

**Signalverarbeitungsverfahren und virtuelle Instrumente  
zur Messung von elektrischen Signalen und zur  
Fehlerdiagnose an Maschinen**

**Vom Fachbereich Elektrotechnik und Informatik der  
Universität Siegen**

zur Erlangung des akademischen Grades

**Doktor der Ingenieurwissenschaften**

**(Dr. -Ing.)**

genehmigte Dissertation

von

**M. Eng. Zhongdong Liu**

1. Gutachter: Universitätsprofessor Dr. -Ing. Dr. h.c. K.W. Bonfig
  2. Gutachter: Universitätsprofessor Dr. -Ing. D. Ehrhardt
- Vorsitzender: Universitätsprofessor Dr. rer. nat. R. Patsch

Tag der mündlichen Prüfung: 10.01.2006

## **Vorwort**

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit am Institut für Messtechnik der Universität Siegen und in der Firma Klose Antriebstechnik GmbH & Co. KG, Hilchenbach.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. K.W. Bonfig, dem Leiter des Instituts, danke ich für die Betreuung und die großzügige Unterstützung bei der Durchführung dieser Arbeit.

Herrn Prof. Dr.-Ing D. Ehrhardt vom Institut für Mikrosystemtechnik möchte ich für die sorgfältige Durchsicht der Arbeit und die Übernahme des Koreferats danken. Ebenso gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. rer. nat. R. Patsch vom Institut für Werkstoffe der Elektrotechnik und Diagnostik für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Himmel von FH Koblenz RheinAhrCampus Remagen möchte ich mich für die vielen nützlichen Anregungen und die Koordinierung der Zusammenarbeit mit der Firma Klose bedanken.

Mein Besonderer Dank gilt allen Mitarbeitern des Instituts, die mich bei der Durchführung und Fertigstellung meiner Arbeit tatkräftig unterstützt haben. Hervorheben möchte ich an dieser Stelle Herrn Dipl. –Ing. R. Nötzel, Herrn Dipl. –Ing. C. Dietrich und Herrn Dipl. –Ing. M. Treuherz.

Nicht zuletzt gilt ein besonderer Dank meiner Frau Hong Liu und meinem Sohn Ji Liu für das Verständnis und die Geduld während der Fertigstellung dieser Arbeit.

Siegen, im September 2005

## Kurzfassung

Im modernen Prüffeld zur Warenendkontrolle und Prüfung von elektrischen Motoren dienen halbleitergesteuerte Frequenzumformer zur Einstellung der Drehzahl. Zur Verarbeitung umfangreicher Messdaten wird häufig ein rechnergestütztes Messdatenerfassungs- und Verarbeitungssystem eingesetzt. Eine Hauptaufgabe des Messsystems ist die möglichst genaue Bestimmung der Größen (Frequenz, Amplitude und Phase) bei der Grundfrequenz von Spannungs- und Stromsignalen, die oft von Innen- und Außenrauschen gestört werden. Eine besondere Bedeutung hat dabei die Bestimmung der Frequenzen mit kurzen Messzeiten. Dafür werden hierbei die Schätzungsverfahren zur Bestimmung der Größen untersucht und vergleichend dargestellt. Es wird gezeigt, dass sich die Chirp-z-Transformation (CZT) und das Zeropadding-Verfahren (ZP), kombiniert mit der Anwendung geeigneter Fensterfunktionen, zur Bestimmung der Größen von Spannungs- und Stromsignalen bezüglich der Zuverlässigkeit bei kurzen Messzeiten eignen. Durch die Betrachtung der Spektralinterferenz in der DTFT eines Multifrequenz-Signals wurden die allgemeinen Bedingungen für die Anwendung der CZT bzw. des ZP bei reellen Multifrequenz-Signalen unter dem Einsatz der Fensterfunktionen dargestellt. Der Einfluß eines reellen weißen Rauschsignals auf die geschätzten Größen eines reellen Multifrequenz-Signals wurde untersucht, und die Standardabweichung der geschätzten Größen des durch weißes Rauschsignal gestörten Signals wurde abgeleitet. Ein virtuelles Instrument wurde entwickelt.

Frequenzumformer erzeugen ein breitbandiges Spektrum, bestehend aus harmonischen und interharmonischen Komponenten. Die letzteren führen zur Erhöhung der Energieverluste und verursachen Störungen im Übertragungsnetz. Bei praktischen Anwendungen von halbleitergesteuerten Frequenzumformern ist es häufig erforderlich, die harmonischen und interharmonischen Komponenten getrennt zu verarbeiten. Bei der praktischen Analyse der interharmonischen Komponenten entstehen Schwierigkeiten. Das TDA-Verfahren (time domain averaging) wird zur Verarbeitung der harmonischen Komponenten der Ausgangssignale eines Frequenzumformers untersucht. Zur Detektion und Messung der interharmonischen Komponenten wird ein digitales Differenz-Filter vorgestellt. Die Anwendbarkeit des TDA-Verfahrens und des digitalen Differenz-Filters wird durch die Ergebnisse aus Simulationen und praktischen Anwendungen gezeigt.

Im zweiten Teil dieser Arbeit werden die Verfahren zur Fehlerfrüherkennung an Planetengetrieben untersucht. Basierend auf der Analyse der Fehler an Zahnrädern und Wälzlagern wurden virtuelle Instrumente zur Fehldiagnose und Schwingungsanalyse an Planetengetrieben entwickelt. Die praktischen Anwendungen zeigen, dass das Spektrum der demodulierten hochfrequenten mechanischen Schwingungen – Hüllkurvenspektrum – eine spektrale Struktur bei den Frequenzen enthält, die mit den Fehlern auf Innenring- oder Außenringlaufbahn in Verbindung stehen.

## Abstract

In modern test labs for final inspection and testing of electrical motors semiconductor-controlled frequency converters are frequently used for adjusting the running speed of the motors to test their characteristics at different operating conditions. In order to process the extensive data from the testing a computer-aided data acquisition and signal processing system is often put into use. One of the important tasks of the system is the possibly exact estimation of the parameters (frequency, Amplitude and Phase) at the fundamental frequencies of the voltage and current signals which are often disturbed by internal and external noises. The estimation of frequencies in short measurement time is of particular importance. Therefore the frequency estimation methods in the digital signal processing will be here investigated and compared. It will be shown that the chirp-z-transform and zero-padding, combined with a appropriate window, are suitable for the estimation of the parameters of the voltage and current signals with moderate computational complexity. Through the analysis of the spectral interference in the discrete time Fourier transform the conditions for the simultaneous use of the windows and the chirp-z-transform or zero-padding will be presented. The statistical errors of the estimations will be discussed. A virtual instrument has been developed.

Frequency converters generate a wide spectrum of harmonic and interharmonic components. The later increase the energy losses and decrease the reliability of a power system. In the application of semiconductor-controlled frequency converters it is therefore necessary to process the harmonic and interharmonic components separately. The difficulties in finding accurate interharmonic frequency and magnitude arise in the practical detection and measurement. The time domain averaging will be here investigated to process harmonic components in the output signals of frequency converters. For the detection and measurement of interharmonics a digital difference-filter will be proposed. Simulations and field test results are provided to illustrate the utility of the time domain averaging and the difference-filter.

In the second part of this work, the techniques of vibration analysis to the early detection of incipient failure in epicyclic gearboxes are investigated. Based on the analysis of the faults of gears and rolling bearings the virtual instruments for the fault diagnosis and vibration analysis in epicyclic gearboxes are developed. The practical applications show that the spectrum of the demodulated high-frequency vibration – envelope spectrum – contains a pattern of spectral lines at frequencies which can be related to the faults on the inner or outer race of rolling bearings.

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Stand der Kenntnisse und Problemstellung	1
1.1.1	Messung von Größen der durch Rauschen gestörten periodischen Signale bei kurzer Messzeit	1
1.1.2	Fehlerdiagnose an Planetengetrieben	4
1.2	Zielsetzung und Aufbau der Arbeit	6
<b>2</b>	<b>Rechnergestützte Messdatenerfassung und Messsignalverarbeitung</b>	<b>8</b>
2.1	Einleitung	8
2.2	Messdatenerfassung	8
2.3	Messsignalverarbeitung	10
2.4	Softwarelösungen im Bereich der Messtechnik	12
2.5	Virtuelle Instrumente	13
2.6	LabView-Programm	14
2.7	Realisierung anwendungsorientierter Signalverarbeitungsverfahren mit dem LabView	16
<b>3</b>	<b>Untersuchte Verfahren zur Bestimmung der Größen von verrauschten periodischen Signalen bei kurzer Messzeit</b>	<b>18</b>
3.1	Grundlage	18
3.1.1	Einzelfrequenz- und Multifrequenz-Signale	18
3.1.2	Die Fourier-Transformation(FT) und die Laplace-Transformation	18
3.1.3	Die z-Transformation und die zeitdiskrete Fourier-Transformation	19
3.1.4	Die diskrete Fourier-Transformation (DFT)	20
3.1.5	Maximum-Likelihood-Schätzung der Größen verrauschter Sinussignale	21
3.1.6	Cramer-Rao-Schranke (CR-Schranke)	22
3.2	Die Ursache der Leckeffekte der DFT	23
3.2.1	Auswirkung der Zeitbegrenzung	23
3.2.2	Kurz-Reichweite-Leckeffekt ( <i>short-range leakage</i> ) der DFT	25
3.2.3	Lang-Reichweite-Leckeffekt ( <i>long-range leakage</i> ) der DFT	27
3.3	Unterdrückung des Leckeffekts durch Fensterfunktionen	29
3.4	Erhöhung der Frequenzauflösung durch die Chirp-z-Transformation (CZT) und das Zeropadding-Verfahren	32
3.4.1	Die Chirp-z-Transformation	32
3.4.2	Zeropadding-Verfahren	36
3.5	Die Interpolation-Diskrete-Fourier-Transformation(IpDFT)	39
3.5.1	Prinzip der Interpolation-Diskrete-Fourier-Transformation	39
3.5.2	Schätzung der Größen der im Rauschen versteckten Sinussignale	40
3.6	Das Phase-Differenz-basierende Verfahren (PDB-Verfahren)	43
3.6.1	Beschreibung des PDB-Verfahrens	43

3.6.2	Analyse der Fehler beim PDB-Verfahren	47
3.7	Ermittlung der Frequenzen und Amplituden von verrauschten periodischen Signalen durch die Spektralschätzung	50
3.7.1	Traditionelle Spektralschätzung	51
3.7.2	Spektralschätzung durch Anwendung des autoregressiven Modells	53
3.7.3	Amplituden der vom Rauschen gestörten periodischen Signale bei Spektralschätzungen	57
3.8	Zusammenfassende Bewertung	61
<b>4</b>	<b>Bestimmung der Größen verrauschter periodischer Signale mit Hilfe der CZT und des Zeropadding-Verfahrens bei kurzer Messzeit</b>	<b>63</b>
4.1	Einleitung	63
4.2	Unterdrückung des Leckeffekts durch die CZT bzw. das Zeropadding-Verfahren bei Einzelfrequenz-Signalen	63
4.3	Spektralinterferenz bei Multifrequenz-Signalen	64
4.3.1	Spektralinterferenz unter dem Einsatz der Fensterfunktionen	65
4.3.2	Minimale Frequenz eines Sinus/Cosinussignals	69
4.3.3	Multifrequenz-Signale bei synchroner Abtastung	71
4.4	Statistische Fehler der CZT und des Zeropadding-Verfahrens bei Störungen	73
4.4.1	Statistische Analyse der DTFT eines komplexen und reellen weißen Rauschsignals	73
4.4.2	Einfluß eines reellen weißen Rauschsignals auf die geschätzten Größen eines Multifrequenz-Signals	78
4.4.3	Schwellenwert des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses (SNR)	81
4.5	Praktische Betrachtung der CZT und des Zeropadding-Verfahrens	83
<b>5</b>	<b>Messung von elektrischen Signalen an umrichter gespeisten Motoren</b>	<b>86</b>
5.1	Umrichterausgangsspannung	86
5.2	Bestimmung der Grundfrequenz der umrichter gespeisten Spannung	90
5.2.1	Kreuzkorrelation zwischen dem Spannungs- und Stromsignal	91
5.2.2	Bestimmung der Grundfrequenz	94
5.3	Bestimmung der elektrischen Größen	96
5.3.1	Effektivwertbildung durch digitale Filterung	96
5.3.2	Effektivwertbildung durch die kleinsten Quadrate	97
5.4	Bearbeitung der harmonischen und interharmonischen Komponenten	99
5.4.1	TDA-Verfahren zur Bearbeitung der harmonischen Komponenten	101
5.4.2	Differenz-Filter zur Bearbeitung der interharmonischen Komponenten	103
5.4.3	Beispiele der Simulation und der praktischen Anwendung	105
<b>6</b>	<b>Schwingungsstärkemessung und Spektralanalyse mit dem LabView-Programm</b>	<b>109</b>
6.1	Schwingungsaufnehmer	110
6.1.1	Schwingweg, Schwinggeschwindigkeit und Schwingbeschleunigung	110

6.1.2	Messung des Schwingwegs	112
6.1.3	Messung der Schwinggeschwindigkeit	113
6.1.4	Messung der Beschleunigung	114
6.1.5	Anordnung von Schwingungsaufnehmern	116
6.2	Realisierung eines virtuellen Messgerätes für die Schwingungsstärkemessung mit LabView	117
6.2.1	Digitale Filter	119
6.2.2	Frequenzbandbegrenzung mit digitalen Filtern	121
6.3	Spektralanalyse mit Hilfe von LabView	124
6.3.1	Realisierung verschiedener Abtastfrequenzen	125
6.3.2	Ein virtuelles Instrument für die Spektralanalyse mit dem LabView-Programm	128
<b>7</b>	<b>Virtuelle Instrumente zur Schwingungsanalyse und Fehlerdiagnose an Planetengetrieben</b>	<b>131</b>
7.1	Einleitung	131
7.2	Fehler und Schwingungen in Planetengetrieben	132
7.2.1	Zahneingriffsschwingungen	133
7.2.2	Schwingungen durch Verzahnungsfehler	135
7.2.3	Wälzlagerfehler und ihr Erscheinungsbild	138
7.3	Drehzahlverhältnisse eines einfachen Planetengetriebes	141
7.4	Charakteristische Frequenzen des kombinierten Planetengetriebes	142
7.5	Virtuelles Instrument für die Spektralanalyse von Hoch- und Ablaufvorgängen	144
7.6	Virtuelles Instrument für die Cepstrum-Analyse	146
7.6.1	Modulationseffekte	146
7.6.2	Cepstrum-Analyse	147
7.6.3	Realisierung mit dem LabView-Programm	150
7.6.4	Anwendungen der Cepstrum-Analyse	150
7.7	Virtuelles Instrument für die Hüllkurvenanalyse	151
7.7.1	Bildung der Hüllkurve	151
7.7.2	Hüllkurvenanalyse stoßförmiger Schwingungssignale	154
7.7.3	Praktische Anwendung	157
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>162</b>
<b>9</b>	<b>Verzeichnis der wichtigsten Abkürzungen und Symbole</b>	<b>164</b>
<b>10</b>	<b>Literatur</b>	<b>166</b>
<b>11</b>	<b>Anhang</b>	<b>173</b>
A1	Polyphasendarstellung der z-Transformation eines diskreten Signals	173
A2	Maschinentechnischer Aufbau des Prüfstandes und das Hardware-konzept der Messwerterfassung	174

A3	virtuelles Instrument für die Bestimmung der mechanischen und elektrischen Größen	176
A4	Schnittzeichnung des kombinierten Planetengetriebes	178
A5	Wavelet-Transformation (WT)	179
A5.1	Kontinuierliche Wavelet-Transformation (CWT)	179
A5.1.1	Zeit-Frequenz-Auflösung der Wavelet-Transformation	180
A5.1.2	Fehlen der Zeitverschiebungs-Invarianz bei Amplituden der CWT	183
A5.2	Diskrete Wavelet-Transformation (DWT)	186
A5.3	Anwendung der Wavelet-Transformation zur Fehlerfrüherkennung an Maschinen	190
A6	Tschebyshev- und Kaiser-Fensterfunktion	195



# Kapitel 1

## Einleitung

Die Messtechnik ist eine interdisziplinär ausgerichtete Wissenschaft, die in nahezu alle Bereiche von Forschung und Entwicklung eingreift. Die Messung elektrischer und nichtelektrischer Größen ist im Prinzip eine Reihenschaltung aus dem Vorgang der Messgrößenerfassung und Umformung, der Messsignalverarbeitung und der Darstellung der Messergebnisse [1; 3]. In den letzten Jahren wurde eine Vielzahl von leistungsfähigen Sensoren zur Detektion elektrischer und nichtelektrischer Messgrößen entwickelt. Durch immer preisgünstigere DSP (Digitale Signalprozessor) verstärkt sich der Trend, dass die Messdatenerfassung und Messsignalverarbeitung zunehmend auf Digitalrechner oder digitale Signalprozessoren verlagert werden und zum Teil in Software implementiert sind [1; 40]. Geeignete Softwaresteuerung von universellen Hardware-Komponenten, z. B. einer Multifunktions-Einsteckkarte, und eine eventuell softwareseitig implementierte Messdatenverarbeitung, z. B. in Form einer Fourieranalyse, schaffen Messmöglichkeiten, die sonst nur einem auf die spezielle Messaufgabe ausgerichteten, eigenständigen Messgerät vorbehalten sind. Auf diese Weise lassen sich verschiedene Arten von Messgeräten mit ein und derselben Hardware (Multifunktions-Einsteckkarte) realisieren. Dabei werden die messgerätetypischen Funktionen erst durch die Software festgelegt.

Im Rahmen der Zusammenarbeit mit der Firma Klose Antriebstechnik GmbH & Co. sollte ein rechnergestütztes Messsystem für einen Prüfstand entwickelt werden, mit dem die vom Kunden geforderten technischen Daten, insbesondere bei kundenspezifischen durch Frequenzumrichter gespeisten Motoren, geprüft werden können. Während die mechanischen und thermischen Parameter über galvanisch entkoppelte Zusatzmessgeräte einfach zu erfassen sind, müssen bei dieser Anwendung die elektrischen Parameter im Hinblick auf einen mobilen Einsatz unabhängig von den Prüfstandsaggregaten bestimmt werden. Eine Schlüsselfunktion fällt der möglichst exakten Bestimmung der Größen der harmonischen Schwingung der stark gestörten Versorgungsspannung zu. Wichtige Informationen für die Fehlerdiagnose, insbesondere an Motoren mit kombiniertem Planetengetriebe, liefert die Schwingungsanalyse. Das Mess- und Diagnosesystem wurde auf der Basis virtueller Instrumente mit LabView realisiert.

### 1.1 Stand der Kenntnisse und Problemstellung

#### 1.1.1 Messung von Größen der durch Rauschen gestörten periodischen Signale bei kurzer Messzeit

Die Messung von Größen (Frequenzen, Amplituden und Phasen) der durch Rauschen gestörten periodischen Signale ist ein Problem, das in den wissenschaftlichen und industriellen Be-

reichen häufig auftritt [45]. Als Beispiele seien die interferometrische Messtechnik, die Nachrichtentechnik, die Sprachanalyse, die Sonar- und Radar-Technik sowie die Analyse von mechanischen Schwingungssignalen aufgeführt. Dabei ist die Bestimmung von Frequenzen eine wichtige Aufgabe.

Grundsätzlich können Frequenzmessverfahren grob in zwei Kategorien eingeteilt werden: Verfahren, die im Zeit- oder im Frequenzbereich arbeiten. Im Zeitbereich lassen sich die Nullstellen-Zähler-Technik [40], die kleinsten Quadrate [83; 84], und das Korrelationsverfahren [43] für analoge bzw. digitale Einfrequenz-Signale anwenden. Diese Verfahren erfordern jedoch für präzise Frequenzmessung mehrere Signalperioden im Auswertzeitintervall. Für Signale kleiner Frequenz ist somit eine lange Messzeit notwendig [15].

Die Frequenzmessverfahren im Frequenzbereich basieren auf der Spektralanalyse. Dabei wird häufig die diskrete Fourier-Transformation (DFT) zur Schätzung des Spektrums von veräuschten Signalen eingesetzt, da sie in einfacher Form Informationen über Amplitude, Phase und Frequenz liefert [9]. Die Anwendungen der schnellen Fourier-Transformation (FFT) nutzen die besondere Eigenschaft der DFT, dass diese eine schnelle und effiziente Berechnung der DFT gestattet. Ein wichtiger Vorteil der DFT/FFT ist, dass auch Signale mit geringem Signal-zu-Rausch-Verhältnis (SNR) gut verarbeitet werden können. Weiterhin können auch Signale, die mehrere spektrale Linien aufweisen, verarbeitet werden. Bei ausreichend langer Messzeit sind die unter Einsatz der Hanning-Fensterfunktion gewonnenen DFT/FFT-Ergebnisse für die gesuchten Größen des Signals keinesfalls schlechter als Schätzungen, die nach irgendeiner anderen Methode errechnet werden [9].

Die Berechnung der FFT basiert wegen des begrenzten Speicherplatzes in einem Rechner notwendigerweise auf einem endlichen Datenensemble, also auf einem zeitlich begrenzten Ausschnitt aus einem Signal (Zeitbegrenzung). Für eine genaue Berechnung der Frequenz, der Amplitude und des Phasenwinkels ist die Frequenzauflösung der DFT/FFT wegen der Zeitbegrenzung meistens niedrig. Andererseits tritt der Leckeffekt häufig bei der Untersuchung eines periodischen Signals mit unbekannter Periode auf, d. h., ein partieller Abfluss der Energie des ursprünglichen Signals in die Nebenzipfel der Fourier-Transformierten des Fensters findet im Frequenzbereich statt, falls die Messzeit einem ganzzahligen Vielfachen der Grundperiode des Signals nicht entspricht (nicht synchrone Abtastung) [9]. In diesen Fällen ist eine genaue Bestimmung der Frequenz, der Amplitude und des Phasenwinkels des ursprünglichen Signals mittels der FFT nicht möglich.

Zur Vermeidung des Leckeffekts der DFT/FFT muss das Signal synchron abgetastet werden [31]. Die Synchronisation lässt sich für Einzelfrequenz-Signale mittels einem linearen Phasenregelkreis (PLL) mit großem Aufwand realisieren [85]. Für Multifrequenz-Signale ist eine lange Messzeit erforderlich, da die Messzeit einem gemeinsamen Vielfachen der Perioden aller Komponenten im Signal entsprechen muss.

Im Bereich der digitalen Signalverarbeitung wird seit Jahrzehnten die Bestimmung der Größen von verrauschten Einzelfrequenz-Signalen oder Mehrfrequenz-Signalen bei kurzer Messzeit intensiv erforscht und eine große Zahl von Veröffentlichungen zu diesem Thema ist erschienen [7; 8; 20; 29; 32; 33; 45; 46; 47; 61; 62; 65; 66]. Zahlreiche Ansätze zur Schätzung der Parameter von verrauschten Signalen wurden vorgeschlagen. Sie lassen sich prinzipiell in zwei Kategorien unterteilen [32; 46]:

1. Auf der Fourier-Transformation basierende Verfahren
2. Modellgestützte Spektralschätzungsverfahren.

Zur Bestimmung der Größen der durch das Rauschen gestörten Signale wird die Spektralanalyse meist eingesetzt, welche der Maximum-Likelihood-Schätzung (MLE) zugrunde liegt. Dabei macht der Schätzwert der Frequenz das Periodogramm zum Maximum [46]. Zur groben Suche nach dem Maximum benutzt man meist die DFT/FFT. In den meisten Fällen liegt die Stelle des Maximums wegen des Leckeffekts nicht auf den Frequenz-Stützstellen der DFT/FFT. Zur genaueren Bestimmung der Frequenz ist daher eine feine Suche nach dem Maximum erforderlich. Die Chirp-z-Transformation (CZT) [63] oder das Zeropadding-Verfahren [31] lässt sich zur feinen Suche einsetzen. Werden die beiden Verfahren für die Bestimmung der Größen von verrauschten reellen Multifrequenz-Signalen in praktischen Messsituationen eingesetzt, sind die Einflüsse des Rauschens und die Bedingungen zur möglichst exakten Bestimmung zu untersuchen.

Als eine Alternative zu der CZT oder dem Zeropadding-Verfahren dient die Interpolation-Diskrete-Fourier-Transformation, welche der Maximum-Likelihood-Schätzung zugrunde liegt [65;66]. In den meisten Fällen kann man damit Ergebnisse erhalten, deren Varianz mit kleinem Abstand die Cramer-Rao-Schranke (CR- Schranke) erreicht. Aber in der Nähe der Frequenz-Stützstellen der DFT/FFT sind die Frequenzfehler erheblich größer (Frequenzausreißer) wie in dieser Arbeit gezeigt wird. Eine statistische Analyse der Frequenzausreißer kann in [61; 62] gefunden werden. Eine weitere Alternative ist das Phasen-Differenz-basierende Verfahren [33]. Es wird in dieser Arbeit gezeigt, dass Frequenzausreißer bei Anwendungen dieses Verfahrens ebenfalls entstehen, wenn sich die zu ermittelnde Frequenz in einem bestimmten Bereich befindet. Dieses Verfahren ist ohne Korrektur in der Praxis kaum nutzbar.

Eine vollständig andere Betrachtungsweise liegt den modellgestützten Spektralschätzungsverfahren zugrunde. Ihnen haftet der Leckeffekt der DFT prinzipiell nicht an, und sie können unter Zugrundelegung eines kurzen Abschnitts eines im Rauschen versteckten periodischen Signals gute Hinweise auf die Frequenzen der periodischen Komponenten geben [31]. Zu den modellgestützten Spektralschätzungsverfahren gehören das AR-Modell [48], MUSIC [32], ESPRIT [68] sowie die Prony-Methode [32] und die Subspace-basierende Methode [39]. In den meisten Anwendungsfällen dieser Verfahren steht die Schätzung der Frequenzen im Vor-

dergrund. Außerdem ist der Rechenaufwand und die Wahl der Modellordnung in praktischen Messsituationen zu berücksichtigen.

### 1.1.2 Fehlerdiagnose an Planetengetrieben

Planetengetriebe kommen in allen Bereich der industriellen Antriebstechnik zum Einsatz. Sie unterscheiden sich von den normalen Zahnradgetrieben dadurch, dass sie außer Zahnrädern, die auf festen im Gehäuse gelagerten Wellen besitzen, noch Zahnräder aufweisen, deren Eigenachsen sich um eine Zentralachse drehen.

Eine Schadenstatistik zeigt [59], dass 44% der in Planetengetrieben auftretenden Schäden Zahnschäden und etwa 20% Wälzlagerschäden sind. Alle anderen Schäden wie Schäden an Gehäuse, Welle und Dichtung betragen insgesamt ca. 36%.

Neben der Messung der Temperatur, der Verschmutzung des Schmierstoffs und Geräuschemission werden hauptsächlich schwingungsdiagnostische Methoden zur Beurteilung des Zustands von Planetengetrieben herangezogen. Mit Hilfe von Beschleunigungssensoren werden dabei die Körperschallsignale des zu diagnostizierenden Getriebes erfasst und ausgewertet.

Eine Möglichkeit, das Schwingungsverhalten eines Getriebes zu beurteilen, stellt das Kennwertverfahren dar. Beim Kennwertverfahren werden die für Zustandsdiagnose geeigneten Kennwerte aus Schwingungszeitsignalen gebildet. Die häufig verwendeten Kennwerte sind Effektivwert, Standardabweichung, Crest-Faktor, Kurtosis-Faktor und Formfaktor [35]. Durch den Vergleich von Kennwerten ist eine grobe Aussage über den Zustand eines Getriebes möglich. In der VDI-Richtlinie 2056 wird der Effektivwert der Schwingungsgeschwindigkeit als Kennwert beobachtet, um den Schwingungszustand einer Maschine entsprechend ihrer Einstufung in einer der Maschinengruppen „gut“, „brauchbar“, „noch zulässig“ oder „unzulässig“ festzustellen [115]. Bei Kennwertverfahren ist meist eine Trendanalyse der Kennwerte notwendig [34]. Dabei wird die Entwicklung der Kennwerte fortlaufend beobachtet. Der stabile Verlauf der Kennwerte kann darauf hinweisen, dass sich der Getriebezustand nicht gravierend verändert hat. Stärkere Veränderungen von Kennwerten können Anzeichen für eine Verschlechterung des Getriebezustands sein. Aber es ist damit nicht möglich, Schaden und Schadensort im Getriebe sicher zu erkennen. Die Schwingungen anderer Maschinen in der Umgebung können diese Trendüberwachung erschweren.

Zur Fehlerfrüherkennung von Verzahnungs- und Wälzlagerschäden in Planetengetrieben mit der Schwingungsanalyse werden meistens die Analyseverfahren im Frequenzbereich bevorzugt. In erster Linie wird meist ein breitbandiges Spektrum der am Gehäuse gemessenen Signale beobachtet. Das Breitbandspektrum gibt einen spektralen Überblick von der Frequenz  $f = 0$  Hz bis zur Grenzfrequenz, die von der Abtastfrequenz her bei rechnergestützten Diagnosesystemen bedingt, oder von dem Messbereich eines analogen Frequenz-Analysators bestimmt ist. Als messtechnische Grundlage für eine wirksame Schadensfrüherkennung und

Fehlerdiagnose kommt in erster Linie die Trendanalyse des Schwingungsspektrums in Betracht. In vielen Fällen zeigt eine Maschine in gutem Zustand auch ein zeitlich gesehen stabiles Schwingungsspektrum [34]. Durch Verschleiß oder durch sich langsam entwickelnde Fehler ändert sich entsprechend das Schwingungsspektrum. In vielen Fällen können verschiedene Schadensarten und ihre Ursachen durch die Spektralanalyse von Schwingungssignalen herausgefunden werden.

Für die Analyse des Schwingungsverhaltens eines Getriebes ist die Spektralanalyse von Hoch- und Ablaufvorgängen geeignet. Bei Hoch- und Ablaufvorgängen erzeugen die inneren Anregungsquellen in einem Getriebe mechanische Schwingungen, deren Frequenzen und Amplituden sich meist mit den momentanen Drehzahlen ändern. Die Spektralanalyse der dabei auftretenden Schwingungssignale liefert in vielen Fällen wertvolle Zusatzinformationen zu den im Stationärbetrieb aufgenommenen Signalen [5].

Bei Schäden an Zahnflanken in einem Getriebe können im Frequenzspektrum Seitenbänder um die Zahneingriffsfrequenzen auftreten, die von Amplituden- oder Frequenzmodulation durch Verzahnungsfehler hervorgerufen werden [34]. Diese Seitenbänder lassen sich im Prinzip durch das Cepstrum analysieren [84].

Nach betrieblichen Erfahrungen ist der durch einen Wälzlagerfehler erzeugte Anteil im Schwingungssignal in vielen Fällen nur schwach ausgeprägt, besonders in Planetengetrieben. In solchen Getrieben gibt es meist viele Anregungsquellen [35]. Die dem Wälzlager zugeordneten Schwingungskomponenten sind meist viel schwächer als die durch die Zahneingriffe erzeugten Komponenten. Für eine aussagefähige Fehlerdiagnose ist eine einfache Spektralanalyse ohne weitere Vorverarbeitung häufig nicht ausreichend.

Für die Analyse der durch Wälzlagerfehler verursachten Körperschallanregung wurde ein Modell entwickelt [52; 53]. Es wurde davon ausgegangen, dass es bei Schäden auf der Wälzbahn oder an einer Kugel eines Wälzlagers bei jeder Überrollung des Schadens zu einer stoßförmigen Anregung der Gehäuseresonanzen des Lagers oder der Maschine kommt. Die Schwingungen klingen exponentiell ab. Dieser periodische Vorgang ist einer Amplitudenmodulation ähnlich [22]. Im Prinzip lässt sich die Stoßfrequenz mit Hilfe der Hüllkurvenanalyse detektieren [34].

Für eine zuverlässige Aussage über den Getriebezustand ist die optimale Anwendung und Kombination geeigneter Diagnoseverfahren nötig, insbesondere wenn ein Planetengetriebe in einer komplexeren Maschine eingebaut ist. Der Einsatz von Klassifikations- und Prognoseverfahren unter Anwendung von Fuzzy-Logik, künstlicher neuronaler Netze oder Mustererkennung im Diagnosesystem kann die Diagnosesicherheit erhöhen und ermöglicht einen Schluß auf die Zustandsentwicklung des Planetengetriebes [4; 80; 82].

## 1.2 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

Mit dieser Arbeit werden zwei Ziele verfolgt:

- Es sollen die rechnergestützten Messwerterfassungs- und Messwertverarbeitungssysteme zur Bestimmung der mechanischen und elektrischen Größen von umrichter gespeisten Elektromotoren unter Berücksichtigung der firmenspezifischen Bedingungen realisiert werden. Die Hauptaufgaben sind dabei die möglichst exakte Bestimmung der Größen der harmonischen Schwingung der stark gestörten Versorgungsspannung und die Ermittlung der harmonischen und interharmonischen Komponenten von Umrichter Ausgangsspannungen bzw. -strömen.
- Zur Schwingungsanalyse und Fehlerdiagnose an Maschinen sollen virtuelle Instrumente entwickelt werden, welche die Spektralanalyse, Schwingungsstärkemessung, Schwingungsanalyse von Hoch- und Ablaufvorgängen sowie die Fehlerdiagnose an Zahnrädern und Wälzlagern durchführen können.

Zu Beginn der Arbeit wird kurz auf die rechnergestützte Messdatenerfassung und Signalverarbeitung eingegangen. Anschließend werden in Kapitel 3 die in der Literatur beschriebenen Signalverarbeitungsverfahren zur Bestimmung der Größen von verrauschten periodischen Signalen bei kurzer Messzeit vorgestellt und hinsichtlich ihrer Eignung untersucht.

Da sich die Chirp- $z$ -Transformation und das Zeropadding-Verfahren als geeignetes Verfahren für die Aufgabenstellungen bewähren, schließt sich eine eingehende Betrachtung der Auswirkungen der zeitlichen Begrenzung der Messzeit und des Rauschens auf die Genauigkeit der Messergebnisse basierend auf der Analyse der Spektralinterferenz in der zeitdiskreten Fourier-Transformation (DTFT) bei Multifrequenz-Signalen an. Dabei steht die Bestimmung der Größen reeller periodischer Signale in Vordergrund. Dafür werden die Bedingungen für die Anwendung der CZT bzw. des Zeropadding-Verfahrens bei reellen Multifrequenz-Signalen unter dem Einsatz der Fensterfunktionen dargestellt.

Basierend auf dem einphasigen Modell wird in Kapitel 5 das Kreuzleistungsdichtespektrum zur Unterdrückung statistischer Störungen erläutert. Für die Bearbeitung der harmonischen Komponenten von Umrichter Ausgangsspannungen bzw. -strömen wird das TDA-Verfahren (*Time Domain Averaging*) beschrieben. Ein digitales Filter für die Bearbeitung der interharmonischen Komponenten von Umrichter Ausgangsspannungen wird in diesem Kapitel vorgeschlagen.

Angestrebt wird in dieser Arbeit auch die Entwicklung virtueller Instrumente zur Schwingungsmessung, Schwingungsanalyse und Fehlerdiagnose an Maschinen. In Kapitel 6 werden die virtuellen Instrumente für die Schwingungsmessung und Spektralanalyse gezeigt. An-

schließlich werden die für die Fehlerdiagnose an Zahnrädern und Wälzlagern geeigneten Verfahren in Kapitel 7 vorgestellt und mit Hilfe des LabView-Programms realisiert. Die Ergebnisse der praktischen Überprüfung der Verfahren wird am Beispiel eines Planetengetriebes gezeigt.

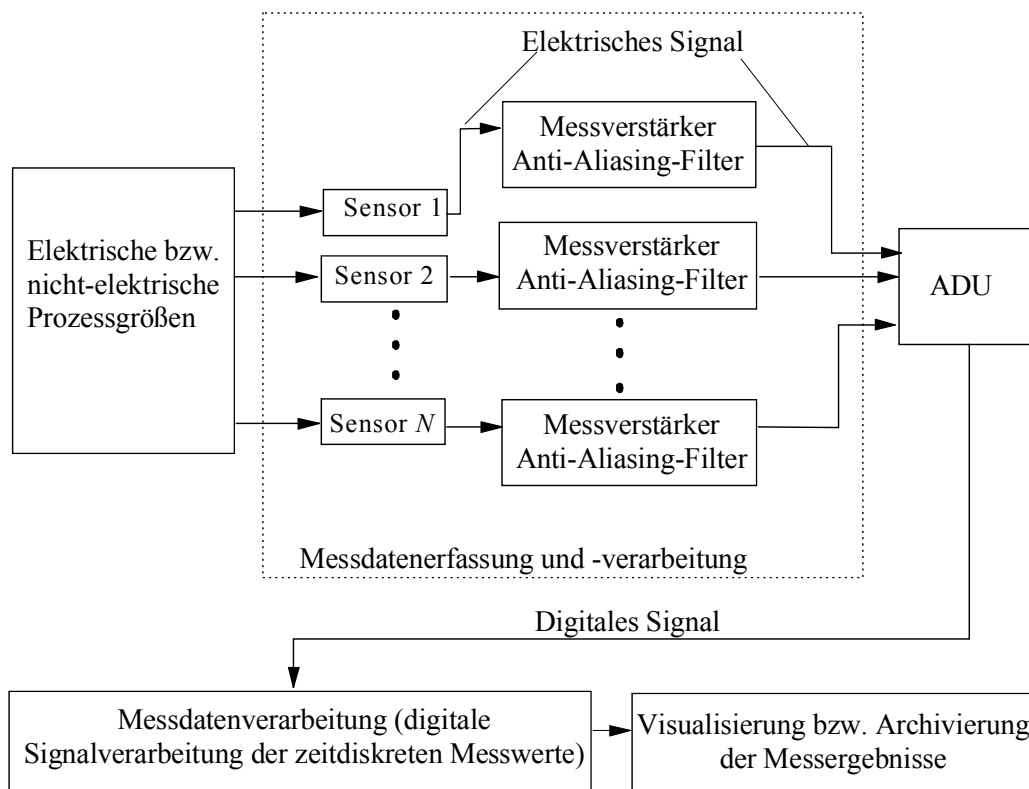
Da sich die Wavelet-Analyse in den vergangenen Jahren zu einer Hauptquelle für neue Algorithmen der Signalverarbeitung entwickelt hat, wird im Anhang auf die Wavelet-Transformation näher eingegangen. Dabei wird das Verfahren auf seine Eignung hinsichtlich der Fehlererkennung an Wälzlagern überprüft.

## Kapitel 2

# Rechnergestützte Messdatenerfassung und Messsignalverarbeitung

## 2.1 Einleitung

Im Digitalrechnerbereich wurden in den letzten Jahren in Bezug auf Rechenleistung, Datentransfargeschwindigkeit sowie Speichergroße enorme Fortschritte erzielt. Daher werden die Digitalrechner, insbesondere die immer leistungsfähigeren und preiswerteren Personalcomputer, auch zur Bewältigung komplexer und umfangreicher Aufgaben im Rahmen der Messung elektrischer und nicht-elektrischer Größen herangezogen. Die Hauptaufgabengebiete sind dabei die Messdatenerfassung und Messsignalverarbeitung sowie die Datenpräsentation und Archivierung. **Bild 2.1** zeigt die Messung von elektrischen bzw. nicht-elektrischen kontinuierlichen physikalischen Größen mit einem digitalen Signalverarbeitungssystem. Diese Größen können eine Spannung, ein Strom, Temperatur, Drehmoment, mechanische Schwingung oder ähnliche Funktionen der Zeit sein.



**Bild 2.1** Messdatenerfassung und digitale Signalverarbeitung in einem Messsystem

## 2.2 Messdatenerfassung

Die Übernahme von Messdaten in einen Digitalrechner kann auf verschiedenen Wegen geschehen. Eine in den meisten Fällen angewendete Methode basiert auf an den Rechnerbus



angeschlossenen Messmodulen, die auf einer Computereinsteckkarte realisiert sind und in der Regel einen Analog-Digital-Umsetzer (ADU) mit vorgeschaltetem Multiplexer enthalten [40]. Die wichtigsten Anforderungen an ein Messdatenerfassungssystem sind neben der korrekten Erfassung der Messsignale die schnelle Reaktion auf externe bzw. interne Ereignisse, die Prioritätensteuerung der verschiedenen Aufgaben, gute Datenpräsentations- und Archivierungsmöglichkeiten, einfache Bedienung, hohe Zuverlässigkeit sowie die Erweiterbarkeit, Portierbarkeit und Wartbarkeit bezüglich der Software. Bei Messdatenerfassungen stehen im Allgemeinen folgende Gesichtspunkte im Vordergrund:

**Umformung:** Es gibt zunächst die elementaren Funktionen der Messgrößenerfassung, die gerätetechnisch durch den eigentlichen Messprozess und die zugehörigen Sensoren repräsentiert werden. Wenn man anzeigende Systeme hier außer Acht lässt, stellen alle Sensoren elektrische Signale in beliebiger Form zur Verfügung. Bei der Umformung muss vorausgesetzt werden, dass das Messsignal ein getreues Abbild der interessierenden Prozessgrößen ist. Dies bedeutet insbesondere, dass alle Arten von Messfehlern nur vernachlässigbare Beiträge liefern dürfen. Andererseits müssen diejenigen Fehlereinflüsse besonders beachtet werden, die auf dem gesamten Weg zwischen Messung und Analyse auftreten können. Dies betrifft zwei wichtige Punkte: die stör sichere Übertragung des Signals (möglichst kurz, korrekt abgeschirmte Messleitung, Vermeidung von Erdschleifen beim Signal usw.) und die Belastung des Signals (möglichst tiefer Innenwiderstand der Signalquelle und möglichst hohe Eingangsimpedanz des Geräts zur Datenverarbeitung und Signalverarbeitung). Bei hoher Spannung oder starkem Strom sind Trennverstärker einzusetzen.

**Signalanpassung:** Nach der Umformung der Prozessgrößen folgt die Messdatenvorverarbeitung, die beispielsweise Impedanzwandlung, Verstärkung oder Abschwächung, Fehlerkorrektur, Normierung des Ausgangssignals sowie gegebenenfalls eine Hochpass-Filterung zur Eliminierung des Gleichanteils des Signals umfasst.

Einfluss auf die Qualität einer Daten- oder Signalverarbeitung kann man bei der Wahl des Eingangsmessbereichs nehmen. Das erfasste Signal muss soweit verstärkt oder abgeschwächt werden, dass der eigentliche Eingangsmessbereich des Verstärkers und der Eingangsbereich des Analog-Digital-Umsetzers (ADU) möglichst optimal ausgenutzt werden. Dadurch werden die Quantisierungsfehler minimiert. Dies ist durch feinstufige Einstellmöglichkeiten am Eingangsverstärker erreichbar.

**Anti-Aliasing-Filterung:** Eine der wichtigsten Hauptaufgaben der Messdatenvorverarbeitung vor der Abtastung ist die Anti-Aliasing-Filterung. Eine zu niedrige Abtastfrequenz führt im Frequenzbereich zum so genannten „Aliasing-Effekt“. Um die durch den Aliasing-Effekt hervorgerufenen, oft bedeutenden Fehler zu vermeiden, muss nach dem Abtasttheorem ein Signal mit einer Abtastfrequenz  $f_s$ , die mindestens doppelt so groß wie die in diesem Signal enthaltene maximale Frequenz  $f_{\max}$  ist, abgetastet werden [60]. Um die Erfüllung dieser

Forderung sicherzustellen, muss das Signal vor dem Abtasten über ein Tiefpassfilter – Anti-Aliasing-Filter – mit der Eckfrequenz  $f_c$  aufbereitet werden, dessen Aufgabe darin besteht, hochfrequente Komponenten abzuschneiden. Bei manchen Geräten (z. B. Ladungsverstärker für Beschleunigungssensoren) ist ein Tiefpassfilter eingebaut. Bei der Abtastung muss die Abtastfrequenz  $f_s$  mindestens doppelt so hoch wie die Eckfrequenz  $f_c$  des Tiefpassfilters sein. Die empfohlenen Sicherheitsfaktoren liegen zwischen 3 und 10, sind aber nicht theoretisch begründet. Überabtastung bringt keine Fehler, höchstens den Nachteil, dass die Rechenzeit größer als nötig wird und redundante Informationen entstehen [60].

Der Bau eines prinzipbedingt analogen Anti-Aliasing-Filters mit einstellbarer Eckfrequenz ist aufwändig. In vielen Fällen kann man deshalb folgende Lösung wählen: Es wird mit einer konstanten, maximal möglichen Frequenz abgetastet. Dafür setzt man ein hochwertiges, aber dennoch billigeres Anti-Aliasing-Filter mit angepasster konstanter Eckfrequenz ein. Falls es sich nun um die Messungen von Signalen viel niedrigerer Frequenzen handelt, nimmt man aus der Datenreihe des Analog-Digital-Umsetzers nur jeden  $n$ -ten Wert. Dies entspricht zwar wieder einem Abtasten, das nach dem Abtasttheorem erfolgen muss, aber das notwendige Anti-Aliasing-Filter darf jetzt ein digitales Filter sein. Damit können die Parameter des zweiten Anti-Aliasing-Filters mittels Software der zweiten Abtastfrequenz einfach angepasst werden. Dieses Verfahren wird als Überabtasten bezeichnet.

Der Verzicht auf ein analoges Anti-Aliasing-Filter ist in keinem Fall zu empfehlen, da man vor einer Signalauswertung nur selten weiß, wo der Frequenzbereich des Nutzsignals genau liegt. Zudem weiß man auch nicht, ob Störsignale wirksam sind, die meist höhere Frequenzbereiche überstreichen. Die Meinung, dass man nur bei der Bearbeitung von Signalen im Frequenzbereich das Abtasttheorem berücksichtigen müsse, stimmt nicht. Ein Verletzen des Abtasttheorems zieht nicht etwa einen kalkulierbaren und im Nachhinein korrigierbaren Fehler nach sich – das Resultat ist grundsätzlich falsch, wenn entsprechend hochfrequente Komponenten vorhanden sind [5].

**Analog-Digital-Umsetzungssystem:** Die Grundfunktionen eines Analog-Digital-Umsetzungssystems lassen sich unterteilen in Selektion des Messkanals, Abtastung, Analog-Digital-Umsetzung und Datenübernahme. Zur Implementierung dieser Grundfunktionen wird vorzugsweise eine Multifunktions-Einsteckkarte eingesetzt. In Abhängigkeit von Rechnertyp und jeweiliger Anwendung stellt der heutige Markt eine Vielzahl solcher Multifunktions-Einsteckkarten zur Verfügung.

### 2.3 Messsignalverarbeitung

Die Signalverarbeitung bezieht sich im Allgemeinen auf das Analysieren oder Interpretieren der Signale, die durch zeitabhängige physikalische Prozesse erzeugt werden. Die Signale selbst können zeitlich vorübergehend, periodisch oder zufällig und nicht vorhersagbar sein.

Die Methoden der Signalverarbeitung lassen sich auf alle Signaltypen anwenden. Die Anwendungen der Signalverarbeitung reichen in viele verschiedene Bereiche der Technik und Wissenschaft: Nachrichtentechnik, Steuer- und Regelsysteme, Biologie und Medizin, Seismologie, Sprachanalyse, Radartechnik, Analyse mechanischer Schwingungen, Flüssigkeitsdynamik sowie die Schwingungsüberwachung und Fehlerdiagnose an Maschinen.

Die Hauptaufgaben der Signalverarbeitung liegen in der Messwert-Vorverarbeitung sowie der Analyse der aufgenommenen Messsignale mit Hilfe von Filtern, Funktionaltransformationen, Korrelationsverfahren, Mittelwertbildnern, Effektivwertbausteinen usw. Dabei sollen die in den gewonnenen Messwerten enthaltenen und für ihre weitere Verwendung (z. B. Regelung, Steuerung, Gewinnung der Merkmale für die Fehlerdiagnose usw.) relevanten Information extrahiert werden. Oft wird die im Rahmen einer Messung interessierende Zielgröße erst durch entsprechende Signalverarbeitungsmaßnahmen gewonnen. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn ein stark verrauschtes Messsignal erst durch geeignete Filtermaßnahmen von Störsignalen getrennt werden muss. Zu den wichtigsten Signalverarbeitungsmaßnahmen zählen:

- Filterung
- Mittelwertbildung
- Bildung von Verteilungsfunktionen, wie z. B. der Wahrscheinlichkeit
- Ermittlung von speziellen Kenngrößen, wie z. B. der Frequenz, der Amplitude und der Phase von Spannungs- und Stromsignalen sowie mechanischer Schwingungssignale
- Effektivwertermittlung
- Spektralanalyse

Grundsätzlich kann man zwischen analoger und digitaler Signalverarbeitung unterscheiden. Als Vorteile der Analogtechnik sind unter anderem das hohe Auflösungsvermögen und die hohe Verarbeitungsgeschwindigkeit zu nennen. Außerdem entfallen die bei digitalen Systemen stets benötigten Module zur Abtastung und Analog-Digital-Umsetzung [40].

Die digitale Signalverarbeitung lässt sich auf einem General-Purpose-Rechner bzw. auf einem universellen digitalen Signalprozessor relativ einfach in Software implementieren. Mit den Möglichkeiten der modernen digitalen Signalverarbeitung lassen sich nun auch anspruchsvolle messtechnische Aufgabenstellungen bewältigen, die in der Vergangenheit aus Mangel an geeigneter Hardware oder auch aus Kostengründen nicht angegangen wurden. Während bei der Messdatenerfassung die notwendige Signalanpassung (Vorverstärkung und Anti-Aliasing-Filterung) analog realisiert werden muss, können nach der Abtastung und Digitalisierung die Signalverarbeitung und die Gewinnung der gesuchten Größen in den meisten Fällen per Software im Rechner erfolgen. Einzige Voraussetzung ist die korrekte zeitliche Abtastung und anschließende Analog-Digital-Umsetzung der in der Regel in analoger Form vorliegenden Messsignale. Die wichtigsten Vorteile der rechnergestützten Messsignalverarbeitung sind:

- hohe Flexibilität, welche die Lösung verschiedener Messaufgaben und diagnostischer Analysen mit einer einzigen Ausstattung ermöglicht
- Einsparung redundanter Hardware (durch zeitlichen Multiplexbetrieb)
- Ersatz von dedizierten und an spezielle Aufgaben gebundenen Hardware-Komponenten durch anwendungsflexible Software-Module, z. B. bei der Filterung oder bei der spektralen Analyse von Schwingungssignalen
- gute Visualisierungs- und Archivierungsmöglichkeiten durch Nutzung vielfach vorhandener Standard-PC-Software
- Verarbeitung und Auswertung der Messdaten mit speziellen Verfahren, z. B. mit Fuzzy-Logik und Neuronalen Netzen
- Übertragung der Messdaten bzw. der diagnostischen Ergebnisse in Automatisierungssysteme und die Produktions- oder Management-Datenbank über Feldbusse, Datenfernübertragung, Netzwerke und das Internet

## 2.4 Softwarelösungen im Bereich der Messtechnik

Rechnergestützte Systeme sind in den meisten Fällen mit einer geeigneten Software ausgestattet. Der Rechner übernimmt die Ablaufkontrolle und Steuerung der Messwerterfassung sowie die weitere Signalverarbeitung und die Darstellung der gewonnenen Ergebnisse. Bei den Werkzeugen für die Entwicklung von rechnergestützten Messsystemen lässt sich der Einsatz universeller Programmiersysteme und spezieller technischer Entwicklungsumgebung unterscheiden. Dabei ist die maschinennahe Programmierung, beispielsweise mit einem Makro-Assembler, fast nur noch für Messsysteme verbreitet, die auf multifunktionalen Mikrocontroller-Schaltungen basieren und für individuelle, besonders zeitkritische Anwendungen oder sehr spezialisierte Messsystem-Hardware konzipiert sind [28].

Generell sind Standardprogrammiersprachen wie C/C++, Pascal oder Basic als Werkzeuge für die Entwicklung messtechnischer und diagnostischer Software nach wie vor verbreitet, vor allem für einzelne und direkt vom Anwender programmierte Anwendungen. Sofern die verwendete Mess-Hardware verfügbar ist, wird hierbei oft auf spezielle vorgefertigte Funktionsbibliotheken mit Routinen für die Kommunikation und die Steuerung der Hardware zurückgegriffen. So gehören bei praktisch jeder Multifunktionskarte oder Systemschnittstelle auch Treiberprogramme und Funktionsbibliotheken für Standardprogrammiersprachen zum Lieferumfang. Bei der Programmierung sind gute Kenntnisse bezüglich der verwendeten Programmiersprache und der eingesetzten Hardware erforderlich.

Als Alternative zu Standardprogrammiersprachen stehen die visuellen Programmiersprachen wie Visual-Basic, Visual-C, Delphi und Visual-Java zur Verfügung. Diese vereinfachen die Windows-Programmierung wesentlich. Hierbei werden die Elemente der Benutzeroberflächen grafisch angeordnet, die Programmabläufe jedoch mit textorientierter Programmierung

erstellt. Einige Vorteile der visuellen Programmiersprachen sind die Anpassung der Oberflächen mit dem Windows-Standard und die Erzeugung eigenständiger Programme sowie die Möglichkeit optimierter und übersichtlicher Programmierung für sehr große Projekte. Allerdings enthalten diese visuellen Programmiersprachen in der Regel keine Funktionen für die Messwerterfassung, Signalverarbeitung und grafische Darstellung. Deswegen erfordern die einfachsten Messaufgaben schon einen erheblichen Programmieraufwand. Der Programmierer muss gute Programmier- und Windows-Kenntnisse besitzen, um optimierte Programme erstellen zu können.

Dagegen ermöglichen grafische Entwicklungssysteme wie LabView, DIAdem, HP-VEE, DasyLab usw. den Endanwendern ohne allzu große Programmiererfahrungen und lange Einarbeitungszeiten die Lösung von einfachen messtechnischen und diagnostischen Aufgaben. Dazu enthalten diese Programmpakete Objekte zur Messwerterfassung, zur Signalverarbeitung und Archivierung der Messwerte sowie sehr leistungsfähige Module zur grafischen Darstellung und Aufbereitung der Messdatensätze. Diese Module lassen sich einfach auf den Bildschirm legen, konfigurieren und miteinander durch virtuelle „Leitungen“ verbinden.

## 2.5 Virtuelle Instrumente

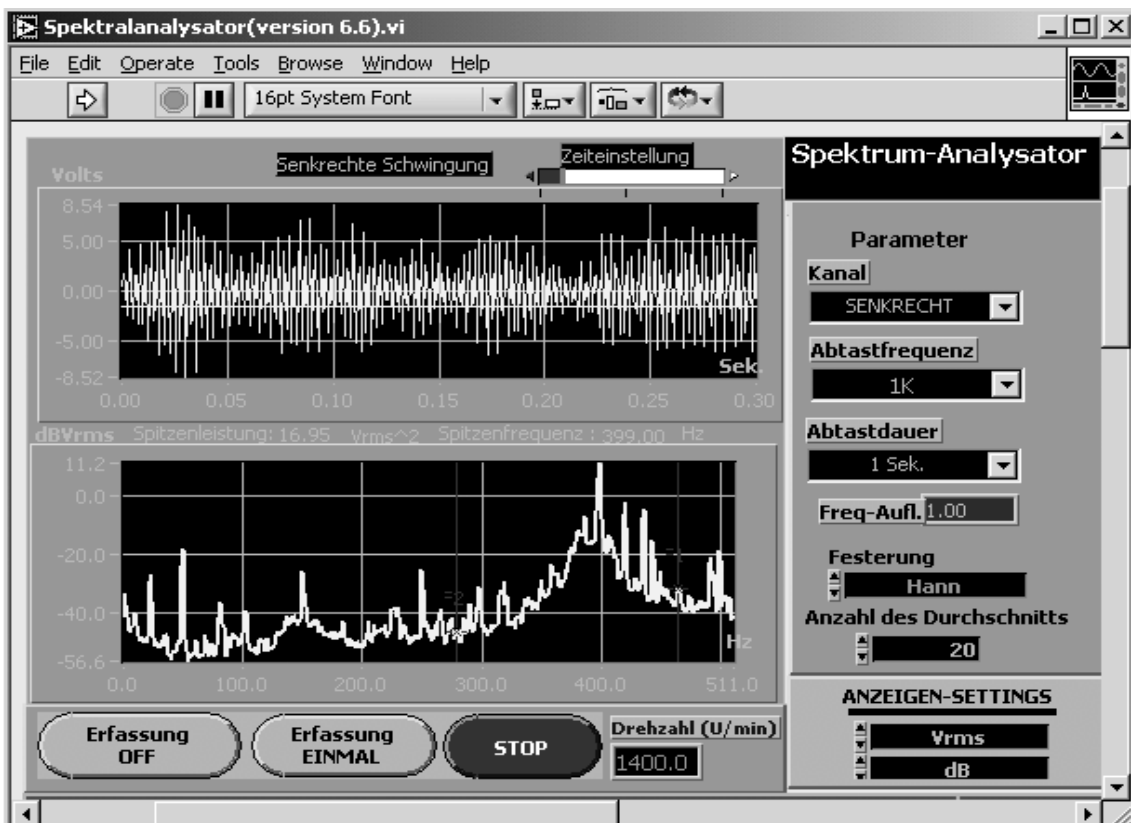
Unter einem virtuellen Instrument versteht man, dass durch geeignete Softwaresteuerung von universellen Hardware-Komponenten (z. B. Multifunktions-Einsteckkarten) und einer softwareseitig implementierten Messdatenverarbeitung (z. B. in Form einer Fourieranalyse) die Messmöglichkeiten geschaffen werden, die sonst nur einem auf die spezielle Messaufgabe ausgerichteten, eigenständigen Messgerät vorbehalten sind. Wie alle rechnergestützten Messsysteme besteht ein virtuelles Instrument aus drei Komponenten, die durch folgende Aufgaben charakterisiert sind:

- Messdatenerfassung
- Messdatenverarbeitung
- Datenpräsentation und Archivierung der gewonnenen Ergebnisse

Für die Parametrierung eines Messsystems sind häufig Eingabefunktionen erforderlich, die dem Anwender interaktive Manipulationen während des Ablaufs der Messungen gestatten. Bei virtuellen Instrumenten ist dies mit der Ausgabe interaktiver, virtueller Eingabelemente auf einem am Rechner angeschlossenen Bildschirm verbunden. Neben Auswahlmenüs und Feldern für die Eingabe von numerischen Werten oder Text werden hierbei Taster, Schalter, Schiebe- oder Dreh-regler und Ähnliches als Grafik auf dem Bildschirm dargestellt. Diese funktionieren wie die „realen“ Bedienelemente an einem Messgerät. Auf dem Bildschirm wird also im Prinzip eine virtuelle, rechnergestützte Nachbildung der Frontplatte eines Messgeräts wiedergegeben (**Bild 2.2**).

Bei virtuellen Instrumenten handelt es sich nicht nur um die Darstellung einer in Grafik virtuell nachgebildeten Benutzerschnittstelle. Ein virtuelles Instrument umfasst die gesamte Kombination von Systemschnittstellen, Messgeräten, Multifunktionskarten und der grafischen „Frontpanel“ sowie vor allem die dahinter stehenden, mit Software realisierten Gerätefunktionen zur Messwerterfassung und Datenverarbeitung. Auf diese Weise lassen sich verschiedene Arten von Messgeräten mit ein und derselben Hardware (z. B. Multifunktionskarte) realisieren, da die messgerätetypischen Funktionen erst durch die Software festgelegt werden.

Der Hauptvorteil ist, dass man in verschiedensten messtechnischen Software-Anwendungen immer wieder auf bereits vorhandene virtuelle Instrumente zurückgreifen kann, ohne für deren Funktionalität bei der Applikationsentwicklung erneut Aufwand betreiben zu müssen. Mit einem Vorrat geeigneter virtueller Instrumente lassen sich individuelle Anwendungen zusammenstellen, wobei mehrere virtuelle Instrumente wie reale Messgeräte im Rahmen ihres Funktionsumfangs beliebig kombinierbar sind.



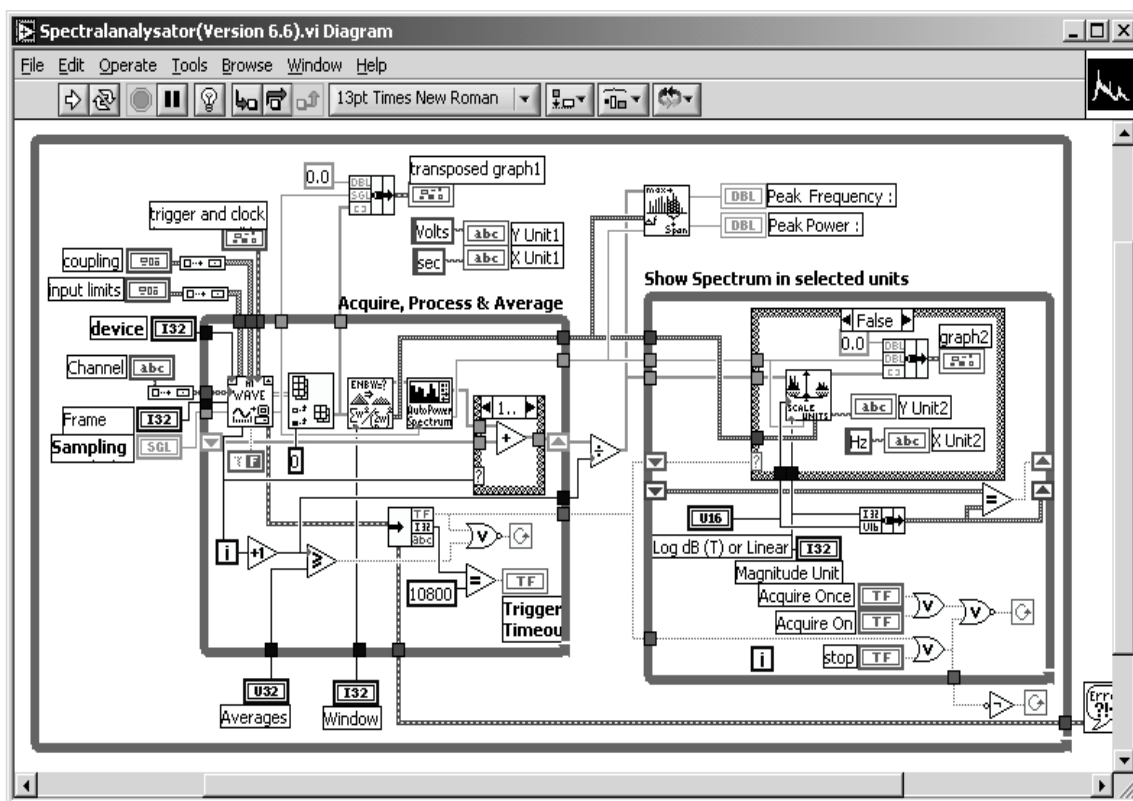
**Bild 2.2** Frontpanel eines mit Hilfe des Programms LabView zusammengestellten Spektralanalysators

## 2.6 LabView-Programm

Das Programmpaket LabView der Fa. National Instruments ist ein grafisches Programmiersystem, das auf der Programmiersprache G (Graphische Sprache) basiert und zur Messdatenerfassung und Steuerung sowie zur Messdatenverarbeitung, Datenpräsentation und Datenar-

chivierung eingesetzt werden kann. Diese grafische Entwicklungsumgebung verknüpft zwei bewährte Programmiermethoden miteinander, den Datenfluss und die strukturierte Programmierung, und integriert sie in eine einzige grafische Programmierumgebung, die alle Elemente einer modernen Benutzeroberfläche bereitstellt. Damit wird es möglich, den Entwurf und die Implementierung von Mess- und Steuerungsaufgaben auf der Basis der dem Ingenieur vertrauten Denkmodelle der grafischen Blockschaltbilder zu formulieren.

Ein Programm unter LabView wird als VI (Virtuelles Instrument) bezeichnet, da sein Aussehen und seine Funktionalität sich an ein reales Instrument anlehnen. Zu jedem VI gehören ein Frontpanel (**Bild 2.2**) und ein Blockdiagramm (**Bild 2.3**). Das Frontpanel ist die Bediener- und Visualisierungsoberfläche eines Programms. Es kann grafische Steuer- und Bedienelemente wie z. B. Drehknöpfe, Schaltflächen, Graphen und viele andere Eingabeobjekte sowie Anzeigen (die Ausgaben des Programms) enthalten. Das Blockdiagramm ist der eigentliche Programmcode, der in der LabView-eigenen grafischen Programmiersprache entworfen wird und die Programmierlogik, d. h. das Steuerprogramm des VI, enthält. Bestandteile dieses Blockdiagramms können sowohl einfache mathematische Operatoren wie Addierer, Multiplizierer usw. als auch komplexe Funktionen wie FFT oder selbst definierte SubVIs (Unterprogramme) aus Gruppen von VIs oder eigenen Programmen sein (**Bild 2.3**). Die Objekte im Frontpanel haben entsprechende Anschlüsse im Blockdiagramm, sodass Daten vom Benutzer an das Programm und umgekehrt übergeben werden können.



**Bild 2.3** Blockdiagramm eines mit Hilfe des Programms LabView zusammengestellten Spektralanalysators

Das LabView-Programm stellt vielfältige elementare Funktionen für die Messdatenerfassung und Messdatenverarbeitung sowie leistungsfähige Module zur Darstellung und Archivierung gewonnener Ergebnisse zur Verfügung. Zu den wichtigsten, für die Messdatenverarbeitung einsetzbaren Funktionen zählen:

- DFT/FFT und die darauf basierende Spektralanalyse
- Fensterung, wie z. B. Hanning- und Hamming-Fensterfunktion
- Statistische Auswertung, Bildung von Wahrscheinlichkeitsgrößen, wie z. B. Wahrscheinlichkeitsdichte, Mittelwertbildung, höhere Momente der Wahrscheinlichkeitsdichte
- Filterung, z. B. digitale IIR- und FIR-Filter
- Integration, Differentiation
- Ermittlung von speziellen Kenngrößen, wie z. B. Crest-Faktor, Kurtosis-Faktor
- Lineare Algebra
- Kurvenanpassung

Außerdem stellt das LabView-Programm fertige, leicht erweiterbare Lösungen für häufig vorkommende messtechnische und schwingungsdiagnostische Anforderungen zur Verfügung. Sie lassen sich ohne wesentliche Veränderungen in praktischen Anwendungen einsetzen.

## **2.7 Realisierung anwendungsorientierter Signalverarbeitungsverfahren mit LabView**

Zur Bewältigung anspruchsvoller Aufgabenstellungen in den messtechnischen und schwingungsdiagnostischen Bereichen sind spezielle Signalverarbeitungsverfahren erforderlich. Beispielsweise bei der Bestimmung der Kenngrößen von im Rauschen versteckten periodischen Signalen mit der DFT/FFT tritt der Leckeffekt bei kurzer Messzeit auf. Zur Gewinnung der genaueren Kenngrößen sind spezielle Signalverarbeitungsverfahren zu entwickeln und realisieren. Auf diese Problematik wird in Kapitel 3 bis 5 noch näher eingegangen.

Ein weiteres Beispiel entsteht in der Zustandsüberwachung und Fehlerdiagnose an Maschinen. Der Betrieb von Maschinen ist immer mit Schwingungen verbunden, die sich in Form von Körperschall in der Maschine ausbreiten oder als Luftschall an die Umgebung abgegeben werden [5]. Der Körperschall setzt sich aus einer Vielzahl von Schwingungskomponenten zusammen, die sich unterschiedlichen Maschinenteilen oder -bewegungen zuordnen lassen. Im Fehler- oder Schadenfall verändern sich diese Schwingungskomponenten, oder aber es entstehen neue. Durch die Analyse von Schwingungssignalen lassen sich Maschinenschäden frühzeitig diagnostizieren.

Die Überwachung des Gesamtschwingungspegels ist in den meisten Fällen für eine frühzeitige Detektion von Schäden nicht ausreichend. Vielmehr ist es notwendig, die sich überlagernden Schwingungskomponenten voneinander zu trennen und separat zu untersuchen bzw. zu überwachen. Hierzu wird das Schwingungssignal mit Hilfe der Fourier-Transformation oder



der Filtertechnik in seine Frequenzkomponenten zerlegt. In einigen Fällen lassen sich Maschinenfehler durch Zuordnung charakteristischer Frequenzanteile zuverlässig detektieren. Die meisten Schäden lassen sich allerdings nicht so einfach erkennen und zuordnen, besonders in ihrem Frühstadium. Zum einen zeigt sich ein Schaden in der Regel nicht nur durch eine einzige Frequenz. Vielmehr führt er meist zu einem Frequenzmuster, bestehend aus verschiedenen Frequenzanteilen. Zum anderen kann in manchen Fällen die kleine Änderung im Signalanteil, die durch einen Fehler verursacht wird, durch andere, stärkere Anteile des Signals verdeckt werden. Ein Beispiel dafür ist der Schaden eines Wälzlagers in einem Zahnradgetriebe. In solchen Getrieben treten in den meisten Fällen viele Anregungen in Erscheinung. Die dem Wälzlager zugeordneten Schwingungskomponenten sind meist viel schwächer als die durch Zahneingriffe erzeugten Schwingungskomponenten. Während sich dieser Fehler im Wälzlager mit Hilfe der Fourier-Transformation oder der Filtertechnik schwer erkennen lässt, bewährt sich die Hüllkurvenanalyse dabei als geeignetes Verfahren, den Fehler zu detektieren.

In den letzten Jahrzehnten wurde über Zustandsüberwachung und Fehlerdiagnose durch die Analyse von Schwingungssignalen intensiv geforscht. Es stehen heutzutage vielfältige Überwachungs- und Diagnoseverfahren für unterschiedliche Schäden an Maschinenteilen zur Verfügung. Allerdings gibt es kein grundsätzliches, allgemein einsetzbares Verfahren für die Fehlerdiagnose aller Arten von Maschinen. Welches Verfahren für welche Diagnoseaufgabe besonders geeignet ist, hängt immer vom Anwendungsfall, also dem Diagnose-Objekt, den vorliegenden Problemen, der Diagnose-Umgebung usw. ab. Das Thema wird in Kapitel 6 und 7 weiter behandelt.

## Kapitel 3

### Untersuchte Verfahren zur Bestimmung der Größen von verrauschten periodischen Signalen bei kurzer Messzeit

Basierend auf der Analyse des Leckeffekts werden in diesem Kapitel verschiedene Verfahren für die Bestimmung der Größen von verrauschten Einfrequenz-Signalen oder Multifrequenz-Signalen bei kurzer Messzeit dargestellt und vergleichend beurteilt.

#### 3.1 Grundlage

##### 3.1.1 Einzelfrequenz- und Multifrequenz-Signale

Die Fourier-Reihe eines periodischen Signals ist wie folgt definiert [60]:

$$x(t) = x(t + T_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{j2\pi f_0 n t} \quad (3.1.1)$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 n t} dt, \quad f_0 = \frac{1}{T_0}. \quad (3.1.2)$$

Damit kann jedes reelle periodische Signal als die Überlagerung von komplexen exponentiellen Signalen betrachten, z. B., ein Cosinussignal  $x(t) = A \cdot \cos 2\pi f_0 t = 0,5A \cdot (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$  enthält zwei komplexe exponentielle Signale, jeweils mit der Frequenz  $f_0$  und  $-f_0$ . Ein komplexes exponentielles Signal wird in der Literatur als Einzelfrequenz-Signal bezeichnet. Da Cosinussignale oder andere periodische Signale aus zwei oder mehreren komplexen exponentiellen Signalen bestehen, bezeichnet man sie als Multifrequenz-Signale.

##### 3.1.2 Die Fourier-Transformation(FT) und die Laplace-Transformation

Ein fundamentales analytisches Instrument zur Lösung wissenschaftlicher Probleme ist die Fourier-Transformation, die durch die folgende Gleichung definiert ist [9]:

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt, \quad (t, f \in \mathbb{R}) \quad (3.1.3)$$

wobei  $x(t)$  normalerweise als Funktion der Variablen Zeit und  $X(f)$  als Funktion der Variablen Frequenz betrachtet wird. Die inverse Fourier-Transformation ist definiert durch

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} df \quad (3.1.4)$$

Die Laplace-Transformation eines kontinuierlichen Zeitsignals  $x(t)$  lässt sich definieren als:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt, \text{ mit } s = \sigma + j\omega \quad (3.1.5)$$

wobei  $\mathcal{L}$  die Laplace-Transformation bedeutet. Vergleichend mit Gl. (3.1.3) erkennt man, dass die Fourier-Transformation von  $x(t)$  der entlang der imaginären ( $j\omega = j2\pi f$ )-Achse berechneten Laplace-Transformation entspricht unter der Voraussetzung, dass die  $j\omega$ -Achse innerhalb des Konvergenzbereichs von  $X(s)$  liegt.

### 3.1.3 Die z-Transformation und die zeitdiskrete Fourier-Transformation (*Discrete-Time Fourier Transform - DTFT*)

Im Digitalrechnerbereich werden diskrete Signale bearbeitet. Man erhält sie meist dadurch, dass man kontinuierliche Signale abtastet. Die Abtastung kann verschieden erfolgen, äquidistant, zufällig oder nach einem anderen Gesetz [31]. Hier soll stets eine äquidistante Abtastung vorgenommen werden, die zudem so erfolgt, dass aus den Abtastwerten das ursprüngliche Signal fehlerfrei rekonstruiert werden kann, d. h. dass das Abtasttheorem [9] eingehalten wird. Dadurch erhält man das zu einem zeitkontinuierlichen Signal  $x(t)$  gehörige zeitdiskrete Signal:

$$x[n] = x(t) |_{t=n \cdot \Delta T} = x(n \cdot \Delta T), \quad n \in \mathbb{N}^0, \quad (3.1.6)$$

wobei  $\Delta T = 1/f_s$  das Abtastintervall und  $f_s$  die Abtastfrequenz ist.

Diese Abtastung entspricht dem Produkt des zeitkontinuierlichen Signals mit der Impulsreihe [31]:

$$\tilde{x}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n \cdot \Delta T) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot \delta(t - n \cdot \Delta T) \quad (3.1.7)$$

Dabei werden die Signalwerte in den Abtastzeitpunkten durch Impulse der „Höhe“  $x[n]$  und die Signalwerte zwischen den Abtastzeitpunkten durch null dargestellt [9]. Wendet man auf  $\tilde{x}(t)$  die Laplace-Transformation an, so erhält man:

$$\tilde{X}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{\tilde{x}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot \delta(t - n \cdot \Delta T)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot e^{-n \cdot \Delta T \cdot s}. \quad (3.1.8)$$

Zur Vermeidung der von der Periodizität von  $e^{-\Delta T \cdot s}$  verursachten Mehrdeutigkeiten in Gl. (3.1.8) wird  $e^{-\Delta T \cdot s}$  durch  $z = \zeta + j\eta$  ersetzt und es ergibt sich die z-Transformation des diskreten Signals  $x[n]$  [31]:

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}. \quad (3.1.9)$$

Wird  $z$  durch  $e^{j\Omega}$  ersetzt, erhält man die zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT) des diskreten Signals  $x[n]$  sowie die entsprechende Inverse, die IDTFT:

$$\text{DTFT}\{x[n]\} = X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n}, \quad (\Omega \in \mathbb{R}) \quad (3.1.10)$$

$$\text{IDTFT}\{X(e^{j\Omega})\} = x[n] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) \cdot e^{j\Omega n} d\Omega, \quad (3.1.11)$$

$$\text{wobei } \Omega = 2\pi f \cdot \Delta T \quad (3.1.12)$$

als normierte Frequenz bezeichnet wird [31]. Zu beachten ist, dass die zeitdiskrete Fourier-Transformierte eines diskreten Signals kontinuierlich und periodisch in  $\Omega = 2\pi$  ist. Die frequenzkontinuierliche Funktion  $X(e^{j\Omega})$  wird manchmal als die kontinuierliche Spektralfunktion der diskreten Folge  $x[n]$  bezeichnet.

### 3.1.4 Die diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Zur Bearbeitung diskreter Signale mit Digitalrechnern ist es erforderlich, ein unendliches diskretes Signal  $x[n]$  durch eine Fensterfunktion auf dasjenige Zeitintervall zu begrenzen, welches der Länge der Fensterfunktion entspricht. Man erhält dabei die begrenzte Folge:

$$x[n], \quad n=0, 1, \dots, N-1. \quad (3.1.13)$$

Die diskrete Fourier-Transformation (DFT) der endlichen Folge in Gl. (3.1.13) ist definiert durch den Ausdruck [9]:

$$\text{DFT}\{x[n]\} = X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.1.14)$$

Die DFT  $X[k]$  wird manchmal als diskrete Spektralfunktion bezeichnet. Die inverse diskrete Fourier-Transformation (IDFT) lässt sich ausdrücken:

$$x[n] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.1.15)$$

Mit Gl. (3.1.10) ergibt sich die DTFT der endlichen Folge in Gl. (3.1.13):

$$\text{DTFT}\{x[n]\} = X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\Omega n}, \quad \Omega \in \mathbb{R}. \quad (3.1.16)$$

Aus den Gln. (3.1.14) und (3.1.16) erhält man die Beziehung zwischen der DTFT und der DFT einer begrenzten Folge:

$$X[k] = X(e^{j\Omega})|_{\Omega=\frac{2\pi k}{N}} = X(e^{j2\pi kn/N}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.1.17)$$

Die diskrete Fourier-Transformation einer auf das Zeitintervall  $0 \leq n < N-1$  begrenzten Folge  $x[n]$  liefert  $N$  äquidistante Abtastwerte der zu  $x[n]$  gehörigen kontinuierlichen Spektralfunktion im Frequenzintervall

$$0 \leq \Omega < \frac{2\pi(N-1)}{N}, \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq f < \frac{f_s \cdot (N-1)}{N}. \quad (3.1.18)$$

Mit den Gln. (3.1.14) und (3.1.18) erhält man die Frequenzauflösung der DFT:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{N \cdot \Delta T}. \quad (3.1.19)$$

Die DFT berechnet die  $z$ -Transformation entlang des Einheitskreises und zwar entlang der Reihe von Punkten  $z_k = e^{j2\pi kn/N}$ , wobei gilt:  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Die Punkte liegen in gleichen

Abständen auf dem gesamten Einheitskreis verteilt. Aus Gl. (3.1.19) ist es ersichtlich, dass nicht die Abtastfrequenz  $f_s$ , sondern die gesamte Messzeit  $N \cdot \Delta T$  für die Frequenzauflösung maßgebend ist. Die DFT wird in zeitoptimierter Form als schnelle Fourier-Transformation (Fast-Fourier-Transformation (FFT)) durchgeführt [9]

Um mit der DFT/FFT zwei Komponenten in einem Multifrequenz-Signal aufzulösen, muss der Abstand zwischen den Frequenzen dieser Komponenten mindestens  $\Delta f$  betragen. In der Literatur bezeichnet man dasjenige Signal als Signal mit dicht liegenden Frequenzen (*closely spaced frequencies*), das die Komponenten enthält, deren Frequenzen mit einem kleiner als  $\Delta f$  Abstand voneinander liegen.

### 3.1.5 Maximum-Likelihood-Schätzung der Größen von verrauschten Sinussignalen

Die Maximum-Likelihood-Schätzung (MLE) kann eingesetzt werden, um eine Schätzung der Signalparameter von verrauschten Signalen vorzunehmen [2]. Zur Darstellung der Schätzung der Signalparameter mit der MLE, geht man zuerst von einer mit einem komplexen Rauschen additiv superponierten komplexen Exponentialfolge aus. Dafür betrachtet man

$$y[n] = A_1 \cdot e[n] + v[n] = A_1 \cdot e^{j(\Omega_1 n + \varphi_1)} + v[n], \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.1.20)$$

wobei  $\Omega_1$  ( $-\pi \leq \Omega_1 < \pi$ ) die Frequenz ist. In Gl. (3.1.20) sind  $A_1$  und  $\varphi_1$  zwei reelle Konstanten und  $v[n] = v_R[n] + jv_I[n]$  ist ein komplexes Rauschsignal, dessen Realteil und Imaginärteil als weiß, gaußverteilt und mittelwertfrei bzw. **i. i. d.** (*independently and identically distributed*) angenommen werden. Das Signal-zu-Rausch-Verhältnis (SNR) ist definiert als  $|A_1|^2 / \sigma^2$ , wobei  $\sigma$  die Standardabweichung von  $v[n]$  ist.

Die MLE  $\hat{A}_1$ ,  $\hat{\Omega}_1$ , und  $\hat{\varphi}_1$  von  $A_1$ ,  $\Omega_1$ , und  $\varphi_1$  soll den Ansatz:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\hat{v}[n]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |y[n] - \hat{A}_1 \cdot e^{j(\hat{\Omega}_1 n + \hat{\varphi}_1)}|^2 \quad (3.1.21)$$

zum Minimum machen [2]. Es wurde gezeigt [32; 66; 67], dass die MLE  $\hat{\Omega}_1$  von  $\Omega_1$  das Periodogramm:

$$P(e^{j\Omega}) = \frac{1}{N} |Y(e^{j\Omega})|^2 \quad (3.1.22)$$

maximiert, wobei  $Y(e^{j\Omega})$  die zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT) von  $y[n]$  ist:

$$Y(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \cdot e^{-jn\Omega} \quad (3.1.23)$$

Mit dem Einsatz von Gl. (3.1.20) in die Gl. (3.1.23) ergibt sich:

$$\begin{aligned} Y(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\Omega_1 n + \varphi_1)} \cdot e^{-jn\Omega} + V(e^{j\Omega}) \\ &= A_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot \frac{e^{jN(\Omega_1 - \Omega)/2}}{e^{j(\Omega_1 - \Omega)/2}} \cdot \frac{\sin \frac{N(\Omega_1 - \Omega)}{2}}{\sin \frac{\Omega_1 - \Omega}{2}} + V(e^{j\Omega}) \end{aligned}$$

$$= A_1 \cdot E(e^{j\Omega}) + V(e^{j\Omega}), \quad (3.1.24)$$

wobei  $E(e^{j\Omega})$  und  $V(e^{j\Omega})$  jeweils die DTFT von  $e[n]$  und  $v[n]$  ist. Daraus ergibt sich:

$$|E(e^{j\Omega})| = \left| \frac{\sin \frac{N(\Omega_1 - \Omega)}{2}}{\sin \frac{(\Omega_1 - \Omega)}{2}} \right| \quad (3.1.25)$$

Die Gl. (3.1.25) hat einen Maximum  $N$  auf der Frequenz  $\Omega = \Omega_1$  und  $N$  Nebenmaxima im Frequenz-Intervall  $(-\pi \sim \pi)$ . Zur Bestimmung Frequenz  $\hat{\Omega}_1$  ist daher eine grobe Suche und danach eine feine Suche nach dem Maximum von  $|Y(e^{j\Omega})|$  erforderlich [32]. Folglich lassen sich  $A_1$  und  $\varphi_1$  schätzen:

$$\hat{A}_1 = |Y(e^{j\hat{\Omega}_1})| / N \quad (3.1.26)$$

$$\hat{\varphi}_1 = \angle Y(e^{j\hat{\Omega}_1}) \quad (3.1.27)$$

Anhand der Beziehung (3.1.17) zwischen der DFT und der DTFT benutzt man zur groben Suche nach dem Maximum von  $|Y(e^{j\Omega})|$  in den meisten Fällen die diskrete Fourier-Transformierte des Signals  $y[n]$ :

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \cdot e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.1.28)$$

wobei die Frequenzvariable neben der Zeitvariablen diskretisiert wird. Mit Gl. (3.1.17) ergibt sich aus (3.1.28):

$$y[k] = A_1 \cdot E\left(\frac{j2\pi k}{N}\right) + V(e^{j2\pi k/N}) \quad (3.1.29)$$

$$V[k] = V(e^{j2\pi k/N}) \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.1.30)$$

wobei  $V[k]$  die DFT von  $v[n]$  ist. Es wird in dieser Arbeit gezeigt, dass die DFT  $V[k]$  von  $v[n]$  mittelwertfrei sowie unabhängig und gleich mit der Gauß-Verteilung verteilt (**i. i. d.**) ist, wenn der Realteil und der Imaginärteil von  $v[n]$  gaußverteilt, mittelwertfrei und **i. i. d.** sind (siehe Abschnitt 4.4.1).

Enthält ein zu untersuchendes Signal mehrere Frequenzen (*multiple tones*), ist eine mit hohem Rechenaufwand nichtlineare Optimierung für die MLE der Signalparameter erforderlich [32]. Aber bei  $N \rightarrow \infty$  verschwindet der Effekt einer Frequenz auf die Schätzungen der anderen Frequenzen. In diesem Fall sind die Frequenzen auf den Stellen der Maxima im Periodogramm die MLE der Frequenzen des zu untersuchenden Signals [32; 67].

### 3.1.6 Cramer-Rao-Schranke (CR-Schranke)

In der Schätztheorie kommt der Bestimmung der erreichbaren, minimalen Varianz eines Schätzers eine zentrale Bedeutung zu. Für einen unverzerrten, linearen Schätzer, der mit Maximum-Likelihood konstruierbar ist, stellt die Cramer-Rao-Schranke die theoretisch erreichbare Varianz dar. Sind mehrere Schätzgrößen  $a_i$  zu bestimmen, dann ergibt sich die CR-

Schranke aus der Fisher-Informationsmatrix [32]. Die Fisher-Zahl  $J_{ij}$  gibt den Informationsgehalt an und kann aus der Likelihood-Funktion  $L$  durch

$$J_{ij} = -[\partial^2 \ln L / \partial a_i \partial a_j] \quad (3.1.31)$$

bestimmt werden [32]. Die Varianz  $\text{var}\{\hat{a}_i\}$  folgt dann zu  $\text{var}\{\hat{a}_i\} \geq (J_{ii})^{-1}$ . Für das in dieser Arbeit betrachtete, abgetastete und mit einem Rauschsignal verrauschte Einzelfrequenz-Signal wurde mit der CR-Schranke die Varianz der Frequenz, Amplitude und Phase jeweils zu

$$\text{var}\{\hat{f}\} \geq \frac{6\sigma^2}{(2\pi)^2 A^2 \cdot \Delta T^2 \cdot N(N^2 - 1)}, \quad (3.1.32)$$

$$\text{var}\{\hat{A}\} \geq \sigma^2 / (2N) \quad (3.1.33)$$

$$\text{var}\{\hat{\phi}\} \geq \frac{\sigma^2 (2N - 1)}{A^2 \cdot N \cdot (N - 1)} \quad (3.1.34)$$

erhalten. Dies ergibt sich nach [66]. Dabei ist  $\sigma$  die Standardabweichung des Rauschsignals,  $A$  die Amplitude des Einzelfrequenz-Signals,  $\Delta T = 1/f_s$  das Abtastintervall und  $N$  die Messwertanzahl. Die CR-Schranken für verrauschte Multifrequenz-Signal sind mathematisch nur sehr komplex darstellbar. Für weiterführende Betrachtungen sei auf [32] verwiesen. Ist der Abstand zwischen zwei in diesem Signal enthaltenen beliebigen Frequenzen ausreichend groß, führen die Ergebnisse der CR-Schranken zu denselben Resultaten wie das Einzelfrequenz-Signale [67].

## 3.2 Die Ursache der Leckeffekte der DFT

Zur Berechnung der Größen eines digital abgetasteten Signals wird in der Regel die DFT eingesetzt. Die DFT wird in zeitoptimierter Form als schnelle Fourier-Transformation (Fast-Fourier-Transformation (FFT)) durchgeführt [9]. Bei der Bestimmung der diskreten Fourier-Transformation bzw. der Fast-Fourier-Transformation stößt man wegen der Zeitbegrenzung allerdings schnell an Grenzen.

Die diskrete Fourier-Transformierte weist zwei störende Effekte – den Kurz-Reichweite-Leckeffekt und den Lang-Reichweite-Leckeffekt – auf, deren Auswirkungen sich mit der DTFT leicht aufzeigen lassen.

### 3.2.1 Auswirkung der Zeitbegrenzung

Hierbei wird ein zeitdiskretes Signal  $x[n]$  ( $n \in \mathbb{N}^0$ ) betrachtet. Um dieses Signal mit einem Rechner zu bearbeiten, ist  $x[n]$  durch eine Fensterfunktion

$$w(n), \quad 0 \leq n < N - 1 \quad (3.2.1)$$

auf dasjenige Zeitintervall zu begrenzen und man erhält die begrenzte Folge:

$$x^w[n] = \begin{cases} x[n] \cdot w[n] & 0 \leq n < N - 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Nach der Faltungsbeziehung [18] lässt sich die DTFT von  $x^w[n]$  ausdrücken:

$$X^w(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) \cdot W(e^{j(\Omega-\theta)}) d\theta, \quad (3.2.3)$$

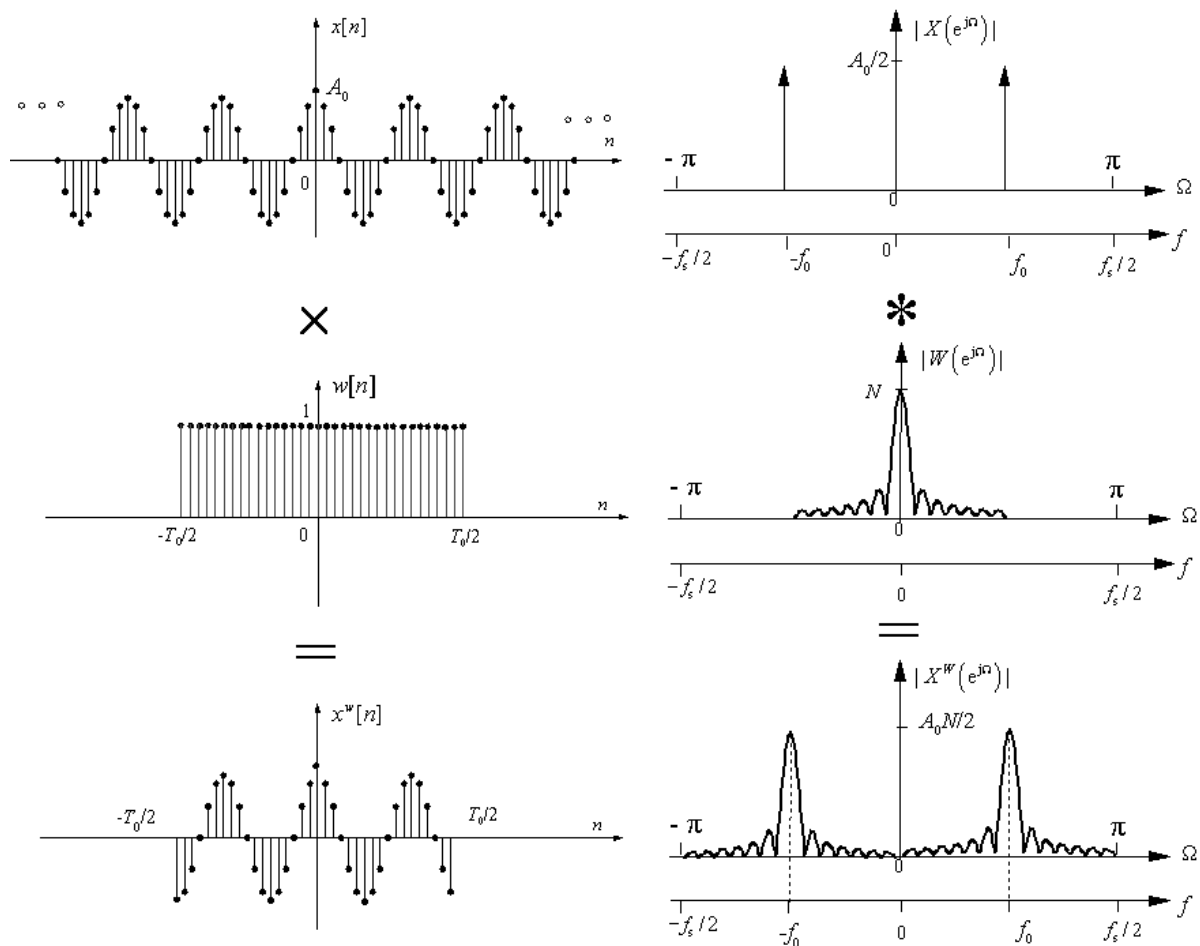
wobei  $X(e^{j\Omega})$  und  $W(e^{j\Omega})$  jeweils die DTFT des unendlichen Signals  $x[n]$  und der Fensterfunktion  $w[n]$  sind. Bei der Rechteck-Fensterfunktion gilt [81]:

$$W(e^{j\Omega}) = e^{-j\frac{(N-1)\Omega}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{N\Omega}{2}}{\sin \frac{\Omega}{2}}. \quad (3.2.4)$$

Damit folgt aus der Gl. (5.2.3):

$$X^w(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) \cdot e^{-j\frac{(N-1)(\Omega-\theta)}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{N(\Omega-\theta)}{2}}{\sin \frac{\Omega-\theta}{2}} d\theta. \quad (3.2.5)$$

Der Leckeffekt erweist sich somit als Auswirkung einer Rechteckfensterung im Zeitbereich, die im Frequenzbereich dem Faltungsprodukt zwischen den DTFT der Fensterfunktion und des Signals entspricht (**Bild 3.0**).



**Bild 3.0** Beispiel der Auswirkung einer Rechteckfensterung im Zeit- und Frequenzbereich



### 3.2.2 Kurz-Reichweite-Leckeffekt (*short-range leakage*) der DFT

Der Kurz-Reichweite-Leckeffekt der DFT ist von der Zeitbegrenzung, deren Dauer kein ganzzahliges Vielfaches der Periode eines zu untersuchenden Signals ist, verursacht. Zur veranschaulichten Darstellungen dieses Leckeffekts wird zuerst von einem Einzelfrequenz-Signal  $x_1(t) = A_0 \cdot e^{2\pi f_0 t}$  ( $-\infty < t < +\infty$ ) ausgegangen. Nach der äquidistanten Abtastung mit dem Abtastintervall  $\Delta T = 1/f_s$  ( $f_s \geq 2 \cdot f_0$ ) erhält man

$$x_1[n] = A_0 \cdot e^{j\Omega_0 n}, \quad n \in \mathbb{N}^0 \quad (3.2.6)$$

wobei  $\Omega_0 = 2\pi f_0 \cdot \Delta T$ . Die zugehörige wahre DTFT von  $x_1[n]$  lässt sich ausdrücken:

$$X_1(e^{j\Omega}) = 2\pi \cdot A_0 \cdot \delta(\Omega - \Omega_0). \quad (3.2.7)$$

Die Rechteckfensterung führt zu der zeitbegrenzten Folge

$$x_1^w[n] = x_1[n] \cdot w[n] = \begin{cases} A_0 \cdot e^{j\Omega_0 n} & 0 \leq n < N-1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.2.8)$$

Aus der Faltung der wahren DTFT  $X_1(e^{j\Omega})$  von  $x_1[n]$  mit der DTFT  $W(e^{j\Omega})$  der Fensterfunktion erhält man die zeitdiskrete Transformierte (DTFT) der gefensterter Folge  $x_1^w[n]$ :

$$\begin{aligned} X_1^w(e^{j\Omega}) &= A_0 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\theta - \Omega_0) \cdot e^{-j\frac{(N-1)(\Omega-\theta)}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{N(\Omega-\theta)}{2}}{\sin \frac{\Omega-\theta}{2}} d\theta \\ &= A_0 \cdot e^{-j\frac{(N-1)(\Omega-\Omega_0)}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{N(\Omega-\Omega_0)}{2}}{\sin \frac{\Omega-\Omega_0}{2}}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Mit Gl. (3.1.17) ist die DFT der gefensterter Folge  $x_1^w[n]$  zu gewinnen:

$$\begin{aligned} X_1[k] &= X_1^w(e^{j\frac{2\pi k}{N}}) = A_0 \cdot e^{-j\pi(k-f_0 \cdot N\Delta T) \cdot \frac{N-1}{N}} \cdot \frac{\sin(\pi(k-f_0 \cdot N\Delta T))}{\sin(\frac{\pi}{N}(k-f_0 \cdot N\Delta T))} \\ &= A_0 \cdot e^{-j\pi(k-\frac{B}{T_0}) \cdot \frac{N-1}{N}} \cdot \frac{\sin(\pi(k-\frac{B}{T_0}))}{\sin(\frac{\pi}{N}(k-\frac{B}{T_0}))}, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

wobei:  $B = N \cdot \Delta T$  – die Breite der Fensterfunktion,

$T_0 = 1/f_0$  – die Periode des komplexen Exponentialsignals .

