

# Der inklusive semileptonische Zerfall

## $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$ in effektiven Feldtheorien

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades eines  
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

vorgelegt von

**Dipl.-Phys. Heike Boos**

geboren in Malsch

genehmigt vom Fachbereich Physik  
der Universität Siegen

Siegen  
Juli 2007

Gutachter der Dissertation: Univ.-Prof. Dr. T. Mannel  
Univ.-Prof. Dr. W. Kilian

Datum der Disputation: 21. September 2007

gedruckt auf alterungsbeständigem holz- und säurefreiem Papier

# The inclusive semileptonic decay $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$ in effective field theories

## Abstract

The exact determination of the absolute values of the CKM elements  $V_{ub}$  and  $V_{cb}$  is of central importance for testing the unitarity of the CKM matrix and hence the quark-flavour sector of the Standard Model. The inclusive semileptonic decay  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  provides the most accurate determination of  $|V_{cb}|$ , where the  $\alpha_s$  corrections to the  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2$  terms in the Heavy Quark Expansion represent the major theoretical uncertainties. Values for  $|V_{ub}|$  can be extracted both from  $\bar{B} \rightarrow \pi \ell \bar{\nu}_\ell$  and  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$ . After introducing cuts in phase space to suppress the large background from  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$ , data for  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  are mainly available in the region of phase space where the decay rate is proportional to the hadronic shape function of the  $B$  meson.

In this work, a method is developed that allows to evaluate the QCD corrections of order  $\alpha_s$  to the decay  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  numerically. This is especially important for the calculation of the  $\alpha_s$  corrections to the  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2$  terms, where an analytic treatment does not look feasible due to the complexity of the occurring terms. As infrared divergences are treated in Dimensional Regularization, the formalism is gauge-invariant, so that it is particularly suitable for the calculation of the corrections proportional to the chromomagnetic operator.

By making use of the extension of Soft-Collinear Effective Theory (SCET) to describe massive collinear quarks, which is also presented in this work, the decay  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  is examined in the shape-function region. For this purpose, the power counting  $m_c \sim \sqrt{m_b \Lambda_{\text{QCD}}}$  is used for the charm-quark mass and similar cuts in phase space are introduced as for  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$ . Decay spectra are calculated to next-to-leading order in the  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$  expansion at tree level. In addition, the  $\alpha_s$  corrections to the leading order term in the  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$  expansion are evaluated. A shape-function independent relation between  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  and  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  is established, that can be used for a determination of  $|V_{ub}|$  for a given value of  $|V_{cb}|$ .

# Der inklusive semileptonische Zerfall $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$ in effektiven Feldtheorien

## Zusammenfassung

Die exakte Bestimmung der Beträge der CKM-Elemente  $V_{ub}$  und  $V_{cb}$  ist von zentraler Bedeutung, um die Unitarität der CKM-Matrix und somit den Quark-Flavour-Sektor des Standardmodells zu testen. Der inklusive semileptonische Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  liefert die genaueste Bestimmung von  $|V_{cb}|$ , wobei die  $\alpha_s$ -Korrekturen zu den  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2$ -Ausdrücken in der Heavy Quark Expansion die größten theoretischen Unsicherheiten darstellen. Werte für  $|V_{ub}|$  können sowohl aus  $\bar{B} \rightarrow \pi \ell \bar{\nu}_\ell$  als auch aus  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  gewonnen werden. Nach dem Einführen von Schnitten im Phasenraum zur Unterdrückung des großen Untergrunds aus  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  sind Daten für  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  vor allem in dem Phasenraumbereich verfügbar, in dem die Zerfallsrate proportional zur hadronischen Shapefunktion des  $B$ -Mesons ist.

In dieser Arbeit wird eine Methode entwickelt, die es erlaubt, die QCD-Strahlungskorrekturen der Ordnung  $\alpha_s$  zum Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  numerisch auszuwerten. Dies ist insbesondere wichtig für die Berechnung der  $\alpha_s$ -Korrekturen zu den  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2$ -Termen, wo eine analytische Behandlung aufgrund der Komplexität der auftretenden Ausdrücke ausgeschlossen scheint. Da Infrarot-Divergenzen in Dimensionaler Regularisierung behandelt werden, ist der Formalismus eichinvariant, so dass er sich auch zur Berechnung der Korrekturen proportional zum chromomagnetischen Operator eignet.

Unter Verwendung der ebenfalls in dieser Arbeit vorgestellten Erweiterung von Soft-Collinear Effective Theory (SCET) zur Beschreibung massiver kollinear Quarks wird der Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  in der Shapefunktions-Region behandelt. Hierzu wird die Charm-Quark-Masse als  $m_c \sim \sqrt{m_b \Lambda_{\text{QCD}}}$  gezählt und ähnliche Schnitte im Phasenraum eingeführt wie bei  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$ . Zerfallsspektren werden einerseits in nächstführender Ordnung in der  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Entwicklung auf Baumgraphenniveau sowie andererseits mit  $\alpha_s$ -Korrekturen, jedoch in führender Ordnung in der  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Entwicklung, berechnet. Hieraus wird eine von der Shapefunktion unabhängige Beziehung zwischen  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  und  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  aufgestellt, aus der bei bekanntem  $|V_{cb}|$  die Bestimmung von  $|V_{ub}|$  erfolgen kann.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik . . . . .	2
1.1.1	Der elektroschwache Sektor . . . . .	3
1.1.2	Quarkmischung und CKM-Matrix . . . . .	5
1.1.3	CP-Verletzung im Standardmodell . . . . .	6
1.1.4	CKM-Matrix und Unitaritätsdreieck . . . . .	7
1.1.5	Quantenchromodynamik . . . . .	9
1.1.6	Renormierung . . . . .	10
1.1.7	Laufende Kopplung in der QCD . . . . .	12
1.1.8	Massen- und Feldstärkerenormierung im Polschema . . . . .	15
1.2	Aufgabenstellung und Motivation . . . . .	17
1.2.1	$B$ -Mesonen . . . . .	17
1.2.2	$B$ -Physik im Experiment . . . . .	17
1.2.3	Semileptonische $B$ -Zerfälle und die Bestimmung von $V_{cb}$ und $V_{ub}$ . . .	18
1.2.4	Die Bestimmung von $V_{cb}$ aus $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$ . . . . .	20
1.2.5	Die Bestimmung von $V_{ub}$ aus inklusiven $B$ -Zerfällen . . . . .	22
1.2.6	Aufbau der Arbeit und Publikationen . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Effektive Feldtheorien</b>	<b>27</b>
2.1	Was sind effektive Feldtheorien? . . . . .	27
2.2	Fermitheorie . . . . .	29
2.3	Heavy-Quark Effective Theory . . . . .	30
2.3.1	Die effektive Lagrangedichte . . . . .	32
2.3.2	Die Entwicklung in $1/m_b$ . . . . .	33
2.4	Soft-Collinear Effective Theory für massive kollineare Quarks . . . . .	36
2.4.1	Lichtkegel-Kinematik und Skalierung mit $m_b$ . . . . .	36
2.4.2	Effektive Lagrangedichte in SCET . . . . .	39
2.4.3	Effektive Zerfallsströme in SCET . . . . .	43
2.4.4	Massenrenormierung in SCET . . . . .	45
<b>3</b>	<b>QCD-Strahlungskorrekturen zur Zerfallsrate</b>	<b>47</b>
3.1	Die Zerfallsrate . . . . .	48
3.2	Heavy Quark Expansion für den Zerfall $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$ . . . . .	50
3.3	Berechnung der Zerfallsrate auf Baumgraphenniveau . . . . .	52
3.4	QCD-Strahlungskorrekturen . . . . .	53

3.4.1	Die Berechnung der Spuren in $D$ Dimensionen . . . . .	53
3.4.2	Die Behandlung der Infrarot-Divergenzen . . . . .	54
3.4.3	Die reellen Korrekturen . . . . .	54
3.4.4	Die virtuellen Korrekturen . . . . .	56
3.5	Berechnung der QCD-Strahlungskorrekturen auf Partonniveau . . . . .	58
3.5.1	Der Phasenraum . . . . .	58
3.5.2	Die Berechnung der Schleifenintegrale für die virtuellen Korrekturen .	62
3.5.3	Die numerische Integration . . . . .	64
3.6	Numerische Ergebnisse auf Partonniveau . . . . .	65
3.7	Ausblick: QCD-Strahlungskorrekturen zu den $1/m_b^2$ -Termen . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Zerfallsspektren in SCET</b>	<b>71</b>
4.1	Faktorisierung für $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$ . . . . .	72
4.2	$\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Korrekturen zum Baumgraphenniveau . . . . .	73
4.2.1	Berechnung des hadronischen Tensors . . . . .	73
4.2.2	Differentielle Zerfallsspektren . . . . .	81
4.2.3	Vergleich mit der lokalen Entwicklung . . . . .	82
4.2.4	Effekte der führenden Shapefunktion . . . . .	85
4.3	QCD-Strahlungskorrekturen zur führenden Ordnung in $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ . . . . .	86
4.3.1	Berechnung des hadronischen Tensors . . . . .	86
4.3.2	Das $U$ -Spektrum . . . . .	92
4.3.3	Beziehung zwischen $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$ und $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$ . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>107</b>
<b>A</b>	<b>Distributionen</b>	<b>111</b>
A.1	Die Delta-Distribution . . . . .	111
A.2	Die Plus-Distribution . . . . .	112
A.3	Stern-Distributionen . . . . .	113
<b>B</b>	<b>Komplexe Analysis</b>	<b>115</b>
B.1	Imaginärteile . . . . .	115
<b>C</b>	<b>Phasenraumparametrisierungen</b>	<b>117</b>
C.1	weitere Möglichkeit zur Aufspaltung des vier-Körper-Phasenraums . . . . .	117
C.2	weitere Möglichkeit zur Darstellung des drei-Körper-Phasenraums . . . . .	120
C.3	direkte Parametrisierung des vier-Körper-Phasenraums . . . . .	120
<b>D</b>	<b>Herleitung einiger in Abschnitt 4.2.1 benötigter Ausdrücke</b>	<b>123</b>
D.1	Integraloperatoren . . . . .	123
D.2	Beitrag aus Einsetzungen der Lagrangedichte . . . . .	124
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>127</b>

# Kapitel 1

## Einführung

In der *Elementarteilchenphysik* werden die fundamentalen *Bausteine der Materie* und die Art und Weise, wie diese miteinander *wechselwirken*, erforscht.

Die moderne Elementarteilchenphysik hat ihren Anfang in der Entdeckung des *Elektrons* durch J.J. Thomson Ende des 19. Jahrhunderts. Kurz darauf erkannte man, dass das *Photon* sowohl Wellen- als auch Teilchencharakter hat. Im Laufe des 20. Jahrhunderts wurden immer neue „Elementarteilchen“ entdeckt, von denen sich manche später als aus noch kleineren Bausteinen zusammengesetzt erwiesen. Darüber hinaus stellte sich heraus, dass es auf Elementarteilchenniveau neben der *elektromagnetischen Kraft* und der *Gravitation* noch zwei weitere Wechselwirkungen gibt: die *schwache* und die *starke Kraft*.

Eines der Ziele bei der Entwicklung neuer theoretischer Modelle ist es, größere wissenschaftliche Erkenntnis durch die *Vereinheitlichung*, die Beschreibung zunächst sehr verschiedenen erscheinender Phänomene in einem gemeinsamen theoretischen Rahmen, zu erreichen. In einem theoretischen Modell werden Vorhersagen getroffen, die dann anhand experimenteller Beobachtungen überprüft werden. Stimmen Theorie und Experiment überein, wird das Modell beibehalten, ist dies nicht der Fall, ist es hiermit falsifiziert und kann verworfen werden.

Während die meisten der im täglichen Leben beobachtbaren physikalischen Phänomene durch *klassische Theorien* wie die klassische Mechanik oder die klassische Elektrodynamik beschrieben werden, muss man bei der Beschreibung sehr kleiner Objekte die *Quantenmechanik* berücksichtigen. Objekte, die sich sehr schnell bewegen, werden unter Verwendung der *Speziellen Relativitätstheorie* dargestellt. Dinge, die – wie die fundamentalen Teilchen – sowohl klein sind als auch sich schnell bewegen, werden im Rahmen einer *Quantenfeldtheorie* behandelt [1].

Die Beschreibung der elektromagnetischen Kraft erfolgt im Rahmen der *Quantenelektrodynamik* (QED). Elektromagnetische und schwache Wechselwirkung sind ins *Glashow-Salam-Weinberg(GSW)-Modell* [2, 3, 4] eingebettet. Die Beschreibung der starken Kraft geschieht mittels der *Quantenchromodynamik* (QCD) [5, 6, 7]. Tabelle 1.1 gibt eine Übersicht dieser drei, im *Standardmodell* (SM) der *Elementarteilchenphysik* enthaltenen Kräfte. Außerdem sind die sie vermittelnden Austauscheteilchen, die Materieteilchen, auf die sie wirken und die Eichtheorien, durch die sie beschrieben werden, angegeben. Die auf massive Teilchen wirkende Gravitation wird durch Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie (ART) beschrieben. Sie kann bisher nicht konsistent in einer Quantenfeldtheorie dargestellt werden.

Kraft	wirkt auf	Austauschteilchen (Masse)	Eichtheorie	
<b>stark</b>	Quarks	Gluon $g$ (0)	QCD	
<b>elektromagn.</b>	geladene Leptonen, Quarks	Photon $\gamma$ (0)	QED	SM
<b>schwach</b>	Leptonen, Quarks	$W^\pm$ (80,4 GeV) $Z^0$ (91,2 GeV)	GSW	

Tabelle 1.1: Die drei durch das Standardmodell beschriebenen fundamentalen Kräfte.

## 1.1 Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik

Ein Modell zur Beschreibung der Elementarteilchenphysik, das seit mehr als 30 Jahren existiert und mit allen bisherigen experimentellen Beobachtungen übereinstimmt, ist das *Standardmodell der Elementarteilchenphysik*. Es umfasst alle Wechselwirkungen außer der Gravitation: die *elektroschwache Wechselwirkung* im Glashow-Salam-Weinberg-Modell und die *starke Wechselwirkung*, die im Rahmen der Quantenchromodynamik beschrieben wird. In diesem Abschnitt werden die Grundzüge des Standardmodells vorgestellt. Die Darstellung folgt [8], [9] und [10].

### Symmetriegruppe

Alle fundamentalen Wechselwirkungen werden im Standardmodell aus der Forderung nach *lokaler Eichinvarianz* hergeleitet. Das Standardmodell ist eine Eichtheorie, der die Symmetriegruppe

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_W \otimes U(1)_Y \tag{1.1}$$

zugrunde liegt. Die Eichtransformationen werden von den Gell-Mann-Matrizen  $T^a = \frac{1}{2}\lambda^a$  ( $a = 1, \dots, 8$ ), den Pauli-Matrizen  $I_i = \frac{1}{2}\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) und der schwachen Hyperladung  $Y$  generiert. Die Forderung nach lokaler Eichinvarianz, d.h. Symmetrie unter ortsabhängigen Eichtransformationen, erzwingt die Existenz je eines *masselosen Eichbosons* pro Generator. Die acht Gluonen  $A_\mu^a$  sind die Eichbosonen der QCD, deren Symmetriegruppe die  $SU(3)_C$  ist. Das Gruppenprodukt  $SU(2)_W \otimes U(1)_Y$  ist die Symmetriegruppe des GSW-Modells, die zugehörigen Eichbosonen sind  $W_\mu^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) und  $B_\mu$ .

