, Bd. 36, Nr. 1, S. 229–236, 1965.
- [92] HILSDORF, H. K. ; BRAMESHUBER, W. ; KOTTAS, R. : *Weiterentwicklung und Optimierung der Materialeigenschaften faserbewehrten Betons und Spritzfaserbetons als Stabilisierungselemente der Felssicherung*. Forschungsbericht, Universität Karlsruhe, 1985.

- [93] HODGDON, M. L. : Mathematical theory and calculations of magnetic hysteresis curves. *IEEE Transactions on Magnetics*, Bd. 24, Nr. 6, S. 3120–3122, 1988.
- [94] HOLSCHEMACHER, K. ; WEIßE, D. ; KLOTZ, S. : Bond of reinforcement in ultra high strength concrete. *Proceedings of the International Symposium on Ultra High Performance Concrete*, S. 375–388, 2004.
- [95] HUGHES, D. S. ; KELLY, J. L. : Second-order elastic deformation of solids. *Physical Review*, Bd. 92, Nr. 5, S. 1145–1149, 1953.
- [96] ISHERWOOD, L. ; GRANT, Z. J. ; GOTTLIEB, S. : Strong stability preserving integrating factor Runge-Kutta methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Bd. 56, Nr. 6, S. 3276–3307, 2018.
- [97] JACCOUD, J. P. ; CHARIF, H. ; FARRA, B. : *Cracking Behaviour of HSC Structures and Practical Consequences for Design*. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Département de Génie Civil, Institut de Statique et Structures, Béton Armé et Précontraint, 1993.
- [98] JOHNSON, L. R. : Green's function for lamb's problem. *Bulletin of the Seismological Society of America*, Bd. 37, Nr. 1, S. 99–131, 1974.
- [99] JONES, G. L. ; KOBETT, D. R. : Interaction of elastic waves in an isotropic solid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 35, Nr. 1, S. 5–10, 1963.
- [100] JU, T. ; ACHENBACH, J. D. ; JACOBS, L. J. ; GUIMARAES, M. ; QU, J. : Ultrasonic nondestructive evaluation of alkali-silica reaction damage in concrete prism samples. *Materials and Structures*, Bd. 50, Nr. 1, 60, 2016.
- [101] JU, T. ; ACHENBACH, J. D. ; JACOBS, L. J. ; QU, J. : One-way mixing of collinear waves in an adhesive layer. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 145, Nr. 1, S. 110–120, 2019.
- [102] KAUSEL, E. : Lamb's problem at its simplest. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Bd. 469, Nr. 2149, 20120462, 2013.
- [103] KHORRAMI, M. R. : A Chebyshev spectral collocation method using a staggered grid for the stability of cylindrical flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Bd. 12, Nr. 9, S. 825–833, 1991.
- [104] KIM, G. ; KIM, J.-Y. ; KURTIS, K. E. ; JACOBS, L. J. ; LE PAPE, Y. ; GUIMARAES, M. : Quantitative evaluation of carbonation in concrete using nonlinear ultrasound. *Materials and Structures*, Bd. 49, 1-2, S. 399–409, 2014.
- [105] KIM, G. ; KIM, J.-Y. ; KURTIS, K. E. ; JACOBS, L. J. : Drying shrinkage in concrete assessed by nonlinear ultrasound. *Cement and Concrete Research*, Bd. 92, S. 16–20, 2017.
- [106] KIM, G. ; LORETO, G. ; KIM, J.-Y. ; KURTIS, K. E. ; WALL, J. J. ; JACOBS, L. J. : In situ nonlinear ultrasonic technique for monitoring microcracking in

- concrete subjected to creep and cyclic loading. *Ultrasonics*, Bd. 88, S. 64–71, 2018.
- [107] KIM, Y. H. ; LEE, S. ; KIM, H. C. : Attenuation and dispersion of elastic waves in multi-phase materials. *Journal of Physics D: Applied Physics*, Bd. 24, Nr. 10, S. 1722–1728, 1991.
- [108] KOMLOŠ, K. ; POPOVICS, S. ; NÜRNBERGEROVÁ, T. ; BABÁL, B. ; POPOVICS, J. S. : Ultrasonic pulse velocity test of concrete properties as specified in various standards. *Cement and Concrete Composites*, Bd. 18, Nr. 5, S. 357–364, 1996.