Der Betrag von  $X_1(k)$  lässt sich ausdrücken:

$$|X_1(k)| = A_0 \cdot \left| \frac{\sin(\pi(k-\frac{B}{T_0}))}{\sin(\frac{\pi}{N}(k-\frac{B}{T_0}))} \right|. \quad (3.2.11)$$

Unter der Bedingung

$$B/T_0 = m, \quad m \in \mathbb{N}^0 \quad (3.2.12)$$

$$\text{folgt aus Gl. (3.2.11): } |X_1(k)| = A_0 \cdot N \cdot \delta(k-m). \quad (3.2.13)$$

In diesem Falle lässt sich die korrekte Spektralfunktion der komplexen Exponentialfolge ermitteln. Die Bedingung (3.2.12) wird als die Synchronisation zwischen Messfrequenz und

Abtastfrequenz – synchrone Abtastung – bezeichnet, oder „Zeitbegrenzung mit ganzen Perioden“. Dieser Fall ist für die Spektralanalyse ideal.

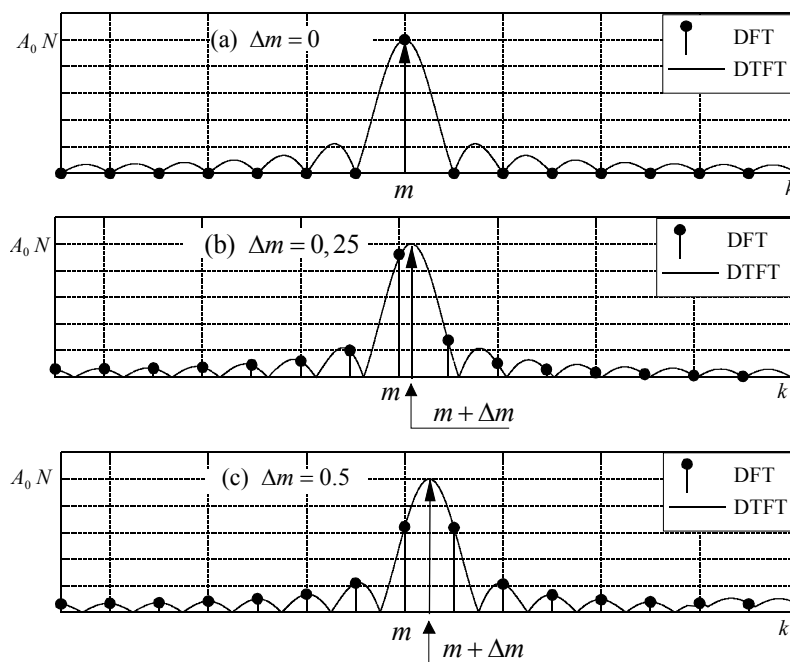
Eine Verletzung dieser Bedingung führt zu Fehlern bei der Ermittlung der Frequenz, Amplitude und Phase mit Hilfe der DFT/FFT. Im Allgemeinen gilt:

$$B/T_0 = m + \Delta m \quad m \in \mathbb{N}^0, \quad |\Delta m| \leq 0,5. \quad (3.2.14)$$

Für die DFT der zeitlich begrenzten Exponentialfolge (Gl. (3.2.8)) ergeben sich aus (3.2.10) dann:

$$X_1(k) = A_0 \cdot e^{j\pi(m-k+\Delta m)} \frac{\sin[\pi(m-k+\Delta m)]}{\sin[\frac{\pi}{N}(m-k+\Delta m)]} \quad (3.2.15)$$

Die **Bilder 3.1a** bis **3.1c** zeigen die hieraus berechneten Spektralfolgen für verschiedene  $\Delta m$ . Zur Veranschaulichung ist jeweils die DTFT angedeutet. Für  $\Delta m = 0$  wird in **Bild 3.1a** die DTFT einmal im Maximum und im übrigen in den Äquidistanzen abgetastet. Das Ergebnis ist die ideale Spektralanalyse – synchrone Abtastung. Für  $\Delta m = 0,25$  und  $\Delta m = 0,5$  hingegen liegen die Nulldurchgänge der DTFT zwischen den diskreten Frequenzpunkten der DFT. Daraus entstehen folgende Fehler: Zum einen wird die DTFT nicht mehr in ihrem Maximum abgetastet, sodass sich zwei Hauptlinien ergeben, deren Beträge gegenüber  $A_0 \cdot N$  reduziert sind. Außerdem entstehen an sämtlichen DFT-Rasterpunkten fehlerhafte Anteile, d. h., die Hauptpektrallinie leckt durch alle Rasterpunkte hindurch (**Bild 3.1b, c**). Der in **Bild 3.1c** dargestellte Fall ist bei der Spektralanalyse mit DFT/FFT am ungünstigsten. Der maximale Fehler der Frequenz ist dabei  $0,5\Delta f$  und der maximale relative Amplitudenfehler beträgt etwa 36% [5].



**Bild 3.1** Verdeutlichung des Kurz-Reichweite-Leckeffekts

### 3.2.3 Lang-Reichweite-Leckeffekt (*long-range leakage*) der DFT

Beim Lang-Reichweite-Leckeffekt handelt sich um die Spektralinterferenz der DFT [16], die durch die Zeitbegrenzung von Multifrequenz-Signalen verursacht wird. Als ein Beispiel wird das Signal:

$$x(t) = y_1(t) + y_2(t) = A_1 \cdot e^{j2\pi f_1 t} + A_2 \cdot e^{j2\pi f_2 t} \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (3.2.16)$$

in Betracht gezogen. Durch die Abtastung mit der Abtastfrequenz  $f_s = 1/\Delta T$  ergibt sich:

$$x[n] = y_1[n] + y_2[n] = A_1 \cdot e^{j\Omega_1 n} + A_2 \cdot e^{j\Omega_2 n}, \quad n \in \mathbb{N}^0, \quad (3.2.17)$$

wobei  $\Omega_1 = 2\pi f_1 \cdot \Delta T$  und  $\Omega_2 = 2\pi f_2 \cdot \Delta T$ . Die DTFT der unendlichen Folge  $x[n]$  lässt sich ausdrücken als [31]

$$X(e^{j\Omega}) = 2\pi A_1 \delta(\Omega - \Omega_1) + 2\pi A_2 \delta(\Omega - \Omega_2). \quad (3.2.18)$$

Nach der Zeitbegrenzung mit einer Rechteck-Fensterfunktion erhält man die begrenzte Folge des Signals:

$$x^w[n] = A_1 \cdot e^{j\Omega_1 n} + A_2 \cdot e^{j\Omega_2 n}, \quad 0 \leq n < N - 1. \quad (3.2.19)$$

Mit Gl. (3.2.9) ergibt sich die zu  $x^w[n]$  gehörige DTFT:

$$X^w(e^{j\Omega}) = A_1 \cdot e^{-j\frac{(N-1)(\Omega-\Omega_1)}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{N(\Omega-\Omega_1)}{2}}{\sin\frac{\Omega-\Omega_1}{2}} + A_2 \cdot e^{-j\frac{(N-1)(\Omega-\Omega_2)}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{N(\Omega-\Omega_2)}{2}}{\sin\frac{\Omega-\Omega_2}{2}} \quad (3.2.20)$$

$$= Y_1(\Omega) + Y_2(\Omega), \quad (3.2.21)$$

wobei

$$Y_1(\Omega) = A_1 \cdot e^{-j\frac{(N-1)(\Omega-\Omega_1)}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{N(\Omega-\Omega_1)}{2}}{\sin\frac{\Omega-\Omega_1}{2}}, \quad (3.2.22)$$

$$Y_2(\Omega) = A_2 \cdot e^{-j\frac{(N-1)(\Omega-\Omega_2)}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{N(\Omega-\Omega_2)}{2}}{\sin\frac{\Omega-\Omega_2}{2}}. \quad (3.2.23)$$

Die DTFT von  $x^w[n]$  ist eine komplexwertige Überlagerung der jeweiligen DTFT der beiden Einfrequenz-Signale  $y_1[t]$  und  $y_2[n]$ .

Daraus erhält man mit Gl. (3.1.17) die zu  $x^w[n]$  gehörige DFT:

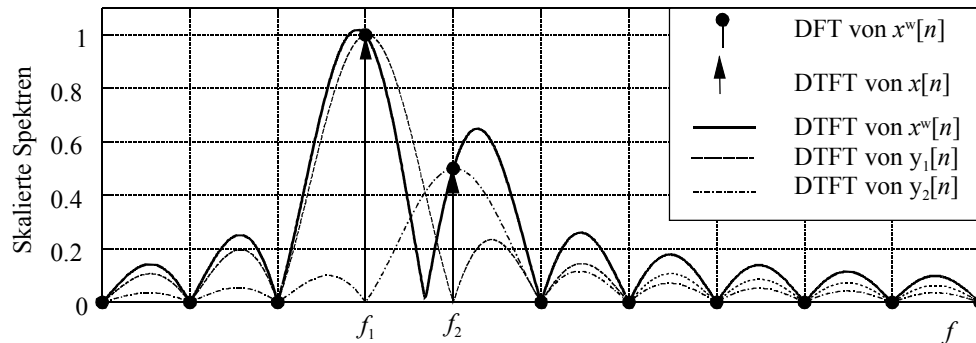
$$X^w[k] = A_1 \cdot e^{-j\pi(k-\frac{B}{T_1})\frac{N-1}{N}} \cdot \frac{\sin(\pi(k-\frac{B}{T_1}))}{\sin(\frac{\pi}{N}(k-\frac{B}{T_1}))} + A_2 \cdot e^{-j\pi(k-\frac{B}{T_2})\frac{N-1}{N}} \cdot \frac{\sin(\pi(k-\frac{B}{T_2}))}{\sin(\frac{\pi}{N}(k-\frac{B}{T_2}))}, \quad (3.2.24)$$

wobei  $T_1 = 1/f_1$  und  $T_2 = 1/f_2$  jeweils die Periode von  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$  sind.  $B = N \cdot \Delta T$  ist die Breite der Fensterfunktion, die der Messzeit in Sekunden entspricht. Hierbei ist folgende Fallunterscheidung sinnvoll.

*Fall 1:* Synchronisation für die beiden Frequenzen, d. h.,  $B/T_1 = M_1$ ;  $B/T_2 = M_2$ ;  $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$

**Bild 3.2** zeigt zusammen mit der DFT von  $x[n]$  die DTFT von  $x[n]$ ,  $y_1[n]$  und  $y_2[n]$ . Im Vergleich zur ursprünglichen DTFT von  $y_1[n]$  oder  $y_2[n]$  ist die DTFT von  $x[n]$  stark verzerrt. Tastet man an den Stützstellen der Frequenz  $f_k = k/(N \cdot \Delta T)$  ( $k = 1, 2, \dots, N-1$ ) ab, wird die Verzerrung eliminiert. Dies geschieht deswegen, weil die DFT von  $y_1[n]$  bei allen

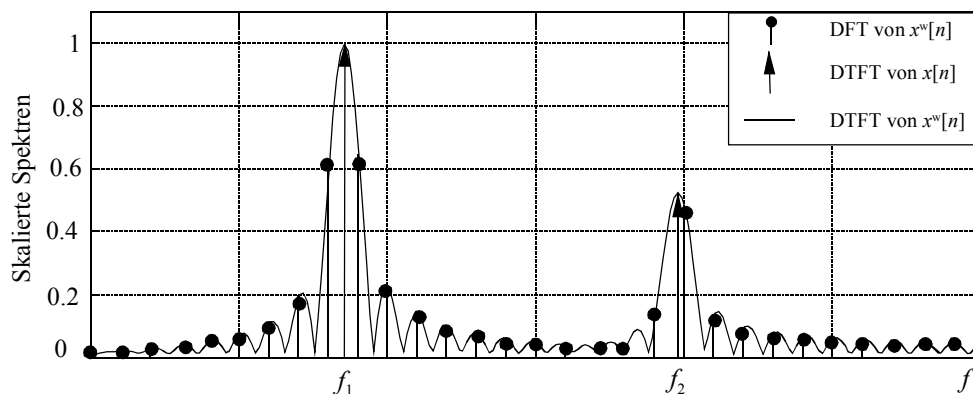
diesen Stützstellen, außer bei der Stützstelle  $f_1$ , eine Nullstelle hat (die DFT von  $y_2[n]$  außer bei  $f_2$ ). In diesem Fall lässt sich trotz der Spektralinterferenz eine ideale Wiedergabe des Spektrums durch die DFT/FFT realisieren.



**Bild 3.2** Spektralinterferenz bei der synchronen Abtastung von Mehrfrequenz-Signalen

*Fall 2:* Keine Synchronisation für die beiden Frequenzen, aber der Abstand zwischen den Frequenzen ist ausreichend groß.

In dem in **Bild 3.3** dargestellten Spektrum liegen die beiden Frequenzen ausreichend weit voneinander entfernt. In diesem Fall tritt geringer Lang-Reichweite-Leckeffekt auf. Allerdings entstehen Fehler beim Errechnen der DFT wegen der Zeitbegrenzung, deren Dauer nicht exakt einem gemeinsamen Vielfachen der Perioden der beiden Komponenten entspricht. Dies führt dazu, dass die diskreten Frequenzpunkte der DFT nicht auf den richtigen Frequenzen liegen.

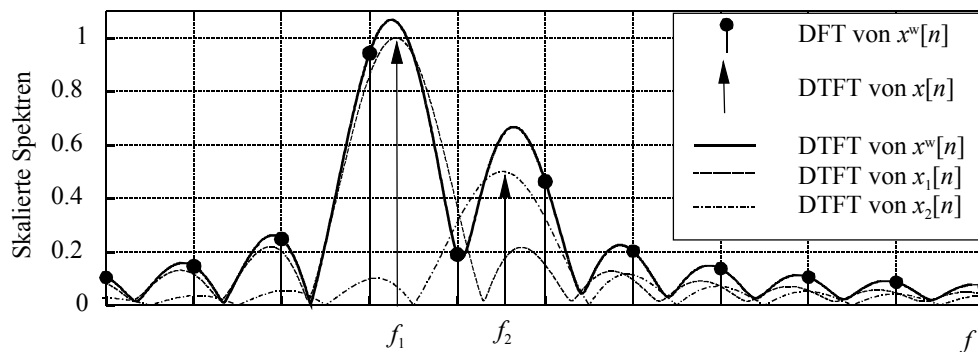


**Bild 3.3** Spektralinterferenz bei nicht synchroner Abtastung. Die zwei Frequenzen liegen ausreichend weit voneinander entfernt.

*Fall 3:* Keine Synchronisation für die beiden Frequenzen, und der Abstand zwischen den Frequenzen ist nicht ausreichend groß.

**Bild 3.4** zeigt die Spektralinterferenz bei nicht synchroner Abtastung. Die Frequenzen des Signals stimmen mit den diskreten Frequenzpunkten der DFT nicht überein, sodass der Kurz-Reichweite-Effekt auftritt. Außerdem entsteht starke Interferenz wegen der zwei zu nah bei-

einander liegenden Frequenzen. In diesem Fall ist eine korrekte Wiedergabe des Spektrums durch die DFT/FFT nicht möglich.



**Bild 3.4** Spektralinterferenz im Fall, indem das Signal nicht synchron abgetastet wird, und die zwei Frequenzen zu nah voneinander liegen.

Die andere Auswirkung des Leckeffekts der DFT/FFT tritt auf, wenn eine Signalkomponente kleiner Amplitude sich in der Nähe einer Signalkomponente mit großer Amplitude befindet. In diesem Fall wird die kleine Komponente des Signals mit großer Wahrscheinlichkeit von den Leckkomponenten der stärkeren Signalkomponente verdeckt [5].

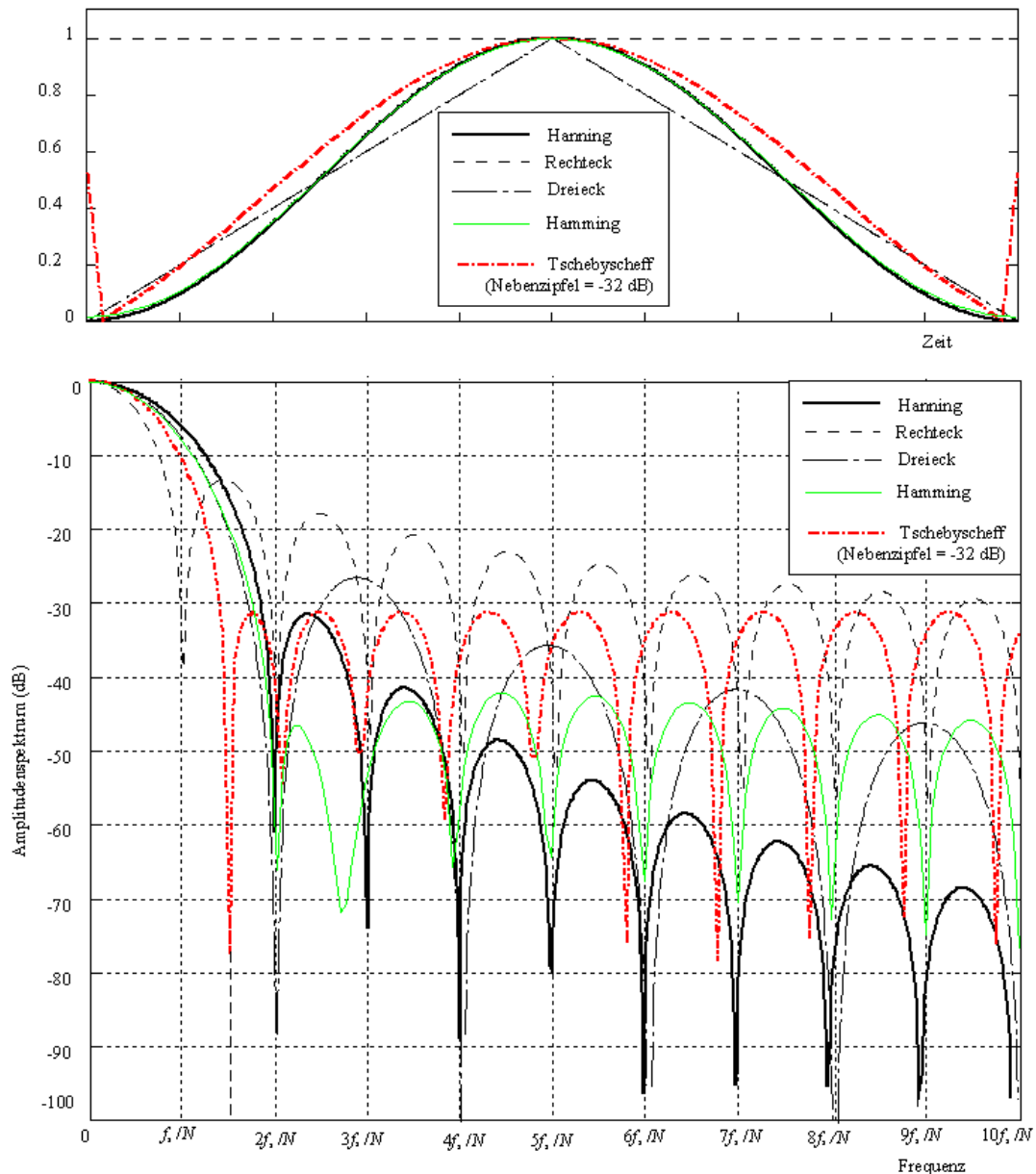
### 3.3 Unterdrückung des Leckeffekts durch Fensterfunktionen

Wie früher erwähnt, fußt die DFT/FFT notwendigerweise auf einem endlichen diskreten Signal, also auf einem zeitlich begrenzten Ausschnitt aus dem Signal. Eine solche Zeitbegrenzung hat in den meisten Fällen die Leckeffekte zur Folge, indem ein partieller „Abfluß“ der ursprünglichen Frequenz-Impulsfunktionen in die Nebenzipfel der  $\sin(f)/f$  Funktion im Frequenzbereich stattfindet (**Bild 3.3 und 3.4**). Zur Vermeidung des Leckeffekts der DFT/FFT muss das Signal synchron abgetastet werden (**Bild 3.2**). Für Multifrequenz-Signale muss die Messzeit einem gemeinsamen Vielfachen der Perioden aller Komponenten im Signal entsprechen [31]. Dies ist nur mit großem Aufwand zu realisieren.

Die Leckeffekte lassen sich üblicherweise durch die Anwendung von Fensterfunktionen abschwächen, die im Frequenzbereich kleinere Nebenzipfel aufweisen als die  $\sin(f)/f$  – Funktion. Dafür ist eine ganze Anzahl verschiedener Formen der Fensterfunktionen vorgeschlagen worden [25]. Einige Fensterfunktionen, die bevorzugt mit der DFT/FFT eingesetzt werden, zeigt **Bild 3.5-1**. Die Tabellen und Vergleichsstudien über die DFT-Fensterfunktionen finden sich in [18; 25]. Mit zahlreichen Beispielen wurde die Anwendung von Fensterfunktionen zur Unterdrückung des Leckeffekts und Detektion der von stärkeren Signalkomponenten verdeckten schwächeren Signalkomponenten in [5] dargestellt.

Im Vergleich mit der Rechteck-Fensterfunktion weisen die Hanning-, Dreieck-Fensterfunktion und alle anderen anwendbaren Fensterfunktionen im Frequenzbereich Nebenzipfel mit geringeren Amplituden auf [9]. Sie haben jedoch breitere Hauptzipfel als die Rechteck-

Fensterfunktion, d. h., jede Maßnahme zur Abschwächung der Nebenzipfel bringt eine Verbreiterung des Hauptzipfels mit sich. Je breiter der Hauptzipfel der Fensterfunktion ist, desto geringer ist die Fähigkeit der DFT/FFT, nah beieinander liegende Frequenzen zu unterscheiden bzw. aufzulösen, was im Arbeitsgebiet der Signalverarbeitung als das Frequenz-Auflösungsvermögen bezeichnet wird [9]. Aus diesem Grunde hat man zwischen der Stärke der zu erwartenden Leckeffekte (Amplituden der Nebenzipfel) und dem gewünschten Frequenz-Auflösungsvermögen stets einen Kompromiß zu treffen.



**Bild 3.5-1** Fensterfunktionen und ihre Amplitudenspektren

Bei der Anwendung der DFT/FFT ist das Frequenz-Auflösungsvermögen mit der Frequenzauflösung, die der Abstand zwischen zwei berechneten Frequenzwerten des diskreten Amplitude-Spektrums ist, zu unterscheiden. Mit der Abtastfrequenz  $f_s$  und der Anzahl der Abtastwerte  $N$  erhält man nach Gl. (3.1.19) immer die gleiche Frequenzauflösung der DFT/FFT:  $\Delta f = f_s / N$ . Dagegen ist das Frequenz-Auflösungsvermögen der DFT/FFT, außer

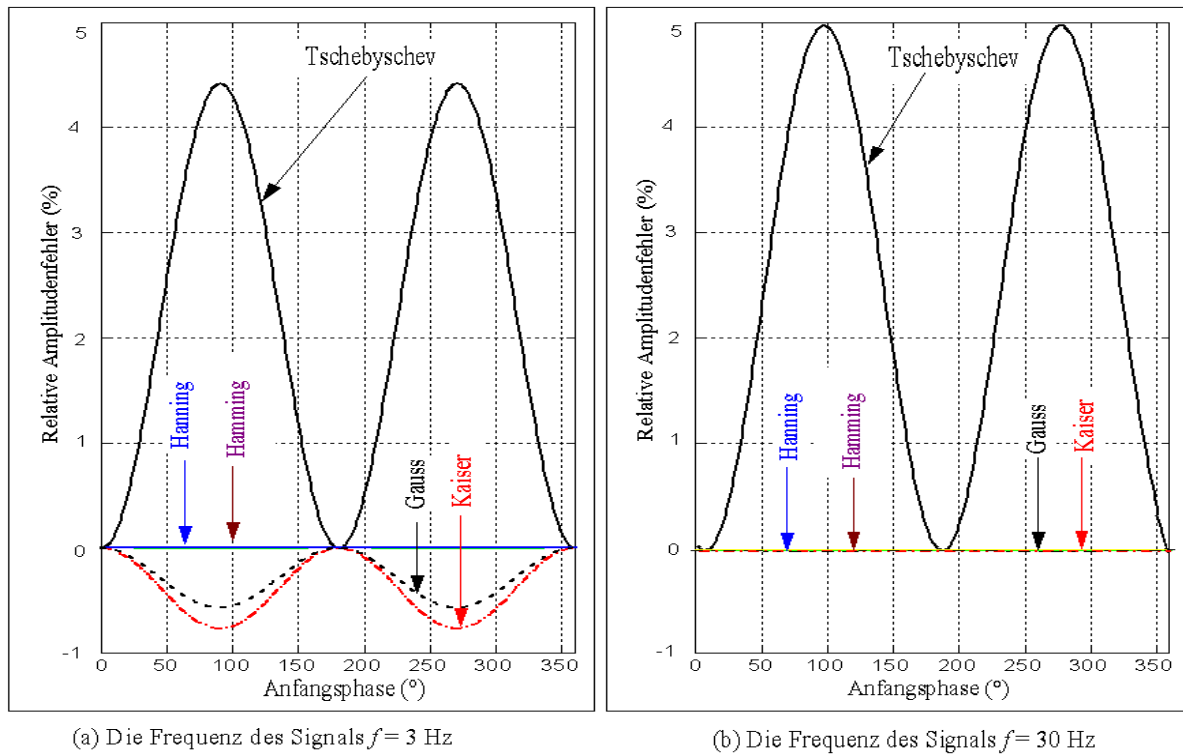
der Frequenzauflösung, noch von der eingesetzten Fensterfunktion und dem Abstand zwischen den beieinander liegenden Frequenzen des zu untersuchenden Signals abhängig. Beispielsweise im Fall, dass die Frequenzen des Signals genug weit voneinander weg liegen, erhält man beim Einsatz der Rechteck-Fensterfunktion das Frequenz-Auflösungsvermögen der DFT/FFT:  $\Delta F_R = 2f_s / N$ , während dies bei der Anwendung der Hanning-Fensterfunktion (die Breite des Hauptzipfels ist  $4 \cdot f_s / N$ , siehe **Bild 3.5-1**)  $\Delta F_H = 4 \cdot f_s / N$  beträgt, d. h., zwei Frequenzen sind auflösbar, wenn der Abstand zwischen den beiden Frequenzen mindestens  $2f_s / N$  beim Einsatz der Rechteck-Fensterfunktion bzw.  $4 \cdot f_s / N$  beim Einsatz der Hanning-Fensterfunktion beträgt (siehe Abschnitt 4.3). Das Frequenz-Auflösungsvermögen der DFT/FFT verringert sich, wenn die Frequenzen des Signals zu nah beieinander liegen, da der Lang-Reichweite-Effekt auftritt.

Die Hanning-Fensterfunktion besitzt im Frequenzbereich einen Hauptzipfel  $4 \cdot \Delta f = 4 \cdot f_s / N$ , und der erste Nebenzipfel hat eine Abdämpfung mit etwa  $-32$  dB. Außerdem dämpfen die anderen Nebenzipfel wesentlich schneller als die der meisten Fensterfunktionen ab ( $-18$  dB), was sich zur Unterdrückung der Spektralinterferenz bei Multifrequenz-Signalen benutzen lässt. Die Hamming-Fensterfunktion hat eine gleichen Hauptzipfelbreite wie die Hanning-Fensterfunktion und der erste Nebenzipfel hat eine Abdämpfung mit etwa  $-43$  dB. Die Nebenzipfel dämpfen mit  $-6$  dB ab. Simulationen zeigten, dass der Unterschied der Ergebnisse bei der Bestimmung der Frequenzen, Amplituden und Phasen von Multifrequenz-Signalen unter dem Einsatz der Hamming- und Hanning-Fensterfunktion gering ist.

Die Dreieck-Fensterfunktion hat eine gleichen Hauptzipfelbreite wie die Hanning- und Hamming-Fensterfunktion, aber der erste Nebenzipfel hat eine Abdämpfung nur mit etwa  $-26$  dB. Die Nebenzipfel dämpfen mit  $-12$  dB ab.

Die Tschebyschev-Fensterfunktion besitzt eine günstigere Nebenzipfelcharakteristik. Bei ihr ist die Hauptzipfelbreite minimal und die Nebenzipfel liegen ohne Abdämpfung unterhalb eines vorgegebenen Pegels [9] [31]. Gibt man die Nebenzipfel der Tschebyschev-Fensterfunktion z. B. mit  $-32$  dB vor, erhält man die Hauptzipfelbreite von etwa  $3 \cdot \Delta f$ . Dies ist für die Bestimmung der Frequenzen von Multifrequenz-Signalen günstig. Allerdings bei der Bestimmung der Amplitude eines Sinus- oder Cosinussignals können Fehler entstehen, da die dadurch berechnete Amplitude wegen der besonderen Form des Fensters im Zeitbereich von der Anfangsphase des Signals abhängig ist (**Bild 3.5-2**). Diese Fehler verringern sich mit der Zunahme der Frequenz des Signals nicht. Außerdem schränkt die zusätzliche Komplexität dieser Fensterfunktion ihre praktische Anwendung ein (siehe Anhang 6).

Die Gauss-Fensterfunktion hat entweder einen breiteren Hauptzipfel oder höhere Nebenzipfel als die Hanning-Fensterfunktion [18]. In Hinblick auf das Frequenz-Auflösungsvermögen und die Spektralinterferenz ist ihre Anwendung auf die Bestimmung der Größen von Multifrequenz-Signalen beschränkt.



**Bild 3.5-2** Abhängigkeit des Amplitudenfehlers mit der Anfangsphase und der Frequenz des Signals

Die Kaiser-Fensterfunktion hat einen wählbaren Parameter  $\beta$ , mit dem eine gegebene Abdämpfung der Nebenzipfel im Frequenzbereich erreicht kann (siehe Anhang 6). Allerdings ist diese Fensterfunktion wegen der komplizierten Implementierung und auch wegen des Amplitudenfehlers bei niederfrequenten Signalen (**Bild 3.5-2 a**) zur Bestimmung der Größen von Multifrequenz-Signalen eingeschränkt einzusetzen.

Im Prinzip lässt sich der Kurz-Reichweite- und Lang-Reichweite-Leckeffekt mit dem Einsatz geeigneter Fensterfunktionen deutlich unterdrücken. Allerdings ist dies für eine genaue Bestimmung der Parameter von Signalen mit mehreren Frequenzen, besonders im Fall, dass die zu untersuchenden Signale eng beieinander liegende Frequenzen enthalten, nicht ausreichend.

### 3.4 Erhöhung der Frequenzauflösung durch die Chirp-z-Transformation (CZT) und das Zeropadding-Verfahren

#### 3.4.1 Die Chirp-z-Transformation

Die DFT/FFT berechnet die  $z$ -Transformation eines diskreten Signals entlang des Einheitskreises und zwar entlang der Reihe von Punkten  $z_k = e^{j2\pi kn/N}$ , wobei gilt:  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Die Punkte liegen in gleichen Abständen auf dem gesamten Einheitskreis verteilt (**Bild 3.6**). Somit ergibt sich der Abstand zwischen zwei berechneten Frequenzwerten des Spektrums – die Frequenzauflösung – stets zu  $\Delta f = 1/(N \cdot \Delta T) = f_s / N$ . Interessiert nur ein kleiner Ausschnitt des Spektrums, kann man die Chirp-z-Transformation einsetzen.



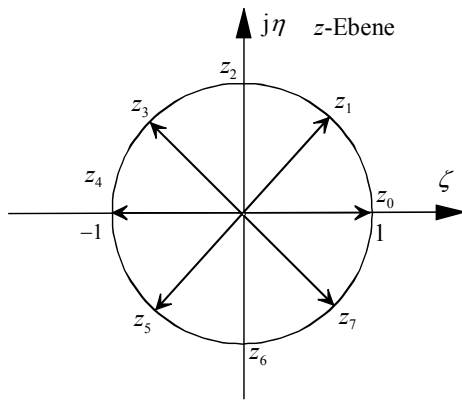
Die Chirp-z-Transformation ist ebenfalls ein Algorithmus zur Berechnung der z-Transformation eines diskreten Signals (Gl. (3.1.9)). Statt des gesamten Einheitskreises wird eine allgemeinere Kontur zur Berechnung der z-Transformation eingeführt. Es sei angenommen:

$$A = A_0 \cdot e^{j\theta_0}, \quad W = W_0 \cdot e^{-j\phi_0}, \quad z_n = A \cdot W^{-n} = A_0 \cdot e^{j\theta_0} \cdot W_0^{-n} \cdot e^{jn\phi_0} \quad (3.4.1)$$

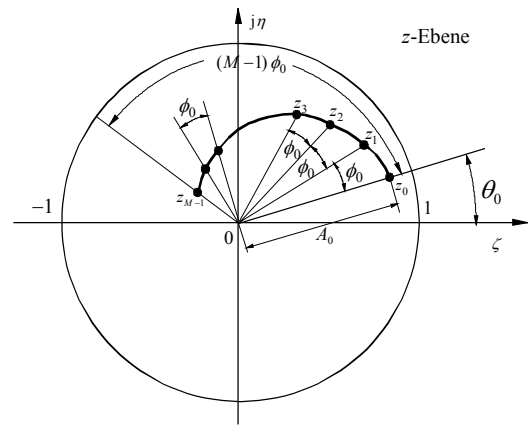
wobei  $A_0$  und  $W_0$  zwei beliebige positive reelle Zahlen sind. Die Chirp-z-Transformation einer Folge  $x[n]$  ist definiert [63]:

$$\text{CZT}\{x[n]\} \equiv X_C[n] \equiv \sum_{r=0}^{N-1} x[r] \cdot z_n^{-r} = \sum_{r=0}^{N-1} x[r] \cdot A^{-r} \cdot W^{-rn}, \quad n = 0, 1, \dots, M-1. \quad (3.4.2)$$

$M$  ist eine beliebige natürliche Zahl, welche die Anzahl der zu berechnenden Werte der z-Transformation bestimmt. **Bild 3.7** stellt  $A$ ,  $W$  und  $z_n$  sowie deren Beziehung dar.



**Bild 3.6** Stützstellen für die Berechnung der DFT ( $N = 8$ )



**Bild 3.7** Eine Kontur für die CZT in der z-Ebene

Mittels der Gleichung  $r \cdot n = \frac{1}{2}[r^2 + n^2 - (r-n)^2]$  lässt sich die CZT  $X_C[n]$  umschreiben:

$$X_C[n] = W^{\frac{n^2}{2}} \cdot \sum_{r=0}^{N-1} x[r] \cdot A^{-r} \cdot W^{\frac{r^2}{2}} \cdot W^{-\frac{(r-n)^2}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (3.4.3)$$

Der Vorteil dieser Darstellung liegt darin, dass man sie in drei einfache Berechnungsschritte unterteilen kann [63]:

1. Berechnung einer neuen Folge  $g[n]$  durch Gewichtung der Folge  $x[n]$  gemäß:

$$g[n] = x[n] \cdot A^{-n} \cdot W^{n^2/2}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.4.4)$$

2. Faltung der Folge  $g[n]$  mit der in Gl. (3.4.5) definierten Folge  $h[n]$ ,

$$h[n] = W^{-n^2/2}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.4.5)$$

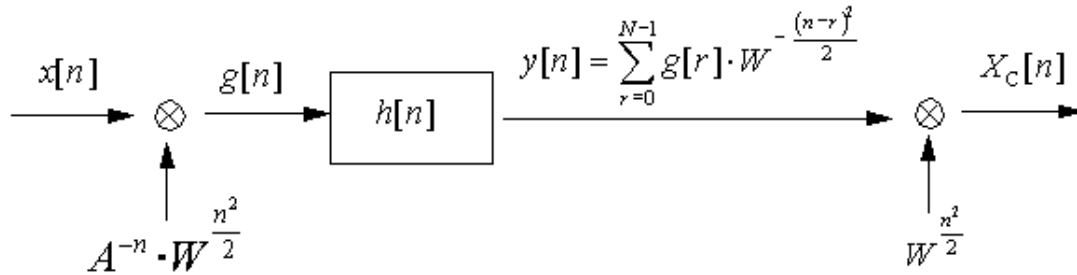
Aus dem Ergebnis der Faltung entsteht die Folge  $y[n]$  nach Gl. (3.4.6):

$$y[n] = g[n] * h[n] = \sum_{r=0}^{N-1} g[r] \cdot h[n-r], \quad n = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3.4.6)$$

3. Multiplizieren der Folge  $y[n]$  mit  $W^{n^2/2}$ , um schließlich zu erhalten:

$$X_C[n] = y[n] \cdot W^{n^2/2}, \quad n = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3.4.7)$$

Schritt 1 und Schritt 3 benötigt  $N$  bzw.  $M$  komplexe Multiplikationen. Schritt 2 ist eine Faltungsoperation, die sich z. B. mit dem Algorithmus der „schnellen Faltung“, basierend auf der FFT, durchführen lässt. Dieser Schritt ist der rechenaufwändigste Schritt und benötigt eine Rechenzeit, die ungefähr proportional zu  $(N+M)\log_2(N+M)$  ist [63]. **Bild 3.8** veranschaulicht die Algorithmusstruktur der CZT. Zur Berechnung der CZT muss mit hohem Rechenaufwand gerechnet werden. Simulationen zeigten, dass der Rechenaufwand der CZT dem 20 fachen der FFT entspricht [44].



**Bild 3.8** Algorithmusstruktur der CZT [63]

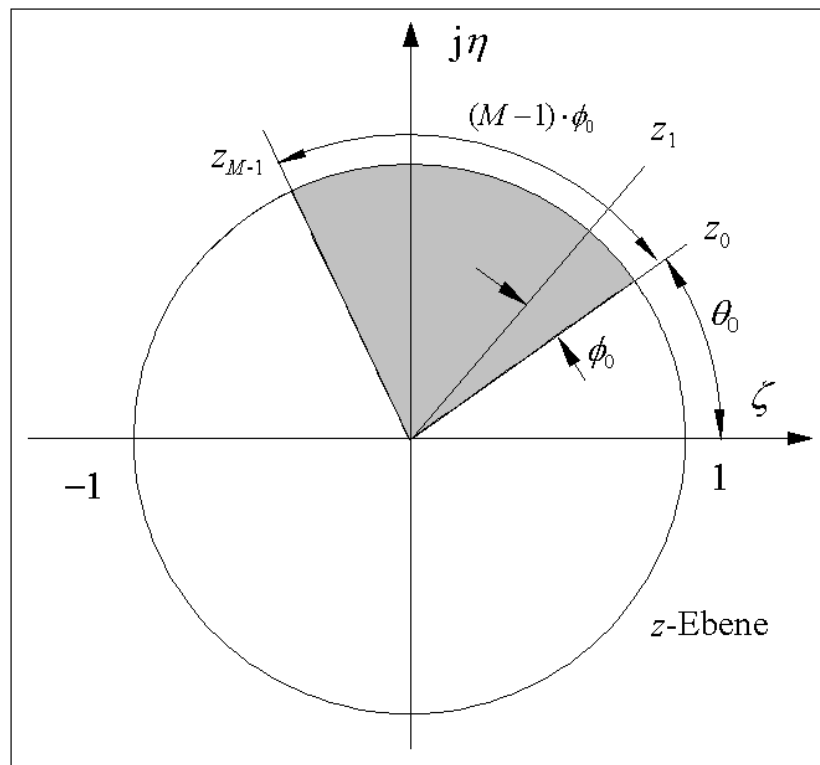
Aus den Gln. (3.4.1) und (3.4.2) sowie **Bild 3.8** ist zu ersehen, dass fünf frei wählbare Parameter ( $A_0$ ,  $W_0$ ,  $M$ ,  $\theta_0$  und  $\phi_0$ ) eine differenziertere Berechnung der  $z$ -Transformation erlauben.  $A_0$  bestimmt den Betrag und  $\theta_0$  den Winkel des Startpunkts. Mit  $\theta_0 = 2\pi f_1 \cdot \Delta T$  entspricht  $f_1$  bei Spektralberechnungen der Startfrequenz. Der Parameter  $\phi_0$  ( $= 2\pi \cdot \delta f \cdot \Delta T$ ) gibt den Winkelabstand zwischen den einzelnen Punkten  $z_r$  an und bestimmt somit die Frequenzauflösung  $\delta f$  der CZT.

Für  $W_0=1$  und  $A_0=1$  beschreibt die Kontur der Punkte im Einheitskreis einen Kreisbogen zwischen  $\theta_0 = 2\pi f_1 \cdot \Delta T$  und  $\theta_{M-1} = \theta_0 + (M-1) \cdot \phi_0$  (**Bild 3.9**). In der Praxis kann man den Parameter zu  $M = N$  wählen, wobei  $N$  die Anzahl der Abtastwerte ist. Somit erhält man die Frequenzauflösung der CZT:  $\delta f = (f_2 - f_1)/(N-1)$  (3.4.8)

Berechnet die CZT die  $z$ -Transformation einer diskreten Folge in einem Kreisbogen des Einheitskreises, dann steht die CZT mit der DTFT dieser Folge eng im Zusammenhang, da die DTFT dieser Folge die  $z$ -Transformation im ganzen Einheitskreis mit kontinuierlichen Frequenzen darstellt (Abschnitt 3.1.3). Verlängert man den Kreisbogen bis zu einem Einheitskreis, liefert die CZT dieselben Ergebnisse wie die DFT, welche die  $z$ -Transformation entlang der Reihe von Punkten  $z_k = e^{j2\pi kn/N}$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ) im Einheitskreis berechnet. In diesem Fall ist die FFT – ein schneller Algorithmus der DFT – ist aber viel effizient.

Wird ein analoges Signal mit der Abtastfrequenz  $f_s$  diskretisiert und dann mit der Fensterlänge von  $N$  zeitlich begrenzt, werden die  $z$ -Transformation und folglich die DTFT der daraus entstehenden diskreten Folge festgelegt. Bei synchroner Abtastung mit allen im analogen

Signal enthaltenen Komponenten entsteht kein Leckeffekt in der DFT (*Fall 1* in Abschnitt 3.2.3). In diesem Fall liefert die CZT keine besseren Ergebnisse als die DFT. Die FFT – ein schneller Algorithmus der DFT – ist aber viel effizienter.

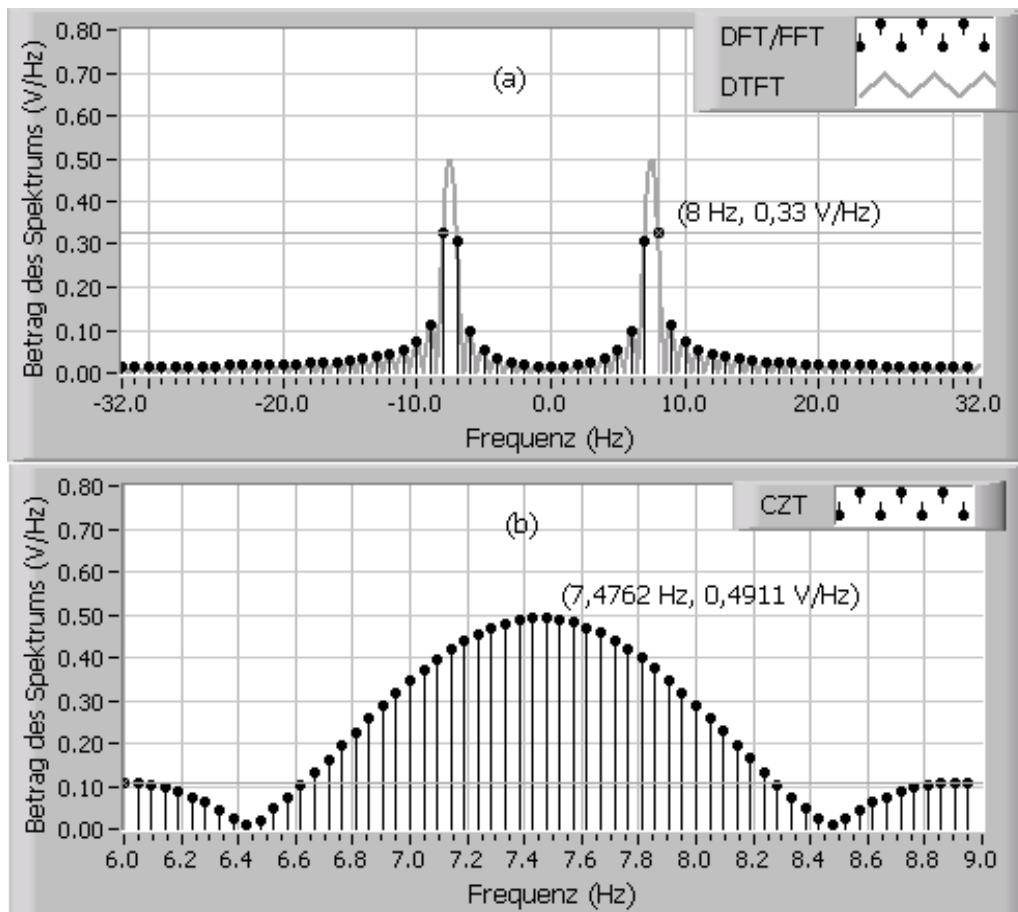


**Bild 3.9** Kontur für die Berechnung der CZT im Einheitskreis

Wenn die Bedingung der synchronen Abtastung verletzt ist, aber die Abstände zwischen den Frequenzen der Komponenten ausreichend groß sind (*Fall 2* in Abschnitt 3.2.3), tritt der Kurz-Reichweite-Effekt auf, während der Lang-Reichweite-Effekt vernachlässigt werden kann. In diesem Fall liefert die CZT mit ihrer höheren Frequenzauflösung bessere Ergebnisse für die Spektralanalyse als die DFT. Dabei lässt sich der Kurz-Reichweite-Effekt wesentlich unterdrücken.

Bei der Verletzung der synchronen Abtastung und kleinen Abständen zwischen den Frequenzen der Komponenten können der Kurz- und Lang-Reichweite-Effekt entstehen (*Fall 3* in Abschnitt 3.2.3). In diesem Fall ist eine korrekte Wiedergabe des Spektrums durch die DFT/FFT nicht möglich. Da sich die vom Lang-Reichweite-Effekt verursachte Spektralinterferenz durch die CZT nicht unterdrücken lässt, kann das Frequenz-Auflösungsvermögen nicht erhöht werden. Man muss in den dadurch berechneten Spektren mit Fehlern rechnen.

Die Anwendung der CZT kann durch folgendes Beispiel veranschaulicht werden: Eine harmonische Schwingung  $x(t) = \sin 2\pi \cdot 7,5 \cdot t$  wird während der Messzeit  $N \cdot \Delta T = 1$  s mit der Frequenz  $f_s = 64$  Hz abgetastet. Somit erhält man  $N = 64$  Abtastwerte. Das diskrete Signal wird der DFT/FFT bzw. der CZT unterworfen. **Bild 3.10** zeigt die Ergebnisse der DFT/FFT bzw. CZT.



**Bild 3.10** Die DFT/FFT und die CZT eines Signals

Bei der DFT/FFT beträgt die Frequenzauflösung  $\Delta f = 1$  Hz. Der darstellbare Frequenzbereich geht von  $-f_s/2 = -32$  Hz bis  $(N/2 - 1) \cdot \Delta f = 31$  Hz. **Bild 3.10a** zeigt das Betragsspektrum  $(X[k]/N)$ . Es ist zu erkennen, dass ein starker Leckeffekt auftritt. Das Maximum des Betragsspektrums 0,33 (Sollwert 0,5) liegt bei der Frequenz 8 Hz (Sollwert 7,5 Hz). **Bild 3.10b** stellt die mit den Parametern:  $M = N$ ,  $f_1 = 6$  Hz,  $f_2 = 9$  Hz berechnete CZT dar. Somit ergibt sich die Frequenzauflösung der CZT zu  $\delta f = 0,0968$  Hz.

Der von der CZT berechnete Frequenzbereich ist frei wählbar und die Frequenzauflösung ist deshalb beliebig. Vorteilhaft ist die CZT immer dann, wenn man beispielsweise die Lage lokaler Maxima des Spektrums genauer bestimmen will. Prinzipiell lässt sich der Kurz-Reichweite-Leckeffekt dadurch wesentlich unterdrücken. Es sei darauf hingewiesen, dass die Spektralinterferenz bei Multifrequenz-Signalen allein mit Hilfe des CZT-Verfahrens nicht unterdrückt bzw. eliminiert werden kann.

### 3.4.2 Zeropadding-Verfahren

Wie in Abschnitt 3.1.4 erwähnt, ist für die Frequenzauflösung der DFT/FFT nicht die Abtastfrequenz  $f_s$ , sondern die gesamte Betrachtungszeit  $N \cdot \Delta T$  maßgebend. Der maximale Frequenzfehler beträgt  $0,5 \Delta f$  beim Auftreten des Leckeffekts (siehe Gl. (3.2.14)). Bei einer

Vergrößerung der Beobachtungszeit, z. B. durch eine höhere Anzahl  $N$  der Abtastwerte, wird der Frequenzfehler des Spektrums verringert. Dazu müsste man die zusätzlichen Abtastwerte zuvor messen. Liegen diese aber nicht vor oder besteht keine Möglichkeit, sie nachträglich zu messen, so müssen andere Werte willkürlich hinzugefügt werden.

Durch künstliches Verlängern der abgetasteten Wertefolge eines diskreten Signals:

$$x[n] = x(n \cdot \Delta T), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.4.9)$$

durch Einfügen von  $M$  Nullen entstehen die Abtastwerte:

$$x' [n] = \begin{cases} x[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & N \leq n \leq N+M-1 \end{cases} \quad (3.4.10)$$

Dies wird als *Zeropadding* bezeichnet [31]. Mit Gl. (3.1.16) erhält man die DTFT von  $x[n]$ :

$$X(e^{j2\pi f \cdot \Delta T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi f \cdot n \cdot \Delta T} \quad (3.4.11)$$

und die DTFT von  $x' [n]$ :

$$X'(e^{j2\pi f \cdot \Delta T}) = \sum_{n=0}^{N+M-1} x' [n] \cdot e^{-j2\pi f \cdot n \cdot \Delta T} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi f \cdot n \cdot \Delta T} + \sum_{n=N}^{N+M-1} 0 \cdot e^{-j2\pi f \cdot n \cdot \Delta T} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi f \cdot n \cdot \Delta T} \quad (3.4.12)$$

Folglich ergibt sich

$$X(e^{j2\pi f \cdot \Delta T}) = X'(e^{j2\pi f \cdot \Delta T}) \quad (3.4.13)$$

Die beiden DTFT sind identisch, da ein Anfügen von Nullen keine Informationsänderung darstellt. Wie in Abschnitt 3.1.3 erwähnt, ist die DTFT im Frequenzbereich kontinuierlich und periodisch mit der Periode  $f_s$ . Gemäß der Definition der DFT nach Gl. (3.1.15) und mit dem Zusammenhang zwischen der DFT und der DTFT nach Gl. (3.1.17) erhält man die DFT von  $x[n]$ :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi kn/N} = \tilde{X}(e^{-j2\pi f \cdot \Delta T}) \Big|_{f=\frac{k}{N \cdot \Delta T}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.4.14)$$

und die DFT von  $x' [n]$ :

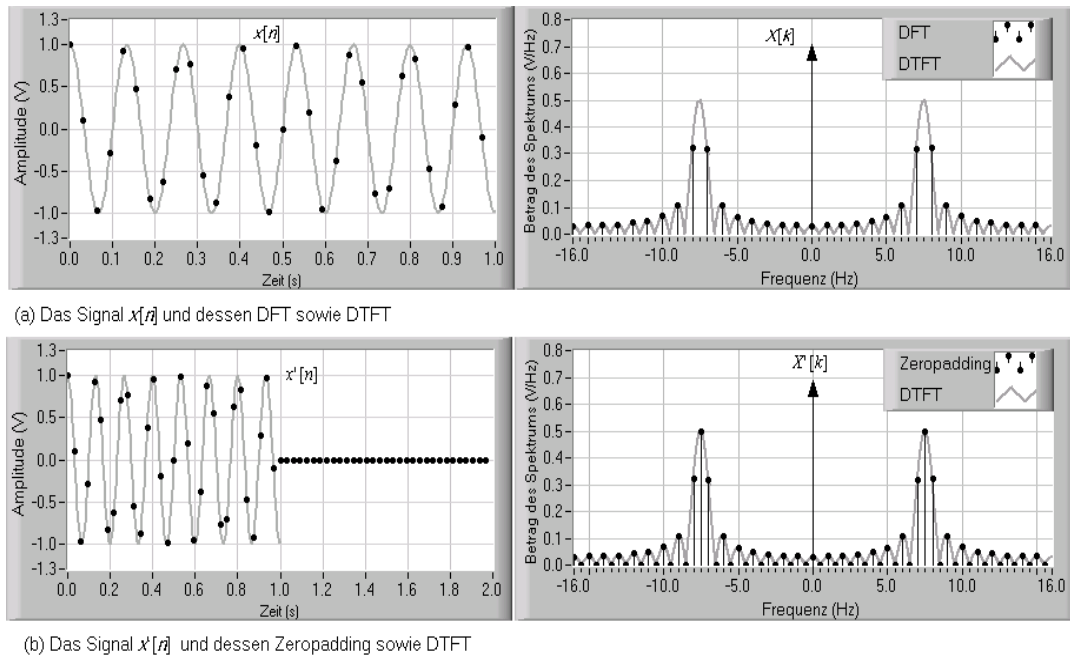
$$\begin{aligned} X' [k] &= \sum_{n=0}^{N+M-1} x' [n] \cdot e^{-j2\pi kn/(N+M)} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi kn/(N+M)} \\ &= \tilde{X}'(e^{-j2\pi f \cdot \Delta T}) \Big|_{f=\frac{k}{(N+M) \cdot \Delta T}}, \quad k = 0, 1, \dots, N+M-1 \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

Die Gln. (3.4.13) bis (3.4.15) zeigen, dass  $X[k]$  und  $X' [k]$  die Abtastung der identischen kontinuierlichen DTFT bei unterschiedlichen Stützstellen im Frequenzbereich sind. Somit erhält man die Frequenzauflösung der beiden DFT  $X[k]$  und  $X' [k]$ :

$$\Delta f = \frac{1}{N \cdot \Delta T} = f_s / N, \quad \Delta f' = \frac{1}{(N+M) \cdot \Delta T} = \frac{1}{L \cdot \Delta T} = f_s / L \quad (3.4.16)$$

Daraus erkennt man, dass sich der Abstand der benachbarten Stützstellen im Frequenzbereich durch Anfügen von Nullen an die Abtastwerte verringert (**Bild 3.11**). Folglich lässt sich die

Frequenzauflösung durch Einfügen von Nullen beliebig erhöhen. Dabei kann man die Summe von  $L = N+M$  immer als Potenz von 2 wählen, sodass das Spektrum der verlängerten Folge mit der FFT effizient berechnet werden kann.



**Bild 3.11** Beispiel zur Anwendung des Zeropadding-Verfahrens ( $L = 2N$ )

Die CZT und das Zeropadding-Verfahren sind die Abtastung der kontinuierlichen DTFT im Frequenzbereich und stehen damit im Zusammenhang. Interessiert nur ein kleiner Ausschnitt des Spektrums, kann man die Chirp-z-Transformation einsetzen und eine höhere Frequenzauflösung ist möglich. Vorteilhaft ist die CZT immer dann, wenn man beispielsweise die Lage lokaler Maxima des Spektrums genauer bestimmen will, z. B. bei der Bestimmung der Grundfrequenz eines harmonischen Signals. Mit dem Zeropadding-Verfahren kann man ebenfalls mit hoher Frequenzauflösung das Spektrum eines diskreten Signals im Bereich von 0 Hz bis  $f_s/2$  erhalten. Der Rechenaufwand der beiden Verfahren wird im nächsten Kapitel verglichen.

Die CZT oder das Zeropadding-Verfahren lässt sich mit dem Einsatz geeigneter Fensterfunktionen zur gleichzeitigen Unterdrückung der Kurz- und Lang-Reichweite-Leckeffekt anwenden. Bei einem Einsatz des Zeropadding-Verfahrens oder der CZT und einer geeigneten Fensterfunktion wird das abgetastete Signal zunächst mit der Fensterfunktion multipliziert, und anschließend werden Nullen daran angefügt. Im Vergleich mit der Rechteck-Fensterfunktion haben andere Fensterfunktionen geringere Nebenzipfel, aber breitere Hauptzipfel. Dieser mit der Verbreiterung des Hauptzipfels einhergehende Verlust an Frequenz-Auflösungsvermögen ist der Preis für eine verbesserte Nebenzipfel-Charakteristik und in den meisten Fällen aber durchaus vertretbar. In Kapitel 4 werden die Analyse der statistischen Fehler und das Frequenz-Auflösungsvermögen der beiden Verfahren bei Multifrequenz-Signalen weiter behandelt.

### 3.5 Die Interpolation-Diskrete-Fourier-Transformation(IpDFT)

#### 3.5.1 Prinzip der Interpolation-Diskrete-Fourier-Transformation

Zur Darstellung des IpDFT-Verfahrens kann man zuerst von einem zeitlich begrenzten komplexen Signal der Einzelfrequenz:  $e[n] = A_0 e^{-j(2\pi f_0 n + \varphi_0)}$ ,  $0 \leq n < N - 1$  (3.5.1) ausgehen. Hierbei impliziert eine Zeitbegrenzung auf eine unendliche Exponentialfolge mit Rechteck-Fensterfunktion. Wie im Kapitel 3.2.2 erwähnt, kann man unter synchroner Abtastung mit der DFT/FFT die korrekten Größen dieses Signals berechnen. Andere Verhältnisse ergeben sich, wenn die Bedingung (3.2.12) verletzt wird. Im allgemeinen Fall gilt:

$$\frac{B}{T_0} = \frac{f_0}{\Delta f} = m + \theta, \quad |\theta| \leq 0,5, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{N \cdot \Delta T}. \quad (3.5.2)$$

Für die DFT der Exponentialfolge  $e[n]$  ergeben sich aus Gl. (3.2.10) dann:

$$E(k) = A_0 e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\pi(m-k+\alpha)\frac{N-1}{N}} \cdot \frac{\sin[\pi(m-k+\theta)]}{\sin[\frac{\pi}{N}(m-k+\theta)]} \quad (3.5.3)$$

und  $|E(k)| = A_0 \cdot \left| \frac{\sin[\pi(m-k+\theta)]}{\sin[\frac{\pi}{N}(m-k+\theta)]} \right|$ . (3.5.4)

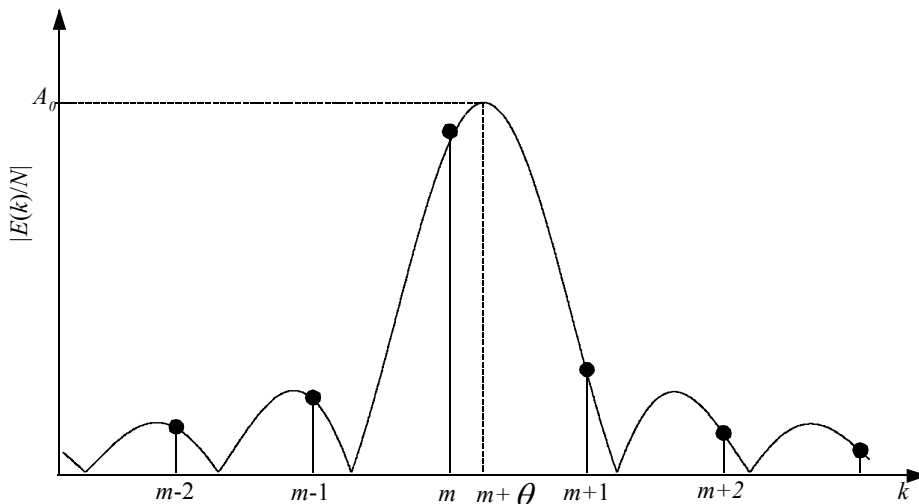
Die Gl. (3.5.4) hat die folgenden Eigenschaften (**Bild 3.12**):

- $|E(k)|$  erreicht das Maximum in der Nähe von  $k = m$ .
- Die meiste Energie der Exponentialfolge konzentriert sich auf  $E(m)$  und seine zwei Nachbarwerten  $E(m-1)$  und  $E(m+1)$  [46; 65].

Mit Gl. (3.5.4) erhält man die größte und die zweit größte Amplitude der DFT von  $e[n]$ :

$$|E(m)| = |E(k)|_{k=m} = A_0 \cdot \frac{\sin(\pi\theta)}{\sin\frac{\pi\theta}{N}} \quad \text{und} \quad (3.5.5)$$

$$|E(m+1)| = |E(k)|_{k=m+1} = A_0 \cdot \frac{\sin[\pi(1-\theta)]}{\sin\frac{\pi(1-\theta)}{N}}. \quad (3.5.6)$$



**Bild 3.12** Die DFT und DTFT der Exponentialfolge

Somit erhält man für die Rechteck-Fensterfunktion eine approximative Lösung von  $\theta$  [65]:

$$\hat{\theta} = \alpha \cdot \frac{|E(m + \alpha)|}{|E(m + \alpha)| + |E(m)|}, \quad (3.5.7)$$

wobei gilt:

$$\text{Wenn } |E(m + 1)| > |E(m - 1)|, \text{ dann } \alpha = +1, \text{ sonst } \alpha = -1. \quad (3.5.8)$$

Für die Hanning-Fensterfunktion ergibt sich die approximative Lösung von  $\theta$  [54]:

$$\hat{\theta} = \alpha \cdot \frac{2|E(m + \alpha)| - |E(m)|}{|E(m + \alpha)| + |E(m)|}. \quad (3.5.9)$$

Die Durchführung dieses Verfahrens wird in drei Berechnungsschritte unterteilt:

1. Nach der Berechnung der DFT bzw. FFT werden der maximale Wert des Betrags der DFT und der entsprechenden Index  $m$  ermittelt (grobe Suche).
2. Mit den Gln.(3.5.7) und (3.5.8) bzw. (3.5.9) erhält man den approximativen Wert von  $\hat{\theta}$ .
3. Mit Gl. (3.5.2) erhält man die geschätzte Frequenz (korrigiert nach der feinen Suche):

$$\hat{f}_0 = (m + \hat{\theta}) \cdot \Delta f = (m + \hat{\theta}) \cdot \frac{f_s}{N}. \quad (3.5.10)$$

In Allgemeinen kann man ebenfalls mit  $\hat{\theta}$  die Werte von  $A_0$  und  $\varphi_0$  korrigieren. Für die Rechteck-Fensterfunktion erhält man [54]:

$$\hat{A}_0 = \frac{|E(m)|}{N} \cdot \frac{\pi \hat{\theta}}{\sin(\pi \hat{\theta})} \quad (3.5.11)$$

$$\text{und } \hat{\varphi}_0 = \angle E(m) - \pi \hat{\theta}. \quad (3.5.12)$$

Ebenfalls ergeben sich für die Hanning-Fensterfunktion die korrigierten Parameter:

$$\hat{A}_0 = \frac{|E(m)|}{N} \cdot \frac{2\pi \hat{\theta}(1 - \hat{\theta}^2)}{\sin(\pi \hat{\theta})} \quad (3.5.13)$$

$$\text{und } \hat{\varphi}_0 = \angle E(m) - \pi \hat{\theta}. \quad (3.5.14)$$

### 3.5.2 Schätzung der Größen der im Rauschen versteckten Sinussignale

Zuerst wird ein vom Rauschen gestörtes, zeitlich begrenztes komplexes Signal mit einer Einzelfrequenz in Betrachtung gezogen. Wie in Abschnitt 3.1.5 erwähnt, macht die Maximum-Likelihood-Schätzung der zu schätzenden Größen des komplexen Signals das Periodogramm  $P(e^{j\Omega}) = |X(e^{j\Omega})|^2 / N$  zum Maximum. Wenn der Realteil und der Imaginärteil des Rauschens Gaußverteilt, mittelwertfrei und **i. i. d.** sind, sind die der Realteil und der Imaginärteil der diskreten Fourier-Transformierten von  $x[n]$  ebenfalls **i. i. d.** und gaußverteilt (siehe Abschnitt 4.4). Somit lassen sich die Größen des komplexen Signals mit der IpDFT schätzen. **Bild 3.13** zeigt die Ergebnisse einer Simulation der IpDFT und der DFT. Dabei wird das mit einem gaußverteilten, mittelwertfreien, komplexen Rauschen verrauschte Einzelfrequenz-Signal untersucht:



$$x(t) = A \cdot e^{j(2\pi ft + \phi_0)} + \nu(t) \quad (3.5.15)$$

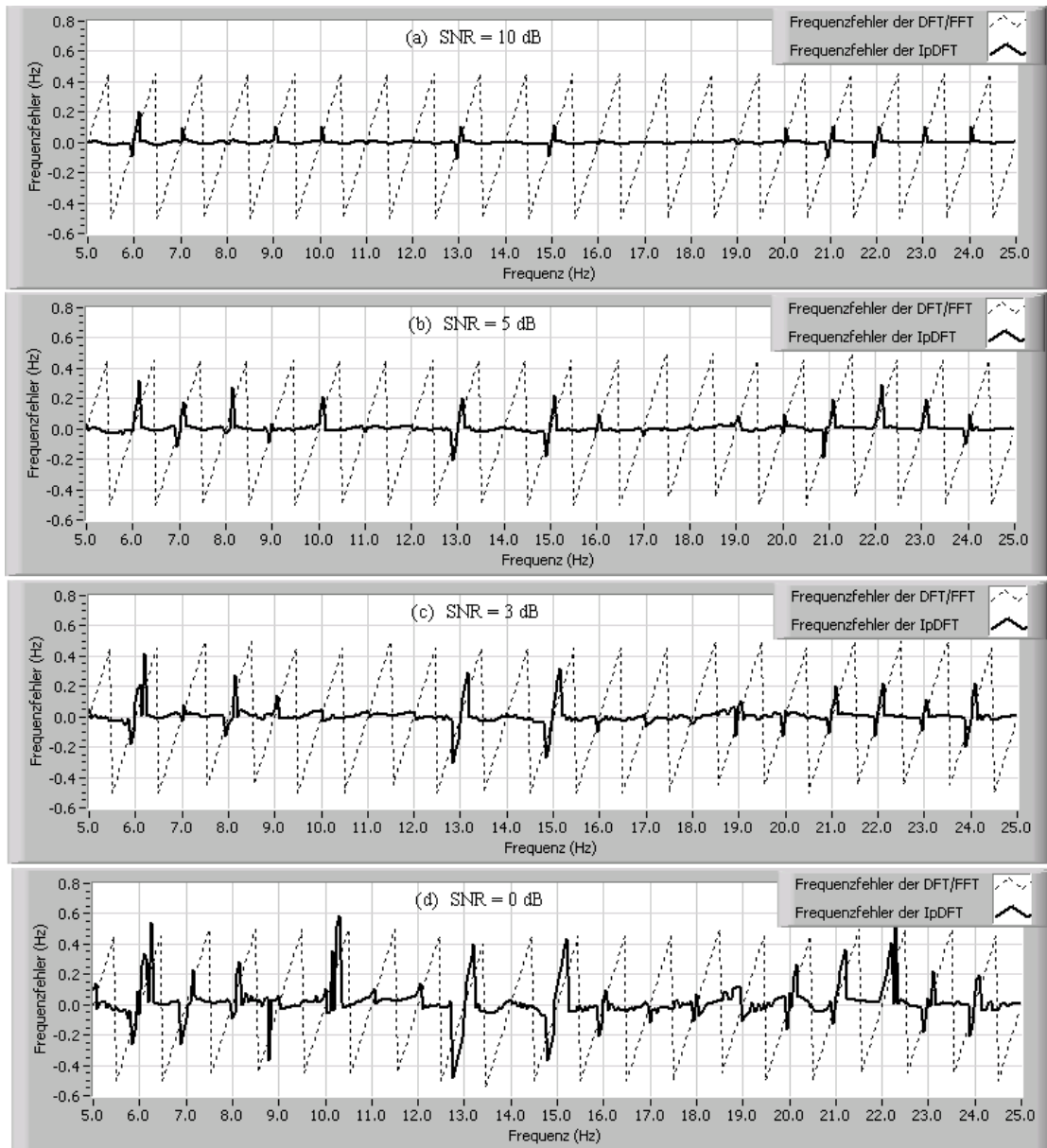
Das SNR ist mit  $20 \log_{10}(A/\sigma)$  gegeben, wobei  $\sigma$  die Standardabweichung von  $\nu(t)$  ist. Bei den Simulationen wird die Frequenz  $f$  mit der Schrittweite 0,01 Hz zwischen 5 Hz – 25 Hz verändert.

Für jede Frequenz  $f$  wird das verrauschte Signal mit der Abtastfrequenz  $f_s = 512$  Hz abgetastet und mit der Rechteck-Fensterfunktion der Länge  $N = 512$  abgegrenzt. Somit erhält man eine diskrete Folge mit 512 Punkten. Wird sie der DFT/FFT unterworfen, erhält man die Frequenzauflösung  $\Delta f = 1$  Hz. Die Stützstellen der Frequenz der DFT/FFT sind:  $f = k \cdot \Delta f$ ,  $k = -256, -255, \dots, -1, 0, 1, \dots, 255$ .

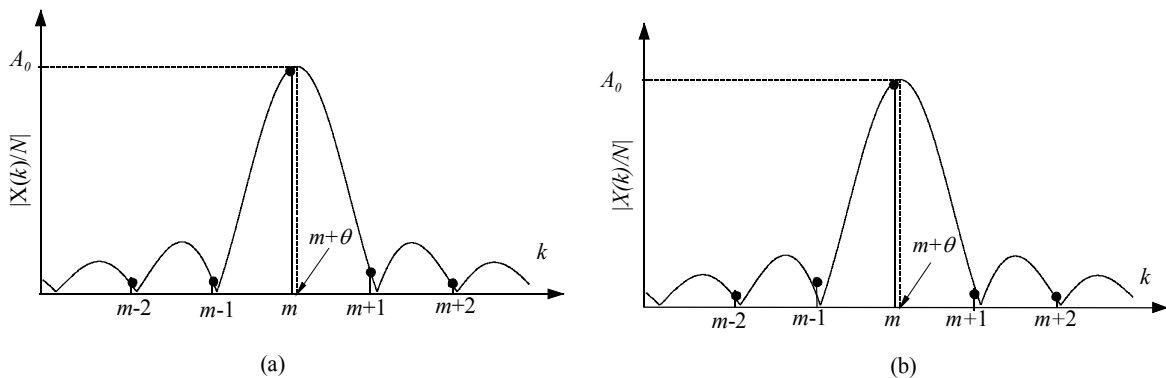
Durch das Spektrum der DFT/FFT lassen sich die Größen des verrauschten Signals schätzen. Liegt die zu schätzende Frequenz  $f$  auf einer dieser Stützstellen, ergibt sich der Frequenzfehler ( $f - \hat{f}$ ) zu null, was synchroner Abtastung entspricht. In diesem Fall sind die Amplitudenfehler und Phasenfehler ebenfalls gering. Sie sind doch von dem SNR abhängig, und ihre Untergrenze lässt sich durch die CR-Schranke bestimmen.

Wenn die Bedingung synchroner Abtastung verletzt wird, haben die geschätzten Größen ( $\hat{f}$ ,  $\hat{\phi}_0$  und  $\hat{A}$ ) Fehler. Der maximale absolute Frequenzfehler beträgt  $0,5\Delta f$ , wenn die zu untersuchende Frequenz in der Mitte zwischen zwei Frequenz-Stützstellen liegt, was auch für die Schätzung der Amplitude und Phase am ungünstigsten ist [5].

Die Fehler der durch die DFT/FFT geschätzten Größen lassen sich mit der IpDFT korrigieren. Im **Bild 3.13** werden die Frequenzfehler bei der DFT und IpDFT zusammen dargestellt. In den meisten Fällen ergeben sich bessere Ergebnisse mit dem IpDFT-Verfahren als mit der DFT/FFT, besonderes bei hohem SNR. Allerdings gibt es einen Bereich in der Nähe der Frequenz-Stützstellen, innerhalb dessen der absolute Fehler der ermittelten Frequenz erheblich ist, auch wenn das SNR hoch ist (**Bild 3.13a**). Dieser Bereich entspricht dem Fall  $|\theta| \approx 0$  im **Bild 3.12**. Mit niedrigem SNR vergrößert sich dieser Bereich und die Frequenzfehler (**Bild 3.13 b, c, d**). Es kann gezeigt werden, dass in diesem Bereich die Abschätzung von  $\alpha$  nach Gl. (3.5.8) mit hoher Wahrscheinlichkeit falsch ist. Da die Werte von  $|X[m-1]|$  und  $|X[m+1]|$  in diesem Fall relativ klein sind, können sie vom Rauschen stark beeinflusst werden, sodass das Ungleichheitszeichen in Gl. (3.5.8) umgekehrt werden kann (**Bild 3.14**). Eine statistische Analyse für die Schätzung von  $\alpha$  findet sich in [61]. Weitere Entwicklungen der IpDFT können in [7; 8] gefunden werden.



**Bild 3.13** Fehler der Frequenz ( $f - \hat{f}$ ) mit der DFT/FFT und dem IpDFT-Verfahren



**Bild 3.14** Veranschaulichung der DFT der Exponentialfolge für den Fall  $|\theta| \approx 0$ . (a) ohne Rauschen:  $|X[m-1]| < |X[m+1]|$ ; (b) Das Rauschen kann zu  $|X[m-1]| > |X[m+1]|$  führen.

### 3.6 Phasen-Differenz-Verfahren (PDV)

#### 3.6.1 Beschreibung des PDV [17; 69]

Ausgangspunkt sei ein Einzelfrequenz-Signal:  $e(t) = A_0 \cdot e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_0)}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . (3.6.1)

Das Signal wird mit der Abtastfrequenz  $f_s$  digitalisiert. Beim Einsatz einer Fensterfunktion  $w[n]$  ( $n = 1, 2, \dots, N-1$ ) erhält man die diskrete Folge:

$$e[n] = A_0 \cdot w[n] \cdot e^{j(\Omega_0 n + \varphi_0)}, \quad 0 \leq n < N-1, \quad \text{mit } \Omega_0 = 2\pi f_0 \cdot \Delta T = 2\pi f_0 / f_s. \quad (3.6.2)$$

Hierbei gilt:  $f_0 = (m + \theta) \cdot f_s / N = (m + \theta) \cdot \Delta f$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m < N/2$ ,  $|\theta| \leq 0,5$ . (3.6.3)

Bei  $\theta \neq 0$  wird die Bedingung für eine synchrone Abtastung verletzt. Die DTFT der Folge  $e[n]$  lässt sich ausdrücken als:

$$E(e^{j\Omega}) = A_0 \cdot e^{j\varphi_0} \cdot W(e^{j(\Omega - \Omega_0)}). \quad (3.6.4)$$

$W(e^{j\Omega})$  ist die DTFT der Fensterfunktion und lässt sich für eine bestimmte Fensterfunktion ausdrücken als:

$$W(e^{j\Omega}) = e^{-j(N-1)\Omega/2} \cdot \bar{W}(\Omega), \quad (3.6.5)$$

wobei  $\bar{W}(\Omega)$  eine reelle gerade Funktion darstellt. Für die Rechteck-Fensterfunktion und Hanning-Fensterfunktion gilt jeweils [31]:

$$\bar{W}_R(\Omega) = \frac{\sin(\frac{N\Omega}{2})}{\sin \frac{\Omega}{2}}, \quad (3.6.6)$$

$$\bar{W}_H(\Omega) = \frac{1}{2} \left\{ \bar{W}_R(\Omega) + \frac{1}{2} [\bar{W}_R(\Omega + \frac{2\pi}{N-1}) + \bar{W}_R(\Omega - \frac{2\pi}{N-1})] \right\}. \quad (3.6.7)$$

Mit Gl. (3.6.5) kann man die Gl. (3.6.4) umformen:

$$E(e^{j\Omega}) = A_0 \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{-j(\Omega - \Omega_0)(N-1)/2} \cdot \bar{W}(\Omega - \Omega_0). \quad (3.6.8)$$

In Hinblick auf den Zusammenhang zwischen der DFT und der DTFT (3.1.17) erhält man die DFT der Folge  $e[n]$ :

$$\begin{aligned} E[k] &= E(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega = \frac{2\pi k}{N}} = A_0 \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{-j(\frac{2\pi k}{N} - \Omega_0)(N-1)/2} \cdot \bar{W}(\frac{2\pi k}{N} - \Omega_0) \\ &= A_0 \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{-j\pi(k - N \cdot \frac{f_0}{f_s}) \frac{N-1}{N}} \cdot \bar{W}(\frac{2\pi}{N}(k - N \cdot \frac{f_0}{f_s})), \quad (k = 0, 1, \dots, N-1). \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

Mit der Berücksichtigung der Gl. (3.6.3) ist festzustellen, dass der Betrag  $|E(k)|$  in der Nähe von  $k = m$  (entsprechend dem Frequenzpunkt der DFT:  $m \cdot (f_s / N)$ ) das Maximum erreicht.

Hierbei gilt:

$$E[m] = A_0 \cdot \bar{W}(\frac{2\pi}{N} \cdot \theta) \cdot e^{j(\pi \theta \frac{N-1}{N} + \varphi_0)} \quad (3.6.10)$$

Daraus ergibt sich:

$$|E[m]| = A_0 \cdot \bar{W}(\frac{2\pi}{N} \cdot \theta), \quad (3.6.11)$$

$$\angle E[m] = \frac{(N-1)\pi\theta}{N} + \varphi_0. \quad (3.6.12)$$

Zur Realisierung des PDV wird das in (3.6.1) dargestellte Signal abgetastet. Zuerst werden  $2N$  Abtastwerte gewonnen. Die diskrete Folge wird in zwei nicht überlappende Unterfolgen segmentiert. Dadurch erhält man beim Einsatz einer Fensterfunktion  $w[n]$  die zwei Unterfolgen:

$$\begin{aligned} e_1[n] &= A_0 \cdot w[n] \cdot e^{j(\Omega_0 n + \varphi_0)} \\ e_2[n] &= A_0 \cdot w[n] \cdot e^{j(\Omega_0 n + \varphi_0 + N \cdot \Omega_0)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1). \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

Gemäß den Gln (3.6.11) und (3.6.12) erhält man hinsichtlich Gl. (3.6.2) und (3.6.3) die diskreten Fourier-Transformierten der beiden Folgen:

$$|E_1[m]| = A_0 \cdot \overline{W}\left(\frac{2\pi}{N} \cdot \theta\right), \quad \angle E_1[m] = \frac{(N-1)\pi \theta}{N} + \varphi_0, \quad (3.6.14)$$

$$|E_2[m]| = A_0 \cdot \overline{W}\left(\frac{2\pi}{N} \cdot \theta\right), \quad \angle E_2[m] = \frac{(N-1)\pi \theta}{N} + \varphi_0 + 2\pi m + 2\pi \theta. \quad (3.6.15)$$

Dabei kann man wegen  $m \in \mathbb{N}$  den Term  $2\pi m$  vernachlässigen. Folglich erhält man

$$\theta = \frac{\angle E_2[m] - \angle E_1[m]}{2\pi} = \frac{\Delta \Phi}{2\pi}. \quad (3.6.16)$$

Da der Wertebereich von  $\angle E_1[m]$  und  $\angle E_2[m]$  in  $(-\pi, \pi)$  ist, kann  $\Delta \Phi$  im Bereich  $(-2\pi, 2\pi)$  liegen. Unter Berücksichtigung der Bedingung (3.6.3) soll  $\Delta \Phi$  im Bereich  $(-\pi, \pi)$  sein. Deshalb ist eine Wrap-Operation durchzuführen [47]:

$$\Delta \Phi = \begin{cases} \Delta \Phi & \text{falls } |\Delta \Phi| \leq \pi \\ \Delta \Phi + 2\pi & \text{falls } \Delta \Phi < -\pi \\ \Delta \Phi - 2\pi & \text{falls } \Delta \Phi > \pi \end{cases}. \quad (3.6.17)$$

Somit ergibt sich:

$$\theta = \begin{cases} \theta & \text{falls } |\theta| \leq 0,5 \\ \theta + 1 & \text{falls } \theta < -0,5 \\ \theta - 1 & \text{falls } \theta > 0,5 \end{cases} \quad (3.6.18)$$

Folglich lassen sich die Parameter dieses Einzelfrequenz-Signals berechnen:

$$f_0 = (m + \theta) \cdot \frac{f_s}{N}, \quad A_0 = \frac{|E_1[m]|}{\overline{W}\left(\frac{2\pi}{N} \theta\right)}, \quad \varphi_0 = \angle E_1[m] - \frac{N-1}{N} \cdot \pi \theta. \quad (3.6.19)$$

Anhand (3.6.6) und (3.6.7) kann der Ausdruck  $\overline{W}\left(\frac{2\pi}{N} \theta\right)$  für kleine  $\theta$  näherungsweise errechnet werden:

$$\overline{W}_R\left(\frac{2\pi}{N} \theta\right) \approx N \cdot \frac{\sin \pi \theta}{\pi \theta} \quad \text{für die Rechteck-Fensterfunktion,} \quad (3.6.20)$$

$$\overline{W}_H\left(\frac{2\pi}{N} \theta\right) \approx N \cdot \frac{\sin \pi \theta}{\pi \theta} \cdot \frac{1}{2(1-\theta^2)} \quad \text{für die Hanning-Fensterfunktion.} \quad (3.6.21)$$

Besteht das zu untersuchende Signal aus einem Einzelfrequenz-Signal und einem additiv superponierten Rauschsignal, kann man gleicherweise zwei nicht überlappende Folgen erhalten:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1[n] &= A_0 \cdot w[n] \cdot e^{j(\Omega_0 n + \varphi_0)} + w[n] \cdot \nu_1[n] \\ \tilde{e}_2[n] &= A_0 \cdot w[n] \cdot e^{j(\Omega_0 n + \varphi_0 + N \cdot \Omega_0)} + w[n] \cdot \nu_2[n] \end{aligned} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1), \quad (3.6.22)$$

wobei  $\nu_1$  und  $\nu_2$  zwei Rauschsignale sind, die als statistisch unabhängig betrachtet werden können. Somit erhält man die DFT der beiden Folgen  $\tilde{E}_1[k]$  und  $\tilde{E}_2[k]$  sowie den Schätzwert von  $\theta$ :

$$\hat{\theta} = \frac{\angle \tilde{E}_2(m) - \angle \tilde{E}_1(m)}{2\pi} = \frac{\Delta \tilde{\Phi}}{2\pi}, \quad (3.6.23)$$

wobei  $\angle \tilde{E}_1[m]$  und  $\angle \tilde{E}_2[m]$  jeweils die Phase der DFT bei  $\max |\tilde{E}_1[m]|$  und  $\max |\tilde{E}_2[m]|$  sind. Folglich lassen sich die Parameter dieses verrauschten Einzelfrequenz-Signals schätzen:

$$\hat{f}_0 = (m + \hat{\theta}) \cdot \frac{f_s}{N}, \quad \hat{A}_0 = \frac{|\tilde{E}_1[m]|}{W(\frac{2\pi}{N} \hat{\theta})}, \quad \hat{\phi}_0 = \angle \tilde{E}_1(m) - \frac{N-1}{N} \cdot \pi \hat{\theta}. \quad (3.6.24)$$

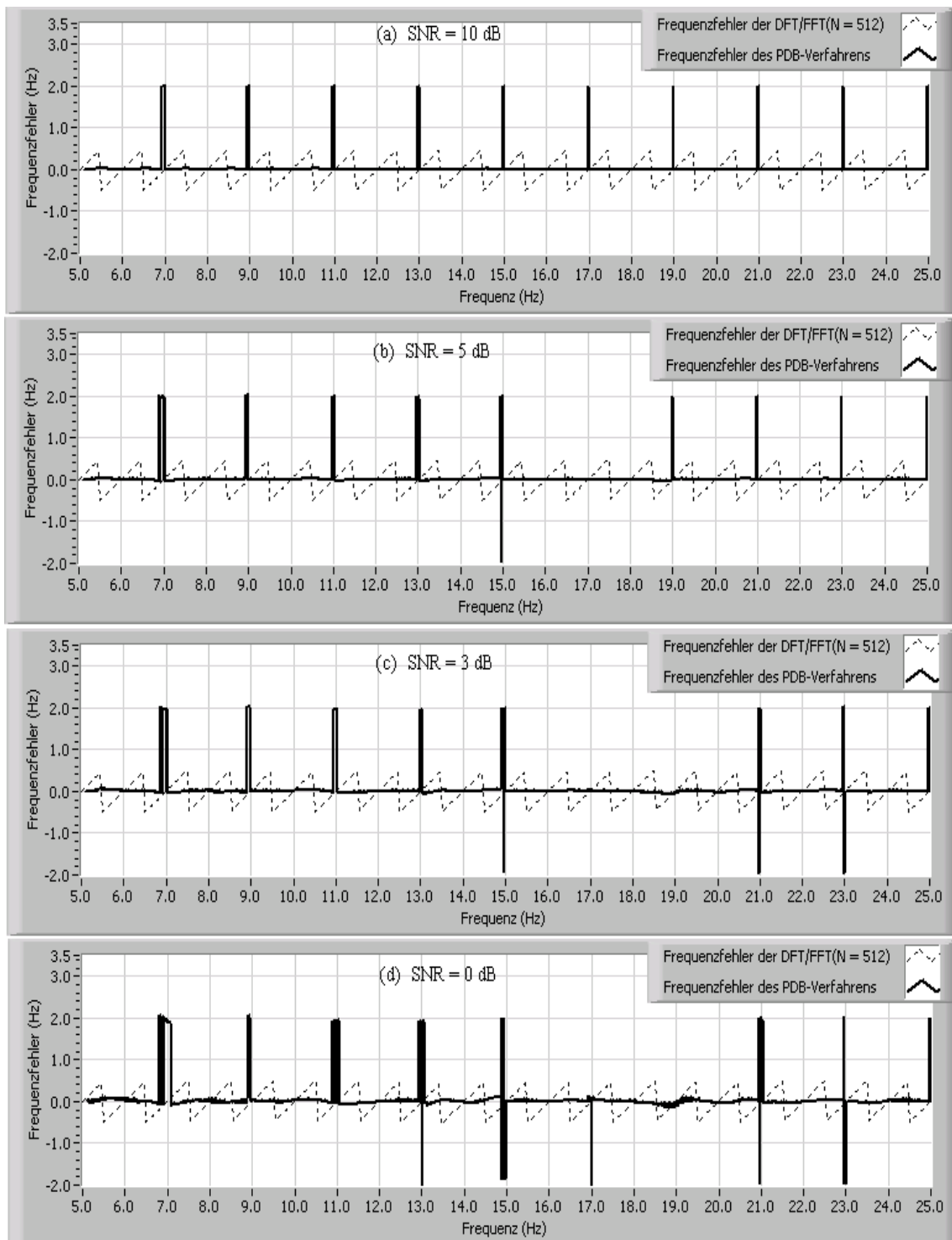
**Bild 3.15** zeigt die Ergebnisse einer Simulation mit dem PDV. Dabei wird das mit einem gaußverteilten, mittelwertfreien, komplexen Rauschen verrauschte Einzelfrequenz-Signal untersucht:

$$x(t) = A \cdot e^{j2\pi f t} + \nu(t) \quad (3.6.25)$$

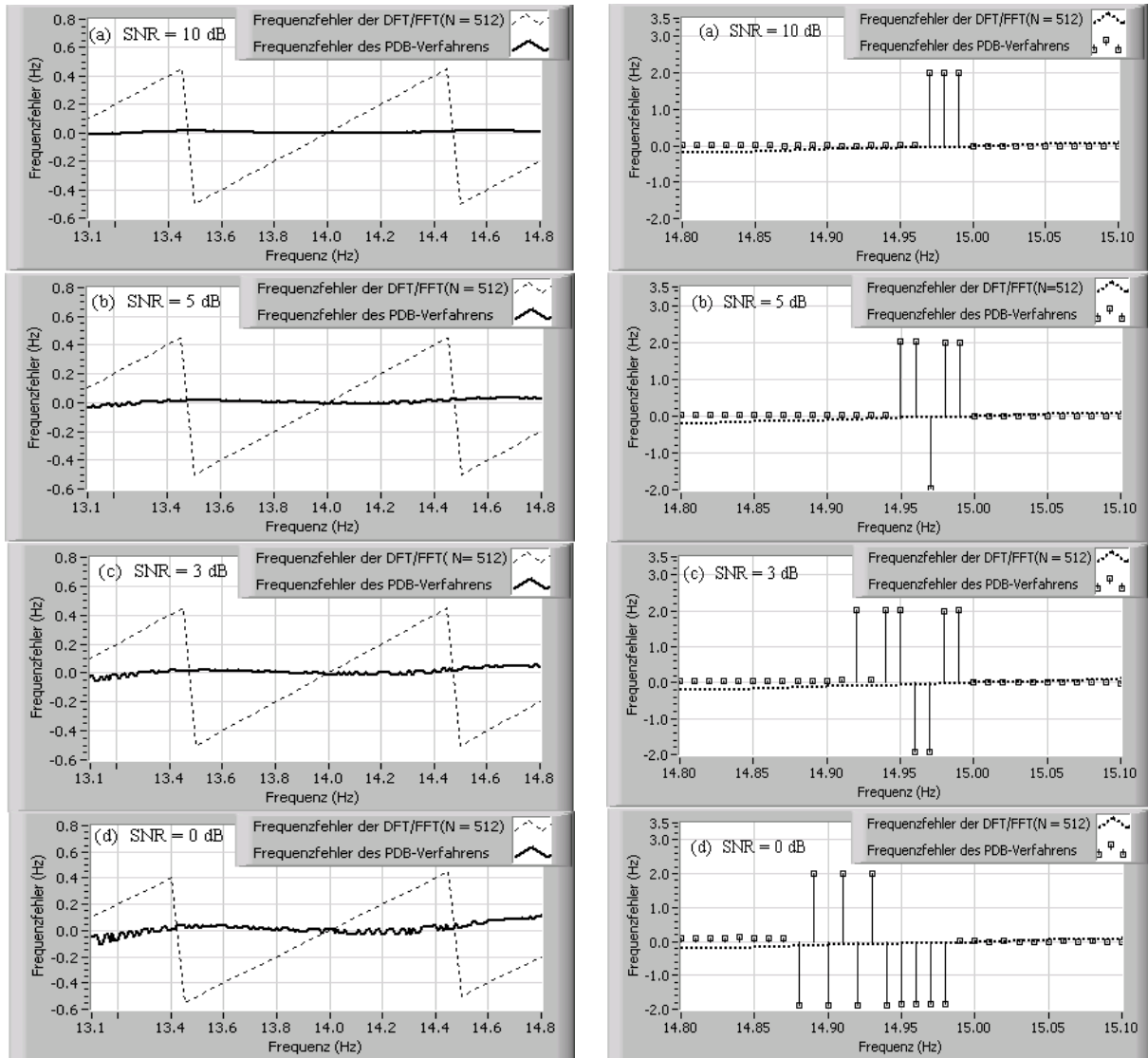
Das SNR ist mit  $20 \log_{10}(A/\sigma)$  gegeben, wobei  $\sigma$  die Standardabweichung von  $\nu(t)$  ist. Wie bei den Simulationen für die IpDFT, wird die Frequenz  $f$  mit der Schrittweite 0,01 Hz zwischen 5 Hz – 25 Hz verändert. Für jede Frequenz wird das Signal mit der Abtastfrequenz  $f_s = 512$  Hz abgetastet. Durch zeitlich Begrenzung erhält man eine diskrete Folge der Länge von  $N = 512$  Punkten. Die Folge wird in zwei nicht überlappende Unterfolgen der Länge von 256 Punkten segmentiert. Der DFT/FFT werden die beiden Unterfolgen dann unterworfen. Die Frequenzauflösung beträgt in diesem Fall  $\Delta f = 2$  Hz, und die Frequenz-Stützstellen liegen auf  $f_k = -256, -254, \dots, -2, 0, 2, 4, 8, \dots, 254$  Hz. In **Bild 3.15** werden in der  $X$ -Achse die zu ermittelnden Frequenzen dargestellt, während die Differenz zwischen dem Sollwert und dem geschätzten Wert der Frequenz ( $f - \hat{f}$ ) in der  $Y$ -Achse gezeigt wird. Darin werden die Frequenzfehler der DFT/FFT der originalen Länge von 512 Punkten dargestellt. Es ist erkennbar, dass die Fehler der geschätzten Frequenz in den meisten Frequenzbereichen gering sind, auch bei niedrigem SNR. In diesen Bereichen ergibt sich mit dem PDV eine deutlich bessere Schätzung der Frequenz als mit der DFT/FFT. Zwar vergrößern sich die Frequenzfehler bei niedrigem SNR, aber nicht so deutlich wie beim IpDFT-Verfahren. Ein Bereich der geringen Fehler wird in **Bild 3.16** links gezeigt.

Allerdings sind die Frequenzfehler erheblich größer, wenn sich die zu ermittelnde Frequenz in bestimmten Bereichen in **Bild 3.15** befindet. Da die Unterfolgen hierbei die Länge von 256 Punkten besitzen, beträgt die Frequenzauflösung der DFT/FFT der Unterfolgen  $\Delta f = 2$  Hz. Dementsprechend liegen die Bereiche der größeren Fehler in der Nähe der Mitte zweier Frequenz-Stützstellen der DFT/FFT von 256 Punkten, entsprechend dem Fall von  $|\theta| \approx 0,5$  in **Bild 3.12**. Beim Anstieg des Rauschanteils im Signal vergrößern sich zwar die Bereiche der

größeren Fehler, aber nicht so deutlich wie beim IpDFT-Verfahren. **Bild 3.16** rechts zeigt einen der Bereiche mit größerem Frequenzfehler. In solchen Bereichen betragen die absoluten Frequenzfehler etwa 2 Hz, entsprechend der Frequenzauflösung  $\Delta f$  der DFT/FFT der Unterfolgen von 256 Punkten, aber das Vorzeichen ändert sich zufällig zwischen plus und minus. Die Frequenzfehler in diesen Bereichen ändern sich schlagartig, sodass das PDV ohne Korrektur in der Praxis kaum nutzbar ist.



**Bild 3.15** Fehler der Frequenz ( $f - \hat{f}$ ) mit der DFT/FFT und dem PDV



**Bild 3.16** Veranschaulichung eines Bereichs der geringeren Frequenzfehler (links, im Bereich von 13,1 Hz bis 14,8 Hz) und eines Bereichs der größeren Frequenzfehler (rechts, im Bereich von 14,8 bis 15,1 Hz), ausschnitt aus **Bild 3.15**.

### 3.6.2 Analyse der Fehler beim PDV

Für die Berechnung des Phasenwinkels einer komplexen Variablen  $z$  gilt im Allgemeinen:

$$\angle z = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{z\}}{\operatorname{Re}\{z\}} + \begin{cases} 0 & \text{falls } \operatorname{Re}\{z\} > 0 \\ \pi & \text{falls } \operatorname{Re}\{z\} < 0, \operatorname{Im}\{z\} \geq 0, \\ -\pi & \text{falls } \operatorname{Re}\{z\} < 0, \operatorname{Im}\{z\} < 0 \end{cases} \quad (3.6.26)$$

mit  $-\frac{\pi}{2} < \arctan \frac{\operatorname{Im}\{z\}}{\operatorname{Re}\{z\}} < \frac{\pi}{2}$  und  $-\pi < \angle z \leq \pi$ . Daran ist zu ersehen, dass es eine Unstetigkeitsstelle bei  $\operatorname{Re}\{z\} < 0$  geben kann (**Bild 3.17**).