Im Standardmodell werden die Effekte der elektromagnetischen, der schwachen und der starken Wechselwirkung in einem gemeinsamen theoretischen Rahmen beschrieben. Die Darstellung geschieht allerdings nicht durch eine einzige Symmetriegruppe mit nur einer Kopplungskonstante, wie das bei großen vereinheitlichten Theorien (Grand Unified Theories (GUT)) der Fall ist, sondern durch ein Gruppenprodukt, wobei jeder Gruppe eine Kopplungskonstante zugeordnet ist. Darüber hinaus ist noch keine Theorie etabliert worden, die das Standardmodell und die durch Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie beschriebene Gravitation auf einheitliche Weise kombiniert.



### 1.1.1 Der elektroschwache Sektor

In diesem Abschnitt sollen einige wichtige Aspekte des elektroschwachen Sektors des Standardmodells, des Glashow-Salam-Weinberg-Modells, näher beleuchtet werden.

#### Higgsfeld und spontane Symmetriebrechung

Experimentell findet man massive  $W$ - und  $Z$ -Bosonen, nur das Photon als Austauscheteilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung ist masselos. Massenterme in den Bewegungsgleichungen würden jedoch die Eichsymmetrien zerstören. Deshalb führt man die Massen auf indirekte Weise, über den *Higgs-Mechanismus* [11, 12], ein. Der Higgs-Mechanismus bewirkt eine *spontane Brechung* der  $SU(2)_W \otimes U(1)_Y$ -Symmetrie zu einer  $U(1)$ -Symmetrie, welche als Eichgruppe der QED identifiziert wird. Dazu führt man ein weiteres Feld, das *skalare Higgsfeld*

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

ein, das zwei komplexe oder äquivalent vier reelle Komponenten enthält. Es transformiert als Dublett unter  $SU(2)_W$  und trägt die schwache Hyperladung  $Y = 1$ . Daher wechselwirkt es mit den Eichbosonen der elektroschwachen Wechselwirkung und den Fermionen. Das Higgsfeld nimmt einen von Null verschiedenen Vakuumerwartungswert

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

an. Dies führt zur spontanen Brechung der  $SU(2)_W \otimes U(1)_Y$ -Symmetrie. Die Bewegungsgleichungen der Eichbosonen und der Fermionen, die an das Higgsfeld koppeln, erhalten durch dessen Vakuumerwartungswert einen zusätzlichen Term, der diesen Teilchen eine Masse verleiht.

Das Photonfeld  $A_\mu$  und die Eichfelder der schwachen Wechselwirkung  $W_\mu^\pm$  und  $Z_\mu$  sind die Massen-Eigenzustände der Eichboson-Massenmatrix.

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp W_\mu^2); \quad M_W = \frac{v}{2}g \quad (1.4)$$

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(gW_\mu^3 - g'B_\mu); \quad M_Z = \frac{v}{2}\sqrt{g^2 + g'^2} \quad (1.5)$$

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(g'W_\mu^3 + gB_\mu); \quad M_A = 0 \quad (1.6)$$

Hierbei ist  $g$  die Eichkopplung der  $SU(2)_W$ ,  $g'$  die der  $U(1)_Y$ . Das masselose Eichboson  $A_\mu$  koppelt an den Eichgenerator  $Q$ , dessen Zusammenhang mit der schwachen Hyperladung  $Y$  und der dritten Komponente des schwachen Isospins durch die Gell-Mann-Nishijima-Beziehung

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad (1.7)$$

1	2	3	$I_3$	$Y$	$Q$
<b>Leptonen</b>					
$\begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu,L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau,L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	1/2	-1	0
$e_R$	$\mu_R$	$\tau_R$	-1/2	-1	-1
			0	-2	-1
<b>Quarks</b>					
$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	1/2	1/3	2/3
$u_R$	$c_R$	$t_R$	-1/2	1/3	-1/3
$d_R$	$s_R$	$b_R$	0	4/3	2/3
			0	-2/3	-1/3

Tabelle 1.2: Die drei Fermion-Generationen des Standardmodells.

gegeben ist.  $Q$  beschreibt die elektrische Ladung eines Teilchens.  $I_3$  und  $Y$  geben jeweils an, wie ein Teilchen unter  $SU(2)_W$  bzw.  $U(1)_Y$  transformiert. Daher sind diese Quantenzahlen in Tabelle 1.2, der Übersicht über die Fermionen, mit angegeben.

## Fermionen

Das Standardmodell beinhaltet 12 fundamentale *Fermionen*. Diese kann man in zwei Gruppen unterteilen: die *Quarks* und die *Leptonen*. Im Gegensatz zu den Leptonen nehmen die Quarks an der starken Wechselwirkung teil, da sie eine Farbladung tragen. Die Fermionen können in drei Generationen eingeteilt werden. Sich entsprechende Teilchen in den verschiedenen Generationen haben die gleichen Quantenzahlen, aber unterschiedliche Massen. Die Masse der Fermionen nimmt von der ersten zur dritten Generation zu. Außerdem können die Fermionen in ihre rechts- und linkshändigen Anteile zerlegt werden.  $\psi_{R/L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)\psi$  kennzeichnet ihre *Chiralität*. Für ein masseloses Teilchen ist die Chiralität gleich der Helizität, also der Projektion des Spins auf die Bewegungsrichtung des Teilchens, daher die Bezeichnungen *rechtshändig* und *linkshändig*. Die linkshändigen Fermionen transformieren als  $SU(2)_W$ -Dubletts, während die rechtshändigen Fermionen  $SU(2)_W$ -Singulets sind. Daher koppeln die rechtshändigen Fermionen nicht an die  $W$ -Bosonen. Der geladene schwache Strom ist somit linkshändig.

Im Standardmodell gibt es keine rechtshändigen Neutrinos, da die Neutrinos als masselos angenommen werden. In den letzten Jahren hat sich erwiesen, dass die Neutrinos doch eine kleine Masse haben. Entsprechende Erweiterungen des Standardmodells existieren bereits, sind aber für diese Arbeit nicht relevant. Tabelle 1.2 gibt eine Übersicht über die drei Fermion-Generationen des Standardmodells und die den einzelnen Fermionen zugeordneten elektroschwachen Quantenzahlen.

### 1.1.2 Quarkmischung und CKM-Matrix

*Fermionmassen* entstehen durch  $SU(2)_W \otimes U(1)_Y$ -invariante *Yukawa-Kopplungen* der Fermionen an das Higgs-Dublett.

Die Lagrangedichte enthält als Massenterm für die Leptonen folgenden Ausdruck:

$$\mathcal{L}_{\text{Yuk}} = - \sum_{A,B=1}^3 G_{AB} (\bar{L}_A \Phi) R_B + \text{h. c.} \quad (1.8)$$

Dabei sind

$$R_{1,2,3} = e_R, \mu_R, \tau_R; \quad L_{1,2,3} = \begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu,L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau,L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$$

die rechts- bzw. linkshändigen Komponenten der Leptonfelder.  $G_{AB}$  ist eine  $3 \times 3$ -Matrix, ihre Elemente beschreiben die Kopplung zwischen einem linkshändigen Lepton der Generation  $A$  und einem rechtshändigen Lepton der Generation  $B$ . Das Higgs-Dublett hat in unitärer Eichung folgende Gestalt:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H) \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Hiermit ergibt sich in der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{Yuk}} = - \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H)(\bar{e}_L, \bar{\mu}_L, \bar{\tau}_L) \begin{pmatrix} G_{ee} & G_{e\mu} & G_{e\tau} \\ G_{\mu e} & G_{\mu\mu} & G_{\mu\tau} \\ G_{\tau e} & G_{\tau\mu} & G_{\tau\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} + \text{h. c.} \quad (1.10)$$

Die Matrix  $G$ , wird durch eine bi-unitäre Transformation diagonalisiert, d.h. man führt einen Basiswechsel durch, so dass jedes Lepton durch die Yukawa-Wechselwirkung nur noch mit sich selbst wechselwirkt. Die kinetischen Terme der Leptonen in der Lagrangedichte sind invariant unter diesem Basiswechsel. In der schwachen Wechselwirkung sind somit nur Übergänge innerhalb einer Generation, also Leptonzahl-erhaltende Übergänge möglich.

Im Gegensatz zu den Leptonen, wo das geladene Lepton massiv, das Lepton-Neutrino hingegen masselos ist, sind sowohl die oberen als auch die unteren Einträge des Quark-Dubletts entsprechenden Quarks, die „uptype“- und die „downtype“-Quarks, massiv. Daher muss neben dem (1.8) entsprechenden Massenterm für die downtype-Quarks auch ein Massenterm für die uptype-Quarks eingeführt werden, so dass sich die Massenterme für die Quarks insgesamt aus

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yuk}} = & - \sum_{A,B=1}^3 G_{AB} (\bar{L}_A \Phi) R_B^{(d)} + \text{h. c.} \\ & - \sum_{A,B=1}^3 G'_{AB} (\bar{L}_A \tilde{\Phi}) R_B^{(u)} + \text{h. c.} \end{aligned} \quad (1.11)$$

ergeben. Dabei sind

$$R_{1,2,3}^{(d)} = d_R, s_R, b_R; \quad R_{1,2,3}^{(u)} = u_R, c_R, t_R; \quad L_{1,2,3} = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$$

die rechts- bzw. linkshändigen Komponenten der Quarkfelder und  $\tilde{\Phi} = i\sigma_2\Phi^*$  das ladungskonjugierte Higgs-Dublett. In unitärer Eichung gilt:

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Die Matrizen  $G$  und  $G'$  müssen jeweils durch eine bi-unitäre Transformation diagonalisiert werden, um die Massen-Eigenzustände und Massen-Eigenwerte zu erhalten. Diese – für die up-type- und die down-type-Quarks verschiedenen – Basiswechsel müssen auch in den kinetischen Termen für die Quarks durchgeführt werden. Der elektromagnetische Strom und der neutrale schwache Strom sind invariant unter dieser Transformation, während im geladenen schwachen Strom, der durch die  $W$ -Bosonen vermittelt wird, die Übergänge  $u_L \leftrightarrow d'_L$ ,  $c_L \leftrightarrow s'_L$  und  $t_L \leftrightarrow b'_L$  möglich sind. Hierbei ist der Zusammenhang zwischen den *elektroschwachen Eigenzuständen* ( $d', s', b'$ ) der down-type-Quarks und ihren *Massen-Eigenzuständen* ( $d, s, b$ ) durch die *Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)-Matrix* [13, 14] gegeben.

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Sie ist unitär und enthält vier physikalische Parameter, die sich nicht durch Umdefinitionen der Quarkfelder absorbieren lassen. Dies sind drei reelle Mischungswinkel und eine Phase.

### 1.1.3 CP-Verletzung im Standardmodell

Da das Standardmodell eine hermitesche und Lorentz-invariante lokale Quantenfeldtheorie ist, ist es invariant unter der kombinierten Anwendung der *diskreten Symmetrietransformationen* CPT. Dabei ist T der *Zeitumkehr*-Operator. Unter der *Ladungskonjugation* C werden Teilchen und Antiteilchen ausgetauscht. Die *Parität* P, also die Spiegelung am Ursprung des Koordinatensystems, führt ein linkshändiges in ein rechtshändiges Teilchen über. Bei gleichzeitiger Ausführung beider Operationen CP geht ein linkshändiges Teilchen in ein rechtshändiges Antiteilchen über.

1957 stellte sich im Experiment von Wu [15] heraus, dass die *schwache Wechselwirkung* P und somit – unter der Annahme von CP-Erhaltung – auch C verletzt. Alle Neutrinos sind linkshändig und alle Antineutrinos sind rechtshändig, man spricht von *maximaler Paritätsverletzung*. CP-Verletzung wurde erstmals 1964 durch Christenson et al. [16] im Zerfall  $K_L \rightarrow \pi^+\pi^-$  beobachtet. Im Gegensatz zur Paritätsverletzung ist die CP-Verletzung ein kleiner Effekt. Nach der Entdeckung von Mesonen, die Charm- oder Bottom-Quarks enthalten,

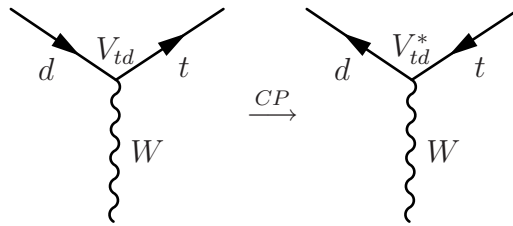


Abbildung 1.1: Der  $d \rightarrow t W$ -Vertex und der entsprechende CP-konjugierte Vertex.

und der Entwicklung des Standardmodells mit seinen drei Fermion-Generationen war klar, dass CP-Verletzung prinzipiell auch im  $D$ -System und im  $B$ -System existieren müsste. Im  $B$ -System konnte sie erst 2001 durch Messungen an den asymmetrischen  $B$ -Fabriken BABAR und Belle etabliert werden [17, 18]. Die vom Standardmodell als sehr gering vorausgesagte CP-Verletzung im  $D$ -System ist bis heute unbeobachtet. Mit CP muss auch T verletzt sein, damit CPT erhalten bleibt.

Im Standardmodell wird CP-Verletzung durch die Phase in der CKM-Matrix beschrieben. Abbildung 1.1 zeigt den  $d \rightarrow t W$ -Vertex und den entsprechenden CP-konjugierten Vertex. Der entscheidende Punkt hierbei ist, dass diese Prozesse durch die Ersetzung  $V_{td} \xrightarrow{CP} V_{td}^*$  miteinander verknüpft sind.  $V_{td}$  ist komplex, es enthält eine Phase, die nicht durch Umdefinitionen der Quarkfelder verschwindet. Wäre  $V_{td}$  reell, so würde  $V_{td} = V_{td}^*$  gelten. Das CP-konjugierte System würde sich dann exakt gleich wie das ursprüngliche System verhalten.

### 1.1.4 CKM-Matrix und Unitaritätsdreieck

Die Phasenstruktur der in (1.13) definierten CKM-Matrix ist nicht eindeutig. Entsprechend sind verschiedene Parametrisierungen dieser Matrix möglich.

In *Standard-Parametrisierung* nimmt die CKM-Matrix folgende Form an [19]

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

mit  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$  und  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ . An dieser Darstellung kann man sehr gut die drei Winkel und die komplexe Phase erkennen.