- [109] KÖNIG, G. : *Hochleistungsbeton: Bemessung, Herstellung und Anwendung*. John Wiley & Sons, 2001.
- [110] KOŘENSKÁ, M. ; MATYSÍK, M. ; VYROUBAL, P. ; POSPÍL, K. : Assessment of reinforcement corrosion using nonlinear ultrasonic spectroscopy. *NDT in Progress, 5th International Workshop of NDT Experts*, Prag, Tschechien, 2009.
- [111] KORNEEV, V. A. ; NIHEI, K. T. ; MYER, L. R. : *Nonlinear Interaction of Plane Elastic Waves*. Lawrence Berkeley National Lab., Berkeley, Kalifornien, USA, 1998.
- [112] KORNEEV, V. A. ; DEMČENKO, A. : Possible second-order nonlinear interactions of plane waves in an elastic solid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 135, Nr. 2, S. 591–598, 2014.
- [113] KOSIK, D. W. : Propagation of a nonlinear seismic pulse in an anelastic homogeneous medium. *Geophysics*, Bd. 58, Nr. 7, S. 949–963, 1993.
- [114] KOSLOFF, D. ; TAL-EZER, H. : A modified Chebyshev pseudospectral method with an $O(N-1)$ time step restriction. *Journal of Computational Physics*, Bd. 104, Nr. 2, S. 457–469, 1993.
- [115] KOSLOFF, D. D. ; BAYSAL, E. : Forward modeling by a Fourier method. *Geophysics*, Bd. 47, Nr. 10, S. 1402–1412, 1982.
- [116] KREISS, H.-O. ; OLIGER, J. : Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations. *Tellus*, Bd. 24, Nr. 3, S. 199–215, 1972.
- [117] KREISS, H.-O. ; OLIGER, J. : Stability of the Fourier method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Bd. 16, Nr. 3, S. 421–433, 1979.
- [118] KUBE, C. M. : Scattering of harmonic waves from a nonlinear elastic inclusion. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 141, Nr. 6, S. 4756–4767, 2017.
- [119] KÜCHLER, S. ; MEURER, T. ; JACOBS, L. J. ; QU, J. : Two-dimensional wave propagation in an elastic half-space with quadratic nonlinearity: A numerical study. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 125, Nr. 3, S. 1293–1301, 2009.

- [120] KURGANOV, A. ; TADMOR, E. : New high-resolution central schemes for non-linear conservation laws and convection-diffusion equations. *Journal of Computational Physics*, Bd. 160, Nr. 1, S. 241–282, 2000.
- [121] KUTTA, W. : *Beitrag zur näherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen*. Teubner, 1901.
- [122] LAMB, H. : On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Proceedings of the Royal Society of London*, Bd. 72, 477-486, S. 128–130, 1904.
- [123] LANDAU, L. D. ; LIFSHITZ, E. M. : *Theory of Elasticity*. Pergamon Press, 1981.
- [124] LANDIS, E. N. ; SHAH, S. P. : Frequency-dependent stress wave attenuation in cement-based materials. *Journal of Engineering Mechanics*, Bd. 121, Nr. 6, S. 737–743, 1995.
- [125] LAROSE, E. ; HALL, S. : Monitoring stress related velocity variation in concrete with a 2×10^{-5} relative resolution using diffuse ultrasound. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 125, Nr. 4, S. 1853–1856, 2009.
- [126] LEUTBECHER, T. ; FEHLING, E. : Rissbildung und Zugtragverhalten von mit Fasern verstärktem Stahlbeton am Beispiel ultrahochfesten Betons-Teil 1: Rissmechanische Zusammenhänge. *Beton- und Stahlbetonbau*, Bd. 104, Nr. 6, S. 357–367, 2009.
- [127] LEUTBECHER, T. ; FEHLING, E. : Rissbildung und Zugtragverhalten von mit Fasern verstärktem Stahlbeton am Beispiel ultrahochfesten Betons-Teil 2: Experimentelle Untersuchungen und Anwendungsbeispiele. *Beton- und Stahlbetonbau*, Bd. 104, Nr. 7, S. 406–415, 2009.
- [128] LEUTBECHER, T. : *Rissbildung und Zugtragverhalten von mit Stabstahl und Fasern bewehrtem Ultrahochfesten Beton (UHPC)*. Kassel University Press GmbH, 2009.