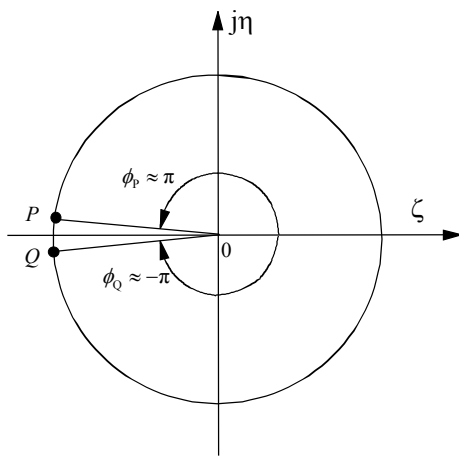
Für eine mit dem gaußschen Rauschen überlagerte komplexe Variable

$$A = A_0 + \Delta A = (a + jb) + (\xi + j\nu) \quad (3.6.27)$$

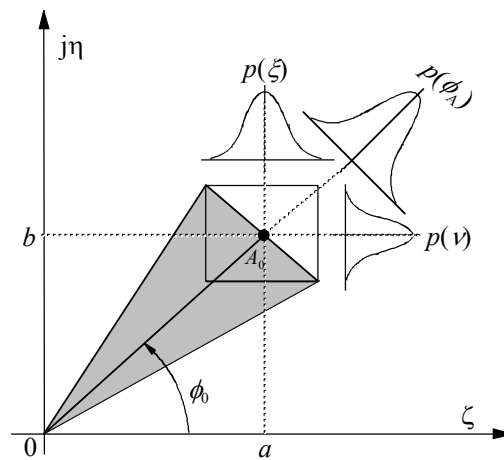
sind die Amplitude  $A_m = |A|$  und der Phasenwinkel  $\phi_A = \angle A$  ebenfalls Zufallsvariablen, wobei  $A_0$  eine komplexe Variable ist, und  $\xi$  und  $\nu$  als zwei unabhängige zufällige mittelwertfreie Variablen mit der gaußverteilung der Varianz  $\sigma^2/2$  angenommen sind. Die Verteilungsfunktion für  $\phi_A$  lässt sich nach [83] ausdrücken:

$$p(\phi_A) = \frac{A_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cos\phi_A \cdot e^{-\frac{A_0^2}{\sigma^2} \sin^2\phi_A} \quad \phi_A \in [-\pi, \pi] \quad (3.6.28)$$

Für  $(|A|/|\Delta A|) \gg 1$  kann diese Verteilungsfunktion näherungsweise mit einer gaußschen Normalverteilung beschrieben werden, wie in **Bild 3.18** gezeigt.



**Bild 3.17** Unstetigkeitsstelle bei der Berechnung des Phasenwinkels einer komplexen Variablen, wenn der Punkt  $P$  entlang des Kreises kontinuierlich nach  $Q$  verschoben wird.



**Bild 3.18** Veranschaulichung der Verteilungsfunktion  $p(\phi_A)$  des Phasenwinkels  $\phi_A$  einer vom Gaußschen Rauschen überlagerten komplexen Variablen.  $p(\xi)$  und  $p(\nu)$  sind jeweils die Verteilungsfunktionen von  $\xi$  und  $\nu$ . Der gekennzeichnete Bereich stellt die  $\pm 3\sigma_{\phi_A}$ -Verteilung des Phasenwinkels  $\phi_A$  dar. Das Rechteck zeigt den Verteilungsbereich der komplexen Variablen  $A$ .

Wie im letzten Abschnitt gezeigt, tritt ein großer Frequenzfehler beim PDV auf, wenn eine zu schätzende Frequenz auf der Mitte zweier Frequenz-Stützstellen der DFT der Unterfolgen, entsprechend  $|\theta| \approx 0,5$  liegt. Dies lässt sich auf die oben genannte Unstetigkeit bei der Berechnung von Phasenwinkeln komplexer Größen, die Einflüsse stochastischer Störungen auf die Koeffizienten der DFT der Unterfolgen in Gl. (3.6.22) und die Wrap-Operation in Gl. (3.6.17) zurückführen.

Die DFT von  $\tilde{e}_1[n]$  und  $\tilde{e}_2[n]$  in Gl. (3.6.22) ist die lineare Überlagerung der DFT des Einzel-Frequenz-Signals  $e[n]$  in Gl. (3.6.2) und des Rauschsignals. Der Realteil und Imaginärteil der Koeffizienten der DFT/FFT des Rauschsignals sind gaußverteilt und mittelwertfrei, wenn der Realteil und Imaginärteil des Rauschsignals gaußverteilt und mittelwertfrei sind (siehe Abschnitt 4.4).  $\tilde{E}_1[m]$  und  $\tilde{E}_2[m]$  in Gl. (3.6.23) sind daher komplexe zufällige Größen der



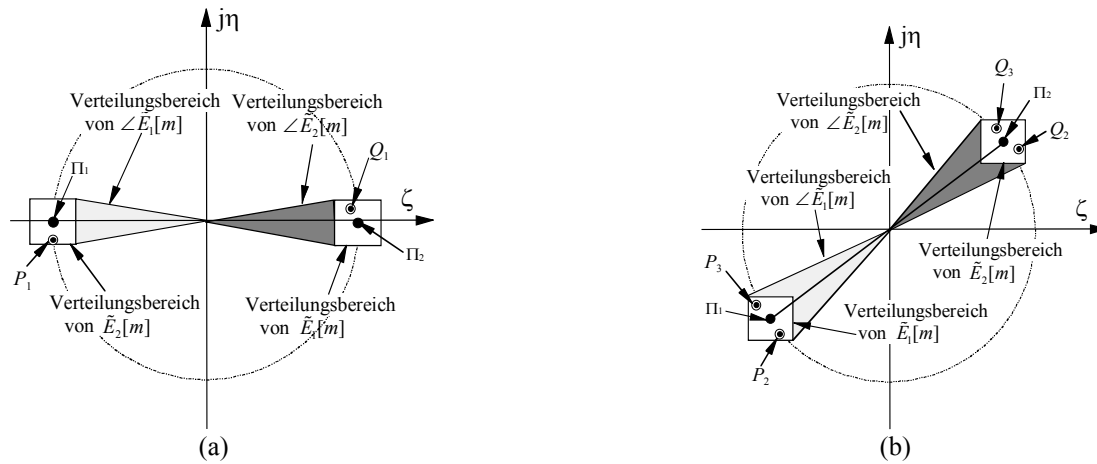
Gaußverteilung ( $|\tilde{E}_1[k]|$  und  $|\tilde{E}_2[k]|$  erreichen ihr Maximum bei  $k = m$ ). Der Mittelwert von  $\tilde{E}_1[m]$  und  $\tilde{E}_2[m]$  lässt sich jeweils ausdrücken:

$$\Pi_1 = \mu\{\tilde{E}_1[m]\} = A_0 \cdot \overline{W}\left(\frac{2\pi}{N} \cdot \theta\right) \cdot e^{j(\pi\theta\frac{N-1}{N} + \varphi_0)} \quad (3.6.29)$$

$$\Pi_2 = \mu\{\tilde{E}_2[m]\} = A_0 \cdot \overline{W}\left(\frac{2\pi}{N} \cdot \theta\right) \cdot e^{j(\pi\theta\frac{N-1}{N} + \varphi_0 + 2\pi\theta)} \quad (3.6.30)$$

Zur Untersuchung des Schätzwertes von  $\tilde{\theta}$  in Gl.(3.7.23) im Fall  $|\theta| \approx 0,5$  ist folgende Fallunterscheidung sinnvoll:

1.  $\varphi_0 = 0$ ;  $\theta \approx 0,5$ . In diesem Fall sollen  $\angle\tilde{E}_1[m]$  und  $\angle\tilde{E}_2[m]$  jeweils  $\pi$  und  $2\pi$  sein. Wegen der individuellen Berechnungen von  $\angle\tilde{E}_1[m]$  und  $\angle\tilde{E}_2[m]$  nach Gl. (3.6.26) erhält man  $\angle\tilde{E}_1[m] = \pi$  und  $\angle\tilde{E}_2[m] = 0$ . Somit ergibt sich nach Gl. (3.6.23)  $\tilde{\theta} = -0,5$ . Unter der Berücksichtigung der Gaußschen Verteilung von  $\tilde{E}_1[m]$  und  $\tilde{E}_2[m]$  können sie sich in bestimmten Bereichen zufällig verteilen. **Bild 3.19a** veranschaulicht die  $\pm 3\sigma$ -Verteilungsbereiche von  $\tilde{E}_1[m]$  und  $\tilde{E}_2[m]$ . Liegen  $\tilde{E}_1[m]$  und  $\tilde{E}_2[m]$  jeweils z. B. auf den Stellen  $P_1$  und  $Q_1$ , kann sich  $\tilde{\theta} \approx +0,5$  ergeben.



**Bild 3.19** Veranschaulichung der  $\pm 3\sigma$ -Verteilung von  $\tilde{E}_1(m)$  und  $\tilde{E}_2(m)$

2.  $\varphi_0 \neq 0$ ;  $\theta \approx 0,5$ . **Bild 3.19b** stellt die Verteilung von  $\tilde{E}_1[m]$  und  $\tilde{E}_2[m]$  in diesem Fall dar. Wenn sie jeweils auf den Stellen  $P_2$  und  $Q_2$  liegen, kann man mit einfacher Berechnung  $\tilde{\theta} \approx +0,5$  erhalten. Nehmen  $\tilde{E}_1[m]$  und  $\tilde{E}_2[m]$  jeweils die Werte der Punkte  $P_3$  und  $Q_3$  an, ergibt sich  $\Delta\Phi = \angle E_2[m] - \angle E_1[m] > \pi$ . Wegen der Wrap-Operation in Gl. (3.6.17) erhält man dagegen  $\tilde{\theta} \approx -0,5$ .

Für  $\theta \approx -0,5$  können sich ähnliche Ergebnisse ergeben. Aus Gl. (3.6.24) ist ersichtlich, dass Fehler bei der Schätzung des Phasenwinkels wegen des falschen Vorzeichens von  $\tilde{\theta}$  auftreten können. Dagegen wird die geschätzte Amplitude  $\tilde{A}_0$  durch das Vorzeichen von  $\tilde{\theta}$  nicht beeinflusst, da  $\overline{W}\left(\frac{2\pi}{N}\theta\right)$  eine gerade Funktion ist.

Aus den Simulationen und den obigen Ausführungen kann davon ausgegangen werden, dass im Bereich von  $|\theta| \approx 0,5$  das Vorzeichen der mit PDV geschätzten Größe  $\tilde{\theta}$  mit hoher Wahrscheinlichkeit falsch ist, sodass größere Frequenzfehler bei der Schätzung entstehen. Die geschätzte Frequenz mit großem Fehler wird in der Signalverarbeitung als Ausreißer bezeichnet. Die absoluten Frequenzfehler betragen einen Abstand zwischen zwei Frequenzpunkten der DFT der Unterfolgen in Gl. (3.6.22). Aufgrund seiner großen Frequenzfehler ist das PDV in der Praxis kaum nutzbar.

### 3.7 Ermittlung der Frequenzen und Amplituden von verrauschten periodischen Signalen durch die Spektralschätzung

Verrauschte periodische Signale lassen sich als zeitliche stochastische Prozesse betrachten [31]. Durch die Spektralanalyse der Prozesse kann man theoretisch die Größen dieser Signale bestimmen.

Bei stochastischen Prozessen stellen die Werte  $x[n]$  Probenwerte oder Repräsentanten von Zufallsvariablen dar. Die Menge  $\{x[n]\}$  ist dann eine Musterfunktion eines Zufallsprozesses. Zur Beschreibung der Eigenschaften von Zufallsvariablen dienen statistische Kenngrößen, wie z.B. der Mittelwert und die Varianz. Diese statistischen Kenngrößen können mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion dieser Zufallsvariablen gewonnen werden, indem man mit deren Hilfe Erwartungswerte berechnet. Für stochastische Prozesse lassen sich ebenfalls Kenngrößen angeben. Dazu gehört die Autokorrelationsfunktion, die mit der Definition

$$\Phi_{xx}[k] = \mathcal{E}\{x[n] \cdot x[n+k]\} \quad (3.7.1)$$

als Erwartungswert gegeben ist [31]. In der Praxis ist es schwierig, das Mittel über alle Musterfunktionen, das sogenannte Scharmittel zu bilden, da in der Regel nicht alle Musterfunktionen bekannt sind. Bei stationären Prozessen geht man deshalb von der Hypothese der Ergodizität aus, dass jede beliebige messbare Musterfunktion dieselben statistischen Eigenschaften wie alle übrigen besitzt [2]. Dann kann man das Scharmittel durch das Zeitmittel ersetzen und erhält für die Autokorrelationsfunktion des Prozesses

$$\Phi_{xx}[k] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot x[n+k] \quad (3.7.2)$$

Mit Hilfe der zeitdiskreten Fourier-Transformation lässt sich die Autokorrelationsfunktion in den Frequenzbereich transformieren. Damit ist das Autoleistungsdichtespektrum (ALDS) definiert [31]:

$$S_{xx}(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}[k] \cdot e^{-j\Omega k} \quad (3.7.3)$$

$$\Phi_{xx}[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(e^{j\Omega}) \cdot e^{j\Omega k} d\Omega. \quad (3.7.4)$$

Die Aussage, dass die Leistungsdichte und die Autokorrelationsfunktion über die Fourier-Transformation miteinander zusammenhängen, bezeichnet man als Wiener-Khintchine Theorem [48]. Durch die Definition der Leistungsdichte ergibt sich die Möglichkeit, die Gesamtleistung eines Prozesses entweder im Zeitbereich über die Autokorrelationsfunktion

$$\Phi[0] = \mathcal{E} \{ |x[n]|^2 \} \quad (3.7.5)$$

oder im Spektralbereich mit der Beziehung

$$\Phi_{xx}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(e^{j\Omega}) d\Omega = \mathcal{E} \{ |x[n]|^2 \} \quad (3.7.6)$$

zu berechnen, was als das Parsevalsche Theorem bezeichnet wird. Dies bedeutet ebenfalls, dass die Fläche unter der Leistungsdichte-Kurve eines stochastischen Signals proportional zu der durchschnittlichen Leistung des Signals ist.

Für ergodische Signale lässt sich nach [48] die gleichwertige Definition des Autoleistungsdichtespektrums ausdrücken als:

$$S_{xx}(e^{j\Omega}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left\{ \frac{1}{N} |X(e^{j\Omega})|^2 \right\}, \quad (3.7.7)$$

wobei  $X(e^{j\Omega})$  die DTFT einer Musterfunktion  $x[n]$  der Länge  $N$  ist:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\Omega n} \quad (3.7.8)$$

### 3.7.1 Traditionelle Spektralschätzung

Das Leistungsdichtespektrum eines stochastischen Prozesses ist durch die Wiener-Khintchine Beziehung Gl. (3.7.3) und (3.7.4) definiert. Die Spektralschätzung wird somit eng im Zusammenhang mit der Schätzung der Autokorrelationsfunktion stehen. Die Autokorrelationsfunktion und das Leistungsdichtespektrum beziehen sich definitionsmaß auf den stochastischen Prozess. Meßtechnisch zugänglich ist stets nur eine individuell beobachtete Musterfunktion  $x[n]$ , auf die sich die Spektralschätzung abzustützen hat. Dabei ist der Erwartungswert in der ursprünglichen Definition der Autokorrelationsfunktion (Gl. (3.7.1)) durch einen zeitlichen Mittelwert (Gl. (3.7.2)) zu ersetzen, es ist also das Ergodentheorem zugrunde zu legen. Die Berechnung des zeitlichen Mittelwerts fußt notwendigerweise auf einer endlichen Datenmenge, also auf einem zeitlich begrenzten Ausschnitt aus dem Prozess.

Als Grundlage für die Schätzung des Leistungsdichtespektrums geht man von der gleichwertigen Definition des Autoleistungsdichtespektrums (Gl. (3.7.7)) aus und erhält das sogenannte Periodogramm aus einer Musterfunktion  $x[n]$  der Länge  $N$ :

$$\hat{S}_{xx}^{\text{Per}}(e^{j\Omega}) = \frac{1}{N} |X(e^{j\Omega})|^2 \quad (3.7.9)$$

Da die obige Gleichung die Form einer Fourier-Transformation über ein begrenztes Intervall hat, kann die DFT/FFT zur Berechnung der Spektralschätzung direkt herangezogen werden.

Es wurde gezeigt [31], dass das Periodogramm für endliche Länge der benutzte Musterfunktion eine nicht erwartungstreue, aber asymptotisch erwartungstreue Schätzung des Leistungsdichtespektrums ist. Die Schätzung ist nicht konsistent, d. h., die Varianz des Periodogramms verschwindet für beliebig große Länge der Musterfunktion nicht. Dies ist zu erwarten, da in Gl. (3.7.9) die gemäß Definition (Gl. (3.7.7)) verlangte Erwartungsoperation fehlt.

Zur Verringerung der Varianz des geschätzten Leistungsdichtespektrums wird üblicherweise eine Mittelung von Periodogrammen durchgeführt, die aus verschiedenen Datenblöcken gewonnen werden, was als Bartlett-Verfahren bezeichnet wird. Dabei wird die zur Schätzung verfügbare Musterfunktion  $x[n]$  der Gesamtlänge  $N$  in  $K$  einander nicht überlappende Teilfolgen von jeweils  $L$  Abtastwerten zerlegt. Daraus ergibt sich [48]:

$$\hat{S}_{xx}^B(e^{j\Omega}) = \frac{1}{K \cdot L} \sum_{i=1}^K \left| \sum_{n=0}^{L-1} x_i[n] \cdot e^{j\Omega n} \right|^2 \quad (3.7.10)$$

Durch die Zerlegung der Musterfunktion in  $K$  unkorrelierte Teilfolgen reduziert sich die Varianz der Schätzung um den Faktor  $K$  und die Schätzung lässt sich in ein konsistentes Schätzungsverfahren überführen. Durch die kürzer werdenden Datenblöcke ist hiermit allerdings eine schlechtere Frequenzauflösung verbunden.

Zur Verbesserung der Erwartungstreue werden beim Welch-Verfahren die Datenblöcke mit Fensterfolgen bewertet, damit der Leckeffekt der Rechteck-Fensterfunktion vermindert wird. Dabei wird, ebenso wie beim Bartlett-Verfahren, die Musterfunktion in  $K$  Teilfolgen von je  $L$  Abtastwerten zerlegt. Hier wird erlaubt, daß die Teilfolgen teilweise überlappen können. Die Schätzung des Leistungsdichtespektrums lässt sich ausdrücken durch:

$$\hat{S}_{xx}^W(e^{j\Omega}) = \frac{1}{K \cdot A} \sum_{i=1}^K \frac{1}{L} \cdot \left| \sum_{n=0}^{L-1} x_i[n] \cdot w[n] \cdot e^{j\Omega n} \right|^2, \quad (3.7.11)$$

wobei  $w[k]$  eine Fensterfunktion ist. Es wurde gezeigt [48], dass die Schätzung des Leistungsdichtespektrums nach Gl (3.7.11) asymptotisch erwartungstreu ist, wenn für die Normierungskonstante

$$A = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} w^2[k] \quad (3.7.12)$$

gesetzt wird. Für die Varianz seines Verfahrens gab Welch [79] eine Abschätzungsformel an, die unter der Voraussetzung unabhängiger Periodogramme gilt:

$$\text{var} \{ \hat{S}_{xx}^W(e^{j\Omega}) \} \approx \frac{1}{K} S_{xx}^2(e^{j\Omega}). \quad (3.7.13)$$

Mit steigender Anzahl von Mittelungsschritten geht die Varianz gegen null, womit sich das Welch-Verfahren als konsistentes Schätzungsverfahren erweist. Stehen die abgetasteten Werte eines stationären Signals in ausreichend langer Messzeit zur Verfügung, können das

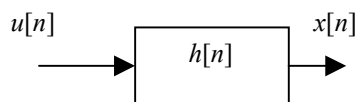
Bartlett- und Welch-Verfahren demnach eine stabile Spektralschätzung für stochastische Signale liefern.

Wenn in einem stochastischen Signal periodische Anteile enthalten sind, dann stellen die Amplituden der Frequenzen der periodischen Anteile eine gute Indikation der relativen Leistungen, auch bei höheren Störungen, dar. Die Peaks sind linear proportional zu den Leistungen der periodischen Anteile, d. h., das Amplitudenverhältnis der periodischen Anteile wird im geschätzten Spektrum beibehalten. Darauf wird in Abschnitt 3.7.3 zurückgekommen.

Alle traditionellen Verfahren der Spektralschätzung basieren auf der Annahme, dass die in der Messung erfasste Musterfunktion außerhalb des Beobachtungsintervalls verschwindet. Implizit wird stets eine Fensterung im Zeitbereich vorgenommen, was gleichbedeutend mit dem Ansatz einer Autokorrelationsfunktion endlicher Länge ist. Der geschätzte Ausschnitt aus der Autokorrelationsfunktion bildet die Grundlage der Spektralanalyse. Dies führt dazu, dass die spektrale Auflösung begrenzt ist. Die Auflösung im Frequenzbereich ist proportional zu  $f_s/N$  für das Periodogramm sowie zu  $f_s/L$  für das Bartlett- und Welch-Verfahren. Hier ist  $N$  die Länge der Musterfunktion und  $L$  ist die Länge der Teilfolge. Hinzu kommt die Frage nach der Wirksamkeit der Schätzung, also nach der Varianz. Zur zufriedenstellenden Berechnung des Leistungsdichtespektrums müssen im Allgemeinen sehr große Datenmengen herangezogen werden. In der Praxis treten jedoch Probleme dann auf, wenn mit einer ungenügenden Datenmenge gearbeitet werden muss. In diesem Fall wäre eine zuverlässige Spektralschätzung wünschenswert, die auf einem möglichst kurzen Zeitintervall basiert. Parametrische Spektralschätzverfahren bieten solche Möglichkeiten.

### 3.7.2 Spektralschätzung durch Anwendung des autoregressiven Modells

Eine vollständig andere Betrachtungsweise liegt den modellgestützten Spektralschätzverfahren zugrunde.



**Bild 3.20** Ein diskretes lineares System

Das Verhältnis zwischen dem Eingangs- und Ausgangssignal des in **Bild 3.20** dargestellten diskreten Systems lässt sich ausdrücken durch:

$$x[n] + \sum_{k=1}^P a_k \cdot x[n-k] = \sum_{r=0}^M b_r \cdot u[n-r] \quad (3.7.14)$$

Daraus ergibt sich die Übertragungsfunktion:

$$H(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}} \quad (3.7.15)$$

Für  $H(z)$  ist ein stabiles kausales System anzusetzen. Wenn für  $u(n)$  ein weißes, mittelwertfreies Rauschsignal angenommen wird, gilt [48]

$$S_{xx}(e^{j\Omega}) = \sigma^2 \cdot |H(e^{j\Omega})|^2, \quad (3.7.16)$$

wobei  $\sigma$  die Varianz des Eingangssignals ist. Dieser Ausdruck wird als Schätzgröße für das Leistungsdichtespektrum des stochastischen Signals benutzt. Sind die in der Übertragungsfunktion  $H(z)$  enthaltenen Parameter  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, P$ ) und  $b_r$  ( $r = 0, 1, 2, \dots, M$ ) bekannt, lässt sich  $S_{xx}(e^{j\Omega})$  daraus berechnen. Dabei unterscheidet man zwischen drei verschiedenen Formen von Modellen [31]:

1. Autoregressives Modell (AR-Modell): 
$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}} \quad (3.7.17)$$

2. Moving-average Modell (MA-Modell): 
$$H(z) = B(z) = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} \quad (3.7.18)$$

3. Autoregressives moving-average Modell (ARMA-Modell):

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}} \quad (3.7.19)$$

Zur Spektralschätzung wird das AR-Modell in den meisten Fällen verwendet. Erstens ist zur Bestimmung der Koeffizienten eines AR-Modells ein lineares Gleichungssystem zu lösen, während für das MA- und ARMA-Modell die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme erforderlich ist. Zweitens stützt sich das AR-Modell auf ein all-pole-System ab und deswegen existieren für das durch das AR-Modell berechnete Leistungsdichtespektrum im Gegensatz zu den traditionellen Schätzungsverfahren keine Beschränkungen bezüglich des Auflösungsvermögens im Frequenzbereich [48]. AR-Modelle eignen sich besonders dazu, scharfe Spektrallinien periodischer Signale durch Polstellen des Nennerpolynoms zu approximieren. Sie sind demnach gut zur Schätzung von Spektren mit ausgeprägten diskreten Spektrallinien geeignet.

Es wurde gezeigt [48], dass Gl. (3.7.16) eine äquivalente Darstellung hat:

$$S_{xx}^{AR}(e^{j\Omega}) = \frac{\sigma^2}{\left|1 + \sum_{p=1}^P a_p \cdot e^{-j\Omega p}\right|^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\Phi}_{xx}[k] \cdot e^{-j\Omega k}, \quad (3.7.20)$$

wobei gilt:

$$\bar{\Phi}_{xx}[k] = \begin{cases} \Phi_{xx}[k] & |k| \leq P \\ -\sum_{p=1}^P a_p \cdot \Phi_{xx}[k-p] & |k| > P \end{cases} \quad (3.7.21)$$

Bei traditionellen Spektralschätzungsverfahren gilt für die Schätzwerte des Leistungsdichtespektrums, wenn man  $P$  Autokorrelationswerte dafür benutzt:

$$\hat{S}_{xx}(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-P}^P \Phi_{xx}[k] \cdot e^{-j\Omega k}, \quad (3.7.22)$$

wobei implizit  $\Phi_{xx}[k] = 0$  für  $|k| > P$  vorgenommen wird. Hingegen werden beim AR-Verfahren die Autokorrelationswerte außerhalb des Intervalls  $(-P, P)$  nach Gl. (3.7.21) extrapoliert. Als Beispiel für einen extrem schmalbandigen Prozess wird die von weißem Rauschen überlagerte Sinusschwingung betrachtet (**Bild 3.21a**). Die Länge der zugehörigen Autokorrelationsfunktion ist unbegrenzt. **Bild 3.21b** und **Bild 3.21c** verdeutlichen den Unterschied zwischen traditioneller und autoregressiver Spektralschätzung. Im ersten Falle wird die Autokorrelationsfunktion auf ein endliches Zeitintervall begrenzt; als Folge hiervon ergibt sich die bekannte Verbreiterung im Frequenzbereich. Hingegen wird bei Verwendung eines autoregressiven Modells die Autokorrelationsfunktion zwar zu größeren Werten  $k$  hin gedämpft, ist aber zeitlich unbegrenzt. Im Frequenzbereich ergibt sich eine bessere Approximation des wahren Spektrums.

In den bisherigen Betrachtungen wird die Kenntnis der korrekten Autokorrelationswerte des stochastischen Prozesses vorausgesetzt. In einer realen Messsituation liegt jedoch eine zeitlich begrenzte Musterfunktion  $x[k]$  vor, auf deren Grundlage die Parameter des AR-Modells  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, P$ ) und  $\sigma$  geschätzt werden. Dazu wurden einige Verfahren, z. B. Yule-Walker-Verfahren, Kovarianzmethode und Burg-Algorithmus, entwickelt [48], die in mehreren Analyseprogrammen, z. B. im Programm Matlab zur Verfügung stehen.

Anhand der geschätzten Parameter des AR-Modells  $\hat{a}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, P$ ) und  $\hat{\sigma}$  lässt sich das Leistungsdichtespektrum des stochastischen Signals nach Gl. (3.7.16) berechnen:

$$\hat{S}_{xx}^{\text{AR}}(e^{j\Omega}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^P \hat{a}_k e^{-k\Omega} \right|^2}. \quad (3.7.23)$$

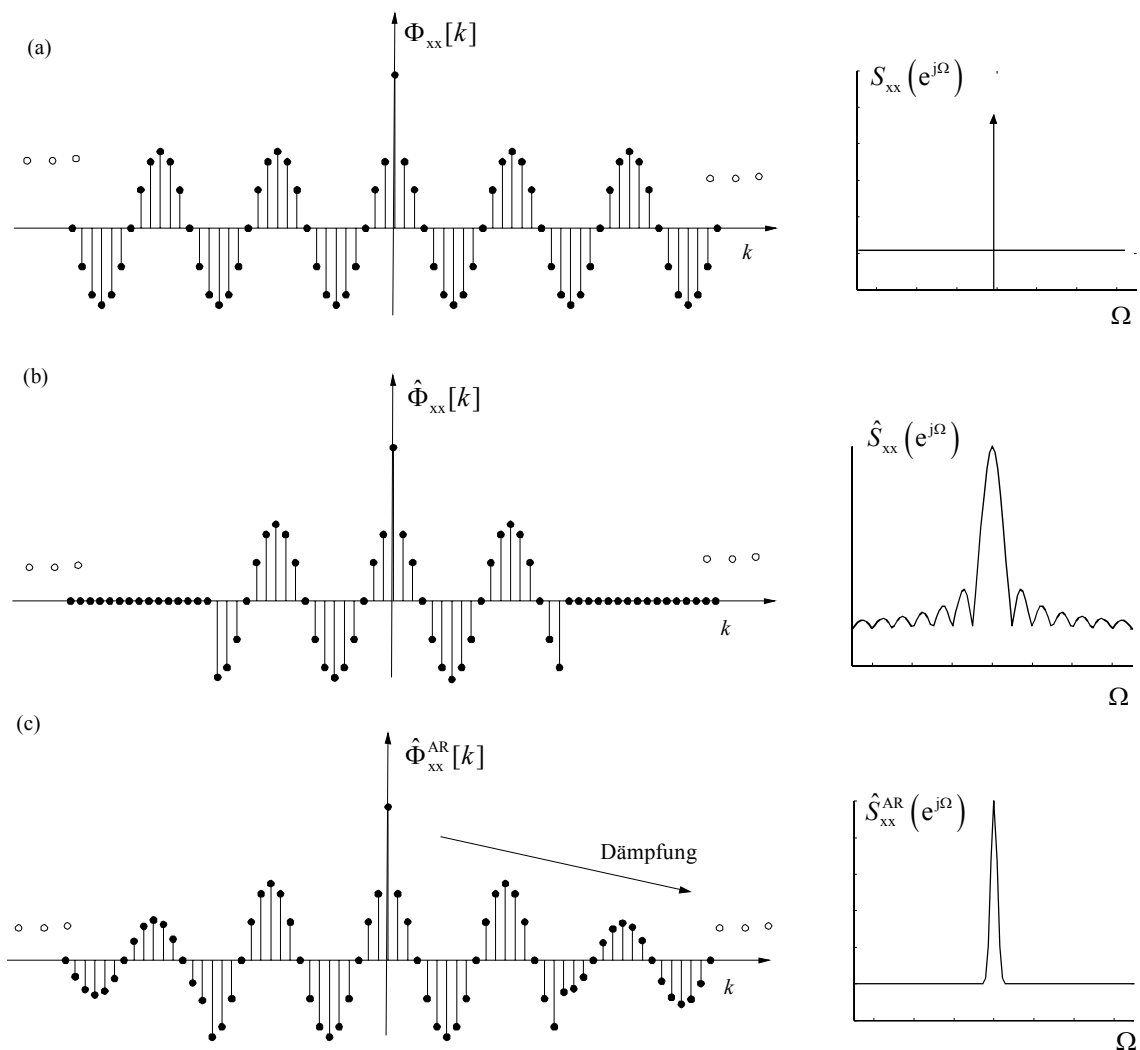
Der Nenner des Ausdrucks hat eine ähnliche Struktur wie die DTFT mit  $(P+1)$  Termen, und kann mit der FFT berechnet werden.

Bei der Anwendung von AR-Modellen zur Spektralschätzung ist folgendes zu beachten:

- Der Rechenaufwand ist hoch. Die Anzahl der Multiplikationen ist proportional zu  $N^2$ , wobei  $N$  die Länge der Datenmenge ist [48].
- Das AR-Modell besitzt einen frei vom Anwender wählbaren Parameter - die Modellordnung  $P$ . Es ist normalerweise in der Praxis notwendig, einige Modellordnungen zu postulieren, da die beste Wahl der Modellordnung  $P$  im Allgemeinen a priori nicht bekannt ist. Unterschätzt man die Modellordnung, verschlechtern sich die Schätzergebnisse schlagartig [31]. Bei Überschätzung der Modellordnung entstehen ebenfalls Fehler, wie z. B. falsche Peaks, Schätzfehler der Frequenzen. Einige Kriterien für die Wahl der Modellordnung wurden vorgeschlagen, wie z. B. FPE (*final prediction error*) und AIC (*Akaike in-*

*formation criterion*). Sie sind für im Rechner simulierte AR-Signale geeignet [48]. Allerdings ist ihre Anwendbarkeit für praktische Messsignale davon abhängig, wie gut das untersuchte Signal durch das angesetzte AR-Modell beschreibbar ist. Es wurde empfohlen, dass für praktische Messsignale die Modellordnung zwischen  $1/3$  bis  $1/2$  der Länge der Datenmenge auszuwählen ist [48].

- Die Frequenzauflösung des vom AR-Modell berechneten Spektrums ist vom SNR abhängig. Bei niedrigem SNR verschlechtert sich die Frequenzauflösung [48].
- Die Genauigkeit der berechneten Frequenzen ist durch die Crammer-Rao (CR)-Schranke begrenzt [32].



**Bild 3.21** Prinzipielle Unterschiede zwischen traditionellen und AR-Schätzverfahren:

- wahre Autokorrelationsfunktion, wahres Leistungsdichtespektrum
- traditionelles Schätzverfahren
- Schätzverfahren aufgrund eines AR-Modells



### 3.7.3 Amplituden der durch Rauschen gestörten periodischen Signale bei Spektralschätzungen

In der Literatur wird die parametrische Spektralschätzung intensiv erforscht. Dabei steht meist die Schätzung der Frequenzen im Vordergrund [32]. Für die Schätzung der Amplituden der im Rauschen versteckten periodischen Signale ist das Amplitudenverhältnis des geschätzten Spektrums zu untersuchen, welches in der Literatur kaum behandelt wird.

Bei den traditionellen und den modellgestützten Spektralschätzungsverfahren erhält man nicht direkt das Amplitudenspektrum, sondern das geschätzte Leistungsdichtespektrum  $\hat{S}_{xx}(e^{j\Omega})$ . Theoretisch kann man die zu einer Signalkomponente gehörige Leistung bestimmen, indem man die Fläche unter der Leistungsdichte-Kurve integriert (Gl.(3.7.6)). Somit lassen sich die Amplituden der im Rauschen versteckten periodischen Signale berechnen, da die Amplitude eines periodischen Signals mit dessen Leistung in engem Zusammenhang steht. Allerdings ist der Rechenaufwand sehr hoch [48]. Als eine Alternative dazu kann man die Peaks im Leistungsdichtespektrum als Anzeigen der Leistungen bzw. der Amplituden periodischer Anteile benutzen. Im mit traditionellen Verfahren geschätzten Leistungsdichtespektrum sind die Peaks zuverlässige Anzeigen der Leistungen bzw. der Amplituden von periodischen Anteilen, da die Spitzenwerte linear proportional zu den Leistungen der periodischen Anteile sind. Dagegen wird das Amplitudenverhältnis der periodischen Anteile im mit dem AR-Modell geschätzten Spektrum häufig verändert.

Um dies zu demonstrieren, wird im folgenden Beispiel ein Testsignal verwendet, das sich aus zwei exponentiellen Signalen und einem additiv superponierten Rauschsignal, das als weiß und gaußverteilt angenommen wird, zusammensetzt:

$$x[n] = A_1 \cdot e^{j2\pi f_1 n \Delta T} + A_2 \cdot e^{j2\pi f_2 n \Delta T} + v[n], \quad -\infty < n < +\infty. \quad (3.7.24)$$

Das wahre Leistungsdichtespektrum von  $x[n]$  lässt sich ausdrücken als [31]

$$S_{xx}(e^{j\Omega}) = 2\pi[A_1^2 \cdot \delta(\Omega - \Omega_1) + A_2^2 \cdot \delta(\Omega - \Omega_2)] + \sigma^2, \quad (3.7.25)$$

wobei  $\Omega_1 = 2\pi f_1 \cdot \Delta T$ ,  $\Omega_2 = 2\pi f_2 \cdot \Delta T$ , und  $\sigma^2$  die Varianz des Rauschsignals ist. Hierbei ist zuerst das Leistungsdichtespektrum mit einem traditionellen Verfahren zu schätzen, das auf einem zeitlich begrenzten Ausschnitt aus dem Testsignal fußt.

Das Bartlett-Verfahren wird hierfür in Betrachtung gezogen. Es wurde gezeigt, dass der Erwartungswert des mit dem Bartlett-Verfahren geschätzten Leistungsdichtespektrums einem Faltungsprodukt des wahren Leistungsdichtespektrums mit der Spektralfunktion der Dreieck-Fensterfunktion entspricht [31]:

$$\bar{S}_{xx}^T(e^{j\Omega}) = E\{\hat{S}_{xx}^T(e^{j\Omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{L} \left[ \frac{\sin(L \cdot \Theta / 2)}{\sin(\Theta / 2)} \right]^2 \cdot S_{xx}(e^{j(\Omega - \Theta)}) d\Theta$$

$$= \frac{A_1^2}{L} \left[ \frac{\sin L \cdot (\Omega - \Omega_1) / 2}{\sin(\Omega - \Omega_1) / 2} \right]^2 + \frac{A_2^2}{L} \left[ \frac{\sin L \cdot (\Omega - \Omega_2) / 2}{\sin(\Omega - \Omega_2) / 2} \right]^2 + \sigma^2, \quad (3.7.26)$$

wobei  $L$  die Länge der Fensterfunktion ist. Man kann die Leistungen der beiden exponentiellen Signale einzeln näherungsweise berechnen, unter der Bedingung, dass das SNR ausreichend groß ist und die zwei Frequenzen ausreichend von einander entfernt sind, sodass sich der Einfluss<sup>1</sup> des Rauschsignals auf die beiden exponentiellen Signale im Frequenzbereich und die spektrale Interferenz zwischen den exponentiellen Signalen vernachlässigen lässt. Wenn man die Gl. (3.7.26) in die Gl. (3.7.6) einsetzt und die Integralformel benutzt:

$$\frac{1}{L} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{\sin L \cdot \zeta / 2}{\zeta / 2} \right]^2 d\zeta = 1, \quad (3.7.27)$$

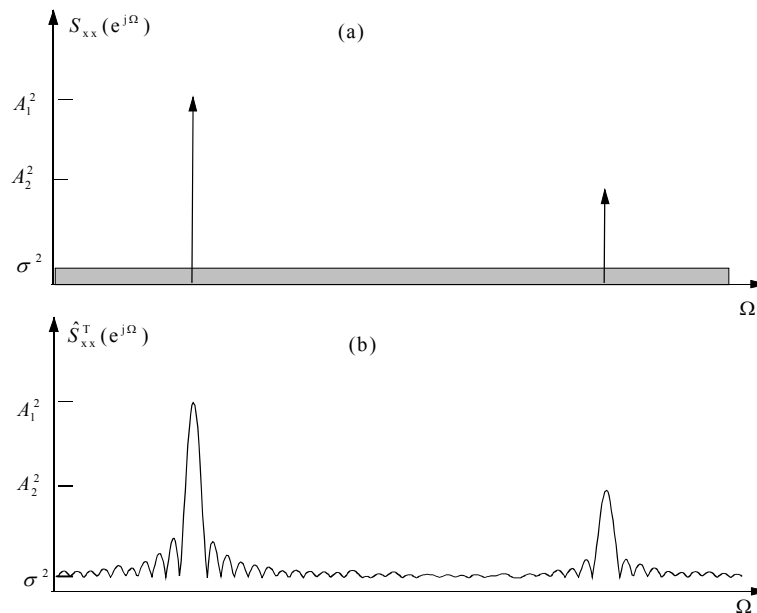
ergibt sich daraus, dass die Peaks im mit dem Bartlett-Verfahren geschätzten Leistungsdichtespektrum linear proportional zu den Leistungen bzw. den Quadraten der Amplituden der periodischen Anteile sind. Somit ist es gerechtfertigt zu sagen, dass die Höhen der Peaks im Leistungsdichtespektrum Anzeigen für die Leistungen bzw. die Amplituden der im Rauschen versteckten periodischen Anteile sind, wie in **Bild 3.22** gezeigt. Ähnliche Ergebnisse kann man bei anderen traditionellen Verfahren erhalten. Daher kann man mit traditionellen Spektralschätzungsverfahren sowohl die Frequenzen und auch die Amplituden der im Rauschen versteckten periodischen Signale schätzen. Für eine Schätzung mit hoher Frequenzauflösung und geringer Varianz wird allerdings vorausgesetzt, dass eine ausreichend lange Messzeit zur Verfügung steht. Mit genügender Mittelung und ausreichend langen Datenblöcken sind sehr zuverlässige Aussagen über die Spektraleigenschaften der im Rauschen versteckten periodischen Signale, d. h. Frequenzen und Amplituden, möglich.

Das AR-Modell stützt sich auf ein all-pole-System ab (siehe Gl. (3.7.17)). Die Frequenzauflösung des damit geschätzten Leistungsdichtespektrums ist von den Abständen zwischen den Polen in Gl. (3.7.17) und dem Einheitskreis abhängig (**Bild 3.23**). Jeder in der Nähe des Einheitskreises liegende Pol führt im Leistungsdichtespektrum zu einer Spektralspitze [31]. Zahlreiche Untersuchungen des Spektralschätzungsverfahrens mit dem AR-Modell zeigten, dass man unter Zugrundelegung eines kurzen Abschnitts der im Rauschen versteckten periodischen Signale sehr zuverlässige Aussagen über die Frequenzen erhalten kann [32]. In diesem Punkt sind parametrische Spektralschätzungsverfahren den traditionellen Methoden überlegen.

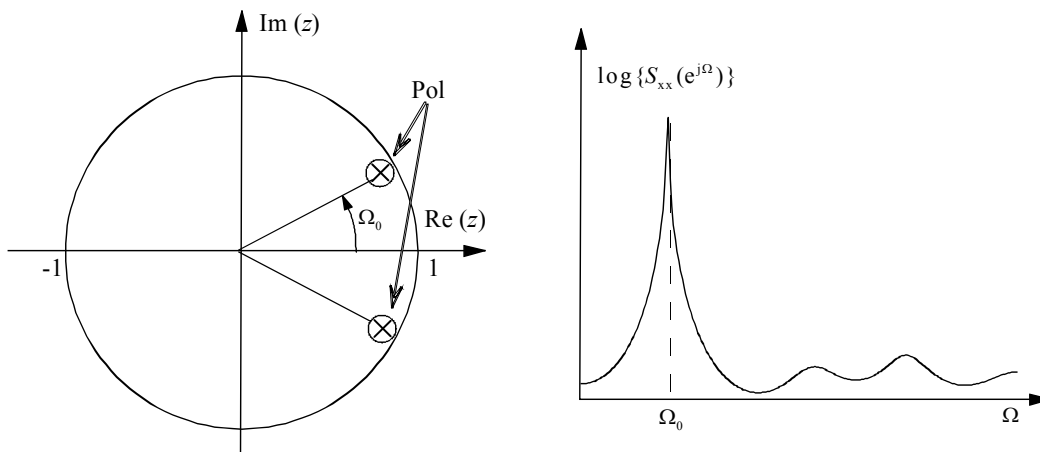
Das Auftreten einer Spektralspitze im vom AR-Modell geschätzten Spektrum eines Signals weist in den meisten Fällen auf eine periodische Komponente im Signal hin. Die Frequenz, wo dieser Peak liegt, ist dabei die Frequenz der Komponente. Obwohl das Parsevalsche Theorem (Gl. (3.7.6)) dabei gültig ist, steht allerdings die Amplitude der Spektralspitze mit der

<sup>11</sup> Der Einfluss lässt sich durch die Crammer-Rao (CR)-Schranke bestimmen, welche die theoretisch erreichbare Varianz eines Schätzers darstellt.

Leistung bzw. die Amplitude der periodischen Komponente meist nicht eng im Zusammenhang. Eine analytische Lösung für diesen Zusammenhang ist schwer zu gewinnen [48].



**Bild 3.22** Spektralschätzung mit dem Bartlett-Verfahren. (a) Wahres Spektrum; (b) Geschätztes Spektrum



**Bild 3.23** Pol der Übertragungsfunktion eines AR-Modells und die Spektralspitze

Bei der Anwendung der AR-modellgestützten Spektralschätzung ist festzustellen, dass sich das Amplitudenverhältnis der im Rauschen versteckten periodischen Anteile im Spektrum oftmals ändert. Eine Ursache dafür besteht darin, wie gut ein solches Signal durch das eingesetzte Modell beschreibbar ist. Zahlreiche Untersuchungen zeigten [48], dass die Modellordnung  $P$  oftmals von weit größerem Gewicht für die Genauigkeit der Spektralanalyse ist als der Umfang der zugrunde gelegten Datenmenge. Generell wird man die besten Ergebnisse erwarten, wenn das analysierte Signal in Wahrheit tatsächlich autoregressiven Charakter hat. Praktische Messsignale sind in aller Regel aufgrund anderer Mechanismen entstanden als aus der rekursiven Filterung eines weißen Rauschprozesses. Außerdem sind die Polstellen in

Gl. (3.7.17) gegen das SNR sehr empfindlich [48], was dazu führt, dass das SNR großen Einfluss auf die Genauigkeit der berechneten Amplituden hat.

**Bild 3.24** zeigt die Ergebnisse einer Untersuchung, wobei das in Gl. (3.7.24) dargestellte Testsignal benutzt wird. Während für die Sinussignale die folgenden Parameter  $A_1 = A_2 = 1$ ,  $f_1 = 10$  Hz und  $f_2 = 40$  Hz angenommen werden, stellt das Rauschsignal sich als unterschiedliche Realisation eines weißen und Gaußverteilten Prozesses mit demselben Signal-Rausch-Verhältnis dar:

$$\text{SNR} = 10 \log_{10}[(A_1^2 + A_2^2) / \sigma^2] = 10 \text{ dB} \quad (3.7.28)$$

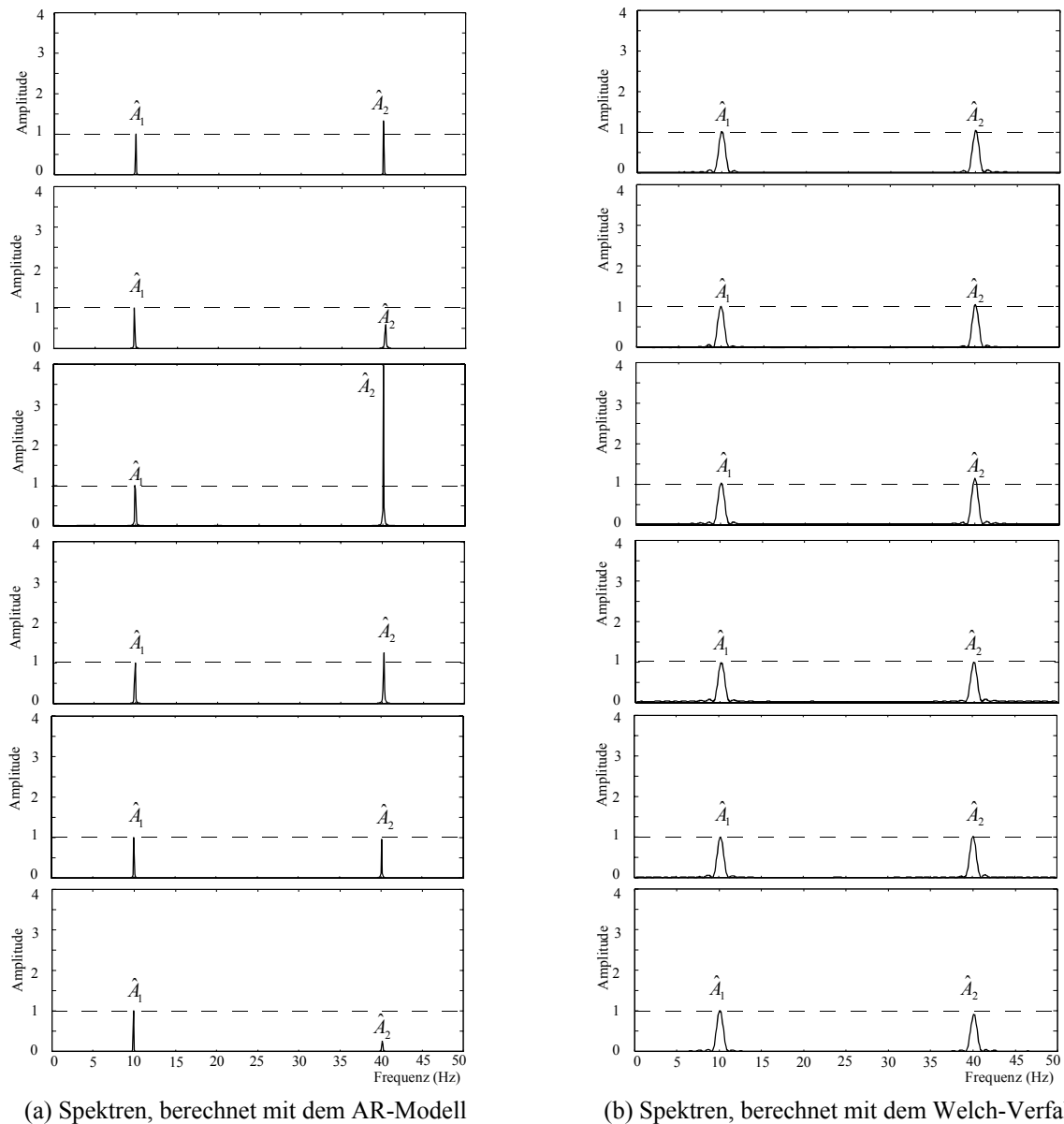
Das Testsignal wird mit  $f_s = 100$  Hz abgetastet. Für die AR-modellgestützte Spektralschätzung werden 100 Abtastwerte benutzt, entsprechend einer Zeitlänge von einer Sekunde. Unter der Berücksichtigung des Kriteriums FPE und der Empfehlung in [48] wird die Modellordnung  $P = 25$  für das AR-Modell ausgewählt. In **Bild 3.24a** werden die mit diesem AR-Modell berechneten normierten Leistungsdichtespektren veranschaulicht. Darin ist zu ersehen, dass das Amplitudenverhältnis  $\hat{A}_1 / \hat{A}_2$  in den Spektren so stark schwankt (Sollwert = 1), dass die Höhen der Peaks in den Spektren als Anzeigen der Amplituden von im Rauschen versteckten periodischen Anteilen kaum benutzbar sind. Bei den 1000 Simulationen ergeben sich die statistischen Kenngrößen in **Tabelle 3.1**.

Zum Vergleich werden die mit dem Welch-Verfahren geschätzten Spektren in **Bild 3.24b** zusammen dargestellt. Für die Spektralschätzungen werden 400 Abtastwerte angewendet. Die statistischen Kenngrößen für die 1000 Simulationen finden sich in **Tabelle 3.1**.

	$\mu\{\hat{A}_1 / \hat{A}_2\}$	$\sigma\{\hat{A}_1 / \hat{A}_2\}$	$\max\{\hat{A}_1 / \hat{A}_2\}$	$\min\{\hat{A}_1 / \hat{A}_2\}$
AR-Modell	1,2165	0,8762	6,956	0,1652
Welch-Verfahren	1,003	0,0562	1,120	0,8519

**Tabelle 3.1** Statistische Kenngrößen des Amplitudenverhältnisses bei den mit dem AR-Modell und Welch-Verfahren geschätzten Leistungsdichtespektren

Das aus einem kurzen Abschnitt eines Signals mit dem AR-Modell geschätzte Spektrum kann gute Hinweise auf die Frequenzen der im Signal enthaltenen periodischen Komponenten geben [31]. Die Simulationen in diesem Beitrag zeigten, dass eine zuverlässige Aussage über die Amplituden dieser periodischen Komponenten nicht möglich ist. Die traditionellen Spektralschätzungsverfahren, insbesondere das Bartlett- und Welch-Verfahren, lassen sehr zuverlässige Aussagen über die Frequenzen und Amplituden der im Rauschen versteckten periodischen Signale zu. Die Voraussetzung dafür ist, dass ausreichend lange Datenblöcke bzw. Messzeiten zur Verfügung stehen. Damit können der Leckeffekt der DFT/FFT und die Varianz der geschätzten Größen verringert werden.



**Bild 3.24** Veranschaulichung des Amplitudenverhältnisses unter gleichem SNR aber unterschiedlicher Realisation des additiv superponierten weißen gaußverteilten Rauschsignals

### 3.8 Zusammenfassende Bewertung

In diesem Kapitel wurden die gängigen Signalverarbeitungsverfahren vorgestellt und auf ihre Eignung für die Bestimmung der Größen von im Rauschen versteckten periodischen Signalen hinsichtlich der Unterdrückung des von Zeitbegrenzungen verursachten Leckeffekts der DFT/FFT untersucht.

Für die Frequenzauflösung der DFT/FFT ist nicht die Abtastfrequenz  $f_s$ , sondern die Messzeit  $N \cdot \Delta T$  maßgebend. Steht ausreichend lange Messzeit zur Verfügung, liefert die DFT/FFT mit geringem Rechenaufwand sehr zuverlässige Ergebnisse über die Spektraleigenschaften

der im Rauschen versteckten periodischen Signale. Weiterhin können auch Signale, die mehrere spektrale Linien aufweisen, verarbeitet werden.

Bei kurzer Messzeit tritt der Leckeffekt bei Anwendungen der DFT/FFT häufig auf. Der Leckeffekt der DFT/FFT kann prinzipiell nur unter den Bedingungen vermieden werden, dass die Messzeit unbegrenzt lang ist, oder dass die Abtastung synchron mit den Frequenzen aller in einem Signal enthaltenen Komponenten ist, was in der Praxis kaum durchführbar oder nur mit erheblich hohem Aufwand zu realisieren ist.

Zur Unterdrückung des Leckeffekts lassen sich Fensterfunktionen einsetzen. Die Hanning-Fensterfunktion wird dank ihrer einfachen Implementierungsmöglichkeit und ihrer im Frequenzbereich entstehenden Nebenzipfel geringerer Amplituden meist angewendet. Im Vergleich mit der Rechteck-Fensterfunktion besitzt die Hanning-Fensterfunktion allerdings einen breiteren Hauptzipfel, was ein niedriges Frequenz-Auflösungsvermögen zur Folge hat.

Die Interpolation-Diskrete-Fourier-Transformation (IpDFT) können die vom Leckeffekt der DFT/FFT verursachten Fehler korrigieren. Aber in der Nähe der Frequenz-Stützstellen der DFT/FFT sind Frequenzfehler erheblich groß.

Das auf der Phasen-Differenz basierende Verfahren (PDV) liefert bei kurzer Messzeit deutlich bessere Schätzungen der Frequenz als die DFT/FFT und IpDFT. In manchen Intervallen im Frequenzbereich sind die Frequenzfehler schlagartig, so dass dieses Verfahren ohne Korrektur in der Praxis kaum nutzbar ist.

Der vom AR-Modell gestützten Spektralschätzung haftet der Leckeffekt prinzipiell nicht an und kann unter Zugrundelegung eines kurzen Abschnitts der im Rauschen versteckten periodischen Signale gute Hinweise auf die Frequenzen der periodischen Komponenten geben. Allerdings ist eine zuverlässige Aussage über ihre Amplituden nicht möglich, wie in diesem Beitrag ausgeführt wurde. Weiterhin sind der Rechenaufwand und die Wahl der Modellordnung in praktischen Anwendungen zu berücksichtigen.

Die Chirp-z-Transformation (CZT) bzw. das Zeropadding-Verfahren kann einen erheblichen Beitrag zur Unterdrückung des Kurz-Reichweite-Leckeffekts leisten. Unter dem Einsatz geeigneter Fensterfunktionen lässt sich der Lang-Reichweite-Leckeffekt wesentlich unterdrücken. Vorteilhaft sind sie immer dann, wenn man beispielsweise die Lage lokaler Maxima des Spektrums genauer bestimmen will. Im nächsten Kapitel werden die allgemeinen Bedingungen für die Anwendung der CZT bzw. des Zeropadding-Verfahrens bei reellen Multifrequenz-Signalen unter dem Einsatz der Fensterfunktionen behandelt. Weiterhin wird ausgehend von der statistischen Analyse der DTFT eines vom statistischen Rauschen gestörten abgetasteten Signals die Messabweichung der geschätzten Größen untersucht.

## Kapitel 4

# Bestimmung der Größen verrauschter periodischer Signale mit Hilfe der CZT und dem Zeropadding-Verfahren bei kurzer Messzeit

### 4.1 Einleitung

Im technischen Bereich ist es häufig erforderlich, mit höherer Genauigkeit und Zuverlässigkeit die Frequenzen, Amplituden und Phasen aller Komponenten eines verrauschten periodischen Signals zu bestimmen. Die DFT kann mit der FFT die Frequenzen, Amplituden und Phasen schnell und effizient berechnen. Ein wichtiger Vorteil der DFT/FFT ist, dass auch Signale mit geringem Signal-zu-Rausch-Verhältnis (SNR) gut verarbeitet werden können. Weiterhin können auch Signale, die mehrere spektrale Linien aufweisen, verarbeitet werden.

Im Bereich der digitalen Signalverarbeitung ist die Zeitbegrenzung eines Signals notwendig, da der Speicherplatz in einem digitalen Systems endlich ist. Wird ein analoges Signal mit der Abtastfrequenz  $f_s$  diskretisiert und dann mit der Fensterlänge  $N$  zeitlich begrenzt, werden die  $z$ -Transformation und folglich die DTFT der daraus entstehenden diskreten Folge festgelegt.

Im Fall der synchronen Abtastung, indem die Zeitbegrenzung dem gemeinen ganzzahligen Vielfachen der Perioden aller Frequenzkomponenten in einem Signal entspricht, ist eine ideale Wiedergabe des Spektrums dieses Signals durch die DFT/FFT möglich.

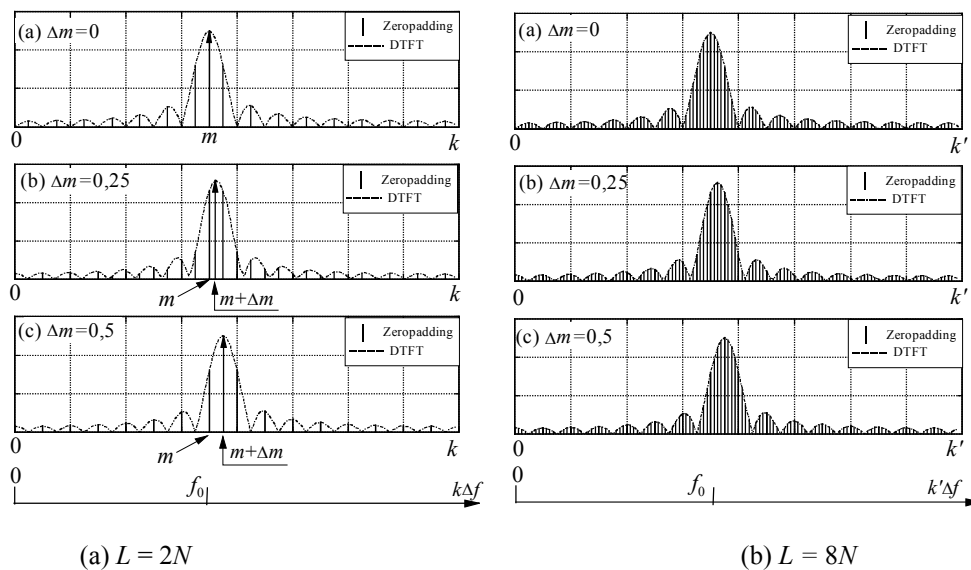
Bei kurzer Messzeit ist die synchrone Abtastung mit allen Frequenzkomponenten schwer zu realisieren. Deshalb tritt der Leckeffekt bei der Berechnung der DFT/FFT häufig auf. Seit Jahren wird die Chirp- $z$ -Transformation (CZT) oder das Zeropadding-Verfahren zur Unterdrückung des Leckeffekts eingesetzt. Die beiden Verfahren stehen mit der Verbindung der DTFT eines diskreten Signals im Zusammenhang. Hierbei werden diese Verfahren durch die Analyse der Spektralinterferenz der DTFT betrachtet. Es wird sich zeigen, dass auch eine beliebige Erhöhung der Frequenzauflösung nicht prinzipiell alle Probleme löst. Es werden die Frequenzauflösung, der systematische und statistische Fehler und das Frequenzauflösungsvermögen der CZT bzw. des Zeropadding-Verfahrens bei Multifrequenz-Signalen behandelt.

### 4.2 Unterdrückung des Leckeffekts durch die CZT bzw. das Zeropadding-Verfahren bei Einzelfrequenz-Signalen

Im Abschnitt 3.2.2 wurde für Einzelfrequenz-Signale der Kurz-Reichweite-Leckeffekt der DFT/FFT behandelt. Die Zeitbegrenzung führt dazu, dass die DTFT eines Einzelfrequenz-

Signals die Form der  $\sin(f)/f$ -Funktion nimmt. Bei der nicht synchronen Abtastung wird die DTFT dieses diskreten Signals nicht im Maximum der  $\sin(f)/f$ -Funktion bei der Berechnung der DFT abgetastet, sodass sich zwei Hauptlinien ergeben. Die Hauptspektrallinie leckt durch alle Rasterpunkte hindurch (siehe **Bild 3.1 (b) und (c)**). Da das Spektrum der mit Nullen eingefügten Folge ebenfalls die Abtastung der kontinuierlichen DTFT der originalen Folge mit kleinerem Frequenzabstand im Frequenzbereich ist und die CZT die DTFT der originalen Folge in einem Kreisbogen des Einheitskreises berechnet, lässt sich der Kurz-Reichweite-Leckeffekt der DFT/FFT mit dem Zeropadding-Verfahren oder der CZT unterdrücken.

Im **Bild 4.1** wird die Unterdrückung des Kurz-Reichweite-Leckeffekts durch das Zeropadding-Verfahren veranschaulicht. Dabei beträgt die Anzahl der eingefügten Nullen jeweils  $N$  (links) und  $7N$  (rechts). Somit ergibt sich die Frequenzauflösung jeweils zu  $0,5\Delta f$  und  $0,125\Delta f$ . Der maximale Frequenzfehler beträgt jeweils  $0,25\Delta f$  und  $0,0625\Delta f$ . Mit der Erhöhung der Anzahl der angefügten Nullen wird die DTFT des diskreten Signals durch das Spektrum der mit Nullen eingefügten Folge genauer angenähert, so dass man besser auf die Lage des Maximums schließen kann. Damit lässt sich der Leckeffekt bei einem Einzelfrequenz-Signal mit dem Zeropadding-Verfahren beliebig unterdrücken bzw. eliminieren.



**Bild 4.1** Veranschaulichung zur Unterdrückung des Kurz-Reichweite-Leckeffekts

### 4.3 Spektralinterferenz bei Multifrequenz-Signalen

Die CZT berechnet die DTFT einer diskreten Folge in einem Kreisbogen des Einheitskreises, wie in Abschnitt 3.4.1 erwähnt. Das Spektrum des Zeropadding-Verfahrens ist die Abtastung der kontinuierlichen DTFT der originalen Folge mit beliebig kleinerem Frequenzabstand im Frequenzbereich. Aus diesem Grunde wird hierbei zur Betrachtung der CZT bzw. des Zeropadding-Verfahrens für verschiedene Multifrequenz-Signale aus der Analyse der Spektralinterferenz der kontinuierlichen DTFT ausgegangen. Wie in Abschnitt 3.2.3 erwähnt, tritt die Spektralinterferenz in der DTFT eines abgetasteten Multifrequenz-Signals wegen der Zeitbe-



grenzung auf. Die DTFT dieses Multifrequenz-Signals besteht aus der komplexwertigen Überlagerung der jeweiligen DTFT von allen im Signal enthaltenen Frequenzkomponenten. Eine analytische Lösung für die Überlagerung bei mehreren Frequenzen ist schwer darzustellen. Aber ohne Verlust der Allgemeinheit kann man zur Betrachtung der Überlagerung aus einem Signal mit zwei Frequenzkomponenten ausgehen:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cdot e^{j2\pi f_1 t} + A_2 \cdot e^{j2\pi f_2 t} \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (4.3.1)$$

Wird das Signal mit der Abtastfrequenz  $f_s$  abgetastet und zeitlich begrenzt, ergibt sich die zeitlich begrenzte Folge:

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] = A_1 \cdot e^{j\Omega_1 n} + A_2 \cdot e^{j\Omega_2 n}, \quad 0 \leq n < N-1. \quad (4.3.2)$$

wobei  $\Omega_1 = 2\pi f_1 / f_s$  und  $\Omega_2 = 2\pi f_2 / f_s$ . Die zu  $x[n]$  gehörige DTFT lautet:

$$X(e^{j\Omega}) = A_1 \cdot e^{-j\frac{(N-1)(\Omega-\Omega_1)}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{N(\Omega-\Omega_1)}{2}}{\sin \frac{\Omega-\Omega_1}{2}} + A_2 \cdot e^{-j\frac{(N-1)(\Omega-\Omega_2)}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{N(\Omega-\Omega_2)}{2}}{\sin \frac{\Omega-\Omega_2}{2}} \quad (4.3.3)$$

$$= X_1(\Omega) + X_2(\Omega), \quad (4.3.4)$$

wobei  $X_1(\Omega) = A_1 \cdot e^{-j\frac{(N-1)(\Omega-\Omega_1)}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{N(\Omega-\Omega_1)}{2}}{\sin \frac{\Omega-\Omega_1}{2}}, \quad (4.3.5)$

$$X_2(\Omega) = A_2 \cdot e^{-j\frac{(N-1)(\Omega-\Omega_2)}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{N(\Omega-\Omega_2)}{2}}{\sin \frac{\Omega-\Omega_2}{2}}. \quad (4.3.6)$$

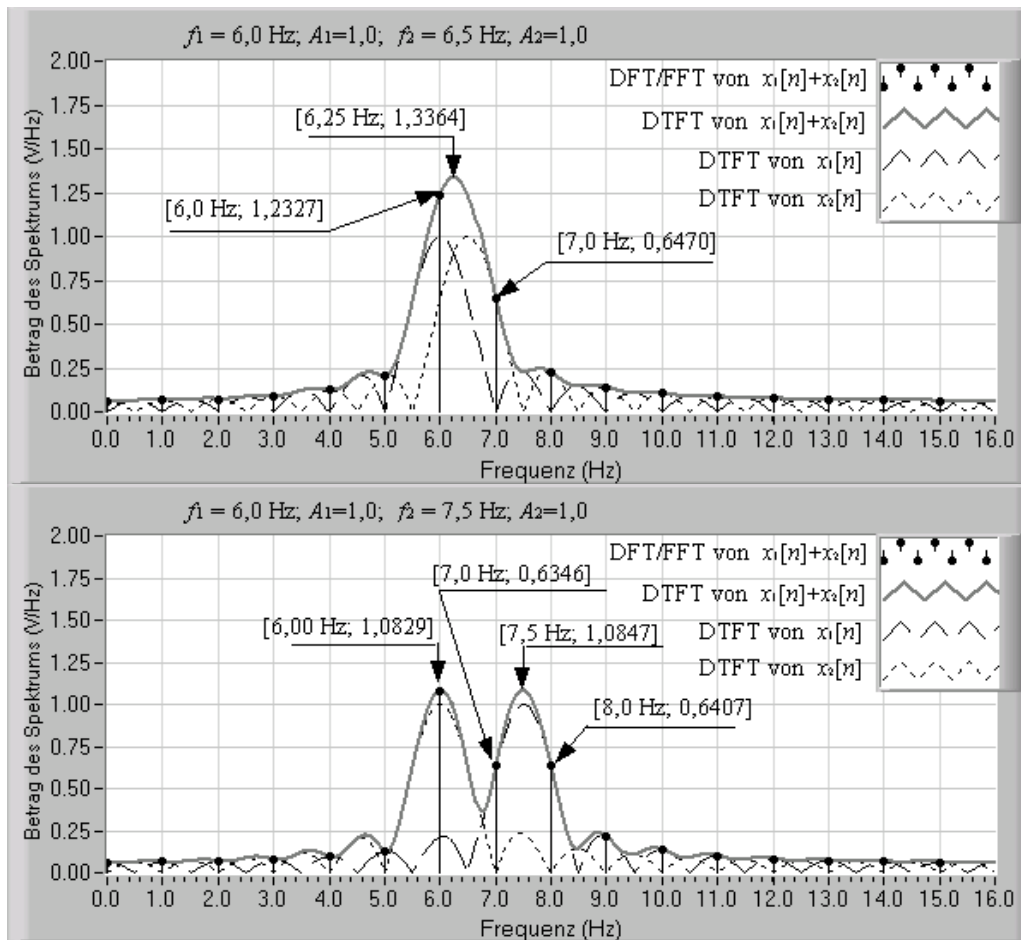
Zur Veranschaulichung werden  $f_s = 32$  Hz und  $N = 32$  festgelegt. Somit ergibt sich die Frequenzauflösung der DFT/FFT zu  $\Delta f = 1$  Hz.

### 4.3.1 Spektralinterferenz unter dem Einsatz der Fensterfunktionen

Die Spektralinterferenz ist stark vom Abstand zwischen zwei benachbarten Frequenzen abhängig. **Bild 4.2** oben zeigt die DFT/FFT und die DTFT des in Gl. (4.3.2) dargestellten Signals bei  $f_1 = 6,0$  Hz,  $f_2 = 6,5$  Hz,  $A_1 = 1$  und  $A_2 = 1$ . Der Abstand zwischen den beiden Frequenzen beträgt 0,5 Hz und ist kleiner als die Frequenzauflösung der DFT/FFT. In den DFT/FFT-Ergebnissen betragen die Amplituden bei den Frequenz 6 Hz und 7 Hz jeweils 1,2327 und 0,6470. Die DTFT von  $x_1[n] + x_2[n]$  ist eine komplexwertige Überlagerung der jeweiligen DTFT von  $x_1[n]$  und  $x_2[n]$ . Im Vergleich zur ursprünglichen DTFT von  $x_1[n]$  oder  $x_2[n]$  ist die DTFT von  $x_1[n] + x_2[n]$  stark verzerrt. Dabei überlagern sich die Hauptzipfel der beiden  $\sin(f)/f$ -Funktionen der DTFT von  $x_1[n]$  und  $x_2[n]$ . In diesem Fall kann man weder mit dem Zeropadding-Verfahren noch mit dem CZT-Verfahren die dicht benachbarten Frequenzen richtig separieren und ihre Frequenzen, Amplituden und Phasen bestimmen, d. h. eine beliebige Erhöhung der Frequenzauflösung kann nicht prinzipiell alle Probleme lösen.

Mit der Zunahme des Abstands zwischen den beiden Frequenzen nimmt die Spektralinterferenz zwischen den Hauptzipfeln in der DTFT ab und in der Nähe der zwei Frequenzen entstehen zwei lokale Maxima, aber wegen der Überlagerung zwischen Hauptzipfeln und Nebenzipfeln treten Fehler in den Amplituden der lokalen Maxima auf (**Bild 4.2** unten). Diese prin-

ziptuellen Fehler sind zwar vorhersagbar aber nicht leicht zu korrigieren, da sie von dem Abstand zwischen den Frequenzen, dem Amplitudenverhältnis  $A_1/A_2$ , und der relativen Phase zwischen den Signalkomponenten abhängig sind.



**Bild 4.2** Spektralinterferenz bei zwei dicht benachbarten Frequenzen. Der Frequenzabstand ( $f_2 - f_1$ ) – Oben:  $0,5\Delta f$ ; unter:  $1,5\Delta f$ .

Bei der Berechnung der DFT/FFT in diesen Beispielen wurde eine Fensterung mit der Rechteck-Fensterfunktion implizit vorgenommen. Im Frequenzbereich besitzt die Rechteck-Fensterfunktion einen Hauptzipfel und einige Nebenzipfel. Die Breite des Hauptzipfels beträgt  $2 \cdot \Delta f = 2 \cdot f_s / N$ . Der erste Nebenzipfel hat eine Abdämpfung 12 dB, die Abdämpfung anderer Nebenzipfel erreicht 30 dB nur nach  $10\Delta f$  (siehe **Bild 3.5**). Dies führt dazu, dass sich die Spektralinterferenz in der DTFT innerhalb des Frequenzabstandes kleiner als  $10\Delta f$  noch deutlich zeigt.

Im Vergleich mit der Rechteck-Fensterfunktion weisen die Hanning-, Dreieck-Fensterfunktion und alle anderen anwendbaren Fensterfunktionen im Frequenzbereich Nebenzipfel mit geringeren Amplituden auf (siehe **Bild 3.5**). Sie haben jedoch breitere Hauptzipfel als die Rechteck-Fensterfunktion, d. h., jede Maßnahme zur Abschwächung der Nebenzipfel bringt eine Verbreiterung des Hauptzipfels mit sich. Prinzipiell gilt, dass eine für alle Anwendungsfälle ideale Fensterfunktion nicht existiert. In den meisten Fällen wird die Hanning-

Fensterfunktion dank ihrer günstigeren Eigenschaften im Frequenzbereich und ihrer einfachen Implementierungsmöglichkeit eingesetzt. Die Hanning-Fensterfunktion besitzt im Frequenzbereich einen Hauptzipfel  $4 \cdot \Delta f = 4 \cdot f_s / N$ , und der erste Nebenzipfel hat eine Abdämpfung mit etwa 32 dB. Außerdem dämpfen die anderen Nebenzipfel wesentlich schneller als die der Rechteck-Fensterfunktion ab.

Ausgehend von speziellen Fällen wird im folgenden der minimale Abstand zwischen zwei Frequenzen untersucht, bei dem sich die Größen von Multifrequenz-Signalen unter dem Einsatz der Hanning-Fensterfunktion mit dem Zeropadding-Verfahren oder der CZT noch bestimmen lassen. Zum Vergleich wird der Betrag der DFT/FFT und der kontinuierlichen DTFT des in Gl. (4.3.2) dargestellten diskreten Signals  $x[n]$  bei verschiedenen Frequenzen und Frequenzabständen unter dem Einsatz der Rechteck- (**Bild 4.3 links**) und Hanning-Fensterfunktion (**Bild 4.3 rechts**) zusammen gezeigt.

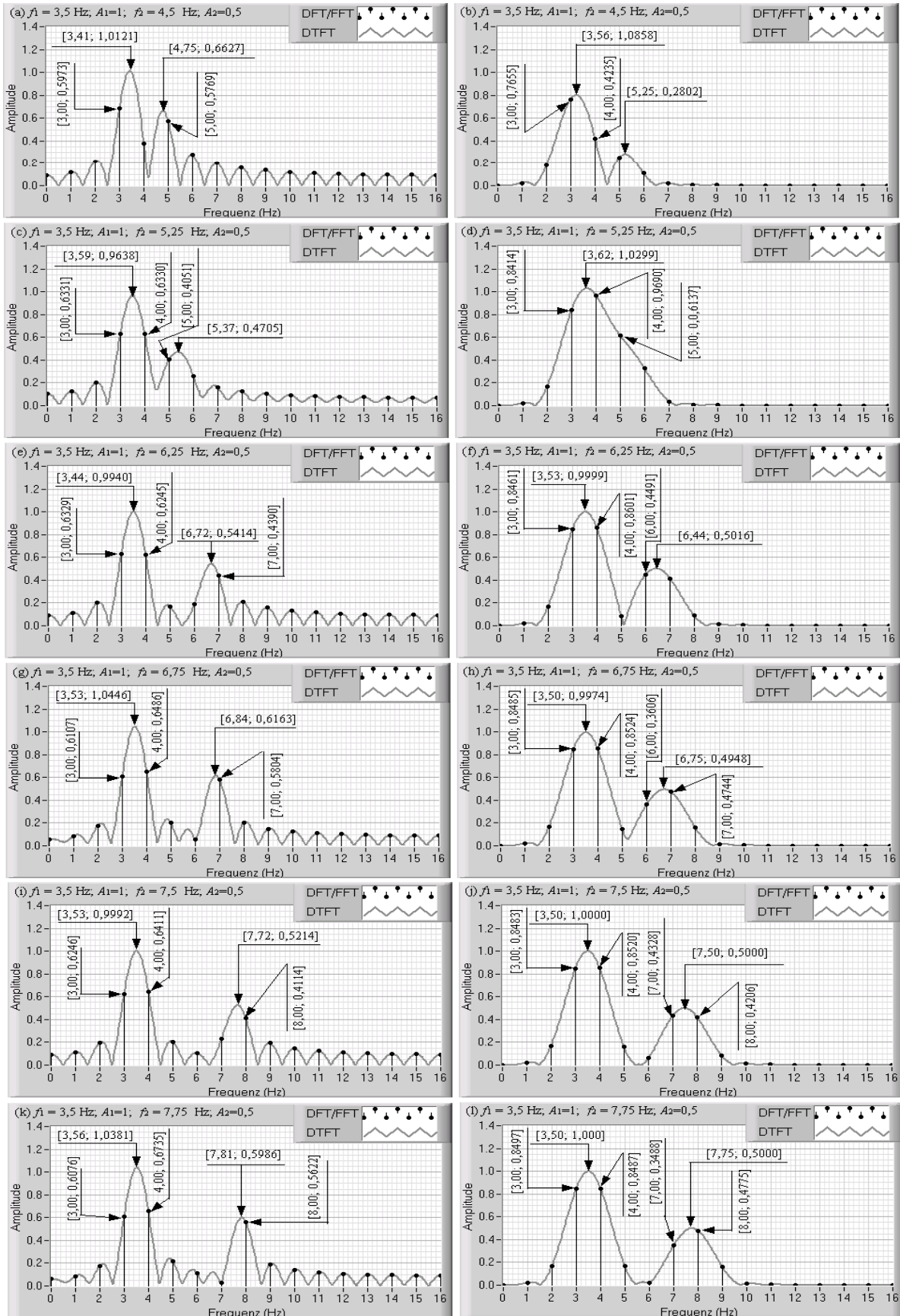
Aufgrund der nicht synchronen Abtastung mit den Signalkomponenten tritt der Leckeffekt in der DFT/FFT bei allen Fällen auf, und sie liefert unter dem Einsatz der Rechteck-Fensterfunktion fehlerhafte Informationen über die Frequenzen und Amplituden. Durch den Einsatz der Hanning-Fensterfunktion lässt sich der Leckeffekt zwar unterdrücken, aber auch mit der DFT/FFT kann man die richtigen Größen der beiden Signalkomponenten nicht erhalten.

Wegen der größeren Nebenzipfel der Rechteck-Fensterfunktion ist die Spektralinterferenz in der DTFT bis zum Frequenzabstand  $f_2 - f_1 = 4,25 \text{ Hz}$  ( $= 4,25 \cdot \Delta f$ ) in diesen Beispielen noch bemerkbar, wie in **Bild 4.3 links** gezeigt. Auf der Suche nach den lokalen Maxima in der DTFT bzw. im Spektrum des Zeropadding-Verfahrens verbessert sich zwar die Schätzung der Frequenzen, Amplituden und Phasen der beiden Signalkomponenten, besonders bei größerem Frequenzabstand, aber in allen Fällen sind die Ergebnisse fehlerhaft.

Die Hanning-Fensterfunktion hat einen breiteren Hauptzipfel. Bei kleinerem Frequenzabstand überlagern sich die Hauptzipfel der DTFT von  $x_1[n]$  und  $x_2[n]$  (**Bild 4.3 b und d**). In diesen Fällen lassen sich die Größen der beiden Signalkomponenten nicht richtig bestimmen. Mit der Zunahme des Frequenzabstands trennen sich die beiden Hauptzipfel, und die Überlagerung der jeweiligen DTFT von  $x_1[n]$  und  $x_2[n]$  nimmt dank der kleineren Nebenzipfel der Hanning-Fensterfunktion stark ab (**Bild 4.3 f und h**). Für die Signalkomponente mit größerer Amplitude zeigt das lokale Maximum im Vergleich mit den Ergebnissen der Rechteck-Fensterfunktion die Frequenz und Amplitude mit höher Genauigkeit.

Liegen die Frequenzen mit dem Abstand größer als 4 Hz ( $= 4 \cdot \Delta f$ ) auseinander, was der Breite des Hauptzipfels der Hanning-Fensterfunktion entspricht, ist die Spektralinterferenz nicht bemerkbar. Die lokalen Maxima zeigen die richtigen Größen der beiden Signalkomponenten (**Bild 4.3 j und l**).

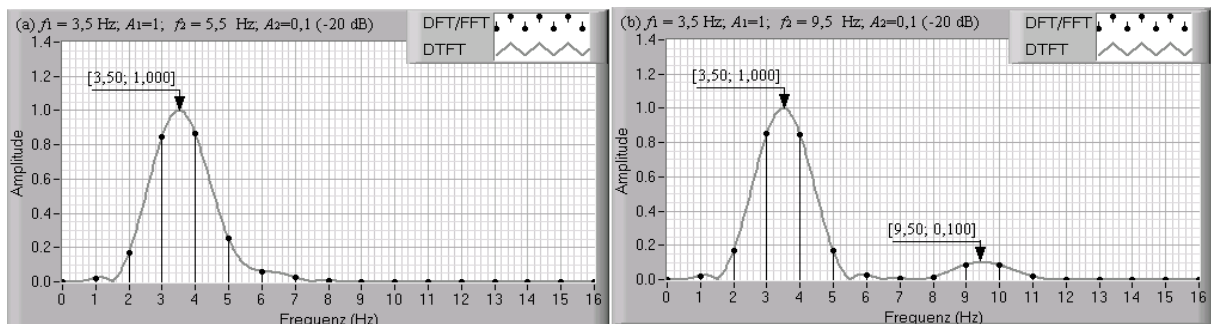
#### 4. Bestimmung der Größen verrauschter periodischer Signale mit der CZT und dem Zeropadding-Verfahren



**Bild 4.3** Veranschaulichung der Spektralinterferenz unter dem Einsatz der Rechteck- (links) und Hanning-Fensterfunktion (rechts). (In den eckigen Klammern werden die Frequenzen und Amplituden dargestellt)

Im Allgemeinen kann man davon ausgehen, dass sich die Bestimmung der Frequenzen, Amplituden und auch der Phasen von Multifrequenz-Signalen durch die Anwendung der CZT bzw. des Zeropadding-Verfahrens und den Einsatz der Fensterfunktionen anders als der Rechteck-Fensterfunktion mit hoher Genauigkeit durchführen lässt, wenn der minimale Abstand zwischen zwei benachbarten Frequenzen größer als die Breite des Hauptzipfels (BHZ) ist. Bezieht man sich auf die Frequenzauflösung  $\Delta f$ , so ergibt sich der minimale Abstand für die Hanning-Fensterfunktion zu  $4 \cdot \Delta f$ .

Die Spektralinterferenz zwischen den DTFT von  $x_1[n]$  und  $x_2[n]$  ist nicht nur vom Frequenzabstand, sondern auch vom Amplitudenverhältnis  $A_1/A_2$  anhängig. Wenn  $A_1/A_2$  groß ist, ist der Einfluss der DTFT von  $x_2[n]$  auf die DTFT von  $x_1[n]$  sehr gering. In diesem Fall lassen sich die Größen der stärkeren Signalkomponente bei kleinerem Frequenzabstand mit höherer Genauigkeit durch das Zeropadding-Verfahren bzw. die CZT bestimmen, aber die Fehler bei der Bestimmung der Größen der schwächeren Signalkomponente sind groß. In manchen Fällen kann die schwächere Signalkomponente durch die stärkere verdeckt werden, sodass die Detektion der schwächeren Signalkomponente gar nicht möglich ist, wie **Bild 4.4 a** zeigt. Bei großem Frequenzabstand können die Größen der beiden Signalkomponenten errechnet werden (**Bild 4.4 b**).



**Bild 4.4** Spektralinterferenz bei großem  $A_1/A_2$  und unter dem Einsatz der Hanning-Fensterfunktion

### 4.3.2 Minimale Frequenz eines Sinus/Cosinussignals

Ein Sinus- oder Cosinussignal lässt sich als die Summe zweier Einzelfrequenz-Signale betrachten, wie z. B.  $x(t) = A \cdot \cos 2\pi f_0 t = 0,5A \cdot (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$ . Wird das Signal mit der Abtastfrequenz  $f_s$  abgetastet und zeitlich begrenzt, ergibt sich eine zeitlich begrenzte Folge:

$$x[n] = 0,5A \cdot (e^{j\Omega_0 n} + e^{-j\Omega_0 n}), \quad 0 \leq n < N - 1. \quad (4.3.7)$$

wobei  $\Omega_0 = 2\pi f_0 / f_s$ . Die zu  $x[n]$  gehörige DTFT lautet:

$$X(e^{j\Omega}) = 0,5A \cdot \left[ e^{-j\frac{(N-1)(\Omega-\Omega_0)}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{N(\Omega-\Omega_0)}{2}}{\sin \frac{\Omega-\Omega_0}{2}} + e^{-j\frac{(N-1)(\Omega+\Omega_0)}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{N(\Omega+\Omega_0)}{2}}{\sin \frac{\Omega+\Omega_0}{2}} \right] \quad (4.3.8)$$

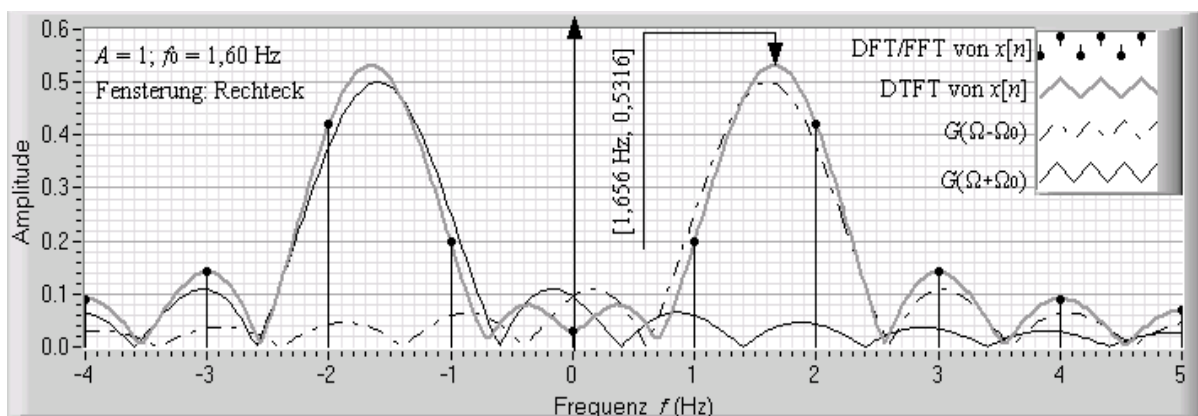
$$= G(\Omega - \Omega_0) + G(\Omega + \Omega_0), \quad (4.3.9)$$

wobei  $G(\Omega) = 0,5 \cdot A \cdot e^{-j\frac{(N-1)\Omega}{2}} \cdot (\sin \frac{N\Omega}{2}) / (\sin \frac{\Omega}{2})$ .

Zur Veranschaulichung werden hierbei  $f_s = 32$  Hz und  $N = 32$  festgelegt. Somit ergibt sich die Frequenzauflösung der DFT/FFT zu  $\Delta f = 1$  Hz. **Bild 4.5** zeigt bei  $f_0 = 1,6$  Hz und  $A = 1$  die DFT/FFT und DTFT von  $x[n]$ . Hierbei wird die Rechteck-Fensterfunktion implizit eingesetzt. Die Spektralinterferenz wegen der Überlagerung zwischen den Termen  $G(\Omega - \Omega_0)$  und  $G(\Omega + \Omega_0)$  ist bemerkbar. Der letztere Term  $G(\Omega + \Omega_0)$  liegt auf der negativen Halbebene. Aufgrund der nicht synchronen Abtastung lassen sich durch die DFT/FFT die Amplitude, Frequenz und Phase des Cosinussignals nicht richtig bestimmen. Mit dem Spektrum des Zeropadding-Verfahrens oder der CZT kann man diese Größen wegen des kleinen Frequenzabstands und folglich der starken Spektralinterferenz ebenfalls nicht genau schätzen.

Sieht man das Cosinussignal der Frequenz  $f_0$  als ein Multifrequenz-Signal der Frequenzen  $f_0$  und  $-f_0$  an, ergibt sich der Frequenzabstand zu  $[f_0 - (-f_0)] = 2 \cdot f_0$ . Unter dem Einsatz der Hanning-Fensterfunktion soll der minimale Frequenzabstand zur genaueren Schätzung der Frequenzen, Amplituden und Phasen eines Multifrequenz-Signals größer als die Breite des Hauptzipfels (BHZ =  $4 \cdot \Delta f$ ) sein, wie im letzten Abschnitt behandelt. Folglich können die Frequenz, Amplitude und Phase eines Sinus- bzw. Cosinussignals der Frequenz  $f_0$  durch die Anwendung des Zeropadding-Verfahrens oder der CZT und den Einsatz der Hanning-Fensterfunktion mit hoher Genauigkeit bestimmt werden, wenn  $f_0$  größer als 0,5 BHZ ( $2 \cdot \Delta f$ ) ist.

Es ist zu beachten, dass der Gleichanteil eines Signals vor der Berechnung der DFT/FFT oder des Zeropadding-Verfahrens eliminiert werden muss. Denn der Gleichstromanteil lässt sich als ein Sinus- oder Cosinussignal der Frequenz  $f = 0$  betrachten, und demzufolge besitzt der Betrag der DTFT ein Maximum bei der Frequenz  $f = 0$ . Existiert eine niederfrequente Signalkomponente, ist eine Überlagerung zwischen deren DTFT und den Nebenzipfeln der DTFT des Gleichstromanteils möglich. Dies führt bei der Bestimmung der Größen niederfrequenter Signalkomponenten zu fehlerhaften Ergebnissen der DFT/FFT sowie ebenfalls des Zeropadding-Verfahrens und der CZT.



**Bild 4.5** DFT/FFT und DTFT eines niederfrequenten Signals unter dem Einsatz der Rechteck-Fensterfunktion

### 4.3.3 Multifrequenz-Signale bei synchroner Abtastung

Die Bestimmung der Größe eines Multifrequenz-Signals mit bekannten Frequenzen

$$x(t) = \sum_{i=1}^p A_i \cdot e^{(2\pi f_i t + \varphi_i)} \quad (4.3.10)$$

lässt sich mit der DFT/FFT effizient durchführen. Werden unter Berücksichtigung des Abtasttheorems die Abtastfrequenz  $f_s$  ( $f_s > 2 \cdot \max\{f_1, f_2, \dots, f_p\}$ ) und die Anzahl der Abtastwerte  $N$  so gewählt, dass die Messzeit – die Fensterlänge  $B = N \cdot \Delta T = N / f_s$  – gleich einem ganzzahligen gemeinen Vielfach aller Perioden der in einem Signal enthaltenen Signalkomponenten ist, tritt kein Leckeffekt in den DFT/FFT-Ergebnissen auf. Dies wird in der Signalverarbeitung als die Bedingung der synchronen Abtastung bezeichnet:

$$B = \text{GV}\{1/f_1, 1/f_2, \dots, 1/f_p\} \quad (4.3.11)$$

Hierbei bedeutet GV ein ganzzahliges gemeinsames Vielfachen. Die Frequenzauflösung der DFT/FFT beträgt  $\Delta f = f_s / N = 1 / B$ . Folglich gilt mit Gl. (4.3.11):

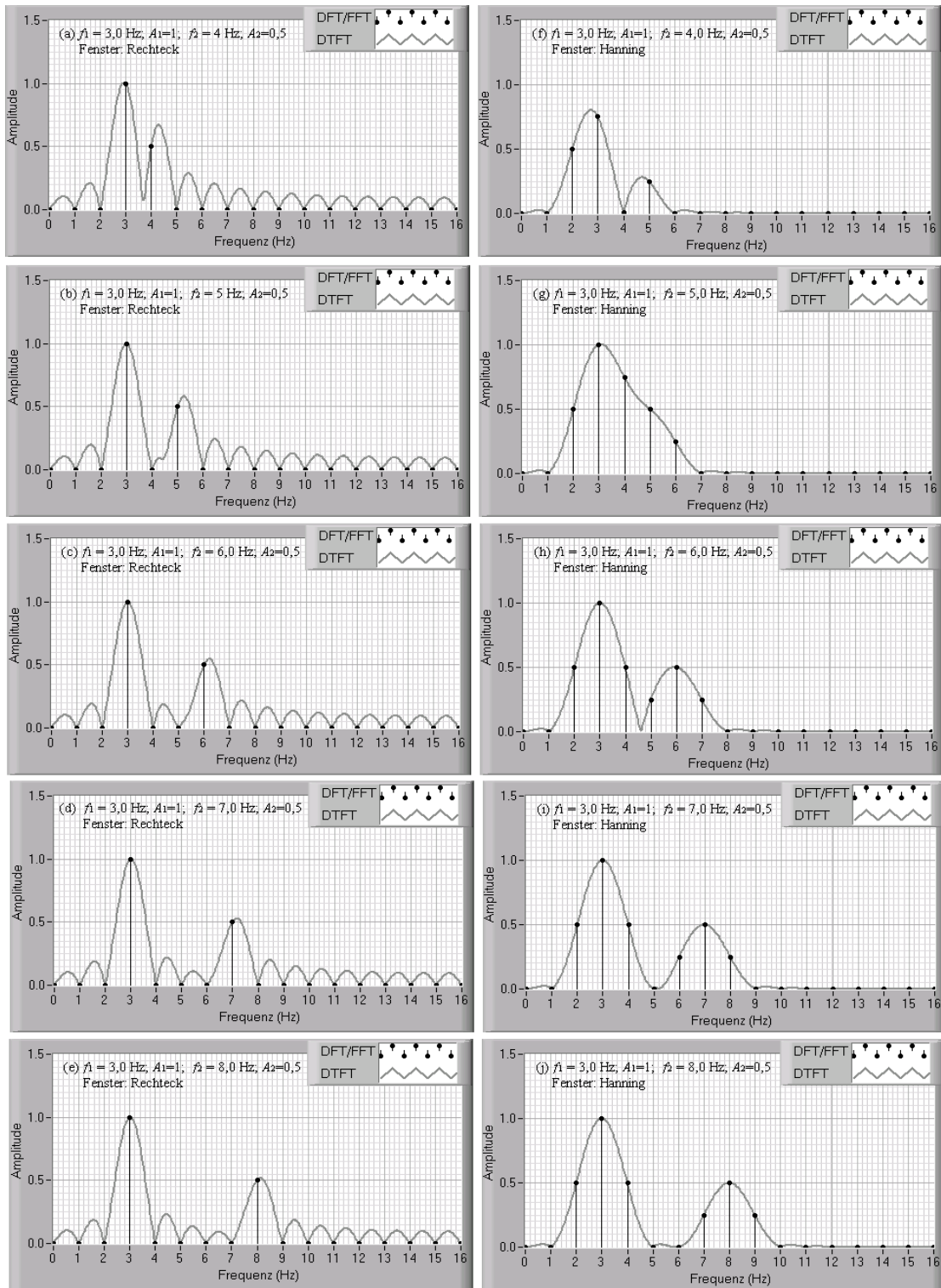
$$f_i = k_i \cdot \Delta f, \quad k_i \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (4.3.12)$$

d. h. alle Frequenzen liegen auf den DFT-Rasterpunkten. Trotz der eventuellen Spektralinterferenz der DTFT (siehe **Bild 3.2**) liefert die DFT/FFT die richtige Information über die Frequenzen, Amplituden und Phasen der in diesem Signal enthaltenen Signalkomponenten. In diesem Fall beträgt das Frequenz-Auflösungsvermögen  $\Delta f$ , was die Untergrenze des Frequenzabstands ist, mit dem man unter Einsatz der Rechteck-Fensterfunktion die zwei harmonischen Komponenten durch die DFT noch richtig auflösen kann (**Bild 4.6 a**). Werden andere Fensterfunktionen eingesetzt, verschlechtert sich das Frequenz-Auflösungsvermögen.