Wenn man einen neuen Satz von Parametern  $\lambda$ ,  $A$ ,  $\rho$ ,  $\eta$  einführt, die mit den Parametern der Standard-Parametrisierung über

$$s_{12} := \lambda = 0,222, \quad s_{23} := A\lambda^2, \quad s_{13}e^{-i\delta_{13}} := A\lambda^3(\rho + i\eta) \quad (1.15)$$

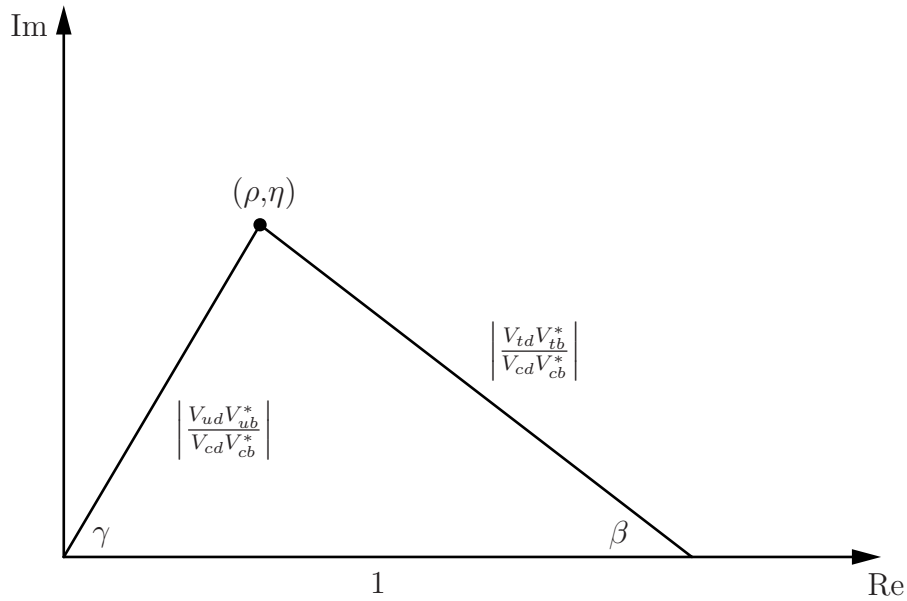


Abbildung 1.2: Das Unitaritätsdreieck.

zusammenhängen, und im kleinen Parameter  $\lambda$  entwickelt, gelangt man zur *Wolfenstein-Parametrisierung* [20]:

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4) \quad (1.16)$$

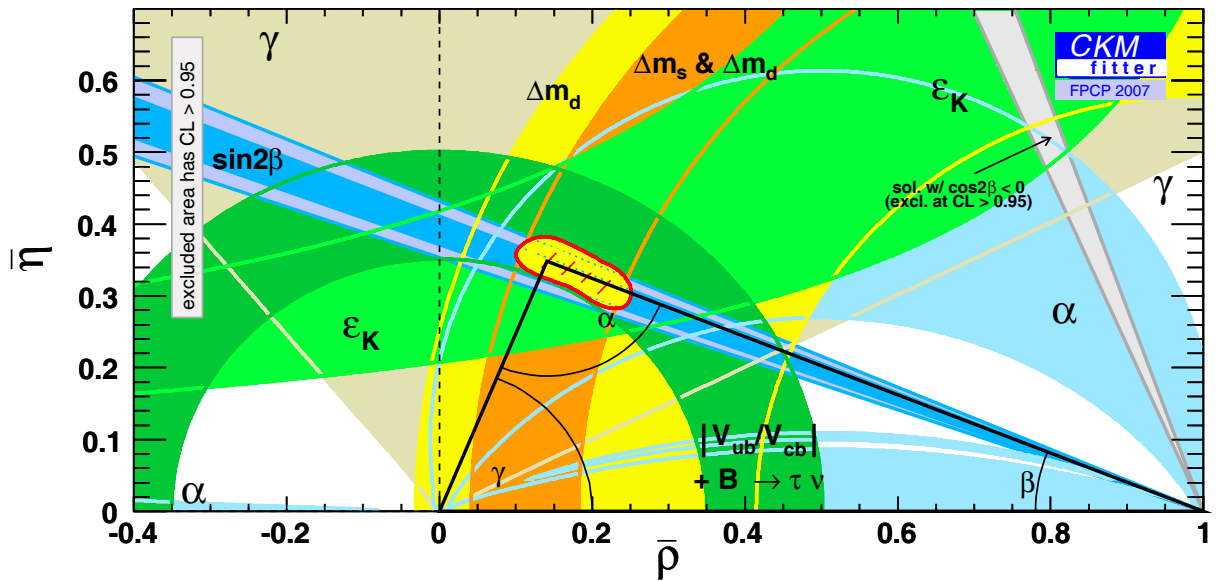
An dieser Darstellung erkennt man sehr gut die Größenverhältnisse der einzelnen Einträge zueinander, dadurch ist sie für phänomenologische Betrachtungen sehr nützlich. Ist eine größere Genauigkeit nötig, kann man zu höherer Ordnung in  $\lambda$  entwickeln und kommt so zur *verallgemeinerten Wolfenstein-Parametrisierung* [21].

Aus der *Unitarität* der CKM-Matrix folgen 12 Relationen, von denen die folgende, bei der alle Summanden von  $\mathcal{O}(\lambda^3)$  sind, für uns von Interesse ist:

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0. \quad (1.17)$$

Diese Gleichung lässt sich in der komplexen Ebene als ein Dreieck, das sogenannte *Unitaritätsdreieck* darstellen. Die Winkel  $\beta$  und  $\gamma$  des in Abbildung 1.2 gezeigten Unitaritätsdreiecks entsprechen in der Wolfenstein-Parametrisierung gerade den komplexen Phasen in  $V_{ub}$  und  $V_{td}$

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}|e^{-i\gamma} \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}|e^{-i\beta} & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$


 Abbildung 1.3: Fit für das Unitaritätsdreieck in der  $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$ -Ebene.

und die Spitze des Unitaritätsdreiecks ist bei  $(\rho, \eta)$ . Bei Verwendung der verallgemeinerten Wolfenstein-Parametrisierung liegt die Spitze des Unitaritätsdreiecks anstelle bei  $(\rho, \eta)$  bei  $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$  mit  $\bar{\rho} = \rho(1 - \lambda^2/2)$  und  $\bar{\eta} = \eta(1 - \lambda^2/2)$ . Abbildung 1.3 zeigt einen Fit des Unitaritätsdreiecks aus unabhängig gemessenen Ergebnissen für die einzelnen CKM-Elemente [22]. Der von [23] unter Verwendung einer anderen Wahrscheinlichkeitsdefinition durchgeführte Fit liefert ähnliche Ergebnisse als der hier gezeigte. Die aus den Messungen der einzelnen Parameter erlaubten Bereiche für die Spitze des Unitaritätsdreiecks sind in 1.3 in verschiedenen Farben eingezeichnet. Aus allen Messungen gemeinsam ergibt sich ein erlaubter Bereich für die Spitze des Unitaritätsdreiecks. Dies bestätigt das Standardmodell im Rahmen der bisher erreichten experimentellen und theoretischen Genauigkeit. Eine Erhöhung der Präzision liefert einen Test der Unitarität der CKM-Matrix und somit des Quark-Flavour-Sektors des Standardmodells.

### 1.1.5 Quantenchromodynamik

Das Standardmodell beinhaltet neben der elektroschwachen auch die starke Wechselwirkung, die durch die Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben wird. Die starke Wechselwirkung ist verantwortlich für die Bindung der Quarks zu Nucleonen und die Bindung der Nucleonen zu Atomkernen. Die Symmetriegruppe der QCD ist die

$$SU(3)_C. \quad (1.19)$$

Jedes Quark trägt eine von drei Farbladungen. Quarks transformieren daher als Triplets unter  $SU(3)_C$ :

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad q = u, d, s, c, b, t. \quad (1.20)$$

Leptonen nehmen nicht an der starken Wechselwirkung teil, da sie keine Farbladung tragen. Die  $SU(3)$ -Gruppe hat acht Generatoren  $T^a = \frac{1}{2}\lambda^a$ ,  $a = 1, \dots, 8$ . Die acht Gluonen  $A_\mu^a$  sind die masselosen Eichbosonen der QCD. Sie treten in der kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s A_\mu = \partial_\mu - ig_s T^a A_\mu^a \quad (1.21)$$

auf.  $g_s$  ist die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung. Der gluonische Feldstärke-Tensor ist definiert als

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.22)$$

wobei  $f^{abc}$  die Strukturkonstanten der  $SU(3)$  sind. Es gilt

$$[T^a, T^b] \equiv T^a T^b - T^b T^a = i f^{abc} T^c. \quad (1.23)$$

Darüber hinaus ist die Feldstärke als Produkt aus den einzelnen Feldstärken  $G_{\mu\nu}^a$  und den Generatoren  $T^a$

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu}^a T^a \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig_s [A_\mu, A_\nu] \\ &= \frac{i}{g_s} [D^\mu, D^\nu]. \end{aligned} \quad (1.24)$$

definiert. Über alle wiederholten Indizes wird jeweils summiert. Die Lagrangedichte der QCD ist

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu,a} + \sum_{q=u,d,\dots} \bar{q} (i\not{D} - m_q) q. \quad (1.25)$$

Hier wurde außerdem die Abkürzung  $\not{X} \equiv \gamma^\mu X_\mu$  eingeführt.

Der in der Feldstärke  $A_\mu^a$  quadratische Term im Feldstärke-Tensor (1.22), der in der  $SU(3)$  als nicht-abelsche Eichgruppe notwendig ist, um den Feldstärke-Tensor eichinvariant zu machen, sorgt dafür, dass die QCD-Lagrangedichte auch Kopplungen von drei und vier Eichfeldern enthält.

### 1.1.6 Renormierung

Beim Berechnen von Vorhersagen mittels einer Quantenfeldtheorie ist es von zentraler Bedeutung, dass diese *renormierbar* ist. In diesem Abschnitt wird *Renormierung* eingeführt. Es wird erläutert, wie mit divergenten Ausdrücken in störungstheoretischen Rechnungen umgegangen wird. Wo die Verwendung expliziter Formeln notwendig erscheint, wird QCD als Beispiel verwendet. In den folgenden beiden Abschnitten schliesst sich eine detaillierte



Betrachtung einiger Aspekte an, die sich aus der Renormierung ergeben und die für diese Arbeit von Bedeutung sind. Die in diesem und den folgenden beiden Abschnitten dargestellten Informationen zum Thema Renormierung stammen aus [8], [10], [24], [25] und [26].

Wir berechnen physikalische Größen in einer *Störungstheorie* als Reihenentwicklung in  $\alpha_s$ , das mit der starken Kopplungskonstanten  $g_s$  über

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi} \quad (1.26)$$

zusammenhängt. Übergangsamplituden werden in der Störungstheorie durch *Feynman-Diagramme* beschrieben. Die *Feynman-Regeln*, mittels derer diese Diagramme berechnet werden, lassen sich direkt aus der Lagrangedichte herleiten. Wir verwenden für unsere Berechnungen die Feynman-Regeln der QCD wie sie in [8] dargestellt sind.

In führender Ordnung der Störungstheorie ergeben sich Übergangsamplituden aus Feynman-Diagrammen, bei denen die Impulse aller Teilchen durch Anfangs- und Endzustand festgelegt sind. Aufgrund der einfachen Struktur der Diagramme spricht man hier vom *Baumgraphenniveau*.

Bei der Berechnung von Quantenkorrekturen treten *Schleifendiagramme* auf, bei denen man über den Impuls interner Teilchen, der durch Anfangs- und Endzustand nicht festgelegt ist, integrieren muss. Schleifendiagramme sind im Allgemeinen ultraviolett(UV)-divergent, d.h. sie enthalten Divergenzen, die von sehr großen Impulsen im Schleifenintegral verursacht werden.

Die Theorie wird *regularisiert*, d.h. das UV-Verhalten wird durch Einführung eines zusätzlichen Parameters, des Regulators, modifiziert, so dass divergente Integrale in Abhängigkeit vom Regulator zunächst endlich werden. Zur Regularisierung der Feynman-Diagramme verwenden wir *Dimensionale Regularisierung*. Die Diagramme werden in  $D = 4 - 2\epsilon$  Raum-Zeit-Dimensionen berechnet. Für  $\epsilon > 0$  erhalten wir endliche Ergebnisse für die Integrale. UV-Divergenzen erscheinen im Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$  als  $1/\epsilon$ -Pole. Mit Dimensionaler Regularisierung ist es möglich, auch infrarot(IR)-Divergenzen, also Divergenzen aufgrund von sehr kleinen Impulsen, zu regularisieren.

Als zweiter Schritt erfolgt nun die *Renormierung* durch eine Neudefinition der Felder, der Massen und der Kopplungskonstanten. Die Größen, die ursprünglich in der Lagrangedichte auftauchen, sind nicht die physikalisch messbaren Größen, sondern *nackte*, d.h. unbeobachtbare und formal divergente Parameter, die mit den *renormierten* Größen zusammenhängen. Das störungstheoretische Ergebnis für die physikalischen Observablen ist dann endlich und wird durch die renormierten Größen ausgedrückt. Theorien, in denen alle auftretenden Divergenzen in allen Ordnungen der Störungstheorie in einer endlichen Anzahl von Parametern vollständig absorbiert werden können, nennt man *renormierbar*.

Wir führen eine *multiplikative Renormierung* durch, d.h. wir ändern die Lagrangedichte durch Multiplikation der Felder und Parameter mit den Renormierungskonstanten, führen aber keine neuen Terme ein. Für den Zusammenhang der nackten mit den renormierten

Größen gilt:

$$\begin{aligned}
 A_{\mu,0}^a &= \sqrt{Z_3} A_\mu^a, \\
 q_0 &= \sqrt{Z_2} q, \\
 g_{s,0} &= Z_g g_s, \\
 m_{q,0} &= Z_m m_q = m_q + \delta m_q.
 \end{aligned}
 \tag{1.27}$$

Hierbei bezeichnet der Index 0 jeweils die nackte Größe.

Die Feldstärkerenormierung  $Z_2$  ist in einer wechselwirkenden Theorie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Quantenfeld einen Ein-Teilchen-Eigenzustand der Wechselwirkungs-Hamiltondichte aus dem Vakuum erzeugt:

$$\langle \Omega | \psi(0) | p, \sigma \rangle = \sqrt{Z_2} u(p, \sigma).
 \tag{1.28}$$

Für die Renormierungskonstanten gilt jeweils

$$Z_i = 1 + \delta Z_i = 1 + \mathcal{O}(\alpha_s) + \mathcal{O}(\alpha_s^2) + \dots .
 \tag{1.29}$$

Auf Einschleifen-Niveau ist  $\delta Z_i$  von  $\mathcal{O}(\alpha_s)$ . Wir setzen nun in die ursprüngliche Lagrangedichte (1.25) die nackten Größen in Abhängigkeit (1.27) von den renormierten Größen und den Renormierungskonstanten ein. Dies lässt sich darstellen als Summe aus der ursprünglichen Lagrangedichte, die nun jedoch von den renormierten Größen abhängt, und der *Counterterm-Lagrangedichte*, die die  $\delta Z_i$  enthält. Wenn wir aus dieser Summe die Feynman-Regeln der QCD herleiten, erhalten wir einerseits die „alten“ Feynman-Regeln mit den renormierten Parametern, und zum anderen „neue“ Feynman-Regeln für die Counterterm-Vertices. Man bestimmt die  $\delta Z_i$ , indem man die Vertexfunktionen in Abhängigkeit von den renormierten Feldern zur Ordnung  $\alpha_s$  berechnet und dabei auch die Counterterme berücksichtigt. Die  $\delta Z_i$  folgen nun aus der Bedingung, dass die Vertexfunktionen UV-endlich sind. Dies legt die divergenten Anteile der  $\delta Z_i$  fest, nicht jedoch die endlichen Anteile, die in verschiedenen *Renormierungsschemata* unterschiedlich aussehen können.