- [129] LEVANDER, A. : Fourth-order finite-difference P-S. *Geophysics*, Bd. 53, Nr. 11, S. 1425–1436, 1988.
- [130] LEVEQUE, R. J. : *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.
- [131] LI, F. ; ZHAO, Y. ; CAO, P. ; HU, N. : Mixing of ultrasonic Lamb waves in thin plates with quadratic nonlinearity. *Ultrasonics*, Bd. 87, S. 33–43, 2018.
- [132] LILLAMAND, I. ; CHAIX, J.-F. ; PLOIX, M.-A. ; GARNIER, V. : Acoustoelastic effect in concrete material under uni-axial compressive loading. *NDT & E International*, Bd. 43, Nr. 8, S. 655–660, 2010.
- [133] LIU, M. ; TANG, G. ; JACOBS, L. J. ; QU, J. : A nonlinear wave mixing method for detecting alkali-silica reactivity of aggregates. *AIP Conference Proceedings*, Bd. 1430, Nr. 1, S. 1524–1531, 2012.

- [134] LIU, M. ; TANG, G. ; JACOBS, L. J. ; QU, J. ; THOMPSON, D. O. ; CHIMENTI, D. E. : Measuring acoustic nonlinearity parameter using collinear wave mixing. *Journal of Applied Physics*, Bd. 112, Nr. 2, S. 322–329, 2012.
- [135] LI, Y. : *Développement D'outils de Simulation Numérique pour L'élastodynamique Non Linéaire: Application à L'imagerie Acoustique de Défauts à L'aide de Transducteur à Cavité Chaotique*. PhD thèse, École Centrale de Lille, Lille, Frankreich, 2009.
- [136] LI, Y. ; MATAR, O. B. ; PREOBRAZHENSKY, V. ; PERNOD, P. : Convolution-perfectly matched layer (C-PML) absorbing boundary condition for wave propagation in piezoelectric solid. *2008 IEEE Ultrasonics Symposium*, S. 1568–1571, 2018.
- [137] LOBKIS, O. I. ; WEAVER, R. L. : Coda-wave interferometry in finite solids: Recovery of P-to-S conversion rates in an elastodynamic billiard. *Physical Review Letters*, Bd. 90, Nr. 25, 254302, 2003.
- [138] LOEWENTHAL, D. : *Algebraic Expressions for the Impulsive Motion of an Elastic Half Space*. Tel-Aviv University, Department of Environmental Science, 1970.
- [139] MALHOTRA, V. ; CARINO, N. : *Handbook on Nondestructive Testing of Concrete*. CRC Press Inc., 2004.
- [140] MARKOVIC, I. : *High-Performance Hybrid-Fibre Concrete*. IOS Press, 2006.
- [141] MARTIN, D. : The effect of cohesion loss and stress path on brittle rock strength. *Canadian Geotechnical Journal - 17th Canadian Geotechnical Colloquium*, Bd. 34, S. 698–725, 1997.
- [142] MATLACK, K. H. ; KIM, J.-Y. ; JACOBS, L. J. ; QU, J. : Review of second harmonic generation measurement techniques for material state determination in metals. *Journal of Nondestructive Evaluation*, Bd. 34, S. 1–23, 2014.
- [143] MATSUDA, N. ; BIWA, S. : A Finite-Difference Time-Domain Technique for Nonlinear Elastic Media and Its Application to Nonlinear Lamb Wave Propagation. *Japanese Journal of Applied Physics*, Bd. 51, 07GB14, 2012.
- [144] MAYA DUQUE, L. F. ; GRAYBEAL, B. : Fiber orientation distribution and tensile mechanical response in UHPFRC. *Materials and Structures*, Bd. 50, Nr. 1, 55, 2016.
- [145] MCCALL, K. R. ; GUYER, R. A. : A new theoretical paradigm to describe hysteresis, discrete memory and nonlinear elastic wave propagation in rock. *Nonlinear Processes in Geophysics*, Bd. 3, Nr. 2, S. 89–101, 1996.
- [146] MEHTA, P. K. ; MONTEIRO, P. J. M. : *Concrete: Microstructure, Properties, and Materials*. McGraw-Hill Education - Europe, 2013.