**Bild 4.6** zeigt die Ergebnisse der DFT/FFT und der DTFT des in Gl. (4.3.2) dargestellten Signals bei  $A_1 = 1$  und  $A_2 = 0,5$  unter dem Einsatz der Rechteck- (links) und Hanning-Fensterfunktion (rechts). Das Signal wird mit der Frequenz  $f_s = 32$  Hz in bis zu 32 Punkten abgetastet. So ergibt sich die Frequenzauflösung zu  $\Delta f = 1$  Hz. Die beiden Frequenzen  $f_1$  und  $f_2$  liegen bei der synchronen Abtastung auf den DFT-Rasterpunkten.

Während die DFT/FFT bei der synchronen Abtastung und unter dem Einsatz der Rechteck-Fensterfunktion für den Frequenzabstand  $(f_2 - f_1) = \Delta f$  die Signalkomponenten noch auflösen und die richtigen Informationen über die Frequenzen, Amplituden und Phasen liefern kann (**Bild 4.6 a**), ist die DFT/FFT unter dem Einsatz der Hanning-Fensterfunktion bei kleineren Frequenzabständen nicht mehr in der Lage, die Signalkomponenten richtig zu separieren (**Bild 4.6 f und g**). Daher ist der Einsatz anderer Fensterfunktionen als der Rechteck-Fensterfunktion bei synchroner Abtastung mit allen in einem Signal enthaltenen Signalkomponenten nicht sinnvoll. Die CZT bzw. das Zeropadding-Verfahren ist wegen der eventuellen Spektralinterferenz und des höheren Rechenaufwands auch nicht zu empfehlen.





**Bild 4.6** Vergleich des Frequenz-Auflösungsvermögens bei synchroner Abtastung und dem Einsatz verschiedener Fensterfunktionen (links: Rechteck-Fensterfunktion; rechts: Hanning-Fensterfunktion)

Es ist zu bemerken, dass das Spektrum der Hanning-Fensterfunktion auf den Frequenz-Stützstellen der DFT/FFT außerhalb des Hauptzipfels eine Nullstelle besitzt (siehe **Bild 3.5**). Wird der Frequenzabstand größer als 4 Hz ( $4 \cdot \Delta f$ ), entsteht infolgedessen keine Spektralinterferenz zwischen den DTFT der beiden Signalkomponenten auf den Frequenz-Stützstellen der DFT/FFT bei der synchronen Abtastung. In diesem Fall lassen sich die korrekten Größen



der Signalkomponenten mit dem Zeropadding-Verfahren und unter Einsatz der Hanning-Fensterfunktion bestimmen (**Bild 4.6 i und j**).

In den vorangegangenen Beispielen wurden komplexe Signale meist in Betrachtung gezogen. In praktischen Messsituationen hat man üblicherweise mit reellen Signalen zu tun. Aus den bisherigen Betrachtungen können die allgemeinen Bedingungen für die Anwendung der CZT bzw. des Zeropadding-Verfahrens bei reellen Multifrequenz-Signalen unter dem Einsatz der Fensterfunktionen (außer der Rechteck-Fensterfunktion) zusammengestellt werden.

Die Amplituden, Frequenzen und Phasen eines reellen periodischen Signals

$$x(t) = \sum_{i=0}^p A_i \cdot \cos(2\pi f_i t + \varphi_i)$$

lassen sich im Allgemeinen mit der CZT bzw. dem Zeropadding-Verfahren und unter dem Einsatz der geeigneten Fensterfunktion mit beliebiger Genauigkeit bestimmen, wenn

$$\min_{h,k} |f_h - f_k| > \text{BHZ}, \quad h \neq k, \quad h, k \leq p \quad \text{und} \quad (4.3.13)$$

$$\min(f_i) > 0,5 \text{ BHZ}, \quad i \leq p \quad (4.3.14)$$

wobei BHZ die Breite der Hauptzipfels einer Fensterfunktion ist. Für die Hanning-Fensterfunktion beträgt die BHZ  $4 \cdot \Delta f$ .

#### 4.4 Statistische Fehler der CZT und des Zeropadding-Verfahrens bei Störungen

Im letzten Abschnitt wurden ausgehend von der Spektralinterferenz der DTFT eines abgetasteten Signals die Voraussetzungen der richtigen Anwendungen des Zeropadding-Verfahrens oder der CZT zur Bestimmung der Größen periodischer Multifrequenz-Signale behandelt. Die von der Zeitbegrenzung verursachten Fehler der Frequenzen, Amplituden und Phasen in den DFT/FFT-Ergebnissen entsprechen systematischen Fehlern in der Messtechnik. Unter der Berücksichtigung der Bedingungen Gl. (4.3.13) und (4.3.14) lassen sich diese Fehler stark unterdrücken bzw. eliminieren. Dabei wurden die Einflüsse von statistischen Störungen auf die Genauigkeit der zu bestimmenden Größen der Signale nicht in Betracht gezogen. Grundsätzlich treten bei jeder Messung zufällige Störungen auf, da erstens durch die Wechselwirkung mit Sensoren eine Störung verursacht wird und zweitens Messsignalen immer ein Rauschvorgang überlagert ist.

##### 4.4.1 Statistische Analyse der DTFT eines komplexen und reellen weißen Rauschsignals

Aus Gründen der kompakten mathematischen Darstellung wird in der Nachrichtentechnik in den meisten Fällen von einem komplexen weißen mittelwertfreien Rauschsignal ausgegangen. Der Realteil  $\psi_R(t)$  und Imaginärteil  $\psi_I(t)$  von  $\psi(t)$  sind unabhängig und mit derselben Va-

rianz  $\sigma^2/2$  gleich verteilt. Dieses Rauschsignal wird unter der Berücksichtigung des Abtasttheorems mit der Abtastfrequenz  $f_s$  in bis zu  $N$  Punkten abgetastet. Somit ergibt sich eine diskrete Folge:  $\psi[n] \in \mathbb{C}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . Für die Folge gelten:

$$\begin{cases} \mathcal{E}\{\psi[n]\} = \mathcal{E}\{\psi_R[n]\} = \mathcal{E}\{\psi_I[n]\} = 0 \\ \mathcal{E}\{\psi_R[p] \cdot \psi_R[q]\} = \mathcal{E}\{\psi_I[p] \cdot \psi_I[q]\} = \begin{cases} \sigma^2/2 & p = q \\ 0 & p \neq q \end{cases} & p, q = 0, 1, \dots, N-1 \\ \mathcal{E}\{\psi_R[p] \cdot \psi_I[q]\} = 0 \end{cases} \quad (4.4.1)$$

Die DTFT von  $\psi[n]$  lässt sich ausdrücken als:

$$\begin{aligned} \Psi(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} \psi[n] \cdot e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (\psi_R[n] \cdot \cos \Omega n + \psi_I[n] \cdot \sin \Omega n) + j \cdot \sum_{n=0}^{N-1} (\psi_I[n] \cdot \cos \Omega n - \psi_R[n] \cdot \sin \Omega n) \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

$$\Psi_R(e^{j\Omega}) = \text{Re}\{\Psi(e^{j\Omega})\} = \sum_{n=0}^{N-1} (\psi_R[n] \cdot \cos \Omega n + \psi_I[n] \cdot \sin \Omega n) \quad (4.4.3)$$

$$\Psi_I(e^{j\Omega}) = \text{Im}\{\Psi(e^{j\Omega})\} = \sum_{n=0}^{N-1} (\psi_I[n] \cdot \cos \Omega n - \psi_R[n] \cdot \sin \Omega n) \quad (4.4.4)$$

$$\Omega = 2\pi f / f_s \quad (4.4.5)$$

Hierbei sind  $\Psi_R(e^{j\Omega})$  und  $\Psi_I(e^{j\Omega})$  jeweils eine kontinuierliche, periodische und zufällige Funktion, deren Erwartungswert für eine beliebige Frequenz  $\Omega_b = 2\pi f_b / f_s$  null ist, da gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{\Psi_R(e^{j\Omega_b})\} &= \mathcal{E}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} (\psi_R[n] \cdot \cos \Omega_b n + \psi_I[n] \cdot \sin \Omega_b n)\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (\mathcal{E}\{\psi_R[n]\} \cdot \cos \Omega_b n + \mathcal{E}\{\psi_I[n]\} \cdot \sin \Omega_b n) = 0 \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{\Psi_I(e^{j\Omega_b})\} &= \mathcal{E}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} (\psi_I[n] \cdot \cos \Omega_b n - \psi_R[n] \cdot \sin \Omega_b n)\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (\mathcal{E}\{\psi_I[n]\} \cdot \cos \Omega_b n - \mathcal{E}\{\psi_R[n]\} \cdot \sin \Omega_b n) = 0 \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Wenn  $\psi[n]$  noch eine gaußverteilte zufällige Folge ist, können der Real- und Imaginärteil der DTFT  $\Psi_R(e^{j\Omega})$  und  $\Psi_I(e^{j\Omega})$  für eine beliebige Frequenz  $\Omega_b = 2\pi f_b / f_s$  mit einer Gauß-Verteilung beschrieben werden, da eine lineare Kombination mittelwertfreier zufälliger Variablen der Gauß-Verteilung ebenfalls eine gaußverteilte Variable ist [83]. Ist  $\psi[n]$  eine mittelwertfreie zufällige Folge mit einer anderen Verteilung, können nach dem zentralen Grenzwertsatz [2] der Real- und Imaginärteil  $\Psi_R(e^{j\Omega})$  und  $\Psi_I(e^{j\Omega})$  für eine beliebige Frequenz bei einer hinreichenden großen Zahl  $N$  näherungsweise mit einer Gauß-Verteilung beschrieben. Mit Gln (4.4.1) bis (4.4.7) ergeben sich die Varianz von  $\Psi_R(e^{j\Omega})$  und  $\Psi_I(e^{j\Omega})$  und deren Kovarianz:

$$\begin{aligned}
 \sigma_R^2 &= \text{var} \{ \Psi_R(e^{j\Omega_b}) \} = \mathcal{E} \{ | \Psi_R(e^{j\Omega_b}) - \mathcal{E} \{ \Psi_R(e^{j\Omega_b}) \} |^2 \} = \mathcal{E} \{ | \Psi_R(e^{j\Omega_b}) |^2 \} \\
 &= \mathcal{E} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} (\psi_R[n] \cdot \cos \Omega_b n + \psi_I[n] \cdot \sin \Omega_b n)^2 \right\} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{E} \{ (\psi_R[n] \cdot \cos \Omega_b n + \psi_I[n] \cdot \sin \Omega_b n)^2 \} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} [ \mathcal{E} \{ (\psi_R[n] \cdot \cos \Omega_b n)^2 \} + \mathcal{E} \{ 2\psi_R[n] \cdot \psi_I[n] \cdot \sin \Omega_b n \cdot \cos \Omega_b n \} + \mathcal{E} \{ (\psi_I[n] \cdot \sin \Omega_b n)^2 \} ] \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} [ \mathcal{E} \{ (\psi_R[n]) \} \cdot \cos^2 \Omega_b n + \mathcal{E} \{ (\psi_I[n]) \} \cdot \sin^2 \Omega_b n ] \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} [ \sigma^2 \cdot \cos^2 \Omega_b n + \sigma^2 \cdot \sin^2 \Omega_b n ] / 2 = \frac{N}{2} \cdot \sigma^2 \tag{4.4.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_I^2 &= \text{var} \{ \Psi_I(e^{j\Omega_b}) \} = \mathcal{E} \{ | \Psi_I(e^{j\Omega_b}) - \mathcal{E} \{ \Psi_I(e^{j\Omega_b}) \} |^2 \} = \mathcal{E} \{ | \Psi_I(e^{j\Omega_b}) |^2 \} \\
 &= \mathcal{E} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} (\psi_I[n] \cdot \cos \Omega_b n - \psi_R[n] \cdot \sin \Omega_b n)^2 \right\} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{E} \{ (\psi_I[n] \cdot \cos \Omega_b n - \psi_R[n] \cdot \sin \Omega_b n)^2 \} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} [ \mathcal{E} \{ (\psi_I[n] \cdot \cos \Omega_b n)^2 \} - \mathcal{E} \{ 2\psi_R[n] \cdot \psi_I[n] \cdot \sin \Omega_b n \cdot \cos \Omega_b n \} + \mathcal{E} \{ (\psi_R[n] \cdot \sin \Omega_b n)^2 \} ] \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} [ \mathcal{E} \{ (\psi_I[n]) \} \cdot \cos^2 \Omega_b n + \mathcal{E} \{ (\psi_R[n]) \} \cdot \sin^2 \Omega_b n ] \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} [ \sigma^2 \cdot \cos^2 \Omega_b n + \sigma^2 \cdot \sin^2 \Omega_b n ] / 2 = \frac{N}{2} \cdot \sigma^2 \tag{4.4.9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_{RI} &= \text{cov} \{ \Psi_R(e^{j\Omega_b}) \Psi_I(e^{j\Omega_b}) \} \\
 &= \mathcal{E} \{ [ \Psi_R(e^{j\Omega_b}) - \mathcal{E} \{ \Psi_R(e^{j\Omega_b}) \} ] \cdot [ \Psi_I(e^{j\Omega_b}) - \mathcal{E} \{ \Psi_I(e^{j\Omega_b}) \} ] \} \\
 &= \mathcal{E} \{ \Psi_R(e^{j\Omega_b}) \cdot \Psi_I(e^{j\Omega_b}) \} \\
 &= \mathcal{E} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} (\psi_R[n] \cdot \cos \Omega_b n + \psi_I[n] \cdot \sin \Omega_b n) \cdot \sum_{m=0}^{N-1} (\psi_I[m] \cdot \cos \Omega_b m - \psi_R[m] \cdot \sin \Omega_b m) \right\} \\
 &= \mathcal{E} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} (\psi_R[n] \cdot \psi_I[m] \cdot \cos^2 \Omega_b n - \psi_I[n] \psi_R[m] \sin^2 \Omega_b n + \right. \\
 &\quad \left. + (\psi_I[n] \psi_I[m] - \psi_R[m] \psi_R[n]) \cdot \sin \Omega_b n \cdot \cos \Omega_b n) \right\} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} [ \mathcal{E} \{ \psi_R[n] \cdot \psi_I[m] \} \cdot \cos^2 \Omega_b n - \mathcal{E} \{ \psi_I[n] \psi_R[m] \} \sin^2 \Omega_b n + \\
 &\quad + \mathcal{E} \{ (\psi_I[n] \psi_I[m] - \psi_R[m] \psi_R[n]) \} \cdot \sin \Omega_b n \cdot \cos \Omega_b n ] \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} [ 0 \cdot \cos^2 \Omega_b n + 0 \cdot \sin^2 \Omega_b n + (\frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot \sin \Omega_b n \cdot \cos \Omega_b n ] = 0 \tag{4.4.10}
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (4.4.8) bis (4.4.10) zeigen, dass der Real- und Imaginärteil  $\Psi_R(e^{j\Omega})$  und  $\Psi_I(e^{j\Omega})$  der DTFT eines diskreten mittelwertfreien weißen komplexen Rauschsignals statistisch unabhängig mit derselben Gauß-Verteilung der Varianz  $(N\sigma^2)/2$  (**i. i. d.**) und des Null-Mittelwerts sind, wenn der Real- und Imaginärteil des Rauschsignals **i. i. d.** sind.

In der Praxis entstehen meist reelle Signale. Zur Untersuchung der Einflüsse eines reellen weißen Rauschsignals auf die Größen eines reellen Signals werden hierbei die statistischen

Eigenschaften der DTFT dieses Rauschsignals analysiert. Dieses Rauschsignal wird unter der Berücksichtigung des Abtasttheorems mit der Abtastfrequenz  $f_s$  in bis zu  $N$  Punkten abgetastet. Somit ergibt sich eine diskrete Folge:  $\gamma[n] \in \mathbb{R}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . Für die Folge gelten:

$$\mathcal{E}\{\gamma[n]\} = 0 \text{ und } \mathcal{E}\{\gamma[p] \cdot \gamma[q]\} = \begin{cases} \sigma^2 & p = q \\ 0 & p \neq q \end{cases} \quad p, q = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.4.11)$$

Die DTFT von  $\gamma[n]$  und deren Real- und Imaginärteil lassen sich ausdrücken als:

$$\Gamma(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} \gamma[n] \cdot e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} \gamma[n] \cdot \cos \Omega n - j \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \gamma[n] \cdot \sin \Omega n, \quad \Omega = 2\pi f / f_s. \quad (4.4.12)$$

$$\Gamma_R(e^{j\Omega}) = \text{Re}\{\Gamma(e^{j\Omega})\} = \sum_{n=0}^{N-1} \gamma[n] \cdot \cos \Omega n \quad (4.4.13)$$

$$\Gamma_I(e^{j\Omega}) = \text{Im}\{\Gamma(e^{j\Omega})\} = \sum_{n=0}^{N-1} \gamma[n] \cdot \sin \Omega n \quad (4.4.14)$$

Hierbei sind  $\Gamma(e^{j\Omega})$ ,  $\Gamma_R(e^{j\Omega})$  und  $\Gamma_I(e^{j\Omega})$  eine kontinuierliche, periodische und zufällige Funktion, deren Erwartungswert für eine beliebige Frequenz  $\Omega = 2\pi f / f_s$  null ist, da gilt:

$$\mathcal{E}\{\Gamma(e^{j\Omega})\} = \mathcal{E}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} \gamma[n] \cdot e^{-j\Omega n}\right\} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{E}\{\gamma[n]\} \cdot e^{-j\Omega n} = 0 \quad (4.4.15)$$

$$\mathcal{E}\{\Gamma_R(e^{j\Omega})\} = \mathcal{E}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} \gamma[n] \cdot \cos \Omega n\right\} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{E}\{\gamma[n]\} \cdot \cos \Omega n = 0 \quad (4.4.16)$$

$$\mathcal{E}\{\Gamma_I(e^{j\Omega})\} = \mathcal{E}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} \gamma[n] \cdot \sin \Omega n\right\} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{E}\{\gamma[n]\} \cdot \sin \Omega n = 0 \quad (4.4.17)$$

Der Real- und Imaginärteil können für eine beliebige Frequenz bei einer hinreichenden großen Zahl  $N$  näherungsweise mit einer Gauß-Verteilung beschrieben werden. Hierbei werden die Varianz und Kovarianz des Real- und Imaginärteils von  $\Gamma(e^{j\Omega})$  berechnet:

$$\begin{aligned} \text{var}\{\Gamma_R(e^{j\Omega})\} &= \mathcal{E}\{[\Gamma_R(e^{j\Omega}) - \mathcal{E}\{\Gamma_R(e^{j\Omega})\}]^2\} = \mathcal{E}\{[\Gamma_R(e^{j\Omega})]^2\} \\ &= \mathcal{E}\left\{\left(\sum_{n=0}^{N-1} \gamma[n] \cdot \cos \Omega n\right)^2\right\} = \mathcal{E}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \gamma[m] \cdot \gamma[n] \cdot \cos \Omega m \cdot \cos \Omega n\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \mathcal{E}\{\gamma[m] \cdot \gamma[n]\} \cdot \cos \Omega m \cdot \cos \Omega n \\ &= \sigma^2 \sum_{n=0}^{N-1} \cos^2 \Omega n \rightarrow \begin{cases} \cong N \cdot \sigma^2 / 2 & \Omega \neq k\pi, \quad \Omega \neq k\pi / 2 \\ = N \cdot \sigma^2 & \Omega = k\pi \\ 0 & \Omega = k\pi / 2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}^0 \quad (4.4.18) \end{aligned}$$

$$\text{var}\{\Gamma_I(e^{j\Omega})\} = \sigma^2 \sum_{n=0}^{N-1} \sin^2 \Omega n \rightarrow \begin{cases} \cong N \cdot \sigma^2 / 2 & \Omega \neq k\pi, \quad \Omega \neq k\pi / 2 \\ = N \cdot \sigma^2 & \Omega = k\pi / 2 \\ 0 & \Omega = k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}^0 \quad (4.8.19)$$

$$\text{cov}\{\Gamma_I(e^{j\Omega}) \cdot \Gamma_R(e^{j\Omega})\} = \sigma^2 \sum_{n=0}^{N-1} \sin \Omega n \cdot \cos \Omega n \cong 0 \text{ (hinsichtlich } \frac{N\sigma^2}{2}) \quad (4.4.20)$$

Dabei werden die bekannten trigonometrischen Formeln angewendet:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos^2 \Omega n \rightarrow \begin{cases} \cong \frac{1}{2} & \Omega \neq k\pi, \Omega \neq k \frac{\pi}{2} \\ = 1 & \Omega = k\pi \\ = 0 & \Omega = k \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (4.4.21)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sin^2 \Omega n \rightarrow \begin{cases} \cong \frac{1}{2} & \Omega \neq k\pi, \Omega \neq k \frac{\pi}{2} \\ = 0 & \Omega = k\pi \\ = 1 & \Omega = k \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (4.4.22)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sin \Omega n \cdot \cos \Omega n \cong 0 \quad (4.4.23)$$

Man kann „ $\cong$ “ durch „ $=$ “ ersetzen, wenn  $\Omega = 2\pi m / N$  für eine natürliche Zahl mit  $0 < m < N$  gilt, was den Frequenzpunkten der DFT/FFT entspricht. Mit Gln. (4.4.18) bis (4.4.20) kann davon ausgegangen werden, dass sich der Real- und Imaginärteil  $\Gamma_R(e^{j\Omega})$  und  $\Gamma_I(e^{j\Omega})$  der DTFT eines reellen diskreten mittelwertfreien weißen Rauschsignals bei einer hinreichenden großen Zahl  $N$  näherungsweise als statistisch unabhängige Variable mit der Gauß-Verteilung der Varianz  $(N\sigma^2)/2$  und des Null-Mittelwerts betrachten lassen, d. h. der Real- und Imaginärteil  $\Gamma_R(e^{j\Omega})$  und  $\Gamma_I(e^{j\Omega})$  besitzen die statistischen Eigenschaften wie bei dem in Gl. (4.4.1) dargestellten komplexen Rauschsignal.

Folglich kann der Betrag von  $\Gamma(e^{j\Omega})$

$$\xi = |\Gamma(e^{j\Omega})| = \sqrt{[\operatorname{Re}\{\Gamma(e^{j\Omega})\}]^2 + [\operatorname{Im}\{\Gamma(e^{j\Omega})\}]^2} \quad (4.4.24)$$

für eine beliebige Frequenz  $\Omega_b = 2\pi f_b / f_s$  als eine zufällige Variable mit der Rayleigh-Verteilung beschrieben werden, während die Phase von  $\Gamma(e^{j\Omega})$  allgemeingültig in  $[0, 2\pi]$  gleichmäßig verteilt ist. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und der Erwartungswert der zufälligen Variablen  $\xi = |\Gamma(e^{j\Omega})|$  lassen sich ausdrücken als:

$$f(\xi) = \frac{2\xi}{N\sigma^2} e^{-\frac{\xi^2}{N\sigma^2}} \quad \text{und} \quad \mathcal{E}\{\xi\} = \frac{\sqrt{N\pi}}{2} \sigma, \quad \xi \geq 0 \quad (4.4.25)$$

Mit Gln (4.4.11) bis (4.4.14) ergibt sich die Varianz des Betrags von  $\Gamma(e^{j\Omega})$

$$\begin{aligned} \sigma_\Gamma^2 &= \operatorname{var}\{|\Gamma(e^{j\Omega_b})|\} = \mathcal{E}\{||\Gamma(e^{j\Omega_b})| - \mathcal{E}\{|\Gamma(e^{j\Omega_b})|\}\|^2\} \\ &= \mathcal{E}\{|\Gamma(e^{j\Omega_b})|^2\} - [\mathcal{E}\{|\Gamma(e^{j\Omega_b})|\}]^2 \\ &= \mathcal{E}\{|\Gamma(e^{j\Omega_b})|^2\} - \frac{\pi N}{4} \sigma^2 = \mathcal{E}\{\Gamma(e^{j\Omega_b}) \cdot \Gamma^*(e^{j\Omega_b})\} - \frac{N\pi}{4} \sigma^2 \\ &= \mathcal{E}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} \gamma[n] \cdot e^{-j\Omega_b n} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \gamma[m] \cdot e^{j\Omega_b m}\right\} - \frac{N\pi}{4} \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathcal{E} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \gamma[n] \cdot \gamma[m] \cdot e^{j\Omega_b(m-n)} \right\} - \frac{N\pi}{4} \sigma^2 \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \mathcal{E} \{ \gamma[n] \cdot \gamma[m] \} \cdot e^{j\Omega_b(m-n)} - \frac{N\pi}{4} \sigma^2 = N \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sigma^2
 \end{aligned} \tag{4.4.26}$$

#### 4.4.2 Einfluß eines reellen weißen Rauschsignals auf die geschätzten Größen eines Multifrequenz-Signals

Hierbei wird ein vom in Abschnitt 4.4.1 behandelten reellen weißen Rauschsignal der Varianz  $\sigma^2$  überlagertes Multifrequenz-Signal

$$x(t) = y(t) + \gamma(t) = \sum_{k=0}^{K-1} A_k \cdot (\cos 2\pi f_k t + \phi_k) + \gamma(t) \tag{4.4.27}$$

in Betracht gezogen. Die Frequenzen liegen hinreichend weit voneinander, so dass die systematischen Fehler (Spektralinterferenz) vernachlässigt werden können. Dieses Signal wird unter Berücksichtigung des Abtasttheorems mit der Abtastfrequenz  $f_s$  in bis zu  $N$  Punkten abgetastet. Somit ergibt sich eine diskrete Folge:

$$x[n] = y[n] + \gamma[n] = \sum_{k=0}^{K-1} A_k \cdot [\cos 2\pi \cdot n \cdot (f_k / f_s) + \phi_k] + \gamma[n] \quad n = 0, 1, \dots, N-1; K \in \mathbb{N} \tag{4.4.28}$$

Mit Gl. (4.3.8) und gemäß der Zeitversatz- und Linearitäts-Eigenschaft der DTFT [31] erhält man die DTFT von  $x[n]$ :

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\Omega}) &= Y(e^{j\Omega}) + \Gamma(e^{j\Omega}) \\
 &= 0,5 \sum_{k=0}^{K-1} A_k \cdot \left[ e^{j[\phi_k - \frac{(N-1)(\Omega - \Omega_k)}{2}]} \cdot \frac{\sin \frac{N(\Omega - \Omega_k)}{2}}{\sin \frac{\Omega - \Omega_k}{2}} + e^{j[\phi_k - \frac{(N-1)(\Omega + \Omega_k)}{2}]} \cdot \frac{\sin \frac{N(\Omega + \Omega_k)}{2}}{\sin \frac{\Omega + \Omega_k}{2}} \right] + \Gamma(e^{j\Omega})
 \end{aligned} \tag{4.4.29}$$

Zu bemerken ist, dass für  $Y(e^{j\Omega})$  auf der Frequenz  $\Omega_k = \pm 2\pi f_k / f_s$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) gilt:

$$Y_k = |Y(e^{\pm j2\pi f_k / f_s})| = \frac{1}{2} N A_k \quad \text{und} \quad \angle Y(e^{\pm j2\pi f_k / f_s}) = \phi_k \tag{4.4.30}$$

Benutzt wird hierbei der Grenzwert:

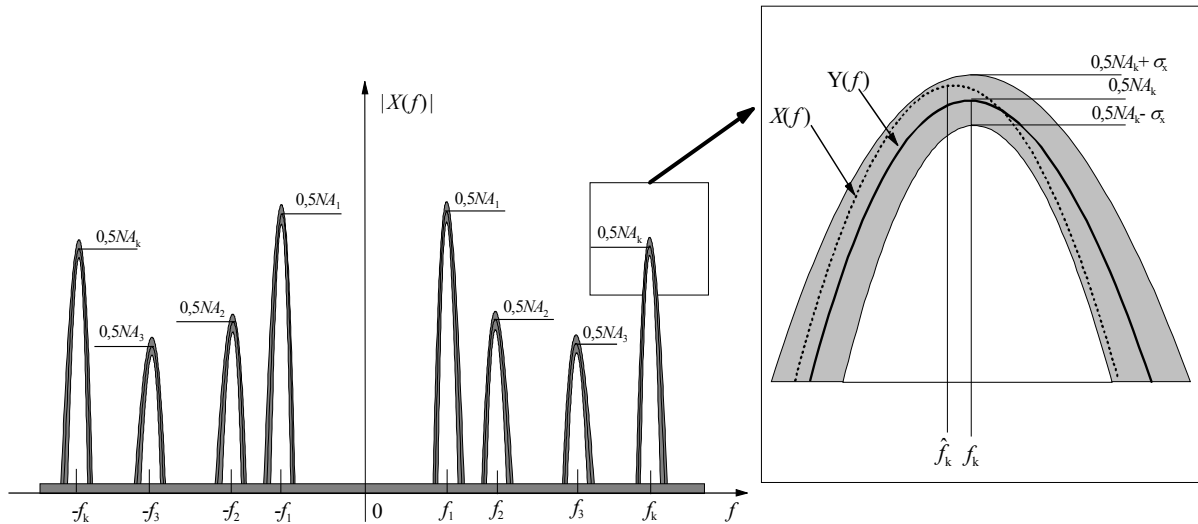
$$\lim_{\Omega \rightarrow \Omega_k} \frac{\sin \frac{N(\Omega - \Omega_k)}{2}}{\sin \frac{\Omega - \Omega_k}{2}} = N \tag{4.4.31}$$

Unter Berücksichtigung von Gln. (4.4.29) und (4.4.30) muss der Betrag  $|X(e^{j\Omega})|$  zur Schätzung der Amplituden mit dem Faktor  $2/N$  skaliert werden:

$$\hat{A}_k = \frac{2}{N} |X(e^{j\Omega_k})| = \frac{2}{N} |X(e^{j2\pi f_k / f_s})| \tag{4.4.32}$$

$$\hat{\phi}_k = \arctan \frac{\text{Im} \{X(e^{j\Omega_k})\}}{\text{Re} \{X(e^{j\Omega_k})\}} \tag{4.4.33}$$

Aus Gl. (4.4.29) ist zu erkennen, dass das weiße Rauschsignal gleichmäßigen Einfluss auf jede in  $x[n]$  enthaltene Signalkomponente nimmt, wie in **Bild 4.7** veranschaulicht.



**Bild 4.7** Veranschaulichung der Einflüsse eines weißen Rauschsignals auf die geschätzten Größen eines Multi-Frequenz-Signals. Der gekennzeichnete Bereich stellt die  $\pm\sigma_x$ -Verteilung dar.

Das Rauschsignal  $\gamma[n]$  verursacht einerseits die Verschiebung der lokalen Maxima entlang der Frequenzachse, was zu einer statistischen Messabweichung der Frequenzen führen kann. Andererseits verursacht das Rauschsignal eine statistische Messabweichung der Amplituden bzw. Phasen. Diese Fehler sind zum einen von der Varianz  $\sigma^2$  des Rauschsignals und zum anderen von der Verschiebung der lokalen Maxima abhängig.

Ausgehend von der Fisher-Informationsmatrix wurde die theoretisch erreichbare Varianz der Frequenzen (Cramer-Rao-Schranke) bei einer ML-Schätzung für ein vom in Gl. (4.4.1) dargestellten komplexen Rauschsignal der Varianz  $\sigma^2$  überlagerten Einzelfrequenz-Signal:

$$e[n] = A_0 e^{j[2\pi f_0(n\Delta T) + \phi_0]} + \psi[n] \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.4.34)$$

in [65] untersucht. Die minimale Standardabweichung der Frequenz (Cramer-Rao-Schranke) lässt sich ausdrücken als [32; 65]:

$$\sigma_{f_0} = \sqrt{\text{var}\{\hat{f}_0\}_{\min}} = \frac{\sigma}{2\pi A_0 \Delta T} \sqrt{\frac{6}{N \cdot (N^2 - 1)}}, \quad \text{mit } \Delta T = 1/f_s, \quad (4.4.35)$$

Für ein vom reellen Rauschsignal in Gl. (4.4.11) überlagertes Multifrequenz-Signal kann die Cramer-Rao-Schranke zur Schätzung der Frequenzen nur schwer ausgedrückt werden. Sind die Frequenzabstände hinreichend groß, so dass die Spektralinterferenz in der DTFT vernachlässigt werden kann, lässt sich jede Signalkomponente der Frequenz  $f_k$  in Gl. (4.4.28) als zwei Einzelfrequenz-Signale der Frequenz  $f_k$  und  $-f_k$  betrachten [75]. Bei einer hinreichend großen Zahl  $N$  können der Real- und Imaginärteil  $\Gamma_R(e^{j\Omega})$  und  $\Gamma_I(e^{j\Omega})$  der DTFT des reellen diskreten mittelwertfreien weißen Rauschsignals näherungsweise als statistisch unabhängige Variablen mit der Gauß-Verteilung der Varianz  $(N\sigma^2)/2$  und des Nullmittelwerts angesehen werden, wie in Abschnitt 4.4.1 behandelt. Somit erhält man unter Berücksichtigung von Gl. (4.4.30) die Standardabweichung der Frequenzen:

$$\sigma_{f_k} = \frac{\sqrt{3}\sigma}{\pi A_k \Delta T} \cdot \frac{1}{\sqrt{N \cdot (N^2 - 1)}}, \quad \text{mit } \Delta T = 1/f_s, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.4.36)$$

Zur Bestimmung der Varianz der Amplituden wird hierbei von der Varianz von  $|X(e^{j\Omega_k})|$  ausgegangen. Die Zufallsvariable  $\xi = |X(e^{j\Omega_k})|$  kann mit einer Rice-Verteilung beschrieben werden [75]:

$$f(\xi) = \frac{\xi}{\sigma^2} J_0\left(\frac{A_k \xi}{\sigma^2}\right) \cdot e^{-\frac{A_k^2 - \xi^2}{2\sigma^2}} \quad (4.4.37)$$

mit  $J_0$  als Besselfunktion 0. Ordnung. Bei  $A_k \gg \sigma$  lässt sich die Verteilungsfunktion für  $|X(e^{j\Omega_k})|$  mit einer gaußschen Normalverteilung näherungsweise beschreiben [75], und die Varianz bzw. Standardabweichung von  $|X(e^{j\Omega_k})| = \sqrt{X_R^2(e^{j\Omega_k}) + X_I^2(e^{j\Omega_k})}$  kann durch das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz [40] berechnet werden.

$$\begin{aligned} \sigma_{X_k} &= \sqrt{\text{var}\{\sqrt{X_R^2 + X_I^2}\}} \\ &= \sqrt{\left[\frac{\partial \sqrt{X_R^2 + X_I^2}}{\partial X_R}\right]^2 \cdot \text{var}\{X_R\} + \left[\frac{\partial \sqrt{X_R^2 + X_I^2}}{\partial X_I}\right]^2 \cdot \text{var}\{X_I\}} \\ &= \sqrt{\left[\frac{X_R}{\sqrt{X_R^2 + X_I^2}}\right]^2 \cdot \frac{1}{2} N \sigma^2 + \left[\frac{X_I}{\sqrt{X_R^2 + X_I^2}}\right]^2 \cdot \frac{1}{2} N \sigma^2} = \sigma \sqrt{N} \end{aligned} \quad (4.4.38)$$

Mit Gl. (4.4.32) ergibt sich die Standardabweichung der geschätzten Amplitude  $\hat{A}_k$ :

$$\sigma_{\hat{A}_k} = \frac{2\sigma}{\sqrt{N}} \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.4.39)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der geschätzten Phase  $\hat{\phi}_k$  in Gl. (4.4.33) ergibt sich für  $A_k \gg \sigma$  zu [75]

$$f(\phi_k) = \frac{A_k}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cos \phi_k \cdot e^{-\frac{A_k^2 \sin^2 \phi_k}{2\sigma^2}} \quad (4.4.40)$$

Damit kann die Varianz der Phase berechnet werden. Aber mit Hilfe von **Bild 4.8** kann man die Varianz der Phasen bei  $A_k \gg \sigma$  leichter ermitteln.

In **Bild 4.8** ist die komplexe Addition der DTFT von  $Y(e^{j\Omega_k})$  und  $\Gamma(e^{j\Omega_k})$  für einen willkürlich gewählten Punkt dargestellt. Es ergibt sich allgemeingültig der Phasenfehler  $\Delta \phi_k$ :

$$\Delta \phi_k = \arctan \frac{\text{Im}\{X(e^{j\Omega_k})\}}{\text{Re}\{X(e^{j\Omega_k})\}} - \phi_k \quad (4.4.41)$$

Bei  $A_k \gg \sigma$  lässt sich der Phasenfehler  $\Delta \phi_k$  näherungsweise berechnen:

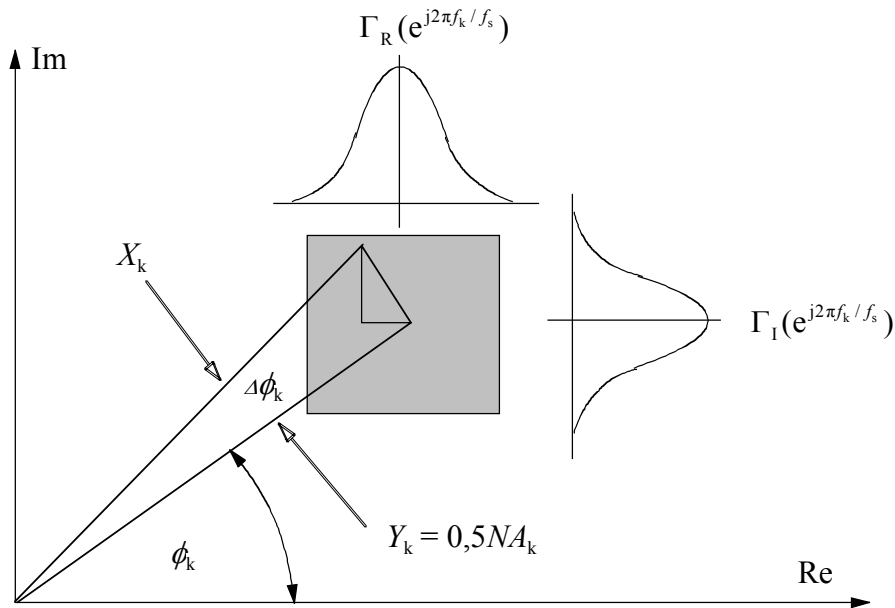


$$\Delta \phi_k \approx \frac{\sqrt{\Gamma_R^2 + \Gamma_I^2}}{Y_k} \quad (4.4.42)$$

$$\begin{aligned} \text{var} \{\hat{\phi}_k\} &= \text{var} \{\hat{\phi}_k - \phi_k\} = \text{var} \{\Delta \phi_k\} \\ &\approx \text{var} \left\{ \frac{\sqrt{\Gamma_R^2 + \Gamma_I^2}}{Y_k} \right\} = \frac{\text{var} \{\sqrt{\Gamma_R^2 + \Gamma_I^2}\}}{Y_k^2} = \frac{\text{var} \{|\Gamma(e^{j\Omega})|\}}{(0,5NA_k)^2} \end{aligned} \quad (4.4.43)$$

Mit Gl. (4.4.26) ergibt sich die Standardabweichung der geschätzten Phase:

$$\sigma_{\hat{\phi}_k} = \sqrt{\text{var} \{\hat{\phi}_k\}} \approx \frac{\sigma}{A_k} \sqrt{\frac{(4-\pi)}{N}} \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.4.44)$$



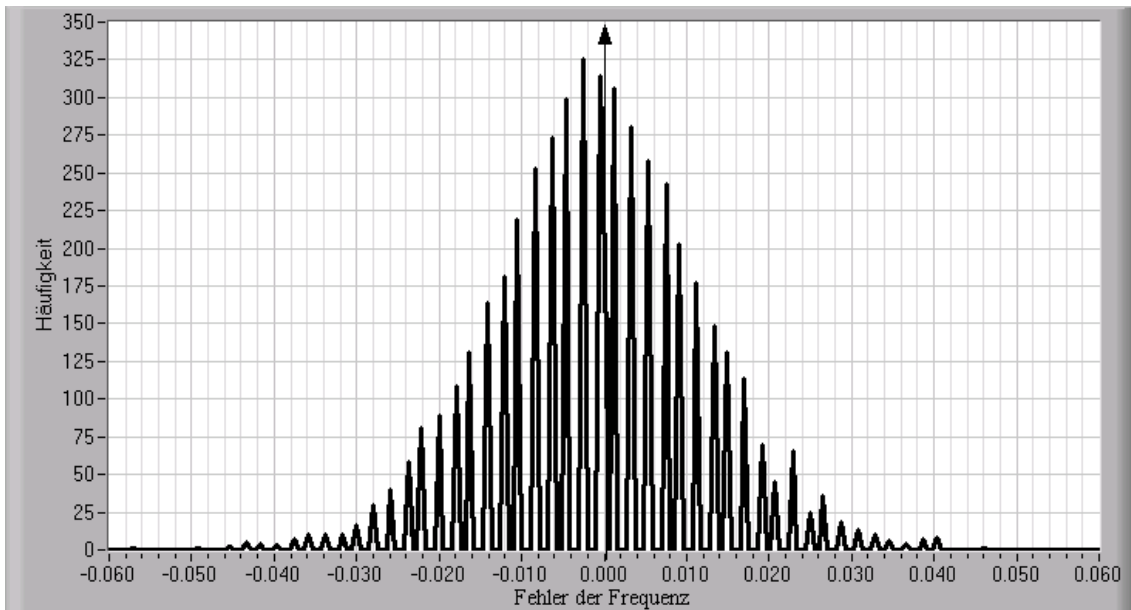
**Bild 4.8** Phasordiagramm in komplexer Darstellung der Amplitude

#### 4.4.3 Schwellenwert des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses (SNR)

Die durch das lokale Maximum  $|X(e^{j\Omega})|$  geschätzte Frequenz  $\hat{f}_k$  ist eine Maximum-Likelihood-Schätzung für die Frequenz  $f_k$  [2; 32]. Diese Schätzung hat bei  $A/\sigma > 1$  die folgenden Eigenschaften [66]:

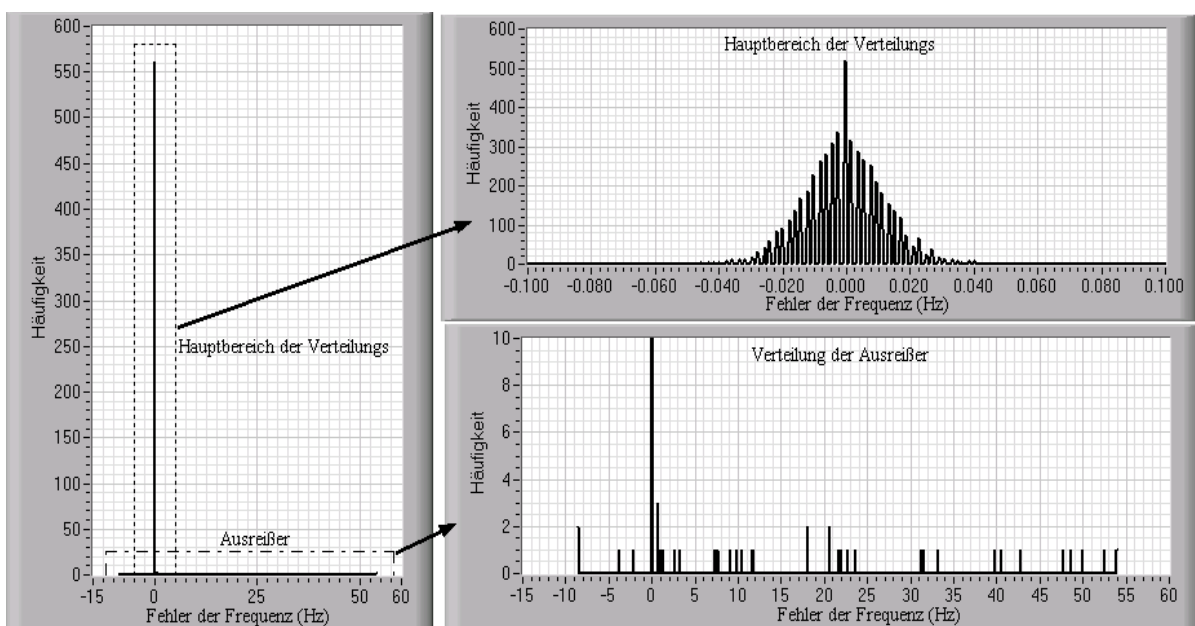
- Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist um  $f_k$  symmetrisch, d. h.  $\mathcal{E}\{\hat{f}_k - f_k\} = 0$ ;
- Die Varianz von  $\hat{f}_k$  ist von der Phase  $\phi_k$  unabhängig und von  $(f_s/N)^2$  proportional.

**Bild 4.9** zeigt die Häufigkeit der Frequenzfehler bei 5000 unabhängigen Simulationen mit dem Zeropadding-Verfahren. Dabei wurden die Frequenzfehler eines vom weißen Rauschsignal überlagerten Cosinussignals der Frequenz  $f_k = 15$  Hz bei  $f_s = 512$  Hz,  $N = 512$  und  $\text{SNR} = A/\sigma = 2$  berechnet. Daraus ist erkennbar, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Frequenzfehler näherungsweise als eine Gauß-Verteilung mit geringer Varianz angesehen werden kann.



**Bild 4.9** Häufigkeit der Frequenzfehler ( $\hat{f}_k - f_k$ ) bei  $\text{SNR} = 2$  ( $\max \{|\hat{f}_k - f_k|\} = 0.06$  Hz)

Bei niedrigem SNR ( $A/\sigma$ ) entsteht häufig großer Frequenzfehler bei Anwendungen der CZT bzw. des Zeropadding-Verfahrens, wie bei anderen Maximum-Likelihood-Methoden. Die geschätzte Frequenz mit großem Fehler wird in der Signalverarbeitung als Ausreißer bezeichnet [66]. **Bild 4.10** stellt die Häufigkeit der Frequenzfehler bei 5000 unabhängigen Simulationen dar. Dabei wurden die Frequenzfehler eines vom weißen Rauschsignal überlagerten Cosinussignals der Frequenz  $f_k = 15$  Hz bei  $f_s = 512$  Hz,  $N = 512$  und  $\text{SNR} = A/\sigma = 0,25$  (ca.  $-12$  dB) berechnet. Die Verteilung der Frequenzfehler im Hauptbereich (**Bild 4.10** rechts oben) ist der Verteilung in **Bild 4.9** ähnlich. Aber es treten bei einigen Schätzungen doch große Frequenzfehler auf (**Bild 4.10** rechts unten).

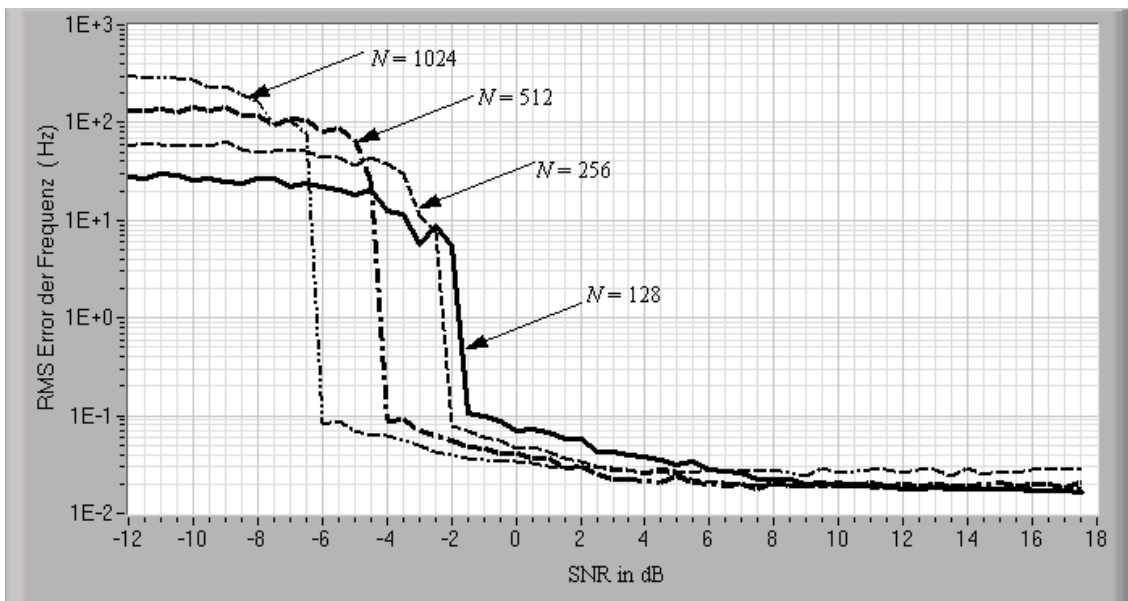


**Bild 4.10** Häufigkeit der Frequenzfehler ( $\hat{f}_k - f_k$ ) bei  $\text{SNR} = 0,25$  ca.  $-12$  dB ( $\max \{|\hat{f}_k - f_k|\} = 53$  Hz)

Im Allgemeinen hat ein digitaler Frequenz-Schätzer einen Schwellenwert für das Signal-zu-Rausch-Verhältnis [66]. Bei niedrigem SNR gibt es einen Bereich des SNR, in dem die quadratischen Mittelwerte der Frequenzfehler sehr schnell mit dem Abfall des SNR steigen. Dies kann auf das Auftreten der Ausreißer der geschätzten Frequenzen zurückgeführt werden. Die Wahrscheinlichkeit  $q$  der Ausreißer der geschätzten Frequenzen wurde für das in Gl. (4.4.34) dargestellte Signal in [66] berechnet:

$$q = \frac{1}{N} \sum_{m=2}^N \left[ \frac{N!(-1)^m}{(N-m)!m!} \cdot e^{-\frac{NA^2(m-1)}{2m\sigma^2}} \right] \quad (4.4.45)$$

Dabei ist erkennbar, dass die Wahrscheinlichkeit der Frequenz-Ausreißer bei gegebenem SNR von der Anzahl der Abtastpunkte und dem SNR abhängig ist. Für die CZT bzw. das Zeropadding-Verfahren kann der Schwellenwert des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses numerisch daher bestimmt werden. **Bild 4.11** zeigt beispielhaft die Ergebnisse der quadratischen Mittelwerte der Frequenzfehler der 5000 unabhängigen Simulationen für verschiedene Anzahlen der Abtastpunkte bei einer Messezeit von 1 s. Dabei ist erkennbar, dass der Schwellenwert des SNR mit der Erhöhung der Anzahl der Abtastpunkte erheblich abnimmt. Bei hohem SNR (z. B.  $A/\sigma > 1$ ) und hoher Anzahl der Abtastpunkte lässt sich die Frequenz durch das Zeropadding-Verfahren mit hoher Sicherheit und Genauigkeit deshalb bestimmen.



**Bild 4.11** Quadratische Mittelwerte der Frequenzfehler (Messezeit =  $N \cdot \Delta T = N / f_s = 1$  s)

## 4.5 Praktische Betrachtung der CZT und des Zeropadding-Verfahrens

Aus bisherigen Ausführungen kann davon ausgegangen werden, dass die CZT und das Zeropadding-Verfahren sich zur Bestimmung der Größen eines vom Rauschen gestörten Multifrequenz-Signals beim Einsatz einer geeigneten Fensterfunktion und unter Berücksichtigung der Bedingungen (4.3.13) und (4.3.14) sowie des Schwellenwerts des SNR anwenden lassen. Interessiert nur ein kleiner Ausschnitt des Spektrums, kann man die Chirp-z-Transformation

einsetzen und eine höhere Frequenzauflösung ist möglich. Vorteilhaft ist die CZT immer dann, wenn man beispielsweise die Lage lokaler Maxima des Spektrums genauer bestimmen will, z. B. bei der Bestimmung der Grundfrequenz eines harmonischen Signals. Die Frequenzauflösung der CZT ist in Gl. (3.4.8) dargestellt. Mit dem Zeropadding-Verfahren kann man ebenfalls mit hoher Frequenzauflösung das Spektrum eines diskreten Signals im Bereich von 0 Hz bis  $f_s/2$  berechnen, welches mit den auf der Fourier-Transformation basierenden Verfahren darstellbar ist. Die Frequenzauflösung des Zeropadding-Verfahrens lässt sich mit Gl. (3.4.16) berechnen. Wie die CZT kann das Zeropadding-Verfahren ebenfalls die Lage lokaler Maxima des Spektrums genauer als die DFT/FFT bestimmen. Dabei spielen die erforderliche Frequenzauflösung und der Rechenaufwand eine große Rolle. Im Folgenden wird der Rechenaufwand der CZT und des Zeropadding-Verfahrens in Betracht gezogen. Für die Verarbeitungszeit in einem Rechner ist die Anzahl der Multiplikationen maßgebend. Zur Abschätzung der Rechenzeit beschränkt man sich darum auf die Bestimmung der Anzahl dieser „wesentlichen“ Operationen.

Die Anzahl der Multiplikationen zur Berechnung der FFT einer mit der Abtastfrequenz  $f_s$  gewonnenen diskreten Folge der Länge  $N$  ( $N = 2^p$ ,  $p \in \mathbb{N}^+$ ) beträgt  $(N/2) \cdot \log_2 N$  [9]. Damit ergibt sich die Frequenzauflösung  $\Delta f = f_s / N$ .

Wird diese Folge durch Einfügen von Nullen bis zu  $N' = 2^q$  ( $q \in \mathbb{N}^+$ ) verlängert und der FFT unterworfen, erhält man die Frequenzauflösung des Zeropadding-Verfahrens  $\Delta f' = f_s / N'$ . Der Rechenaufwand der direkten Berechnung der FFT beträgt  $(N'/2) \cdot \log_2 N'$ . In der Praxis kann dieser Rechenaufwand durch die „FFT-Pruning-Technik“ um  $(q-p) \cdot 2^{q-1}$  reduziert werden [86; 87].

Wenn die CZT der diskreten Folge der Länge  $N$  durch die in **Bild 3.8** dargestellten Algorithmusstruktur (schnelle Faltung) berechnet wird und nur ein kleiner Ausschnitt des Spektrums im Bereich von  $f_1$  bis  $f_2$  interessiert, ergibt sich nach Gl. (3.4.8) die Frequenzauflösung zu  $\delta f = (f_2 - f_1)/(N-1)$ . Die Anzahl der Multiplikationen zur Berechnung der CZT der diskreten Folge der Länge  $N$  beträgt  $4N + K(2N+1)\log_2 N$  [87], wobei  $K$  ein von  $N$  abhängiger Koeffizient ist. Die Simulationen in [44] zeigten, dass die Rechenzeit der CZT für eine Abtastfolge mit  $N = 1024$  Punkten dem etwa 20-fachen der Rechenzeit entspricht, welche die FFT bei einer Abtastfolge gleicher Länge für die Berechnung benötigt.

Im Folgenden wird zur Veranschaulichung der Rechenaufwand für die CZT und das Zeropadding-Verfahren an Beispielen gegenüber gestellt. Dabei wird angenommen, dass die Spektralinterferenz stark unterdrückt bzw. eliminiert sind.

*Beispiel 1:* Ein Signal wird unter Berücksichtigung des Abtasttheorems mit  $f_s = 1000$  Hz mit bis zu  $N = 1024$  Punkten digitalisiert. Mit der DFT/FFT erhält man die Frequenzauflösung  $\Delta f = f_s / N = 1000 / 1024 \approx 1$  Hz. Die Anzahl der Multiplikationen zur Berechnung der FFT ist 5120. Will man eine Frequenzauflösung 0,25 Hz erhalten, kann die originale Folge bis zu  $4N = 4096$  verlängert und der DFT/FFT unterworfen werden. Somit ergibt sich die Frequenzauflösung zu  $\Delta f' = f_s / (4N) = 0,24$  Hz. Die Anzahl der Multiplikationen bei direkter Berechnung der FFT ist 24576. Würde die „FFT-Pruning-Technik“ eingesetzt, würde die Anzahl der Multiplikationen 20480 beitragen, was dem 5-fachen der Rechenzeit entspricht, die zur Berechnung der FFT bei einer Abtastfolge gleicher Länge benötigt wird. Wenn man durch die CZT einen kleinen Ausschnitt des Spektrums (z. B. im Bereich von 25 Hz – 75 Hz) berechnen will, erhält man eine Frequenzauflösung etwa 0,02 Hz. Dafür braucht man die 20-fache der Rechenzeit der entsprechenden FFT. Während das Zeropadding-Verfahren die Informationen über die Amplituden, Frequenzen und Phasen der im Bereich von 0 Hz bis etwa  $f_s / 2 = 500$  Hz enthaltenen Signalkomponenten des Signals liefern kann, kann man bei der CZT nur in einem kleineren Bereich (von 25 Hz bis 75 Hz in diesem Beispiel) die Informationen berechnen. In diesem Fall ist der Einsatz des Zeropadding-Verfahrens sinnvoll.

*Beispiel 2:* Bei der Messung der Frequenzschwankung eines Umrichters ist eine Frequenzauflösung von 0,01 Hz bei 50 Hz notwendig. Mit der DFT/FFT wird eine Messzeit von 100 s verlangt. Wird das Signal unter Berücksichtigung des Abtasttheorems mit  $f_s = 1000$  Hz mit bis zu  $N = 1024$  Punkten digitalisiert (Messzeit: etwa 1 s), kann man bei der Berechnung der CZT den Ausschnitt des Spektrums auf den Bereich von 45 – 55 Hz beschränken und die Frequenzauflösung von 0,01 Hz erhalten. Die Rechenzeit für die CZT entspricht dem 20-fachen der Rechenzeit der entsprechenden FFT. Würde das Zeropadding-Verfahren eingesetzt, müßte die originale Abtastfolge mit Nullen von  $127N$  eingefügt werden. Dabei wird berücksichtigt, dass sich die FFT einer Folge der Länge von  $N = 2^p$  ( $p \in \mathbb{N}^+$ ) effizient berechnen lässt. Die Rechenzeit für das Zeropadding ist über das 200-fache der Rechenzeit der entsprechenden FFT. In diesem Fall ist die Anwendung der CZT zu empfehlen.

## Kapitel 5

# Messung von elektrischen Signalen an umrichter gespeisten Motoren

Die Prüfstände der Hersteller für Elektromotoren dienen vornehmlich der Wareneindkontrolle. Mit ihnen werden insbesondere bei kundenspezifischen Motoren die vom Kunden geforderten technischen Daten geprüft. Für die Prüfung und Diagnose sind folgende elektrische Parameter von Interesse:

- Grundfrequenz der Umrichter Ausgangsspannung
- Effektivwerte der Spannungen und Ströme der 3 Außenleiter bei der Grundfrequenz
- Wirkleistungen der 3 Außenleiter bei der Grundfrequenz
- Phasenwinkel der 3 Außenleiter bei der Grundfrequenz

Bei Anwendungen von umrichter gespeisten Motoren ist in vielen Fällen erforderlich, die harmonischen und interharmonischen Komponenten der Umrichter Ausgangsspannung zu separieren, da die interharmonischen Komponenten zu Drehmomentschwankungen führen können [19].

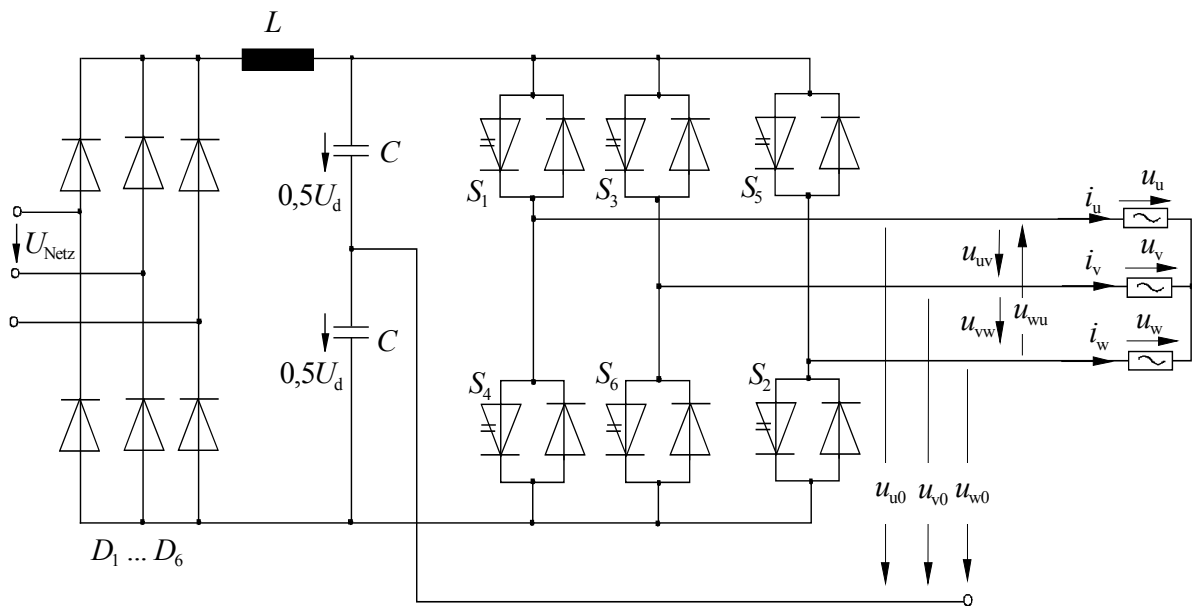
In folgendem wird das Kreuzleistungsdichtespektrum zur Unterdrückung der stochastischen Störungen erläutert. Anschließend wird das TDA-Verfahren (*Time Domain Averaging*) für die Verarbeitung harmonischer Komponenten der Umrichter Ausgangsspannung beschrieben. Dann wird ein digitales Filter für die Bearbeitung der interharmonischen Komponenten vorgestellt.

### 5.1 Umrichter Ausgangsspannung

Die Asynchronmotoren mit Käfigläufer werden wegen ihrer hervorragenden Eigenschaften in vielen Antrieben bevorzugt eingesetzt [19]. Bedingt durch ihr Funktionsprinzip als Drehfeldmaschinen ist die Betriebsdrehzahl der Asynchronmotoren mit Käfigläufer eng mit der Frequenz der speisenden Spannungsquelle verknüpft. Im Betrieb am starren Netz besteht zur wirtschaftlichen Drehzahlstellung lediglich die Möglichkeit der Polumschaltung, mit der die Drehzahl jedoch nur in diskreten Stufen verändert werden kann. Die Drehzahlstellung über die Höhe der Motorspannung führt zur Verschlechterung des Wirkungsgrades und ist darum nur für kleine Leistungen praktikabel [36]. Die einzige wirtschaftliche Möglichkeit einer kontinuierlichen Drehzahlstellung besteht darin, der Asynchronmaschine ein Netz mit variabler Frequenz zur Verfügung zu stellen. Dies wäre prinzipiell mit rotierenden Umformern möglich, was jedoch ebenfalls aus Kostengründen ausscheidet. Erst die kostengünstige Entwicklung auf dem Gebiet der Leistungselektronik ermöglichte den breiten Einsatz von statischen Umrichtern und eröffnete damit dem Käfigläufer das Feld der drehzahlgeregelten Antriebe. Zur Drehzahlregelung stehen die umrichter gespeisten Asynchronmaschinen daher in Konkur-

renz zu den klassischen Drehzahlregelantrieben mit Gleichstrommaschinen und haben diese auf vielen Gebieten verdrängt.

**Bild 5.1** zeigt das Leistungsteil eines Umrichters mit eingepprägter Spannung im Zwischenkreis und die angeschlossene Asynchronmaschine. Er besteht aus dem netzseitigen Gleichrichter, dem Gleichspannungszwischenkreis und dem motorseitigen Wechselrichter. Im Gleichspannungszwischenkreis bilden die Induktivität  $L$  und der Kondensator  $C$  einen Tiefpass, um einerseits zur Wechselrichterseite hin die Zwischenkreisspannung konstant zu halten, andererseits die Stromberschwingungen auf der Netzseite zu reduzieren. Die Motorwechselspannung entsteht durch das periodische Ein- und Ausschalten der löschraren Halbleiterschalter  $S_1, S_2, \dots, S_6$ .



**Bild 5.1** Leistungsteil eines U-Umrichters

**Bild 5.2** verdeutlicht die Entstehung der Umrichterausgangsspannung im Blockbetrieb, auch Grundfrequenztaktung genannt. **Bild 5.2 (a)** bis **(c)** zeigt die Verläufe der um  $120^\circ$  versetzten Schaltspannungen  $u_{u0}$ ,  $u_{v0}$  und  $u_{w0}$ . Die Außenleiterspannung ergibt sich aus die Differenz der Schaltspannungen der beteiligen Stränge:

$$u_{uv}(t) = u_{u0}(t) - u_{v0}(t) \tag{5.1.1}$$

Bei Sternschaltung der Motorstränge müssen aufgrund der Knotenpunktbedingung

$$i_u + i_v + i_w = 0 \text{ und } u_u + u_v + u_w = 0 \tag{5.1.2}$$

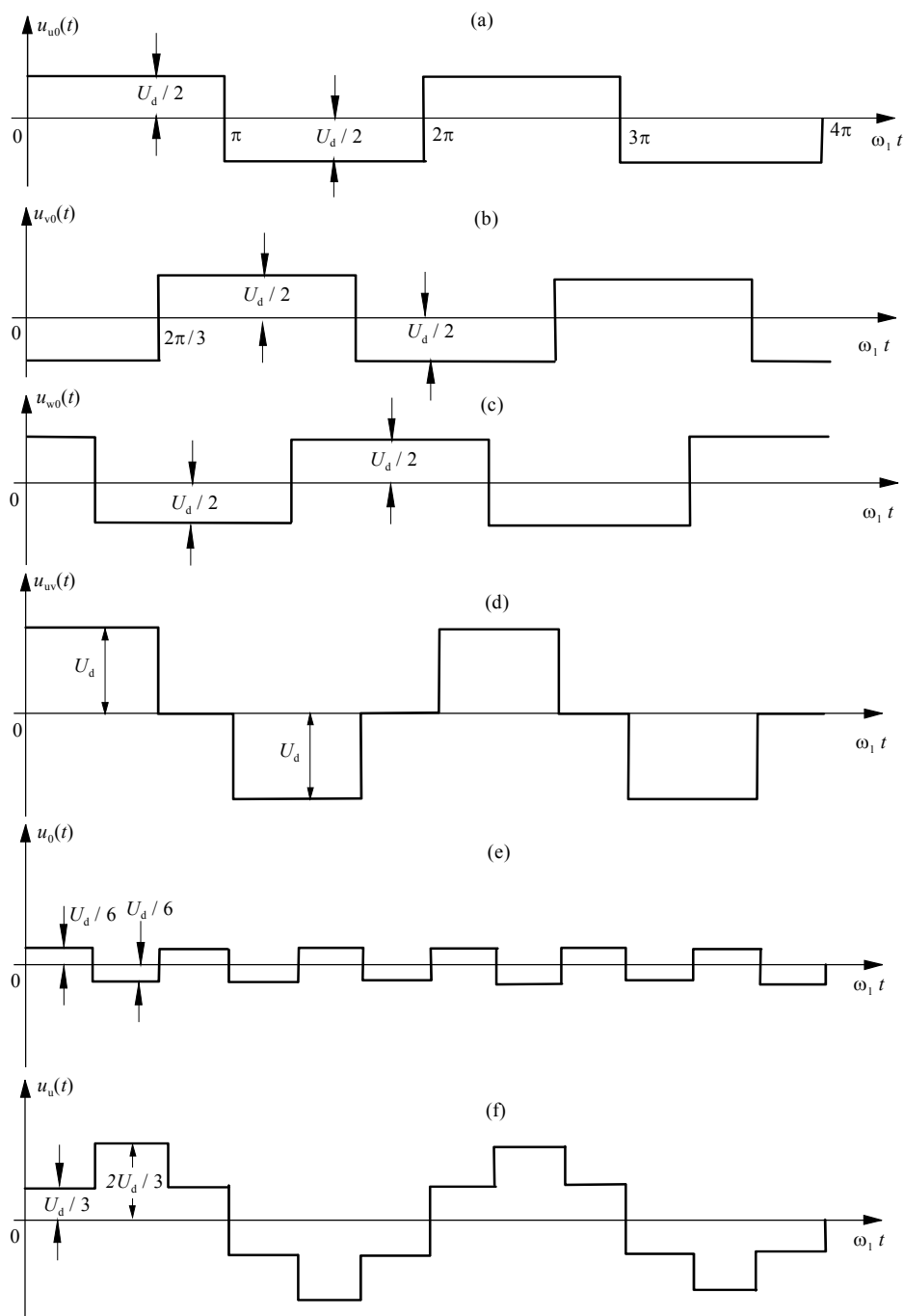
gelten. Mit den Maschinengleichungen [36]

$$u_u - u_v = u_{u0} - u_{v0} \text{ und } u_v - u_w = u_{v0} - u_{w0} \tag{5.1.3}$$

erhält man:

$$\begin{aligned}
 u_u &= u_{u0} - u_0 = \frac{2}{3}u_{u0} - \frac{1}{3}u_{v0} - \frac{1}{3}u_{w0} \\
 u_v &= u_{v0} - u_0 = -\frac{1}{3}u_{u0} + \frac{2}{3}u_{v0} - \frac{1}{3}u_{w0} \\
 u_w &= u_{w0} - u_0 = -\frac{1}{3}u_{u0} - \frac{1}{3}u_{v0} + \frac{2}{3}u_{w0},
 \end{aligned}
 \tag{5.1.4}$$

wobei  $u_0 = \frac{1}{3}(u_{u0} + u_{v0} + u_{w0})$  zur Abkürzung für das Nullsystem der Schaltspannung eingeführt wurde. Im **Bild 5.2 (f)** wird eine daraus entstehende Phasenspannung  $u_u(t)$  dargestellt.



**Bild 5.2** Entstehung der Umrichter Ausgangsspannung im Blockbetrieb [36]



Die bei einer vorgegebenen Speisefrequenz erforderliche Grundschiwingungsspannung und eine gleichzeitige Reduzierung der Oberschwingungen niedriger Ordnungszahlen in der Ausgangsspannung werden durch eine Erhöhung der Taktzahl erreicht. Als Taktzahl wird die Anzahl der untereinander gleichen, entweder positiven oder negativen Schaltzustände während einer Periode bezeichnet. Die Lage der Schaltwinkel ergibt sich aus dem Modulationsverfahren [36]. Ausgangsfrequenzen bis etwa 650 Hz sind heute mit Umrichtern realisierbar [19].

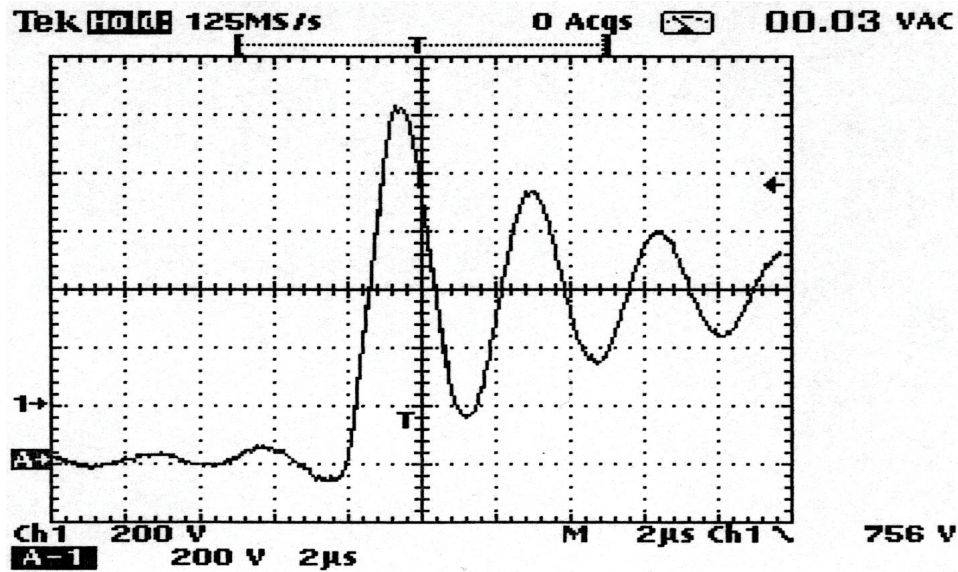
Die ideale Umrichterausgangsspannung besteht aus der Grundschiwingungsspannung und ihren Harmonischen niedriger Amplituden. Allerdings ergeben sich beim Betrieb eines Umrichters je nach Modulationsverfahren mehr oder weniger große Abweichungen von der idealen Steuerkennlinie [41]. Dies führt dazu, dass interharmonische Komponenten auftreten. Nur bei linearer Modulation und gleichmäßig verteilten Belastungen können diese Komponenten klein sein. Tiefgehende Untersuchungen der Entstehung interharmonischer Komponenten bei Umrichtern finden sich z. B. in [12;13;41].

In der Praxis verursachen Umrichter außerdem Störsignale mit einem großen Amplitudenspektrum. Insbesondere wenn die erforderlichen Filter auf der Lastseite des Umrichters fehlen, können kurze Spannungsimpulse einer Dauer von wenigen  $\mu\text{s}$  mit einer Amplitude im KV-Bereich auftreten [6]. Gerade bei bestehenden Anlagen sind Entstörmaßnahmen bedingt durch den Aufbau häufig schwierig. **Bild 5.3** zeigt einen typischen Störimpuls, der durch einen Umrichter verursacht wurde. Impulse dieser Größe treten mit variierendem Abstand mit einer mittleren Frequenz von 5 kHz bis 20 kHz auf. Die zeitliche Abfolge ist im Wesentlichen abhängig von den Parametern [6]:

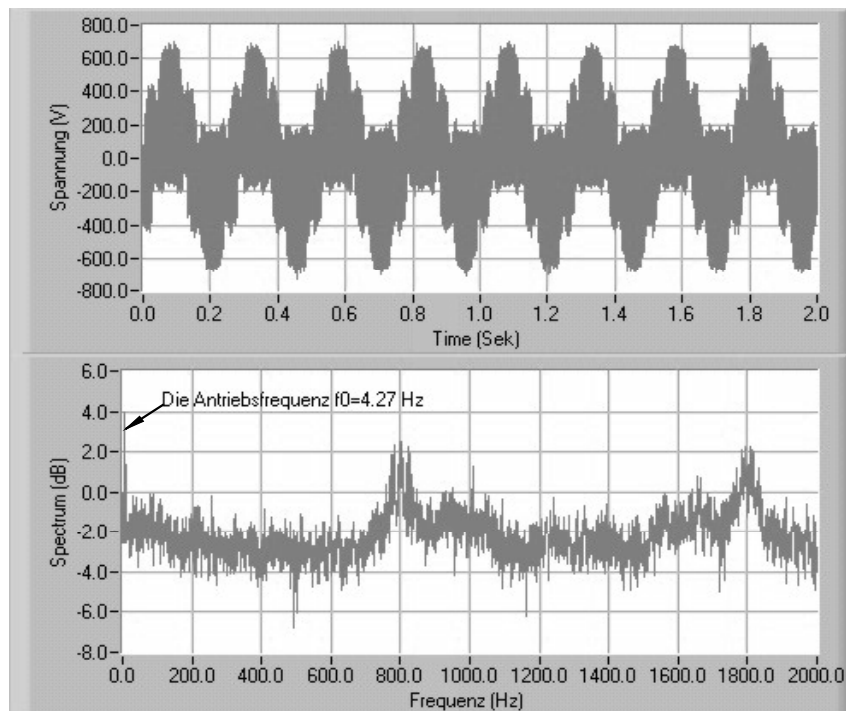
- Zwischenkreisfrequenz des Frequenzumrichters
- Ausgangsfrequenz
- Belastung des Motors

Wird die Energieversorgung auf die Unterdrückung dieser Störsignale nicht ausgelegt, können diese Störspannungsimpulse sich durch kapazitive und induktive Kopplungen über die Energieversorgungsleitungen in der gesamten elektrischen Anlage ausbreiten. Diese Probleme zeigen sich auch häufig in der Praxis beim Anwender. Aus Walzwerken z. B. sind Beschädigungen an Motoren durch Teilentladungsvorgänge auf Grund der hohen Amplituden der Störspannungsimpulse bekannt. Hier werden deshalb zusätzlich zu den Entstörmaßnahmen Motoren mit speziellen elektrisch isolierten Wicklungspaketen verwendet [6].

Im Allgemeinen besteht die Umrichterausgangsspannung aus der Grundschiwingungsspannung und ihren Harmonischen sowie interharmonischen (nicht harmonischen) Komponenten. Dabei lassen sich die durch Umrichter bedingten Störungen und die Störungen anderer Quellen als stochastische Störungen betrachten. **Bild 5.4** stellt ein Spannungssignal aus einem Umrichter dar.



**Bild 5.3** Störpuls an einer Motorwicklung (200 V/Div; 2  $\mu$ s/Div)  
(Werkbild Fa. Klose Antriebstechnik GmbH & Co. KG, Hilchenbach)



**Bild 5.4** Gestörtes Spannungssignal und Autoleistungsdichtespektrum  
(Werkbild Fa. Klose Antriebstechnik GmbH & Co. KG, Hilchenbach)

## 5.2 Bestimmung der Grundfrequenz der umrichtergespeisten Spannung

Bei der Messung von Spannungs- bzw. Stromsignalen treten ebenfalls Messfehler auf. In der Messtechnik unterscheidet man prinzipiell zwischen systematischen Messfehlern und zufälligen Messfehlern. Der wesentliche Unterschied zwischen diesen Fehlerarten liegt in der Vorhersagbarkeit und damit der Korrigierbarkeit der systematischen Fehler, welche bei den zufälligen nicht gegeben ist [40]. Während sich die systematischen Fehler bei der Kalibrierung des Messsystems korrigieren lassen, müssen die zufälligen Messfehler durch geeignete

Messwertverarbeitungsalgorithmen unterdrückt werden. Hierbei werden die zufälligen Messfehler zusammen mit den zufälligen Störungen anderer Fehlerquellen, wie z. B. elektrisch-magnetischer Einfluß aus der Umgebung oder thermisches Rauschen in den Sensoren, als stochastische Störungen betrachtet. Alle Störungen werden Auswirkungen auf das Signal-zu-Rausch-Verhältnis (SNR) haben.

Für die Bestimmung der elektrischen Parameter muss das Messsystem diesen speziellen Bedingungen gerecht werden. Zusätzlich zu einem diesen Störungen entsprechenden Aufbau der Messelektronik muss das System über Messwertverarbeitungsalgorithmen verfügen, die eine ausreichende Unterdrückung dieser Störsignale ermöglichen (siehe Anhang A.2). Die elektrischen Parameter sollten im Hinblick auf einen mobilen Einsatz unabhängig von den Prüfstandsaggregaten bestimmt werden. Das Ziel ist die Erzeugung umfangreicher Prüfzertifikate für die Qualitätssicherung, die auch durch Messungen bei Kunden ergänzt werden können und so eine Unterstützung der Wartung bzw. Verschleißfrüherkennung ermöglichen. Eine Schlüsselfunktion fällt dabei der möglichst exakten Bestimmung der Grundfrequenz der stark gestörten Umrichterausgangsspannung zu.

Die DFT/FFT kann mit geringem Rechenaufwand die Informationen über die Frequenzen, Amplituden, und Phasen der Umrichterausgangsspannung auch bei starken Störungen liefern, wenn ausreichend lange Messzeit zur Verfügung steht. Dabei ist die Messzeit für die möglichst exakte Bestimmung dieser Größen maßgebend. In der Praxis wird oftmals verlangt, dass sich diese Größen in kurzer Messzeit bestimmen lassen. Zum einen können die zu messenden Größen in der übermäßig langen Messzeit nicht stabil sein. Andererseits ist die technisch zugängliche Messzeit stets begrenzt. Außerdem ist eine lange Messzeit in kritischen Fällen nicht zulässig, wie z. B. Messungen bei einem Kurzschluss.

Wie in Abschnitt 3.2 ausgeführt, tritt der Leckeffekt bei Anwendungen der DFT/FFT häufig auf, wenn die Messzeit begrenzt ist. Im Vergleich mit anderen auf der DFT/FFT basierenden Verfahren für die Bestimmung der Größen von im Rauschen versteckten periodischen Signalen bei kurzer Messzeit liefert die CZT bzw. das Zeropadding-Verfahren mit relativ niedrigem Rechenaufwand bessere Ergebnisse. Wie alle anderen Verfahren spielt dabei das Signal-zu-Rausch-Verhältnis eine große Rolle. Zur möglichst exakten Bestimmung der Grundfrequenz der stark gestörten Umrichterausgangsspannung müssen die obengenannten Störungen möglichst unterdrückt werden.

### 5.2.1 Kreuzkorrelation zwischen dem Spannungs- und Stromsignal

Hierbei wird von einer Phase des umrichter gespeisten Motors ausgegangen. **Bild 5.5** zeigt das einphasige Modell, und **Bild 5.6** stellt die gemessenen Signale  $x(t)$  und  $y(t)$  sowie die bei den Messungen auftretenden Störungen  $u_m(t)$  und  $i_m(t)$  am Eingang und Ausgang dar. Dabei ist  $u(t)$  die Phasenspannung und  $i(t)$  der Phasenstrom in der Wicklung des Motors. Es gelten:

$$i(t) = u(t) * h(t) = \int_0^t u(t) \cdot h(t - \xi) \, d\xi, \quad (5.2.1)$$

$$I(s) = H(s) \cdot U(s), \quad (5.2.2)$$

$$I(f) = H(f) \cdot U(f), \quad (5.2.3)$$

wobei

$H(s)$  – die Übertragungsfunktion des Modells

$U(s)$  – die Laplace-Transformierte von  $u(t)$

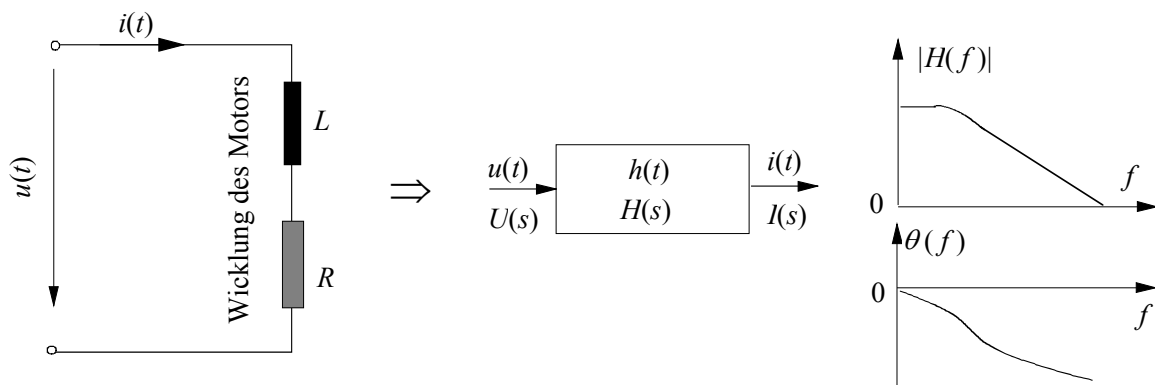
$I(s)$  – die Laplace-Transformierte von  $i(t)$

$H(f)$  – der Frequenzgang des Modells

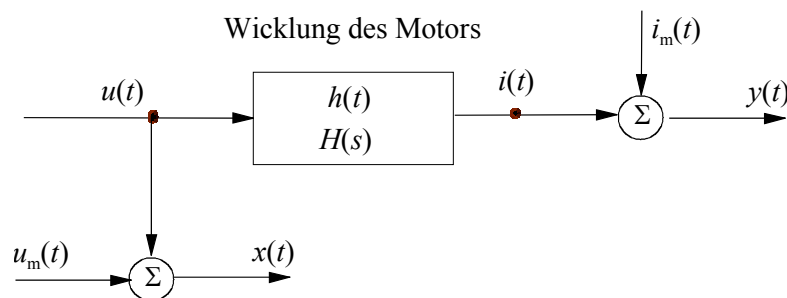
$h(t)$  – die Impulsantwort des Modells, es gilt:  $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$

$U(f)$  – die Fourier-Transformierte von  $u(t)$

$I(f)$  – die Fourier-Transformierte von  $i(t)$



**Bild 5.5** Einphasiges Modell



**Bild 5.6** Signale bei Störungen am Eingang und Ausgang

Zuerst wird angenommen, dass  $u(t)$  nur eine Grundschwingung Frequenz  $f_0$  enthält:

$$u(t) = U_0 \sin(2\pi f_0 t) \quad (5.2.4)$$

Daher gelten nach dem Einschwingvorgang:

$$I(f_0) = H(f_0) \cdot U(f_0) \text{ und} \quad (5.2.5)$$

$$i(t) = U_0 \cdot |H(f_0)| \cdot \sin(2\pi f_0 t - \phi_0), \quad (5.2.6)$$

wobei  $\phi_0 = \angle H(f_0)$  der Phasenwinkel zwischen der Phasenspannung und dem Phasenstrom bei der Grundfrequenz  $f_0$  ist. Weiter seien die Störungen  $u_m(t)$  und  $i_m(t)$  am Eingang und Ausgang des Modells stochastisch unabhängig und mittelwertfrei. Aus **Bild 5.6** ist zu ersehen:

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + u_m(t) \\ y(t) &= i(t) + i_m(t) \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

wobei  $x(t)$  und  $y(t)$  jeweils das gemessene Signal am Eingang und Ausgang des Modells sind. Die Kreuzkorrelationsfunktion zwischen den gemessenen Signalen  $x(t)$  und  $y(t)$  lässt sich nach [24] ausdrücken durch

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T x(t) \cdot y(t + \tau) dt \quad (5.2.8)$$

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T [u(t) + u_m(t)] \cdot [i(t + \tau) + i_m(t + \tau)] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[ \int_{-T}^T u(t) \cdot i(t + \tau) dt + \int_{-T}^T u(t) \cdot i_m(t + \tau) dt + \int_{-T}^T u_m(t) \cdot i(t + \tau) dt + \int_{-T}^T u_m(t) \cdot i_m(t + \tau) dt \right] \\ &= R_{ui}(\tau) + 0 + 0 + 0 = R_{ui}(\tau) \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Mit den Einsatz der Gln. (5.2.4) und (5.2.6) in Gl.(5.2.9) ergibt sich:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= R_{ui}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T u(t) \cdot i(t + \tau) dt \\ &= \frac{1}{2} |H(f_0)| \cdot U_0 \cdot \cos(2\pi f_0 \tau - \phi_0) \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Daraus folgt:

- In der Kreuzkorrelationsfunktion  $R_{xy}(\tau)$  zwischen den gemessenen Signalen  $x(t)$  und  $y(t)$  bleiben die Informationen über die Frequenz des Eingangssignals und den Phasenwinkel zwischen dem Ein- und Ausgangssignal erhalten. Der Phasenwinkel lässt sich zur Berechnung des Leistungsfaktors benutzen.
- Die bei den Messungen am Eingang und Ausgang des Systems entstehenden Störungen werden für den Fall komplett unterdrückt, in dem die Störungen stochastisch unabhängig sind und die Messzeit unendlich lang ist. Bei begrenzter Messzeit kann man eine Schätzung der Korrelationsfunktion leicht mit hoher Genauigkeit erreichen, da die Schätzgröße eine asymptotisch erwartungstreue und konsistente Schätzung der Korrelationsfunktion darstellt [31].

Im Allgemeinen enthält die Ausgangsspannung eines Umrichters außer der Grundschwingung noch die harmonischen und interharmonischen Komponenten sowie den stochastische Anteil:

$$u(t) = U_0 \sin(2\pi f_0 t) + \sum_{k=2}^K U_k^H \sin(2\pi k f_0 t) + \sum_{p=1}^P U_p^1 \sin(2\pi f_p t + \phi_p) + u_R(t), \quad (5.2.11)$$

wobei  $U_k^H$  die Amplitude der  $k$ -ten Harmonischen ist,  $U_p^I$  die Amplitude der  $p$ -ten Interharmonischen ist, und  $u_R(t)$  stellt ein weißes, mittelwertfreies und gaußverteiltes Rauschen mit der Standardabweichung  $\sigma_R$  dar. Unter der Annahme, dass das Rauschen  $u_R(t)$  mit den bei den Messungen am Eingang und Ausgang entstehenden Störungen  $u_m(t)$  und  $i_m(t)$  stochastisch unabhängig ist, kann man ähnlich wie Gl. (5.2.10) erhalten:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} |H(f_0)| \cdot U_0 \cdot \cos(2\pi f_0 \tau - \phi_0) + \sum_{k=2}^K \frac{1}{2} |H(kf_0)| \cdot U_k^H \cdot \cos(2\pi kf_0 \tau - \phi_k) + \sum_{p=1}^P \frac{1}{2} |H(f_p)| \cdot U_p^I \cdot \cos(2\pi f_p \tau - \phi_p) + \sigma_R^2 \cdot h(\tau). \quad (5.2.12)$$

Darin werden die Informationen über die Grundfrequenz des Eingangssignals und den Phasenwinkel zwischen dem Ein- und Ausgangssignal bewahrt, während die bei den Messungen am Eingang und Ausgang des Systems entstehenden Störungen komplett unterdrückt werden können. Außerdem werden die Harmonischen und Interharmonischen höherer Frequenzen sowie der hochfrequente Anteil des Rauschens in der Kreuzkorrelation unterdrückt, da die Wicklung des Motors einem Tiefpassfilter entspricht. Somit erhöht sich das Signal-zu-Rausch-Verhältnis für die Grundschwingung.

### 5.2.2 Bestimmung der Grundfrequenz

Anhand der Kreuzkorrelation zwischen dem Spannungs- und Stromsignal, in der die eventuellen Störungen möglichst stark unterdrückt werden, lässt sich die Grundfrequenz mit verschiedenen Verfahren berechnen, z. B. die in [43] dargestellte Nullstellen-Zähler-Technik für digitale Signale. Bei der Anwendung dieser Technik entsteht kein Leckeffekt, der für die Berechnung der DFT/FFT bei begrenzter Messzeit in den meisten Fällen unvermeidbar ist. Mit dieser Technik kann eine hohe Genauigkeit für die Bestimmung der Grundfrequenz bei hochfrequenten Signalen in langer Messzeit erreicht werden. Bei niederfrequenten Signalen ist allerdings eine relativ hohe Messzeit erforderlich [15]. Existieren interharmonische Komponenten im Signal, können die Nullstellen verändert werden, was zu Frequenzfehlern führen kann.

Wird die Kreuzkorrelation der Fourier-Transformation unterworfen, kann die Grundfrequenz aufgrund der Unterdrückung der Störungen genauer bestimmt werden. Durch die Fourier-Transformation der Kreuzkorrelation erhält man das Kreuzleistungsdichtespektrum. Tatsächlich bilden die Kreuzkorrelation und das Kreuzleistungsdichtespektrum ein Fourier-Transformationspaar, da für zwei beliebige mittelwertfreie stationäre Signale  $\alpha(t)$  und  $\beta(t)$  nach der Wiener-Khintchine-Beziehung gilt [2; 32]:

$$S_{\alpha\beta}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\alpha\beta}(\tau) \cdot e^{-2\pi f \tau} d\tau \quad (5.2.13)$$

wobei  $S_{\alpha\beta}(f)$  das Kreuzleistungsdichtespektrum zwischen den Signalen  $\alpha(t)$  und  $\beta(t)$  ist. Das Kreuzleistungsdichtespektrum ist im Allgemeinen eine komplexe Funktion, deren Betrag ein Maß für die gemeinsame Leistung der beiden Signale bei einer bestimmten Frequenz ist und deren Phase die Phasenverschiebung zwischen den beiden Signalen bei dieser Frequenz wiedergibt.

Für die im letzten Abschnitt dargestellten Signale  $x(t)$  und  $y(t)$  ergibt sich entsprechend:

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) \cdot e^{-2\pi f \tau} d\tau \quad (5.2.14)$$

Im Kreuzleistungsdichtespektrum  $S_{xy}(f)$  verschwinden die Beiträge der bei den Messungen auftretenden Störungen  $u_m(t)$  und  $i_m(t)$ , wenn diese Störungen stochastisch unabhängig sind. Die Amplituden der hochfrequenten Harmonischen und Interharmonischen sowie der hochfrequenten Anteile des Rauschens im Eingangssignal des Stroms werden wegen der Tiefpassfilterung der Motorwicklung unterdrückt, so dass sich die Grundschwingung im Spektrum in den Vordergrund drängt. Die Erhöhung des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses für die Grundschwingung ermöglicht mit der DFT/FFT eine möglichst exakte Bestimmung der Grundfrequenz.

Steht ausreichend lange Messzeit zur Verfügung, kann man zur Berechnung der Grundfrequenz und des Phasenwinkels direkt das Kreuzleistungsdichtespektrum  $S_{xy}(f)$  der digitalisierten Signale von  $x(t)$  und  $y(t)$  anwenden, da sich das Kreuzleistungsdichtespektrum  $S_{xy}(f)$  schnell anhand der DFT von  $x(t)$  und  $y(t)$  berechnen lässt. Dabei wird die zweite Wiener-Khintchine-Beziehung in den meisten Fällen benutzt [5]:

$$S_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathcal{E} \{ X_k(f, T) \cdot Y_k^*(f, T) \} \quad (5.2.15)$$

wobei  $X_k(f, T) = \int_0^T x_k(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$ , und  $Y_k(f, T) = \int_0^T y_k(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$ . Für ergodische Signale

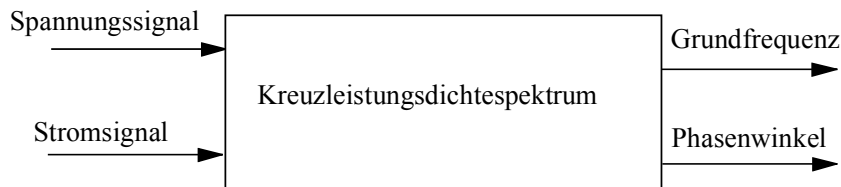
$$\text{gilt: } S_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot [X(f, T) \cdot Y^*(f, T)], \quad (5.2.16)$$

wobei  $X(f, T)$ ,  $Y(f, T)$  die Fourier-Transformationen von  $x(t)$  und  $y(t)$  im Zeitintervall  $[0, T]$  sind und  $Y^*(f, T)$  die zu  $Y(f, T)$  konjugiert komplexe Größe bedeutet.

Da das Kreuzleistungsdichtespektrum  $S_{xy}(f)$  die Fourier-Transformation der Kreuzkorrelation von  $x(t)$  und  $y(t)$  ist, tritt der Leckeffekt bei kurzer Messzeit oder bei nicht synchroner Abtastung auf. Der maximal absolute Frequenzfehler beträgt  $0,5\Delta f$ . Hierbei ist  $\Delta f$  die Frequenzauflösung der DFT und dem Kehrwert der Messzeit gleich.

Zur möglichst exakten Bestimmung der Grundfrequenz bei kurzer Messzeit wird im Rahmen dieser Arbeit die Chirp-z-Transformation (CZT) zur Berechnung von  $X(f, T)$  und  $Y(f, T)$

eingesetzt, was in Kapitel 4 behandelt wurde. Dabei können die Grundfrequenz und der Phasenwinkel berechnet werden. Die Amplitude der Spannung bzw. des Stroms muss mit einem anderen Verfahren bestimmt werden, da die Amplitude der Kreuzkorrelation dem Produkt der Amplituden der Spannung und des Stroms proportional ist (Gl. (5.2.12)). **Bild 5.7** veranschaulicht das Prinzip für die Bestimmung der Grundfrequenz.



**Bild 5.7** Prinzip für die Bestimmung der Grundfrequenz

### 5.3 Bestimmung der elektrischen Größen

Hierbei sind die folgenden elektrischen Größen zu berechnen:

- Effektivwerte der Spannungen und Ströme der 3 Außenleiter bei der Grundfrequenz
- Wirkleistungen der 3 Außenleiter bei der Grundfrequenz

Die Wirkleistung entspricht dem Produkt von Spannungs- und Stromeffektivwert, multipliziert mit dem Cosinus des Phasenwinkels zwischen Strom und Spannung

$$P_W = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \phi_0.$$

Anhand von den Effektivwerten  $U_{\text{eff}}$ ,  $I_{\text{eff}}$  und dem Phasenwinkel  $\phi_0$  kann daher die Messung der Wirkleistung direkt erfolgen.