### 1.1.7 Laufende Kopplung in der QCD

Bei der Behandlung divergenter Diagramme z.B. mittels Dimensionaler Regularisierung tritt die *Renormierungsskala*  $\mu$  als neuer Parameter auf. Sie hat die Dimension einer Masse und sorgt dafür, dass Ausdrücke beim Übergang zu  $D$  Dimensionen die korrekte Massendimension behalten. Insbesondere ergibt sich für die Integration über den Schleifenimpuls beim Übergang zu  $D$  Dimensionen

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \longrightarrow \tilde{\mu}^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}.
 \tag{1.30}$$

Hierbei ist

$$\tilde{\mu}^2 := \frac{\mu^2 e^{\gamma_E}}{4\pi}
 \tag{1.31}$$

so definiert, dass das  $\overline{MS}$ -Renormierungsschema gerade der minimalen Subtraktion von  $1/\epsilon$ -Polen entspricht.

Die *Renormierungsgruppengleichungen*, die die Abhängigkeit renormierter Größen von der Renormierungsskala beschreiben, sind von zentraler Bedeutung bei der Behandlung störungstheoretischer QCD-Effekte. Man erhält sie aus (1.27) unter Verwendung der Tatsache, dass nackte Größen nicht von der Renormierungsskala abhängen.

Die Renormierungsgruppengleichung für die starke Kopplungskonstante lautet

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} g_{s,0} = \mu \frac{d}{d\mu} (Z_g(\mu) g_s(\mu)) = Z_g g_s \left( \frac{1}{g_s} \beta(g_s) + \frac{1}{Z_g} \mu \frac{d}{d\mu} Z_g \right), \quad (1.32)$$

wobei die  $\beta$ -Funktion

$$\beta(g_s) = \mu \frac{d}{d\mu} g_s = \frac{d}{d \ln \mu} g_s \quad (1.33)$$

beschreibt, wie sich die starke Kopplungskonstante in Abhängigkeit von der Renormierungsskala ändert. Aus (1.32) folgt

$$\beta(g_s) = -g_s \frac{1}{Z_g} \mu \frac{d}{d\mu} Z_g. \quad (1.34)$$

Die  $\beta$ -Funktion kann zu jeder Ordnung in der Störungstheorie aus (1.34) berechnet werden. Auf Einschleifenniveau erhält man

$$\beta(g_s) = -\beta_0 \frac{g_s^3}{16\pi^2} \quad (1.35)$$

mit

$$\beta_0 = \frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} n_f. \quad (1.36)$$

Hierbei ist  $N_c$  die Anzahl der Farben und  $n_f$  die Anzahl der an der Skala  $\mu$  aktiven Quark-Flavours, d.h. die Anzahl der Quarks, deren Masse kleiner als die Renormierungsskala  $\mu$  ist. Als  $\beta$ -Funktion für  $\alpha_s$  (1.26) ergibt sich auf Einschleifenniveau

$$\mu \frac{d}{d\mu} \alpha_s = -2\beta_0 \frac{\alpha_s^2}{4\pi}. \quad (1.37)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$\alpha_s(\mu) = \frac{\alpha_s(\mu_0)}{1 + \frac{\alpha_s(\mu_0)}{4\pi} \beta_0 \ln \left( \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right)}. \quad (1.38)$$

Hierbei ist  $\mu_0$  eine Referenzskala, z.B. diejenige, bei der  $\alpha_s$  aus experimentellen Messungen bekannt ist. Den Wert für  $\alpha_s$  an der Skala  $\mu$  erhält man mit (1.38) aus dem bekannten Wert für  $\alpha_s$  an einer Skala  $\mu_0$ . Dabei ist zu beachten, ob an beiden Skalen die gleiche Anzahl  $n_f$  an Quark-Flavours aktiv ist. Ist das nicht der Fall, so gewinnt man  $\alpha_s(\mu)$  aus  $\alpha_s(\mu_0)$  durch mehrmaliges Benutzen von (1.38) mit verschiedenem, von  $n_f$  abhängigem  $\beta_0$ . Da die

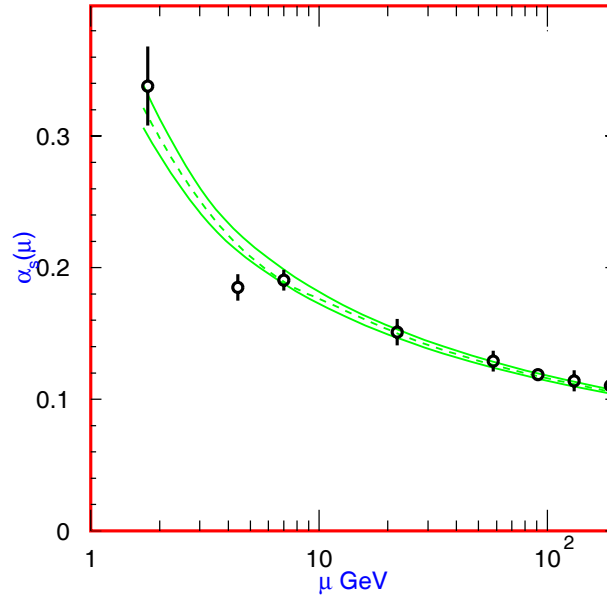


Abbildung 1.4: Die laufende Kopplung  $\alpha_s$  in Abhängigkeit von der Energieskala  $\mu$  [19].

Kopplung  $\alpha_s$  an verschiedenen Skalen verschiedene Werte annimmt, spricht man von der *laufenden Kopplung*.

Eine Besonderheit nicht-abelscher Eichtheorien und damit auch der QCD ist, dass  $\beta_0$  positiv und somit die  $\beta$ -Funktion negativ ist. Dies bedeutet, dass  $\alpha_s$  mit zunehmender Energie abnimmt, es gilt

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \alpha_s(\mu) = 0. \quad (1.39)$$

Für große Energieüberträge – was kleinen Abständen entspricht – geht die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung logarithmisch gegen Null, die Quarks und Gluonen in den Hadronen verhalten sich im Grenzfall  $\mu \rightarrow \infty$  wie freie Teilchen. Diese Eigenschaft nennt man *Asymptotische Freiheit*. Die asymptotische Freiheit ermöglicht es, bei kleinen Abständen die Quarks und Gluonen als freie Teilchen in Störungstheorie zu behandeln. Der Nobelpreis 2004 wurde für die Entdeckung der asymptotischen Freiheit [5, 6] in der Theorie der starken Wechselwirkung vergeben.

Andererseits nimmt die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung bei abnehmendem Energieübertrag, also zunehmendem Abstand, zu. An der Skala  $\Lambda_{\text{QCD}}$  wird die Kopplungskonstante divergent. Aus experimentellen Messungen folgt  $\Lambda_{\text{QCD}} \approx 300$  MeV. Die QCD-Störungstheorie bricht aber bereits bei höheren Energien zusammen; sie gilt nur, wenn  $\alpha_s$  deutlich kleiner als 1 ist. Dies ist typischerweise für Energien, die größer als 1 – 2 GeV sind, erfüllt. Aus der Bedingung, dass die Kopplungskonstante für  $\mu = \Lambda_{\text{QCD}}$  divergent

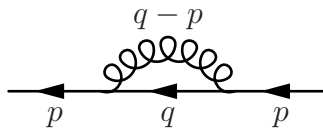


Abbildung 1.5: Die Quark-Selbstenergie auf Einschleifenniveau.

wird, erhält man auf Einschleifenniveau die alternative Parametrisierung

$$\alpha_s(\mu) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}\right)}. \quad (1.40)$$

Abbildung 1.4 illustriert wie gut das auf Zweischleifenniveau mit dem Anfangswert  $\alpha_s(M_Z)$  theoretisch berechnete logarithmische Abfallen der laufenden Kopplung  $\alpha_s$  mit den experimentell gemessenen Werten übereinstimmt und zeigt die im Grenzfall hoher Energien auftretende asymptotische Freiheit.

Quarks und Gluonen treten nur als gebundene Zustände in den Hadronen und nicht als freie Teilchen auf. Diese Eigenschaft bezeichnet man als *Confinement*. In der Praxis bedeutet dies, dass jede Observable mit hadronischen Unsicherheiten behaftet ist.

### 1.1.8 Massen- und Feldstärkerenormierung im Polschema

In diesem Abschnitt werden Ausdrücke für die Massen- und Feldstärkerenormierung im Polschema hergeleitet, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit Verwendung finden. Darüber hinaus wird am Beispiel der Masse auf die Abhängigkeit der renormierten Größen vom verwendeten Renormierungsschema eingegangen.

Propagatoren sind als das Inverse einer Zwei-Teilchen-Vertexfunktion definiert. Mit der renormierten Zwei-Teilchen-Vertexfunktion

$$\hat{\Gamma}(-p, p) = i(\not{p} - m_q) - i\Sigma(p) + i\delta Z_2(\not{p} - m_q) - i\delta m_q \quad (1.41)$$

ergibt sich auf Einschleifenniveau für den renormierten Quark-Propagator

$$\hat{G}(p) = -\left(\hat{\Gamma}(-p, p)\right)^{-1} = \frac{i}{(\not{p} - m_q)(1 + \delta Z_2) - \Sigma(p) - \delta m_q}. \quad (1.42)$$

Hierbei ist  $\Sigma(p)$  die Selbstenergie des Quarks, die gemäß

$$\Sigma(p) = \not{p}\Sigma_V(p^2) + m_q\Sigma_S(p^2) \quad (1.43)$$

zerlegt werden kann. Abbildung 1.5 zeigt das die Selbstenergie des Quarks auf Einschleifenniveau beschreibende Feynmandiagramm. Für  $\Sigma_V(p^2)$  und  $\Sigma_S(p^2)$  erhält man durch Be-

rechnen des Selbstenergie-Diagramms in Dimensionaler Regularisierung und Entwickeln des Ausdrucks für  $D \rightarrow 4$

$$\begin{aligned}\Sigma_V(p^2) &= \frac{C_F \alpha_s(\mu)}{4\pi} \left[ -\frac{1}{\epsilon} - \frac{m_q^2}{p^2} + \left(1 - \frac{m_q^4}{p^4}\right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m_q^2}\right) + \ln \left(\frac{m_q^2}{\mu^2}\right) - 1 \right] \\ \Sigma_S(p^2) &= \frac{C_F \alpha_s(\mu)}{4\pi} \left[ \frac{4}{\epsilon} + 4 \left(\frac{m_q^2}{p^2} - 1\right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m_q^2}\right) - 4 \ln \left(\frac{m_q^2}{\mu^2}\right) + 6 \right].\end{aligned}\quad (1.44)$$

Für  $p^2 = m_q^2$  ergibt sich

$$\begin{aligned}\Sigma_V(m_q^2) &= \frac{C_F \alpha_s(\mu)}{4\pi} \left[ -\frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{m_q^2}{\mu^2}\right) - 2 \right] \\ \Sigma_S(m_q^2) &= \frac{C_F \alpha_s(\mu)}{4\pi} \left[ \frac{4}{\epsilon} - 4 \ln \left(\frac{m_q^2}{\mu^2}\right) + 6 \right].\end{aligned}\quad (1.45)$$

Im *Polschema* bestimmt man die Renormierungskonstanten so, dass  $m_q$  die physikalische Masse des Quarks ist. Dies bedeutet, dass der Quark-Propagator (1.42) einen Pol für  $p^2 = m_q^2$  bzw.  $\not{p} = m_q$  hat. Das Residuum des Quark-Propagators (1.42) am Pol soll  $i$  sein, was bedeutet, dass der Propagator sich gemäß

$$\hat{G}(p) = \frac{i}{\not{p} - m_q} + a_0 + a_1(\not{p} - m_q) + \mathcal{O}((\not{p} - m_q)^2) \quad (1.46)$$

in eine Laurentreihe entwickeln lässt, und der führende Term dabei den Propagator auf Baumgraphenniveau reproduziert. Die Massenrenormierung  $\delta m_q$  bestimmt man aus der Bedingung, dass der Propagator für  $\not{p} = m_q$  einen Pol hat zu

$$\delta m_q = -\Sigma(m_q) = -m_q (\Sigma_V(m_q^2) + \Sigma_S(m_q^2)) = -3m_q \frac{C_F \alpha_s(\mu)}{4\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_q^2}{\mu^2}\right) + \frac{4}{3} \right). \quad (1.47)$$

Die physikalische Masse  $m_q$  bezeichnet man auch als *Pol-Masse*. Aus der Bedingung, dass das Residuum des Propagators am Pol  $i$  sein soll, ergibt sich

$$\delta Z_2 = \left[ \frac{d\Sigma(p)}{d\not{p}} \right]_{\not{p}=m_q} \quad (1.48)$$

für die Feldstärkerenormierung. Hieraus erhält man

$$\delta Z_2(m_q) = \Sigma_V(m_q^2) + 2m_q^2 \left[ \frac{d}{dp^2} (\Sigma_V(p^2) + \Sigma_S(p^2)) \right]_{p^2=m_q^2} \quad (1.49)$$

in Abhängigkeit von  $\Sigma_V$  und  $\Sigma_S$ .

Wie in Abschnitt 1.1.6 bereits erwähnt, unterscheiden sich die Renormierungskonstanten in verschiedenen Renormierungsschemata um endliche Anteile voneinander. Im  $\overline{MS}$ -Schema

enthalten die Renormierungskonstanten nur die  $1/\epsilon$ -Terme. So würde die Massenrenormierung nur aus dem divergenten Anteil in (1.47) bestehen. Der Zusammenhang zwischen der Polmasse und der  $\overline{MS}$ -Masse ist folglich gegeben durch

$$\bar{m}_q(\mu) = m_q \left[ 1 + \frac{C_F \alpha_s(\mu)}{4\pi} \left( 3 \ln \frac{m_q^2}{\mu^2} - 4 \right) + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right]. \quad (1.50)$$

In Abschnitt 4.3 werden wir neben Pol- und  $\overline{MS}$ -Masse auch die Masse im Potential-Subtracted(PS)-Schema verwenden, für deren Zusammenhang mit der Polmasse

$$m_q^{\text{PS}}(\mu_f) = m_q - \frac{C_F \alpha_s(\mu)}{\pi} \mu_f + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \quad (1.51)$$

gilt [27]. Hierbei wird für die Faktorisierungsskala  $\mu_f \simeq 1 \text{ GeV}$  eingesetzt.

## 1.2 Aufgabenstellung und Motivation

### 1.2.1 $B$ -Mesonen

Als *Meson* bezeichnet man einen gebundenen Quark-Antiquark-Zustand. Bei einem  $B$ -Meson ist einer der Bestandteile ein  $\bar{b}$ -Antiquark, der andere ein leichtes Quark. Unter dem Begriff  $B$ -Meson  $|B\rangle$  sind das neutrale  $|B^0\rangle = |\bar{b}d\rangle$  und das positiv geladene  $|B^+\rangle = |\bar{b}u\rangle$  zusammengefasst. Die entsprechenden Anti- $B$ -Mesonen  $|\bar{B}\rangle$  sind das neutrale  $|\bar{B}^0\rangle = |b\bar{d}\rangle$  und das negativ geladene  $|B^-\rangle = |b\bar{u}\rangle$ . Die schwereren  $B_s$ - und  $B_c$ -Mesonen bestehen aus einem  $\bar{b}$ -Antiquark und einem Strange- oder Charm-Quark. Weite Teile dieses sowie der beiden folgenden Abschnitte verwenden Informationen aus [19].