- [147] MEURER, T. ; QU, J. ; JACOBS, L. J. : Wave propagation in nonlinear and hysteretic media-A numerical study. *International Journal of Solids and Structures*, Bd. 39, 21-22, S. 5585–5614, 2002.

- [148] MOONEY, M. : A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, Bd. 11, Nr. 9, S. 582–592, 1940.
- [149] MORADI-MARANI, F. ; RIVARD, P. ; LAMARCHE, C.-P. ; KODJO, S. A. : Evaluating the damage in reinforced concrete slabs under bending test with the energy of ultrasonic waves. *Construction and Building Materials*, Bd. 73, S. 663–673, 2014.
- [150] MÜLLER, F. P. ; KEINTZEL, E. ; CHARLIER, H. : *Dynamische Probleme im Stahlbetonbau: Teil 1: Der Baustoff Stahlbeton unter dynamischer Beanspruchung*. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Beuth Verlag GmbH, 1988.
- [151] MURNAGHAN, F. D. : Finite deformations of an elastic solid. *American Journal of Mathematics*, Bd. 59, Nr. 2, S. 235–260, 1937.
- [152] NAZAROV, V. E. ; OSTROVSKY, L. A. ; SOUSTOVA, I. A. ; SUTIN, A. M. : Non-linear acoustics of micro-inhomogeneous media. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, Bd. 50, Nr. 1, S. 65–73, 1988.
- [153] NAZAROV, V. E. ; SUTIN, A. M. : Nonlinear elastic constants of solids with cracks. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 102, Nr. 6, S. 3349–3354, 1997.
- [154] NAZAROV, V. E. ; SUTIN, A. M. : Nonlinear elastic constants of solids with cracks. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 102, Nr. 6, S. 3349–3354, 1997.
- [155] NAZAROV, V. E. ; RADOSTIN, A. V. ; OSTROVSKY, L. A. ; SOUSTOVA, I. A. : Wave processes in media with hysteretic nonlinearity. Part I. *Acoustical Physics*, Bd. 49, Nr. 3, S. 344–353, 2003.
- [156] NAZAROV, V. E. ; RADOSTIN, A. ; OSTROVSKY, L. ; SOUSTOVA, I. : Wave processes in media with hysteretic nonlinearity. Part II. *Acoustical Physics*, Bd. 49, Nr. 4, S. 444–448, 2003.
- [157] NESSYAHU, H. ; TADMOR, E. : Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, Bd. 87, Nr. 2, S. 408–463, 1990.
- [158] ONGPENG, J. M. C. ; ORETA, A. W. C. ; HIROSE, S. : Contact and noncontact ultrasonic nondestructive test in reinforced concrete beam. *Advances in Civil Engineering*, Bd. 2018, Nr. 1, S. 1–10, 2018.
- [159] OSTROVSKY, L. A. : Wave processes in media with strong acoustic nonlinearity. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 90, Nr. 6, S. 3332–3337, 1991.
- [160] OWINO, J. O. ; JACOBS, L. J. : Attenuation measurements in cement-based materials using laser ultrasonics. *Journal of Engineering Mechanics*, Bd. 125, Nr. 6, S. 637–647, 1999.

- [161] ÖZDENVAR, T. ; MCMECHAN, G. A. : Causes and reduction of numerical artefacts in pseudo-spectral wavefield extrapolation. *Geophysical Journal International*, Bd. 126, Nr. 3, S. 819–828, 1996.
- [162] PAYAN, C. ; GARNIER, V. ; MOYSAN, J. ; JOHNSON, P. A. : Determination of third order elastic constants in a complex solid applying coda wave interferometry. *Applied Physics Letters*, Bd. 94, Nr. 1, 011904, 2009.
- [163] PAYAN, C. ; ULRICH, T. J. ; LE BAS, P. Y. ; SALEH, T. ; GUIMARAES, M. : Quantitative linear and nonlinear resonance inspection techniques and analysis for material characterization: Application to concrete thermal damage. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 136, Nr. 2, S. 537–546, 2014.
- [164] PHILIPPIDIS, T. P. ; AGGELIS, D. G. : Experimental study of wave dispersion and attenuation in concrete. *Ultrasonics*, Bd. 43, Nr. 7, S. 584–595, 2005.
- [165] POPOVICS, S. ; ROSE, J. L. ; POPOVICS, J. S. : The behaviour of ultrasonic pulses in concrete. *Cement and Concrete Research*, Bd. 20, Nr. 2, S. 259–270, 1990.