#### 5.3.1 Effektivwertbildung durch digitale Filterung

Zur Berechnung des Effektivwerts der Phasenspannung bzw. des Phasenstroms bei der Grundfrequenz kann zuerst das Spannungs- bzw. Stromsignal mit einem mitlaufenden digitalen Bandpassfilter mit der Mittelfrequenz der Grundfrequenz gefiltert werden, und der Effektivwert ergibt sich dann zu

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u^2[n]} \quad \text{bzw.} \quad I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} i^2[n]} \quad (5.3.1)$$

Damit können die Wirkleistung und die entsprechenden Leitwerte nach den Beziehungen für die Stern- und Dreieckschaltung berechnet werden [19]. Mit dieser Technik kann eine hohe Genauigkeit für die Bestimmung der Effektivwerte hochfrequenter Signale bei ausreichend langer Messzeit erreicht werden.

Zur Gewinnung der Grundschwingung niederfrequenter Signalen ist ein schmalbandiges Bandpassfilter erforderlich. Daher ist eine relativ hohe Messzeit notwendig [15].



Zur Effektivwertbildung über ein festes Zeitintervall sind, wie beim Einsatz von analogen Filtern auch, das Einschwingverhalten der digitalen Filter und die notwendige Messzeit zu beachten. In der Praxis bedeutet dies, dass die Zeitkonstante des Digitalfilters im Verhältnis zur Messzeit klein sein soll. Als Faustformel kann für die mindestens notwendige Einschwingzeit des Filters gelten:  $T_r = 1/B$ . Dabei ist  $T_r$  in Sekunden anzugeben und  $B$  die Bandbreite des Filters in Hz. Dies entspricht etwa einem Abfall von  $-3$  dB [5].

### 5.3.2 Effektivwertbildung durch die kleinsten Quadrate (*Least Squares – LS*)

Das Prinzip der kleinsten Quadrate wird vielfältig in der Ingenieurwissenschaft und der Statistik verwendet. Es wird angewendet, wann immer ein Maß der „guten Anpassung“ benötigt wird [74; 83].

Hierbei wird ein vom Rauschen  $r(t)$  gestörtes diskretes harmonisches Signal:

$$x[n] = A_0 \cos(2\pi f_0 n \Delta t + \theta_0) + r(n \Delta t), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.3.2)$$

betrachtet. Daraus sind die Frequenz  $f_0$ , Amplitude  $A_0$ , und Phase  $\theta_0$  zu schätzen. Nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate sollen die Schätzwerte  $\hat{f}_0$ ,  $\hat{A}_0$ , und  $\hat{\theta}_0$  die Summe der Fehlerquadrate:

$$S(\hat{f}_0, \hat{A}_0, \hat{\theta}_0) = \sum_{n=0}^{N-1} \{x[n] - \hat{A}_0 \cos(2\pi \hat{f}_0 n \Delta t + \hat{\theta}_0)\}^2 \quad (5.3.3)$$

minimieren. Der Summe  $S$  gehorchen dabei  $\chi^2$ -Verteilung, die asymptotisch normalverteilt ist, auch wenn nicht normalverteilte Störgrößen vorliegen [83]. Zur Bestimmung der Parameter  $\hat{f}_0$ ,  $\hat{A}_0$ , und  $\hat{\theta}_0$  mit der LS-Methode wird Gl. (5.3.3) partiell differenziert und gleich Null gesetzt:

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{f}_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \hat{A}_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \hat{\theta}_0} = 0. \quad (5.3.4)$$

Daraus ergeben sich drei nichtlineare Gleichungen. Bei der analytischen oder numerischen Lösung dieser Gleichungen ist mit hohem Rechenaufwand zu rechnen. Ist ein Parameter, z. B. die Frequenz  $f_0$ , bekannt, wird die Lösung stark vereinfacht.

Hierbei wird angenommen, dass die Frequenz  $f_0$  bekannt ist oder mit geeigneten Verfahren, z. B. der CZT oder dem Zeropadding-Verfahren, möglichst exakt berechnet werden kann.

Dann sind zwei Parameter  $\hat{A}_0$  und  $\hat{\theta}_0$  in Gl. (5.3.3) zu lösen:

$$\begin{aligned} S(\hat{A}_0, \hat{\theta}_0) &= \sum_{n=0}^{N-1} \{x[n] - \hat{A}_0 \cos(2\pi f_0 n \Delta t + \hat{\theta}_0)\}^2 \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \{x[n] - \hat{A}_0 \cos(2\pi f_0 n \Delta t) \cos \hat{\theta}_0 + \hat{A}_0 \sin(2\pi f_0 n \Delta t) \sin \hat{\theta}_0\}^2 \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Zur Minimierung von  $S(\hat{A}_0, \hat{\theta}_0)$  ist:

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{A}_0} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial S}{\partial \hat{\theta}_0} = 0 \quad (5.3.6)$$

erforderlich. Daraus ergeben sich wieder zwei nichtlineare Gleichungen.

Unter Einsetzen von  $X = \hat{A}_0 \cos \hat{\theta}_0$  und  $Y = \hat{A}_0 \sin \hat{\theta}_0$  wird Gl. (5.3.6) umgeformt:

$$S(X, Y) = \sum_{n=0}^{N-1} \{x[n] - X \cdot \cos(2\pi f_0 n \Delta t) + Y \cdot \sin(2\pi f_0 n \Delta t)\}^2 \quad (5.3.7)$$

Die hierin enthaltenen Parameter  $X$  und  $Y$  sind als Schätzgrößen zu verstehen. Die Minimierung von  $S(X, Y)$  verlangt

$$\frac{\partial S}{\partial X} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial S}{\partial Y} = 0. \quad (5.3.8)$$

Mit Gl. (5.3.8) wird die Bedingung (5.3.6) erfüllt, da gilt:

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{A}_0} = \frac{\partial S}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial \hat{A}_0} + \frac{\partial S}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \hat{A}_0} = 0 \quad (5.3.9)$$

$$\text{und} \quad \frac{\partial S}{\partial \hat{\theta}_0} = \frac{\partial S}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial \hat{\theta}_0} + \frac{\partial S}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \hat{\theta}_0} = 0. \quad (5.3.10)$$

Daher kann davon ausgegangen werden, dass die Minimierung von  $S(X, Y)$  zur Minimierung von  $S(\hat{A}_0, \hat{\theta}_0)$  führt.

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial X} = 0 &\Rightarrow 2 \sum_{n=0}^{N-1} \{x[n] - X \cos(2\pi f_0 n \Delta t) + Y \sin(2\pi f_0 n \Delta t)\} [-\cos(2\pi f_0 n \Delta t)] = 0 \\ \Rightarrow &\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi f_0 n \Delta t) - X \sum_{n=0}^{N-1} \cos^2(2\pi f_0 n \Delta t) + 0,5 \cdot Y \sum_{n=0}^{N-1} \sin(4\pi f_0 n \Delta t) = 0 \\ \Rightarrow &X \sum_{n=0}^{N-1} \cos^2(2\pi f_0 n \Delta t) - 0,5 \cdot Y \sum_{n=0}^{N-1} \sin(4\pi f_0 n \Delta t) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi f_0 n \Delta t) \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial Y} = 0 &\Rightarrow 2 \sum_{n=0}^{N-1} \{x[n] - X \cos(2\pi f_0 n \Delta t) + Y \sin(2\pi f_0 n \Delta t)\} [\sin(2\pi f_0 n \Delta t)] = 0 \\ \Rightarrow &\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(2\pi f_0 n \Delta t) - 0,5 \cdot X \sum_{n=0}^{N-1} \sin(4\pi f_0 n \Delta t) + Y \sum_{n=0}^{N-1} \sin^2(2\pi f_0 n \Delta t) = 0 \\ \Rightarrow &0,5 \cdot X \sum_{n=0}^{N-1} \sin(4\pi f_0 n \Delta t) - Y \sum_{n=0}^{N-1} \sin^2(2\pi f_0 n \Delta t) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(2\pi f_0 n \Delta t) \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

Die Gleichungen (5.3.11) und (5.3.12) lassen sich in eine kompakte Matrix-Form umsetzen:

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} \cos^2(2\pi f_0 n \Delta t) & -0,5 \sum_{n=0}^{N-1} \sin(4\pi f_0 n \Delta t) \\ 0,5 \sum_{n=0}^{N-1} \sin(4\pi f_0 n \Delta t) & -\sum_{n=0}^{N-1} \sin^2(2\pi f_0 n \Delta t) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi f_0 n \Delta t) \\ \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(2\pi f_0 n \Delta t) \end{pmatrix} \quad (5.3.13)$$

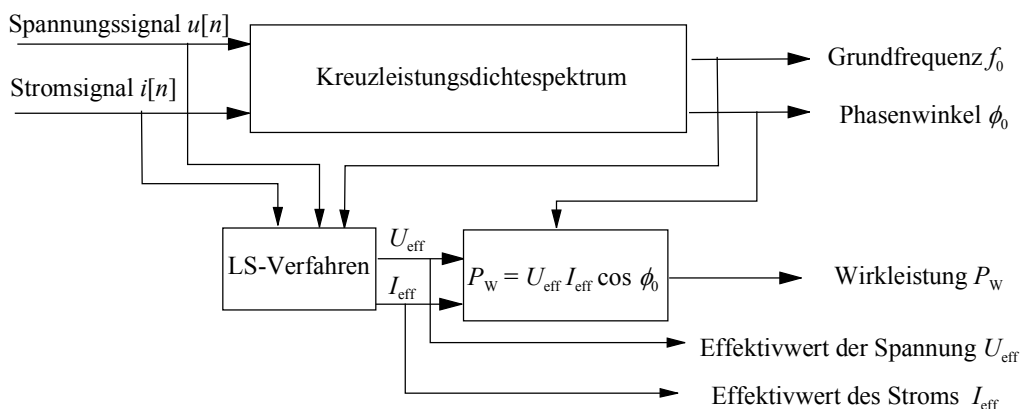
Gl. (5.3.13) stellt die linearen Gleichungen dar, und ist leicht zu lösen. Nach der Lösung von  $X$  und  $Y$  kann man erhalten:

$$\hat{A}_0 = \sqrt{X^2 + Y^2} ; \hat{\theta}_0 = \arctan \frac{Y}{X} \quad (5.3.14)$$

Zur Effektivwertbildung von  $x(t)$  bei der Grundfrequenz kann man die Beziehung für rein sinusförmige Signale benutzen:  $x_{\text{eff}} = \hat{A}_0 / \sqrt{2}$  (5.3.15)

Im Prinzip gibt es bei Anwendungen der LS-Methode keine Beschränkung auf die Länge der Messzeit. Daher lässt sich die LS-Methode zur Bestimmung der Frequenz, Amplitude und Phasen eines im Rauschen versteckten sinusförmigen Signals bei kurzer Messzeit anwenden. Wenn die Frequenz bekannt ist oder mit einem geeigneten Verfahren möglichst genau berechnet werden kann, wird der Rechenaufwand stark reduziert. Wie andere auf der Maximum-Likelihood-Schätzung (MLE) basierende Verfahren wird die Varianz der Schätzgröße der LS-Methode durch die Cramer-Rao-Schranke von unten begrenzt, die mit der Länge der Messzeit im Zusammenhang steht. Je höher die Genauigkeit für die Bestimmung der Schätzgrößen mit der LS-Methode verlangt wird, desto länger muss das zugrunde liegende Zeitsignal sein, desto länger ist die erforderliche Messzeit.

Nach den obigen Behandlungen werden die in diesem Beitrag eingesetzten Verfahren zur Bestimmung der elektrischen Größen umrichter gespeister Motoren in **Bild 5.8** dargestellt. Das mit Hilfe des LabView-Programms realisierte virtuelle Instrument ist in Anhang A.3 beschrieben. Die praktischen Versuche unter industriellen Bedingungen erfolgten mit diesem Verfahren. Die Abweichungen bei der Bestimmung der elektrischen Größen eines umrichter gespeisten Motors in der kürzesten zulässigen Messzeit (1 Sekunde) lagen im Bereich  $< 0,5\%$  v. M..



**Bild 5.8** Flussdiagramm für die Bestimmung der elektrischen Größen umrichter gespeister Motoren

## 5.4 Bearbeitung der harmonischen und interharmonischen Komponenten

In der Literatur wird diejenige Komponente als interharmonische Komponente bezeichnet, deren Frequenz kein Vielfaches der Grundfrequenz ist [41; 116; 117]. Nur bei linearer Modulation und gleichmäßig verteilten Belastungen können diese Komponenten klein sein [64].

Bei praktischen Anwendungen von umrichter gespeisten Motoren sind die harmonischen und interharmonischen Komponenten der Umrichter Ausgangsspannungen bzw. der Ströme in den Wicklungen des Motors im Zeit- und Frequenzbereich zu separieren. Zum einen können interharmonische Komponenten zu Drehmomentschwankungen und Energieverlust führen [19]. Zum anderen ist eine möglichst exakte Bestimmung der harmonischen und interharmonischen Komponenten für Regelungssysteme sehr wichtig [39]. Interharmonische Komponenten eines PWM-Umrichters können im Übertragungsnetz Störungen verursachen [64].

Die Empfehlungen und Definitionen für die Bearbeitung der harmonischen und interharmonischen Komponenten wurden in *The IEC Standard Drafts* eingeführt [116; 117] und hierbei kurz zusammengefasst:

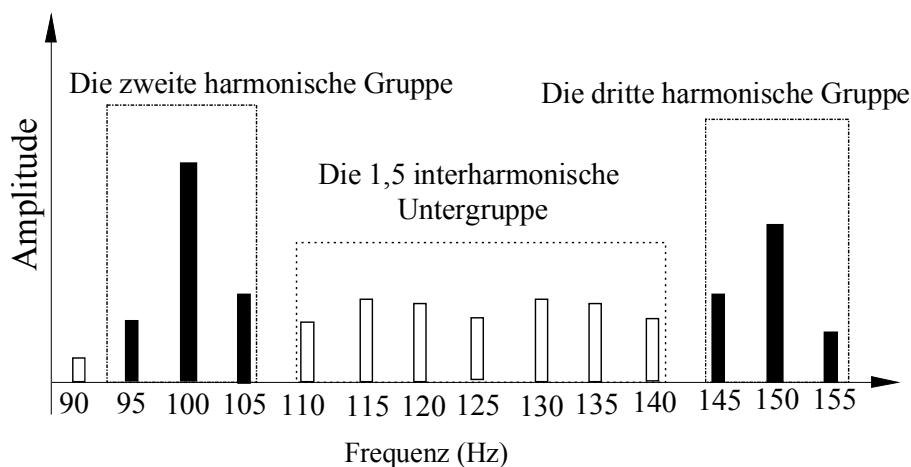
- Abtastfrequenz ( $f_s$ ) soll ausreichend hoch sein, sodass die Analyse von Frequenzkomponenten bis zu 9 kHz möglich ist.
- Die Rechteck-Funktion wird verwendet.
- Die eingesetzte Fensterfunktion ist exakt einer Länge von zehn Grundperioden entsprechend und bei einer Grundfrequenz von 50 Hz somit 200 ms.
- Die Frequenzauflösung der diskreten Fourier-Transformation (DFT) beträgt 5 Hz bei der Grundfrequenz von 50 Hz.
- Bei der Grundfrequenz 50 Hz ist die Amplitude einer harmonischen Gruppe definiert als:

$$C_{n-200\text{-ms}} = \sqrt{\sum_{k=-1}^1 C_{10n+k}^2}, \quad (5.4.1)$$

während die Amplitude einer interharmonischen Untergruppe zu

$$C_{n+0.5-200\text{-ms}} = \sqrt{\sum_{k=2}^8 C_{10n+k}^2} \quad \text{definiert ist.} \quad (5.4.2)$$

**Bild 5.9** veranschaulicht die IEC-Gruppierung der spektralen Komponenten für harmonische und interharmonische Komponenten bei der Grundfrequenz von 50 Hz.



**Bild 5.9** IEC-Gruppierung der spektralen Komponenten für harmonische und interharmonische Komponenten

Bei der praktischen Analyse der interharmonischen Komponenten mit der DFT entstehen Schwierigkeiten wegen des durch die Zeitbegrenzung verursachten Leckeffekts und/oder der begrenzten Frequenzauflösung [41; 77]. Zur Vermeidung des Leckeffekts der DFT muss ein Signal synchron mit allen im Signal enthaltenen Komponenten abgetastet werden. Die synchrone Abtastung mit interharmonischen Komponenten ist in der Praxis kaum realisierbar, da ihre Frequenzen in den meisten Fällen nicht leicht voraussagen sind oder die erforderliche Länge der Fensterfunktion zu groß ist. Daher sind die Größen der interharmonischen Komponenten schwierig zu bestimmen.

#### 5.4.1 TDA-Verfahren zur Bearbeitung der harmonischen Komponenten

Das TDA-Verfahren ist eine sehr bekannte Technik für die Trennung des gewünschten periodischen Signals aus dem Frequenzgemisch eines gestörten Signals [10]. Dieses Verfahren findet in der Fehlerdiagnose von Maschinen sehr häufig Anwendung [49 – 51].

Zur Darstellung des TDA-Verfahrens wird zuerst ein vom Rauschen gestörtes periodisches Signal betrachtet:

$$x(t) = x_0(t) + n(t), \quad (5.4.3)$$

wobei  $x_0(t)$  periodisch mit der Grundperiode  $T_0$  ist. Das Signal  $x(t)$  wird mit der Abtastfrequenz  $f_s = 1/\Delta T$  diskretisiert und ergibt sich zu:

$$x(i \cdot \Delta T) = x_0(i \cdot \Delta T) + n(i \cdot \Delta T), \quad i \in \mathbb{N}^0 \quad (5.4.4)$$

Es wird angenommen, dass sich  $J$  Punkte aus der Abtastung in einer Grundperiode ergeben. Dann führt man die folgende Operation durch:

$$a(i \cdot \Delta T) = \frac{1}{M} \cdot \sum_{m=0}^{M-1} x(i \cdot \Delta T + m \cdot J \cdot \Delta T), \quad i = 0, 1, \dots, J-1. \quad (5.4.5)$$

Damit erhält man das im Zeitbereich gemittelte (*time domain averaged*) Signal, dessen Länge eine Grundperiode beträgt. Dieser Mittelungsvorgang wurde in der Literatur auch als synchrone Mittelung bezeichnet. Die  $z$ -Transformation von  $a(i \cdot \Delta T)$  lässt sich ausdrücken als:

$$A(z) = \frac{X(z)}{M} \cdot \sum_{m=0}^{M-1} z^{m \cdot J} = \frac{X(z)}{M} \cdot \frac{1 - z^{M \cdot J}}{1 - z^J} \quad (5.4.6)$$

Der im Zeitbereich durchgeführte Mittelungsvorgang (Gl. (5.4.5)) verbessert durch die Abschwächung der nicht harmonischen Komponenten die Schätzung der Komponente der Grundfrequenz und der harmonischen Komponenten [10]. Zur Gewinnung einer besseren Analyse mit der DFT/FFT im Frequenzbereich wird das Signal  $a(i \cdot \Delta T)$  hierbei periodisch bis zu  $M$  Perioden verlängert:

$$a_M(i \Delta T + m \cdot J \Delta T) = a(i \Delta T) \quad i = 0, 1, \dots, J-1; m = 1, 2, \dots, M. \quad (5.4.7)$$

Das verlängerte Signal wird hierbei als TDA-Signal bezeichnet. Die entsprechende  $z$ -Transformation des TDA-Signals ergibt sich zu [18]:

$$A_M(z) = \frac{1}{M} \cdot \frac{1 - z^{-MJ}}{1 - z^{-J}} \cdot A(z) \quad (5.4.8)$$

Mit Gln (5.4.6) und (5.4.8) erhält man:

$$A_M(z) = \frac{X(z)}{M^2} \cdot \frac{1 - z^{-MJ}}{1 - z^{-J}} \cdot \frac{1 - z^{MJ}}{1 - z^J} \quad (5.4.9)$$

Somit ergibt sich die Übertragungsfunktion des Mittelungsvorgangs:

$$H_M(z) = \frac{1}{M^2} \cdot \frac{1 - z^{-MJ}}{1 - z^{-J}} \cdot \frac{1 - z^{MJ}}{1 - z^J}. \quad (5.4.10)$$

Der Frequenzgang lässt sich durch den Ersatz von  $z = e^{j2\pi f \Delta T}$  gewinnen:

$$\begin{aligned} H_M(f) &= \{H_M(z)\}_{z=e^{j2\pi f \Delta T}} = \frac{1}{M^2} \cdot \frac{1 - e^{-j2\pi f \cdot \Delta T \cdot M \cdot J}}{1 - e^{-j2\pi f \cdot \Delta T \cdot J}} \cdot \frac{1 - e^{j2\pi f \cdot \Delta T \cdot M \cdot J}}{1 - e^{j2\pi f \cdot \Delta T \cdot J}} \\ &= \frac{1}{M^2} \cdot \frac{1 - e^{-j2\pi \cdot M \cdot T_0 f}}{1 - e^{-j2\pi T_0 f}} \cdot \frac{1 - e^{j2\pi \cdot M \cdot T_0 f}}{1 - e^{j2\pi T_0 f}} = \frac{1}{M^2} \frac{\sin^2(\pi M T_0 f)}{\sin^2(\pi T_0 f)}, \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

wobei  $T_0 = J \cdot \Delta T$  und  $f_0 = 1/T_0$ . Somit erhält man den Amplitudengang und Phasengang:

$$|H_M(f)| = \left| \frac{1}{M^2} \cdot \frac{\sin^2[\pi \cdot M \cdot (f/f_0)]}{\sin^2[\pi \cdot (f/f_0)]} \right| \quad (5.4.12)$$

$$\text{und } \Phi_M(f) = 0. \quad (5.4.13)$$

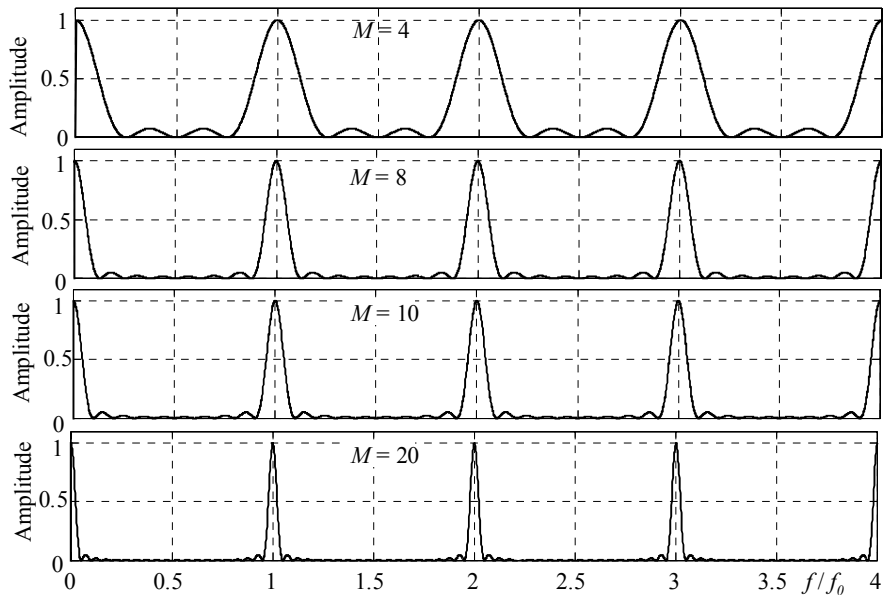
Für  $f/f_0 = K$  ( $K \in \mathbb{N}^0$ ) folgt damit:

$$|H_M(f)|_{f=Kf_0} = \left\{ \frac{1}{M^2} \cdot \frac{\sin^2[\pi M \cdot (f/f_0)]}{\sin^2[\pi \cdot (f/f_0)]} \right\}_{f=Kf_0} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{M^2} \cdot \frac{\sin^2[M(u + K \cdot \pi)]}{\sin^2(u + K \cdot \pi)} = 1 \quad (5.4.14)$$

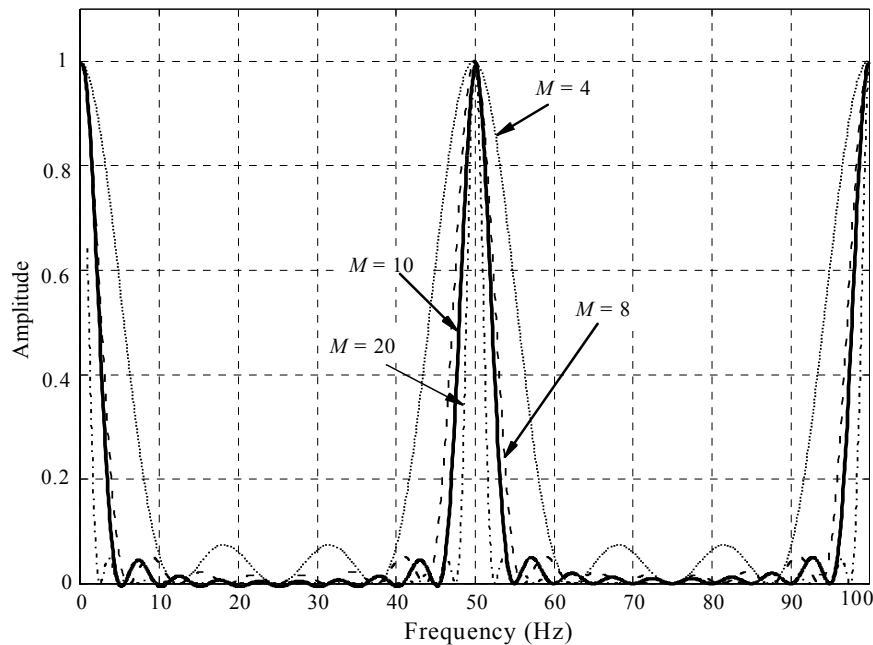
Der Frequenzgang beschreibt damit ein Kammfilter mit  $|H_M(Kf_0)| = 1$  ( $K \in \mathbb{N}^0$ ) – „Zähnen“ des Kammfilters. **Bild 5.10** zeigt den Amplitudengang (Ausschnitt) für unterschiedliche Mittelungszahlen  $M$ . Dabei ist erkennbar, dass das Kammfilter die Signalanteile der Grundfrequenz  $f_0$  und der harmonischen Frequenzen  $Kf_0$  ( $K \in \mathbb{N}^0$ ) durchlässt und die Signalanteile anderer Frequenzen unterdrückt. Mit der Zunahme der Mittelungszahl verengen sich die Durchlassbereiche, und die Welligkeit in den Sperrbereichen wird kleiner. Somit lassen sich nicht harmonische Signalanteile stark unterdrücken.

Für die weiteren Ausführungen ist wichtig, dass im Amplitudengang zwischen Zähnen äquidistant  $M-1$  Nullstellen auftreten. Beispielsweise für  $f_0 = 50$  Hz entstehen neun Nullstellen (55 Hz, 60 Hz, ..., 95 Hz) bei  $M = 10$  (**Bild 5.11**). Spektralanteile an diesen Stellen werden damit vollständig unterdrückt. Diese Eigenschaft lässt sich bei der Unterdrückung interharmonischer Komponenten nutzen. In der Praxis tritt der Fall häufig auf, bei dem eine starke interharmonische Komponente bekannter Frequenz existiert. Durch gezielte Wahl von  $M$  ist es möglich, diese Komponente zu eliminieren. Beispielsweise enthält ein Signal harmonische Komponenten mit der Grundfrequenz  $f_0 = 50$  Hz und eine interharmonische Komponente der Frequenz  $f_1 = 62,5$  Hz. Mit  $M = 10$  kann die interharmonische Komponente bei einer mit der Grundfrequenz synchronen Mittelung um etwa 34 dB gedämpft werden. Diese Komponente

lässt sich mit der Mittelungszahl  $M = 4$  (oder 8, 16, ...) bei der mit der Grundfrequenz synchronen Mittelung vollständig unterdrücken. In diesem Beispiel liegt die interharmonische Komponente der Frequenz  $f_1 = 62,5$  Hz in einer Nullstelle des Kammfilters. Damit kann durch gezielte Wahl der Mittelungszahl bereits durch wenige Mittelungen ein markanter periodischer Störanteil unterdrückt werden.



**Bild 5.10** Amplitudengänge des Kammfilters bei  $M = 4, 8, 10$ , und  $20$



**Bild 5.11** Nullstellen des Kammfilters für  $f_0 = 50$  Hz bei  $M = 4, 8, 10$ , und  $20$

#### 5.4.2 Differenz-Filter (DF) zur Bearbeitung der interharmonischen Komponenten

Bei der Bearbeitung interharmonischer Komponenten mit der DFT/FFT kann eine interharmonische Komponente wegen des von der Zeitbegrenzung verursachten Leckeffekts und/oder

der begrenzten Frequenzauflösung durch starke harmonische Komponenten verdeckt werden. Zur Vermeidung des Leckeffekts muss die Abtastung mit allen harmonischen und interharmonischen Komponenten synchron sein, was in der Praxis kaum realisierbar ist. Außerdem führt die Spektralinterferenz (siehe Abschnitt 3.2) zwischen harmonischen und interharmonischen Komponenten im Frequenzbereich dazu, dass eine möglichst exakte Bestimmung der interharmonischen Frequenzen schwierig ist.

Das TDA-Verfahren liefert eine verbesserte Schätzung der Grundschwingung und der Harmonischen. Dabei werden die nicht harmonischen Signalanteile stark unterdrückt. Werden die Grundschwingung und die Harmonischen vom originalen Signal im Zeitbereich subtrahiert, wird die Spektralinterferenz zwischen harmonischen und interharmonischen Komponenten im Frequenzbereich eliminiert. Dazu wird hier ein Filter zur Bearbeitung interharmonischer Komponenten in einem Signal vorgeschlagen.

Das originale Signal wird in  $M$  exakten Grundperioden abgetastet und mit Gl. (5.4.5) gemittelt. Dann erhält man mit Gl. (5.4.7) das verlängerte TDA-Signal  $a_M(i\Delta T)$ , welches eine verbesserte Schätzung der Grundschwingung und der Harmonischen in den  $M$  exakten Grundperioden ist. Somit kann ein Differenz-Signal gewonnen werden:

$$y(i\Delta T) = x(i\Delta T) - a_M(i\Delta T). \quad i = 0, 1, \dots, MJ-1 \quad (5.4.15)$$

Durch die  $z$ -Transformation und unter Berücksichtigung von Gl. (5.4.9) erhält man die Übertragungstransformation:

$$H_D(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - \frac{1}{M^2} \cdot \frac{1 - z^{-MJ}}{1 - z^{-J}} \cdot \frac{1 - z^{MJ}}{1 - z^J} \quad (5.4.16)$$

Durch den Einsatz von  $z = e^{j2\pi f\Delta T}$  wird der Frequenzgang gewonnen:

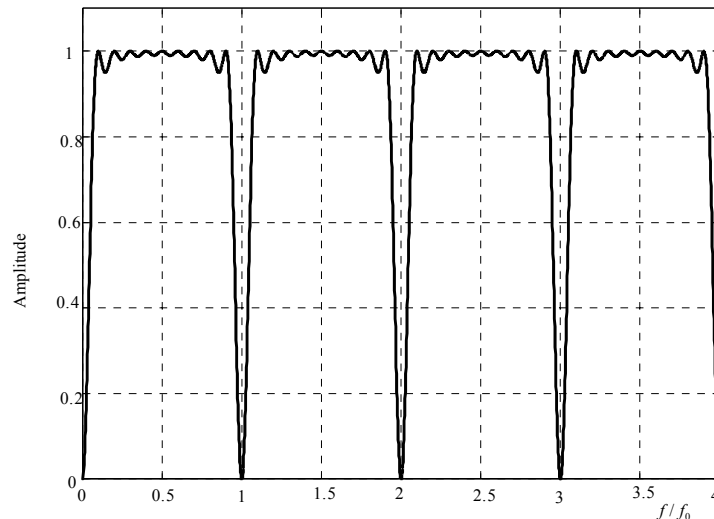
$$H_D(f) = 1 - \frac{1}{M^2} \cdot \frac{\sin^2[\pi M \cdot (f / f_0)]}{\sin^2[\pi \cdot (f / f_0)]} \quad (5.4.17)$$

Für  $f / f_0 = K$  ( $K \in \mathbb{N}^0$ ) folgt

$$|H_D(f)|_{f=Kf_0} = 0. \quad (5.4.18)$$

Dies bedeutet, dass die Grundschwingung und die Harmonischen im Differenz-Signal  $y(i\Delta T)$  vollständig unterdrückt werden. Somit können die harmonischen und nicht harmonischen separiert im Zeit- und Frequenzbereich bearbeitet werden, und die Spektralinterferenz im Frequenzbereich wird unerdrückt. Der Vorgang entspricht einer linearen Filterung, was hierbei als Differenz-Filter (DF) bezeichnet wird. In **Bild 5.12** wird der Amplitudengang (Ausschnitt) für die Mittelungszahl  $M = 10$  gezeigt. Mit der Zunahme der Mittelungszahl  $M$  verringern sich die Bandbreite der Sperrbereiche und die Welligkeit im Durchlassbereich.





**Bild 5.12** Amplitudengang des Differenz-Filters für  $M = 10$

### 5.4.3 Beispiele der Simulation und der praktischen Anwendung

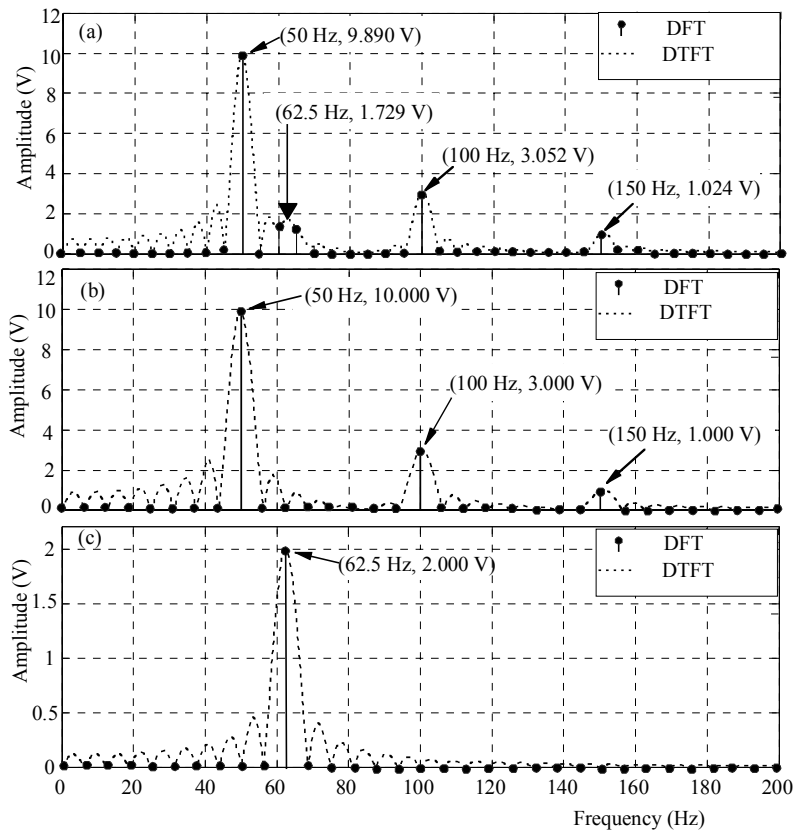
**Bild 5.13** und **Bild 5.14** zeigen die DFT-Ergebnisse des TDA-Signals und des DF-Signals bei einer Simulation. Für die Simulation wird ein aus der Grundschwingung, zwei Harmonischen und einer interharmonischen Komponente bestehendes Signal eingesetzt:

$$x(t) = x_h(t) + x_1(t), \quad x_h(t) = 10 \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t) + 3 \sin(2\pi \cdot 100 \cdot t) + \sin(2\pi \cdot 150 \cdot t),$$

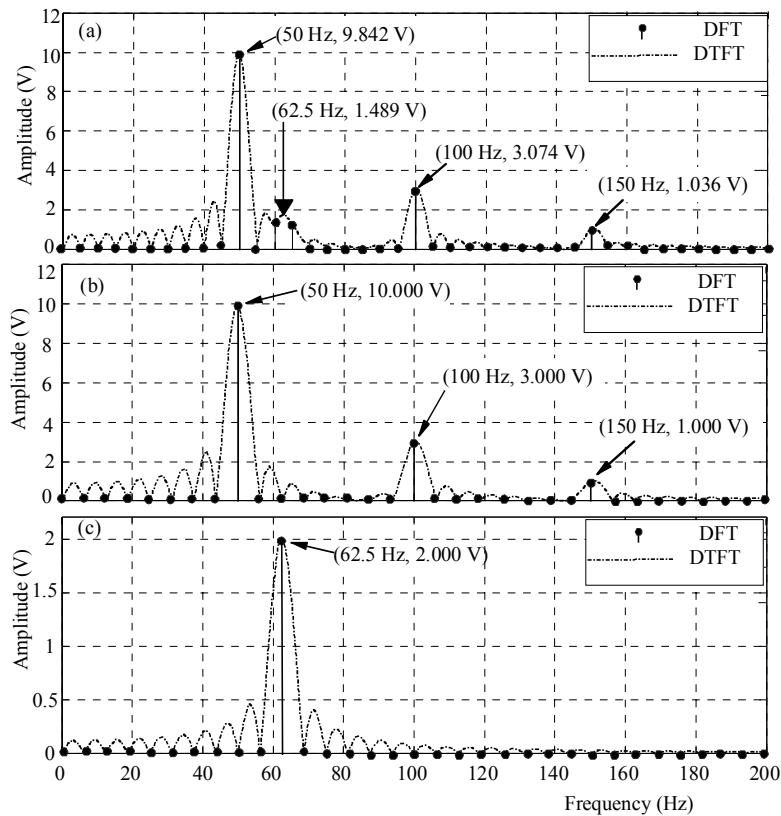
$$x_1(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t + \theta_1),$$

wobei  $f_1$ ,  $A_1$  und  $\theta_1$  jeweils die Frequenz, Amplitude und Phase der interharmonischen Komponente sind. Mit der Abtastfrequenz  $f_s = 1000$  Hz wird das Signal  $x(t)$  in bis zu  $N = 200$  Punkten diskretisiert, entsprechend zehn Grundperioden (200 ms). Die Abtastung ist synchron mit der Grundschwingung und ihren harmonischen Komponenten, aber nicht mit den interharmonischen Komponenten. In **Bild 5.13 (a)** und **Bild 5.14 (a)** ist die Spektralinterferenz zwischen der interharmonischen und den harmonischen Komponenten im Frequenzbereich erkennbar.

Die Spektralinterferenz führt zu Amplitudenfehlern der DFT-Ergebnisse. Beim Vergleich von **Bild 5.13 (a)** ( $\theta_1 = 30^\circ$ ) mit **Bild 5.14 (a)** ( $\theta_1 = 45^\circ$ ) kann man erkennen, dass die Amplitudenfehler von der Phase der interharmonischen Komponente abhängig sind. Außerdem sind die Amplitudenfehler im Allgemeinen auch von dem Verhältnis zwischen den Amplituden der interharmonischen und harmonischen Komponenten abhängig [65]. Durch gezielte Wahl der Mittelungszahl, z. B.  $M = 8$ , lassen sich die Einflüsse der interharmonischen Komponente auf die DFT-Koeffizienten der Grundschwingung und harmonischen Komponenten vollständig unterdrücken, wie in **Bild 5.13 (b)** und **Bild 5.14 (b)** gezeigt. In diesem Fall liegt die interharmonische Komponente der Frequenz  $f_1 = 62,5$  Hz auf einer Nullstelle des Kammfilters. Gleichfalls werden die Einflüsse der Grundschwingung und harmonischen Komponenten auf die DFT-Koeffizienten der interharmonischen Komponente eliminiert (**Bild 5.13 (b)** und **Bild 5.14 (b)**).

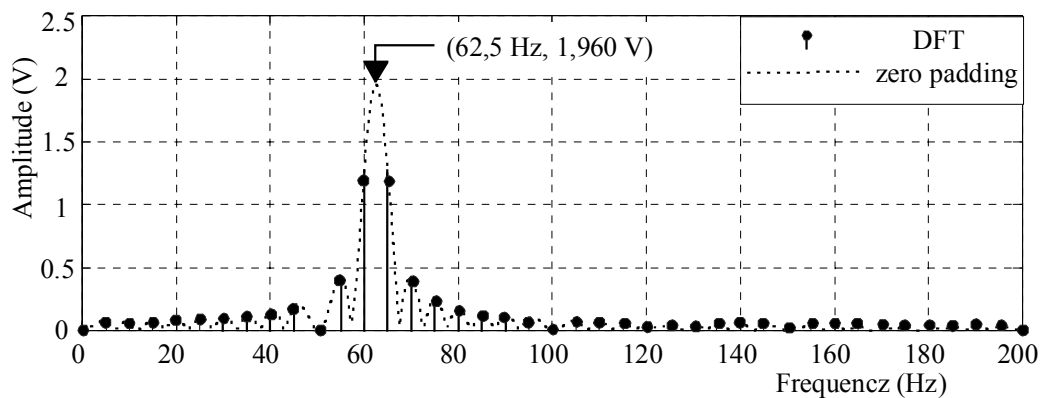


**Bild 5.13** Amplituden der DFT-Ergebnisse ( $f_1 = 62.5$  Hz,  $A_1 = 2$ ,  $\theta_1 = 30^\circ$ ).  
 (a) Originales Signal. (b) TDA-Signal ( $M = 8$ ). (c) DF-Signal ( $M = 8$ )



**Bild 5.14** Amplituden der DFT-Ergebnisse ( $f_1 = 62.5$  Hz,  $A_1 = 2$ ,  $\theta_1 = 45^\circ$ ).  
 (a) Originales Signal. (b) TDA-Signal ( $M = 8$ ). (c) DF-Signal ( $M = 8$ )

Wird die Mittelungszahl  $M = 10$  festgelegt, fällt die Frequenz der interharmonischen Komponente mit keiner Nullstellen des TDA-Filters zusammen. Trotzdem lassen sich die harmonischen und interharmonischen Komponenten im Zeitbereich gut trennen. Die Einflüsse der Grundschwingung und Harmonischen auf die DFT-Koeffizienten der interharmonischen Komponente im Spektrum des DF-Signals und damit die Spektralinterferenz werden stark unterdrückt. Wird das DF-Signal mit dem Zeropadding-Verfahren bearbeitet, lassen sich die Frequenz und Amplituden der interharmonischen Komponente genauer bestimmen. **Bild 5.15** zeigt die Ergebnisse der DFT und des Zeropadding-Verfahrens für das DF-Signal bei  $M = 10$ . Das durch das Zeropadding gewonnene Spektrum hat ein lokales Maximum der Amplitude 1,960 V (Sollwert = 2.000 V) bei der Frequenz 62,5 Hz, während die Amplituden bei dieser Frequenz in **Bild 5.13 (a)** und **Bild 5.14 (a)** jeweils 1,729 V und 1,489 V sind. Es soll darauf hingewiesen werden, dass sich dieser Amplitudenfehler mit dem durch das Zeropadding gewonnenen Spektrum nach Gl. (5.4.17) oder **Bild 5.12** korrigieren lässt.



**Bild 5.15** Spektren des DF-Signals, berechnet durch die DFT und das Zeropadding-Verfahren

Eine praktische Anwendung für die Bearbeitung harmonischer und interharmonischer Komponenten im Zeit- und Frequenzbereich zeigt **Bild 5.16**. Das Spannungssignal eines Umrichters wird nach der Signalanpassung und Anti-Aliasing-Filterung mit der Abtastfrequenz  $f_s = 10$  kHz über zehn Grundperioden digitalisiert. Bei der Grundfrequenz  $f_0 = 50$  Hz beträgt die Länge der diskreten Folge  $N = 1000$ . Daraus erhält man nach Gln. (5.4.5) und (5.4.7) das mit der Grundfrequenz synchron gemittelte Signal (TDA-Signal) und nach Gl. (5.4.15) das durch die Differenz-Filterung gewonnene Signal (DF-Signal). Ein Ausschnitt aus **Bild 5.16** wird in **Bild 5.17** dargestellt.

Aus den vorausgegangenen Ausführungen können einige Folgerungen gezogen werden:

- Harmonische und interharmonische Komponenten lassen sich durch die TDA- und DF-Filterung im Zeit- und Frequenzbereich getrennt bearbeiten.
- Eine genauere Bestimmung der Frequenzen und Amplituden interharmonischer Komponenten ist möglich, wenn das durch die Differenz-Filterung gewonnene Signal mit der CZT oder dem Zeropadding-Verfahren bearbeitet wird.
- Durch gezielte Wahl der Mittelungszahl ist möglich, eine interharmonische Komponente vollständig zu unterdrücken.

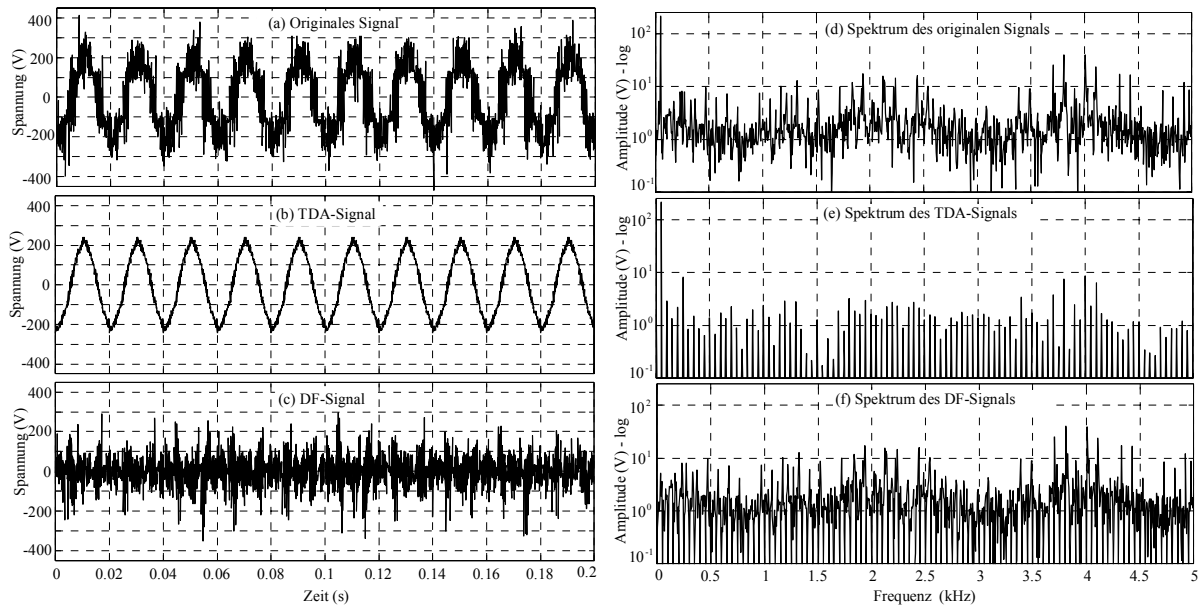


Bild 5.16 Spannungssignal eines Umrichters, das TDA-Signal und DF-Signal sowie die Spektren

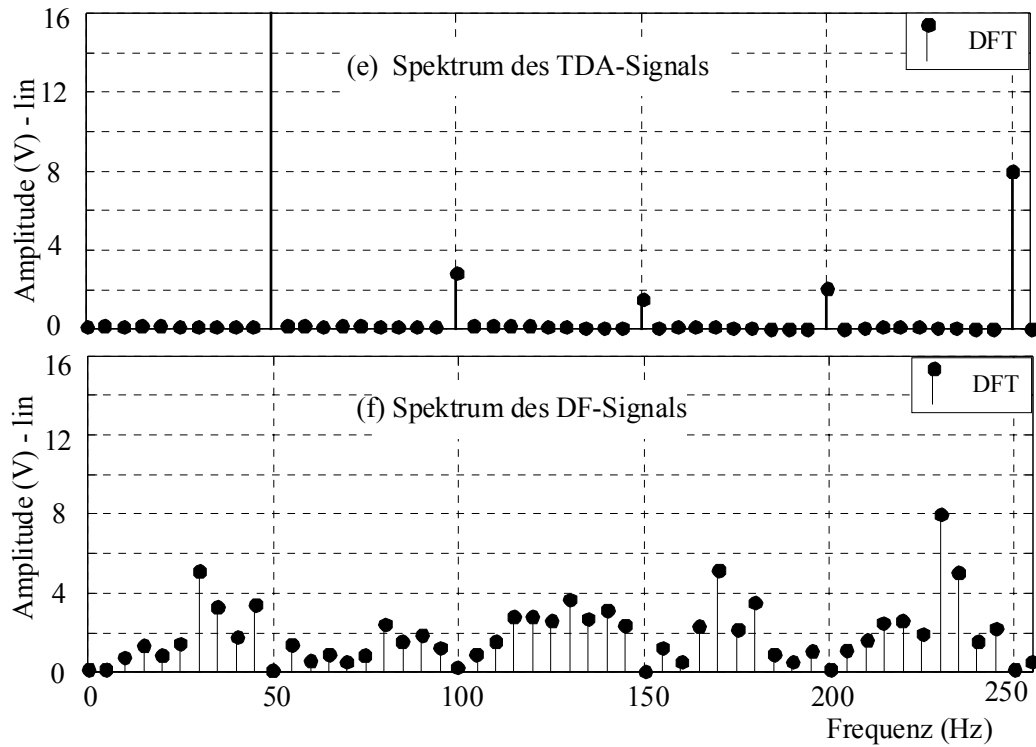


Bild 5.17 Ausschnitt aus Bild 5.17 (e) und (f)

## Kapitel 6

# Schwingungsstärkemessung und Spektralanalyse mit dem LabView-Programm

Jedes Getriebe ist aufgrund der Elastizität und der Massenträgheit der einzelnen Getriebeglieder prinzipiell ein schwingungsfähiges System [78]. Während des Betriebes werden stets – auch im fehlerfreien Zustand – Körperschwingungen durch Kräfte, die bei der Übertragung der eingespeisten Leistung auftreten, angeregt. Vom Entstehungsort erfolgt die Übertragung dieser Schwingungen zum Gehäuse maßgeblich über die weiteren Getriebeelemente. Über das feste Ausbreitungsmedium hinaus werden die Schwingungen auch an den Grenzflächen Maschine-Luft an die Umgebungsluft abgegeben.

Je nach Schwingungsmedium wird deshalb zwischen Körperschall und Luftschall unterschieden. In der Literatur werden unter dem Begriff Luftschall meistens Schwingungen im Hörfrequenzbereich verstanden, also zwischen etwa 10 Hz und 20 kHz. Als Körperschall hingegen werden mechanische Schwingungen in einem festen Medium bezeichnet, die Frequenzen von unter 1 Hz bis mehreren MHz besitzen [27]. Bei Messungen von Körperschall wird zwischen Schwingungsstärkemessungen und Schwingungsmessungen für die Zustandsüberwachung und Fehlerdiagnose an Maschinen unterschieden.

Die Schwingungsstärkemessung stand naturgemäß am Anfang aller der Schwingungsmesstechniken. Der während des Betriebs einer Maschine auftretende Körperschall ist in der Regel ein Schwingungsgemisch, das durch Überlagerung von mehreren Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen entsteht. Die unterschiedlichen Schwingungen werden z. B. durch die Bewegung mehrerer verschiedener Maschinenteile – z. B. bei Zahnradgetrieben durch die Wellen mit verschiedenen Drehzahlen und die Zahneingriffereignisse von Zahnrädern – oder durch Übertragung von anderen Aggregaten verursacht. Um derartige Schwingungsgemische auf vergleichender Basis beurteilen zu können, wird die sogenannte „effektive Schwingstärke“ in VDI 2056 und DIN 45666 definiert. Darunter ist der quadratische Mittelwert der Schwinggeschwindigkeit im Frequenzbereich von 10 Hz bis 1000 Hz zu verstehen. Die Empfehlung der Frequenzbandbegrenzung und Frequenzbewertung für die Messung dieser Schwingstärke ist DIN 45662 zu entnehmen. Die Messergebnisse sind im Hinblick auf VDI 2056 oder VDI 2063 (zulässige Schwingstärke für Hubkolbenmaschinen) als die Festlegung von Abnahmespezifikationen zu betrachten. Man beachte den Frequenzbereich von 10 Hz bis 1 kHz [115]. In diesem Frequenzbereich liegen in der Regel Schwingungen zufolge Unwucht, Rissen in Wellen oder Rissen im Fundament. Andere Fehler, z. B. Fehler in Zahnradgetrieben, werden sich hier unter Umständen nicht ausgeprägt

widerspiegeln [34]. Aus diesem Grund ist die Möglichkeit der Fehldiagnose von vornherein nicht vorgesehen.

Für die Zustandsüberwachung und Fehlerdiagnose an Maschinen ist die Untersuchung von Körperschall besser geeignet als die von Luftschall, da der Einfluss äußerer Störgrößen, wie Umgebungslärm, geringer ist. Was mit dem Ohr hörbar ist, ist in jedem Fall auch am Gehäuse als Schwingung messbar [34]. Zur Fehlerdiagnose nutzt man aus, dass die Körperschwingungen im fehlerfreien Zustand bei konstanten Betriebsbedingungen charakteristische Anteile aufweisen, deren Zusammensetzung und/oder Stärke sich praktisch erst bei einer Fehlerentwicklung infolge veränderter Kräfte oder veränderter mechanischer Eigenschaften in ebenfalls charakteristischer Weise ändern [5]. Aus diesen fehlerspezifischen Veränderungen in den Signalen kann umgekehrt auch auf den konkreten Fehler oder zumindest auf eine Klasse von Fehlern, die zu gleichen bzw. mit den verwendeten Verfahren nicht unterscheidbaren Veränderungen führen, geschlossen werden. Die Erfassung der Körperschwingungen erfolgt meist über Beschleunigungsaufnehmer, die am Gehäuse befestigt werden. Der Aufnahmeort wird dabei meist experimentell ermittelt.

## 6.1 Schwingungsaufnehmer

Der Schwingungsaufnehmer wird zwangsläufig immer Bestandteil am Anfang einer Messkette zur Zustandsüberwachung und Fehlerdiagnose von Maschinen sein. Seine Aufgabe ist es, die mechanischen Bewegungen am Messpunkt in ein proportionales elektrisches Signal umzuwandeln. Prinzipiell kann zwischen Aufnehmern unterschieden werden, deren elektrisches Signal proportional dem Schwingweg, der Schwinggeschwindigkeit oder der Schwingbeschleunigung ist. Gelegentlich sind auch direkte Beanspruchungen festzustellen. Dies geschieht durch die Messung von Kräften oder Dehnungen.

### 6.1.1 Schwingweg, Schwinggeschwindigkeit und Schwingbeschleunigung

Unter Schwingungen versteht man zunächst die zeitlichen Schwingwege  $s(t)$ . Im erweiterten Sinn denkt man aber auch an die durch zeitliche Differentiation bzw. Integration fest gekoppelten Größen Schwinggeschwindigkeit  $v(t)$  und Schwingbeschleunigung  $a(t)$ . Die mathematischen Zusammenhänge lauten:

$$\begin{array}{lll}
 \text{Weg} & s(t) = \int v(t) dt = \int dt \int a(t) dt & [\text{m}] \\
 \text{Geschwindigkeit} & v(t) = \frac{d}{dt} s(t) = \int a(t) dt & [\text{m/s}] \\
 \text{Beschleunigung} & a(t) = \frac{d^2}{dt^2} s(t) & [\text{m/s}^2]
 \end{array} \tag{6.1.1}$$

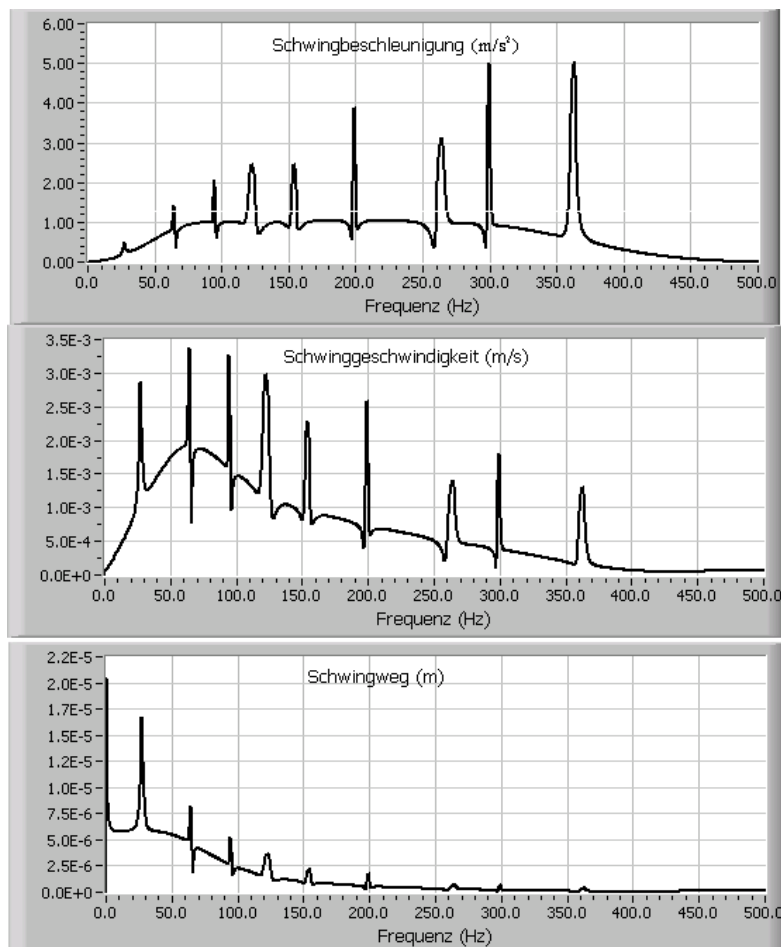
Dabei können die Integrationskonstanten im Allgemeinen gleich null gesetzt und damit vernachlässigt werden.

Diese Zusammenhänge sind bei der Wahl von Messgrößen und Sensoren wichtig. Es bedeutet nämlich nichts anderes, als dass die Messung einer einzigen der drei Größen genügt, da diese drei Messgrößen im Prinzip durch Integration bzw. Differentiation ineinander überführbar sind. Allerdings betont die Wegmessung Komponenten mit niedrigen Frequenzen, die Beschleunigungsmessung solche mit hohen Frequenzen. Dies ist durch die Betrachtung der harmonischen Schwingung zu erkennen. Da man sich periodische Schwingungen immer als Zusammensetzung harmonischer Schwingungen vorstellen darf, gilt diese Betrachtung allgemein.

Die Zusammenhänge zwischen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung lauten bei der harmonischen Schwingung folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 \text{Weg} & \quad s(t) = A_0 \cos 2\pi ft & [\text{m}] \\
 \text{Geschwindigkeit} & \quad v(t) = -A_0(2\pi f) \sin 2\pi ft & [\text{m/s}] \\
 \text{Beschleunigung} & \quad a(t) = -A_0(2\pi f)^2 \cos 2\pi ft & [\text{m/s}^2]
 \end{aligned}
 \tag{6.1.2}$$

Man sieht, dass bei konstantem Scheitelwert  $A_0$  des Weges  $s(t)$  der Scheitelwert der Geschwindigkeit bzw. der Scheitelwert der Beschleunigung linear bzw. quadratisch von der Frequenz  $f$  abhängig ist (**Bild 6.1**).



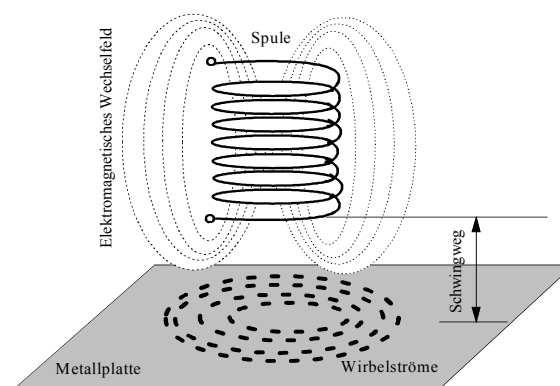
**Bild 1.5** Schwingweg-, Schwinggeschwindigkeits- und Schwingbeschleunigungs-Spektrum im Vergleich

Unter Berücksichtigung dieser Zusammenhänge ist es in der Praxis nicht zu empfehlen, mit einem Wegsensor den Weg  $s(t)$  zu messen und diesen anschließend zweimal zu differenzieren. Dies hätte zur Folge, dass die immer auch vorhandenen, überlagerten, meist hochfrequenten Störsignale differenziert und damit unverhältnismäßig verstärkt würden. Ist man an der Beschleunigung interessiert, sollte man die Beschleunigung messen! In umgekehrter Richtung sieht es anders aus: Wenn man die Beschleunigungen gemessen hat, kann man ohne weiteres diese ein- bzw. zweimal integrieren, um zu den Schwinggeschwindigkeiten bzw. zu den Schwingwegen zu kommen [60].

Eine weitere Beobachtung von **Bild 6.1** ist aus anderem Grund interessant: Wir nehmen an, bei einer schwingenden Struktur sei der zeitliche Verlauf des Schwingwegs gemessen und dessen Spektrum durch Fourier-Transformation bestimmt worden. Es ist bekannt, dass bei vielen praktischen Signalen von Schwingwegen die spektralen Beträge mit steigenden Frequenzen zurückgehen. Damit sind sie für Schwingungsaufnehmer auch schwerer aufzulösen. Nach den erwähnten Signaleigenschaften fällt aber das Spektrum der zugehörigen Geschwindigkeit und insbesondere dasjenige der Beschleunigung mit steigenden Frequenzen weniger stark ab. Von daher gesehen kann es in der Praxis sinnvoll sein, nicht den Schwingweg  $s(t)$ , sondern die Beschleunigung  $a(t)$  zu messen. Dies ist günstig für die Fehlerdiagnose von Maschinen und Anlagen. Gleichzeitig ist bei niedrigen Frequenzen der umgekehrte Effekt zu beobachten: Die spektralen Beträge der Geschwindigkeit und der Beschleunigung werden bei fallenden Frequenzen immer kleiner, deshalb sollen Schwingwege bei niedrigen Frequenzen gemessen werden.

### 6.1.2 Messung des Schwingwegs

Bei der Messung des Schwingwegs werden in den meisten Fällen Wirbelstromaufnehmer eingesetzt. Der Wirbelstromaufnehmer misst berührungslos die Distanz zwischen Aufnehmerstirnseite und einem metallischen Objekt. Dazu wird im Aufnehmer ein hochfrequentes elektromagnetisches Feld aufgebaut, das von dem Objekt und damit auch vom zu erfassenden Abstand beeinflusst wird (**Bild 6.2**). Da das System mit einer hohen Frequenz arbeitet, sind Sensor, Elektronik und Kabelsystem als Einheit zu betrachten.



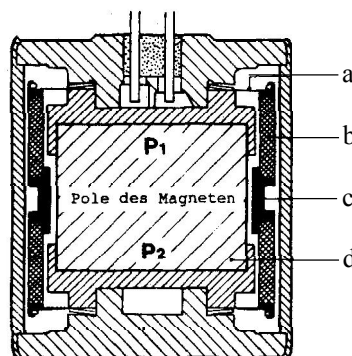
**Bild 6.2** Physikalische Grundlage für Wirbelstromaufnehmer



Wirbelstromaufnehmer werden häufig für die Wellenschwingungsmessung in Turbomaschinen eingesetzt, was hinsichtlich Verfahren und Messeinrichtung standardisiert ist. Die Tatsache, dass das Messobjekt (Welle) selbst praktisch zum Bestandteil des Aufnehmers wird, bringt eine Reihe von Nachteilen mit sich. So wird durch Unrundheit, Oberflächenrauigkeit oder Exzentrizität (mechanischer *Run-Out*) sowie durch Werkstoffabweichungen (elektrischer *Run-Out*) ein Messsignal vorgetäuscht, das den nutzbaren Dynamikbereich der eigentlichen Messung stark eingeschränkt. Die obere Grenzfrequenz solcher Aufnehmer liegt zwar theoretisch recht hoch (typisch bis 10 kHz), der tatsächlich nutzbare Frequenzbereich wird durch den reduzierten Dynamikbereich indirekt stark eingeeengt, da die Schwingwege bei hohen Frequenzen immer klein sein werden; in der Praxis wird demnach ein Frequenzbereich der Größenordnung 0 Hz bis 200 Hz als realistisch anzusehen sein [34]. Außerdem muss der Aufnehmer wegen möglicher störender äußerer Einflüsse an Ort und Stelle kalibriert werden. Deshalb werden Wirbelstromaufnehmer meist nicht für eine differenzierte Fehlerdiagnose eingesetzt.

### 6.1.3 Messung der Schwinggeschwindigkeit

Für die Messung der Schwinggeschwindigkeit lässt sich der in **Bild 6.3** dargestellte elektrodynamische Geschwindigkeitsaufnehmer benutzen. Innerhalb des Aufnehmergehäuses ist ein Permanentmagnet federnd aufgehängt. Bei Relativbewegung zwischen diesem Magneten und der fest mit dem Gehäuse verbundenen Spule entsteht in letzterer eine elektrische Spannung (nach dem Faradayschen Induktionsgesetz). Setzt man den Aufnehmer auf eine schwingende Struktur, so wird für Schwingfrequenzen oberhalb der Eigenresonanz des Aufnehmers die seismische Masse (= Magnet) im Raum stillstehen. Die Relativbewegung zwischen dem Magneten und der Spule entspricht der Schwingbewegung, und die induzierte Spannung ist proportional der Schwinggeschwindigkeit. Elektrodynamische Geschwindigkeitsaufnehmer waren die ersten Schwingungsaufnehmer, die im Maschinenbau überhaupt verwendet wurden. Der nutzbare Frequenzbereich ist klein, typisch 10 Hz bis 1000 Hz. Wegen ihres schmalen nutzbaren Frequenzbereichs sind elektrodynamische Geschwindigkeitsaufnehmer für die Fehlerdiagnose nur bedingt zu empfehlen.

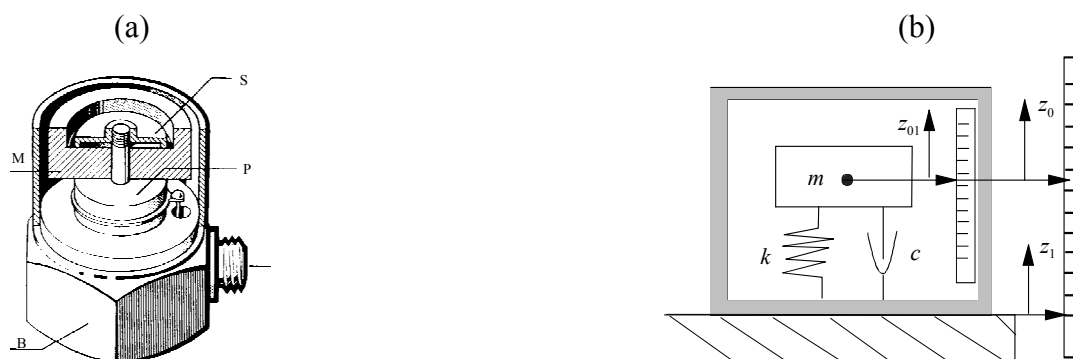


**Bild 6.3** Beispiel eines elektrodynamischen Geschwindigkeitsaufnehmers (a Membrane, b Spule, c Spulenträger, d Permanentmagnet) [60]

### 6.1.4 Messung der Beschleunigung

Für die meisten Anwendungen im Bereich der Maschinenüberwachung und Fehlerdiagnose haben sich Beschleunigungsaufnehmer nach dem piezoelektrischen Prinzip [28] durchgesetzt. Der sehr große Dynamikbereich und der breite nutzbare Frequenzbereich sind dafür ausschlaggebend. Beschleunigungsaufnehmer werden von einer Vielzahl von Firmen angeboten und unterscheiden sich je nach benötigtem Frequenzbereich, Dynamikbereich, Größe, Befestigung usw. Der große Nachteil piezoelektrischer Beschleunigungsaufnehmer ist ihr hochohmiger Ausgang, der insbesondere bei großen Leitungslängen zu einer hohen Störempfindlichkeit führt. Da die Beschleunigung proportional einer elektrischen Ladung ist, wird ein spezieller Vorverstärker, ein sogenannte Ladungsverstärker, benötigt. Dank heutiger Halbleitertechnologie bietet die Industrie Sensoren mit im Sensorgehäuse integriertem Ladungsverstärker, so dass dieser Nachteil für viele Anwendungen nicht mehr relevant ist.

Piezoelektrische Beschleunigungsaufnehmer basieren auf dem piezoelektrischen Effekt. Dieser besagt, dass an elektrisch polarisierten Kristallen bei mechanischen Beanspruchungen in definierten Richtungen (Polarisationsrichtung) elektrische Ladungen auftreten. Zur Polarisation wird das Material (z. B.  $\text{SiO}_2$ ) in einer bestimmten Stufe des Herstellungsprozesses erhitzt und einem starken Gleichfeld ausgesetzt. Dadurch richten sich die Dipole dauerhaft aus. Solange keine Kraft auf den Kristall einwirkt, verhält er sich nach außen elektrisch neutral. Unter Einfluss mechanischer Belastung in der Polarisationsrichtung wird elektrische Oberflächenladung ausgebildet, die der Kraft streng proportional ist [28]. **Bild 6.4a** zeigt einen Beschleunigungsaufnehmer (Kompressionstyp). Über das piezoelektrische Element P wird eine kleine Masse M beschleunigt, die Kraft auf die Scheibe ausübt. Das Ausgangssignal ist der Beschleunigung proportional, solange die Frequenz genügend weit unterhalb der Aufnehmer-Resonanzfrequenz liegt. Das piezoelektrische Element wirkt hier als harte Feder.



**Bild 6.4** (a) Piezoelektrischer Beschleunigungsaufnehmer (B Basis, P Piezoelektrisches Element, M Seismische Masse, S Spannelement) [60]  
(b) Mechanisches Modell des Beschleunigungsaufnehmers

Das mechanische Modell des Beschleunigungsaufnehmers, der an einer schwingenden Struktur angebracht wird, ist in **Bild 6.4b** dargestellt, wobei:

$z_1$  – der absolute Schwingweg der zu messenden Struktur

$z_0$  – der absolute Schwingweg der seismischen Masse

$z_{01}$  – der relative Schwingweg zwischen dem Aufnehmergehäuse und der Masse

(Es gilt:  $z_{01} = z_0 - z_1$ , und  $z_{01}$  ist der Kraft auf das piezoelektrische Element und somit dem elektrischen Ausgangssignal proportional.)

$k$  – die Federsteifigkeit des piezoelektrischen Elements

$c$  – die absolute Dämpfungszahl

$m$  – die Masse

Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz ergibt sich die Differentialgleichung:

$$m \frac{d^2 z_0}{dt^2} = -k(z_0 - z_1) - c \left( \frac{dz_0}{dt} - \frac{dz_1}{dt} \right) \quad (6.1.3)$$

Somit erhält man

$$m \frac{d^2 z_0}{dt^2} + c \frac{dz_0}{dt} + k z_0 = k z_1 + c \frac{dz_1}{dt} \quad (6.1.4)$$

Mit  $z_{01} = z_0 - z_1$  ergibt sich

$$m \frac{d^2 z_{01}}{dt^2} + c \frac{dz_{01}}{dt} + k z_1 = -m \frac{d^2 z_1}{dt^2} \quad (6.1.5)$$

Diese Differentialgleichung drückt die direkte Beziehung zwischen der absoluten Schwingbeschleunigung der zu messenden Struktur und dem relativen Schwingweg (Aufnehmergehäuse–Masse) aus, während dieser relative Schwingweg  $z_{01}$  der Kraft auf das piezoelektrische Element und somit dem elektrischen Ausgangssignal proportional ist.

Wird die zu messende Beschleunigung (Eingangssignal)  $\frac{d^2 z_1}{dt^2} = B \cos 2\pi f t$  angenommen, kann man unter Vernachlässigung der Übergangslösung die stetige Lösung von Gl. (6.1.5) angeben:

$$z_{01}(t) = B \cdot A(f)_{z_{01} \sim \ddot{z}_1} \cdot \cos[2\pi f t + \varphi(f)_{z_{01} \sim \ddot{z}_1}], \quad (6.1.6)$$

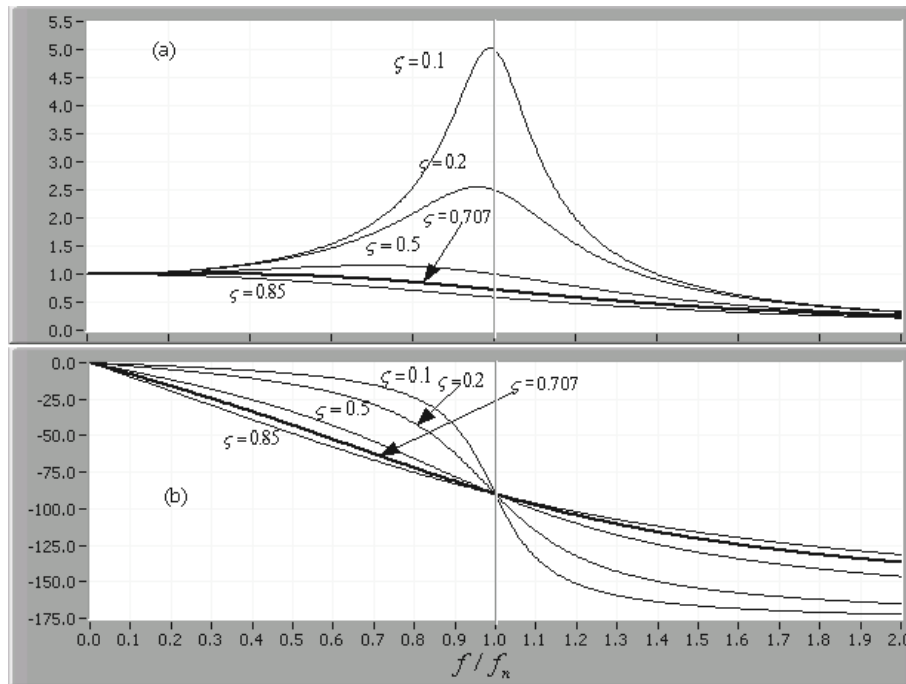
wobei

$$A(f)_{z_{01} \sim \ddot{z}_1} = \frac{1}{4\pi^2 f_n^2 \cdot \sqrt{[1 - (\frac{f}{f_n})^2]^2 + [2\zeta(\frac{f}{f_n})]^2}} \quad (6.1.7)$$

$$\varphi(f)_{z_{01} \sim \ddot{z}_1} = -\arctan \frac{2\zeta(\frac{f}{f_n})}{1 - (\frac{f}{f_n})^2} \quad (6.1.8)$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Eigenfrequenz; } \zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad \text{relative Dämpfungszahl}$$

Die Gln. (6.1.7) und (6.1.8) sind der Amplitudengang und Phasengang des Beschleunigungsaufnehmers. Dabei ist der Eingang die Beschleunigung der zu messenden Struktur und der Ausgang der relative Schwingweg, welcher der Kraft auf das piezoelektrische Element und somit dem elektrischen Ausgangssignal proportional ist. **Bild 6.6** zeigt den normierten Amplitudengang und den Phasengang.



**Bild 6.6** Frequenzgang des Beschleunigungsaufnehmers. (a) Normierter Amplitudengang; (b) Phasengang

Bei  $f \ll f_n$  und  $\zeta \approx 0,7$  sind der normierte Amplitudengang  $A(f)_{z_01 \sim z_1} \approx 1$ , und der Phasengang ist näherungsweise linear. Dies ist eine erwünschte Eigenschaft, da die zeitliche Signalverzerrung gering ist für den Fall, dass das Signal mehrere Frequenzanteile enthält.

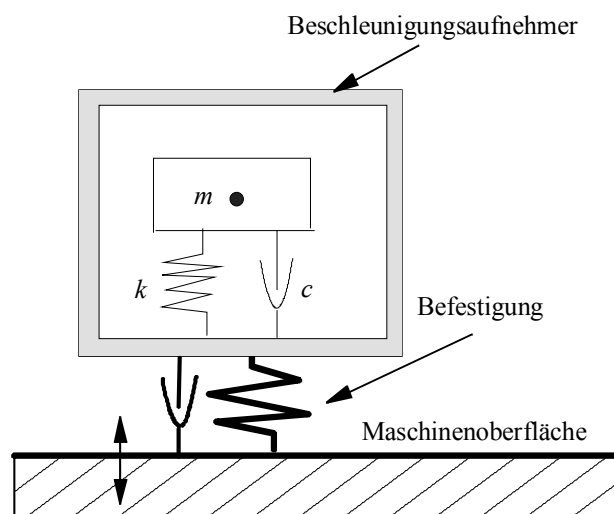
Der nutzbare Frequenzbereich eines Beschleunigungsaufnehmers erstreckt sich von sehr niedrigen Frequenzen (abhängig vom Vorverstärker) bis in den Bereich der Eigenfrequenz  $f_n$ . Im Resonanzbereich wird meist nicht gemessen, da die Gefahr eines Messfehlers zu groß ist. Als Faustregel für die obere Grenzfrequenz kann etwa ein Drittel der Eigenfrequenz angesetzt werden [5]. Dabei wird der maximale Fehler infolge Resonanzüberhöhung im Aufnehmer bei 10 % liegen. Üblicherweise werden im Vorverstärker Tiefpassfilter zwischengeschaltet, welche die Komponenten oberhalb dieser Grenze abschneiden. Je nach Ausführung sind mit Beschleunigungsaufnehmern Messungen auch weit unter 1 Hz möglich. Allerdings ist es prinzipbedingt nicht möglich, statische Messungen durchzuführen.

### 6.1.5 Anordnung von Schwingungsaufnehmern

Bei Schwingungsmessungen verwendet man überwiegend berührungslose Schwingungsaufnehmer für relative Schwingungen (Wirbelstromaufnehmer) oder Schwinggeschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsaufnehmer für absolute Schwingungsmessungen. Die Montage

des Aufnehmers hat einen großen Einfluss auf seine Übertragungscharakteristik. Während die Messpunkte für Schwingwegaufnehmer an den Gleitlagern von Turbomaschinen vorgegeben sind, sollte die geeignete Platzierung für Beschleunigungsaufnehmer an der Maschinenstruktur in jedem Einzelfall abgewogen werden [113]. Dabei sind die Hauptschwingungsrichtung, Übertragungseigenschaften zwischen Schwingungsquellen und Messpunkten und Umgebungseinflüsse zu berücksichtigen [34].

Besonders ist die Befestigung von Beschleunigungsaufnehmern zu beachten. Die Befestigung wirkt wie eine Feder, auf der die Masse des Schwingungsaufnehmers sitzt (**Bild 6.7**). Dadurch tritt eine Masse-Feder-Resonanz auf. Die Gesamtübertragungscharakteristik dieses Zweimassenschwingers wird durch eine niedrige Masse-Feder-Resonanzfrequenz stark beeinflusst. Aus diesem Grund ist auf eine möglichst steife Verbindung zwischen Aufnehmer und Maschinenoberfläche zu achten, da daraus eine sehr hohe Resonanzfrequenz des Systems Aufnehmer–Befestigung resultiert. Als ideale Montageart ist die Schraubverbindung zu nennen, da sich hierbei, eine ebene Oberfläche vorausgesetzt, die Übertragungscharakteristik nicht nennenswert verändert. Handgeführte Testspitzen, schlecht geklebte oder über Permanent-magnet auf rauen Oberflächen befestigte Aufnehmer sind dagegen für schwingungs-diagnostische Überwachungszwecke ungeeignet. Weitere Hinweise dazu lassen sich z. B. in [34] finden.

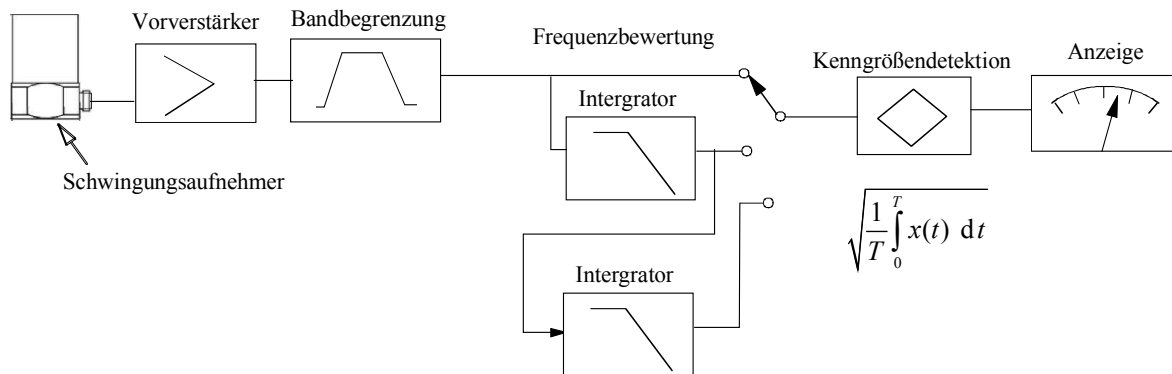


**Bild 6.7** Vereinfachtes Schwingungsmodell: Schwingungsaufnehmer–Befestigung–Messobjekt

## 6.2 Realisierung eines virtuellen Messgerätes für die Schwingungsstärkemessung mit LabView

Im industriellen Einsatz sind für Schwingungsstärkemessungen auch heute herkömmliche kommerzielle Messgeräte dominierend. Sie können analog oder digital sein. Zur Beurteilung von Schwingungsgemischen auf vergleichender Basis wird die sogenannte „effektive Schwingstärke“ in VDI 2056 und DIN 45666 benutzt. Darunter ist der quadratische Mittelwert der Schwingbeschleunigung, der Schwinggeschwindigkeit, und des Schwingwegs

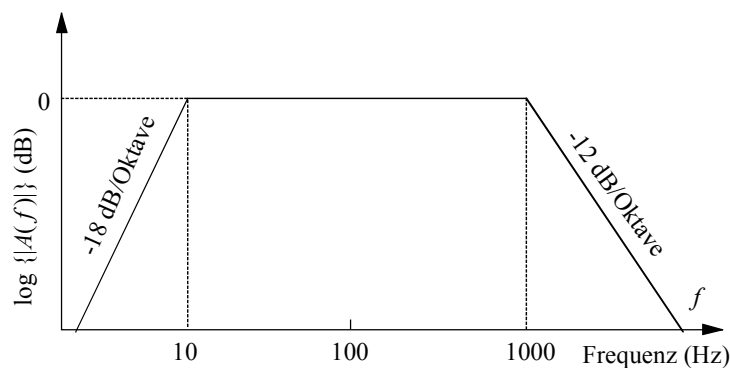
im Frequenzbereich von 10 Hz bis 1000 Hz zu verstehen. Die Empfehlung der Frequenzbandbegrenzung und Frequenzbewertung für die Messung dieser Schwingstärke ist in DIN 45662 zu finden. **Bild 6.8** zeigt das Flussdiagramm eines Schwingungsmessgeräts.



**Bild 6.8** Flussdiagramm einer Schwingungsmesseinrichtung

Aufgabenstellung im Rahmen dieser Arbeit ist der Entwurf und die praktische Umsetzung eines PC-gestützten Messsystems, mit dem man Schwingungsstärkemessungen an mechanischen Getrieben und elektrischen Motoren durchführen kann. Dazu steht eine A/D-Wandlerkarte mit einer Auflösung von 16 bit bei 230 kHz sowie ein Beschleunigungssensor und ein Ladungsverstärker mit einem integrierten Tiefpassfilter der Grenzfrequenz von 10 kHz zur Verfügung. Gemeinsam mit einem PC und einer unter LabView entwickelten Applikation wird damit ein virtueller Schwingungsstärkemesser realisiert. Dabei sind die folgenden Anforderungen des industriellen Partners zu berücksichtigen:

- Messung des Effektivwerts der Schwingbeschleunigung, der Schwinggeschwindigkeit, und des Schwingwegs unter Berücksichtigung von DIN 45662 und firmenspezifischer Frequenzbandbegrenzung (**Bild 6.9**).
- Gewinnung stabiler Messergebnisse in der industriellen Umgebung
- Anpassung firmenspezifischer Messprozesse
- Abspeichern der Messergebnisse im Spreadsheet-Format zum Einlesen in gängiger Software wie z. B. Microsoft Excel



**Bild 6.9** Die firmenspezifische Frequenzbandbegrenzung für die Messung der Schwingbeschleunigung

Zur Gewinnung stabiler Messergebnisse sollen die Einflüsse von Störungen unter Betriebsbedingungen vermindert werden, die in den meisten Fällen als stochastische Signale

betrachtet werden können. Dazu wird das Messergebnis über eine wählbare Anzahl von Signalsegmenten gemittelt. Zur Gewinnung einheitlicher und reproduzierbarer Messergebnisse ist die Frequenzbandbegrenzung erforderlich [110; 111].

### 6.2.1 Digitale Filter

Die Frequenzbandbegrenzung lässt sich durch analoge oder digitale Filter realisieren. Die analoge Filterung eines Signals erfordert die Entwicklung einer elektrischen Schaltung, die bestimmte Frequenzanteile eines Eingangssignals amplituden- bzw. phasenmäßig verändert und dann ein entsprechendes Ausgangssignal abgibt. Die Realisierung eines solchen Filters führt bei anspruchsvollen Filterfunktionen zu einem aufwändigen Schaltungsaufbau mit vielen Bauelementen. Eine Veränderung der Filtereigenschaften ist dann nur noch in engen Grenzen durch eine Umschaltung von zusätzlich vorhandenen Bauelementen möglich. Aus diesem Grunde wird sich heute die Verwendung von analogen Filtern vor allem auf Spezialprobleme bzw. Aufgaben mit höchsten Geschwindigkeitsanforderungen konzentrieren. Außerdem werden analoge Filter vor dem Abtasten von analogen Signalen als Anti-Aliasing-Filter sowie bei der Digital-Analog-Umsetzung als Rekonstruktionsfilter eingesetzt. In diesen Fällen ist die analoge Filterung unumgänglich.

Digitale Filter können in den meisten Anwendungsfällen analoge Filterfunktionen vollständig ersetzen und gestatten zusätzlich die Realisierung von völlig neuartigen Filterfunktionen, die es im Bereich der analogen Filtertechnik praktisch nicht gibt. Eigentlich stellen digitale Filter nichts anderes als mehr oder weniger aufwändige Rechenvorschriften zur Umrechnung einer Eingangsfolge  $x[n]$  zeitdiskreter Signale in eine Ausgangsfolge  $y[n]$  zeitdiskreter Signale dar. Die Rechenvorschrift selbst bezeichnet man als den Filteralgorithmus, und damit wird sofort klar, dass man durch den Austausch der Filteralgorithmen unterschiedlichste Filterfunktionen realisieren kann. Digitale Filter bieten gegenüber analogen Filtern große Vorteile: die Stabilität, Reproduzierbarkeit, Flexibilität, Vorhersagbarkeit und Störimmunität [60].

Digitale Filter können als digitale lineare Systeme betrachtet werden. Es wurde gezeigt [31], dass man die Übertragungseigenschaften linearer digitaler Systeme im  $z$ -Bereich durch eine gebrochen rationale Übertragungsfunktion beschreiben kann:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \left( \sum_{\mu=0}^M b_{\mu} z^{-\mu} \right) / \left( \sum_{\nu=0}^N a_{\nu} z^{-\nu} \right) \quad (6.2.1)$$

Durch die Wahl der Parameter  $b_{\mu}$  und  $a_{\nu}$  wird es möglich, bestimmte Eigenschaften eines Filters bezüglich seines Amplitudengangs (Tiefpass, Hochpass, Bandpass und Bandsperre), seiner Phase bzw. seiner Gruppenlaufzeit zu realisieren [60]. Anhand des Parameters  $N$  lassen sich zwei Grundstrukturen von digitalen Filtern unterscheiden: Mit  $N \geq 1$  ergibt sich ein *rekursives* Filter, wobei der Koeffizient  $a_0$  auf eins festgelegt wird, während man für  $N = 0$  ein *nichtrekursives* Filter erhält.

Die rekursiven Filter sind in ihrem Systemverhalten und bezüglich der Entwurfsmöglichkeiten (Butterworth-, Tschebyscheff-, Bessel- und Cauer-Entwurf) eng mit den klassischen analogen Filtern verwandt. Beide Systemtypen werden durch Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion  $H(s)$  bzw.  $H(z)$  charakterisiert. Bei Anregung eines rekursiven Filters durch einen Einheitsimpuls kann das Ausgangssignal nie verschwinden, da der zum Zeitpunkt  $t = 0$  wirksam gewesene Einheitsimpuls das Ausgangssignal immer noch beeinflusst. Man bezeichnet diese Art von Filtern daher als *Infinite Impulse Response Filter* (IIR-Filter). Die nichtrekursiven Filter haben im zeitkontinuierlichen Bereich keine Entsprechung und besitzen eine zeitlich streng begrenzte Impulsantwort, also eine Eigenschaft, die sich bei analogen Systemen prinzipiell nicht findet. Diese Filter werden als FIR-Filter – *Finite Impulse Response Filter* – bezeichnet.

FIR-Filter werden meist dort eingesetzt, wo die erwünschten Filterspezifikationen nicht mit einem IIR-Filter erreicht werden können. FIR-Filter sind ein Spezialfall der rekursiven Systeme, indem keine Rückführungen, sondern nur *feed-forward*-Pfade existieren [60]. So erhält man aus Gl. (6.2.1) die Übertragungsfunktion von FIR-Filtern:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{\mu=0}^M b_{\mu} z^{-\mu} \quad (6.2.2)$$

und daraus folgt die Rechenvorschrift:

$$y[n] = \sum_{\mu=0}^M b_{\mu} \cdot x[n - \mu] \quad (6.2.3)$$

Mit FIR-Filtern kann man völlig neue Möglichkeiten des Filterentwurfs schaffen. Beispiele sind die Erzeugung exakt linearphasiger Systeme, die stetige Stabilität und größere Toleranz von Rundungen von Koeffizienten als IIR-Filter. Allerdings benötigen FIR-Filter für eine bestimmte Flankensteilheit eine größere Ordnung und damit mehr Rechenaufwand als IIR-Filter. Aus diesem Grunde wäre es nicht sinnvoll, ein Filter dort einzusetzen, wo die gestellten Aufgaben auch mit einem IIR-Filter gelöst werden können. Ein IIR-Filter 2. Ordnung beispielsweise kann mit maximal fünf Filterkoeffizienten realisiert werden. Will man ein vergleichbares Filter als FIR-Filter bauen, dann erfordert dies etwa 20 bis 50 Koeffizienten [60]. Zum Entwurf von FIR-Filtern stehen zwei Methoden im Vordergrund [18]:

- im Zeitbereich: Fenstermethode
- im  $z$ -Bereich: Approximationmethode (Parks-McClellan-Verfahren)

IIR-Filter werden meist dann eingesetzt, wenn die Eigenschaften eines bekannten Analogfilters durch digitale Mittel nachgebildet werden sollen. So wird meist ein IIR-Filter realisiert, wenn ein Frequenzgang  $H(f)$  erreicht werden soll, der ähnlich verläuft wie der Frequenzgang eines analogen Filters. Daher kann man das IIR-Filter als digitale Version eines Analogfilters auffassen. Dadurch wird es möglich, die Impulsantwort  $h[n]$  (oder die  $z$ -Übertragungsfunktion  $H(z)$ ) des IIR-Filters durch eine mathematische Transformation aus der



Impulsantwort  $h(t)$  (oder aus der Übertragungsfunktion  $H(s)$ ) des Analogfilters herzuleiten. Für diese mathematische Transformation kann man viele verschiedene Ansätze machen. Davon stehen zwei im Vordergrund für den Entwurf von IIR-Filtern [60]:

- Entwurf mit impulsinvarianter  $z$ -Transformation
- Entwurf mit bilinearer  $z$ -Transformation.

Butterworth-Filter sind häufig eingesetzte Filter, sobald es um Signalbehandlung vorwiegend im Frequenzbereich geht, während Bessel-Filter besonders für die Behandlung von Signalen im Zeitbereich und für lineare Phasengänge geeignet sind. Tschebycheff- und Cauer-Filter sind Filter für besondere Anforderungen bezüglich des Amplitudenabfalls im Übergangsbereich [1].

### 6.2.2 Frequenzbandbegrenzung mit digitalen Filtern

Die Frequenzbandbegrenzung unterdrückt Frequenzkomponenten im Schwingungssignal außerhalb des interessierenden Frequenzbereiches mit dem Ziel einheitlicher, reproduzierbarer Messergebnisse. Im Hinblick auf die meistens unscharfen Frequenzgrenzen der verschiedenen Wirkungen mechanischer Schwingungen sowie auf den technischen Aufwand sollten die Bandbegrenzungen nicht zu scharf einsetzen [110 – 112]. Zur Realisierung der firmenspezifischen Frequenzbandbegrenzung für die Messung der Schwingbeschleunigung wird hierbei ein Butterworth-Hochpassfilter der 3. Ordnung und ein Butterworth-Tiefpassfilter der 2. Ordnung eingesetzt. Butterworth-Filter besitzen die folgenden Eigenschaften:

- Maximal flacher Amplitudengang ohne Welligkeiten in Durchlass- und Sperrbereich.
- Kurze Anstiegszeit bei der Sprungantwort.
- Mit zunehmender Filterordnung nimmt die Flankensteilheit des Übergangsbereichs zu.

Der nicht frequenzproportionale Phasengang des Butterworth-Filters im Durchlassbereich spielt nur eine geringe Rolle bei der Effektivwertbildung.

In **Bild 6.10** und **6.11** werden das Frontpanel und das Blockdiagramm eines mit Hilfe des LabView-Programms zusammengestellten virtuellen Instruments zur Ermittlung des Effektivwerts der Schwinggeschwindigkeit gezeigt. Die Amplitudengänge beim Messen der Beschleunigung, der Geschwindigkeit und des Wegs werden in **Bild 6.11** dargestellt.

Bei der Schwingungsstärkemessung handelt sich in den meisten Fällen um die Ermittlung des Effektivwerts von Beschleunigungen, Geschwindigkeiten oder Wegen. Die Problematik dabei besteht weniger in der Applikation, sondern darin, die Vergleichbarkeit der Messergebnisse mit dem bisherigen konventionellen Messsystem herzustellen. Genaue Aussagen zur Vergleichbarkeit sind nur möglich, wenn derartige Messungen unter Einhaltung der aktuell gültigen DIN-Normen erfolgen. Die heute üblichen Messgeräte können den idealen Anforderungen der DIN oft nicht vollständig entsprechen. In den meisten Fällen sind die Messgeräte Kompromisse im Verhältnis von Messgenauigkeit und Preis, was eine

Vergleichbarkeit erschwert. Vor dem industriellen Einsatz müssen virtuelle Messsysteme kalibriert werden [112]. In durch den TÜV festzulegenden zeitlichen Abständen ist eine Überprüfung der Kalibrierung erforderlich. Da die Software keiner zeitlichen „Alterung“ unterliegt, ist es für nachfolgende Überprüfungen völlig ausreichend, nur den Beschleunigungsaufnehmer sowie den Verstärker und das dazugehörige analoge Tiefpassfilter zu überprüfen.