### 1.2.2 $B$ -Physik im Experiment

In der Vergangenheit wurde interessante  $B$ -Physik bei CLEO und ARGUS betrieben, die auf den  $\Upsilon$ -Resonanzen an symmetrischen Elektron-Positron-Collidern arbeiteten. Als einer der Höhepunkte ist hier die Entdeckung der  $B^0 - \bar{B}^0$ -Mischung bei ARGUS [28] zu nennen. Außerdem gab es  $B$ -Physik-Experimente am Elektron-Positron-Beschleuniger LEP und an den Speicherringen PETRA und PEP.

Zur Zeit werden Präzisionsuntersuchungen der Zerfälle von  $B$ -Mesonen an den asymmetrischen  $B$ -Fabriken durchgeführt. Dies sind der KEKB-Speicherring mit dem Belle-Experiment am KEK in Japan sowie der PEP-II-Speicherring mit dem BABAR-Experiment am Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) in Kalifornien. Bei den  $B$ -Fabriken handelt es sich um Elektron-Positron-Collider mit einer Schwerpunktsenergie, die der Masse der  $\Upsilon(4S)$ -Resonanz entspricht [29, 30, 31]. Die Elektronen und Positronen werden jeweils durch einen Linearbeschleuniger in den Speicherring injiziert. Die  $\Upsilon(4S)$ -Resonanz zerfällt zu annähernd gleichen Teilen in  $B^0\bar{B}^0$ - und  $B^+B^-$ -Paare, die sich im Schwerpunktsystem der  $e^-e^+$ -Kollision beinahe in Ruhe befinden. Bei auf der  $\Upsilon(4S)$ -Resonanz arbeitenden

Elektron-Positron-Collidern reicht die Schwerpunktsenergie nicht aus zur Erzeugung der schwereren  $B_s$ - und  $B_c$ -Mesonen.

Die  $B$ -Fabriken sind *asymmetrisch* aufgebaut: Der Elektronstrahl hat eine deutlich größere Energie als der Positronstrahl. PEP-II arbeitet mit Elektronen von 9 GeV und Positronen von 3,1 GeV, KEKB mit Elektronen von 8 GeV und Positronen von 3,5 GeV. Daher werden die  $B$ -Mesonen nicht in Ruhe erzeugt, sondern bewegen sich im Laborsystem mit  $\beta\gamma = 0,56$  bei PEP-II und  $\beta\gamma = 0,43$  bei KEKB vom Wechselwirkungspunkt fort. Hierdurch wird es möglich, die Zerfallslängen der  $B$ -Mesonen zu messen und daraus auf ihre Zerfallszeiten zu schließen. Dies ist eine wichtige Voraussetzung für die Messung der zeitabhängigen  $CP$ -Asymmetrien im  $B^0$ -System, wofür die  $B$ -Fabriken speziell konstruiert wurden. Aufgrund der enormen Datenmenge und der guten Detektorperformance wurden diese Messungen zu einem großen Erfolg der  $B$ -Fabriken. Außerdem wird an den  $B$ -Fabriken eine Vielzahl weiterer, sehr erfolgreicher Messungen von semileptonischen und hadronischen, inklusiven wie exklusiven Zerfällen durchgeführt. Dies bietet einerseits die Möglichkeit, den gleichen SM-Parameter aus verschiedenen Zerfällen zu extrahieren. Andererseits werden verschiedene SM-Parameter gemessen, durch deren Kenntnis das Unitaritätsdreieck überbestimmt und so die Unitarität der CKM-Matrix (siehe Abschnitt 1.1.4) getestet wird. Beides dient als Test des Standardmodells.

$B$ -Physik wird auch am Proton-Antiproton-Collider Tevatron am Fermilab betrieben. Einer der größten Erfolge in letzter Zeit war hier die Entdeckung der  $B_s^0 - \bar{B}_s^0$ -Mischung im vergangenen Jahr [32, 33].

In Zukunft wird  $B$ -Physik am Proton-Proton-Collider LHC am CERN untersucht werden. Das Experiment LHCb wurde eigens für diesen Zweck konstruiert. Die Experimente ATLAS und CMS wurden vor allem für die Suche nach dem Higgs-Boson und nach Physik jenseits des Standardmodells konzipiert. In beschränktem Umfang wird an ihnen jedoch auch  $B$ -Physik möglich sein.

Es existieren Pläne zum Ausbau des KEKB-Speicherrings zu „Super-KEKB“ mit einer sehr hohen Luminosität und einem verbesserten „Super-Belle“-Detektor. Ob diese Pläne umgesetzt werden, ist jedoch zum jetzigen Zeitpunkt nicht klar. Teile dieses Abschnitts über die verschiedenen Experimente, an denen  $B$ -Physik betrieben wird, folgen der Darstellung in [34].

### 1.2.3 Semileptonische $B$ -Zerfälle und die Bestimmung von $V_{cb}$ und $V_{ub}$

Semileptonische  $B$ -Zerfälle werden durch die Quark-Übergänge  $b \rightarrow c\bar{\nu}_\ell$  und  $b \rightarrow u\bar{\nu}_\ell$  vermittelt. Der dominante Zerfallskanal ist dabei  $b \rightarrow c\bar{\nu}_\ell$ , der proportional zum CKM-Element  $V_{cb}$  ist, während  $b \rightarrow u\bar{\nu}_\ell$  durch das kleine CKM-Element  $V_{ub}$  unterdrückt ist.

Die Länge der Seite des Unitaritätsdreiecks, die gegenüber dem aus der Messung der zeitabhängigen  $CP$ -Asymmetrie im *goldenen Kanal*  $B \rightarrow J/\psi K_S^0$  sehr genau bekannten Winkel  $\beta$  liegt, ist proportional zum Verhältnis  $|V_{ub}|/|V_{cb}|$ . Der Überlapp der erlaubten Bereiche für die Seitenlänge und den Winkel beim Fit des Unitaritätsdreiecks (siehe Abbildung 1.3)



ist ein direkter Weg, die Unitarität der CKM-Matrix zu testen. Da man hierbei durch Baumdiagramme beschriebene Prozesse ( $b \rightarrow u$ ,  $b \rightarrow c$ ) mit einem Schleifen-induzierten Prozess ( $B^0 - \bar{B}^0$ -Mischung) vergleicht, ist dieser Vergleich sensitiv auf mögliche Beiträge neuer Physik. Daher ist neben der Messung von  $CP$ -Asymmetrien eine genaue Bestimmung der Beträge der CKM-Matrixelemente  $V_{ub}$  und  $V_{cb}$  von zentraler Bedeutung, um den CKM-Sektor des Standardmodells zu testen.

Semileptonische  $B$ -Zerfälle eignen sich ausgezeichnet zur Bestimmung von  $|V_{ub}|$  und  $|V_{cb}|$ , weil aufgrund des leptonischen Anteils im Endzustand deutlich weniger hadronische Effekte als bei hadronischen Zerfällen zu beachten sind. Die Quark-Übergänge  $b \rightarrow c\ell\bar{\nu}_\ell$  und  $b \rightarrow u\ell\bar{\nu}_\ell$  bieten die Möglichkeit, diese beiden CKM-Matrixelemente sowohl aus inklusiven als auch aus exklusiven Zerfällen zu bestimmen. Zur Bestimmung von  $|V_{qb}|$ ,  $q = (u, c)$  aus inklusiven und exklusiven Zerfällen werden unabhängige theoretische wie experimentelle Methoden verwendet, so dass die Übereinstimmung der auf beide Arten erzielten Ergebnisse eine wichtige Gegenprobe der zugrunde liegenden Theorien und der verwendeten Methoden ist.

Bei einem *inklusiven* Zerfall wird über alle Endzustände summiert, die eine bestimmte Quarksorte  $q$  enthalten. Inklusive semileptonische  $B$ -Zerfälle sind  $\bar{B} \rightarrow X_c\ell\bar{\nu}_\ell$  und  $\bar{B} \rightarrow X_u\ell\bar{\nu}_\ell$ .<sup>1</sup>

Die theoretische Behandlung inklusiver Zerfälle im Vergleich zu exklusiven Zerfällen wird dadurch vereinfacht, dass bei einem inklusiven Zerfall die Details der Quarkbindung in den Hadronen im Endzustand eine untergeordnete Rolle spielen. Experimentell ist die *Messung* aller möglichen Endzustände, die eine bestimmte Quarksorte  $q$  enthalten, eine große Herausforderung.

Die Messung inklusiver semileptonischer  $B$ -Zerfälle an den asymmetrischen  $B$ -Fabriken BABAR und Belle geschieht aus  $\Upsilon(4S) \rightarrow B\bar{B}$ -Ereignissen, bei denen der hadronische Zerfall eines der  $B$ -Mesonen ( $B_{\text{tag}}$ ) vollkommen rekonstruiert wird. Der semileptonische Zerfall des anderen  $B$ -Mesons ( $B_{\text{signal}}$ ) wird durch die Messung eines geladenen Leptons (Elektrons oder Myons) identifiziert. Die Rekonstruktion des hadronischen Systems  $X$  erfolgt durch geladene Spuren und Energie-Depositionen im Kalorimeter, die nicht dem anderen  $B$ -Meson ( $B_{\text{tag}}$ ) oder dem geladenen Lepton zugeordnet werden können. Der Viererimpuls des Neutrinos wird aus dem fehlendem Viererimpuls abgeschätzt. Er ist ein wichtiger Indikator für die Qualität der Rekonstruktion des hadronischen Systems  $X$ . Die Masse des hadronischen Systems  $M_X$  wird aus einem kinematischen Fit bestimmt, der Viererimpulserhaltung, Gleichheit der Massen der beiden  $B$ -Mesonen und masselose Neutrinos voraussetzt [35, 36].

Die der Beschreibung von inklusiven wie exklusiven semileptonischen  $B$ -Zerfällen zugrunde liegende *Theorie* verwendet die Tatsache, dass die Masse  $m_b$  des  $b$ -Quarks deutlich größer ist als die Skala  $\Lambda_{\text{QCD}}$ , die niederenergetische hadronische Physik bestimmt. Eine systematische Entwicklung in Potenzen von  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$  bildet die Grundlage für Präzisionsrechnungen, wobei Methoden effektiver Feldtheorien verwendet werden, um nichtstörungstheoretische von störungstheoretischen Beiträgen zu trennen. Zusätzlich muss die Abstrahlung von Gluo-

<sup>1</sup>Wir werden im Folgenden von „dem inklusiven semileptonischen Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c\ell\bar{\nu}_\ell$ “ sprechen, auch wenn es sich dabei um eine Summe über alle semileptonischen Zerfälle, die im Endzustand ein Charm-Quark enthalten, handelt. Dies rechtfertigt auch die Bezeichnung „die inklusiven semileptonischen Zerfälle  $\bar{B} \rightarrow X_c\ell\bar{\nu}_\ell$ “, die zuweilen in der Literatur verwendet wird.

nen berücksichtigt werden, die höhere Ordnungen in der Störungsreihe in der starken Kopplungskonstanten  $\alpha_s$  induziert.

Aus inklusiven und exklusiven semileptonischen Zerfällen ergibt sich für den Betrag von  $V_{cb}$  [19]

$$|V_{cb}| = (41,7 \pm 0,7) \times 10^{-3} \quad (\text{inklusive}), \quad (1.52)$$

$$|V_{cb}| = (40,9 \pm 1,8) \times 10^{-3} \quad (\text{exklusiv}). \quad (1.53)$$

Für den Betrag von  $V_{ub}$  ergibt sich [19]

$$|V_{ub}| = (4,40 \pm 0,20 \pm 0,27) \times 10^{-3} \quad (\text{inklusive}), \quad (1.54)$$

$$|V_{ub}| = (3,84^{+0,67}_{-0,49}) \times 10^{-3} \quad (\text{exklusiv}). \quad (1.55)$$

Die erste angegebene Unsicherheit für das aus inklusiven Zerfällen bestimmte  $|V_{ub}|$  ist experimentell, während der zweite Wert sowohl theoretische Unsicherheiten als auch die Unsicherheiten der Parameter enthält. Die größte Unsicherheit kommt dabei aus der Unsicherheit von  $m_b$ . Seit der Veröffentlichung der hier angegebenen Werte für  $|V_{cb}|$  und  $|V_{ub}|$  in [19] hat sich insbesondere die Unsicherheit der Bestimmung von  $|V_{ub}|$  aus dem exklusiven Zerfall  $\bar{B} \rightarrow \pi \ell \bar{\nu}_\ell$  verringert, so dass zur Zeit aus inklusiven und exklusiven semileptonischen Zerfallskanälen bestimmte Werte für  $|V_{ub}|$  mit ungefähr gleich großen Unsicherheiten behaftet sind. Derzeit aktuelle Zahlenwerte finden sich in [37]. Der inklusive semileptonische Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  liefert präzisere Werte für  $|V_{cb}|$  als entsprechende exklusive Zerfallskanäle. Bei der Bestimmung der CKM-Matrixelemente aus exklusiven Zerfällen kommen die größten Unsicherheiten aus der ungenauen Kenntnis des Formfaktors. Hier werden in den nächsten Jahren weitere Fortschritte erwartet, insbesondere was die Berechnung des Formfaktors mittels nichtstörungstheoretischer Methoden wie Lichtkegel-Summenregeln und Gitter-QCD angeht.

#### 1.2.4 Die Bestimmung von $V_{cb}$ aus $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$

Wie oben erwähnt, resultiert die genaueste Bestimmung von  $|V_{cb}|$  derzeit aus dem inklusiven semileptonischen Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$ . Mittels der „Heavy Quark Expansion“ (HQE) ist es möglich, die differentielle Zerfallsrate in Potenzen von  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$  zu entwickeln<sup>2</sup>. Hierbei treten nichtstörungstheoretische Parameter auf, die durch hadronische Matrixelemente von lokalen Operatoren definiert sind. Im Experiment werden Messungen der totalen Zerfallsrate, der Momente des Leptonenergiespektrums und der Momente des Spektrums der hadronisch invarianten Masse durchgeführt. Die Bestimmung von  $|V_{cb}|$ , den schweren Quarkmassen  $m_b$  und  $m_c$  sowie den nichtstörungstheoretischen Parametern erfolgt aus dem Vergleich dieser experimentellen Messungen mit der HQE als theoretische Grundlage. In [38, 39, 40] werden diese Größen mittels eines Fits an die bei verschiedenen Experimenten

---

<sup>2</sup>Das Charm-Quark wird hier wie das  $b$ -Quark als schweres Quark behandelt. Daher wird im Verhältnis  $m_c/m_b$  nicht entwickelt, im Gegensatz zur Beschreibung des Zerfalls in der „Shapefunktions-Region“ mittels SCET (siehe 1.2.5 und 2.4).