- [166] POPOVICS, S. ; POPOVICS, J. S. : Effect of stresses on the ultrasonic pulse velocity in concrete. *Materials and Structures*, Bd. 24, Nr. 1, S. 15–23, 1991.
- [167] POPOVICS, S. ; POPOVICS, J. S. : Critique of the ultrasonic pulse velocity method for testing concrete. *Proceedings of Nondestructive Testing of Concrete Elements and Structures*, S. 94–103, 1992.
- [168] PREISACH, F. : Über die magnetische Nachwirkung. *Zeitschrift für Physik*, Bd. 94, Nr. 5-6, S. 277–302, 1935.
- [169] RAGGIO, G. : A pseudo spectral Chebyshev scheme for forward acoustic modeling. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Bd. 66, Nr. 11, S. 545–553, 1986.
- [170] RAKOTONARIVO, S. T. ; PAYAN, C. ; MOYSAN, J. ; HOCHARD, C. : Local damage evaluation of a laminate composite plate using ultrasonic birefringence of shear wave. *Composites Part B: Engineering*, Bd. 142, S. 287–292, 2018.
- [171] RENAUD, G. ; TALMANT, M. ; MARRELEC, G. : Microstrain-level measurement of third-order elastic constants applying dynamic acousto-elastic testing. *Journal of Applied Physics*, Bd. 120, Nr. 13, 135102, 2016.
- [172] RIVLIN, R. S. : Large elastic deformations of isotropic materials. IV. Further developments of the general theory. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Bd. 241, Nr. 835, S. 379–397, 1948.
- [173] ROBERTSSON, J. O. A. ; BLANCH, J. O. ; SYMES, W. W. : Viscoelastic finite-difference modeling. *Geophysics*, Bd. 59, Nr. 9, S. 1444–1456, 1994.

- [174] ROBERTSSON, J. O. A. : A numerical free-surface condition for elastic/viscoelastic finite-difference modeling in the presence of topography. *Geophysics*, Bd. 61, Nr. 6, S. 1921–1934, 1996.
- [175] RODEN, J. A. ; GEDNEY, S. D. : Convolution PML (CPML): An efficient FDTD implementation of the CFS–PML for arbitrary media. *Microwave and Optical Technology Letters*, Bd. 27, Nr. 5, S. 334–339, 2000.
- [176] ROE, S. E. ; WOODWARD, C. ; CRAMER, M. J. : Nonlinear ultrasonic testing on a laboratory concrete bridge deck. *AIP Conference Proceedings*, Bd. 894, Nr. 1, S. 1429–1434, 2007.
- [177] RUCKA, M. ; WILDE, K. : Experimental study on ultrasonic monitoring of splitting failure in reinforced concrete. *Journal of Nondestructive Evaluation*, Bd. 32, Nr. 4, S. 372–383, 2013.
- [178] RUCKA, M. ; WILDE, K. : Ultrasound monitoring for evaluation of damage in reinforced concrete. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, Bd. 63, Nr. 1, S. 65–75, 2015.
- [179] RUNGE, C. : Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. *Mathematische Annalen*, Bd. 46, Nr. 2, S. 167–178, 1895.
- [180] SAINT-PIERRE, F. ; RIVARD, P. ; BALLIVY, G. : Measurement of alkali–silica reaction progression by ultrasonic waves attenuation. *Cement and Concrete Research*, Bd. 37, Nr. 6, S. 948–956, 2007.
- [181] SANSALONE, M. ; LIN, J.-M. ; STREETT, W. B. : Determining the depth of surface-opening cracks using impact-generated stress waves and time-of-flight techniques. *ACI Materials Journal*, Bd. 95, Nr. 2, S. 168–177, 1998.
- [182] SASAKI, Y. ; HASEGAWA, M. : Effect of anisotropy on acoustoelastic birefringence in wood. *Ultrasonics*, Bd. 46, Nr. 2, S. 184–190, 2007.
- [183] SCHÖNLIN, K. : Ermittlung der Orientierung, Menge und Verteilung der Fasern in faserbewehrtem Beton. *Beton- und Stahlbetonbau*, Bd. 83, Nr. 6, S. 168–171, 1988.