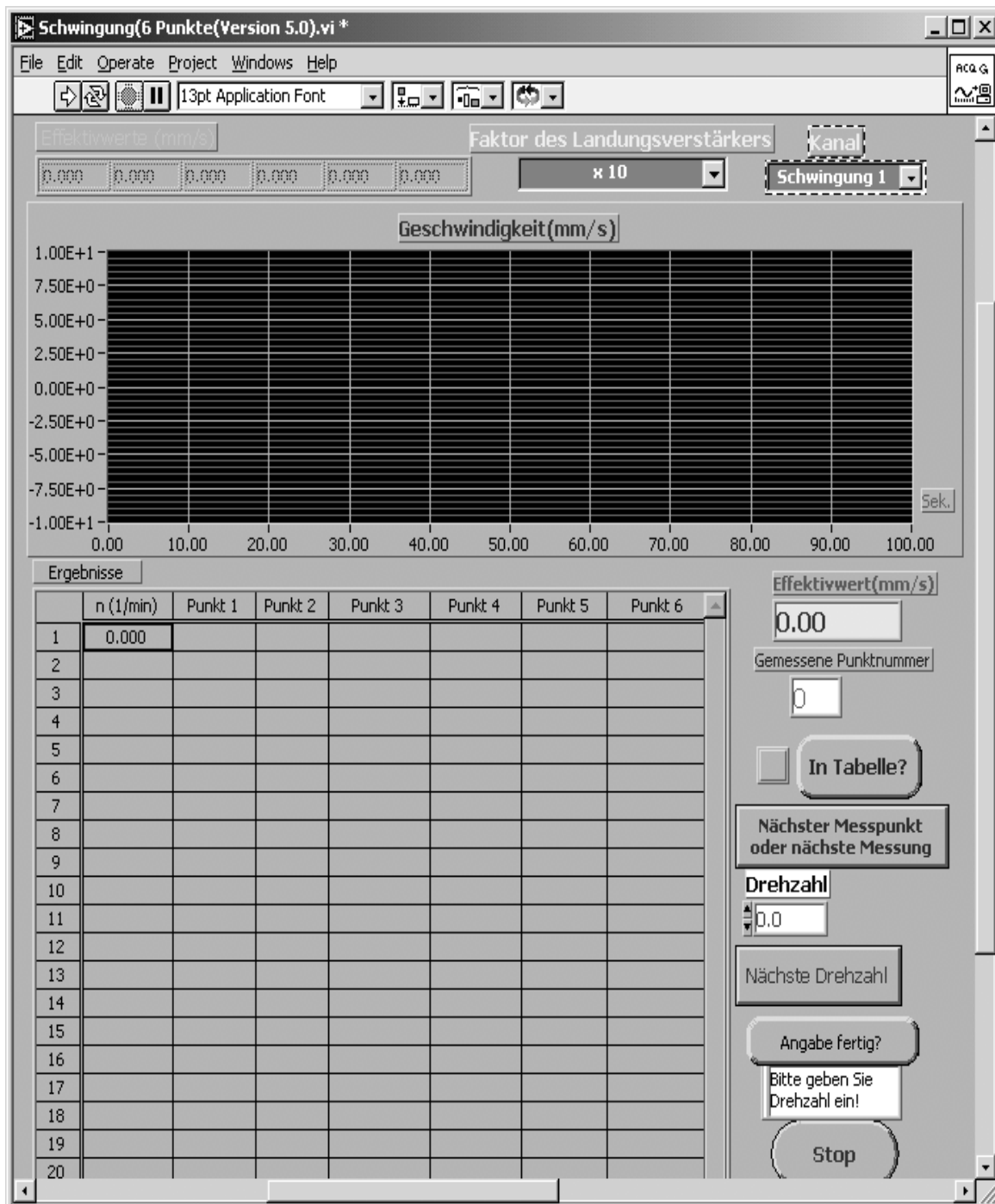
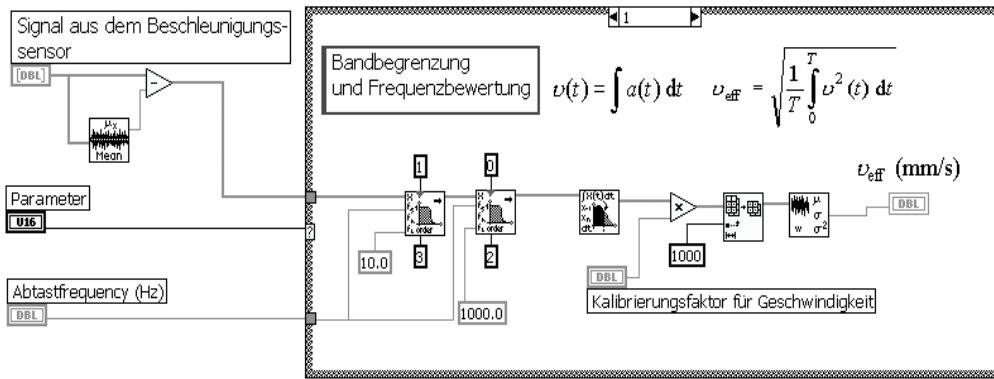
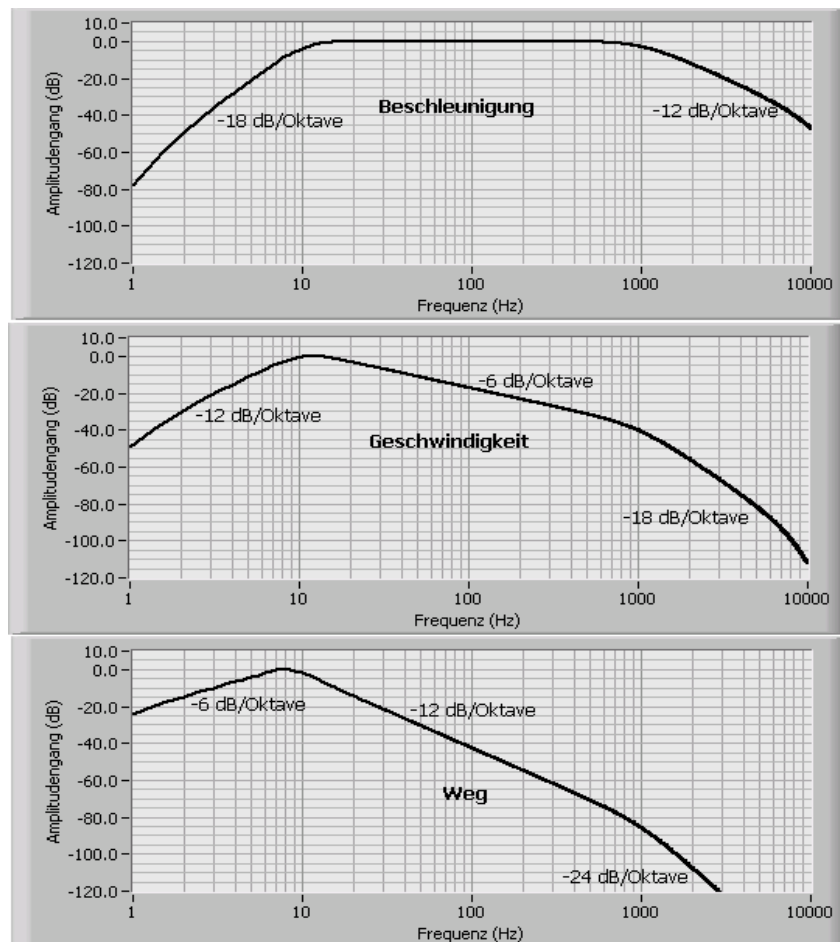


Bild 6.10 Frontpanel eines virtuellen Instruments für die Messung der Geschwindigkeit



**Bild 6.11** Bandbegrenzung und Frequenzbewertung mit den digitalen Filtern bei der Ermittlung des Effektivwerts der Geschwindigkeit



**Bild 6.12** Amplitudengänge beim Messen der Beschleunigung (oben), der Geschwindigkeit (mitte) und des Wegs (unten)

Zur Effektivwertbildung über ein festes Zeitintervall sind, wie beim Einsatz von analogen Filtern auch, das Einschwingverhalten der digitalen Filter und die notwendige Messzeit zu beachten. In der Praxis bedeutet dies, dass die Zeitkonstante des Digitalfilters im Verhältnis zur Messzeit klein sein soll. Als Faustformel kann für die mindestens notwendige Einschwingzeit des Filters gelten:  $T_r = 1/B$ . Dabei ist  $T_r$  in Sekunden anzugeben und  $B$  die Bandbreite des Filters in Hz [5]. Dies entspricht etwa einem Abfall von  $-3$  dB. Betrachtet

man die Amplitudengänge in **Bild 6.12**, erkennt man, dass die Bandbreiten für Geschwindigkeits- und Wegmessungen immer schmaler werden. Bezogen auf die oben aufgeführte Faustformel ist für Geschwindigkeits- und besonders für Wegmessungen die verlängerte Einschwingzeit zu berücksichtigen [5].

### 6.3 Spektralanalyse mit Hilfe von LabView

In der Fehlerfrüherkennung und Diagnose von Maschinen kommt der Spektralanalyse eine zentrale Rolle zu. Aufgabe der Spektralanalyse ist es, eine Schwingung in ihre Einzelkomponenten hinsichtlich der Frequenz zu zerlegen. Dazu wird das Schwingungssignal, das im Außenbereich einer Maschine beispielsweise über einen Beschleunigungsaufnehmer gemessen wird, durch einen Spektralanalysator verarbeitet.

Messtechnisch kann eine Frequenzanalyse über einen seriellen Frequenzanalysator mit einem analogen Bandpassfilter ausgeführt werden. Die Mittenfrequenz und Bandbreite des Filters sind durchstimmbare, das im Idealfall nur für Komponenten eines bestimmten Frequenzbereiches durchlässig ist und andere Anteile hingegen ausblendet. Der ideale Amplitudengang des Filters verliefte rechteckig, aber dies ist gerätetechnisch für analoge Filter nicht zu realisieren. Bei realen Filtern müssen innerhalb des Durchlassbereichs gewisse Signalverzerrungen in Kauf genommen werden, außerhalb der Bandgrenzen setzt die Dämpfung nur mit endlicher Flankensteilheit ein [31]. Mit einer Kombination aus einem seriellen Frequenzanalysator und einem passenden Schreiber können Analysen einschließlich Dokumentation vor Ort durchgeführt werden. Der Einsatz serieller Frequenz-Analysatoren bleibt allerdings auf stationäre Schwingungen beschränkt.

Der klassische FFT-Analysator stellt zur Spektralanalyse ein flexibles und leistungsfähiges Gerät dar, das auch zur Analyse instationärer Schwingungen geeignet ist. Unter Beachtung der grundsätzlichen Gesichtspunkte über Frequenzanalyse (z. B. Aliasing, Leckeffekt, Frequenzauflösung und Spektralinterferenz) kann man befriedigende Ergebnisse erzielen,

Während der analoge Spektralanalysator und der klassische FFT-Analysator meist teure (Spezial-) Hardware in Form von Einzweckgeräten voraussetzt, lässt sich die Spektralanalyse auf einem General-Purpose-Rechner, wie z. B. einem PC, oder auf einem universellen digitalen Signalprozessor relativ einfach in die Software implementieren. Einzige Voraussetzung ist die korrekte zeitliche Abtastung des Schwingungssignals sowie die anschließende Analog-Digital-Umsetzung des in der Regel in analoger Form vorliegenden Messsignals.

Im Folgenden soll auf einen im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Spektralanalysator eingegangen werden. Bei der Prüfstandsmodernisierung soll ein Spektralanalysator in ein Messsystem, das alle thermischen, mechanischen und elektrischen Größen zur Diagnose des Betriebsverhaltens der Antriebe und Getriebe erfasst, integriert werden. Vorhanden waren

eine A/D-Wandlerkarte mit hoher Auflösung (16 bit bei 230 kHz) und LabView-Treiber sowie zwei Beschleunigungsaufnehmer und entsprechende Ladungsverstärker mit einem integrierten Tiefpassfilter der Eckfrequenz 10 kHz. Beim Aufbau dieses integrierten Spektralanalysators waren die folgenden Anforderungen zu berücksichtigen:

- verschiedene Abtastfrequenzen ohne den Einsatz zusätzlicher analoger Antialiasingfilter
- verschiedene Frequenzauflösungen
- Fensterung mit verschiedenen Fensterfunktionen
- Gewinnung stabiler Spektren in der industriellen Umgebung
- Online-Darstellung der gewonnenen Spektren mit der Zoom-Funktion
- Abspeichern der Spektren im Spreadsheet-Format zum Einlesen in gängiger Software wie z. B. Microsoft Excel

Da das entwickelte „Virtuelle Instrument“ meistens von Dritten benutzt wird, sollte auf ein professionelles Design der Bedienoberfläche geachtet werden.

### 6.3.1 Realisierung verschiedener Abtastfrequenzen

Die Digitalisierung der analogen Signale erfolgt mit elektronischen Analog-Digital-Umsetzern (ADU). ADUs sind elektronische Baugruppen, welche analoge Spannungen in binäre Zahlen umwandeln. Dabei wird das Eingangssignal periodisch abgetastet und in eine Binärzahl umgesetzt. Die Wahl der Abtastfrequenz stellt einen elementaren Punkt der digitalen Signalverarbeitung dar. Das Abtasttheorem gibt Bedingungen zur Vermeidung von Aliasing vor. Eine zu niedrige Abtastfrequenz führt im Frequenzbereich zum sogenannten Aliasing-Effekt [9].

Zur Vermeidung des Aliasing-Effekts führt man in den meisten Fällen vor der Abtastung das Signal über ein analoges Antialiasingfilter. Die Abtastfrequenz muss mindestens doppelt so hoch wie die Eckfrequenz des Filters sein. In der Praxis sollte die Abtastfrequenz aber noch höher gewählt werden. Als Richtwert kann gelten  $f_s \geq (3 \cdots 8) f_{\max}$ , wobei  $f_s$  die Abtastfrequenz und  $f_{\max}$  die höchste im Messsignal enthaltene Frequenz ist [5].

Sind für die Messung nur die niedrigeren Frequenzbereiche von Interesse, kann man folgenden Weg gehen. Man wählt aus der Datenreihe des Analog-Digital-Umsetzers nur jeden  $M$ -ten Wert. Dies entspricht zwar wieder einer Abtastung, die nach dem Abtasttheorem erfolgen muss, aber das jetzt benötigte Antialiasingfilter darf digitaler Natur sein. Digitale Filter sind einfach realisierbar und an die zweite Abtastfrequenz adaptierbar. Dieses Verfahren wird als Abwärtstastung bezeichnet [21]. Dadurch werden der Rechenaufwand und Speicherplatzbedarf reduziert. Auf die Behandlung dieses Verfahrens im Frequenzbereich wird hierbei kurz eingegangen.

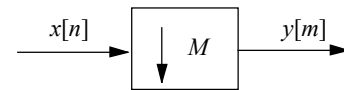
Ein kontinuierliches Signal  $x(t)$  der Bandbreite  $f_{\max}$  wird mit einer Abtastfrequenz  $f_s$  abgetastet und damit das diskrete Signal  $x[n]$  ( $0 \leq n < +\infty$ ) gewonnen. Die  $z$ -Transformation von  $x[n]$  lässt sich ausdrücken als:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n} \quad (6.3.1)$$

Nun wird die Abtastfrequenz um den Faktor  $M$  reduziert, indem nur jeder  $M$ -te ( $M \in \mathbb{N}$ ) Wert des Signals weiterverwendet wird. Das so entstehende Signal  $y[m]$  lässt sich aus dem ursprünglichen Signal  $x[n]$  wie folgt ableiten

$$y[m] = x[m \cdot M] \quad (6.3.2)$$

Dieser Vorgang ist in **Bild 6.13** symbolisch dargestellt. Das Ausgangssignal  $y[m]$  ist ein gegenüber dem Eingangssignal  $x[n]$  abwärtsgetastetes Signal [81].



**Bild 6.13** Abwärtstaster

Die Abwärtstastung des Signals  $x[n]$  wird als ein zweistufiger Vorgang betrachtet, mit dem die Signale  $x[n]$  und  $y[m]$  im Frequenzbereich in Verbindung gesetzt werden. In der ersten Stufe entsteht das Signal  $P_0[n]$  in **Bild 6.14b**, wobei gilt:

$$P_0[n] = \begin{cases} x[n] & \text{für } n = m \cdot M, m \in \mathbb{N}^0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.3.3)$$

In der Multiraten-Signalverarbeitung nennt man das Teilsignal  $P_0[n]$  eine Polyphasenkomponente des ursprünglichen Signals  $x[n]$  [21]. Die  $z$ -Transformationen von  $P_0[n]$  und  $x[n]$  werden auf die gleiche Taktrate bezogen, und sie können in Zusammenhang gestellt werden [21] (siehe Anhang):

$$P_0(z^M) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X(W_M^k \cdot z) \quad (6.3.4)$$

wobei  $W_M^k = e^{-j2\pi k/M}$ . Durch Weglassen der  $M-1$  nullwertigen Abtastwerte von  $P_0[n]$  zwischen den von null verschiedenen Abtastwerten entsteht schließlich das abwärtsgetastete Signal  $y[m]$  in **Bild 6.14c**. Die  $z$ -Transformation von  $y[m]$  lässt sich ausdrücken als

$$Y(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} y[m] \cdot z^{-m} \quad (6.3.5)$$

Somit folgt

$$Y(z^M) = \sum_{m=0}^{+\infty} y[m] \cdot (z^M)^{-m} = \sum_{m=0}^{+\infty} y[m] \cdot z^{-mM} \quad (6.3.6)$$

Mit Gln. (6.3.2) und (6.3.3) ergibt sich

$$Y(z^M) = \sum_{m=0}^{+\infty} x[m \cdot M] \cdot z^{-mM} = P_0(z^M) \quad (6.3.7)$$

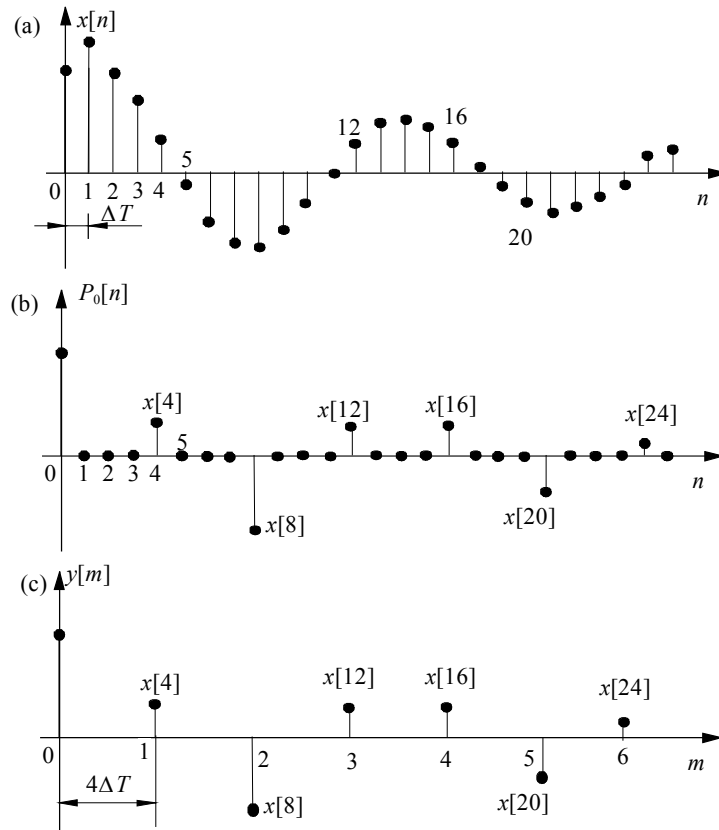
Mit Gln. (6.3.4) und (6.3.7) folgt die gesuchte  $z$ -Transformation von  $y[m]$ :

$$Y(z) = P_0(z) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X(W_M^k \cdot z^{(1/M)}), \quad (6.3.8)$$

wobei  $W_M^k = e^{-j2\pi k/M}$ . Wird  $z$  von  $e^{j\Omega}$  ersetzt, erhält man die zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT) des abwärtsgetasteten Signals  $y[m]$ :

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X(e^{-j2\pi k/M} \cdot e^{j\Omega/M}) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X(e^{j(\Omega/M - 2\pi k/M)}), \quad (6.3.9)$$

wobei  $\Omega = 2\pi f \cdot \Delta T = 2\pi f / f_s$ .



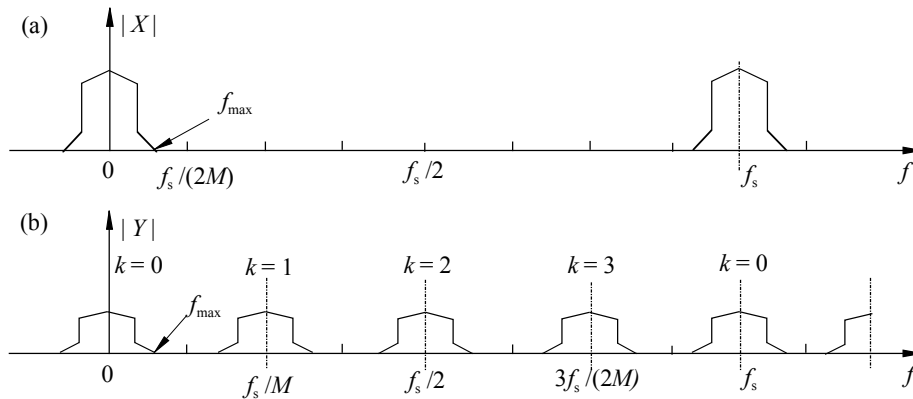
**Bild 6.14** Beispiel der Abwärtstastung bei  $M = 4$

**Bild 6.15a** zeigt als Beispiel das Spektrum  $|X| = |X(e^{j2\pi f/f_s})|$  des ursprünglichen Signals. Hierbei ist eine Bandbegrenzung auf  $f_{\max} < f_s/(2M)$  angenommen. Das Spektrum ist periodisch in  $f$  mit Abständen der Abtastfrequenz  $f_s$ .

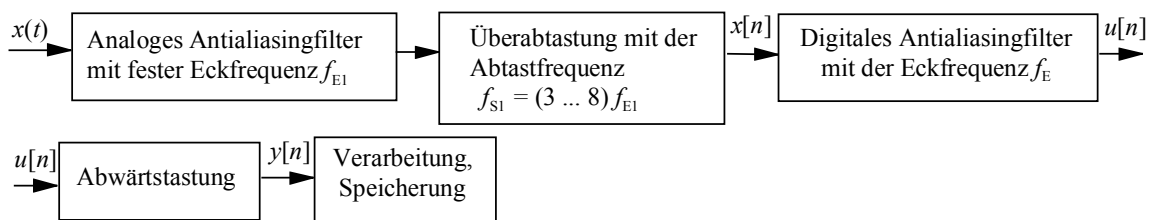
Gemäß Gl. (6.3.9) wird das Spektrum  $|Y| = |Y(e^{j2\pi f/f_s})|$  in **Bild 6.15b** dargestellt. Das Spektrum  $|X| = |X(e^{j2\pi f/f_s})|$  des ursprünglichen Signals wird in Abständen  $f_s/M$  periodisch fortgesetzt. In der Periode der Länge  $f_s$  kommen zum ursprünglichen Spektrum  $M-1$  gleichmäßig versetzte Kopien hinzu. Es ist allerdings zu beachten, dass die Beträge der Spektren um den Faktor  $M$  reduziert sind (Gl. (6.3.9)). Durch die hinzugekommenen Spektren entsteht eine neue Periodizität der Länge  $f_s/M$ . Dies stimmt mit der Tatsache überein, dass die Abtastfrequenz um den Faktor  $M$  reduziert wurde.

Aus **Bild 6.15** ist ersichtlich, dass sich die bei der Abwärtstastung entstehenden Spektren überlappen, wenn das ursprüngliche Spektrum nicht auf  $f_{\max} < f_s/(2M)$  bandbegrenzt ist.

Dieser Überlappungseffekt, auch Aliasing genannt, führt zu einer irreversiblen Veränderung des Signals [81]. Aus diesem Grunde ist es erforderlich, das ursprüngliche Signal vor der Abwärtstastung mit Hilfe eines Tiefpassfilters in seiner Bandbreite zu begrenzen. Diese Tiefpassfilterung lässt sich digital realisieren. Das dafür eingesetzte IIR- oder FIR-Filter ist einfach realisierbar und an die zweite Abtastfrequenz adaptierbar. **Bild 6.16** zeigt die Realisierung verschiedener Abtastfrequenzen mit der digitalen Antialiasing-Filterung und Abwärtstastung.



**Bild 6.15** Spektren bei der Abwärtstastung bei  $M = 4$



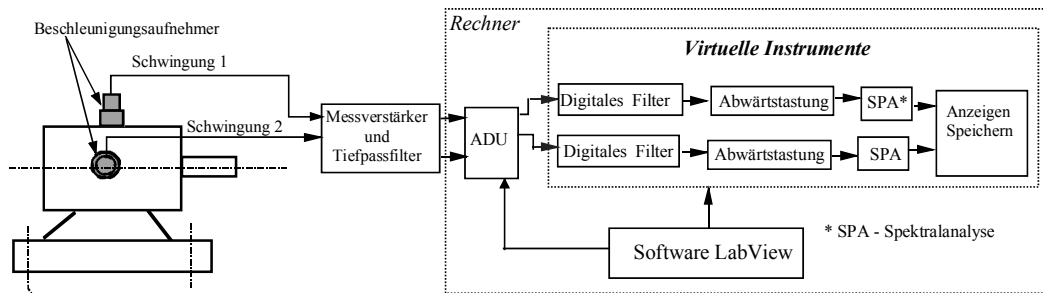
**Bild 6.16** Vorgehen bei Benutzung der digitalen Antialiasing-Filterung und Abwärtstastung

### 6.3.2 Ein virtuelles Instrument für die Spektralanalyse mit dem LabView-Programm

In **Bild 6.17** wird die Struktur des Spektralanalysators dargestellt. Unter Berücksichtigung der Eckfrequenz (10 kHz) der in den Ladungsverstärkern integrierten Tiefpassfilter und der A/D-Wandlertarte (230 kHz für ein Kanal) ist die Abtastfrequenz mit den Messzeiten von 1 s, 2 s, 4 s und 8 s bei  $f_s = 32768$  Hz ( $= 2^{15}$  Hz) festgelegt. Dabei wird berücksichtigt, dass sich die FFT mit der Blocklänge einer Zweierpotenz effizient berechnen lässt. Bei direkter Bearbeitung der Abtastwerte mit der DFT/FFT ist für diese Abtastfrequenz der darstellbare Frequenzbereich 0 Hz bis 16384 Hz.

Zur Verringerung der FFT-Datenmenge und Realisierung von verschiedenen Abtastfrequenzen können die digitalen Signale durch digitale Tiefpassfilter gefiltert werden, die sich im Rahmen des LabView-Programms nach den Anforderungen der verschiedenen Eckfrequenzen leicht realisieren lassen. Dadurch kann man ohne den Aliasing-Effekt und den Einsatz eines weiteren analogen Tiefpassfilters diese gefilterten Signale abwärtstasten.





**Bild 6.17** Struktur des Spektralanalysators

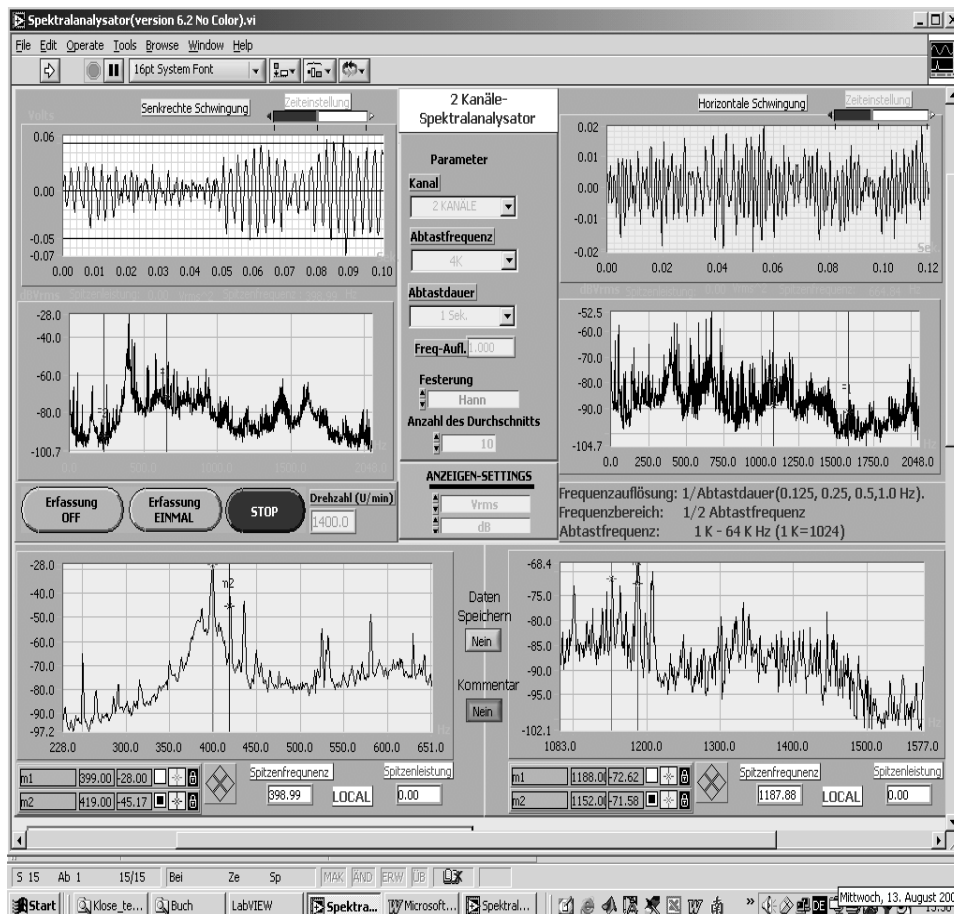
Liegen z. B. die interessierenden Frequenzen in einem Bereich von 0 Hz bis 2000 Hz, kann man ein digitales Tiefpassfilter (IIR- oder FIR-Filter) mit der Eckfrequenz von 4000 Hz einsetzen. Für den betrachteten Bereich von 0 Hz bis 2000 Hz ist es möglich, nur jeden achten Wert der gefilterten Datenbereiche zu benutzen. Die zweite Abtastfrequenz ergibt sich dann zu  $32768/8 \text{ Hz} = 4096 \text{ Hz}$ . Die Frequenz von 4096 Hz liegt noch etwas über dem Wert, der durch das Abtasttheorem vorgeschrieben wird. Mit dieser Vorgehensweise spart man ein weiteres analoges Anti-Aliasing-Filter, die Menge der zu speichernden Daten sinkt auf ein Achtel, und der zeitliche Rechenaufwand für die FFT wird ebenfalls reduziert.

Da die Messzeit für die Frequenzauflösung maßgebend ist, erhält man ungeachtet der Abtastfrequenz mit den obengenannten Messzeiten jeweils 1 Hz, 0,5 Hz, 0,25 Hz und 0,125 Hz.

Die Spektralanalyse von deterministischen abgetasteten Signalen basiert auf der DFT/FFT. Da die gemessenen Signale praktisch nicht nur deterministische Anteile, sondern zusätzlich stochastische Anteile aufweisen, reicht die einfache Verwendung einer DFT/FFT zur Spektralanalyse meist nicht aus. Man kann solche Signale als stochastische Signale beobachten. Die Spektralschätzung stochastischer Signale kann mit Hilfe des Periodogramms implementiert werden. Dabei basiert die Spektralschätzung auf einer begrenzten Musterfunktion [48]. Eine solche Zeitbegrenzung hat bei der Spektralanalyse deterministischer Signale mit DFT/FFT meist den Leckeffekt zur Folge. Entsprechende Auswirkungen ergeben sich auch für stochastische Signale: eine Verfälschung des berechneten Spektrums gegenüber dem wahren Leistungsdichtespektrum. Zur Gewinnung stabiler Spektren in der industriellen Umgebung wird meist in praktischen Anwendungen das Bartlett- oder Welch-Verfahren, welches als verbessertes Periodogramm betrachtet werden kann, eingesetzt. Dabei wird häufig die DFT/FFT zur Schätzung des Leistungsdichtespektrums abgetasteter Signale implementiert. Somit gelten sowohl für deterministische als auch für stochastische Signale der Einsatz von Fensterfunktionen zur Unterdrückung des Leckeffekts sowie die Zusammenhänge zwischen der Frequenzauflösung, der Anzahl der Frequenzlinien und der erforderlichenen Zeitdatensatzlänge in gleicher Weise.

Im Rahmen der Signalverarbeitungs-Toolbox des LabVIEW-Programms stehen insgesamt zwölf Fensterfunktionen zur Verfügung, die sich je nach den zu analysierenden Signalen und

den gestellten Anforderungen in diesem integrierten Spektralanalysator auswählen lassen. Im Vergleich mit der Rechteck-Fensterfunktion weisen alle anderen Fensterfunktionen im Frequenzbereich Nebenzipfel mit geringeren Amplituden auf. Somit wird der Leckeffekt bei der Spektralanalyse von determinierten Signalen verringert, und bei der Spektralanalyse von stochastischen Signalen werden die Schwankungen und Verzerrungen des geschätzten Spektrums reduziert. In vielen Anwendungen wird die Hanning-Fensterfunktion dank ihrer einfachen Implementierungsmöglichkeit und niedrigen Nebenzipfel-Amplituden eingesetzt. **Bild 6.18** zeigt das Frontpanel dieses Spektralanalysators. Die manuelle Eingabe von Parametern oder Events lässt sich per Knopfdruck durchführen. Zur manuellen Eingabe von Kommentaren oder Datenspeichern wurden verschiedene Editoren als SubVIs programmiert, die sich ebenfalls quasi per Knopfdruck öffnen lassen. Die eingetragenen Daten lassen sich dann mit den berechneten Spektren im ASCII-Format abspeichern.



**Bild 6.18** Frontpanel des 2-Kanal-Spektralanalysators

## Kapitel 7

# Virtuelle Instrumente zur Schwingungsanalyse und Fehlerdiagnose an Planetengetrieben

### 7.1 Einleitung

Eine aussagefähige und sichere schwingungsdiagnostische Beurteilung des Zustands von Maschinen und Anlagen setzt in Zusammenhang mit den Erkenntnissen über ihre Laufeigenschaften und Konstruktionsdaten sowie die Anregungsquellen von Schwingungen beim Schaden eine geeignete Erfassung und Verarbeitung von Schwingungssignalen voraus [72]. Hierbei hat die Signalverarbeitung die Aufgabe, die für eine Zustandsüberwachung und Fehlerdiagnose nützlichen Informationen aus den gemessenen Schwingungssignalen zu extrahieren, die störenden Geräusche herauszufiltern und die Schadensmerkmale herauszufinden sowie die Maschinenzustände zu beurteilen und ihre Entwicklung zu prognostizieren.

Die für die Schwingungsdiagnose von Maschinen und Anlagen zur Verfügung stehenden Verfahren werden meist im Frequenzbereich durchgeführt. Das grundlegende Verfahren ist die Spektralanalyse. Durch Überführung eines Signals vom Zeitbereich in den Frequenzbereich lassen sich die im Signal enthaltenen Frequenzkomponenten im gewählten Bereich aufzeigen. Zur schwingungsdiagnostischen Beurteilung von Maschinen und Anlagen wird meist in erster Linie ein breitbandiges Spektrum der am Gehäuse gemessenen Signale beobachtet [35]. Das Breitbandspektrum gibt einen spektralen Überblick von der Frequenz  $f = 0$  Hz bis zur Grenzfrequenz, die von der Abtastfrequenz her bei rechnergestützten Diagnosesystemen bedingt oder von dem Messbereich eines analogen Frequenz-Analysators bestimmt ist. In vielen Fällen können verschiedene Schadenarten und ihre Ursachen durch die Spektralanalyse von Schwingungssignalen herausgefunden werden. Dafür lässt sich der im vorhergehenden Kapitel dargestellte Spektralanalysator einsetzen.

Die meisten Schäden lassen sich allerdings nicht so einfach detektieren oder zuordnen, besonders in ihrem Frühstadium. Einerseits zeigt sich ein Schaden in der Regel nicht nur durch eine einzige Frequenz. Vielmehr führt er meist zu einem Frequenzmuster, bestehend aus verschiedenen Frequenzanteilen. In Verbindung mit den von anderen Anregungsquellen erzeugten Schwingungsanteilen bilden sie eine komplizierte spektrale Struktur. Überdies lassen sich starke Rauschanteile des Spektrums häufig im Spektrum nicht sinnvoll interpretieren. Eine zuverlässige Detektion oder Zuordnung ist dann schwierig. Andererseits ist der durch einen Fehler erzeugte Anteil im Schwingungssignal in vielen Fällen nur schwach ausgeprägt, sodass er durch andere stärkere Anteile dieses Signals überdeckt werden kann. Ein Beispiel dafür ist der Schaden eines Wälzlagers in einem Zahnradgetriebe. In solchen

Getrieben gibt es meist viele Anregungsquellen [35]. Die dem Wälzlager zugeordneten Schwingungskomponenten sind meist viel schwächer als die durch die Zahneingriffe erzeugten Komponenten. Für eine aussagefähige Fehlerdiagnose ist eine einfache Spektralanalyse ohne weitere Vorverarbeitung häufig nicht ausreichend.

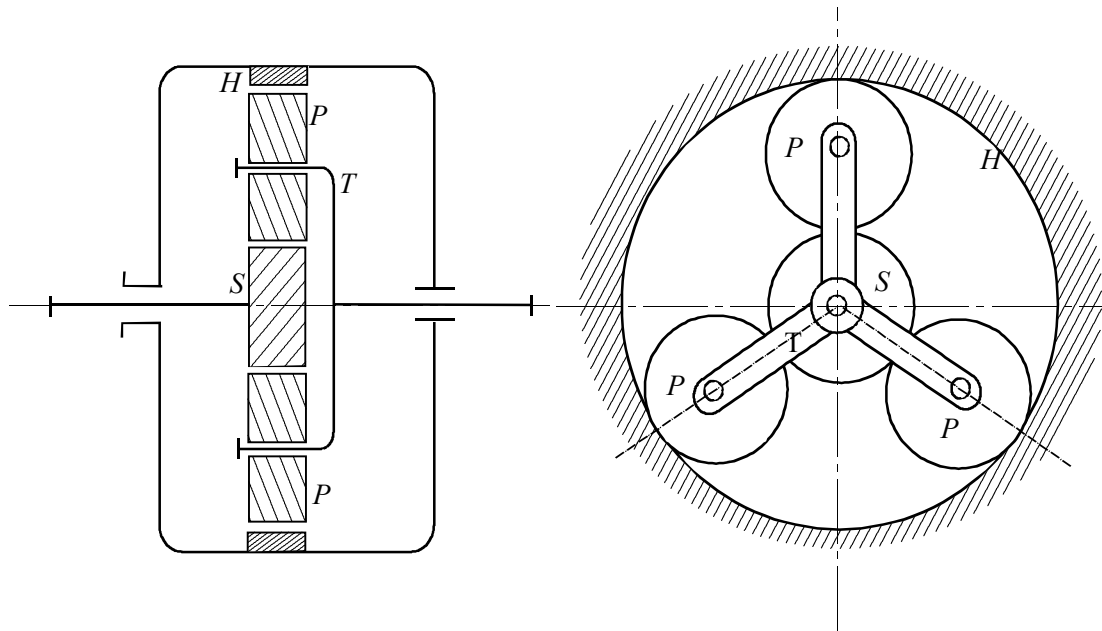
Heutzutage stehen vielfältige Verfahren der Signalverarbeitung für unterschiedliche Schäden in Maschinenteilen zur Verfügung [34; 35]. Allerdings gibt es kein grundsätzliches, allgemein einsetzbares Verfahren für die Fehlerdiagnose aller Arten von Maschinen. Welches Verfahren für welche Diagnoseaufgabe besonders geeignet ist, hängt immer vom Anwendungsfall, also dem Diagnoseobjekt, den vorliegenden Problemen, der Diagnoseumgebung usw., ab.

Eine Aufgabenstellung im Rahmen der Zusammenarbeit mit der Firma Klose ist der Entwurf und die praktische Umsetzung eines PC-gestützten Messsystems, mit dem man die Schwingungsanalyse und Fehlerdiagnose an Planetengetrieben durchführen kann. Dazu steht eine A/D-Wandlerkarte mit einer Auflösung von 16 bit bei 230 kHz sowie ein Beschleunigungssensor und ein Ladungsverstärker mit einem integrierten Tiefpassfilter der Grenzfrequenz von 10 kHz zur Verfügung. Gemeinsam mit einem PC und einer unter LabView entwickelten Applikation sollen industrietaugliche virtuelle Instrumente für die Schwingungsanalyse und Fehlerdiagnose von Verzahnungs- und Wälzlagerfehlern an einem kombinierten Planetengetriebe entwickelt werden. Dabei sind die folgenden Anforderungen des industriellen Partners zu berücksichtigen:

- Untersuchung der charakteristischen Frequenzen des kombinierten Planetengetriebes
- Untersuchung der geeigneten und mit dem LabView-Programm realisierbaren Signalverarbeitungsverfahren für die Schwingungsanalyse und Fehlerdiagnose am kombinierten Planetengetriebe
- Anpassung firmenspezifischer Messprozesse
- Abspeichern der Messergebnisse im Spreadsheet-Format zum Einlesen in gängige Software wie z. B. Microsoft Excel

## 7.2 Fehler und Schwingungen in Planetengetrieben

Planetengetriebe sind eine besondere Bauart von Zahnradgetrieben (**Bild 7.1**). Sie bestehen aus zwei sogenannten Zentralrädern, dem Sonnenrad  $S$  (Außenverzahnung) und dem Hohlrad  $H$  (Innenverzahnung), sowie einer Anzahl von Planetenrädern  $P$ , die auf dem Planetenträger  $T$  gelagert sind. Welches der Getriebeglieder  $S$ ,  $H$  oder  $T$  fest mit dem Gehäuse verbunden ist und über welche der Antrieb bzw. Abtrieb erfolgt, hängt vom gewünschten Übersetzungsverhältnis ab. Getriebe mit feststehendem Planetenträger werden im Allgemeinen Standgetriebe, solche mit umlaufendem Planetenträger Umlaufgetriebe genannt. Es gibt aber auch Bauformen, bei denen alle drei Glieder drehbar sind. Damit sind dann in der Drehzahl stufenlos variable Antriebe oder Überlagerungsetriebe möglich. Darüber hinaus sind auch mehrstufige Planetengetriebe im Einsatz [59].



**Bild 7.1** Schemazeichnung eines einfachen Planetengetriebes

Bei der Übersetzung ins Langsame dient das Sonnenrad als Antriebswelle und der Planetenträger bildet den Abtrieb. Die Planetenräder sind durch die Planetenlager im Planetenträger abgestützt und drehen sich nicht nur um ihre eigene Achse, sondern auch noch um den Mittelpunkt des Planetenträgers. Über die Planetenlager wird das Drehmoment dem Planetenträger zugeführt. Umgekehrt bildet bei der Übersetzung ins Schnelle der Planetenträger den Antrieb und das Sonnenrad den Abtrieb.

### 7.2.1 Zahneingriffsschwingungen

Wie alle Maschinen besitzen Planetengetriebe eine schwingungsfähige Struktur [38]. Als Folge dieser Schwingungsfähigkeit und in Verbindung mit den funktionsbedingten inneren Wechselkräften (inneren Anregungsquellen) und den eventuellen dynamischen Verläufen im Antriebsmoment (äußeren Anregungsquellen) stellen sich in einem Getriebe Zahnrad-, Wellen- und Gehäuseschwingungen ein. Als Beispiele äußerer Anregungsquellen sind zu nennen:

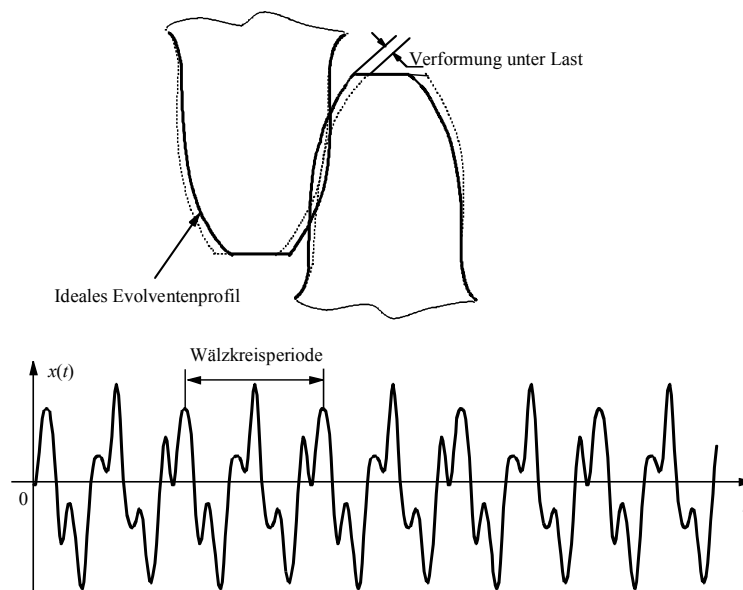
- Regelantriebe (Stromrichter, Umrichter) mit Stromüberschwingungen oder Lücken des Stroms
- Verbrennungskraftmaschinen (Kolbenmaschinen)
- Arbeitsmaschinen, die mit ungleichförmigen Lastzyklen oder mit sich ständig veränderndem Arbeitspunkt arbeiten

Diese äußeren Anregungsquellen können in manchen Fällen schädigende Betriebszustände, wie anhaltende Eigenschwingungen (z. B. Torsionsresonanzen des Antriebs) und Entkopplung von Zahnflanken, auslösen.

Die inneren Anregungsquellen in Zahnradgetrieben lassen sich in drei Gruppen aufteilen:

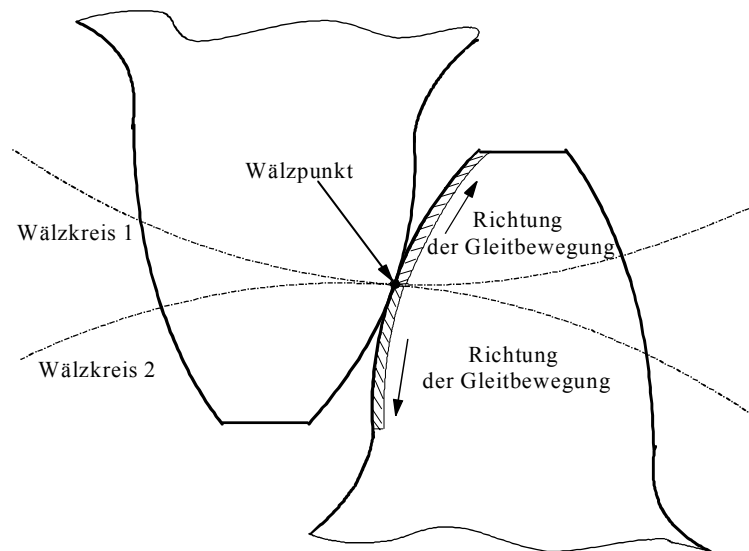
- Anregungen im Zahneingriff: Sie gehen von kämmenden Zahnrädern aus und sind funktions- und konstruktionsbedingt. Diese Anregungen treten meist dominierend in Erscheinung. Bei fehlerfreien Zahnrädern werden sie vor allem durch die Zahn deformation unter Last hervorgerufen.
- Fertigungstechnisch bedingte Anregungen: Sie werden von Abweichungen der idealen Zahnflankengeometrie oder der normalen Eingriffsverhältnisse hervorgerufen.
- Zusätzliche Anregungen: Sie treten bei Verzahnungsschäden, Lagerschäden und Ausrichtfehlern von Wellen auf.

Beim Eingriff von Zahnrädern ändern sich über die Eingriffsstrecke der Angriffspunkt und die Komponenten der Zahnkraft. Dies geschieht diskontinuierlich bei geradzahnten Zahnrädern, quasikontinuierlich bei schrägverzahnten Zahnrädern. Infolge der Zahn deformation unter der Zahnkraft und weiter wegen der ständigen Belastungswechsel durch die nicht immer gleiche Zahl von momentan in Kontakt stehenden Zähnen werden auch vom fehlerfrei gefertigten Zahnrad Schwingungen beim Zahneingriff erzeugt. Das Schwingungsbild ist deutlich lastabhängig und stark Oberschwingungshaltig (**Bild 7.2**). Die Grundfrequenz ist die Zahneingriffsfrequenz ( $= \text{Drehfrequenz} \times \text{Zähnezahl}$ ).



**Bild 7.2** Schwingungsbild infolge Zahn deformation

Ein weiterer schwingungserregender Vorgang ist die richtungswechselnde Gleitreibung bei Zahnberührungen entlang der Eingriffsstrecke [5]. Reines Rollen zwischen den Zahnflanken tritt nur im Wälzpunkt auf, beiderseits davon entsteht eine zusätzliche Gleitbewegung. Die Richtung der Gleitbewegungen und damit der Gleitreibungskräfte wechselt vor und nach dem Wälzpunkt (**Bild 7.3**). Das Resultat ist ein ungleichmäßiges Verschleißbild, welches zusammen mit dem Richtungswechsel der Gleitreibungskräfte Schwingungen entstehen lässt.



**Bild 7.3** Gleitbewegung entlang der Zahnflanke

### 7.2.2 Schwingungen durch Verzahnungsfehler

Betrieblich auftretende Fehler in Verzahnungen lassen sich grob in Flankenschäden und Zahnfußschäden unterteilen [35; 109].

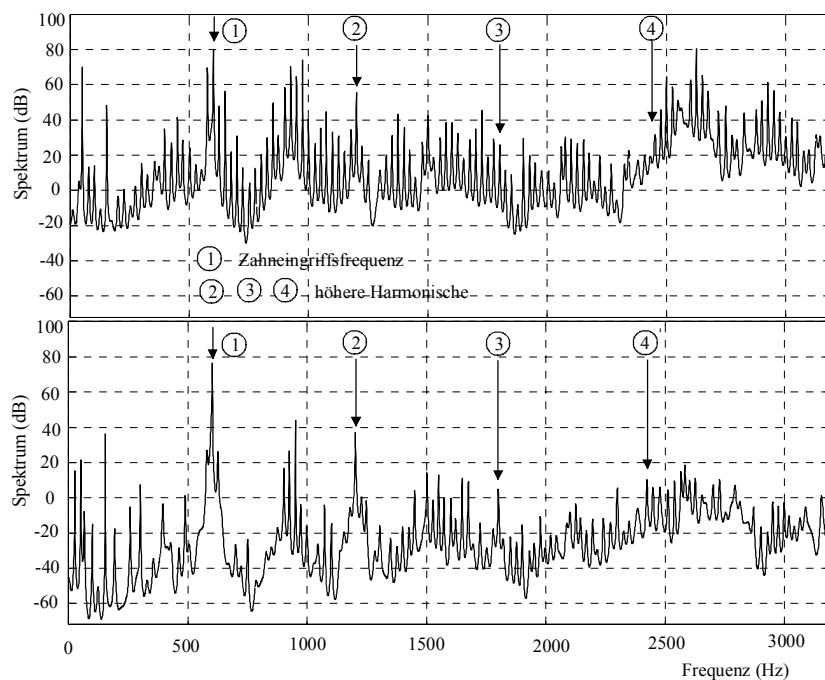
*Flankenschäden:* Durch das Abwälzen der beiden im Eingriff befindlichen Zahnflanken unter Last entstehen über die gesamte Zahnflanke Pressungen auf die Flanken. Werden die Pressungen größer als die zulässige Pressung des Zahnradwerkstoffs, brechen kleine Teilchen der Zahnflanken aus. Es entstehen kleine Grübchen (*Pittings*). Ein weiterer Schaden auf Zahnflanken wird durch die Zerstörung des Schmierölfilms zwischen den Zahnflanken ausgelöst. Bei hoher Flankenpressung und hoher Gleitgeschwindigkeit sowie der darauf folgenden Temperaturerhöhung, oder auch bei örtlich hoher Flankenpressung in Verbindung mit extrem niedrigen Geschwindigkeiten, reißt der Schmierölfilm ab oder wird durchbrochen. Es reiben dann unmittelbar metallische Flächen aufeinander. Dabei können die Zahnflanken miteinander verschweißen und durch die Bewegung der Zahnräder wieder auseinander gerissen werden. Das Resultat ist die Zerstörung der Zahnflanken. Dieser Flankenschaden wird als „Fressen der Zahnflanken“ bezeichnet.

*Zahnfußschaden:* Durch das Eintauchen des Zahns in die Lücke des Gegenradzahns bewirkt der Druck am Kopf über dem Hebelarm der Zahnhöhe eine Biege- und Druckspannung am Zahnfuß. Ist der Widerstand des Zahnfußes nicht ausreichend, kommt es zum Zahnfußschaden.

Im Rahmen diagnostischer Untersuchungen ist es aussichtsreicher, Zahnschäden im Zusammenhang mit ihren spektralen Kennzeichen oder Mustern zu sehen. Dafür ist prinzipiell zu unterscheiden zwischen verteilten Fehlern (gleichmäßige Abnutzung) und lokalen Fehlern (beschädigter Einzelzahn). Hinzu kommen stochastische Anteile aus

Reibungs- und Strömungsvorgängen. Letztere besitzen bei schnell laufenden Getrieben bereits einen erheblichen Anteil am Signalgeschehen.

*Verteilte Fehler:* Bei der gleichmäßig über den Umfang verteilten Abnutzung eines Zahnrads äußert sich die Schwingung durch eine Zunahme der Leistungsdichte im ganzen Frequenzbereich und ein Anwachsen der Komponenten mit der Zahneingriffsfrequenz (= Drehfrequenz  $\times$  Zähnezahl) sowie deren Harmonischen. Außerdem zeigt sich im Spektrum das Auftreten von Seitenbandkomponenten beiderseits der Zahneingriffsfrequenz und ihrer Harmonischen. Diese Seitenbandkomponenten sind die Spektrallinien im Abstand von ganzzahligen Vielfachen der Drehfrequenz und können auf die Amplitudenmodulation der Schwingungskomponenten zurückgeführt werden, die aufgrund stetig periodischer Unregelmäßigkeiten im Zahneingriff auftreten. **Bild 7.4** zeigt ein praktisches Beispiel: Spektren der Schwingungen eines zweistufigen Getriebes vor und nach der Reparatur. In diesem Getriebe waren die beiden Zahnräder der ersten Stufe abgenutzt. Die Zahneingriffsfrequenz betrug bei der Drehzahl  $1480 \text{ min}^{-1}$  ( $24,8 \text{ Hz}$ )  $594,5 \text{ Hz}$ . Man beachte vor allem die Abnahme der 2. und 3. Harmonischen infolge der Reparatur. Eine Reduktion der Amplituden von Seitenbandkomponenten ist in den Spektren auch bemerkbar.



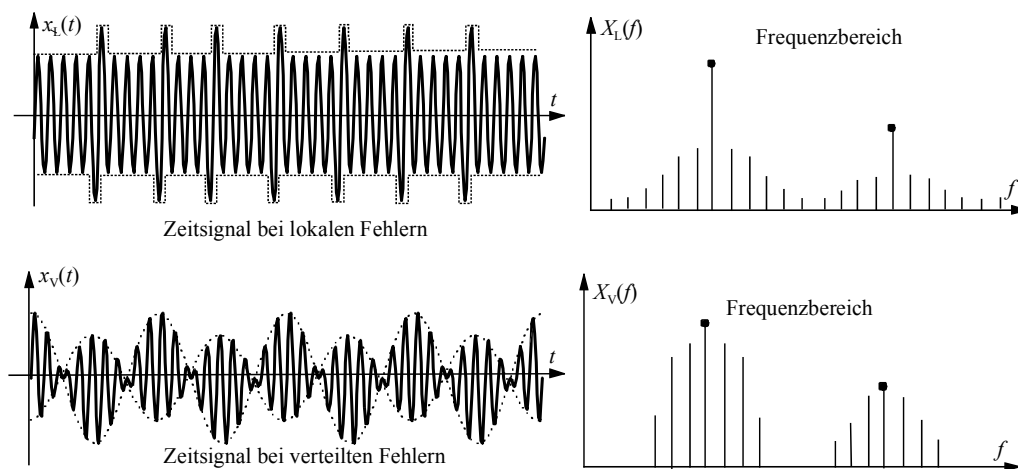
**Bild 7.4** Spektren der Schwingungssignale eines Zahnradgetriebes bei der Abnutzung (oben: Vor der Reparatur; unten: nach der Reparatur)

*Lokale Fehler:* An der Oberfläche eines Zahns entstehende Fehler haben Zahnlastschwankungen zur Folge, die wiederum zur Schwankung der Schwingungsamplituden führen. Wie bei verteilten Fehlern resultieren daraus Amplitudenmodulationen. Ein örtlicher Fehler, wie etwa vereinzelte Abblätterung oder örtliche Grübchenbildung, wirkt auf das Schwingungssignal in einer begrenzten Zeit, in der die geschädigten Zähne im Eingriff



stehen. Die Wirkung zeigt sich im Zeitsignal als impulsförmige Funktion: grob gesprochen, ein Puls je Umdrehung (siehe **Bild 7.5**). Das Spektrum einer solchen Impulsfunktion ist breitbandig. Infolge der Amplitudenmodulation tritt um die Zahneingriffsfrequenz und ihre Harmonischen eine flach verteilte Seitenbandstruktur auf (**Bild 7.5** oben). Im Gegensatz dazu ist die Modulationsfunktion bei verteilten Fehlern schmalbandig, weniger überschwingungshaltig; die Energie der Seitenbänder ist um die Zahneingriffskomponente und ihre Harmonischen konzentriert (**Bild 7.5** unten). In beiden Fällen ist die Modulationsfunktion im stationären Zustand periodisch mit der Drehfrequenz als Grundfrequenz. Dies führt zu den Harmonischen der Zahneingriffsfrequenz mit Seitenbändern beiderseits im Abstand von ganzzahligen Vielfachen der Drehfrequenz.

Amplitudenmodulationen rühren in erster Linie von der Lastabhängigkeit der Zahndeformation und damit der Zahneingriffsschwingungen her [34]. Diese Lastschwankungen lösen praktisch immer auch geringe Schwankungen der Drehzahl aus. Dadurch können Zahneingriffsschwingungen noch frequenzmoduliert (oder phasenmoduliert) werden, d. h., die Momentanfrequenz schwankt um einen konstanten Mittelwert. Im Allgemeinen führt die Frequenzmodulation zu einer Seitenbandfamilie im Abstand von Vielfachen der Drehfrequenz beiderseits der Harmonischen der Zahneingriffsfrequenz [34].



**Bild 7.5** Zeitsignal und Spektrum von örtlichen und verteilten Fehlern in der Verzahnung

Nach den vorangegangenen Ausführungen über unterschiedliche Erscheinungsformen von Schwingungen in Zahnradgetrieben bzw. Planetengetrieben stehen mehrere industriell angewandte Verfahren der Zustandsüberwachung von Zahnradgetrieben zur Verfügung, welche zum Teil untereinander zu kombinieren sind. Meist sind diese Verfahren im Frequenzbereich anzutreffen [35; 72]:

- Spektrale Beobachtung kinematischer Frequenzen (Zahneingriffsfrequenz und bis zur 4., teils bis zur 8. Harmonischen)
- Seitenbandanalyse (Modulationsanalyse)
- Hüllkurvenanalyse im Frequenzbereich

- Cepstrumanalyse und Filterung
- Ordnungsanalyse

### 7.2.3 Wälzlagerfehler und ihr Erscheinungsbild

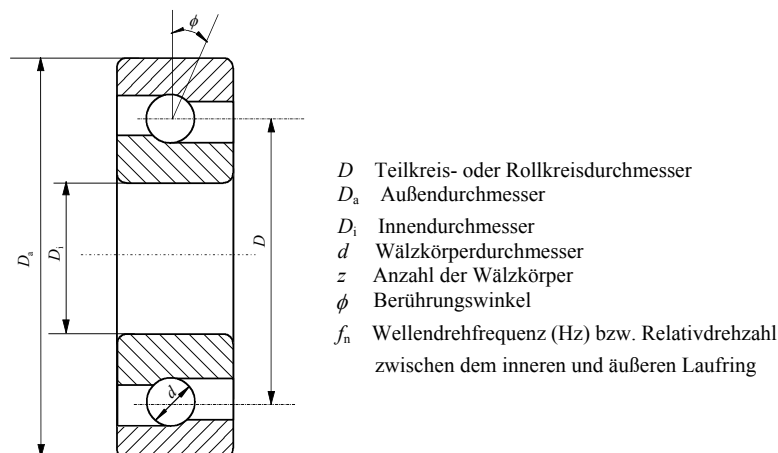
Schwingungen bei Wälzlagern sind auf Ursachen zurückzuführen, wie zum Beispiel geometrische Abweichungen der Bauteile, die periodische variable Anzahl der lasttragenden Wälzkörper, Lagerschäden usw.. Ein schadenfreies Wälzlager hat eine glatte Oberflächenberührung zwischen Wälzkörper und Laufbahn und regt normalerweise eine stochastische Schwingung mit niedriger Amplitude an. Tritt ein Schaden im Wälzlager auf, werden die Laufeigenschaften des Lagers geändert, und die Wälzkörper laufen nicht mehr stabil. Dadurch entstehen impulsförmige Anregungen. Die Amplitude und Form der angeregten Schwingungen eines schadhafte Lagers ändert sich je nach der Schadensart und den Laufeigenschaften des Wälzlagers [35]. Die Laufeigenschaften von Wälzlagern sind primär durch eine Reihe kinematischer Größen gegeben, die von der Relativdrehzahl zwischen Außen- und Innenring über Rollkreis- und Kugeldurchmesser bis zur Kugelanzahl und dem Berührungswinkel reichen. Häufig werden nur diese kinematischen Größen betrachtet, jedoch müssen auch allgemeine Zusammenhänge im höherfrequenten deterministischen Bereich (Impulsfolgenanalyse und Resonanzen von Bauteilen) und im stochastischen Bereich infolge Rollreibung herangezogen werden. **Bild 7.6** zeigt die typischen Lagerkenngrößen für kinematische Grundfrequenzen. Die kinematischen Grundfrequenzen lauten [34]:

$$\text{Überrollfrequenz Außenring (BPFO)} \quad f_a = 0,5 f_n \cdot z \cdot [1 - (d/D) \cos \phi] \quad (7.2.1)$$

$$\text{Überrollfrequenz Innenring (BPFI)} \quad f_i = 0,5 f_n \cdot z \cdot [1 + (d/D) \cos \phi] \quad (7.2.2)$$

$$\text{Rotationsfrequenz Käfig (FTF)} \quad f_{k\ddot{a}} = 0,5 f_n \cdot [1 - (d/D) \cos \phi] \quad (7.2.3)$$

$$\text{Wälzkörperrotationsfrequenz (BSF)} \quad f_{w\ddot{a}} = f_n \cdot (D/d) \cdot [1 - (d/D)^2 \cos^2 \phi] \quad (7.2.4)$$



**Bild 7.6** Wälzlagerkenngrößen für die kinematische Grundfrequenz

Je nach Zustand der Wälzpaarung und der Reibungsverhältnisse treten an konstruktionsbedingt verhältnismäßig starr in die Maschinenstruktur eingebetteten Wälzlagern die folgenden Schwingungserscheinungen auf [35]:

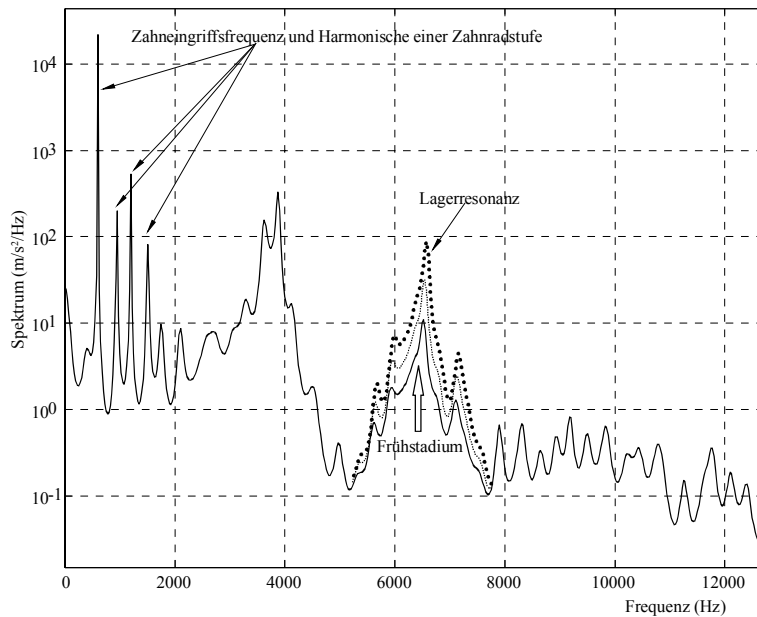
- stochastische Schwingungsanregungen
- Strukturresonanzen der angeschlossenen Bauteile
- diskrete Schwingungsanregungen (Impulsfolgen)
- zusätzliche Modulationen aus anderen Quellen, z. B. durch Wellenunwucht und ähnliche drehzahlgebundene Anregungen

Die durch diese Anregungen erzeugten Schwingungen ändern sich je nach dem Fehlerstadium und den Schadenarten (verteilte Fehler und diskrete Fehler).

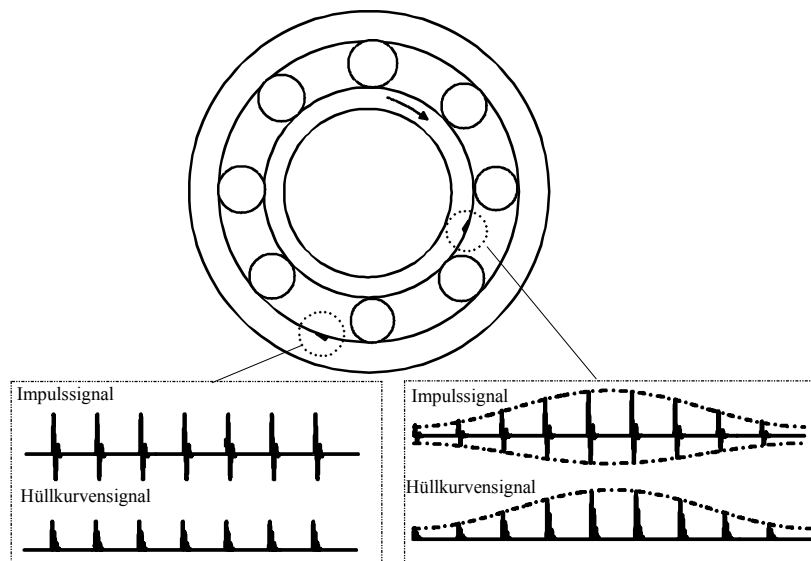
Im einwandfreien Zustand und im Frühstadium von Schäden erzeugt ein Wälzlager breitbandige schwache Rauschsignale. Die in den Gln. (7.2.1) bis (7.2.4) aufgeführten kinematischen Grundfrequenzen, die sich auch für baugleiche Lager wegen der Fertigungstoleranzen unterschiedlich ausbilden können, sind in der Regel nur schwach ausgeprägt. In dieser Phase stoßen die stochastischen Schwingungsanregungen die Lagerelemente und die angeschlossenen Bauteile zu Strukturresonanzen an. Im Frequenzbereich zeigt sich ein breitbandiges Spektrum mit schwachen Spitzen bei den Resonanzfrequenzen (Eigenfrequenzen) der Lagerelemente und der angeschlossenen Bauteile (**Bild 7.7**). In der Praxis besitzen die Wälzlagerringe und die Wälzkörper hohe Eigenfrequenzen (3 kHz bis 20 kHz), weit oberhalb der oben genannten kinematischen Frequenzen. Dagegen können die Eigenfrequenzen von Wälzlagerkäfigen im Bereich der kinematischen Frequenzen (unter 1 kHz) liegen [35]. Demzufolge sollte man vor der Analyse von Schwingungssignalen die Eigenfrequenz des Außen- und Innenrings sowie der Wälzkörper kennen, um die zu erwartenden Frequenzbänder mit erhöhten Anteilen abzuschätzen. Nach betrieblichen Erfahrungen sind die Biegeeigenschwingungen des Außenrings die dominierende Schwingungsform. Anhaltswerte für Lagerresonanzfrequenzen lassen sich errechnen oder werden von einigen Herstellern angegeben. **Bild 7.7** veranschaulicht das Spektrum eines Zahnradgetriebes bei verteiltem Verschleiß eines Wälzlagers. Erfahrungsgemäß sind für spektrale Überwachung von Wälzlagern im Fehlerfrühstadium die Frequenzbereiche ab 5 kHz besonders interessant, da sich hier bereichsweise die Schwingungspegel als frühe Anzeichen für Verschleiß anheben. Hierzu nehmen die Einbau- und die Lastbedingungen erheblichen Einfluss auf die praktisch messbaren Resonanzfrequenzen und führen in der Regel zur Anhebung dieser Frequenzen.

Diskrete Fehler in den verschiedenen Elementen eines Wälzlagers führen bei der Drehbewegung zu einer Folge von impulsförmigen Stoßanregungen. **Bild 7.8** stellt überzeichnet das Schwingungsbild solcher Fehler dar. Die Wiederholfrequenzen lassen sich aus der Lagergeometrie und Drehzahl des Lagers und dem Ort des Fehlers nach Gln. (7.2.1)

bis (7.2.4) leicht berechnen bzw. zuordnen. Man beachte die Amplitudenmodulation bei Fehlern am Innenring infolge wechselnder Belastung im Fehlerbereich.



**Bild 7.7** Frequenzspektrn bei verteilten Wälzlagerschäden



**Bild 7.8** Ausgeprägte Wälzlager-Einzelfehler mit Impulssignal und Hüllkurvensignal

Betrieblichen Erfahrungen gemäß sind die durch einen diskreten Fehler verursachten impulsförmigen Stöße jeweils sehr kurz, vor allem im Anfangsstadium, wenn der Fehler noch mikroskopisch klein von der Ausdehnung her ist. Der Frequenzbereich im Spektrum geht daher hoch hinauf. So entstehen im höheren Frequenzbereich (bis zu Frequenzen der Größenordnung 300 kHz) zahlreiche energiereiche Harmonische der Grundfrequenz (z. B. Überrollfrequenz für einen diskreten Einzelfehler). Die Stöße regen verschiedene Resonanzen im System an. Im Schwingungsbild tritt demnach eine regelmäßige Folge von einzelnen Transienten (*Bursts*) auf, was als das Ausschwingen des Systems nach dem Anstoßen immer

beim Passieren des Fehlers betrachtet werden kann. Der idealisierte Verlauf ist in **Bild 7.8** dargestellt. In der Realität wird diese Burstfolge von anderen Komponenten im Schwingungsbild weitgehend überdeckt sein.

Aus den vorgenannten Gründen gilt, dass für eine Wälzlagerüberwachung der Beobachtungsbereich der in den Gln. (7.2.1) bis (7.2.4) aufgeführten kinematischen Grundfrequenzen ohne spektrale Vorverarbeitung nicht ausreicht. Man muss einen Frequenzbereich finden, in dem das Lagerschwingungsgeräusch gegenüber dem Hintergrund dominiert. Zur Wälzlager-Zustandsanalyse stehen mehrere industriell angewendete Verfahren zur Verfügung:

- Frequenz- und Ordnungsanalyse
- Hüllkurvenanalyse
- Cepstrumanalyse

### 7.3 Drehzahlverhältnisse eines einfachen Planetengetriebes

Bei Umlaufgetrieben steht das Hohlrads als Gehäuse des Planetengetriebes fest. Das Sonnenrad und der Planetenträger rotieren jeweils mit  $\omega_s$  und  $\omega_T$  um den Mittelpunkt des Hohlrads. Die drei Planetenräder drehen sich aber nicht nur um ihre eigene Achse, sondern auch noch um den Mittelpunkt des Planetenträgers – die Kombination der Verschiebung und Umdrehung, was in der Mechanik als ebene Bewegung bezeichnet wird. Aus diesem Grund lässt sich das Drehzahlverhältnis nicht wie in dem Fall berechnen, bei dem die beiden Achsen raumfest sind [59] (siehe Gl.(7.4.1)).

Bei der ebenen Bewegung des Planetenrads greift das Planetenrad gleichzeitig mit dem Sonnen- und Hohlrads ineinander, wie in **Bild 7.9** dargestellt. Der Eingriffspunkt I zwischen dem Planetenrad und Hohlrads, der sich bei der Verzahnung entlang dem Teilkreis des Sonnenrads bewegt, besitzt immer die absolute Geschwindigkeit  $\vec{v}_I = 0$  (momentaner Mittelpunkt der Umdrehung des Planetenrads), während die absolute Geschwindigkeit des Eingriffspunkts III zwischen dem Planetenrad und Sonnenrad

$$|\vec{v}_{III}| = r_s \cdot \omega_s \quad \text{beträgt (Bild 7.9 links).} \quad (7.3.1)$$

Somit ergeben sich die absolute Geschwindigkeit des geometrischen Mittelpunkts II des

$$\text{Planetens: } |\vec{v}_{II}| = \frac{1}{2} |\vec{v}_{III}| = \frac{1}{2} r_s \cdot \omega_s \quad (7.3.2)$$

und die absolute Winkelgeschwindigkeit des Planetenrads:

$$\omega_p = |\vec{v}_{III}| / 2r_p = \omega_s \cdot (r_s / 2r_p) \quad (7.3.4)$$

Das Planetenrad setzt den Planetenträger in Bewegung (Umdrehung), und sie haben einen gemeinsamen Punkt II (**Bild 7.9** rechts). Folglich errechnet sich die Winkelgeschwindigkeit des Planetenträgers zu

$$\omega_T = |\vec{v}_{II}| / (r_s + r_p) = \frac{r_s}{2(r_s + r_p)} \cdot \omega_s = \frac{z_s}{2(z_s + z_p)} \cdot \omega_s \quad (7.3.5)$$

wobei  $z_s$  und  $z_p$  jeweils die Zähnezahle des Sonnen- und Planetenrads sind. Somit erhält man die Übersetzung des Umlaufgetriebes:

$$i_{S-T} = \omega_s / \omega_T = \frac{2(z_s + z_p)}{z_s} \quad (7.3.6)$$

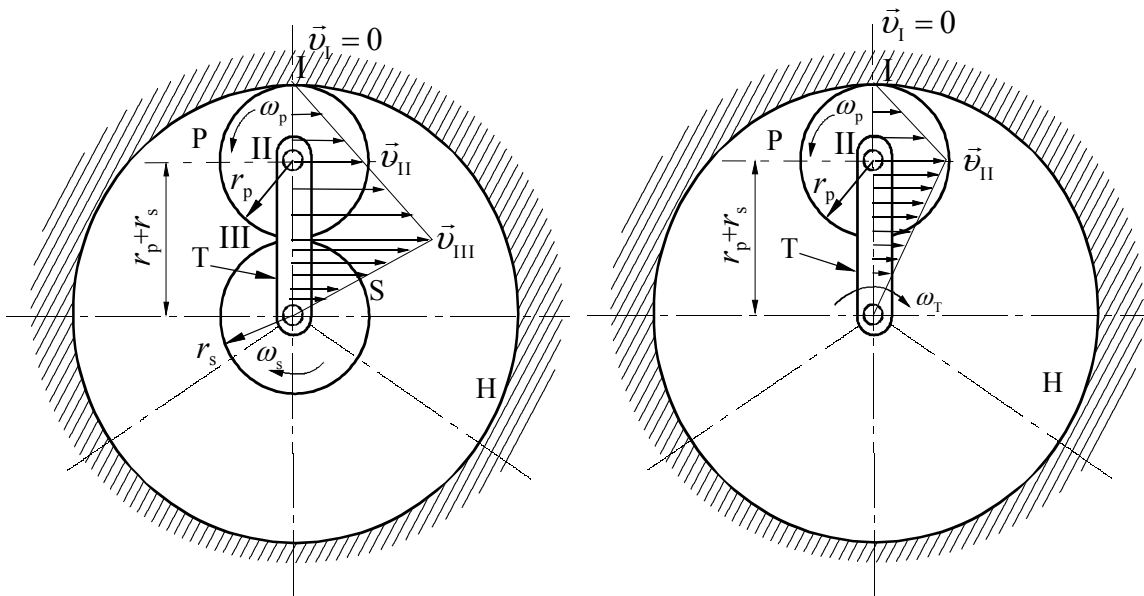


Bild 7.9 Kinematische Analyse eines einfachen Planetengetriebes

#### 7.4 Charakteristische Frequenzen des kombinierten Planetengetriebes

Das untersuchte Planetengetriebe besteht aus zwei Stufen – einem normalen Antrieb und einem Umlaufgetriebe. Bild 7.10 stellt die Schemazeichnung des kombinierten Planetengetriebes dar. Die Schnittzeichnung findet sich in Anhang A.4. Dieses Getriebe ist durch drei vom Umrichter gespeiste Motoren angetrieben. Die aktiven Zahnräder der ersten Stufe sind direkt auf den Antriebswellen der Motoren angebracht. Die Übersetzung der ersten Stufe beträgt:

$$i_{1-2} = \omega_1 / \omega_2 = z_2 / z_1 \quad (7.4.1)$$

Mit Gl.(7.3.6) erhält man die gesamte Übersetzung des kombinierten Planetengetriebes:

$$i = i_{1-2} \cdot i_{S-T} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{2(z_s + z_p)}{z_s} \quad (7.4.2)$$

Das Sonnenrad des Umlaufgetriebes dreht sich mit dem Zentralrad der ersten Stufe, und damit wird das Umlaufgetriebe in Bewegung gesetzt. Der Planetenträger bildet den Abtrieb.

Die Laufeigenschaften des kombinierten Planetengetriebes werden durch eine Reihe kinematischer Größen bestimmt. Die für die Schwingungsanalyse und Fehlerdiagnose wichtigsten kinematischen Frequenzen werden im Folgenden näher erläutert. Dabei wird von einer konstanten Drehfrequenz  $f_M$  des Motors ausgegangen.

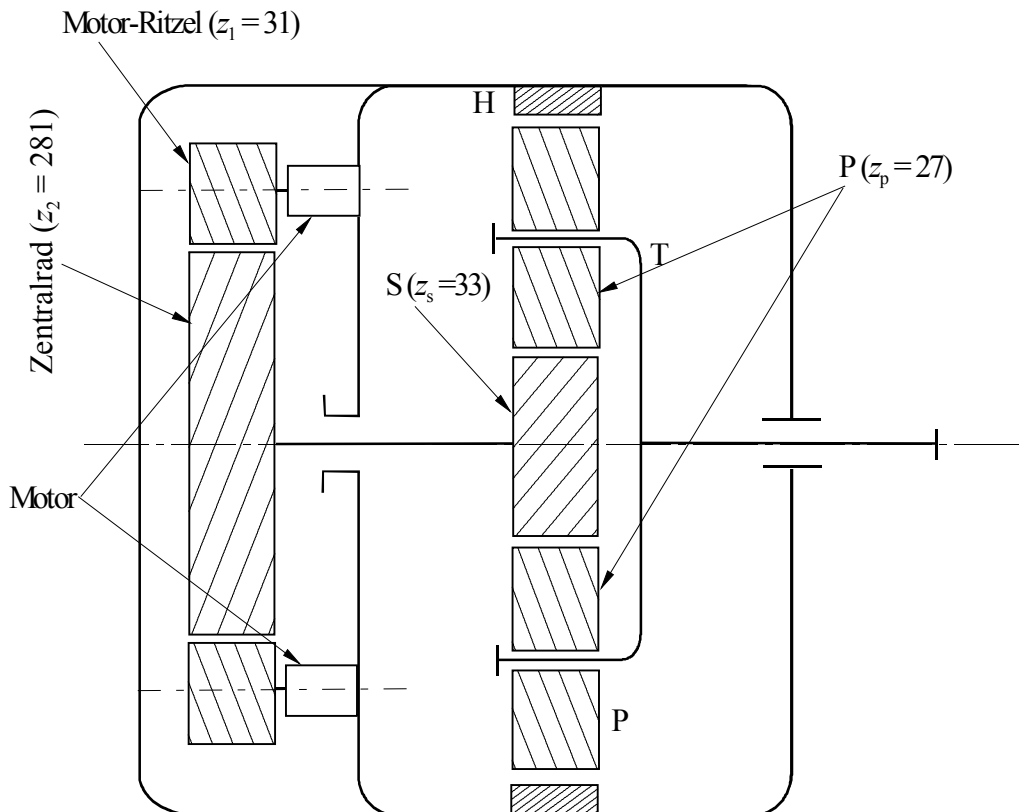


Bild 7.10 Schemazeichnung des kombinierten Planetengetriebes

Zahneingriffsfrequenz zwischen dem Motor-Ritzel und Zentralrad in der ersten Stufe:

$$f_{M-Z} = z_1 \cdot f_M \quad (7.4.3)$$

Obwohl die drei Motor-Ritzel sich gleichzeitig im Eingriff mit dem Zentralrad befinden, gibt es aber nur eine Zahneingriffsfrequenz. Grundsätzlich sind sie und ihre Harmonischen im Frequenzspektrum des Schwingungssignals aufzufinden, sogar beim fehlerfreien Lauf des Getriebes.

Antriebs- und Abtriebsdrehfrequenz:

$$f_{An} = f_M \quad \text{und} \quad f_{Ab} = f_M / i = f_M \cdot \frac{z_1 \cdot z_s}{2z_2(z_s + z_p)} \quad (7.4.4)$$

Die Antriebsfrequenz  $f_{An}$  und gegebenenfalls ihre Harmonischen können im Frequenzspektrum des Schwingungssignals entweder als Grundfrequenz oder als Seitenbänder um die Zahneingriffsfrequenz  $f_{M-Z}$  auftauchen. In den meisten Fällen tritt die Abtriebsfrequenz  $f_{Ab}$  wegen ihres niedrigeren Wertes mit geringer Amplitude im Frequenzspektrum auf, da die Amplitude einer Schwingungskomponente mit dem Quadrat der Drehfrequenz proportional ist. Die Abtriebsfrequenz  $f_{Ab}$  bestimmt die Wälzlagerkenngrößen für kinematische Grundfrequenzen beim Schaden der auf der Achse des Planetenträgers angebrachten Wälzlager (siehe Gl. (7.2.1) bis (7.2.4)).

*Drehfrequenz des Sonnenrads:*

$$f_{\text{son}} = f_2 = f_M \cdot z_1 / z_2 \quad (7.4.5)$$

Diese Frequenz bestimmt die Wälzlagerkenngrößen für kinematische Grundfrequenzen beim Schaden der entsprechenden Wälzlager.

*Zahneingriffsfrequenz zwischen dem Sonnen- und Planetenrad im Umlaufgetriebe:*

Das Planetenrad dreht sich nicht nur um seine eigene Achse, sondern auch noch um den Mittelpunkt des Planetenträgers. Aus diesem Grund ergibt sich die Zahneingriffsfrequenz zwischen dem Sonnen- und Planetenrad:

$$f_{\text{S-P}} = f_M \cdot \frac{z_1(2z_p + z_s)}{2z_2(z_p + z_s)} \quad (7.4.6)$$

*Relativdrehfrequenz des Planetenrads:*

Die Relativdrehfrequenz des Planetenrads ist die Drehfrequenz des Planetenrads gegenüber den Planetenträger und ergibt sich zu

$$f_{\text{P-T}} = \frac{z_1 z_s (2z_p + z_s)}{2z_2 (z_s + z_p)} \quad (7.4.7)$$

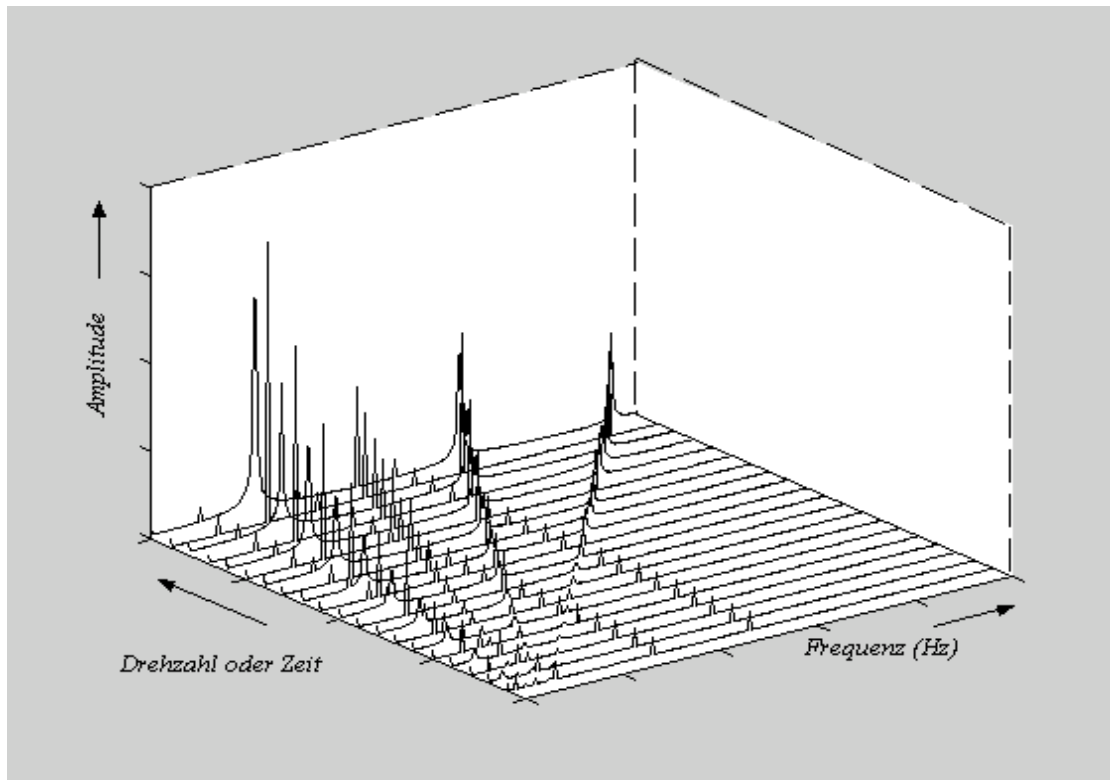
Diese Frequenz bestimmt die Wälzlagerkenngrößen für kinematische Grundfrequenzen beim Schaden der Planetenwälzlager.

## 7.5 Virtuelles Instrument für die Spektralanalyse von Hoch- und Ablaufvorgängen

Bei Hoch- und Ablaufvorgängen erzeugen die inneren Anregungsquellen in einer Maschine mechanische Schwingungen, deren Frequenzen und Amplituden sich meist mit den momentanen Drehzahlen ändern. Die Spektralanalyse der dabei auftretenden Schwingungssignale liefert in vielen Fällen wertvolle Zusatzinformationen zu den im Stationärbetrieb aufgenommenen Signalen. Ihre Hauptaufgabe ist es, die drehzahlbezogenen Schwingungsanteile und auch die Resonanzfrequenzen in der Maschine zu untersuchen. Dabei handelt es sich nicht um ein einzelnes Spektrum, sondern um ein ganzes Feld von Spektren, die bei unterschiedlichen Drehzahlen oder Zeitpunkten gemessen werden.

Für die überblickshaften Auswertungen des Spektrenfelds ist die 3D-Darstellung, die meist als Wasserfalldiagramm bezeichnet wird, vorzüglich geeignet (**Bild 7.11**). Bei drehzahlabhängiger Messung und äquidistanten Drehzahlschritten von Spektrum zu Spektrum treten drehzahlunabhängige Frequenzanteile (z. B. Strukturresonanzen oder die Netzfrequenz und ihre Harmonischen) als gerade von vorne nach hinten verlaufende Spitzenreihen hervor. Dagegen verläuft die Drehzahlordnung schräg, da die Frequenz der Ordnung und damit die Nummer des zugeordneten Spektrums mit der Drehzahl steigt.





**Bild 7.11** 3D-Darstellung eines Spektrenfelds

Für die schwingungsdiagnostische Untersuchung des kombinierten Planetengetriebes wurde ein virtuelles Instrument mit Hilfe des LabView-Programms entwickelt. Im Rahmen dieses virtuellen Instruments können die Schwingungssignale bei unterschiedlichen Drehzahlen erfasst, bearbeitet und dargestellt werden. Daraus ergibt sich ein Spektrenfeld. Dabei lässt sich das der maximalen Drehzahl zugeordnete Spektrum für eine bessere Beobachtung der wichtigen Frequenzanteile im Vorder- oder im Hintergrund darstellen.

In **Bild 7.12** ist das Spektrenfeld eines Hochlaufvorgangs des kombinierten Planetengetriebes gezeigt. Darin sind die Zahneingriffsfrequenzen, ihre Harmonischen und eine Strukturresonanzfrequenz (etwa 400 Hz) bei verschiedenen Drehzahlen deutlich erkennbar. Man beachte, dass stärkere Schwingungen auftreten, wenn die Zahneingriffsfrequenz und ihre Harmonischen in die Umgebung der Resonanzfrequenz fallen. Eine weitere Untersuchung zeigt, dass die Eigenfrequenz eines Deckels des Getriebes in der Umgebung der Frequenz von etwa 400 Hz liegt. Durch eine Strukturveränderung nimmt die Schwingungsstärke erheblich ab.

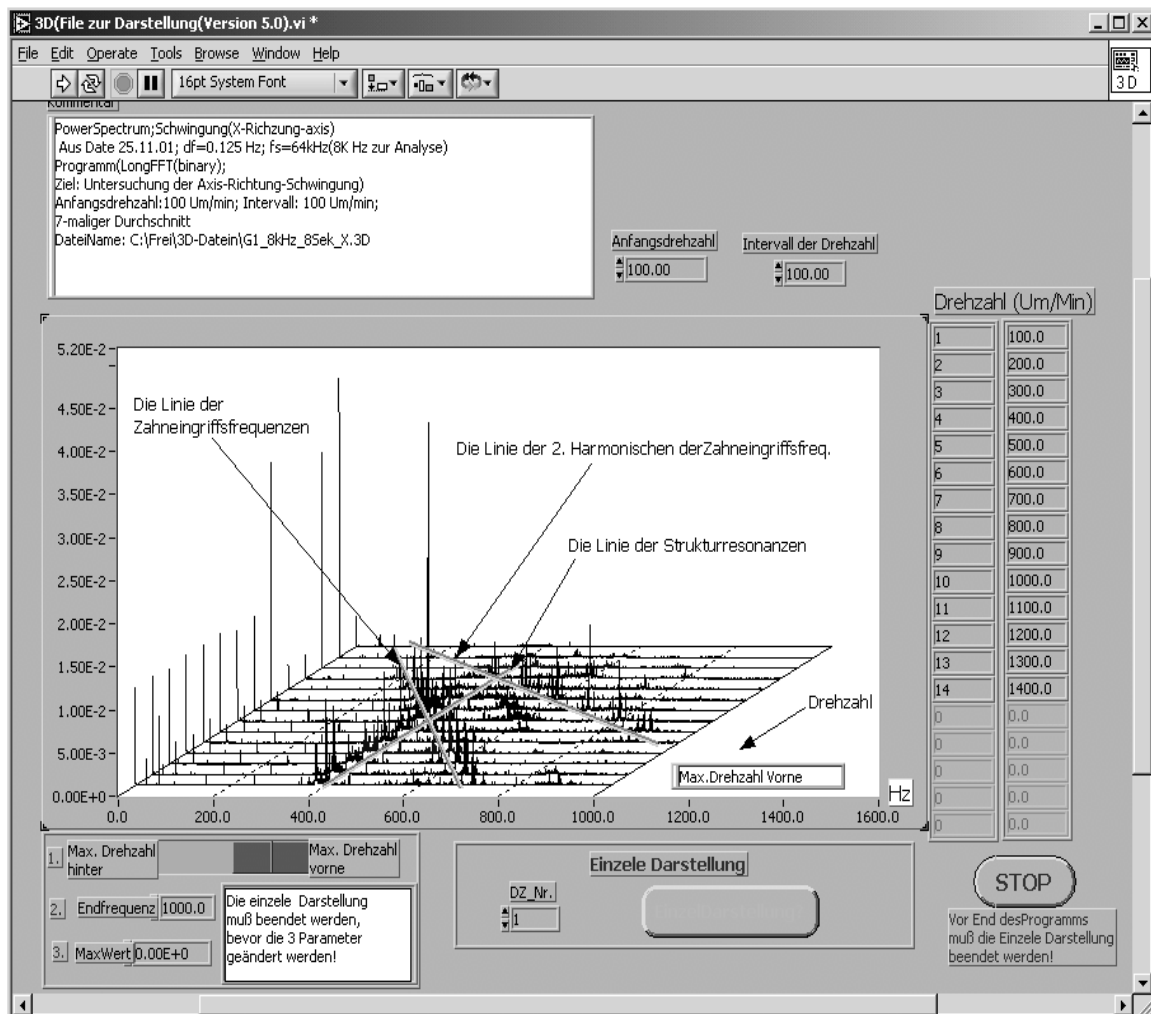


Bild 7.12 Spektralfeld des kombinierten Planetengetriebes bei einem Hochlaufvorgang.

## 7.6 Virtuelles Instrument für die Cepstrum-Analyse

Wie schon in Abschnitt 7.2 erwähnt, treten Modulationsschwingungen bei Schäden in Zahnradern und Wälzlagern auf. Im Frequenzbereich treten periodische Strukturen bzw. Seitenbandfamilien in Erscheinung. Verstärktes Auftreten von Harmonischen und von Seitenbandfamilien kann Anzeichen für bestimmte Fehler in Maschinen sein. Zahlreiche Untersuchungen und Erfahrungsberichte zeigen, dass die Cepstrum-Analyse für die Detektion von Periodizitäten in den Breitbandspektren geeignet ist [34].

### 7.6.1 Modulationseffekte

Die im Betrieb an einem fehlerhaften Zahnradgetriebe auftretenden Schwingungskomponenten, die andere Frequenzen besitzen als die Zahneingriffsfrequenzen, lassen sich üblicherweise aus der Modulation von sonst gleichmäßigen Zahnradenschwingungen erklären. Durch Fehler, wie z. B. Exzentrizität, Teilungsfehler oder mit dem Drehwinkel synchron schwankende Last, wird die Zahneingriffsschwingung über dem Drehwinkel ungleichmäßig moduliert – amplitudenmoduliert, meist auch noch zusätzlich frequenzmoduliert [34].

**Bild 7.13** zeigt anschaulich die Amplitudenmodulation einer reinen Sinusschwingung konstanter Amplitude  $x_c(t)$  ( $c = \text{carrier}$ ). Wird diese Trägerschwingung durch eine niederfrequente Schwingung  $x_m(t)$  ( $m = \text{modulation}$ ) moduliert (multipliziert), entsteht das in **Bild 7.13** unten links dargestellte Schwingungssignal. Dem Frequenzbereich-Faltungstheorem nach sind entsprechend die Spektren  $X_c(f)$  und  $X_m(f)$  durch das Faltungsprodukt verbunden [9].

Die Frequenzmodulation ist bei rotierenden Maschinen wie Zahnradgetrieben an Schwankungen der Drehgeschwindigkeit gebunden. In den meisten Fällen bestehen relativ komplizierte Zusammenhänge zwischen dem modulierenden und dem modulierten Signal. Im Allgemeinen führt die Frequenzmodulation zu einer Seitenbandfamilie [22]. Darin liegen die spektralen Anteile oberhalb und unterhalb der Trägerfrequenz  $f_c$ . Der Abstand entspricht der Modulationsfrequenz  $f_m$  für den Fall, dass sich die Frequenz des modulierten Signals sinusförmig ändert (**Bild 7.14**).