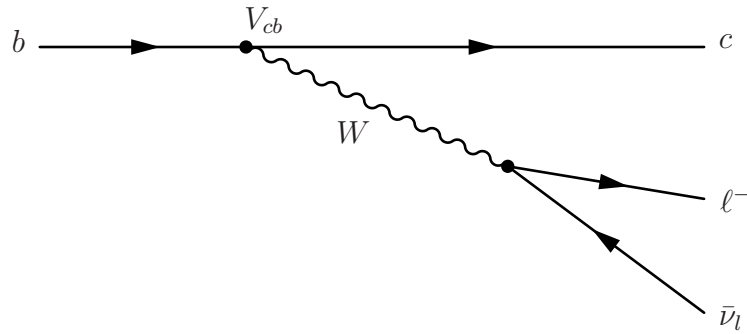


Abbildung 1.6: Der partonische Zerfall  $b \rightarrow c \ell \bar{\nu}_\ell$  auf Baumgraphenniveau.

gemessenen Momente bestimmt. Dies liefert den exaktesten Wert für  $|V_{cb}|$  und einige der nichtstörungstheoretischen Parameter sowie eine der genauesten Bestimmungen der schweren Quarkmassen. Die präzisesten Werte für  $m_b$  und  $m_c$  ergeben sich derzeit aus [41].

Die relative Unsicherheit der Bestimmung von  $|V_{cb}|$  aus  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  beträgt mittlerweile noch 2%. Ein großer Teil hiervon ist die theoretische Unsicherheit. Diese setzt sich zusammen aus der Abschätzung von höheren, bisher nicht berechneten Ordnungen in der störungstheoretischen Reihe, also der Entwicklung in der starken Kopplungskonstanten  $\alpha_s$ , sowie höheren Ordnungen in der Entwicklung in Potenzen von  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ . Eine Übersicht über die verschiedenen Beiträge zur totalen Rate findet sich in [42]. Der führende Term in der Heavy Quark Expansion ist der Zerfall auf Partonniveau, also der Zerfall eines freien  $b$ -Quarks in ein freies Charm-Quark, ein Lepton und ein Lepton-Antineutrino. Der führende Term in der störungstheoretischen Reihe ist das Baumgraphenniveau. In Abbildung 1.6 ist das den Zerfall in der führenden Ordnung in beiden Reihen beschreibende Feynmandiagramm dargestellt, es handelt sich um den partonischen Zerfall auf Baumgraphenniveau.

Es gibt keinen Beitrag der Ordnung  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ , auf Baumgraphenniveau sind Beiträge der Ordnung  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2$  seit längerer Zeit bekannt [43, 44, 45, 46, 47, 48]. Auf Baumgraphenniveau wurden später auch Beiträge der Ordnung  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^3$  [49] und  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^4$  [50] berechnet.

Zur führenden Ordnung der HQE sind die  $\alpha_s$ -Korrekturen zu einigen speziellen Spektren seit langer Zeit bekannt [51, 52, 53], ebenso zur totalen Rate [54].  $\alpha_s$ -Korrekturen zu hadronischen und leptonic Momenten finden sich in [55, 56, 57]. Die vollen Einschleifen-Korrekturen zu den Strukturfunktionen, die in die dreifach differentielle Rate für  $b \rightarrow c \ell \bar{\nu}_\ell$  eingehen, wurden jedoch erst in [58, 59, 60] berechnet. Zur führenden Ordnung der HQE sind auch sogenannte BLM-Korrekturen [61], also Korrekturen der Form  $\alpha_s^n \beta_0^{n-1}$ , die proportional zum führenden Beitrag der  $\beta$ -Funktion (1.35) sind, bekannt. Korrekturen der Ordnung  $\alpha_s^2 \beta_0$  wurden unter anderem zum Leptonenenergiespektrum [62] und zu den hadronischen Momenten [57, 59] berechnet. Auch BLM-Korrekturen höherer Ordnung sind bekannt ([60] sowie darin vorkommende Literaturhinweise).

Die größten theoretischen Unsicherheiten kommen somit aus den gesamten  $\alpha_s^2$ -Korrekturen zur führenden Ordnung sowie aus dem ersten gemischten Term in der störungstheoretischen

und nichtstörungstheoretischen Entwicklung, den  $\alpha_s$ -Beiträgen zu den  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2$ -Termen. Mit dem Ziel, diesen gemischten Term zu berechnen, wird in dieser Arbeit ein Formalismus entwickelt, der sich zur Berechnung von Strahlungskorrekturen der Ordnung  $\alpha_s$  zum hier vorliegenden Zerfall eignet. Die Infrarot-Divergenzen der einzelnen Diagramme werden mittels Dimensionaler Regularisierung behandelt, was – im Gegensatz zum Einführen einer Gluonmasse – die Ausdrücke eichinvariant lässt. Die Berechnung der Momente sowie der Rate erfolgt durch numerische Integration.

Mittels dieses Formalismus berechnen wir die  $\alpha_s$ -Korrekturen auf Partonniveau. Hierbei reproduzieren wir mit hoher numerischer Genauigkeit bereits bekannte Ergebnisse [60] durch eine unabhängige Rechnung mit anderen Methoden, was eine wichtige Gegenprobe der in [60] präsentierten Ergebnisse ist, insbesondere da es nie einen genauen Vergleich zwischen [60] und [58] gegeben hat.

Da die hier entwickelte Methode die Integrale numerisch auswertet, eignet sie sich insbesondere zur Berechnung der  $\alpha_s$ -Korrekturen zu den  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2$ -Termen, wo eine analytische Behandlung aufgrund der Komplexität der auftretenden Ausdrücke ausgeschlossen scheint. Die vollständige Berechnung dieser Korrekturen übersteigt jedoch den Rahmen dieser Arbeit. Ergebnisse für  $\alpha_s$ -Korrekturen zu den Termen, die proportional zum nichtstörungstheoretischen Parameter  $\mu_\pi^2$  sind, werden in [63] vorgestellt. Der hier entwickelte Formalismus erhält die Eichinvarianz, daher eignet er sich auch zur Berechnung der Korrekturen proportional zum chromomagnetischen Operator  $\mu_G^2$ .

### 1.2.5 Die Bestimmung von $V_{ub}$ aus inklusiven $B$ -Zerfällen

Die Bestimmung von  $|V_{ub}|$  aus dem inklusiven semileptonischen Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  wird dadurch erschwert, dass Experimente die totale Rate für  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  nicht messen können, da ein Teil des Phasenraums durch einen großen Untergrund aus  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  dominiert ist. Daher ist es nötig, Schnitte im Phasenraum einzuführen. Daten für inklusive  $b \rightarrow u \ell \bar{\nu}_\ell$ -Übergänge sind vor allem in der sogenannten *Shapefunktions-Region* des Phasenraums verfügbar, wo der hadronische Jet im Endzustand eine große Energie von Ordnung  $m_b$ , aber eine kleine invariante Masse von Ordnung  $\sqrt{\Lambda_{\text{QCD}} m_b}$  trägt. Abbildung 1.7 zeigt den semileptonischen Zerfall in der Shapefunktions-Region: das  $b$ -Quark zerfällt in einen Jet kollinearere Quarks und Gluonen, weiche Gluonen sowie das Lepton und das Lepton-Antineutrino.

Auch für Prozesse, die in der Shapefunktions-Region auftreten, ist eine Entwicklung in inversen Potenzen der Masse des schweren Quarks bzw. der Energie des Jets möglich. Im Gegensatz zur HQE, bei der lokale Operatoren auftreten, erhält man hier nichtlokale Operatoren auf dem Lichtkegel [64, 65]. Der theoretische Rahmen, in dem diese Entwicklung beschrieben wird, ist *Soft-Collinear Effective Theory (SCET)*. Theoretischen Untersuchungen inklusiver  $B$ -Zerfälle mit einem leichten Quark im Endzustand in der Shapefunktions-Region wurde in den letzten Jahren in zahlreichen Veröffentlichungen behandelt [66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73]. Vorhersagen für Zerfallsverteilungen erhält man in Form von *Faktorisierungs-Formeln*, die die physikalische Dynamik an den drei beteiligten Skalen  $m_b \gg \sqrt{\Lambda_{\text{QCD}} m_b} \gg \Lambda_{\text{QCD}}$  voneinander trennen. Die differentielle Zerfallsrate ist proportional zu einem Produkt der sogenannten *harten Funktion* mit einer Faltung der *Jetfunktionen* und der Sha-

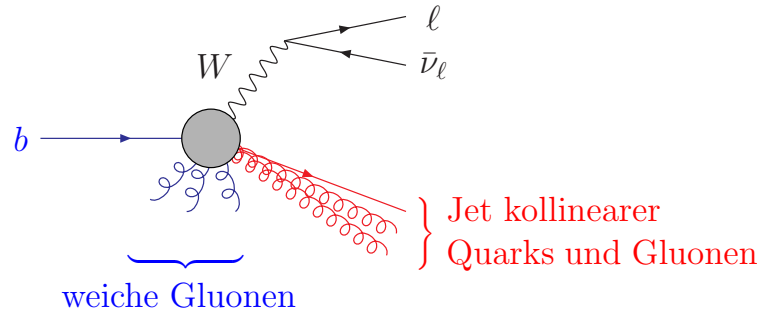


Abbildung 1.7: Zerfall des schweren Quarks in einen Jet kollinearere Quarks und Gluonen sowie weiche Gluonen.

pefunktionen. Die harte Funktion und die Jetfunktionen sind mit störungstheoretischen Methoden berechenbar und beschreiben physikalische Effekte an der harten Skala  $m_b$  bzw. der kollinearen Jet-Skala  $\sqrt{\Lambda_{\text{QCD}} m_b}$ . Die Shapefunktionen sind nichtstörungstheoretische Funktionen, die durch nichtlokale HQET-Matrixelemente definiert sind [64, 65] und Physik an der weichen Skala  $\Lambda_{\text{QCD}}$  beschreiben. Durch die Abhängigkeit der Zerfallsrate von den Shapefunktionen entstehen hadronische Unsicherheiten bei der Bestimmung von  $|V_{ub}|$ . Die größten Unsicherheiten ergeben sich dabei durch die in führender Ordnung in der  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Entwicklung auftretende Shapefunktion.

Es gibt zwei Möglichkeiten, mit diesen hadronischen Unsicherheiten umzugehen bzw. sie zu eliminieren: entweder man verwendet die aus einem Prozess extrahierte Shapefunktion als Eingabe für einen anderen Prozess, oder man konstruiert eine von der Shapefunktion unabhängige Beziehung zwischen Zerfallsverteilungen in verschiedenen Prozessen. In diesem Zusammenhang wird am Häufigsten und sehr erfolgreich der Prozess  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  zusammen mit  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  verwendet [74, 75, 76, 67, 77, 78, 79, 80, 81]. Die durch nächstführende Shapefunktionen auftretenden Korrekturen müssen durch Verwendung von Modellen abgeschätzt werden (siehe z.B. [70]).

Wenn man im Zerfallskanal  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  ähnliche Schnitte im Phasenraum einführt wie bei  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  und die Charm-Quark-Masse nicht als  $m_c \sim m_b$ , sondern als  $m_c \sim \sqrt{m_b \Lambda_{\text{QCD}}}$  zählt, was numerisch gerechtfertigt ist, ist es möglich, auch den Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  in der Shapefunktions-Region zu beschreiben [82, 83]. Die differentielle Zerfallsrate ist dann auch für  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  proportional zu einem Produkt der harten Funktion mit einer Faltung der Jetfunktionen und der Shapefunktionen. Der theoretische Rahmen zur Beschreibung von  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  in der Shapefunktions-Region ist wie bei  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  SCET. Allerdings muss SCET dahingehend erweitert werden, dass es auch möglich ist, massive kollineare Quarks, deren Masse als  $m_c \sim \sqrt{m_b \Lambda_{\text{QCD}}}$  gezählt wird, zu behandeln.

Die führende Shapefunktion kann aus  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  extrahiert und als Eingabe für  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  verwendet werden. Ebenso kann eine von der Shapefunktion unabhängige Beziehung zwischen den Zerfallsverteilungen in  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  und  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  konstruiert werden. Hieraus ist es möglich,  $|V_{ub}|/|V_{cb}|$  zu bestimmen. Dies liefert bei bekanntem  $|V_{cb}|$  eine Bestimmung

von  $|V_{ub}|$ . Der so bestimmte Wert von  $|V_{ub}|$  dient als unabhängige Gegenprobe zu aus anderen Kombinationen, insbesondere aus  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  mit  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$ , bestimmten Werten für  $|V_{ub}|$ .

In dieser Arbeit erweitern wir SCET, so dass auch massive kollineare Quarks, deren Masse als  $m_c \sim \sqrt{m_b \Lambda_{\text{QCD}}}$  gezählt wird, in SCET behandelt werden können. Wir konstruieren die Lagrangedichte für ein massives kollineares Quark, das mit weichen und kollinearen Gluonen wechselwirkt, sowie die entsprechenden Ströme.

Hiermit berechnen wir Zerfallsspektren zu  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  in SCET. Da das  $P_+$ -Spektrum für  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  sich besonders gut zur Extraktion von  $|V_{ub}|$  eignet [77], widmen wir hier dem Spektrum in der Variablen, die die Verallgemeinerung von  $P_+$  für den massiven Fall darstellt, besondere Aufmerksamkeit.

Zum Einen berechnen wir nächstführende Ordnungen in der  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Entwicklung, bleiben dabei jedoch auf Baumgraphenniveau. Wir zeigen, dass der hadronische Tensor auf Baumgraphenniveau sich als Faltung aus Jetfunktionen und Shapefunktionen schreiben lässt. Neben der führenden Shapefunktion, die gleich ist wie die führende Shapefunktion für  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  oder  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ , treten nächstführende Shapefunktionen auf, die bis auf eine Ausnahme identisch wie für  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  [70] sind.

Andererseits berechnen wir zur führenden Ordnung in der  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Entwicklung Strahlungskorrekturen von Ordnung  $\alpha_s$ . Wir zeigen, dass das Einschleifen-Ergebnis für den hadronischen Tensor in faktorisierter Form geschrieben werden kann. Die harte Funktion und die hier vorkommende, führende Shapefunktion sind die gleichen wie für  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$ , nur die Jetfunktion hängt von der Charm-Quark Masse ab. Besonderes Augenmerk gilt der Berechnung der Jetfunktion sowie der Konstruktion einer von der Shapefunktion unabhängigen Beziehung zwischen  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  und  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$ .

## 1.2.6 Aufbau der Arbeit und Publikationen

### Aufbau der Arbeit

An diese Einführung schliesst sich ein Kapitel über effektive Feldtheorien an. Nach einem Abschnitt, der in das Thema der effektiven Theorien einführt, werden die in dieser Arbeit verwendeten effektiven Feldtheorien im Detail vorgestellt. In Abschnitt 2.4 geschieht die Erweiterung von SCET zur Beschreibung massiver kollinearere Quarks.

Kapitel 3 widmet sich der Entwicklung des Formalismus zur Berechnung von QCD-Strahlungskorrekturen zum Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$ . Dies beinhaltet die Behandlung der Infrarot-Divergenzen in eichinvarianter Form mittels Dimensionaler Regularisierung, die Parametrisierung des Phasenraums, die Berechnung von Schleifendiagrammen und schließlich die numerische Auswertung der Integrale. Nach der Präsentation von numerischen Ergebnissen für die Zerfallsrate und die Momente auf Partonniveau wird ein Ausblick auf die Berechnung von  $\alpha_s$ -Korrekturen zu den  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2$ -Termen gegeben.