- [184] SCHURR, D. P. ; KIM, J.-Y. ; SABRA, K. G. ; JACOBS, L. J. : Damage detection in concrete using coda wave interferometry. *NDT & E International*, Bd. 44, Nr. 8, S. 728–735, 2011.
- [185] SEEGER, A. ; BUCK, O. : Die experimentelle Ermittlung der elastischen Konstanten höherer Ordnung. *Zeitschrift für Naturforschung A*, Bd. 15, Nr. 12, S. 1056–1067, 1960.
- [186] SHAH, A. A. ; RIBAKOV, Y. : Non-linear non-destructive evaluation of concrete. *The Open Construction and Building Technology Journal*, Bd. 2, S. 111–115, 2008.
- [187] SHAH, A. A. ; RIBAKOV, Y. : Non-linear ultrasonic evaluation of damaged concrete based on higher order harmonic generation. *Materials & Design*, Bd. 30, Nr. 10, S. 4095–4102, 2009.

- [188] SHAH, A. A. ; HIROSE, S. : Nonlinear ultrasonic investigation of concrete damaged under uniaxial compression step loading. *Journal of Materials in Civil Engineering*, Bd. 22, Nr. 5, S. 476–484, 2010.
- [189] SHAH, A. A. ; RIBAKOV, Y. ; ZHANG, C. : Efficiency and sensitivity of linear and non-linear ultrasonics to identifying micro and macro-scale defects in concrete. *Materials & Design*, Bd. 50, S. 905–916, 2013.
- [190] SHARMA, S. ; MUKHERJEE, A. : Longitudinal guided waves for monitoring chloride corrosion in reinforcing bars in concrete. *Structural Health Monitoring: An International Journal*, Bd. 9, Nr. 6, S. 555–567, 2010.
- [191] SHOKOUHI, P. ; ZOËGA, A. ; WIGGENHAUSER, H. : Nondestructive investigation of stress-induced damage in concrete. *Advances in Civil Engineering*, Bd. 2010, 740189, 2010.
- [192] SHOKOUHI, P. ; RIVIÈRE, J. ; LAKE, C. R. ; LE BAS, P.-Y. ; ULRICH, T. J. : Dynamic acousto-elastic testing of concrete with a coda-wave probe: Comparison with standard linear and nonlinear ultrasonic techniques. *Ultrasonics*, Bd. 81, S. 59–65, 2017.
- [193] SIGNORINI, A. : Trasformazioni termoelastiche finite. *Annali di Matematica Pura ed Applicata, Series 4*, Bd. 22, Nr. 1, S. 33–143, 1943.
- [194] SOLODOV, I. ; PFLEIDERER, K. ; DÖRING, D. ; BUSSE, G. : Nondestructive evaluation of anisotropy in composite materials via acoustic birefringence. *Research in Nondestructive Evaluation*, Bd. 19, Nr. 3, S. 129–143, 2008.
- [195] STÄHLER, S. C. ; SENS-SCHÖNFELDER, C. ; NIEDERLEITHINGER, E. : Monitoring stress changes in a concrete bridge with coda wave interferometry. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 129, Nr. 4, S. 1945–1952, 2011.
- [196] SUARIS, W. ; FERNANDO, V. : Ultrasonic pulse attenuation as a measure of damage growth during cyclic loading of concrete. *ACI Materials Journal*, Bd. 84, Nr. 3, S. 185–193, 1987.
- [197] SUN, Y. ; HUANG, P. ; SU, J. ; WANG, T. : Depth estimation of surface-opening crack in concrete beams using impact-echo and non-contact video-based methods. *EURASIP Journal on Image and Video Processing*, Bd. 2018, Nr. 1, 144, 2018.
- [198] SUN, Z. ; LI, F. ; LI, H. : A numerical study of non-collinear wave mixing and generated resonant components. *Ultrasonics*, Bd. 71, S. 245–255, 2016.
- [199] TANG, G. ; JACOBS, L. J. ; QU, J. : Scattering of time-harmonic elastic waves by an elastic inclusion with quadratic nonlinearity. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 131, Nr. 4, S. 2570–2578, 2012.
- [200] TANG, G. ; JACOBS, L. J. ; QU, J. : Wave scattering by an elastic inclusion with quadratic nonlinearity. *AIP Conference Proceedings*, Bd. 1430, Nr. 1, S. 269–276, 2012.