### 7.6.2 Cepstrum-Analyse

Das Cepstrum  $c(\tau)$  eines deterministischen Signals  $x(t)$  ist definiert als inverse Fourier-Transformation einer logarithmierten Frequenzbereichsfunktion [34]:

$$c(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{ \log F(f) \} \quad (7.6.1)$$

$$\text{wobei } F(f) = |\mathcal{F}\{x(t)\}|^2 = |X(f)|^2 \quad (7.6.2)$$

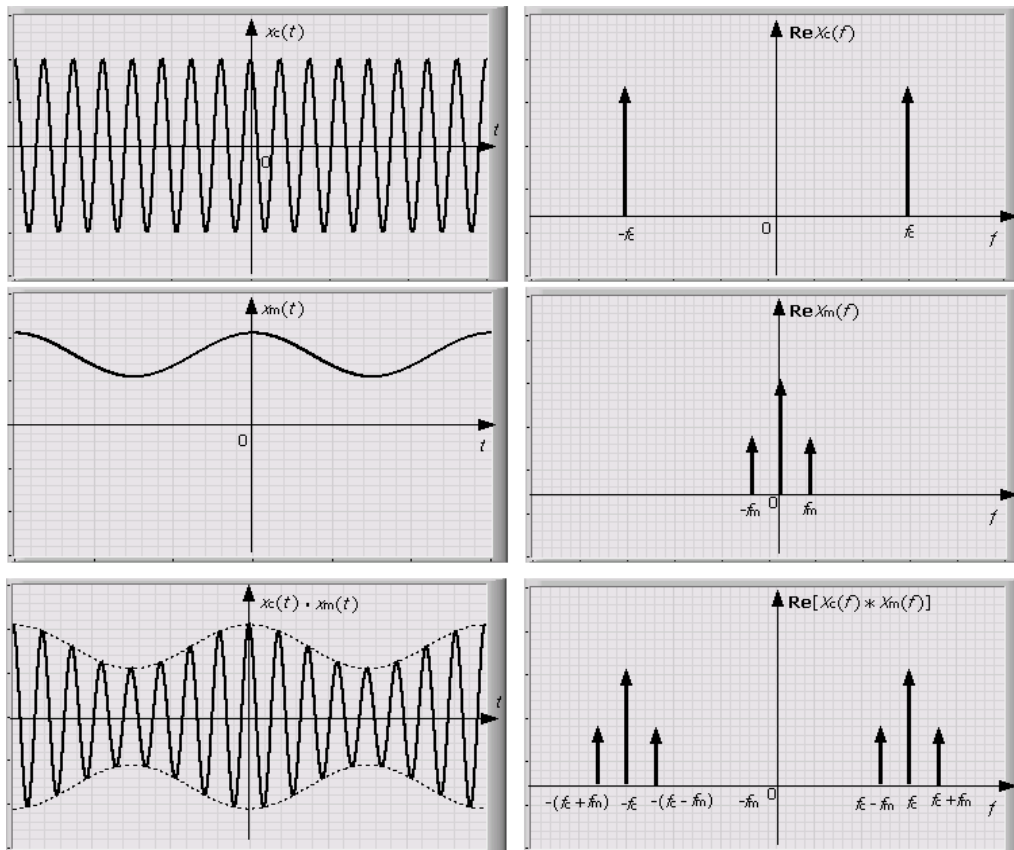
Das Symbol  $\mathcal{F}$  steht für die Fourier-Transformation,  $\mathcal{F}^{-1}$  für die inverse Fourier-Transformation. Ähnlich gilt für stochastische Signale:

$$c(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{ \log S_{xx}(f) \} \quad (7.6.3)$$

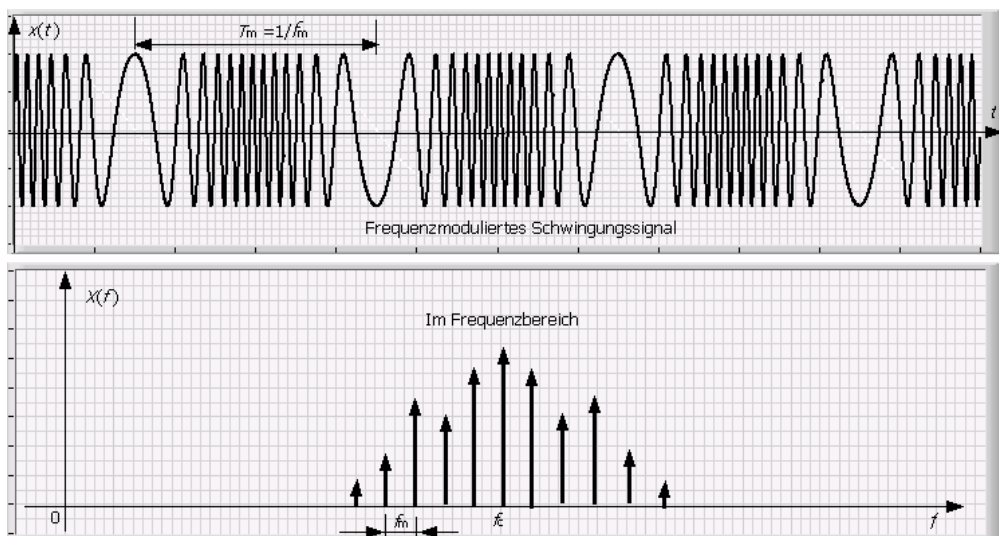
wobei  $S_{xx}(f)$  das Leistungsdichtespektrum ist. Demnach ist das Cepstrum eng mit der Autokorrelationsfunktion  $R_{xx}(\tau)$  verwandt. Das Cepstrum ist eine Art Spektrum eines Spektrums oder die Umkehrung eines Spektrums, woher auch die Bezeichnung „Cepstrum“ durch die Verdrehung des englischen Wortes „Spectrum“ herrührt. Vergleichsweise sind andere Bezeichnungen von Funktionen und Variablen im Zusammenhang mit dieser Analyse entstanden: Spectrum – *Cepstrum*; Frequenz – *Quefrenz*; Harmonische – *Rahmonische*.

**Bild 7.15** zeigt die Zusammenhänge zwischen einem Zeitsignal, dessen Spektrum und dem Cepstrum. Eine periodische Struktur im Zeitsignal zeigt sich im Spektrum als Linienmuster, die Linien liegen äquidistant (harmonisch) auf der Frequenzachse (**Bild 7.15** Mitte). Eine periodische Struktur im Spektrum (z. B. äquidistante Seitenbänder) zeigt sich vergleichsweise als Linienmuster im Cepstrum. Wiederum liegen die Linien äquidistant auf der Quefrenzachse. Dabei hat die Quefrenz  $\tau$  die Dimension einer Zeit (**Bild 7.15** unten). Die erste Linie auf dieser Quefrenzachse ist maßgebend für den gegenseitigen Abstand der regelmäßigen Linien im Spektrum (z. B. Oberschwingungen oder Seitenbandfamilie infolge

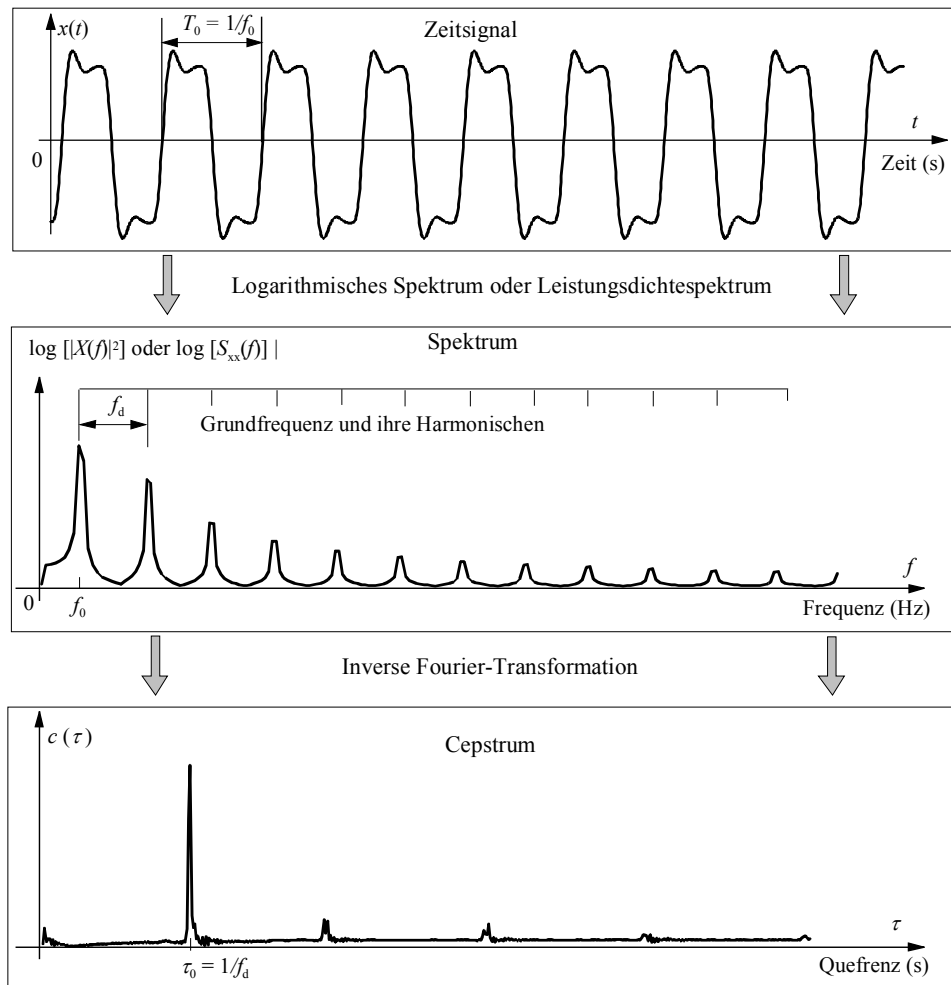
von Amplituden- und Frequenzmodulation). Daher hat die erste Queffenz für die Analyse eine hohe Bedeutung [35]. Die Linien bei Vielfachen der Queffenz werden als Rahmonische bezeichnet. Beim Auftreten mehrerer Seitenbandgruppierungen sind diejenigen Fundamental-Rahmonischen im Cepstrum zu beachten, die nicht im Queffenz-Vielfachen zueinander stehen. Sie enthalten die signifikante Information über die jeweilige Harmonischen- oder Seitenbandfamilie im Spektrum [5].



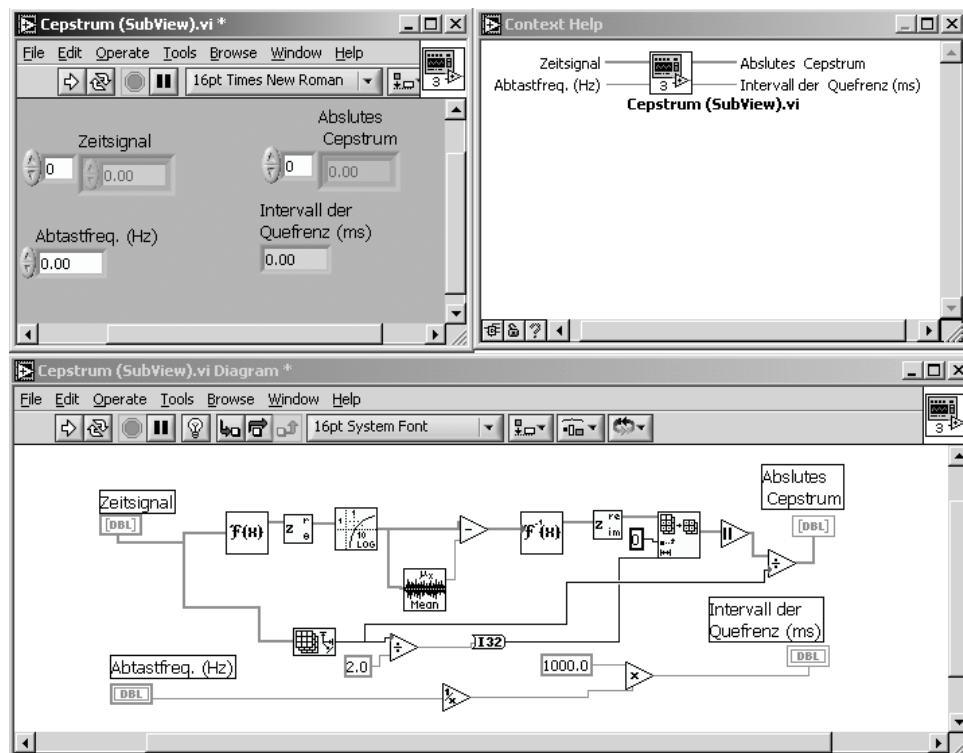
**Bild 7.13** Amplitudenmodulierte Schwingungen im Zeitbereich (links) und im Frequenzbereich (rechts)



**Bild 7.14** Frequenzmoduliertes Schwingungssignal im Zeitbereich (oben) und im Frequenzbereich (unten)



**Bild 7.15** Zusammenhänge zwischen Zeitsignal, Spektrum und Cepstrum



**Bild 7.16** SubVI für die Berechnung des Cepstrums

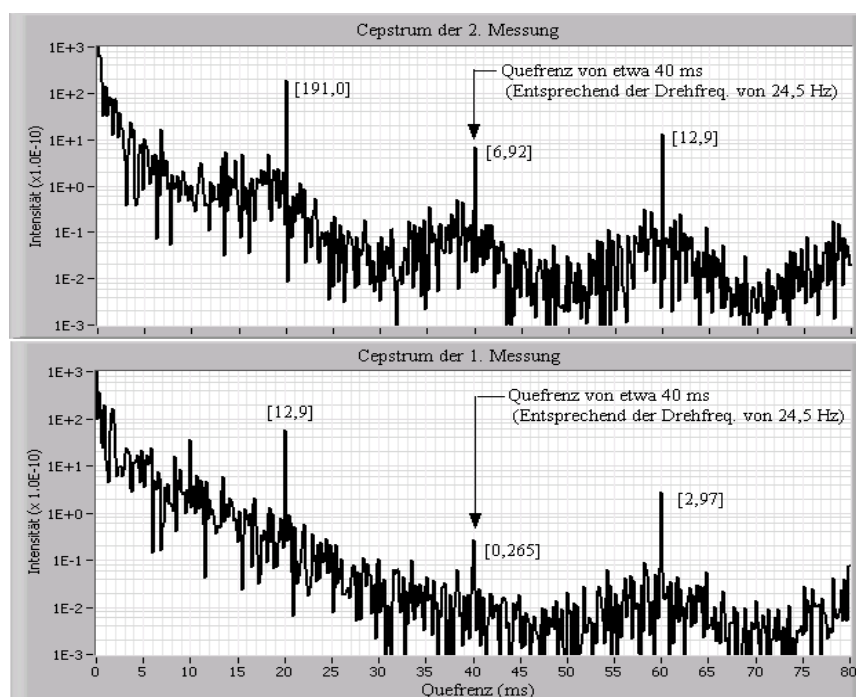
### 7.6.3 Realisierung mit dem LabView-Programm

Bei der Untersuchung der Seitenbandentwicklung auf Grund von Modulationseffekten ist die Cepstrumanalyse eine treffsichere Analysetechnik. Mit Hilfe der Standard-Funktionen des LabView-Programms lässt sie sich leicht realisieren. Man kann entweder aus dem schon gewonnenen Amplitudenspektrum deterministischer Signale bzw. Leistungsdichtespektrum stochastischer Signale oder direkt über das Zeitsignal das Cepstrum berechnen. **Bild 7.16** zeigt eine der Realisierungsmöglichkeiten.

### 7.6.4 Anwendung der Cepstrum-Analyse

In der Fehlerdiagnose an Maschinen findet die Cepstrum-Analyse in erster Linie zur Detektion von periodischen Strukturen im Spektrum Anwendung. Beispielsweise treten Seitenbänder um die Zahneingriffsfrequenz und deren Harmonische bei Schäden an Zahnflanken auf.

Als Anwendungsbeispiel wird **Bild 7.4** verwendet. Darin sind die Schwingungsspektren der vertikalen Schwingungssignale eines zweistufigen Zahnrad-getriebes dargestellt. Die Spektralanalyse zeigt eine Seitenbandfamilie mit dem Abstand von etwa 25 Hz. Daher wird ein Schaden am Antriebszahnrad der ersten Stufe vermutet. **Bild 7.17** zeigt die entsprechenden Cepstren. In den beiden Cepstren zeigen sich bei den Queffrenzen 20 ms, 40 ms und 60 ms drei Peaks. Bei der 2. Messung erhöhen sich diese Peaks im Cepstrum. Der Peak bei der Queffrenz etwa 40 ms (entsprechend der Drehfrequenz 24,5 Hz) steigt stärker als die anderen Peaks an. Dadurch kann man den Fehler an der ersten Stufe identifizieren.



**Bild 7.17** Cepstren eines zweistufigen Zahnradgetriebes. Die Ziffern in den eckigen Klammern bedeuten die Intensitäten ( $\times 10^{-10}$ ).

## 7.7 Virtuelles Instrument für die Hüllkurvenanalyse

Wie in Abschnitt 7.2 ausgeführt, sind die durch Schäden in Wälzlagern oder Zahneingriffe bei schwankender Belastung in Zahnradgetrieben angeregten Schwingungen der Modulation ähnlich. Infolge der Modulation treten im Frequenzbereich Seitenbänder auf, in denen die zugehörigen Anteile meist periodisch mit dem Abstand der Wellendrehfrequenz sind. Durch die Spektral- und Cepstrum-Analyse lassen sich solche Seitenbandstrukturen in einigen Fällen identifizieren. Durch die Zuordnung charakteristischer Frequenz- oder Queffrenzanteile können die Schäden detektiert werden.

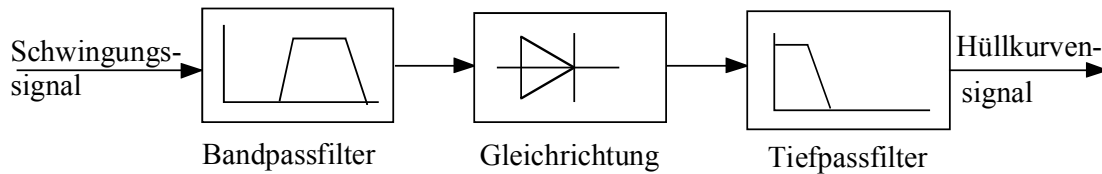
Die meisten Schäden in Wälzlagern in Zahnradgetrieben bzw. Planetengetrieben lassen sich allerdings nicht so einfach detektieren oder zuordnen, besonders nicht in ihrem Frühstadium. In solchen Getrieben gibt es meist viele Anregungsquellen, wie in Abschnitt 7.2 erwähnt. Die dem Wälzlager zugeordneten Schwingungskomponenten sind meist viel schwächer als die durch die Zahneingriffe erzeugten Komponenten. Für eine aussagefähige Fehlerdiagnose ist eine einfache Spektral- oder Cepstrum-Analyse ohne weitere Vorverarbeitung häufig nicht ausreichend [22].

Die Demodulationstechnik lässt sich für die Vorverarbeitung von häufig auftretenden modulierten Schwingungssignalen verwenden. Die Nachrichtentechnik kennt für die Demodulation eine Reihe von Verfahren, zu denen die Hüllkurvenbildung gehört [84]. Durch die Bildung der Hüllkurve eines amplitudenmodulierten Signals lässt sich das hochfrequente Trägersignal vom niederfrequenten Modulationssignal trennen. Damit kann man die Anregungsquellen in Maschinen gezielt untersuchen. In diesem Abschnitt wird das Prinzip der Hüllkurvenanalyse anschaulich dargestellt und mit Beispielen erläutert. Die mathematische Behandlung dieses Themas ist der Literatur z. B. [22; 75; 84] zu entnehmen.

### 7.7.1 Bildung der Hüllkurve

Die Bildung der Hüllkurven erfolgt meist durch die Gleichrichtung mit einer Tiefpassfilterung [22] oder mit Hilfe der Hilbert-Transformation [34]. Die klassische Analysetechnik zur Hüllkurvenbildung nutzt die Gleichrichtung und anschließende Tiefpassfilterung. **Bild 7.18** zeigt das Prinzip dieser Analysetechnik. Die Gleichrichtung des Signals kann durch Einweggleichrichtung, Doppelweggleichrichtung oder durch Quadrierung erfolgen. Ziel der Gleichrichtung bei der Demodulation ist die Trennung der Seitenbänder von der Trägerfrequenz. Die anschließende Tiefpassfilterung unterdrückt das Trägersignal und weitere hochfrequente Signale, die durch die Gleichrichtung erzeugt werden. Ein Bandpassfilter vor der Gleichrichtung stellt sicher, dass nur die interessierenden Trägerfrequenzen demoduliert werden. Ferner dämpft dieses Filter die niederfrequenten Anteile des ursprünglichen Signals, die sonst auch gleichgerichtet werden und das nachfolgende Tiefpassfilter ungehindert

passieren könnten. Durch die Tiefpassfilterung und Gleichanteilunterdrückung erhält man dann aus dem gleichgerichteten Signal das Hüllkurvensignal.



**Bild 7.18** Hüllkurvenbildung durch Gleichrichtung und Tiefpassfilterung

**Bild 7.19a** zeigt ein mit dem Signal  $x_m(t) = A_m \cdot \sin 2\pi f_m t$  moduliertes, vom Rauschen überlagertes Sinussignal:

$$x(t) = A_c [1 + (A_m / A_c) \cdot \sin 2\pi f_m t] \cdot \sin 2\pi f_c t \quad (7.7.1)$$

Infolge der Amplitudenmodulation entstehen im Spektrum neben der Trägerfrequenz  $f_c$  die Seitenbänder beiderseits im Abstand  $f_m$  (**Bild 7.19f**). Die Vorgehensweise des Gleichrichtung-Tiefpassfilterung-Verfahrens wird hier im Zeit- und Frequenzbereich veranschaulicht. Die Anteile außerhalb des interessierenden Frequenzbereichs werden zunächst durch ein Bandpassfilter unterdrückt. Anschließend wird das gefilterte Signal gleichgerichtet. Infolge der Gleichrichtung treten viele zusätzliche Frequenzanteile im Nieder- und Hochfrequenzbereich auf (**Bild 7.19g**). Nach der Tiefpassfilterung und Gleichanteilunterdrückung lässt sich das Hüllkurvensignal extrahieren (**Bild 7.19d**). Bei der vollständigen Hüllkurvenanalyse bildet man anschließend das Hüllkurvenspektrum, um die niederfrequenten Frequenzanteile darzustellen.

Eine andere Möglichkeit, das Hüllkurvensignal zu bilden, bietet die Hilbert-Transformation [34]:

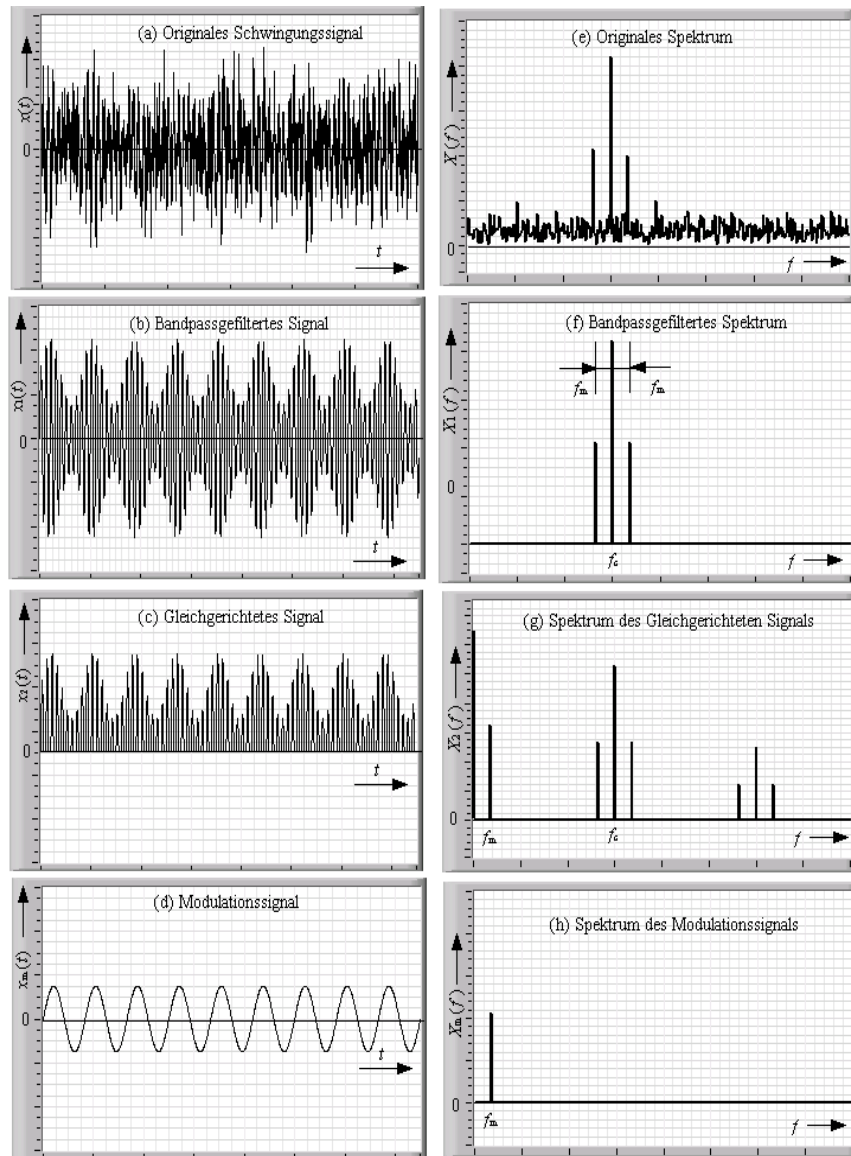
$$\mathfrak{H}\{x(t)\} = \tilde{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \frac{1}{t - \tau} d\tau \quad (7.7.2)$$

Ein Signal mit beliebigen Frequenzanteilen wird durch die Hilbert-Transformation um  $90^\circ$  phasenverschoben. Aus einer Cosinusschwingung ergibt sich z. B. eine Sinusschwingung. Die Hilbert-Transformation lässt sich über die DFT/FFT berechnen. Im LabView-Programm steht eine Standard-Funktion für die schnelle Berechnung der Hilbert-Transformation (FHT) zur Verfügung. Mit Hilfe der Hilbert-Transformation lässt sich das Hüllkurvensignal  $x_m(t)$  eines Signals  $x(t)$  in folgender Weise bilden [34]:

$$x_m(t) = \sqrt{x^2(t) + \tilde{x}^2(t)} \quad (7.7.3)$$

Vorteilhaft dabei ist, dass das beim Gleichrichtung-Tiefpassfilterung-Verfahren eingesetzte Tiefpassfilter nicht mehr gebraucht wird. Daher lassen sich die für anspruchsvolle Analysen ungünstigen Auswirkungen des Filters (z. B. Einschwingverhalten, nicht idealer Frequenz- und Phasengang usw.) vermeiden.





**Bild 7.19** Veranschaulichung der Hüllkurvenbildung eines Schwingungssignals mit dem Gleichrichtung-Tiefpassfilterung-Verfahren

Als Beispiel soll das Hüllkurvensignal der amplitudenmodulierten Schwingung

$$x(t) = A_c \left(1 + \frac{A_m}{A_c} \cdot \cos 2\pi f_m t\right) \cdot \cos 2\pi f_c t \quad (7.7.4)$$

gebildet werden. Durch trigonometrische Umformungen erhält man

$$x(t) = A_c \cdot \cos 2\pi f_c t + \frac{A_m}{2} \cdot \cos 2\pi(f_c + f_m)t + \frac{A_m}{2} \cdot \cos 2\pi(f_c - f_m)t \quad (7.7.5)$$

Das hilberttransformierte Signal lautet (Phasenverschiebung um  $-\pi/2$ ):

$$\tilde{x}(t) = A_c \cos \left(2\pi f_c t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{A_m}{2} \cos \left[2\pi(f_c + f_m)t - \frac{\pi}{2}\right] + \frac{A_m}{2} \cos \left[2\pi(f_c - f_m)t - \frac{\pi}{2}\right]$$

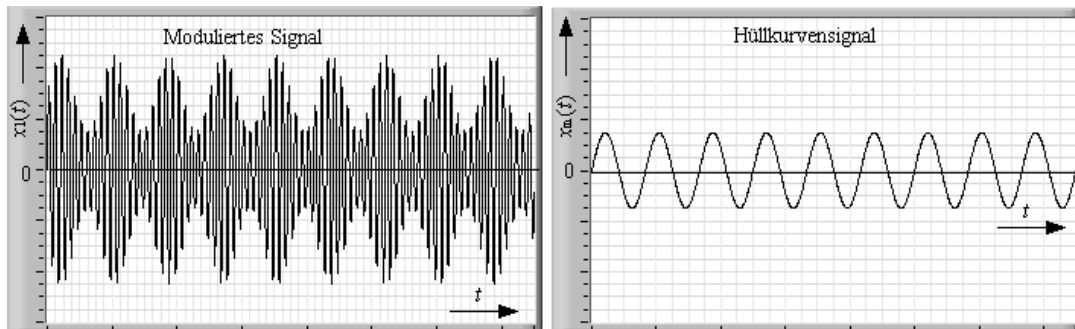
Durch trigonometrische Umformungen ergibt sich:

$$\tilde{x}(t) = A_c \cdot \left(1 + \frac{A_m}{A_c} \cdot \cos 2\pi f_m t\right) \cdot \sin 2\pi f_c t \quad (7.7.6)$$

Mit Gl.(7.7.3) lässt sich das Hüllkurvensignal folgendermaßen berechnen:

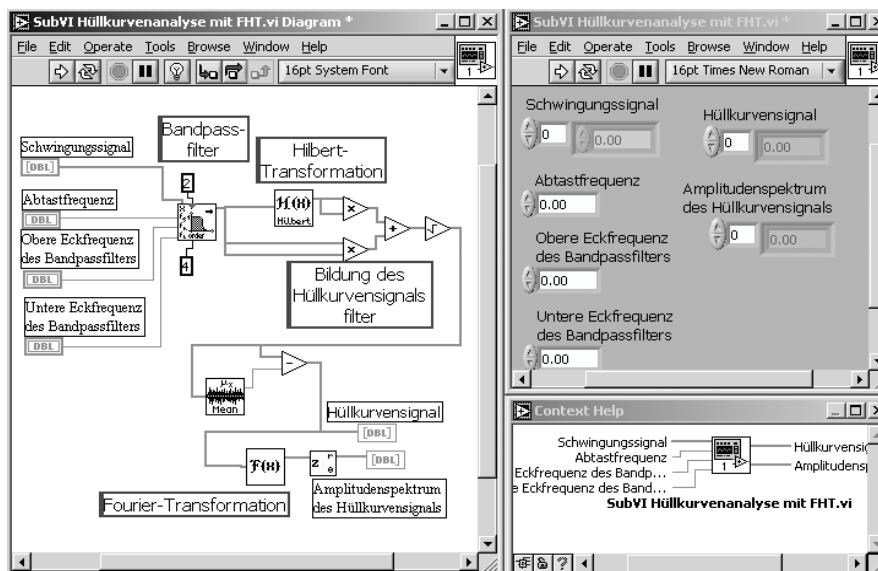
$$\begin{aligned} x_m(t) &= A_c \left(1 + \frac{A_m}{A_c} \cdot \cos 2\pi f_m t\right) \cdot \sqrt{\cos^2 2\pi f_c t + \sin^2 2\pi f_c t} \\ &= A_c [1 + (A_m / A_c) \cdot \cos 2\pi f_m t] = A_c + A_m \cdot \cos 2\pi f_m t \end{aligned} \quad (7.7.7)$$

In **Bild 7.20** sind ein moduliertes Signal und das mit Hilfe der Hilbert-Transformation berechnete Hüllkurvensignal dargestellt. Hierbei ist der Gleichanteil des Hüllkurvensignals eliminiert.



**Bild 7.20** Moduliertes Signal und das zugehörige Hüllkurvensignal, berechnet mit Hilfe der Hilbert-Transformation

**Bild 7.21** zeigt ein SubVI des LabView-Programms zur Hüllkurvenanalyse mit Hilfe der Hilbert-Transformation. Das Bandpassfilter vor der Hilbert-Transformation dämpft die Frequenzanteile außerhalb des interessierenden Frequenzbereichs.



**Bild 7.21** SubVIs für die Hüllkurvenanalyse mit Hilfe der Hilbert-Transformation

## 7.7.2 Hüllkurvenanalyse stoßförmiger Schwingungssignale

Jede Maschine ist aufgrund der Elastizität und der Massenträgheit der einzelnen Maschinenteile prinzipiell ein schwingungsfähiges System. Im Allgemeinen verfügt sie über

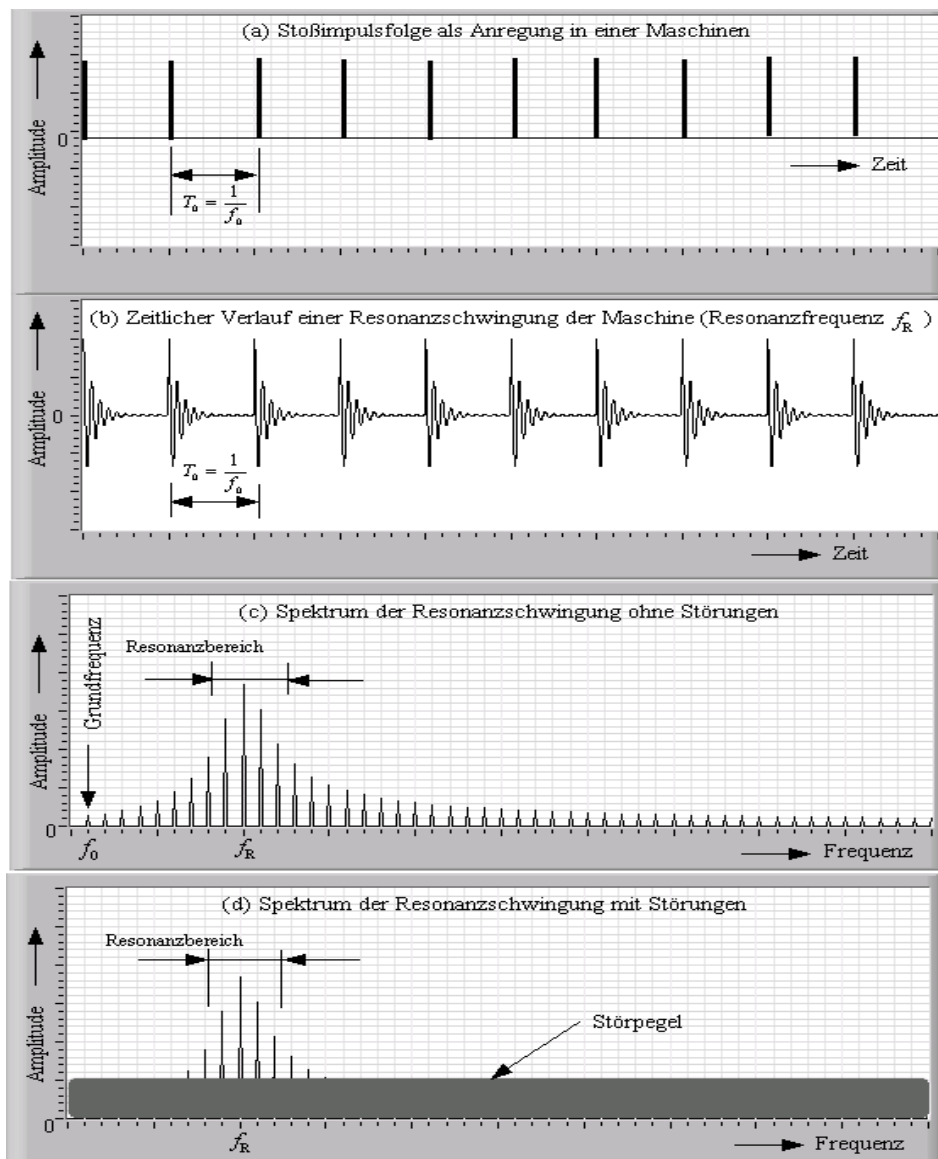
zahlreiche Resonanzfrequenzen. Während des Betriebs werden stets – auch im fehlerfreien Zustand – mechanische Schwingungen durch Kräfte, die bei der Übertragung der eingespeisten Leistungen auftreten, angeregt. Beim Entwurf von Maschinen vermeidet man, dass die Frequenzen dieser Kräfte und ihre sich im niederfrequenten Bereich befindenden Harmonischen in der Nähe der Resonanzfrequenzen der Maschinenstruktur oder Maschinenteile liegen. Deshalb treten Resonanzen bei fehlerfreien Maschinenzuständen in der Praxis kaum auf.

Allerdings führen viele Maschinenschäden zu Stößen, welche die Maschinenstruktur oder auch angrenzenden Maschinenteile zu Schwingungen anregen. Solche stoßförmigen Anregungen treten z. B. bei Wälzlagerschäden auf, wenn entweder die Wälzkörper einen Schaden auf der Innenring- oder Außenringlaufbahn überrollen oder aber einer der Wälzkörper selbst geschädigt ist. Stehen diese Anregungen mit der Wellenumdrehung in Verbindung, treten Modulationen auf, wie beim Schaden auf der Innenringlaufbahn eines Wälzlagers (**Bild 7.2** im Abschnitt 7.2). Stoßförmige Anregungen können auch bei intakten Maschinen entstehen, so z. B. bei Zahnradgetrieben durch den Zahneingriff. In vielen Fällen sind die stoßförmigen Anregungen bei stabiler Umdrehung periodischer Natur [35]. Die Stöße wiederholen sich mit gleichem Abstand. Daraus ergibt sich eine periodische Stoßimpulsfolge, deren Grundfrequenz  $f_0$  (Stoßfrequenz) charakteristisch für das zugehörige Maschinenteil bzw. den Maschinenschaden ist. Beim Schaden auf der Außenringlaufbahn eines Wälzlagers tritt z. B. eine Stoßimpulsfolge auf, die sich mit der Außenringüberrollfrequenz wiederholt.

Solche periodischen Anregungen verfügen über eine Vielzahl von Frequenzanteilen, und sie sind mit der Fourier-Reihe darstellbar. Sie können in der Maschine Schwingungen anregen, wobei alle auftretenden Frequenzen Vielfache der Stoßfrequenz  $f_0$  sind. Die höchsten Amplituden dieser Schwingungen treten meist in den Resonanzbereichen der Maschine auf (Resonanzschwingungen). Die angeregten Resonanzschwingungen klingen exponentiell ab. **Bild 7.22a** zeigt eine periodischen Stoßimpulsfolge. Der Einfachheit halber sind in **Bild 7.22b** und **Bild 7.22c** nur eine der Resonanzschwingungen und ihr Spektrum dargestellt. Infolge der Überlagerung dieser Schwingungen mit den von anderen Anregungsquellen erzeugten Schwingungen tritt im gesamten Schwingungsspektrum eine komplizierte Struktur in Erscheinung.

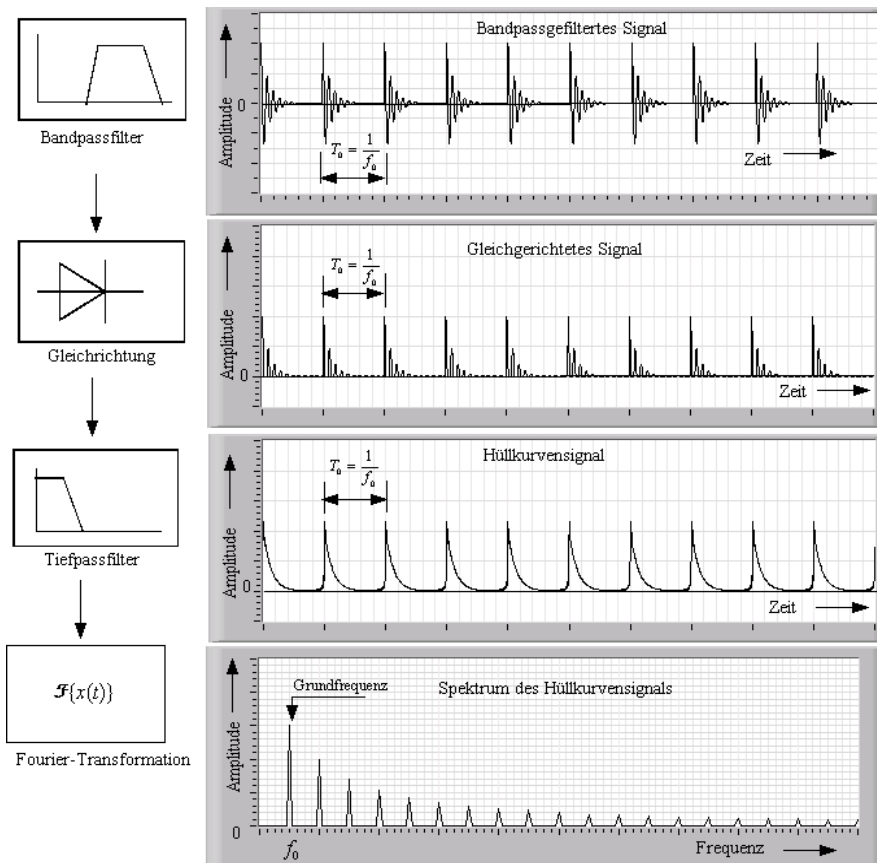
Im Prinzip kann man in beliebigen Bereichen des gesamten Schwingungsspektrums die periodische Stoßimpulsfolge identifizieren. Allerdings sind im niederfrequenten Bereich des gesamten Schwingungsspektrums die Amplituden der durch die Stoßimpulsfolge angeregten Schwingungsanteile meist sehr niedrig (strukturbedingt). Zudem können viele von anderen Anregungsquellen erzeugten Schwingungsanteile (z. B. Zahneingriff) ebenfalls in diesem Bereich liegen und viel stärker sein. Es wird dann schwierig, teilweise sogar unmöglich, diese Stoßimpulsfolge zu detektieren. **Bild 7.22d** verdeutlicht die Problematik. Daher untersucht man meist in den Resonanzbereichen die Stoßimpulsfolge, wo die Resonanzschwingungen

durch die hohen harmonischen Anteile der Stoßimpulsfolge angeregt werden. In einem Resonanzbereich des Spektrums ähneln die Amplituden den Seitenbandstrukturen einer Amplitudenmodulation (**Bild 7.22 c, d**).



**Bild 7.22** Darstellung einer durch eine periodische Impulsfolge angeregten Resonanzschwingung und ihre Spektren

Das entsprechende Zeitsignal ist der Modulation zwischen der Resonanzschwingung und einer Impulsreihe ähnlich (**Bild 7.22b**). Durch die Hüllkurvenbildung einer Resonanzschwingung erhält man die Impulsreihe. Durch die Spektralanalyse der Impulsreihe lässt sich ihre Grundfrequenz und somit auch die Stoßfrequenz  $f_0$  – die Grundfrequenz der ursprünglichen periodischen Stoßimpulsfolge – erkennen. **Bild 7.23** verdeutlicht die Hüllkurvenanalyse einer Resonanzschwingung mit dem Gleichrichtung-Tiefpassfilterungsverfahren. Man kann hier das Hüllkurvensignal ebenfalls mit Hilfe der Hilbert-Transformation gewinnen.



**Bild 7.23** Vorgehensweise der Hüllkurvenanalyse einer periodischen Stoßimpulsfolge

Anschließend kann das Hüllkurvensignal durch die DFT/ FFT im Frequenzbereich untersucht werden. Dort finden sich erhöhte Amplituden bei der Stoßfrequenz  $f_0$  und ihren Harmonischen. Die Intensität der Amplituden nimmt in der Regel bei höheren Harmonischen ab. Mit dieser Stoßfrequenz lässt sich die ursprüngliche Stoßimpulsfolge einem Maschinenteil oder einer Maschinenbewegung zuordnen.

Prinzipiell kann die Hüllkurvenanalyse immer vorteilhaft eingesetzt werden, wenn entweder periodische Stoßimpulse zu untersuchen sind oder wenn Modulationserscheinungen zu analysieren sind.

### 7.7.3 Praktische Anwendung

Ein Anwendungsbeispiel ist in **Bild 7.24**, **7.25** und **7.26** dargestellt: die Fehlerdiagnose an zwei baugleichen Planetengetrieben für Aufzüge. Die Schemazeichnung des kombinierten Planetengetriebes ist in **Bild 7.10** dargestellt. Das Getriebe A ist fehlerhaft, und das Getriebe B befindet sich noch in gutem Zustand. Jedes Getriebe wird von drei Motoren angetrieben, die direkt auf der Welle des Zentralrads angebracht sind. Der Motor wird von einem Umrichter gespeist. Somit ändert sich die Umdrehungsgeschwindigkeit des Motors im Bereich von  $0 \text{ min}^{-1}$  bis  $1400 \text{ min}^{-1}$ . Die eingespeiste Leistung wird über das Zentralrad der ersten Stufe, das Sonnenrad, die drei Planetenräder, und durch den Planetenträger abgegeben.

Mit diesen Maschinenelementen entstehen in diesen Planetengetrieben viele Anregungsquellen von Schwingungen.

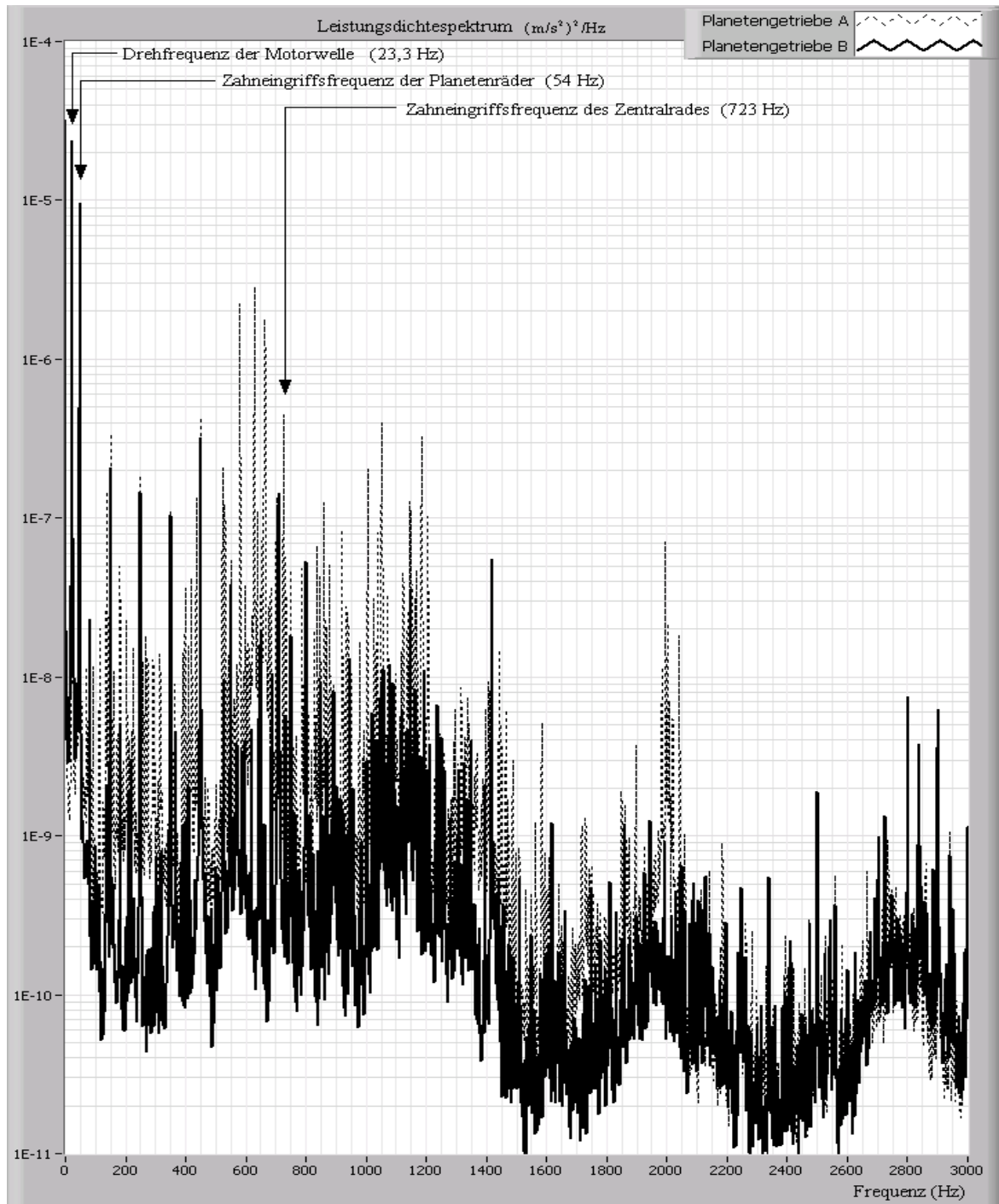
Zur Fehlerdiagnose werden die Schwingungen in den zwei radialen (horizontale und vertikale) Richtungen und der axialen Richtung aufgenommen. In den beiden Leistungsdichtespektren treten deutlich Peaks bei der Drehfrequenz und den Zahn-eingriffsfrequenzen der ersten Stufe auf. Die inneren Anregungen führen daneben zu zahlreichen schmalbandigen Frequenzanteilen und breitbandigen Resonanzen. Im Vergleich der beiden Spektren ist ein Leistungsanstieg im Spektrum des Getriebes A über 100 Hz bemerkbar (**Bild 7.24**). Durch diese Spektralanalysen und die zusätzlichen Messungen der Schwingungsstärke kann man feststellen, dass sich das Getriebe A im fehlerhaften Zustand befindet und mindestens ein Fehler darin auftritt. Allerdings lässt sich damit der Fehler einem Maschinenteil oder mehreren Maschinenteilen noch nicht zuordnen. Dafür wird eine Hüllkurvenanalyse durchgeführt. **Bild 7.25** zeigt die Ergebnisse. Mit den Hüllkurvenspektren lassen sich die Anregungsquellen der Schwingungen finden. In den beiden Hüllkurvenspektren treten starke Frequenzanteile bei den Harmonischen der Netzfrequenz auf, was auf den Umrichter zurückzuführen ist. In vielen Fällen führen Umrichter zum Auftreten von Schwingungen mit der Netzfrequenz und ihren Harmonischen [35]

Wie im Leistungsdichtespektrum zeigt sich im Hüllkurvenspektrum des fehlerhaften Planetengetriebes ein Anstieg der Amplituden bei vielen Frequenzen. Die Amplitude bei der FTF (20 Hz, Rotationsfrequenz Käfig) des Wälzlagers (Type 3005, zwei Wälzbahnen) auf der Welle des Zentralrads nimmt erheblich zu. Ebenfalls steigen die Amplituden bei der BPFO (102 Hz), BPF1 (132 Hz) und BSF (260 Hz) an. Die BSF ist hier für das Wälzlager mit zwei Wälzbahnen größer als die BPF1. Dagegen hat der Frequenzanteil bei der Zahneingriffsfrequenz (723 Hz) des Zentralrads geringe Energie. Somit kann man feststellen, dass der Fehler im Wälzlager liegt. Zur Bestätigung dieser Feststellung wurde eine weitere Untersuchung bei der Drehzahl von  $1000 \text{ min}^{-1}$  durchgeführt. **Bild 7.26** zeigt die Hüllkurvenspektren.

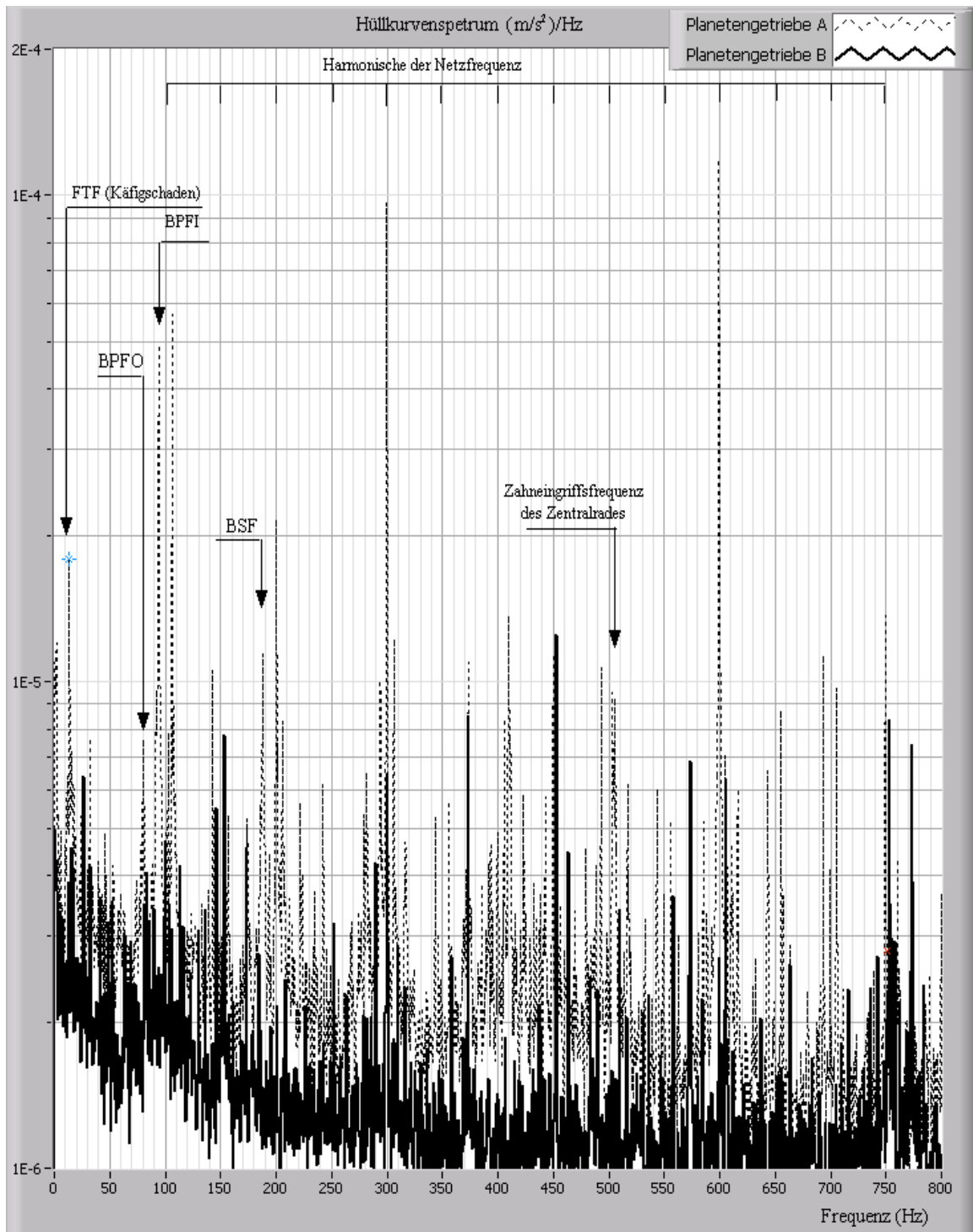
Im **Bild 7.26** nehmen die charakteristischen Frequenzen entsprechend des Abstiegs der Drehzahl ab. Das Frequenzmuster bleibt aber unverändert. Hierbei treten Anregungen bei der Netzfrequenz und ihren Harmonischen auch auf.

Die ausgeführten Beispiele haben gezeigt, dass sich die Hüllkurvenanalyse vorteilhaft zur Fehlerdiagnose einsetzen lässt, besonders zur Erkennung von periodischen Stoßimpulsen oder zur Analyse von Modulationserscheinungen. Im Frühstadium eines Fehlers ist das dem Fehler zugeordnete Schwingungssignal meist schwach und kann von anderen, stärkeren Signalanteilen überdeckt werden, sodass eine einfache Spektralanalyse nicht ausreichend ist. In diesem Fall lässt sich die Hüllkurvenanalyse anwenden.

Für die eingehende Untersuchung und korrekte Bewertung des Hüllkurvenspektrums ist ein hohes Maß an Erkenntnissen in Kinematik der in Frage kommenden Maschinen nötig. Dazu gehören Wellendrehzahlen, Zahnengriffsfrequenzen, Zähnezahlen, Lagergeometrie usw.

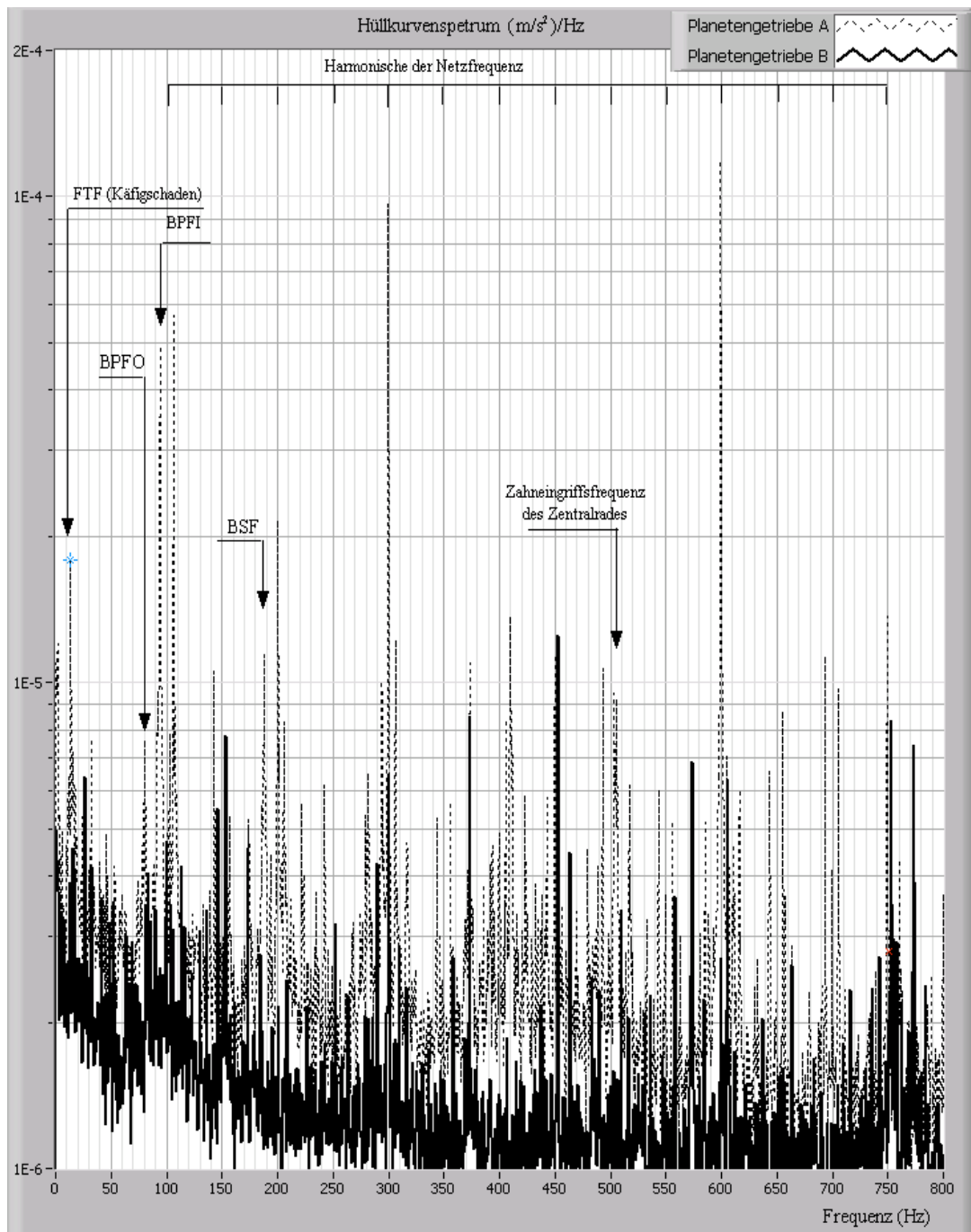


**Bild 7.24** Spektren des Planetengetriebes A (fehlerhaft) und B (in gutem Zustand) bei der Drehzahl 1400 min<sup>-1</sup>



**Bild 7.25** Hüllkurvenspektren des Planetengetriebes A (fehlerhaft) und B (in gutem Zustand) bei der Drehzahl  $1400 \text{ min}^{-1}$





**Bild 7.26** Hüllkurvenspektren des Planetengetriebes A (fehlerhaft) und B (in gutem Zustand) bei der Drehzahl  $1000 \text{ min}^{-1}$

## Zusammenfassung

Es wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Mess- und Diagnosesystem realisiert, das die Messungen von wichtigen elektrischen und mechanischen Größen und die Diagnose der bewegten Maschinenteile außerhalb eines Prüfstandes beim Anlagenbetreiber ermöglicht.

Die DFT/FFT kommt aufgrund ihrer vorteilhaften Eigenschaften zur Lösung vielfältiger Aufgaben in den wissenschaftlichen und industriellen Bereichen zum Einsatz. Aber in der Praxis wird man oft mit dem Leckeffekt der DFT konfrontiert, insbesondere bei kurzer Messzeit. Der Leckeffekt kann prinzipiell dadurch vermieden werden, dass die Messzeit unbegrenzt lang ist. Dies ist wegen des begrenzten Speicherplatzes in einem Rechner in der Praxis kaum durchführbar. Durch eine Abtastung, die mit den Frequenzen aller in einem Signal enthaltenen Komponenten synchron ist, kann man den Leckeffekt eliminieren. Dafür muss mit erheblich hohem Aufwand der Hardware gerechnet werden. Für Multifrequenz-Signale ist eine lange Messzeit erforderlich, da die Messzeit einem gemeinsamen ganzzahligen Vielfachen der Perioden aller Komponenten im Signal entsprechen muss.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden die Verfahren für die Bestimmung der Größen der vom Rauschen gestörten periodischen Signale hinsichtlich der Industrietauglichkeit untersucht. Kombiniert mit der Anwendung geeigneter Fensterfunktionen, eignen sich die Chirp-z-Transformation und das Zeropadding-Verfahren bezüglich der Zuverlässigkeit bei kurzer Messzeit. Durch die Betrachtung der Spektralinterferenz in der DTFT eines Multifrequenz-Signals wurden die allgemeinen Bedingungen für die Anwendung der CZT bzw. des Zeropadding-Verfahrens bei reellen Multifrequenz-Signalen unter dem Einsatz der Fensterfunktionen dargestellt. Der Einfluß eines reellen weißen Rauschsignals auf die geschätzten Größen eines reellen Multifrequenz-Signals wurde untersucht, und die Standardabweichung der geschätzten Größen des durch weißes Rauschsignal gestörten Signals wurde abgeleitet. Für die Bestimmung der elektrischen Größen von umrichter gespeisten Elektromotoren wurde zur Unterdrückung statistischer Störungen im Spannungs- bzw. Stromsignal das Kreuzleistungsdichtespektrum eingesetzt, das die Fourier-Transformierte der Korrelationsfunktion zwischen dem Spannungs- und Stromsignal ist. Es lässt sich mit der CZT oder dem Zeropadding-Verfahren zur Unterdrückung des Leckeffekts berechnen. Bei den Industrieanwendungen wurde gezeigt, dass die Abweichungen bei der Bestimmung der elektrischen Größen bei der kürzesten zulässigen Messzeit (1 Sekunde) im Bereich  $< 0,5\%$  v. M. liegen.

Zur Bearbeitung der harmonischen und interharmonischen Komponenten von Umrichter Ausgangsspannungen bzw. -strömen wurden das TDA-Verfahren und die Differenz-Filterung eingesetzt. Dadurch können die harmonischen und interharmonischen Komponenten im Zeit- und Frequenzbereich getrennt bearbeitet werden. Eine genauere Bestimmung der Größen der interharmonischen Komponenten ist möglich, wenn das durch die Differenz-Filterung ge-

wonnene Signal mit der CZT oder dem Zeropadding-Verfahren bearbeitet wird. Durch gezielte Wahl der Mittelungszahl lässt sich eine interharmonische Komponente vollständig unterdrücken.

Zur Fehlerdiagnose auf der Basis der Messung und Analyse mechanischer Schwingungen wurden ein Schwingstärkemessgerät und ein Spektralanalysator mit Hilfe des LabView-Programms neu entwickelt. Dabei wurden die firmenspezifischen technischen Anforderungen berücksichtigt. Die praktischen Anwendungen zeigten, dass die Signalverarbeitung und die damit entwickelten virtuellen Instrumente anspruchsvolle messtechnische Aufgabenstellungen in der industriellen Praxis bewältigen können, die in der Vergangenheit aus Mangel an geeigneter Hardware oder auch aus Kostengründen nicht angegangen wurden. Die Hauptvorteile virtueller Instrumente sind bei diesen Anwendungen der Ersatz von dedizierten und an spezielle Aufgaben gebundenen Hardware-Komponenten durch anwendungsflexible Software-Module (z. B. die Abwärtstastung, digitale Filterung oder DFT/FFT), die flexiblen Visualisierungs- und Archivierungsmöglichkeiten, die sichere und effiziente Speicherung von Messdaten sowie die Automatisierung kompletter Messabläufe.

Zur Schwingungsanalyse und Fehlerdiagnose an Planetengetrieben wurden die kinematischen Eigenschaften eines Planetengetriebes untersucht. Die charakteristischen Frequenzen, die für die Fehlerdiagnose von größter Bedeutung sind, wurden dargestellt. Die schwingungsdiagnostischen Signalverarbeitungsverfahren wurden vorgestellt, auf ihre Eignung hinsichtlich der Fehler an Zahnrädern und in Wälzlagern untersucht und mit Hilfe des LabView-Programms realisiert. Die Cepstrumanalyse und Hüllkurvenanalyse zeigten in den praktischen Anwendungen ihre Eignung für die Schwingungsdiagnose der Fehler an Zahnrädern und in Wälzlagern. Für die eingehende Untersuchung und korrekte Bewertung des Cepstrums oder Hüllkurvenspektrums ist ein hohes Maß an Erkenntnissen in Kinematik der in Frage kommenden Maschinen nötig. Dazu gehören Wellendrehzahlen, Zahneingriffsfrequenzen, Zähnezahlen, Lagergeometrie usw.

## Verzeichnis der wichtigsten Abkürzungen und Symbole

ADU	–	Analog-Digital-Umsetzer
AIC	–	<i>Akaike information criterion</i>
B	–	Breite der Fensterfunktion
BHZ	–	Breite des Hauptzipfels der Fensterfunktion
BPFI	–	Überrollfrequenz Innenring eines Wälzlagers
BPFO	–	Überrollfrequenz Außenring eines Wälzlagers
BSF	–	Wälzkörperrotationsfrequenz eines Wälzlagers
$\mathbb{C}$	–	Menge der komplexen Zahlen
CR-Schranke	–	Cramer-Rao-Schranke
CWT	–	Kontinuierliche Wavelet-Transformation
CZT	–	Chirp-z-Transformation
DF	–	Differenz-Filter
DFT	–	diskrete Fourier-Transformation
DTFT	–	zeitdiskrete Fourier-Transformation ( <i>discrete time Fourier transform</i> )
DWT	–	Diskrete Wavelet-Transformation
$f$	–	Frequenz
$f(t)$	–	allgemeine zeitliche Funktion
FPE	–	<i>final prediction error</i>
FTF	–	Rotationsfrequenz Käfig eines Wälzlagers
FT	–	Fourier-Transformation
GV	–	ganzzahliges gemeinsames Vielfaches
i. i. d.	–	<i>independently and identically distributed</i>
IpDFT	–	Interpolation-Diskrete-Fourier-Transformation
IPDB	–	Iteratives Phase-Differenz-basierendes Verfahren
$\text{Im}\{z\}$	–	Imaginärteil von $z$
$j$	–	$\sqrt{-1}$
LS	–	die kleinsten Quadrate ( <i>Least Square</i> )
MLE	–	Maximum-Likelihood-Schätzung
MRA	–	<i>multiresolution analysis</i>
MSR	–	quadratischer Mittelwert des Fehlers ( <i>Mean Square Error</i> )
$\mathbb{N}^0$	–	Menge der natürlichen Zahlen (mit 0)
$\mathbb{N}$	–	Menge der natürlichen Zahlen (ohne 0)
$\mathbb{N}^+$	–	Menge der natürlichen Zahlen ( $> 0$ )
PDV	–	Das auf Phase-Differenz basierende Verfahren
QMF	–	Quadratur Mirror Filter
$\mathbb{R}$	–	Menge der reellen Zahlen

---

$\operatorname{Re}\{z\}$	–	Realteil von $z$
$\operatorname{round}\{x\}$	–	ganzzahlig runden
SNR	–	Signal-zu-Rausch-Verhältnis
STFT	–	Kurzzeit-Fourier-Transformation ( <i>short time Fourier transform</i> )
TDA	–	Mittelung im Zeitbereich ( <i>Time Domain Averaging</i> )
WT	–	Wavelet-Transformation
$\mathcal{Z}\{x[n]\}$	–	$z$ -Transformation einer diskreten Folge
$\Delta F$	–	Frequenz-Auflösungsvermögen der DFT/FFT
$\Delta f$	–	Frequenzauflösung der DFT/DFT
$\delta f$	–	Frequenzauflösung der CZT
$\delta(x)$	–	Dirac-Impuls, es gilt $\delta(x) = \begin{cases} +\infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$ .
$\delta(k)$	–	Impulsfolge, es gilt $\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$ , $k \in \mathbb{N}^0$ .
$\mathcal{F}\{x(t)\}$	–	Fourier-Transformation von $x(t)$
$\mathcal{H}\{x(t)\}$	–	Hilbert-Transformation von $x(t)$
$\mathcal{L}\{x(t)\}$	–	Laplace-Transformation von $x(t)$
$L^2(\mathbb{R})$	–	Lebesgue-Raum. Es gilt $\ \psi\ ^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}  \psi(t) ^2 dt < +\infty$ , $t \in \mathbb{R}$ .
$\mathcal{E}\{x\}$	–	Erwartungswert einer zufälligen Variablen $x$ . Es gilt $\mathcal{E}\{x\} = \mu_x$ .
$\sigma_x$	–	Standardabweichung einer zufälligen Variablen $x$
$\Omega = 2\pi f / f_s$	–	Kreisfrequenz
$\operatorname{var}\{x\}$	–	Varianz einer zufälligen Variablen $x$ . Es gilt $\operatorname{var}\{x\} = \sigma_x^2 + \mu_x^2$ .
$\mu_x = \mu\{x\}$	–	Mittelwert einer zufälligen Variablen $x$
$\hat{x}$	–	Schätzwert einer zufälligen Variablen $x$
$x^*$	–	Konjugiert-komplexe Größe einer komplexen Variablen $x$
$x_{\max} = \max\{x\}$	–	Maximalwert einer Variablen $x$
$x_{\min} = \min\{x\}$	–	Minimalwert einer Variablen $x$
$ z $	–	Betrag einer komplexen Variablen $z$
$\angle z$	–	Phasenwinkel einer komplexen Variablen $z$
$\langle x(t), y(t) \rangle$	–	Inneres Produkt.. Es gilt $\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt$
$\ \psi\ $	–	Norm einer Funktion $\psi(t)$ . Hierbei gilt $\ \psi\ ^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}  \psi(t) ^2 dt$ .

## Literatur

### Bücher und Veröffentlichungen:

- [1] Becker, W.; Bonfig, K. W.; Höing, K.: Handbuch, Elektrische Messtechnik. Hüthig Heidelberg, 2. Aufl., 2000
- [2] Böhme, J. F.: Stochastische Signale. Teubner Stuttgart, 1993
- [3] Bonfig, K. W.: Sensoren und Sensorsignalverarbeitung. Expert-Verlag, 1997
- [4] Bonfig, K. W.: Fuzzy-Logik in der industriellen Automatisierung. 2. Aufl., Expert-Verlag, 1996
- [5] Bonfig, K. W., Liu, Z.: Virtuelle Instrumente und Signalverarbeitung – Zustandsüberwachung und Diagnose an Maschinen mit LabView. VDE Verlag Berlin Offenbach, 2004
- [6] Bonfig, K. W., Himmel, J., Liu, Z.: Prüfstandsmodernisierung auf der Basis moderner Messwerterfassung- und -verarbeitungssoftware. Sensoren und Messdatenverarbeitung, mpa, Band 4, S. 375 – 390, b-Quadrat Verlag, 2002
- [7] Borkowski, J.: LIDFT – the DFT Linerar Interpolation Method. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 49, No.4, P. 741 – 745, 2000
- [8] Borkowski, J., Mroczka J: Metrological analysis of the LIDFT method. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 51 (1): 67-71 FEB 2002
- [9] Brigham, E. O.: FFT-Anwendungen. Oldenburg-Verlag, 1997
- [10] Braun, S.: The Extraction of Periodic Waveforms by Time Domain Averaging. Acustica, Vol. 32, 69 – 77, 1975
- [11] Brown, T. Wang, M. M.: An Iterative Algorithm for Sigle-Frequency Estimation. IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 50, No.11, P. 2671 – 2682, 2002
- [12] Carbone, P, Nunzi, E.: Frequency-Domain-Based Least-Squares Estimation of Multifrequency Signal Parameters. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 49, No.3, P. 555 - 558, 2000
- [13] Carbone, R.; Menniti, D.; Morrison, R. E.; Testa, A.: Harmonic and Interharmonic Distortion Modelling in Multiconverter Systems. IEEE Trans. on Power Delivery, 10 (3) (1995), 1685 – 1692
- [14] Cavicchi, T. J.: Digital Signal Processing. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1971
- [15] Czarske, J.: Verfahren zur Messung und Auswertung der Interferenzphase in der Laser-Doppler-Velocimetrie, Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8 Nr. 530, VDI-Verlag, 1996
- [16] Dai, X., Gretsche, R.: Quasi-Synchronous Sampling Algorithm and its Applications. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 43, No.2, P. 204 - 209, 1994.

- 
- [17] Ding, K., Xie, M.: Phase difference correction method for phase and frequency in spectral analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 14, P. 835 – 843, 2000
- [18] Elliot, D. F.: *Handbook of Digital Signal Processing*. Academic Press Inc. (London) LTD., 1987
- [19] Farschtschi, A.: *Elektromaschinen in Theorie und Praxis*. VDE Verlag, Berlin, Offenbach, 2001
- [20] Ferrero, A., Ottoboni, R.: High-Accuracy Fourier-Analysis Based on Synchronous Sampling Techniques. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 41, No.6, P. 780 – 785, 1992
- [21] Fliege, N.: *Multiraten-Signalverarbeitung*. Teubner, Stuttgart, 1993
- [22] Geropp, B.: *Schwingungsdiagnose an Wälzlagern mit Hilfe der Hüllkurvenanalyse*. ABAR, Band 14, Verlag der Augustinus Buchhandlung, 1995
- [23] Gough, P. T.: A Fast Spectral Estimation Algorithm Based on the FFT. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(6), 1317 – 1322, 1994
- [24] Hänsler, E.: *Statistische Signale*. Springer-Verlag, 1991
- [25] Harris, F. J.: On the use of window for harmonics analysis with the discrete Fourier Transform. *Proceedings of IEEE*, Vol.66, No. 1, P. 51-83, January 1978
- [26] Hasan, M.A.: DOA and Frequency Estimation Using Fast Subspace Algorithms. *Signal Processing*, Vol.77, P.49 – 62, 1999
- [27] Heckl, M., Müller, H. A.: *Taschenbuch der Technischen Akustik*, 2. Auflage, Springer-Verlag, 1994
- [28] Hoffmann, J.: *Handbuch der Messtechnik*. Carl Hanser, 1999
- [29] Jain, V. K., Collins, W. L.: High-Accuracy Analog Measurements via Interpolated FFT. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. IM-28, No.2, P. 113 – 122, June 1979
- [30] Jamal, R., Krauss, P.: *LabView – Das Grundlagenbuch*. Prentice Hall, München, 1998
- [31] Kammeyer, K. D., Kroschel, K.: *Digitale Signalverarbeitung*. B.G. Teubner Stuttgart, 1998
- [32] Kay, S. M.: *Modern Spectral Estimation*. Prentice Hall, 1988
- [33] Kay, S.: A Fast and Accurate Single Frequency Estimator, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 37, No.12, P. 1987 – 1990, Dec. 1989
- [34] Kolerus, J.: *Zustandsüberwachung von Maschinen*. Expert-Verlag, 2000.
- [35] Klein, U.: *Schwingungsdiagnostische Beurteilung von Maschinen und Anlagen*. 3. Auflage, Verlag Stahleisen GmbH, Düsseldorf, 2003
- [36] Könecke, A.: *Magnetische Geräusche von umrichter gespeisten Asynchronmaschinen mit Käfigläufer*. VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf, 1992

- 
- [37] Kristensson, M., Jansson, M., Ottersten, B.: Further Results and Insights on Subspace Based Sinusoidal Frequency Estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(12), 2962 – 2974, 2001
- [38] Lachenmayr, G.: *Schwingungen in Planetengetrieben mit elastischen Hohlrädern*. VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf, 1988
- [39] Leonowicz, Z., Lobos, T., Rezmer, J.: Advanced Spectrum Estimation Methods for Signal Analysis in Power Electronics. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 50 (3), 514 – 519, 2003
- [40] Lerch, R.: *Elektrische Meßtechnik*, Springer-Verlag, 1996.
- [41] Li, C., Xu, W., Tayjasant, T.: Interharmonics: Basic Concepts and Techniques for Their Detection and Measurement. *Electric Power Systems Research*, 66 (1) (2003) 39 – 48, Elsevier
- [42] Liu, Y.: Untersuchung instabiler Laufzustände eines Dampfturbosatzes durch Schwingungsüberwachung. *Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 11: Schwingungstechnik*, Band 279, VDI-Verlag, 1999
- [43] Liu, Z.; Himmel, J.; Bonfig, K. W.: Frequenzmessung an Motoren und Frequenzumformungen. *Technisches Messen*, Band 69 (11), S. 461 – 466, Oldenbourg Verlag, 2002
- [44] Liu, Z.; Himmel, J.; Bonfig, K. W.: Bestimmung gestörter Größen niederfrequenter periodischer Signale bei kurzer Messzeit. *Sensoren, Signale, Systeme, mpa*, Band 5, S. 337 – 350, b-Quadrat Verlag, 2004
- [45] Macleod, M. D.: Fast nearly ML Estimation of the Parameters of Real or Complex Single Tones or Resolved Multiple Tones. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 46, No.1, P. 141 – 148, Jan. 1998
- [46] Macleod, M. D.: A Fast Frequency Domain Notch Periodogram Algorithm. *Signal Processing*. Vol. 81, No.1, P. 1449 – 1463, Jan. 1998.
- [47] McMahan, D., Barrett, R. F.: An efficient method for the estimation of the frequency of a single tone in noise from the phase of discrete Fourier transforms. *Signal Processing*, Vol.11, P. 169 – 177, 1986.
- [48] Marple, S. L.: *Digital Spectral Analysis with Applications*. Prentice-Hall, INC, 1987
- [49] McFadden, P. D.: A Revised Model For the Extraction of Periodic Waveforms by Time Domain Averaging. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1 (1), 83 – 95, 1987, Academic Press Inc. (London)
- [50] McFadden, P. D.: Examination of a Technique for the Early Detection of Failure in Gears by Signal Processing of the Time Domain Average of the Meshing Vibration. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.1 (2), 173 –183, 1987, Academic Press Inc. (London)
- [51] McFadden, P. D.: Application of Synchronous Averaging to Vibration Monitoring of Rolling Element Bearings. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 14 (6), 891 – 906, 2000, Academic Press.



- 
- [52] McFadden, P. D., Smith, J. D.: The Vibration Produced by multiple Point Defects in a Rolling Element Bearing. *Journal of Sound und Vibration*, 98 (2), P. 263 – 273, 1985
- [53] McFadden, P. D., Smith, J. D.: Model for the Vibration Produced by a Single Point Point Defect in a Rolling Element Bearing. *Journal of Sound und Vibration*, 96 (1), P. 69 – 82, 1984
- [54] Ming, X., Kang, D.: Corrections for Frequency, Amplitude and Phase in a Fast Fourier Transform of a Harmonic Signal. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.10(2), P.211-221, 1996.
- [55] Offelli, C., Petri, D.: Interpolation Techniques for Real-Time Multifrequency Waveform Analysis. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 39, No.1, P. 106 – 111, Feb. 1990
- [56] Oppenheim, A. V.: *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*. Oldenbourg Verlag, München, 1995
- [57] Papoulis, A.: *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, New York, 1965
- [58] Pfeiffer, W., Scheuerer, F.: Vergleichende Bewertung der Chirp-z-Transformation (CZT) und der Fast-Fourier-Transformation(FFT), *Elektrie*, Band 47, Heft 10, S. 370 – 374, Berlin, 1993
- [59] Pickard, J.: *Planetengetriebe in der Praxis*. Expert Verlag , 1981
- [60] Profos, P.; Pfeifer, T.: *Handbuch der industriellen Messtechnik*. Oldenbourg Verlag, 1994
- [61] Quinn, B. G.: Estimating Frequency by Interpolation Using Fourier Coefficients. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 42, No.5, P. 1264 - 1268, May 1994
- [62] Quinn, B. G.: Estimation of Frequency, Amplitude, and Phase from the DFT of a Time Series. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 45, No.3, P. 814 – 817, 1997
- [63] Rabiner, L. R., Schafer, R. W., Rader, C. M.: The Chirp z-Transform Algorithm. *IEEE Transaction on Audio Electroacoustics*, Vol. AU-17, No.2, P. 86 – 92, June 1969
- [64] Rifai, M. B., Ortmeier, T. H., McQuillan, W. J.: Evaluation of Current Interharmonics from AC Drives. *IEEE Trans. on Power Delivery*, 15 (3) (2000), 1094 – 1098.
- [65] Rife, D. C. and G. A.: Use of the discrete Fourier transformation in the measurement of frequencies and levels of tones. *Bell System Technology Journal*, Vol. 49, P. 197 – 228, Feb. 1970
- [66] Rife, D. C., Boorstyn, R. R.: Single-tone parameter estimation from discrete-time observations. *IEEE Transactions for Information Theory*, Vol. IT-20, P. 591-598, 09. 1974
- [67] Rife, D. C.: Multiple-tone parameter estimation from discrete-time observations. *Bell System Technology Journal*, Vol.55, No.9, P. 1389-1410, Nov. 1976

- 
- [68] Roy, R., Kailath, T.: ESPRIT – estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. 37, P.984 – 995, 1989
- [69] Santamaria, I., Pantaleon, C.: A comparative Study of High-Accuracy Frequency Estimation Methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.14(5), P.819 – 834, 2000
- [70] Schoukens; J., Renneboog, J.: Modeling the noise influence on the Fourier coefficients after a discrete Fourier transform. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. IM-35, No.3, P. 278-286, Setp. 1986
- [71] Schrüfer, E.: Interpolation bei der Diskreten Fourier-Transformation durch Einfügen von Nullen. *Technisches Messen*, Vol. 61(2), S. 89 – 93, 1994
- [72] Shan, J.: Zustandsdiagnose von Planetengetrieben bei stationärem und instationärem Betrieb mit Hilfe der Schwingungsanalyse. *ABAR*, Band 45, Verlag der Augustinus Buchhandlung, 2001
- [73] Shanmagan, K. S., Breipohl, A. M.: *Random Signals: Detection, Estimation and Data Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988
- [74] Stearns, S. D.: *Digitale Verarbeitung analoger Signale*, Oldenbourg-Verlag, 1991
- [75] Stein, S., Jones, J. J.: *Modern Communication Principles*. McGraw Hill Book Company, New York, 1967
- [76] Stoica, P., Li, H., Li, J.: Amplitude Estimation of Sinusoidal Signals: Survey, New Results, and an Application. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 48, No.2, P. 338 – 352, 2000
- [77] Testa, A., Gallo, D., Langella, R.: On the Processig of Harmonics and Interharmonics: Using Hanning Window in Standard Framwork. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 19 (1), 28 – 34, 2004
- [78] Volmer, J.: *Getriebetechnik*. VEB Verlag Technik, Berlin 1972
- [79] Welch, P. D.: The Use of the Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: a Method based on time averaging over short, modified periodograms, *IEEE Transactions on Audio Electroacoustics*, Vol. AU-15, 70 – 73, June 1967
- [80] Xu, J.: *Fuzzy-Diagnosesysteme und ihre Anwendungen bei der Fehlerdiagnose und Betriebsüberwachung von Maschinenanlagen*. Dissertation, RWTH Aachen, 1988
- [81] Zelniker, G., Taylor F. J.: *Advanced Digital Signal Processing*, Marcel Dekker, INC. New York, 1994
- [82] Zhou, E.: *Untersuchungen zum Einsatz von Prognoseverfahren in der Maschinenüberwachung zur Unterstützung von Diagnosesystem*. Dissertation, RWTH Aachen, 1994
- [83] Anderson, T. W.: *The Statistical Analysis of Time Series*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1971
- [84] Bachmann, W.: *Signalanalyse*. Vieweg-Verlag 1992
- [85] Best, R. E.: *Phase-Locked Loops*. McGraw-Hill Book Company, 1984

- 
- [86] Sreenivas, T. V.; Rao, P. V.: High-Resolution narrow-band spectra by FFT pruning. IEEE Transactions on Acoustics, Speech Signal Processing, Vol. ASSP-28, P. 254 – 257, 1980
- [87] Zivanovic, M.; Carlosena, A.: Nonparametric spectrum Interpolation methods: A comparative study. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 50, P. 1127 – 1132, 2001
- [88] Bonfig, K.W., Liu, Z.: Zeit-Skalierungs-Darstellung und Multiresolutionszerlegung von Schwingungssignalen eines Getriebes. Sensoren, Aufnehmer und Systeme, mpa, Band 3, S. 103 – 119, b-Quadrat Verlag, 2000
- [89] Combes, J. M.: Wavelets: Time-Frequency Methods and Phase Space. Springer-Verlag, 1990.
- [90] Daubechies, I.: Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets, Communication in Pure and Applied Mathematics, Vol.41, No.7, pp.909-996, 1988.
- [91] Daubechies, I.: The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis, IEEE Transactions on Information Theory, Vol.36, No.5, 1990
- [92] Daubechies, I.: Ten Lectures on Wavelets, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.
- [93] Daubechies, I.: Different Perspectives on Wavelets, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, American Mathematical Society, pp.1-33, 1993.
- [94] Frisch, M. & Messer, H.: The Use of the Wavelet Transform in the Detection of an Unknown Transient Signal, IEEE Transacton on Information Theory, Vol. 38, No.2, pp 892 – 897, 1992
- [95] Gopinath R. A.: The phaselet transform - An integral redundancy nearly shift-invariant wavelet transform, IEEE Transactions on Signal Processing 51 (7): 1792-1805, July 2003.
- [96] Heil, Ch.: Applications of the Fast Wavelet Transform, SPIE, Vol.1384, Advanced Signal Processing Algorithms, Architecture, and Implementations, 248 – 259, 1990.
- [97] Kaiser, G.: A Friendly Guide to Wavelets, Birkhäuser, 1994.
- [98] Kingsburg, N: Complex wavelets for invariant analysis and filtering of signals. Applied and computational harmonic analysis, 10 (3): 234-253 May 2001, Academic Press Inc, San Diego, CA, USA.
- [99] Lehmann, P.: Schnelle Zeit-Frequenz-Analyse auf der Grundlage der Kurzzeit-Fourier-Transformation, tm - Technisches Messen 64(1997) 6 , S. 247 - 258.
- [100] Lou X. S., Loparo K.A.: Bearing fault diagnosis based on wavelet transform and fuzzy inference. Mechanical Systems and Signal Processing 18 (5): 1077-1095 SEP 2004, Academic Press Ltd Elsevier Science, London.
- [101] Mallat, S.: Zero-Crossings of a Wavelet Transform. IEEE Transactions on Information Theory, 37 (4): 1019-1033 July 1991

- 
- [102] Mallat, S.: A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 11, No. 7, 674 – 693, 1989.
- [103] Mallat, S., Hwang W. L. S.: Singularity Detection and Processing with Wavelets, IEEE Transactions on Information Theory 38 (2): 617-643 Part 2, March 1992
- [104] Mallat, S.: Multiresolution Approximations and Wavelet Orthonormal Bases of  $L_2(\mathbb{R})$ . Transactions of the American Mathematical Society, 315 (1): 69-87 SEP 1989
- [105] Rioul, O., Vetterli, M.: Wavelets and Signal Processing, IEEE Signal Processing Magazine, Vol.8, No.4, pp.14 -38, 1991.
- [106] Rioul, O., Duhamel, P.: Fast Algorithms for Discrete and Continuous Wavelet Transform, IEEE Transaction on Information Theory, Vol. 38, pp569 – 586, 1992.
- [107] Rioul, O.: A Discrete-Time Multiresolution Theory, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 41, No. 8, 1993, pp2591 – 2606.
- [108] Wickerhauser, M. V.: Adaptive Wavelet-Analysis – Theorie und Software, Wieweg, 1993

### **Richtlinien und Normen**

- [109] DIN 3997, Zahnschäden an Zahnradgetrieben: Bezeichnung, Merkmale, Ursachen. Beuth Verlag, Berlin, 1979
- [110] DIN 45661, Schwingungsmesseinrichtungen, Begriffe. Beuth Verlag, Berlin, 1998
- [111] DIN 45662: Schwingungsmeßeinrichtungen – Allgemeine Anforderungen und Prüfung. Beuth Verlag, Berlin, 1998
- [112] DIN 45666, Schwingstärkemessgeräte, Anforderungen. Beuth Verlag, Berlin, 1967
- [113] DIN 45671, Teil 1: Messung mechanischer Schwingungen am Arbeitsplatz, Schwingungsmesser; Anforderungen und Prüfung. Beuth Verlag, Berlin, 1990
- [114] DIN 45671, Teil 3: Messung mechanischer Schwingungen am Arbeitsplatz, Prüfung (Kalibrierung und Beurteilung) des Schwingungsmessers; Erstprüfung, Nachprüfung, Zwischenprüfung, Prüfung am Einsatzort. Beuth Verlag, Berlin, 1997
- [115] VDI 2056, Beurteilungsmaßstäbe für mechanische Schwingungen von Maschinen, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1964
- [116] Power Quality Measurement Methods, Testing and Measurement Techniques, IEC Std. 61 000-4-30.
- [117] General Guide on Harmonics and Interharmonics Measurements for Power Supply Systems and Equipment Connected Thereto, IEC Std. 61 000-4-7.

## Anhang

### A.1 Polyphasendarstellung der $z$ -Transformation eines diskreten Signals

Ausgangspunkt ist ein diskretes Signal  $x[n]$  mit der  $z$ -Transformation:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n}. \quad (\text{A.1})$$

Gesucht wird die  $z$ -Transformation des um den Faktor  $M$  ab- oder aufwärtsgetasteten Signals.

Dazu wird die  $z$ -Transformation  $X(z)$  zuerst umgeformt:

$$\begin{aligned} X(z) = & x[0] + x[M] \cdot z^{-M} + x[2M] \cdot z^{-2M} + x[3M] \cdot z^{-3M} + \dots \\ & + x[1] \cdot z^{-1} + x[M+1] \cdot z^{-(M+1)} + x[2M+1] \cdot z^{-(2M+1)} + x[3M+1] \cdot z^{-(3M+1)} + \dots \\ & + x[2] \cdot z^{-2} + x[M+2] \cdot z^{-(M+2)} + x[2M+2] \cdot z^{-(2M+2)} + x[3M+2] \cdot z^{-(3M+2)} + \dots \\ & \dots \\ & + x[M-1] \cdot z^{-(M-1)} + x[2M-1] \cdot z^{-(2M-1)} + x[3M-1] \cdot z^{-(3M-1)} + x[4M-1] \cdot z^{-(4M-1)} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Nach Ausklammern von Potenzen  $z^{-i}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, M-1$ ) ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} X(z) = & z^{-0} \{x[0] + x[M] \cdot z^{-M} + x[2M] \cdot z^{-2M} + x[3M] \cdot z^{-3M} + \dots\} \\ & + z^{-1} \{x[1] \cdot z^{-0} + x[M+1] \cdot z^{-M} + x[2M+1] \cdot z^{-2M} + x[3M+1] \cdot z^{-3M} + \dots\} \\ & + z^{-2} \{x[2] \cdot z^{-0} + x[M+2] \cdot z^{-M} + x[2M+2] \cdot z^{-2M} + x[3M+2] \cdot z^{-3M} + \dots\} \\ & \dots \\ & + z^{-(M-1)} \{x[M-1] \cdot z^{-0} + x[2M-1] \cdot z^{-M} + x[3M-1] \cdot z^{-2M} + x[4M-1] \cdot z^{-3M} \dots\} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Durch das Ausklammern entstehen in den geschweiften Klammern ausschließlich Polynome in  $z^M$ . Der Ausdruck in der  $i$ -ten Reihe lässt sich schreiben als:

$$z^{-i} \sum_{k=0}^{+\infty} x[kM+i] (z^M)^{-k} = z^{-i} P_i(z^M), \quad (\text{A.4})$$

$$\text{mit } P_i(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x[kM+i] \cdot z^{-k}. \quad (\text{A.5})$$

Somit kann man aus Gl. (A.3) erhalten

$$\begin{aligned} X(z) = & P_0(z^M) + z^{-1} \cdot P_1(z^M) + z^{-2} \cdot P_2(z^M) + \dots + z^{-(M-1)} \cdot P_{M-1}(z^M) \\ = & \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i} \cdot P_i(z^M) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

In der Multiraten-Signalverarbeitung [21] wird Gl. (A.6) als Polyphasendarstellung der  $z$ -Transformation  $X(z)$  bezeichnet. Zur Gewinnung des Zusammenhangs zwischen  $P_0(z^M)$  und

$X(z)$  wird der Ausdruck  $\sum_{k=0}^{M-1} X(W_M^k \cdot z)$  in Betrachtung gezogen, wobei  $W_M^k = e^{-j2\pi k/M}$ . Es

gelten  $W_M^{kM} = 1$  für alle  $k$  und  $\sum_{k=0}^{M-1} W_M^{-ik} = M \cdot \delta(i)$  für alle  $i$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{M-1} X(W_M^k \cdot z) &= \sum_{k=0}^{M-1} \left\{ \sum_{i=0}^{M-1} (W_M^k \cdot z)^{-i} P_i((W_M^k \cdot z)^M) \right\} = \sum_{k=0}^{M-1} \left\{ \sum_{i=0}^{M-1} W_M^{-ik} \cdot z^{-i} P_i(z^M) \right\} \\ &= \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i} P_i(z^M) \underbrace{\sum_{k=0}^{M-1} W_M^{-ik}}_{=M \cdot \delta(i)} = \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i} P_i(z^M) \cdot M \cdot \delta(i). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Mit  $i = 0$  erhält man

$$\sum_{k=0}^{M-1} X(W_M^k \cdot z) = M \cdot P_0(z^M). \quad (\text{A.8})$$

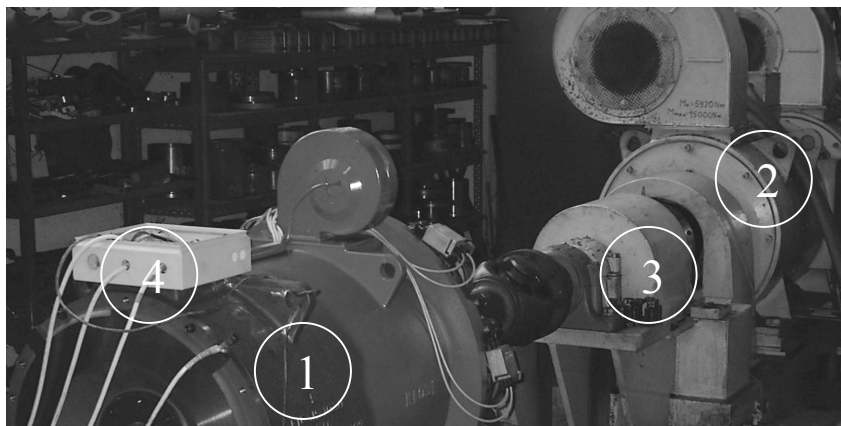
Folglich ergeben sich:

$$P_0(z^M) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(W_M^k \cdot z) \quad (\text{A.9})$$

und 
$$P_0(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(W_M^k \cdot z^{(1/M)}) \quad (\text{A.10})$$

## A.2 Maschinentechnischer Aufbau des Prüfstandes und das Hardwarekonzept der Messwerterfassung

**Bild A.1** zeigt den mechanischen Aufbau des Prüfstandes. Die zu prüfenden Motoren werden über eine Kardanwelle mit den Bremsgeneratoren verbunden. Das Drehmoment wird an einer zwischengeschalteten Messwelle gemessen. Das Drehzahlsignal liefert ein Impulsgeber der an den Wellenstumpf der Bremsgeneratoren angekoppelt ist. Der Motor wird durch einen statischen Frequenzumformer gespeist. Spannung und Frequenz sind einstellbar und dienen als Steuerparameter bei der Prüfung.