Kapitel 4 umfasst die Berechnung von Zerfallsspektren zum Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  in der Shapefunktions-Region, wobei die Erweiterung von SCET zur Behandlung massiver kollinearere Quarks Anwendung findet. Zunächst wird die dreifach differentielle Rate in nächst-

führender Ordnung in der  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Entwicklung auf Baumgraphenniveau berechnet, die von nächstführenden Shapefunktionen abhängt. Anschließend werden Strahlungskorrekturen von Ordnung  $\alpha_s$  zur führenden Ordnung in der  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Entwicklung behandelt. Hieraus wird eine von der Shapefunktion unabhängige Beziehung zwischen dem  $P_+$ -Spektrum in  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  und dem  $U$ -Spektrum in  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  durch Konstruktion einer Gewichtsfunktion aufgestellt.

In Kapitel 5 werden schließlich die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst.

### Publikationen

Die in Kapitel 4 beschriebene Behandlung des Zerfalls  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  in der Shapefunktions-Region unter Verwendung von SCET wurde gemeinsam mit Thorsten Feldmann, Thomas Mannel und Ben D. Pecjak in zwei Publikationen veröffentlicht. Zunächst wurden die in Abschnitt 4.2 vorgestellten Korrekturen nächstführender Ordnung in  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$  zum Baumgraphenniveau zusammen mit der in Abschnitt 2.4 präsentierten Erweiterung von SCET zur Beschreibung massiver kollinearere Quarks in [84] veröffentlicht. Außerdem wurde die in Abschnitt 4.3 vorgestellte Berechnung von Strahlungskorrekturen zur führenden Ordnung der  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Entwicklung in [85] publiziert. Eine Veröffentlichung der in Kapitel 3 vorgestellten Methode zur Berechnung von QCD-Strahlungskorrekturen zum Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  sowie über diese Arbeit hinaus gehender Ergebnisse ist zusammen mit Thomas Becher und Enrico Lunghi in Vorbereitung [63].





# Kapitel 2

## Effektive Feldtheorien

### 2.1 Was sind effektive Feldtheorien?

Bei der Beschreibung eines physikalischen Systems können wir uns auf die Freiheitsgrade konzentrieren, die bei der betrachteten Energieskala relevant sind. Insbesondere in Fällen, in denen Teilchen mit sehr unterschiedlichen Massen bzw. Energien an einem Prozess beteiligt sind, ist es sinnvoll, eine *effektive Theorie* zu konstruieren. Freiheitsgrade, die jeweils erst bei höheren Energien angeregt werden können, treten in der effektiven Theorie nicht explizit auf. Gemäß des Entkopplungstheorems von Appelquist und Carazzone [86] sind die Effekte der schweren Freiheitsgrade in der Niederenergietheorie i.A. durch inverse Potenzen der jeweiligen Masse unterdrückt. Zusätzlich treten bei der störungstheoretischen Berechnung von Strahlungskorrekturen logarithmische Abhängigkeiten von der großen Masse auf. Diese großen Logarithmen können mittels der Renormierungsgruppe in der effektiven Theorie systematisch aufsummiert werden.

Im einfachsten Fall treten die schweren Teilchen mit Masse  $M$  bei niedrigen Energien nicht als externe Zustände auf. Wir können dann die zugehörigen Felder im erzeugenden Funktional der Greenschen Funktionen der Theorie *ausintegrieren*. Selbst wenn die Wirkung der vollen Theorie lokal ist, erhalten wir zunächst eine nichtlokale effektive Wirkung. Dies hängt damit zusammen, dass die schweren Teilchen in der vollen Theorie in virtuellen Prozessen auftreten und über eine kurze, aber endliche Strecke der Länge  $\Delta x \sim 1/M$  propagieren können. Die effektive Wirkung wird dann in eine unendliche Reihe lokaler Ausdrücke entwickelt. Die zugehörige Hamiltondichte kann dargestellt werden als

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \sum_k C_k(M) \mathcal{O}_k|_M. \quad (2.1)$$

Dabei enthalten die Koeffizienten  $C_k(M)$  die Hochenergiebeiträge, also die Beiträge von Skalen oberhalb  $M$ , während die Niederenergiebeiträge von den *lokalen* Operatoren  $\mathcal{O}_k|_M$  erzeugt werden. Die effektive Hamiltondichte muss ebenso wie die Lagrangedichte  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ , für die  $\int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}} = S_{\text{eff}}$  gilt, Massendimension vier haben, da die Wirkung dimensionslos ist. Also muss für jeden Beitrag zu  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  die Summe der Dimensionen von Koeffizient und Operator vier sein. Da die Dimension der Koeffizienten von inversen Potenzen der großen Skala  $M$  kommt, ist es oft sinnvoll, entsprechende Potenzen von  $1/M$  auszuklammern und die Koeffizienten dimensionslos zu machen. Die effektive Hamiltondichte sieht dann folgendermaßen

aus:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \sum_k \frac{1}{M^k} \sum_j c_{k,j} \mathcal{O}_{k,j}|_M. \quad (2.2)$$

Hier sehen wir explizit, dass höherdimensionale Operatoren durch inverse Potenzen der großen Skala  $M$  unterdrückt sind und dass die Entwicklung in Produkte aus Koeffizienten und Operatoren praktisch eine Entwicklung in inversen Potenzen der Masse des schweren Teilchens  $M$  - eine *Heavy Particle Expansion* - ist. Zu einer Potenz  $k$  in der  $1/M$ -Entwicklung können mehrere Operatoren gehören, die durch den Index  $j$  unterschieden werden.

Schließlich bestimmt man die Koeffizienten  $c_{k,j}$  aus einem Vergleich der effektiven Theorie mit der vollen Theorie an der Skala  $M$ , bei der beide Theorien das gleiche Ergebnis liefern müssen, da sie die gleiche Physik beschreiben. Diese Anschlussrechnung nennt man auch *Matching*. Quantenkorrekturen, die große virtuelle Impulse enthalten, spiegeln sich in der effektiven Theorie in den Koeffizienten wider.

Es ist auch möglich, Beiträge hoher und niedriger Energie durch den beliebigen Skalenparameter  $\mu$ , der die Dimension einer Masse hat, anstelle durch die schwere Masse  $M$  voneinander abzugrenzen. Wir können alle Beiträge oberhalb  $\mu \leq M$  als Hochenergiebeiträge betrachten, während alles unterhalb  $\mu$  zum Niederenergiebeitrag gehört. (2.2) wird nun zu :

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \sum_k \frac{1}{M^k} \sum_j c_{k,j}(M/\mu) \mathcal{O}_{k,j}|_\mu. \quad (2.3)$$

Die dimensionslosen Koeffizienten  $c_{k,j}(M/\mu)$ , die nun vom Verhältnis  $M/\mu$  abhängen, enthalten Beiträge hoher Energie, d.h. Beiträge von Physik oberhalb der Skala  $\mu$ . Die Niederenergiebeiträge von Skalen unterhalb  $\mu$  werden weiterhin von den Operatoren  $\mathcal{O}_{k,j}|_\mu$  generiert. Dies bedeutet, dass eine Veränderung der Skala  $\mu$  neu definiert, was Hoch- und Niederenergiephysik ist. Die *Renormierungsgruppengleichungen* folgen aus der Tatsache, dass Observablen nicht vom beliebigen Skalenparameter  $\mu$  abhängen dürfen. Diese Bedingung lässt sich für das Matrixelement der effektiven Hamiltondichte schreiben als

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} \langle \mathcal{H}_{\text{eff}} \rangle. \quad (2.4)$$

Hieraus folgt die Renormierungsgruppengleichung für die Koeffizienten  $c_{k,j}(M/\mu)$ . Die Koeffizienten  $c_{k,j}$  in (2.2) sind die Koeffizienten  $c_{k,j}(M/\mu = 1)$  bei der Skala  $\mu = M$ . Das Matching liefert somit die Anfangswerte für die Renormierungsgruppenentwicklung der Koeffizienten  $c_{k,j}(M/\mu)$ . Durch Lösen dieser Renormierungsgruppengleichung werden die für typische Werte von  $\mu \ll M$  auftretenden großen Logarithmen  $\ln(\mu/M)$  aufsummiert.

Man unterscheidet zwei Arten von effektiven Feldtheorien. Es gibt einerseits effektive Feldtheorien, bei denen man die zugrunde liegende volle Theorie kennt und das Matching durchführen kann. Beispiele für effektive Feldtheorien dieses Typs sind:

- Die Fermitheorie; sie beschreibt die schwache Wechselwirkung bei Energien deutlich unterhalb der schwachen Skala.

- Non-relativistic QCD (NRQCD) zur Beschreibung nicht-relativistischer gebundener Zustände.
- Heavy-Quark Effective Theory (HQET); sie wird zur Beschreibung von Hadronen, die *ein* schweres Quark enthalten, und deren Zerfälle in niederenergetische Hadronen verwendet.
- Soft-Collinear Effective Theory (SCET); sie eignet sich zur Beschreibung von Prozessen, bei denen Teilchen mit großer Energie aber kleiner invarianter Masse entstehen, wie z.B. Übergänge schwerer zu leichten Quarks.

Bei effektiven Feldtheorien der zweiten Klasse kennt man die zugrunde liegende volle Theorie nicht oder kann die effektive Feldtheorie nicht durch störungstheoretische Rechnung aus der vollen Theorie ableiten. Ein Beispiel für effektive Theorien dieses Typs, bei denen man die zugrunde liegende volle Theorie nicht kennt, ist:

- Das Standardmodell selbst im Hinblick auf potentielle *Neue Physik*. Im Energiebereich, den die Teilchenbeschleuniger bisher erreichen, enthält es alle relevanten Freiheitsgrade, um die physikalischen Effekte mit einer überwältigenden Genauigkeit zu beschreiben. Bei höheren Energien wird sich das Standardmodell voraussichtlich als effektive Theorie einer zugrunde liegenden neuen Theorie erweisen. Dies könnte z.B. eine große vereinheitlichte Theorie (Grand Unified Theory (GUT)) oder Supersymmetrie (SUSY) sein. Die bei der Analyse von Daten durchgeführte Suche nach Neuer Physik dient dazu, physikalische Effekte zu finden, die durch das Standardmodell nicht beschrieben werden, und daraus auf die Art der zugrunde liegenden vollen Theorie zu schließen.

Ein Beispiel für eine effektive Feldtheorie, zu der die volle Theorie (QCD) bekannt ist, man jedoch die Anschlussrechnung der effektiven an die volle Theorie nicht durchführen kann, ist

- Die chirale Störungstheorie (ChPT), die die starke Wechselwirkung von Hadronen bei sehr niedrigen Energien beschreibt, insbesondere die Dynamik der leichtesten Hadronen, der Pionen. ChPT wird im Wesentlichen durch die chiralen Symmetrien der QCD und durch die Parameter, welche die spontane Symmetriebrechung beschreiben, bestimmt.

## 2.2 Fermitheorie

Bei Zerfällen von  $B$ -Mesonen ist die relevante Energieskala die  $B$ -Masse, die ungefähr 5 GeV ist. Also sind bei  $B$ -Zerfällen die Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung sowie das schwere Top-Quark keine resonanten Freiheitsgrade, da sie weit von ihrer Massenschale entfernt sind. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, zur Beschreibung von semileptonischen  $B$ -Zerfällen die *Fermitheorie* als effektive Theorie zu verwenden.

Die Fermitheorie wurde in einer Zeit entwickelt, in der man das Standardmodell mit seinen die schwache Wechselwirkung vermittelnden schweren Eichbosonen noch nicht kannte, aber bereits Prozesse schwacher Wechselwirkung bei niedrigen Energien beobachtete. Fermi beschrieb bereits 1933 den  $\beta$ -Zerfall eines Neutrons als Vektor-Vektor Kopplung:

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = G \int d^3x \left[ \bar{p}(x) \gamma_\mu n(x) \right] \left[ \bar{e}(x) \gamma^\mu \nu(x) \right]. \quad (2.5)$$

Die Struktur der Elektrodynamik inspirierte ihn zu dieser Beschreibung, da zu der Zeit das Proton und das Neutron als elementare Spin-1/2-Teilchen betrachtet wurden. Nach Entdeckung der Paritätsverletzung wurde (2.5) folgendermaßen modifiziert:

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = -\frac{G_\beta}{\sqrt{2}} \int d^3x \left[ \bar{p}(x) \gamma_\mu (1 - \frac{g_A}{g_V} \gamma^5) n(x) \right] \left[ \bar{e}(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu(x) \right]. \quad (2.6)$$

Der zu dieser Zeit ebenfalls bekannte  $\mu$ -Zerfall wurde analog beschrieben:

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \int d^3x \left[ \bar{\nu}(x) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \mu(x) \right] \left[ \bar{e}(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu(x) \right]. \quad (2.7)$$

Aus heutiger Sicht folgt  $g_A/g_V \neq 1$  daraus, dass das Proton und das Neutron keine Elementarteilchen sind.

Entsprechend der Diskussion in Abschnitt 2.1 beschreiben das Standardmodell und die Fermitheorie bei Energien unterhalb der  $W$ -Masse die gleiche Physik. Dementsprechend wird die effektive Kopplung  $\frac{G_F}{\sqrt{2}}$  zur schwachen Kopplung  $g$  in Beziehung gesetzt. Aus dem Matching bei der Energieskala  $\mu = M_W$  folgt die Relation

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}. \quad (2.8)$$

Analog wird der Zerfall  $b \rightarrow c \ell \bar{\nu}_\ell$  bei Energien unterhalb der  $W$ -Masse beschrieben durch Matrixelemente der Hamiltondichte

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} \left[ \bar{c} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) b \right] \left[ \bar{\ell} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_\ell \right] + \text{h. c.} \quad (2.9)$$

Die entsprechenden Feynmandiagramme in voller und effektiver Theorie sind in Abbildung 2.1 dargestellt.

## 2.3 Heavy-Quark Effective Theory

*Heavy-Quark Effective Theory* (HQET) liefert im Vergleich zur zugrunde liegenden vollen Theorie, der QCD, eine vereinfachte Beschreibung von Prozessen bei denen ein schweres Quark  $Q$  mit leichten Freiheitsgraden durch den Austausch von weichen Gluonen wechselwirkt. Daher wird HQET zur Beschreibung von Zerfällen von Hadronen verwendet, die *ein*

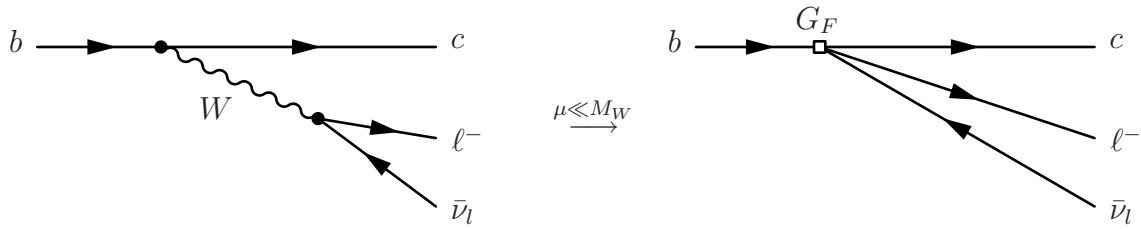


Abbildung 2.1: Feynmandiagramme für den Zerfall  $b \rightarrow c \ell \bar{\nu}_\ell$  in voller und effektiver Theorie. Hierbei bezeichnet das Quadrat die lokale effektive 4-Fermion-Wechselwirkung.

schweres Quark enthalten. Die Masse  $m_Q$  des schweren Quarks repräsentiert in diesem Fall die Hochenergieskala und erlaubt eine störungstheoretische Entwicklung in  $\alpha_s(m_Q)$ . Die hadronischen Effekte geschehen an der niedereenergetischen Skala  $\Lambda_{\text{QCD}} \ll m_Q$ . Dabei kann das schwere Quark ein  $c$ - oder  $b$ -Quark sein.<sup>1</sup> Da wir im Folgenden Zerfälle von Anti- $B$ -Mesonen  $\bar{B}$  beschreiben möchten, wird von hier ab immer das  $b$ -Quark als schweres Quark  $Q$  betrachtet.