- [201] TANG, G. ; LIU, M. ; JACOBS, L. J. ; QU, J. : Detecting localized plastic strain by a scanning collinear wave mixing method. *Journal of Nondestructive Evaluation*, Bd. 33, Nr. 2, S. 196–204, 2014.
- [202] TANG, S. : Wave propagation in initially-stressed elastic solids. *Acta Mechanica*, Bd. 4, Nr. 1, S. 92–106, 1967.
- [203] TENCATE, J. A. ; PASQUALINI, D. ; HABIB, S. ; HEITMANN, K. ; HIGDON, D. ; JOHNSON, P. A. : Nonlinear and nonequilibrium dynamics in geomaterials. *Physical Review Letters*, Bd. 93, Nr. 6, 065501, 2004.
- [204] TEPFERS, R. : *A Theory of Bond Applied to Overlapped Tensile Reinforcement Splices for Deformed Bars*. Doktorsavhandlingar vid Chalmers Tekniska Högskola, Division of Concrete Structures, Chalmers Institute of Technology, Göteborg, Schweden, 1973.
- [205] TESSMER, E. ; KOSLOFF, D. ; BEHLE, A. : Elastic wave propagation simulation in the presence of surface topography. *Geophysical Journal International*, Bd. 108, Nr. 2, S. 621–632, 1992.
- [206] TESSMER, E. ; KESSLER, D. ; KOSLOFF, D. ; BEHLE, A. : Multi-domain Chebyshev-Fourier method for the solution of the equations of motion of dynamic elasticity. *Journal of Computational Physics*, Bd. 100, Nr. 2, S. 355–363, 1992.
- [207] TESSMER, E. ; KOSLOFF, D. : 3-D elastic modeling with surface topography by a Chebychev spectral method. *Geophysics*, Bd. 59, Nr. 3, S. 464–473, 1994.
- [208] THOMAS, J. F. : Third-order elastic constants of aluminum. *Physical Review*, Bd. 175, Nr. 3, S. 955–962, 1968.
- [209] THOMAS, J. W. : *Numerical Partial Differential Equations*. Springer New York, 1999.
- [210] THOMPSON, R. B. : Higher harmonics of finite amplitude ultrasonic waves in solids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 59, Nr. 5, S. 1087–1094, 1976.
- [211] THOMPSON, R. B. ; TIERSTEN, H. F. : Harmonic generation of longitudinal elastic waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 62, Nr. 1, S. 33–37, 1977.
- [212] TOUPIN, R. A. ; BERNSTEIN, B. : Sound waves in deformed perfectly elastic materials. Acoustoelastic effect. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 33, Nr. 2, S. 216–225, 1961.
- [213] TREFETHEN, L. N. : *Spectral Methods in MATLAB*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [214] TRUESDELL, C. ; TOUPIN, R. : *Principles of Classical Mechanics: The Classical Field Theories*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1960.

- [215] TUE, N. V. ; HENZE, S. ; KÜCHLER, M. ; SCHENCK, G. ; WILLE, K. : Ein opto-analytisches Verfahren zur Bestimmung der Faserverteilung und -orientierung in stahlfaserverstärktem UHFB. *Beton- und Stahlbetonbau*, Bd. 102, Nr. 10, S. 674–680, 2007.
- [216] VAN DEN ABEELE, K. ; JOHNSON, P. A. ; GUYER, R. A. ; MCCALL, K. R. : On the quasi-analytic treatment of hysteretic nonlinear response in elastic wave propagation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 101, Nr. 4, S. 1885–1898, 1997.
- [217] VAN DEN ABEELE, K. ; JOHNSON, P. A. ; SUTIN, A. : Nonlinear elastic wave spectroscopy (NEWS) techniques to discern material damage, Part I: Nonlinear wave modulation spectroscopy (NWMS). *Research in Nondestructive Evaluation*, Bd. 12, Nr. 1, S. 17–30, 2000.
- [218] VAN DEN ABEELE, K. ; CARMELIET, J. ; A. TEN CATE, J. ; JOHNSON, P. A. : Nonlinear elastic wave spectroscopy (NEWS) techniques to discern material damage, Part II: Single-mode nonlinear resonance acoustic spectroscopy. *Research in Nondestructive Evaluation*, Bd. 12, Nr. 1, S. 31–42, 2000.