**Bild A.1** Prüfstand (1 Motor, 2 Bremsgeneratoren, 3 Drehmomentsensor, 4 Anschlusskasten - Werkbild Fa. Klose Antriebstechnik GmbH & Co. KG, Hilchenbach)

Die durch den Umformer bedingten Störungen können bei fehlerhaften oder fehlenden Leitungsfiltren zwischen Umformer und Motor sehr hohe Pegel erreichen. Es wurden Betriebszustände beobachtet, bei denen kein zuverlässiger Betrieb der Messgeräte mehr möglich war. Auch bei ausreichender Entstörung des Frequenzumformers ergeben sich aus folgenden Gründen noch erhebliche Störpegel:

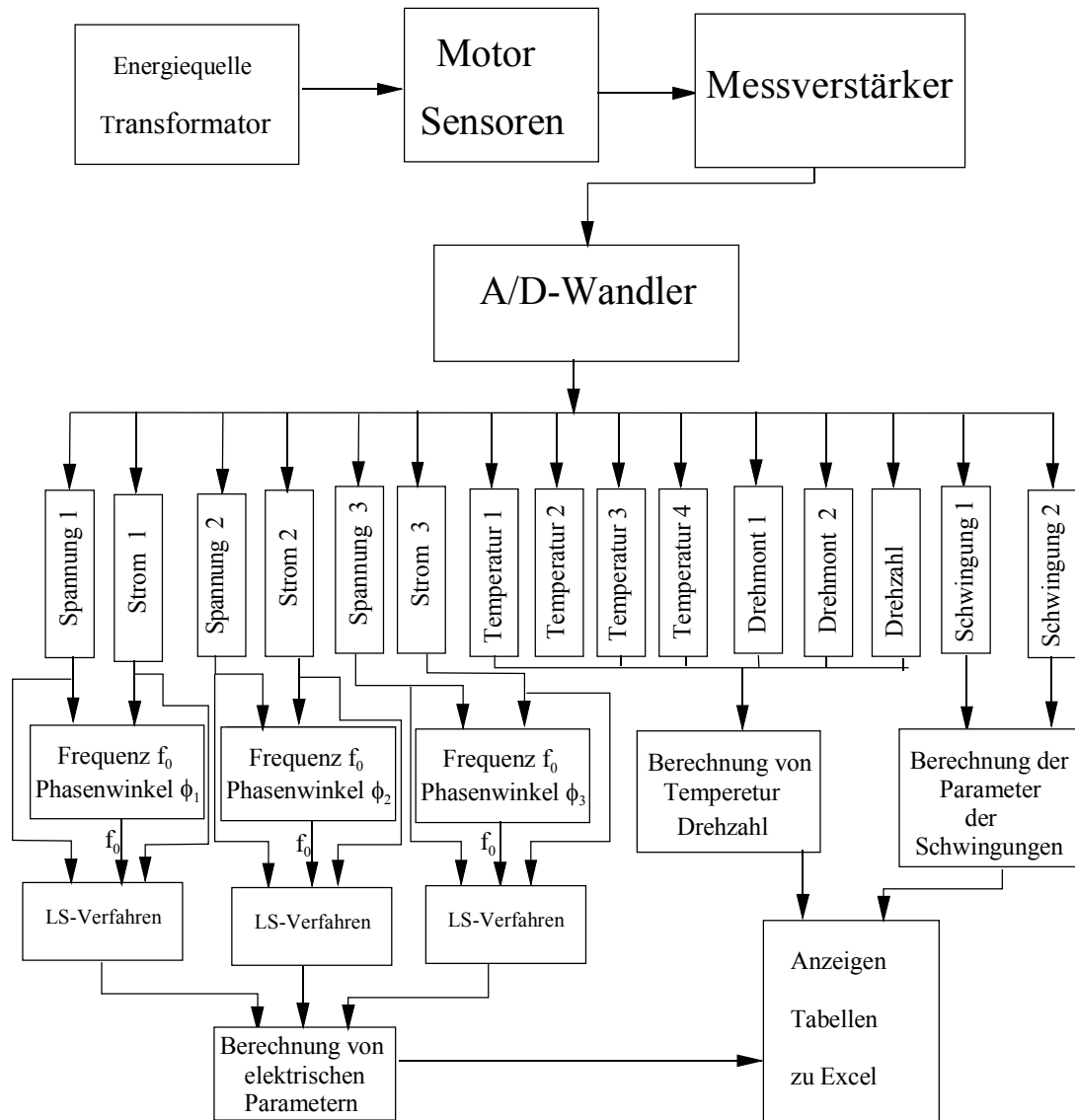
- Betrieb mit freier Verdrahtung für den Anschluss der zu prüfenden Motoren erforderlich.
- Ältere Verkabelung des Prüffeldes ist nicht an die Störungen angepasst. Änderungen sind aus baulichen Gründen nicht einfach möglich.
- Leitungen der Messsysteme liegen in den Energieversorgungskabelkanälen.

Beim Aufbau eines integrierten Messsystems waren die folgenden Anforderungen zu berücksichtigen:

- Zentrale Erfassung aller Messdaten mit einem PC
- Einlesen der analogen Messsignale für das Drehmoment in der vorhandenen Messeinrichtung
- Einlesen der 3 Leiterstromsignale der bestehenden Stromwandler
- Einlesen der Leiterspannungssignale bei Grenzwerten von etwa 1KV
- Überspannungsfestigkeit der Eingänge bis etwa 3KV
- Potentialgetrennte Erfassung von 5 Temperaturen mit Hilfe von Thermoelementen über einen Extender mit etwa 10m Kabel
- Anpassung der Amplitude und Erfassung der Drehzahlssignale
- Messung von mechanischen Schwingungen mit zwei unabhängigen Kanälen.
- Schnelle A/D-Wandlerkarte mit hoher Auflösung (16Bit bei 230KHz) und LabView-Treiber
- Ankopplung des PC an das Werksdatennetz mit Übergabe der Daten
- Beseitigung der Problematik der Erdschleifen im bestehenden Prüffeld
- Vermeidung von zusätzlichen Schleifen bedingt durch die Netzwerkkopplung und die Erdung des PC.
- Mobiler Aufbau der Zusatzgeräte für die Verwendung bei Kunden

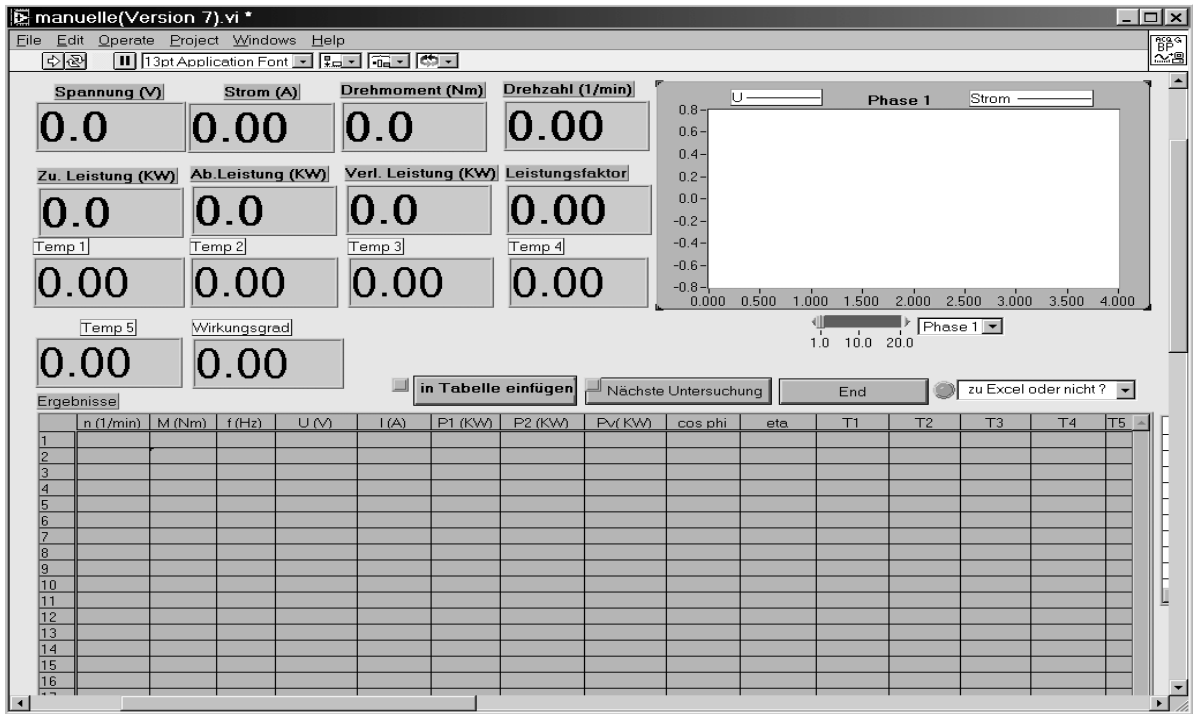
Die PC-Datenerfassung erfolgt mit handelsüblichen Komponenten der Fa. National Instruments. Zur Potentialtrennung der Spannungs- und Stromsignale waren unter den gegebenen Bedingungen spezielle überspannungsfeste Verstärker erforderlich. Diese wurden für diesen Anwendungsfall aus handelsüblichen Trennverstärkern vom Typ AD210 (Analog Devices) aufgebaut. Für je einen Leiterstrom und eine Leiterspannung wurde eine Baugruppe aufgebaut. Die Baugruppen wurden zur zentralen Übergabe an den PC und zur Entkopplung der Signale in ein Gehäuse mit einer Spannungsversorgung integriert. Durch diesen Aufbau konnte der Potentialbezug aller Signale auf einen gemeinsamen Punkt im PC auf der A/D-Wandlerkarte verlegt werden. Zusätzlich wurde die Energie der Störimpulse mit Hilfe von Surge-Supressor-Dioden soweit reduziert, dass sie keine Hardwareschäden verursachen können.

### A.3 virtuelles Instrument für die Bestimmung der mechanischen und elektrischen Größen

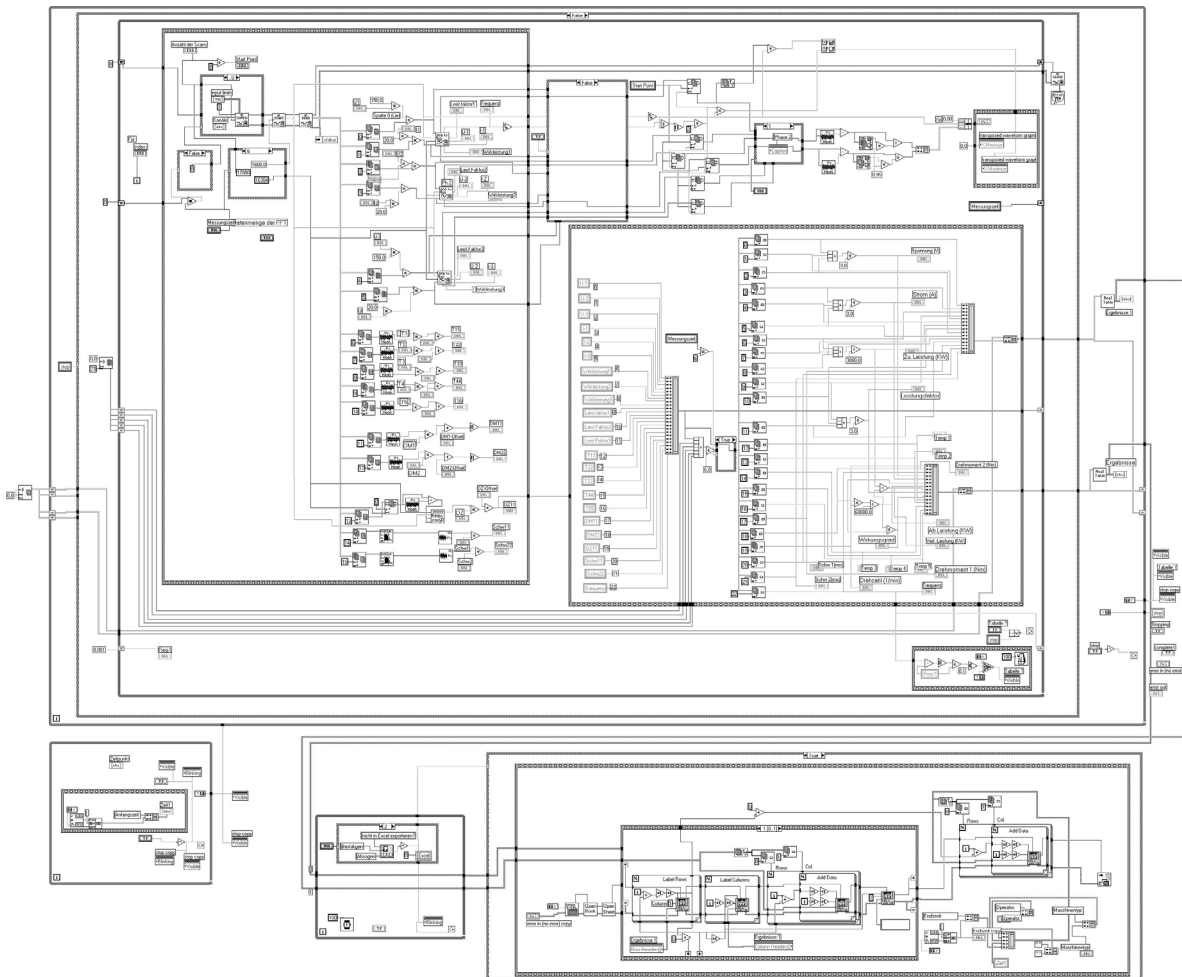


**Bild A.2** Das gesamte Mess- und Berechnungssystem (Werkbild Fa. Klose Antriebstechnik GmbH & Co. KG, Hilchenbach)



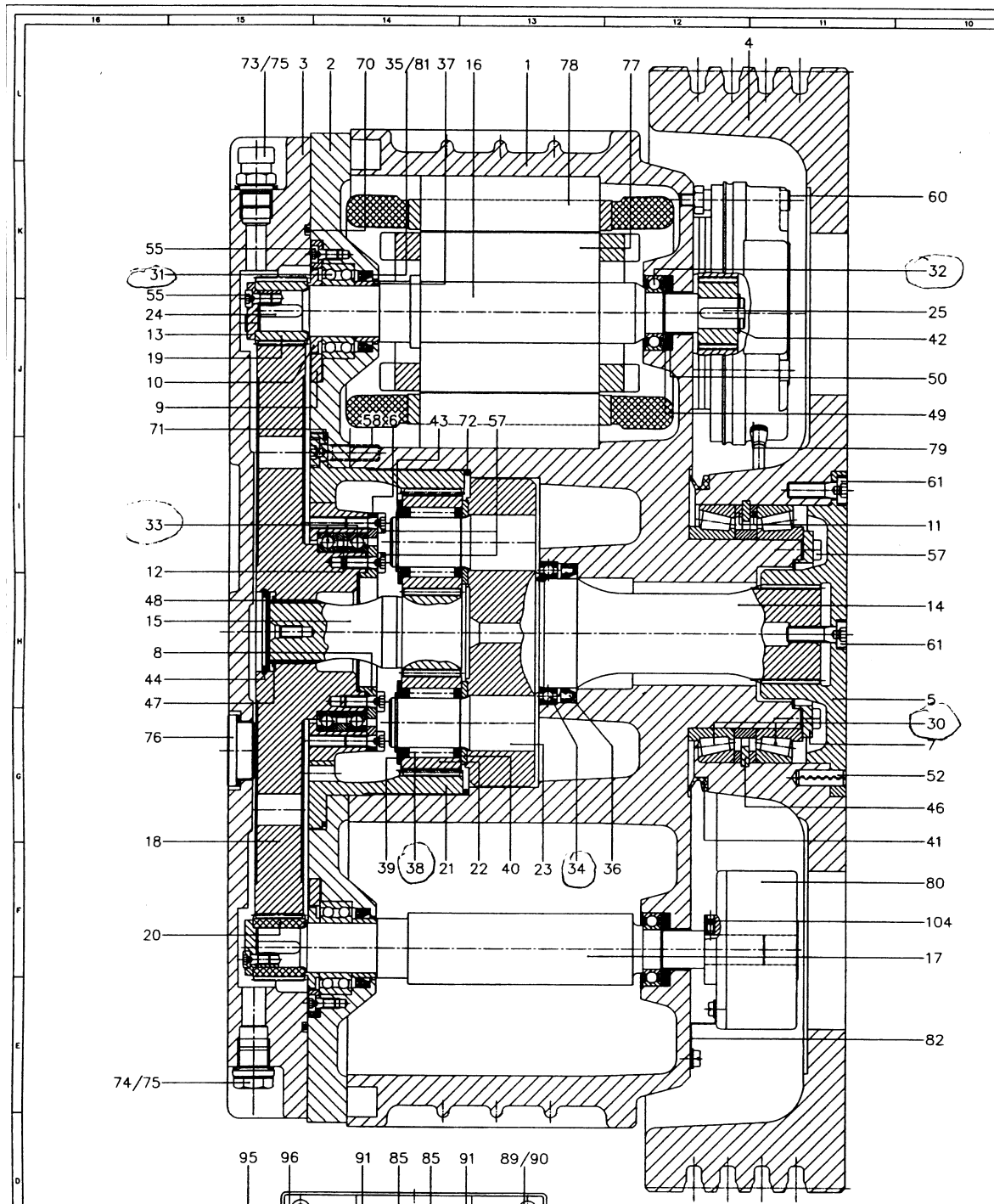


**Bild A.3** Frontpanel des virtuellen Instruments (Werkbild Fa. Klose Antriebstechnik GmbH & Co. KG, Hilchenbach)



**Bild A.4** Blockdiagramm des Hauptprogramms des virtuellen Instruments (Werkbild Fa. Klose Antriebstechnik GmbH & Co. KG, Hilchenbach)

### A.4 Schnittzeichnung des kombinierten Planetengetriebes



## A.5 Wavelet-Transformation (WT)

Die Grundlagen der Wavelets gehen zurück auf die Arbeiten von Fourier, Haar und Gabor [92]. Die Gabor-Transformation, die als Kurzzeit-Fourier-Transformation (*Short Time Fourier Transform* – STFT) mit einem Gauß-Fenster verstanden wird, ermöglicht, quasistationäre Vorgänge, wie z. B. Sprachsignale besser analysieren zu können, wobei zusätzlich das Gauß-Fenster die überragende Eigenschaft besitzt, dass die theoretische Heisenberg-Grenze der Zeit/Frequenzauflösung  $\Delta t \cdot \Delta f = 1/(4\pi)$  erreicht wird [97, 99]. Neben zahlreichen Vorzügen hat die Kurzzeit-Fourier-Analyse auch einen gravierenden Nachteil: Die Entscheidung für eine bestimmte Fensterlänge ist nur bezüglich einer Frequenz optimal und führt bei niedrigen Frequenzen zu ungenügender Frequenzauflösung, während für höhere Frequenzen nur eine unbefriedigende zeitliche Auflösung erreicht wird. Grossmann und Morlet [89] haben als erste ein Wavelet – Morlet-Wavelet eingeführt:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-j\omega_0 t} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (\text{A5} - 1)$$

wobei der Parameter  $\omega_0$  die Mittelfrequenz der elementaren Wavelet ist und ein Wert  $\omega_0 = 5,336$  zum Generieren von wünschenswerten Waveletformen häufig bei Zeit-Frequenz-Analysen eingesetzt wird. Diese Morlet-Wavelets benutzen komplexe Euler-Funktionen  $e^{-j\omega_0 t}$  und Gauß-Fenster variabler Breite. Damit können Filterbänke konstanter Güte (Quotient Bandbreite durch Mittelfrequenz) entworfen werden, die zudem die Heisenberg-Grenze erfüllen [92]. Mallat [102] hat durch die Entdeckung der Beziehung zwischen Quadratur Mirror Filtern (QMF), euklidischen Pyramiden und orthogonalen Basen die Multiresolutionsanalyse entwickelt und die Wavelet-Theorie in der Bildverarbeitung populär gemacht. Daubechies [90, 91] hat orthogonale, kompakte Wavelets vorgestellt, die inzwischen am häufigsten in den technischen Wissenschaften angewendet werden.

### A5.1 Kontinuierliche Wavelet-Transformation (CWT)

Die kontinuierliche Wavelet-Transformation  $CWT_x$  einer quadratisch integrierbaren Funktion  $x(t)$  der reellen und kontinuierlichen Variablen  $t$  wird durch das innere Produkt

$$CWT_x(a, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \psi^* \left( \frac{t - \tau}{a} \right) dt = \langle x(t), \psi_{a\tau}(t) \rangle \quad (\text{A5} - 2)$$

definiert [92], wobei  $\psi(t)$  als elementares Wavelet bezeichnet wird und gilt:

$$\psi_{a\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left( \frac{t - \tau}{a} \right) \quad (a > 0). \quad (\text{A5} - 3)$$

Hier wird  $a$  als Skalierungsfaktor (*scaling factor*) und  $\tau$  als Zeitverschiebung (*time-shift*) bezeichnet. Die beiden Parameter  $\tau$  und  $a$  werden als kontinuierliche Variablen betrachtet. Der Faktor  $1/\sqrt{a}$  leistet für alle  $a$  und  $\tau$  die Normierung [92]:

$$\|\psi_{a\tau}\| = \|\psi\| \quad (\text{A5-4})$$

Die inverse Transformation der Gl (5 – 2) existiert [89],

$$x(t) = \frac{1}{c_g} \int \int \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \cdot CWT_x(a, \tau) \frac{1}{a^2} da d\tau \quad (\text{A5-5})$$

wenn  $\psi(t)$  die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\int |\psi(t)|^2 dt < +\infty \quad (\text{A5-6})$$

$$\text{und } c_g = \int \frac{|\Psi(j\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty . \quad (\text{A5-7})$$

Hier ist  $\Psi(j\omega)$  die Fourier-Transformation der elementaren Wavelet  $\psi(t)$ . Die Gl.(A5 – 7), die in der Praxis als Existenzbedingung bezeichnet wird, verlangt, dass der Mittelwert von  $\psi(t)$  null ist, d.h.

$$\int \psi(t) dt = 0 \quad \text{oder} \quad (\text{A5-8})$$

$$\Psi(\omega = 0) = 0 . \quad (\text{A5-9})$$

Anhand von Gln (A5 – 8) und (A5 – 9) kann festgestellt werden, dass die Wavelet  $\psi(t)$  eine oszillierende und kurz andauernde Funktion sein muss. Aus dieser Eigenschaft und aus der Lokalisierung in Zeit und Frequenz heraus ist der Begriff „Wavelet“ (Kleinwelle) für diese Klasse von Funktionen entstanden.

### A5.1.1 Zeit-Frequenz-Auflösung der Wavelet-Transformation

Wie bei der STFT ist für die Wavelet-Transformation anzusehen, dass ein Signal  $x(t)$  durch „Fenster“ – Wavelets –  $\psi_{a\tau}(t)$  betrachtet wird [81]. Der wesentliche Unterschied zwischen der STFT und der WT liegt darin, dass die WT bei hohen Frequenzen ein kurzes Fenster und bei niedrigen Frequenzen ein langes Fenster benutzt, während ein einziges Fenster bei der STFT in Betracht gezogen wird. Beweisbar ist, dass die WT eine Analyse von Signalen mit konstanten relativen Bandbreiten zur Verfügung stellt, während die STFT eine konstante Bandbreite aufweist. Für beliebige Wavelet  $\psi_{a_0}(t)$  ist die Zeit-Frequenz-Auflösung durch

$$[a \cdot (t_* - \Delta_t) + t_0, a \cdot (t_* + \Delta_t) + t_0] \times \left[ \frac{\omega_* - \Delta_\omega}{a}, \frac{\omega_* + \Delta_\omega}{a} \right], \quad (\text{A5-10})$$

gegeben [81], wobei

$$t_* - \text{der Mittelpunkt der elementaren Wavelet } \psi(t) . t_* = \frac{1}{\|\psi(t)\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot |\psi(t)|^2 dt$$

$$\Delta_t - \text{die RMS-Dauer der elementaren Wavelet } \psi(t) . \Delta_t = \frac{1}{\|\psi(t)\|} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (t-t_*)^2 \cdot |\psi(t)|^2 dt \right\}^{1/2}$$

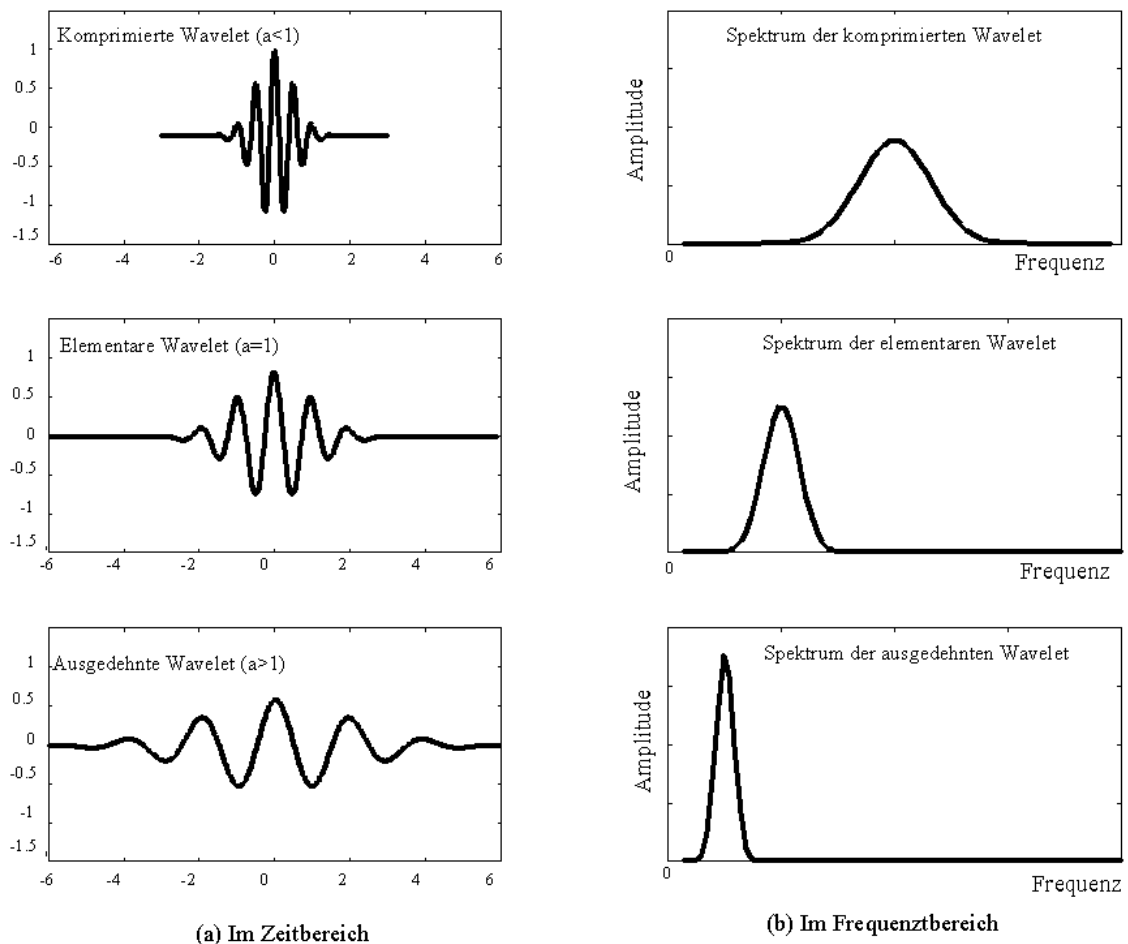
$\omega_*$  – der Mittelpunkt der FT  $\Psi(\omega)$  der elementaren Wavelet  $\psi(t)$ .

$$\omega_* = \frac{1}{\|\Psi(\omega)\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \cdot |\Psi(\omega)|^2 d\omega$$

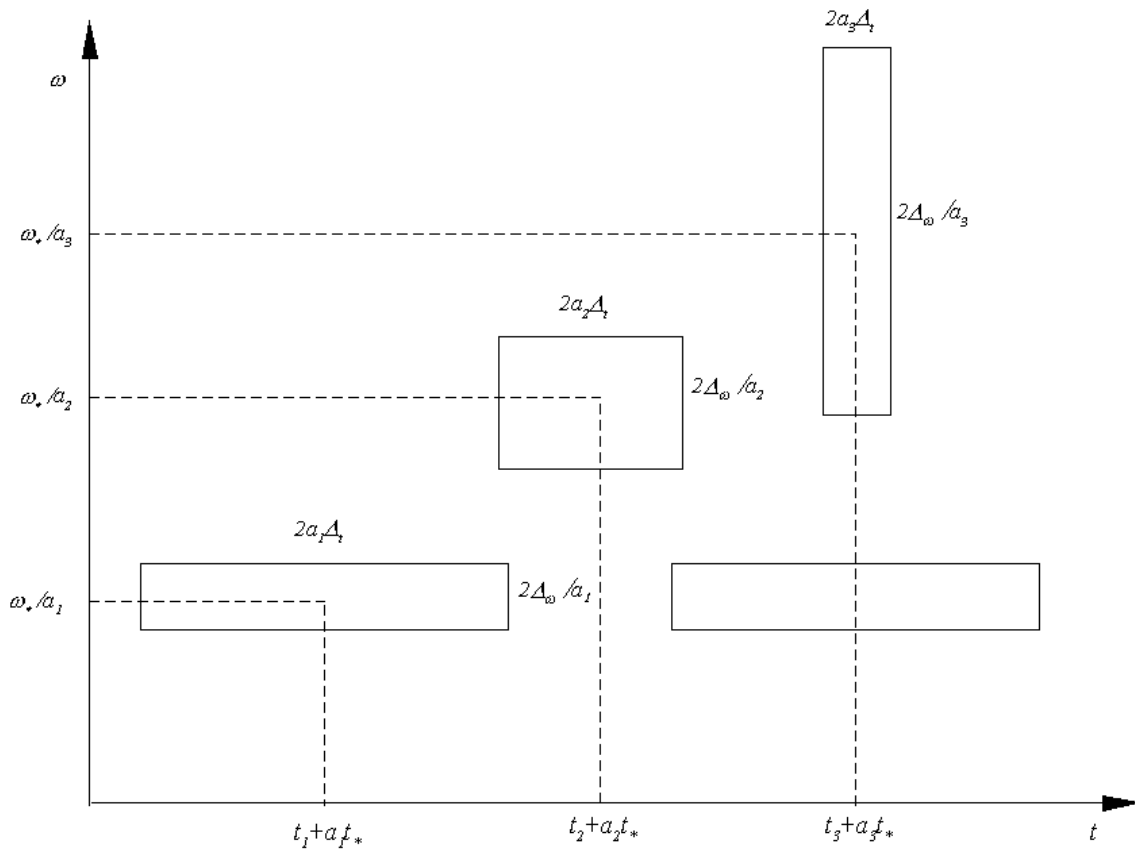
$\Delta_\omega$  – die RMS-Bandbreite der FT  $\Psi(\omega)$  der elementaren Wavelet  $\psi(t)$ .

$$\Delta_\omega = \frac{1}{\|\Psi(\omega)\|} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \omega_*)^2 \cdot |\Psi(\omega)|^2 d\omega \right\}^{1/2}$$

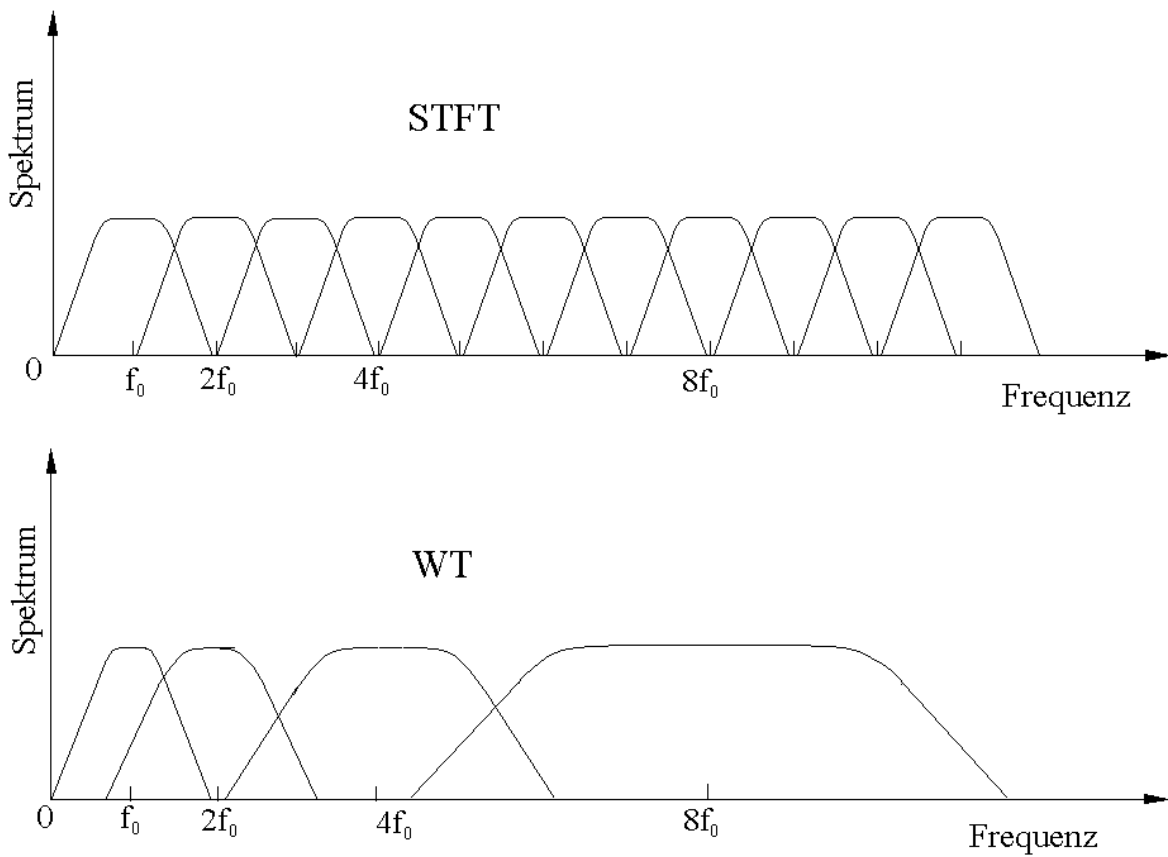
**Bild A5.1** zeigt anschaulich im Zeitbereich und Frequenzbereich die Skalierungsvorgänge der WT. Wegen des Skalierungsfaktors  $a$  und der Zeitverschiebung  $\tau$  kann die WT die örtlichen Eigenschaften des Signals beschreiben. Die Zeit-Frequenz-Auflösung der WZ lässt sich im **Bild A5.2** veranschaulichen und dabei ist das Verhältnis zwischen Skalierungsfaktoren und Frequenzen zu erkennen. **Bild A5.3** stellt im Frequenzbereich die Unterschiede zwischen den Analysefenstern der STFT und den elementaren Wavelets dar.



**Bild A5.1:** Die Skalierungsvorgänge der Wavelet-Transformation



**Bild A5.2** Zeit-Frequenz-Auflösung der Wavelet-Transformation [81]



**Bild A5.3** Unterschied des Frequenzbereiches für die STFT(oben) und die WT(unten) [88]

Die Länge des Intervalls der zeitlichen Lokalisierung beträgt  $2a \cdot \Delta_t$  (**Bild A5.2**). Für niedrige Frequenzen nimmt die Länge zu, da ein größerer Parameter  $a$  im Prinzip einer niedrigen Mittelfrequenz von Wavelets entspricht.

Die Bandbreite des Intervalls der Lokalisierung im Frequenzbereich ist  $2\Delta_\omega/a$ . Das Verhältnis zwischen der Bandbreite und der Mittelfrequenz ergibt sich:

$$\frac{\text{Bandbreite}}{\text{Mittelfrequenz}} = \frac{2\Delta_\omega}{\omega_*} \quad (\text{A5 - 11})$$

welches unabhängig vom Skalierungsfaktor  $a$  ist.

Es kann davon ausgegangen werden, dass die Wavelet-Transformation bei hohen Frequenzen ein kurzes Fenster (mit größerer Bandbreite) und im niederfrequenten Bereich ein langes Fenster (mit kleiner Bandbreite) benutzt, so dass zu jeder Frequenz eine passende Fensterlänge verwendet wird und gleichzeitig die zeitliche Lokalisierung ermittelt wird. Diese Lokalisierung in Zeit und Frequenz ist eine wesentliche Eigenschaft der Wavelet-Transformation.

### A5.1.2 Fehlen der Zeitverschiebungs-Invarianz bei Amplituden der CWT

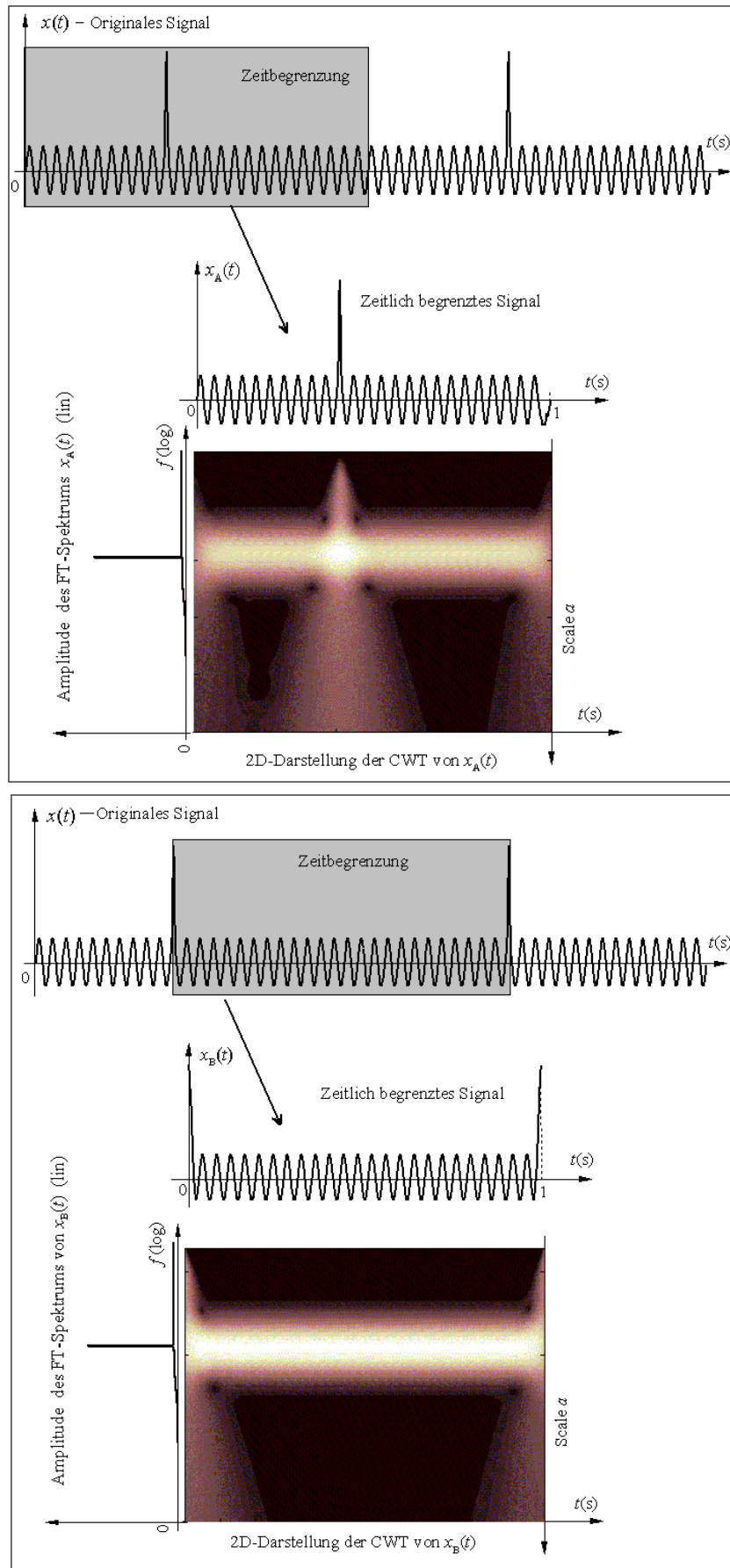
Mit  $X(f)$  als die Fourier-Transformation von  $x(t)$  erhält man die Fourier-Transformation von  $y(t) = x(t-t_0)$ :  $Y(f) = e^{j2\pi f t_0} X(f)$  (A5 - 12)

Somit ergibt sich  $|Y(f)| = |X(f)|$ . Dies erleichtert das Vergleichen untersuchter Signale im Frequenzbereich und ermöglicht ohne externe Triggerung bei der Abtastung analoger Signale die Mittelung von Periodogrammen im Frequenzbereich, um stochastische Störungen zu unterdrücken, wie z. B. bei dem Welch-Verfahren oder dem Bartlett-Verfahren.

Wenn man  $x(t)$  um die konstante Zeit  $t_0$  verschiebt, folgt mit der Substitution  $s = t - t_0$  für die CWT von  $y(t) = x(t-t_0)$ :

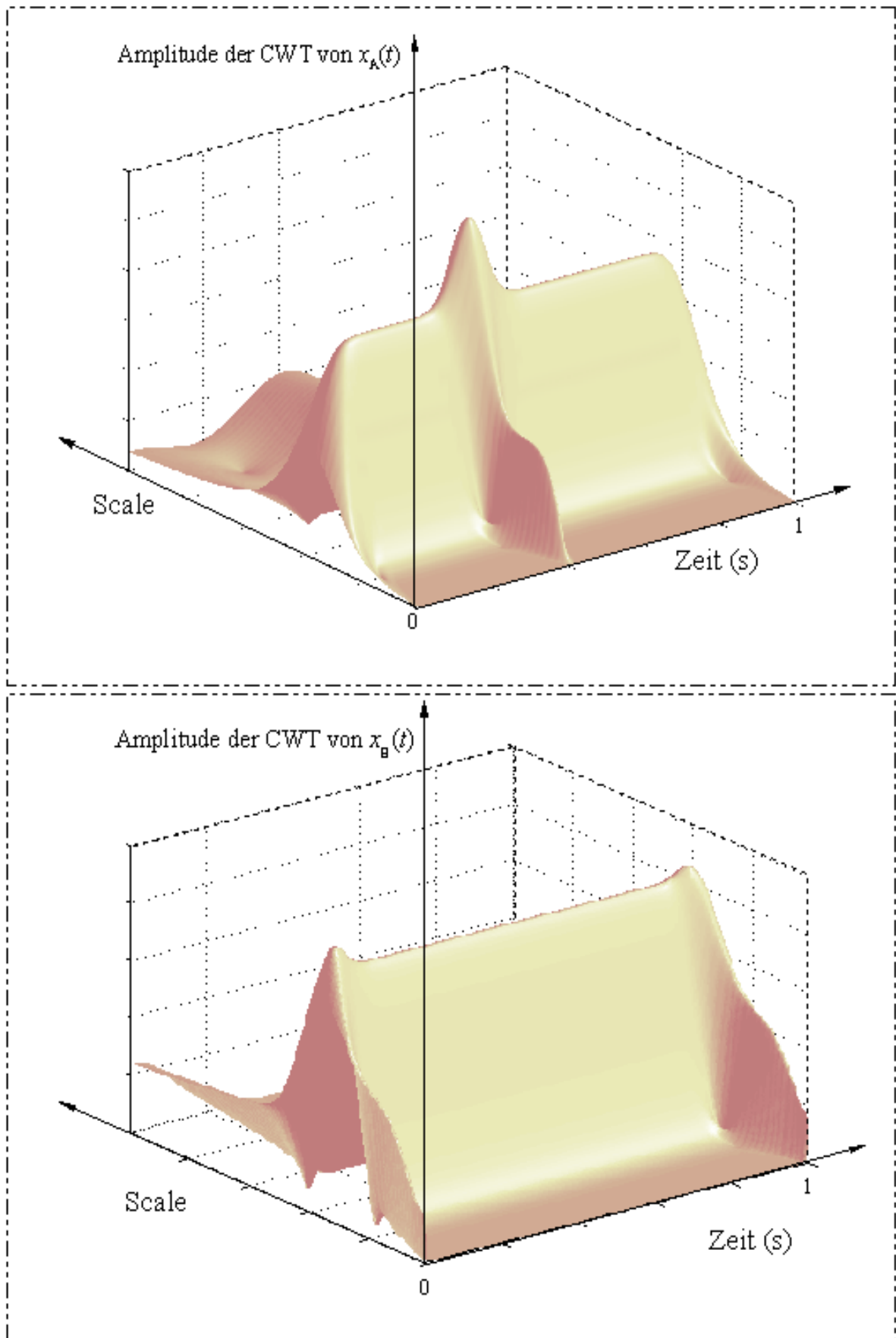
$$\begin{aligned} CWT_y(a, \tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot \psi^* \left( \frac{t-\tau}{a} \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) \cdot \psi^* \left( \frac{t-\tau}{a} \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) \cdot \psi^* \left( \frac{s+t_0-\tau}{a} \right) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) \cdot \psi^* \left( \frac{s-(\tau-t_0)}{a} \right) ds \\ &= CTW_x(a, \tau - t_0) \end{aligned} \quad (\text{A5 - 13})$$

Diese Gleichung bedeutet, dass die Amplituden der CWT die Zeitverschiebungs-Invarianz nicht besitzen. **Bild A5.4** und **A5.5** zeigen die Amplituden der CWT eines periodischen Signals bei unterschiedlichen Anfangspunkten der Zeitbegrenzung, deren zeitliche Dauer eine Periode des Signals beträgt. Die Fourier-Transformationen der beiden begrenzten Signale sind identisch, aber die Amplituden der beiden CWT zeigen deutliche Abweichungen, so dass ein direkter Vergleich nicht sinnvoll ist.



**Bild A5.4** 2D-Darstellung der Amplituden der CWT eines Signals bei unterschiedlichen Anfangspunkten der Zeitbegrenzung





**Bild A5.5** 3D-Darstellung der Amplituden der CWT von  $x_A(t)$  (oben) und  $x_B(t)$  (unten)

## A5.2 Diskrete Wavelet-Transformation (DWT)

In Analogie zur kontinuierlichen Wavelet-Transformation erhält man eine diskrete Wavelet-Transformation, indem man  $a = 2^j$  und  $b = k \cdot 2^j$  setzt [92]:

$$\{\psi_{j,n}(t)\} = \{2^{-\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^{-j} \cdot t - n)\} \quad (\text{A5 - 14})$$

Unter geeigneten Annahmen ist die Menge (A5 - 14) eine Basis von  $L^2(\mathbb{R})$  mit den folgenden Eigenschaften [92]:

- Orthogonalität:  $\langle \psi_{j_1, n_1}(t), \psi_{j_2, n_2}(t) \rangle = 0$  bei  $j_1, j_2, n_1$  und  $n_2 \in \mathbb{N}$  und  $j_1 \neq j_2, n_1 \neq n_2$ ;
- Normierung: Für alle  $j, n \in \mathbb{N}$  gilt  $\|\psi_{j,n}(t)\| = 1$ ;
- $\psi_{j,n}$  besitzt einen kompakten Definitionsbereich, d. h. die Basisfunktionen (Wavelets) sind lediglich in einem endlichen und zusammenhängenden Bereich von 0 verschieden.
- Vollständigkeit: Es gibt zu jedem  $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\varepsilon > 0$  eine natürliche Zahl  $N$  und Skalare  $a_{j,n}$  derart, dass  $\|x(t) - \sum_{j>N, n>N} a_{j,n} \cdot \psi_{j,n}(t)\| < \varepsilon$ .

Diese Wavelets werden als orthonormale Wavelets mit einem kompakten Definitionsbereich (Träger) bezeichnet.

Mit diesen Eigenschaften kann davon ausgegangen werden, dass die Wavelet-Basis eine orthogonale Zerlegung einer beliebigen Funktion in  $L^2(\mathbb{R})$  zulässt:

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_j \Omega_{j,1}, \quad (\text{A5 - 15})$$

wobei  $\Omega_{j,1}$  der durch  $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  aufgespannte Unterraum ist. Eine vollständige Beschreibung eines originalen Signals ist also aus einer direkten Summe von orthogonalen Unterräumen verfügbar. Das Index 1 in  $\Omega_{j,1}$  wird zum Unterscheiden von seinem Dualraum benutzt, der nachfolgend definiert wird. Eine Wavelet-Funktion  $\psi(t)$  ist immer mit einem Pendant – die Skalierungsfunktion  $\phi(t)$  – assoziiert. Wie die Wavelet-Funktionen bildet nach der Multiskalen-Analyse (*multiresolution analysis* – MRA) [102] die Skalierungsfunktion

$$\{\phi_{j,n}(t)\}_{j,n \in \mathbb{N}} \equiv \{2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-j} t - n)\}_{j,n \in \mathbb{N}} \quad (\text{A5 - 16})$$

ebenfalls eine Orthonormalbasis von  $L^2(\mathbb{R})$  und verwirklicht eine Verkettung von Unterräumen:

$$\Omega_{J,0} \subset \Omega_{J-1,0} \subset \dots \subset \Omega_{1,0} \subset \Omega_{0,0} \quad (\text{A5 - 17})$$

wobei  $\Omega_{j,0}$  der durch  $\{\phi_{j,n}(t)\}_{j,n \in \mathbb{N}}$  aufgespannte Unterraum ist.

Ausgehend von der MRA erhält man, dass eine Projektion eines originalen Signals  $x(t)$  auf den Unterraum  $\Omega_{j,0}$  eine Tiefpass-Operation ist. Die Projektion von  $x(t)$  auf den Unterraum  $\Omega_{j,0}$  ist also somit eine Approximation bei Skale  $a = 2^j$ :

$$A_j[n] = \langle x(t), \phi_{j,n}(t) \rangle. \quad (\text{A5 - 18})$$

Hierbei wird der Unterraum  $\Omega_{0,0}$  (Skala  $a = 2^0 = 1$ ) als der Raum vom originalen Signal  $x(t)$  definiert:  $A_0[n] = x[n]$ .

Folglich ist die Verkettung:  $\Omega_{J,0} \subset \Omega_{J-1,0} \subset \dots \subset \Omega_{1,0} \subset \Omega_{0,0}$  eigentlich eine Reihenfolge von immer größeren Approximationen von  $x(t)$ , während die Skala von 0 bis  $J$  reicht.

Die durch Wavelets und Skalierungsfunktionen aufgespannte Unterräumen sind miteinander verbunden [92]:  $\Omega_{j,0} = \Omega_{j+1,0} \oplus \Omega_{j+1,1}$  für  $j = 0, 1, \dots, J$  (A5 - 19)

Dies bedeutet, dass der Unterraum  $\Omega_{j+1,1}$  das zur Rekonstruktion von einer größeren Approximation zu einer feineren Approximation benötigte Detail enthält. Der Bestandteil von  $x(t)$  bei Skala  $a = 2^j$  ist:  $D_j[n] = \langle x(t), \psi_{j,n}(t) \rangle$ . (A5 - 20)

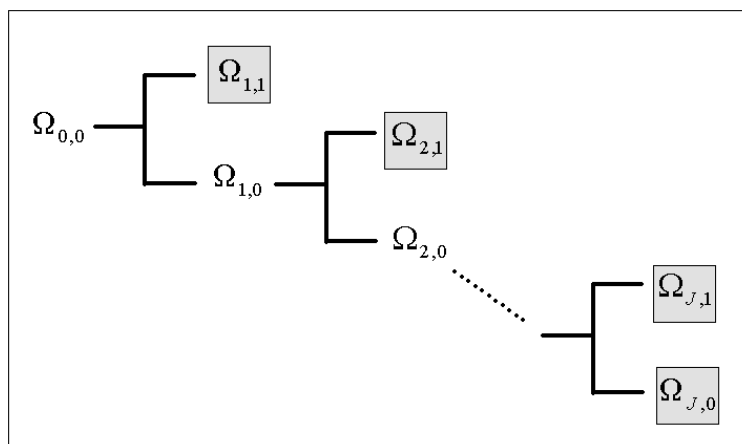
Das ist eine Bandpass-Operation. Tatsächlich sind  $D_j[n]$  die Wavelet-Transformierten bei Skala  $a = 2^j$ . Folglich lässt sich die Wavelet-Transformation in der Form betrachten, das der Raum  $\Omega_{0,0}$  (von originalen Signalen) durch eine direkte Summe von gegenseitig orthogonalen

Unterräumen darstellbar ist: 
$$\Omega_{0,0} = \left\{ \bigoplus_{j=1}^J \Omega_{j,1} \right\} \oplus \Omega_{J,0}. \quad (\text{A5 - 21})$$

Dieser Begriff lässt sich klarer im **Bild A5.6** veranschaulichen. Die Wavelet-Transformation zerlegt das Signal in die aufeinanderfolgenden Approximationssignale  $A_j[n] \in \Omega_{j,0}$  und die Detailsignale  $D_j[n] \in \Omega_{j,1}$ . Das Detailsignal enthält dabei die Feinstruktur und das Approximationssignal die Grobstruktur. Bei jeder Stufe wird das Approximationssignal wieder abgetastet und die Detailsignale (als die Wavelet-Transformierten betrachtet) werden behalten. Die Folge:

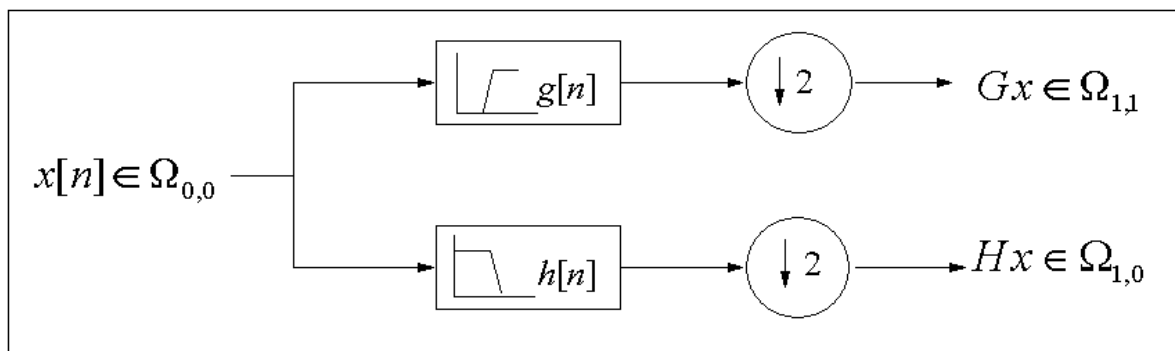
$$\{D_1[n], D_2[n], \dots, D_J[n], A_J[n]\} \quad (\text{A5 - 22})$$

heißt die **Wavelet-Transformierten** vom Signal  $x(t)$ .



**Bild A5.6** Subband-Zerlegung von  $L^2(\mathbb{R})$  durch die Wavelet-Transformation. Die gekennzeichneten Zeichen stellen die Unterräume dar, die in der Wavelet-Transformation erhalten werden.

Ausgehend von Subband-Kodierung und Filterbank-Theorie wurde eine leistungsfähige Methode zur Berechnung der Wavelet-Koeffizienten – Fast Wavelet Transform - von Mallat im Jahre 1989 vorgestellt [102]. **Bild A5.7** zeigt anschaulich eine elementare Zelle der diskreten Wavelet-Transformation. Hier ist das Filter  $G$  ( $G = \{g[n]\}_{n=0}^{L-1}$ ) ein Hochpassfilter der DWT und das Filter  $H$  ( $H = \{h[n]\}_{n=0}^{L-1}$ ) ein komplementäres Tiefpassfilter der DWT. Der Operator  $\downarrow 2$  deutet die Dezimierung durch 2 an.



**Bild A5.7** Eine elementare Zelle der diskreten Wavelet-Transformation

Für ein Signal mit  $N$  Werten  $x = \{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$  wird dies ausgedrückt durch

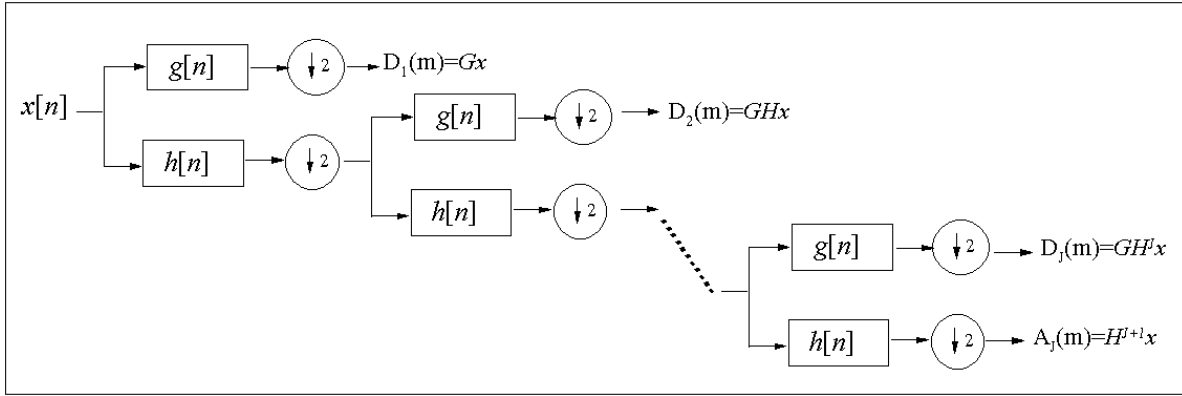
$$(Hx)_n = \sum_{k=0}^{L-1} h[k] \cdot x[2n - k] \quad (\text{A5} - 23)$$

$$(Gx)_n = \sum_{k=0}^{L-1} g[k] x[2n - k] \quad (\text{A5} - 24)$$

für  $n = 0, 1, \dots, N/2 - 1$ . Diese Gleichungen transformieren das Signal  $x = \{x[n]\}_{n=0}^{N-1}$  in zwei Unterfolgen  $Gx$  und  $Hx$  mit der Länge  $N/2$ . Die gleichen Operationen werden anschließend auf die Unterfolge  $Hx$  von dem Niederfrequenz-Band angewendet und daraus wird  $H^2x$  und  $GHx$  mit der Länge  $N/4$  berechnet. Wenn der Vorgang  $J$  mal ( $J \leq \log_2 N$ ) wiederholt wird, lässt sich die Wavelet-Zerlegung ausdrücken durch:

$$\{Gx, GHx, GH^2x, \dots, GH^{J-1}x, H^{J-1}x\} \quad (\text{A5} - 25)$$

mit der Länge  $N$ . Dies wird im **Bild A5.8** veranschaulicht.  $D_1(m)$  ( $m = 1, 2, \dots, N/2$ ) sind die Wavelet-Koeffizienten der ersten Skalierung und  $D_J(m)$  ( $m = 1, 2, \dots, N/2^J$ ) die Wavelet-Koeffizienten der  $J$ -ten Skalierung. Wenn die Filter  $H$  und  $G$  gewisse Bedingungen erfüllen, lässt sich das originale Signal  $x[n]$  aus diesen Wavelet-Koeffizienten rekonstruieren [92, 93, 102]. Die Eigenschaften der Wavelet-Transformierten sind sowohl von den zu analysierenden Signalen als auch von den Wavelet-Basis-Funktionen abhängig. Zahlreiche Wavelet-Basis-Funktionen wurden entwickelt, wie z. B. Daubechies-, Coiflet- und Symlet-Wavelets sowie biorthogonale Wavelets [108]. Die inzwischen am häufigsten in den technischen Wissenschaften angewendeten Wavelet-Basis-Funktionen sind Daubechies-Wavelets. Da die ausführliche Beschreibung der anderen Wavelet-Basis-Funktionen den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, wird nur die Daubechies-Wavelets hier kurz erläutert.

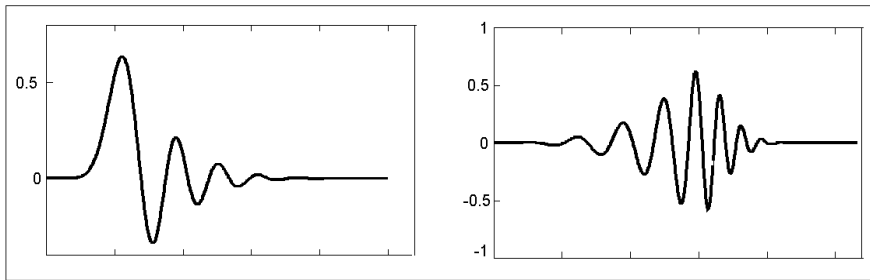


**Bild A5.8** Zerlegung eines Signals durch die Wavelet-Transformation

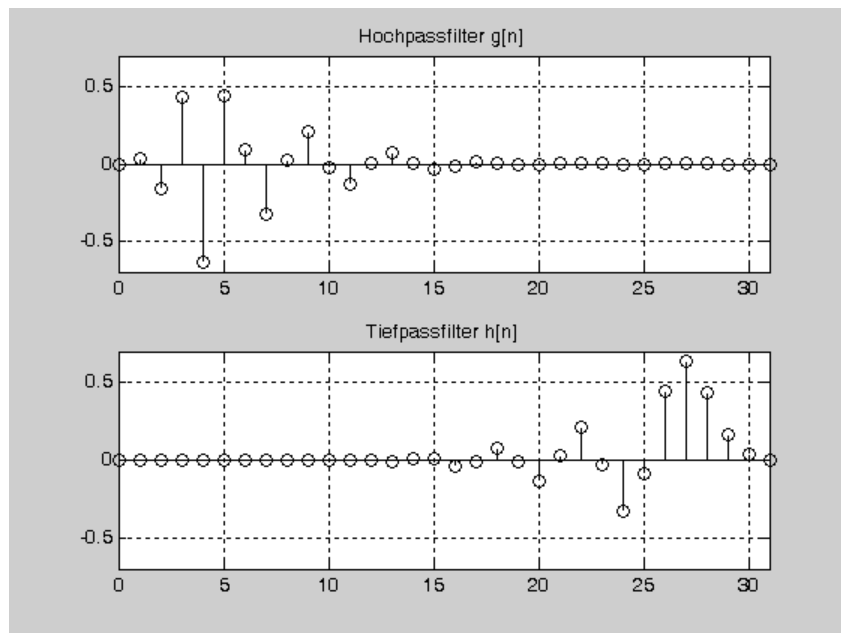
Bei Daubechies-Wavelets ist die Wavelet-Funktion  $\psi(t)$  immer mit einer Skalierungsfunktion  $\phi(t)$  verbunden, und sie stehen mit den Filtern  $h[n]$  und  $g[n]$  in Beziehung [90]:

$$h[n] = \langle \phi(t), \sqrt{2}\phi(2t-n) \rangle; \quad g[n] = \langle \psi(t), \sqrt{2}\psi(2t-n) \rangle \quad (\text{A5.26})$$

wobei die Skalierungsfunktion  $\phi(t)$  und die Mutter-Wavelet  $\psi(t)$  sich iterativ berechnen lassen [92]. Als Beispiele werden die Skalierungsfunktion und die Mutter-Wavelet von Daub32 werden in **Bild A5.9** gezeigt, und die entsprechenden Filter in **Bild A5.10** dargestellt.

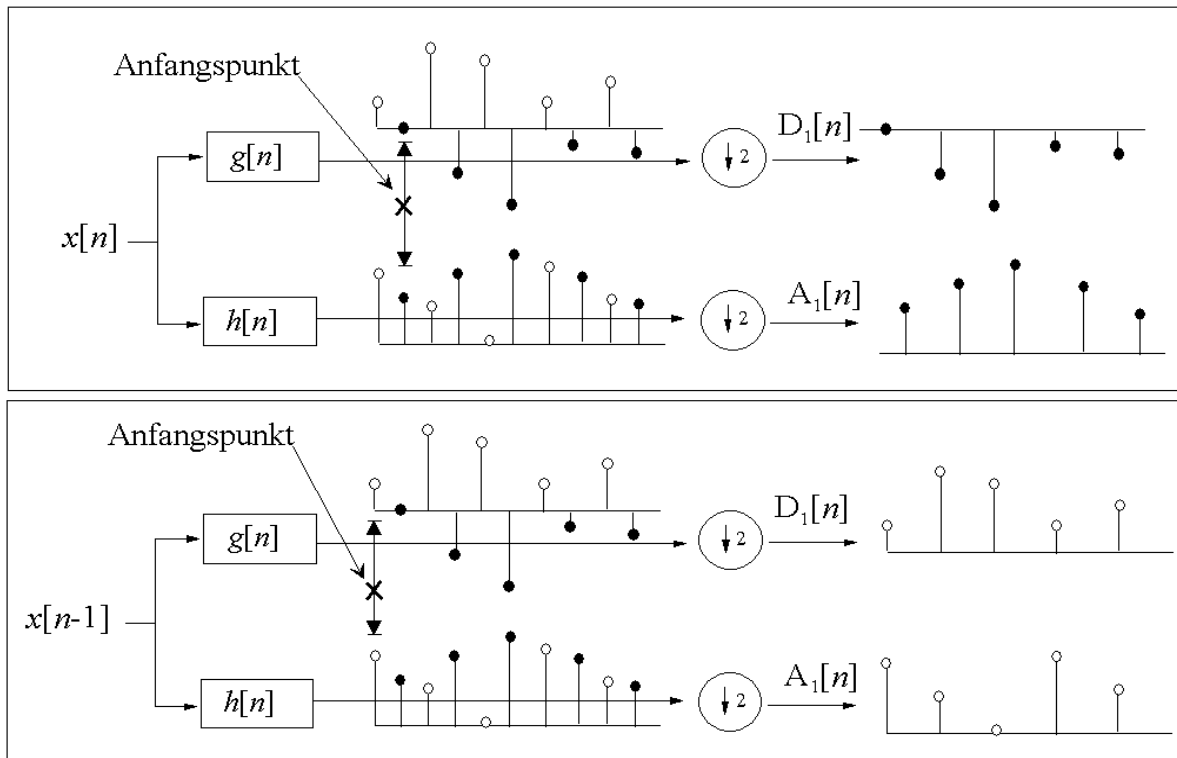


**Bild A5.9** Daubechies-Wavelet: Skalierungsfunktion  $\phi(t)$  (links) und Mutter-Wavelet  $\psi(t)$  (rechts)



**Bild A5.10** Koeffizienten des Hoch- und Tiefpassfilters von Daub32

Wie bei der CWT besitzt die diskrete Wavelet-Transformation ebenfalls keine Zeitverschiebungs-Invarianz, wie aus **Bild A5.11** ersichtlich. In **Bild A5.11** wird das originale Signal (oben) und das um einen Punkt verschobene Signal (unten) jeweils durch das Hoch- bzw. Tiefpassfilter gefiltert und anschließend durch 2 dezimiert. Es ist erkennbar, dass das Detail- und Approximationssignal beider Signale deutliche Abweichungen zeigen. Wird die Zerlegung der beiden Signale nach **Bild A5.8** weiter fortgesetzt, werden die Abweichungen in die nachfolgenden Stufen übertragen.



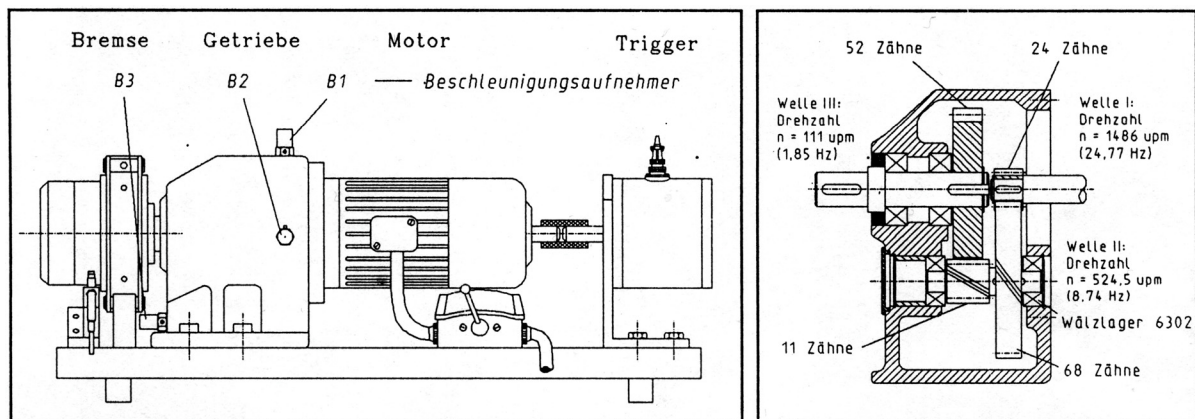
**Bild A5.11** Detail- und Approximationssignal der ersten Stufe bei der DWT. (Oben: Das originale Signal; unten: Das um einen Punkt verschobene Signal)

### A5.3 Anwendung der Wavelet-Transformation zur Fehlerfrüherkennung an Maschinen

Die Fehlerfrüherkennung an Maschinen basiert in den meisten Fällen auf der Methode des Spektrenvergleichs mechanischer Schwingungssignale (z. B. Fourier-Spektren, Cepstren, Hüllkurvenspektren oder Wavelet-Spektren). Die Referenz-Spektren werden an einer stationär in Betrieb befindlichen Maschine, die sich in einem guten Zustand befindet, über einen vorgegebenen Zeitraum gemessen. Dieser Zeitraum besitzt eine Länge von einem oder mehreren Arbeitszyklen. Eine Abweichung der Spektren, die zu einem anderen Zeitpunkt mit der gleichen Zeitlänge aufgenommen wurden, zeigt in vielen Fällen die Verschlechterung des Zustandes der Maschine an. Bei der Anwendung der auf der Fourier-Transformation basierenden schwingungsdiagnostischen Verfahren ist der Anfangspunkt der Messungen für

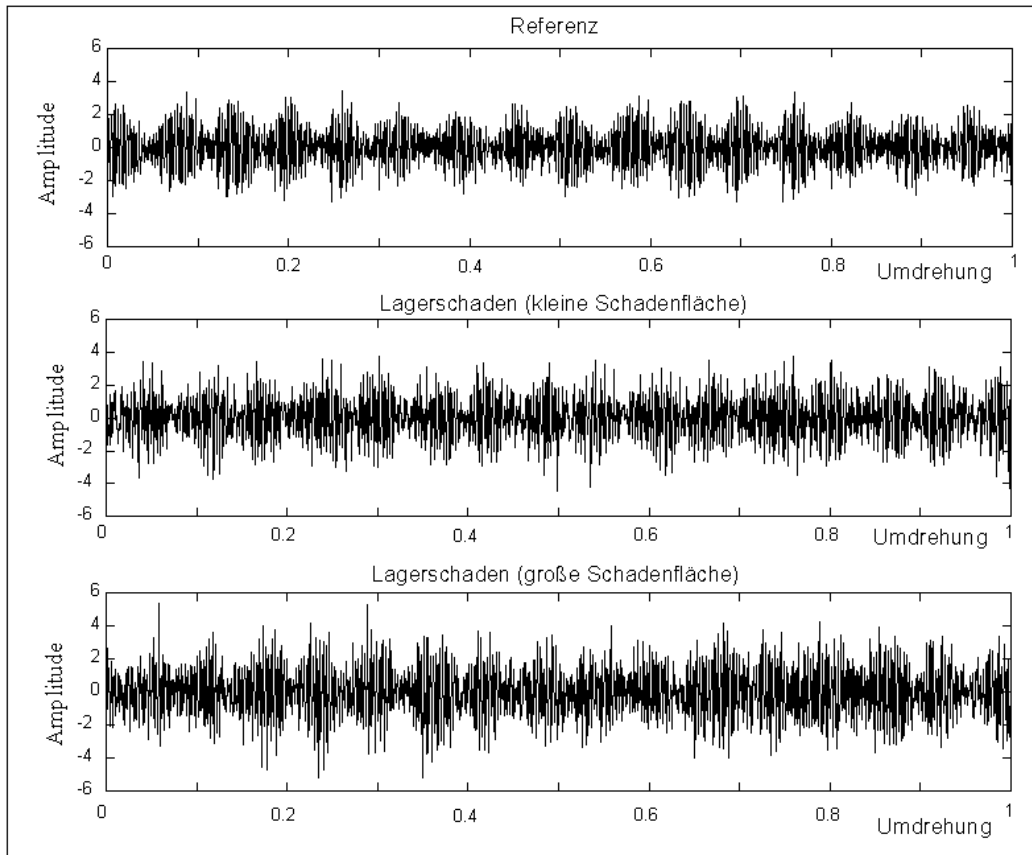
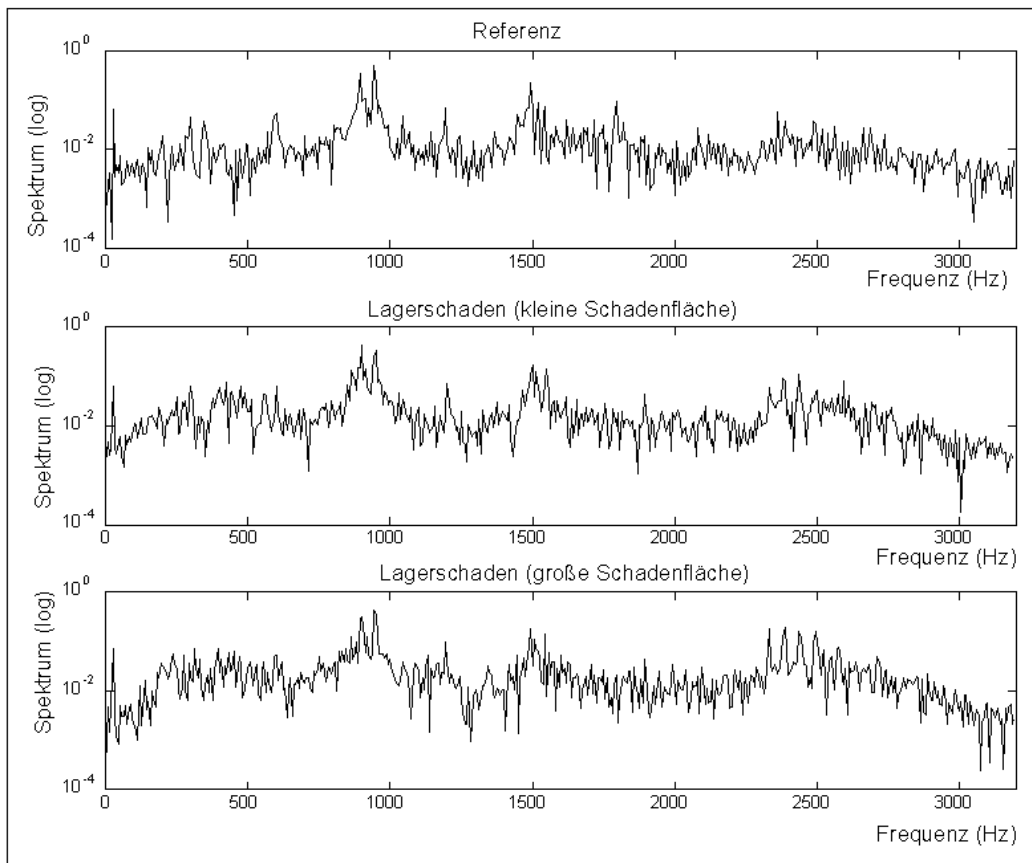
die dadurch gewonnenen Ergebnisse nicht kritisch, da die Fourier-Transformation eine Zeitverschiebungs-Invarianz aufweist. Dagegen ist es zum Vergleich der Ergebnisse der Wavelet-Transformation der Schwingungssignale, die jeweils an einer sich im guten und einer im schlechten Zustand befindenden Maschine aufgenommen werden, erforderlich, dass der Anfangspunkt der Messungen an der gleichen Stelle eines Arbeitszyklus liegt, wie z. B. der Anfangspunkt eines Arbeitszyklus. Dazu kann z. B. ein externer Trigger für die Datenerfassung eingesetzt werden [34]. Die Abtastimpulse für die Datenerfassung werden dabei mit z. B. Drehimpulsgebern erzeugt, die hierzu auf einer – oder mehreren – Getriebewelle(n) angebracht werden. Insbesondere bei mehrstufigen Getrieben ist allerdings das Anbringen der entsprechenden Geber nicht oder nur mit großem Aufwand möglich.

In [88] wurden mit einem Versuchsstand (**Bild A5.12** links) im Labor die Schwingungssignale bei Verzahnungsfehlern in einem zweistufigen Zahnradgetriebe (**Bild A5.12** rechts) durch die Wavelet-Transformation bzw. die Multiresolutionszerlegung untersucht. Dabei wurde ein Trigger zur Erzeugung externer Triggersignale eingesetzt. Die Untersuchungen zeigten, dass sich die beim Verzahnungsfehler auftretenden kurzlebigen Impulse durch die Wavelet-Analyse detektieren lassen, und die Wavelet-Analyse wesentlich brauchbarere Ergebnisse als die Fourier-Transformation zur Fehlerdiagnose bei Verzahnungsfehlern liefert.



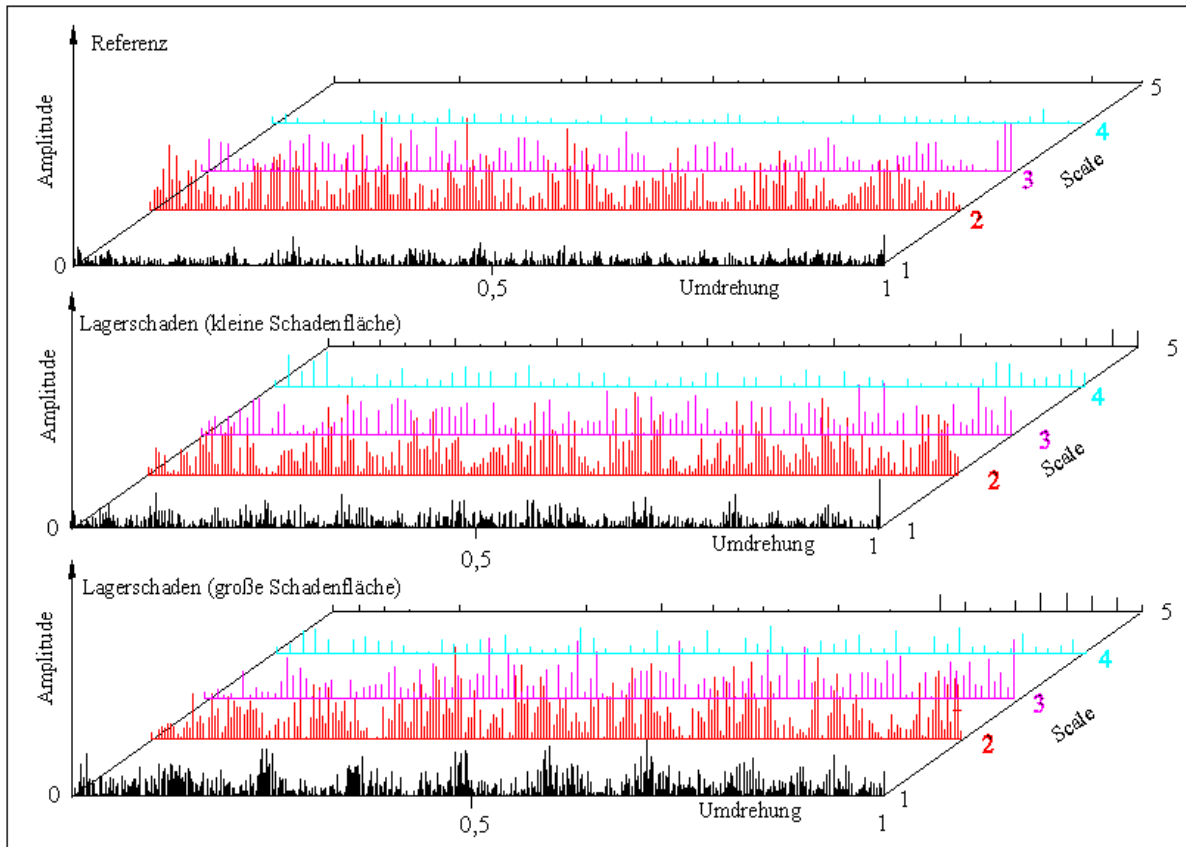
**Bild A5.12** Aufbau des Versuchsstandes und die Struktur des Getriebes

Nun werden die Schwingungssignale des Getriebes bei Lagerschäden untersucht. Dabei handelt sich um örtliche Schäden im Innenring des Wälzlagers in der Welle II (Type 6302). Auf der Lauffläche des Lagerinnenringes wurde künstliche verteilte Schäden erzeugt. Das Fehlerausmaß wurde von 15% (kleine Schadenfläche) des Umfangs auf 75% (große Schadenfläche) in zwei Stufen gesteigert. Zur Veranschaulichung sind die Schwingungssignale bei den Lagerschäden und das Referenz-Schwingungssignal (ohne Schaden) in **Bild A5.13** dargestellt. Die entsprechenden Spektren sind in **Bild A5.14** aufgetragen. Bei den Schäden ist nur eine geringe Amplitudenzunahme der Zeitsignale und der Spektren bemerkbar, da die Lagerschwingung schwach ist, und durch die anderen stärkeren Schwingungsquellen, wie z. B. Zahneingriffsschwingungen, überlagert bzw. überdeckt wird.

**Bild A5.13** Zeitsignale der Lagerschäden**Bild A5.14** Spektren der Lagerschäden



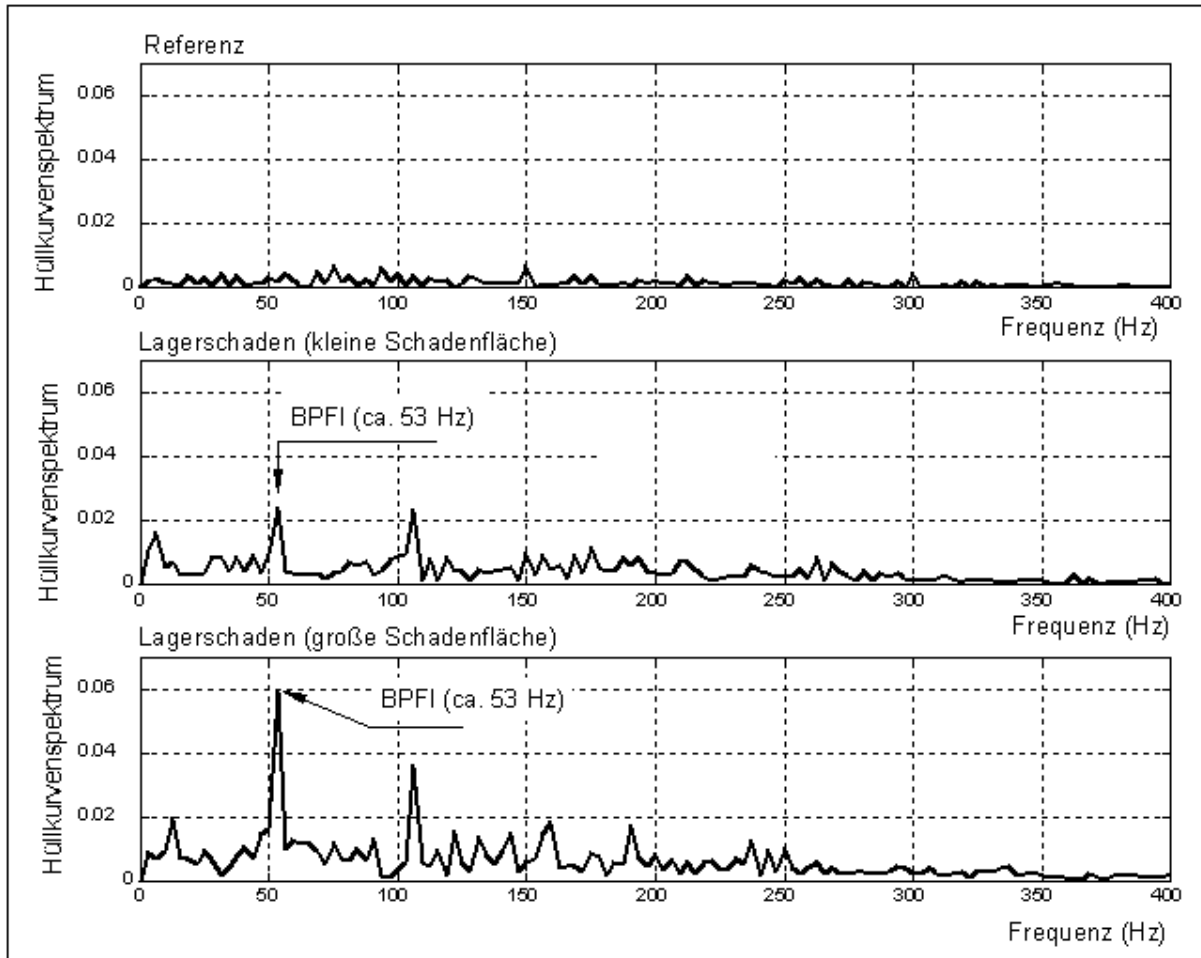
In **Bild A5.15** werden die Wavelet-Spektren der Lagerschäden gezeigt. Im Vergleich mit dem Wavelet-Spektrum des Referenz-Signals ist die Zunahme der Amplituden der Wavelet-Spektren der Schadenssignale in Scale 1 und 2 bemerkbar. Allerdings ist dies als Signatur zur Identifizierung der Lagerschäden nicht ausreichend, da die Amplituden der Wavelet-Spektren bei Verzahnungsschäden in den beiden Scales ebenfalls zunehmen, wie die Untersuchungen in [88] zeigten.



**Bild A5.15** Wavelet-Spektren der Lagerschäden

Zum Vergleich werden die Schwingungssignale des Getriebes bei Lagerschäden mit der Hüllkurvenanalyse (siehe Abschnitt 7.7) untersucht. **Bild A5.16** zeigt die Ergebnisse. Das Hüllkurvenspektrum für den Lagerschaden kleiner Schadenfläche zeigt eine Erhöhung der Amplitude bei der Frequenz von 53 Hz, die der BPFi (Überrollfrequenz des Innenringes) des Wälzlagers 6302 entspricht. Im Vergleich der Hüllkurvenspektren für die drei Messungen erkennt man die Entwicklung der Amplituden bei der BPFi des Wälzlagers und ihren Harmonischen. Somit sind Schäden in diesem Wälzlager festzustellen.

Umfangsreiche Untersuchungen wurden der Entwicklung der Waveletbasis mit Zeitverschiebungs-Invarianz gewidmet, wie z. B. in [95, 98]. Zusammenfassend ist festzustellen, dass die dabei bisher erzielten Ergebnisse eine breite praktische Anwendung dieser Waveletbasis zur Fehlerdiagnose an Maschinen fraglich erscheinen lassen.



**Bild A5.16** Hüllkurvenspektren der Lagerschäden

In [101, 103] wurde gezeigt, dass die Nulldurchgänge und der Maximalwert des Spektrum der diskreten Wavelet-Transformation eines Signals eine Invarianz aufweisen. Dies lässt sich zur Fehlerdiagnose an Maschinen nutzen. Allerdings sind die Nulldurchgänge gegenüber stochastisch auftretenden Störungen empfindlich. Eine Mittelwertbildung der Wavelet-Spektren über mehreren Messungen ist ohne externe Triggerung nicht sinnvoll.

Da die Wavelet-Transformation keine Zeitverschiebungs-Invarianz aufweist, lässt sie sich zur Fehlerdiagnose an Getrieben nur eingeschränkt anwenden. Insbesondere bei der Fehlerfrüherkennung an Wälzlagern wird dieses Verfahren bei schwachen und gestörten Signalen oder bei der Überlagerung durch andere Signale erschwert bzw. zum Teil sogar unmöglich.

## A.6 Tschebyschev- und Kaiser-Fensterfunktion

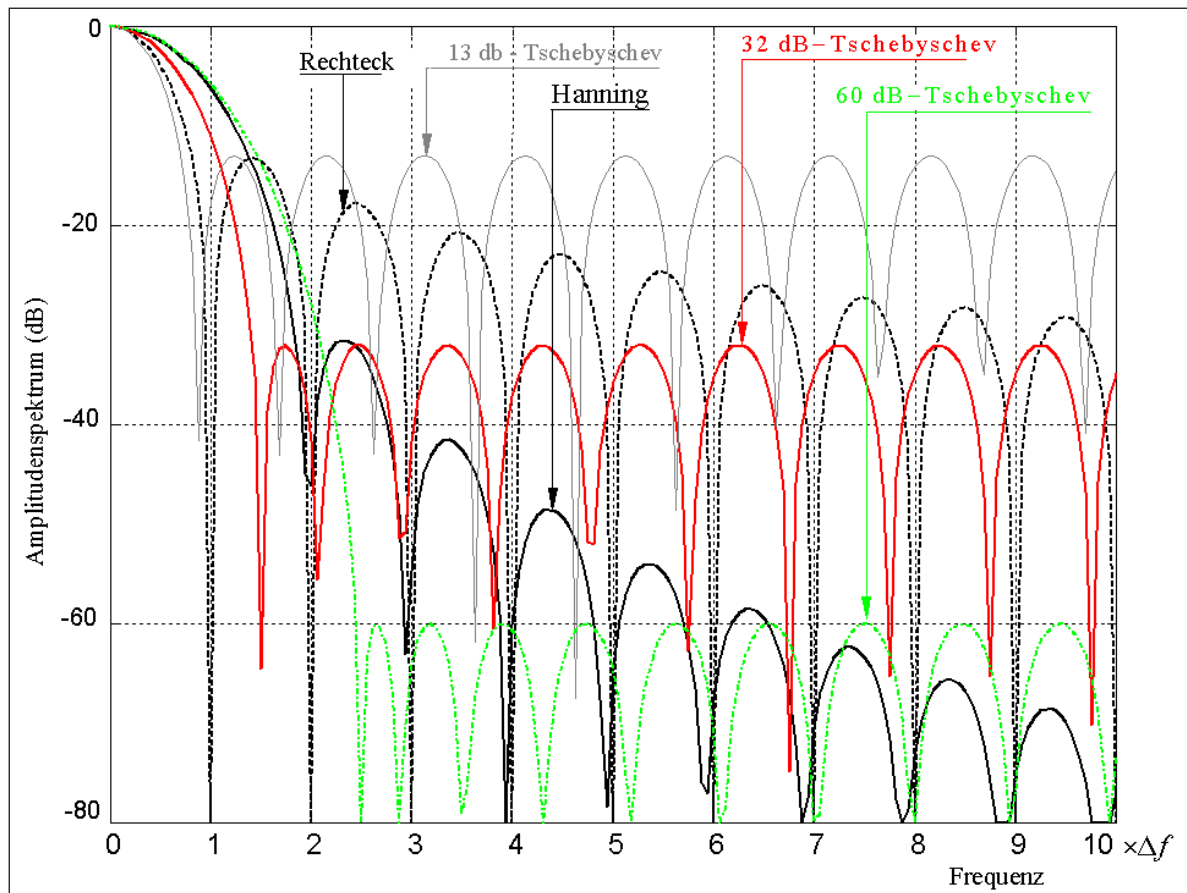
Die Tschebyschev-Fensterfunktion lässt sich nach folgender Beziehung berechnen [9]

$$w_N(i) = \frac{N-1}{N-i} \sum_{k=0}^M \binom{i-2}{k} \binom{N-i}{k+1} \cdot \beta^{k+1} \quad i \neq 1 \text{ oder } N$$

mit 
$$M = \begin{cases} i-2 & i \leq (N+1)/2 \\ N-i-1 & i \geq (N+1)/2 \end{cases} \quad \text{und } w_N(1) = w_N(N) = 1$$

$\beta$  ist der gewünschte maximale Nebenzipfelpegel in dB. Bei der Berechnung der Tschebyschev-Fensterfunktion ist darauf zu achten, dass größere Werte von  $N$  (die Länge der Fensterfunktion) entsprechend höhere Rechengenauigkeiten verlangen. **Bild A6.1** zeigt im Frequenzbereich die Tschebyschev-Fensterfunktion mit unterschiedlichen Nebenzipfelpegeln. Zu Vergleichszwecken sind dort auch die entsprechenden Fensterfunktionen für die Rechteck- und die Hanning-Fensterfunktion eingezeichnet.

**Bild A6.1** veranschaulicht, wie sich die Bandbreite des Hauptzipfels in Abhängigkeit vom Nebenzipfelpegel ändert. Demnach lässt sich der Nebenzipfelpegel bei Inkaufnahme einer entsprechenden Verbreiterung des Hauptzipfels unter jeden gewünschten Wert herunterdrücken.



**Bild A6.1** Spektrum der Tschebyschev-Fensterfunktion mit einem Nebenzipfelpegel von -13, -32 und -60 dB

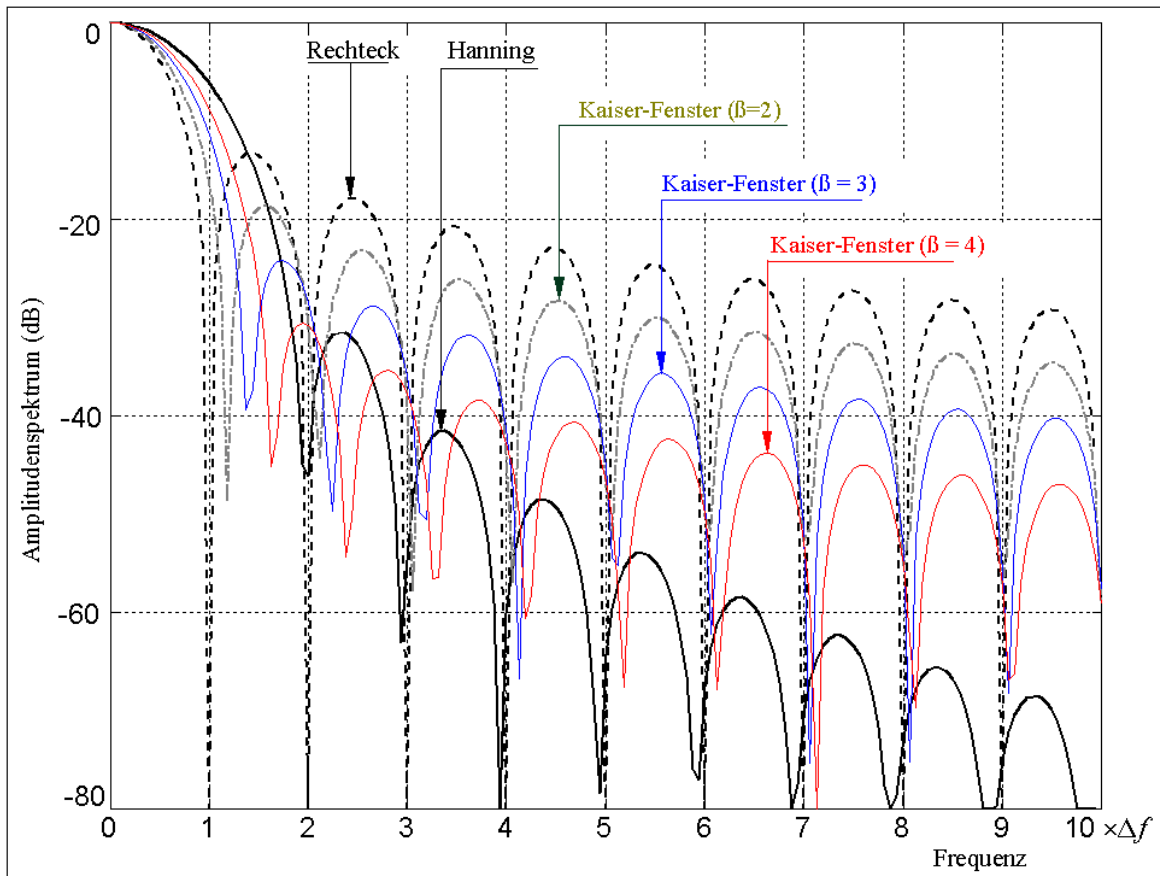
Die Kaiser-Fensterfunktion ist durch

$$w(n) = \begin{cases} I_0 \left[ \beta \sqrt{1 - \left( \frac{n}{(N-1)/2} \right)^2} \right] \cdot \frac{1}{I_0(\beta)} & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N+1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben [18], wobei  $I_0(x)$  die Bessel-Funktion der 0. Ordnung ist.

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \left[ \frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2.$$

Die Kaiser-Fensterfunktion besitzt einen wählbaren Parameter  $\beta$ , mit dem eine gegebene Abdämpfung der Nebenzipfel im Frequenzbereich erreicht kann. Mit z. B.  $\beta = 4$  hat die Kaiser-Fensterfunktion einen maximalen Nebenzipfel von etwa  $-30$  dB und die Nebenzipfel dämpfen mit  $-6$  dB ab, während sie einen schmalen Hauptzipfel als die Hanning-Fensterfunktion besitzt.



**Bild A6.2** Spektrum der Kaiser-Fensterfunktion mit  $\beta = 2, 3$  und  $4$