- [219] VANAVERBEKE, S. ; VAN DEN ABEELE, K. : Two-dimensional modeling of wave propagation in materials with hysteretic nonlinearity. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 122, S. 58–72, 2007.
- [220] VIRIEUX, J. : P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, Bd. 51, Nr. 4, S. 889–901, 1986.
- [221] WASHER, G. ; FUCHS, P. ; REZAI, A. ; GHASEMI, H. : Ultrasonic measurement of the elastic properties of ultra-high performance concrete (UHPC). *Proc. SPIE 5767, Nondestructive Evaluation and Health Monitoring of Aerospace Materials, Composites, and Civil Infrastructure IV*, Bd. 5767, S. 416–422, 2005.
- [222] WICHMANN, H.-J. ; HOLST, A. ; BUDELMANN, H. : Ein praxisgerechtes Messverfahren zur Bestimmung der Fasermenge und -orientierung im Stahlfaserbeton. *Beton- und Stahlbetonbau*, Bd. 108, S. 822–834, 2013.
- [223] WILLE, K. ; TUE, N. V. ; PARRA-MONTESINOS, G. J. : Fiber distribution and orientation in UHP-FRC beams and their effect on backward analysis. *Materials and Structures*, Bd. 47, Nr. 11, S. 1825–1838, 2014.
- [224] WINKLER, K. W. ; LIU, X. : Measurements of third-order elastic constants in rocks. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 100, Nr. 3, S. 1392–1398, 1996.
- [225] WOODWARD, C. : Nonlinear ultrasonic evaluation of concrete microcracking. *AIP Conference Proceedings*, Bd. 700, Nr. 1, S. 1022–1026, 2004.
- [226] WOODWARD, C. ; AMIN, M. N. : Evaluating rebar corrosion using nonlinear ultrasound. *AIP Conference Proceedings*, Bd. 975, Nr. 1, S. 1314–1319, 2008.

- [227] XU, H. ; DAY, S. M. ; MINSTER, J.-B. H. : Two-dimensional linear and nonlinear wave propagation in a half-space. *Bulletin of the Seismological Society of America*, Bd. 89, Nr. 4, S. 903–917, 1999.
- [228] YANG, C. ; CHEN, J. : Fully noncontact nonlinear ultrasonic characterization of thermal damage in concrete and correlation with microscopic evidence of material cracking. *Cement and Concrete Research*, Bd. 123, 105797, 2019.
- [229] YEIH, W. ; HUANG, R. : Detection of the corrosion damage in reinforced concrete members by ultrasonic testing. *Cement and Concrete Research*, Bd. 28, Nr. 7, S. 1071–1083, 1998.
- [230] ZABOLOTSKAYA, E. A. : Sound beams in a nonlinear isotropic solid. *Soviet Physics Acoustics-USSR*, Bd. 32, Nr. 4, S. 296–299, 1986.
- [231] ZABOLTSKAYA, E. A. ; KHOKHLOV, R. V. : Quasi-plane waves in the nonlinear acoustics of confined beams. *Akusticheskij Zhurnal*, Bd. 15, Nr. 1, S. 40–47, 1969.
- [232] ZAITSEV, V. P. ; GUSEV, V. E. ; ZAYTSEV, Y. P. : Effect of hysteresis saturation on nonlinear interaction of elastic waves in material with hysteretic nonlinearity. *Proceedings of the XIX-th Session of the Russian Acoustical Society*, S. 135–138, 2007.
- [233] ZHAO, Y. ; QIU, Y. ; JACOBS, L. J. ; QU, J. : A micromechanics model for the acoustic nonlinearity parameter in solids with distributed microcracks. *AIP Conference Proceedings*, Bd. 1706, Nr. 1, 060001, 2016.
- [234] ZHOU, B. ; UCHIDA, Y. : Influence of flowability, casting time and formwork geometry on fiber orientation and mechanical properties of UHPFRC. *Cement and Concrete Research*, Bd. 95, S. 164–177, 2017.
- [235] ZUMPANO, G. ; MEO, M. : A new nonlinear elastic time reversal acoustic method for the identification and localisation of stress corrosion cracking in welded plate-like structures – A simulation study. *International Journal of Solids and Structures*, Bd. 44, Nr. 11-12, S. 3666–3684, 2007.