Bei mit HQET beschriebenen Prozessen befindet sich das schwere Quark im Anfangs- oder Endzustand, daher ist es nicht möglich, es vollkommen aus der effektiven Theorie zu entfernen. Analog zum Proton im Wasserstoffatom kann das  $b$ -Quark als statische Farbladungsquelle im Ruhesystem des  $\bar{B}$ -Mesons betrachtet werden. Die leichten Freiheitsgrade im  $\bar{B}$ -Meson (leichte Quarks und Gluonen) bewegen sich allerdings – im Gegensatz zum Elektron im Wasserstoffatom – mit relativistischer Geschwindigkeit, was bei der Konstruktion der effektiven Theorie berücksichtigt werden muss. Die hier dargestellten Informationen über HQET stammen aus [87, 88, 25, 89].

Der Impuls eines in einem  $\bar{B}$ -Meson gebundenen  $b$ -Quarks kann geschrieben werden als

$$p_b = m_b v + k. \quad (2.10)$$

Hierbei ist  $v$  die Vierer-Geschwindigkeit des Mesons, für die  $v^2 = 1$  gilt. Der Restimpuls  $k$ , der von Ordnung  $\Lambda_{\text{QCD}}$  ist, gibt an, um wieviel das  $b$ -Quark aufgrund seiner Wechselwirkungen mit den leichten Freiheitsgraden von der Massenschale entfernt ist,

$$p_b^2 - m_b^2 \approx 2m_b v \cdot k = \mathcal{O}(m_b \Lambda_{\text{QCD}}). \quad (2.11)$$

Das  $b$ -Quark bewegt sich somit ungefähr mit der gleichen Geschwindigkeit wie das  $\bar{B}$ -Meson.

Wir tragen dem Rechnung, indem wir das QCD-Feld  $b(x)$  gemäß

$$b_v(x) = e^{im_b v \cdot x} b(x) \quad (2.12)$$

redefinieren. Durch den Phasenfaktor wurde lediglich der große Impuls  $m_b v$  abgespalten. Das Feld  $b_v$  hat nur langreichweitige Moden mit Impulsen von Ordnung  $\Lambda_{\text{QCD}}$ . Somit sind auch Ableitungen, die auf  $b_v$  wirken, von Ordnung  $\Lambda_{\text{QCD}}$ .

<sup>1</sup>Das Top-Quark zerfällt bevor es hadronisiert und ist daher für unsere Betrachtung nicht interessant.

Im nächsten Schritt verwendet man die Projektionsoperatoren

$$P_{\pm} = \left( \frac{1 \pm \not{v}}{2} \right), \quad (2.13)$$

um die „großen“ und „kleinen“ Komponenten des Feldes

$$\begin{aligned} h_v(x) &= P_+ b_v(x) = e^{im_b v \cdot x} P_+ b(x), \\ H_v(x) &= P_- b_v(x) = e^{im_b v \cdot x} P_- b(x) \end{aligned} \quad (2.14)$$

zu identifizieren. Aufgrund der Projektionseigenschaften von  $P_{\pm}$  gilt

$$\begin{aligned} b_v(x) &= \left[ h_v(x) + H_v(x) \right], \\ b(x) &= e^{-im_b v \cdot x} \left[ h_v(x) + H_v(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Die Geschwindigkeit  $v$  ist in der effektiven Theorie eine Konstante, die die Rolle eines Indizes für die effektiven Felder  $h_v$  und  $H_v$  spielt. Im Ruhesystem des  $B$ -Mesons, wo  $v = (1, \vec{0})$  gilt, entspricht  $h_v$  den oberen und  $H_v$  den unteren beiden Komponenten des Dirac-Spinors des  $b$ -Quarks. In diesem Fall repräsentiert  $h_v$  die statische Farbladungsquelle für ein  $b$ -Quark. Dagegen können die Antiquark-Moden in  $H_v$  ausintegriert werden, sofern wir uns nur für Prozesse mit externen  $b$ -Quarks interessieren. Hierbei ist zu beachten, dass bei niedrigen Energien  $E^2 < 4m_b^2$  die Quantenzahlen  $b$  und  $\bar{b}$  separat erhalten sind.

Möchte man ein Hadron beschreiben, das ein  $\bar{b}$ -Antiquark enthält, braucht man die Felder

$$\begin{aligned} h_v^-(x) &= e^{-im_b v \cdot x} P_- b(x), \\ H_v^-(x) &= e^{-im_b v \cdot x} P_+ b(x), \end{aligned} \quad (2.16)$$

so dass

$$b(x) = e^{im_b v \cdot x} \left[ h_v^-(x) + H_v^-(x) \right] \quad (2.17)$$

gilt. Die effektive Lagrangedichte erhält man in diesem Fall, indem man im Folgenden  $v \rightarrow -v$  und  $h_v \rightarrow h_v^-$  ersetzt.

### 2.3.1 Die effektive Lagrangedichte

Zur Herleitung der Lagrangedichte der HQET gehen wir von dem Teil der Lagrangedichte der QCD (1.25) aus, der Wechselwirkungen des  $b$ -Quarks beschreibt

$$\mathcal{L} = \bar{b} [i\not{D} - m_b] b. \quad (2.18)$$

Hierbei ist  $D_{\mu}$  die in (1.21) definierte kovariante Ableitung in QCD. Nach der Redefinition (2.12) wird (2.18) zu

$$\mathcal{L} = \bar{b}_v [i\not{D} - m_b(1 - \not{v})] b_v. \quad (2.19)$$

Einsetzen von (2.15) liefert

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\bar{h}_v + \bar{H}_v)[i\not{D} - m_b(1 - \not{v})](h_v + H_v) \\ &= \bar{h}_v(iv \cdot D)h_v + \bar{H}_v(-iv \cdot D - 2m_b)H_v + \bar{H}_v i\not{D}_\perp h_v + \bar{h}_v i\not{D}_\perp H_v.\end{aligned}\quad (2.20)$$

Für jeden Vierervektor  $X$  ist es möglich, ihn in eine zur Vierergeschwindigkeit  $v$  parallele und eine hierzu senkrechte Komponente zu zerlegen. Die senkrechte Komponente ist

$$X_\perp^\mu = X^\mu - v^\mu v \cdot X. \quad (2.21)$$

Entsprechend ist die senkrechte Komponente der kovarianten Ableitung  $D_\perp^\mu$  definiert. Um die zweite Zeile von (2.20) zu erhalten, verwendet man

$$\begin{aligned}P_+ \gamma_\mu P_+ &= v_\mu P_+ \\ \text{und } P_- \gamma_\mu P_+ &= (\gamma_\mu - v_\mu \not{v}) P_+, \end{aligned}\quad (2.22)$$

was sich unter Verwendung der Antivertauschungsrelationen der Dirac-Matrizen sowie der Eigenschaften der Projektoren und der Vierergeschwindigkeit leicht herleiten lässt.

An (2.20) erkennt man explizit, dass  $h_v$  masselose Freiheitsgrade beschreibt, während  $H_v$  einer Anregung mit Masse  $2m_b$  entspricht. Dies ist gerade die Energie, die zur Erzeugung eines Quark-Antiquark-Paares benötigt wird. Auf Baumgraphenniveau können die schweren Freiheitsgrade durch Lösung der klassischen Bewegungsgleichung für das Feld  $\bar{H}_v$  aus der Theorie entfernt werden

$$\frac{\partial}{\partial \bar{H}_v} \mathcal{L} = (-iv \cdot D - 2m_b)H_v + i\not{D}_\perp h_v = 0. \quad (2.23)$$

Dies lässt sich nach  $H_v$  auflösen, man erhält für  $H_v$  in Abhängigkeit von  $h_v$

$$H_v = \frac{1}{iv \cdot D + 2m_b} i\not{D}_\perp h_v. \quad (2.24)$$

Setzt man diesen Ausdruck für  $H_v$  nun in (2.20) ein, so ergibt sich

$$\mathcal{L} = \bar{h}_v(iv \cdot D)h_v + \bar{h}_v i\not{D}_\perp \frac{1}{iv \cdot D + 2m_b} i\not{D}_\perp h_v. \quad (2.25)$$

### 2.3.2 Die Entwicklung in $1/m_b$

Das Feld  $H_v$  (2.24) ist gegenüber  $h_v$  um einen Faktor  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$  unterdrückt, da es eine auf das Feld  $h_v$  wirkende Ableitung im Zähler enthält und der Nenner durch  $2m_b$  dominiert ist. Ebenso ist in (2.25) der zweite Ausdruck gegenüber dem ersten um einen Faktor  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$  unterdrückt. Jede auf das Feld  $h_v$  wirkende Ableitung ist von Ordnung  $\Lambda_{\text{QCD}}$ , was viel kleiner ist als  $m_b$ . Daher ist es auch möglich, den Ausdruck  $1/(iv \cdot D + 2m_b)$  in Potenzen von  $iD/m_b$  zu entwickeln. Da es sich hierbei um eine Entwicklung in inversen Potenzen von  $m_b$  handelt,

bezeichnet man dies als *Heavy Quark Expansion*. Für die effektive Lagrangedichte erhält man somit

$$\mathcal{L} = \bar{h}_v(iv \cdot D)h_v + \bar{h}_v i\not{D}_\perp \frac{1}{2m_b} i\not{D}_\perp h_v + \mathcal{O}((\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2). \quad (2.26)$$

Entsprechend kann man den Ausdruck (2.24) für das Feld  $H_v$  auch in das  $b$ -Feld in (2.15) einsetzen sowie danach in Potenzen von  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$  entwickeln. Man erhält für das  $b$ -Feld

$$\begin{aligned} b(x) &= e^{-im_b v \cdot x} \left[ 1 + \frac{1}{iv \cdot D + 2m_b} i\not{D}_\perp \right] h_v \\ &= e^{-im_b v \cdot x} \left[ 1 + \frac{1}{2m_b} i\not{D}_\perp \right] h_v + \mathcal{O}((\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Mittels (2.26) und (2.27) ist es möglich, jedes Matrixelement, das Felder und Zustände schwerer Quarks enthält, durch eine Entwicklung in  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$  auszudrücken.

Der zweite Ausdruck in (2.26) kann durch zwei unabhängige Operatoren ausgedrückt werden. Wir verwenden die Umformung

$$\begin{aligned} i\not{D}_\perp i\not{D}_\perp &= iD_\perp^\mu iD_\perp^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu \\ &= iD_\perp^\mu iD_\perp^\nu \frac{1}{2} [\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} + [\gamma_\mu, \gamma_\nu]] \\ &= (iD_\perp)^2 - i(iD_\perp^\mu)(iD_\perp^\nu) \sigma_{\mu\nu} \\ &= (iD_\perp)^2 + \frac{g}{2} \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Hierbei gilt  $\sigma_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2$ . Die Gluon-Feldstärke  $G^{\mu\nu}$  haben wir bereits in (1.24) eingeführt. Da  $\bar{h}_v \sigma_{\mu\nu} v^\mu h_v = 0$  gilt, können wir jedes  $iD_\perp$ , das im Produkt mit  $\sigma_{\mu\nu}$  auftritt, durch  $iD$  ersetzen, d.h. wir brauchen für in  $G^{\mu\nu}$  enthaltene kovariante Ableitungen nicht die senkrechten Komponenten. Wir setzen das Ergebnis aus (2.28) in (2.26) ein und erhalten

$$\mathcal{L} = \bar{h}_v(iv \cdot D)h_v + \frac{1}{2m_b} \bar{h}_v (iD_\perp)^2 h_v + \frac{g}{4m_b} \bar{h}_v \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} h_v + \mathcal{O}((\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2). \quad (2.29)$$

Die beiden durch  $1/m_b$  unterdrückten Terme in (2.29) lassen sich im Ruhesystem des  $\bar{B}$ -Mesons folgendermaßen interpretieren:

$$\mathcal{O}_{\text{kin}} = \frac{1}{2m_b} \bar{h}_v (iD_\perp)^2 h_v \quad (2.30)$$

ist die kinetische Energie des schweren Quarks, die aufgrund der Bewegung des schweren Quarks im Meson entsteht.

$$\mathcal{O}_{\text{mag}} = \frac{g}{4m_b} \bar{h}_v \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} h_v \quad (2.31)$$

ist das chromomagnetische Moment des schweren Quarks. Es beschreibt die Wechselwirkung des Quarkspins mit dem Gluonfeld.



(2.29) wird unter Berücksichtigung von QCD-Strahlungskorrekturen zu

$$\mathcal{L} = \bar{h}_v(i v \cdot D) h_v + \frac{1}{2m_b} \bar{h}_v(i D_\perp)^2 h_v + a(\mu) \frac{g}{4m_b} \bar{h}_v \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} h_v + \mathcal{O}((\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2), \quad (2.32)$$

wobei  $a(\mu)$  ein Matching-Koeffizient ist, der aus der Anschlussrechnung der effektiven an die volle Theorie bestimmt wird. Aufgrund der Reparametrisierungsinvarianz  $v \rightarrow v + \delta v$  erhält der Koeffizient des kinetischen Operators keine Strahlungskorrekturen [90]. An der effektiven Lagrangedichte auf Baumgraphenniveau (2.29) erkennt man, dass

$$a(m_b) = 1 + \mathcal{O}[\alpha_s(m_b)] \quad (2.33)$$

gelten muss.

Der führende Term in (2.29) ist vom Flavour und vom Spin des schweren Quarks unabhängig. Dies erkennt man daran, dass dieser Ausdruck weder von der Masse noch von Dirac-Matrizen abhängt. Der Operator der kinetischen Energie bricht aufgrund der expliziten Abhängigkeit von der Masse die Flavour-Symmetrie schwerer Quarks, erhält aber die Spin-Symmetrie, während das chromomagnetische Moment sowohl die Flavour-Symmetrie als auch die Spin-Symmetrie bricht. Die Erwartungswerte der kinetischen Energie und des chromomagnetischen Moments parametrisieren nichtstörungstheoretische Effekte in nächstführender Ordnung in  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ . Sie werden durch die Parameter

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\langle B(v) | \bar{h}_v(i D_\perp)^2 h_v | B(v) \rangle}{2M_B}, \\ \text{und} \quad \lambda_2 &= \frac{\langle B(v) | \bar{h}_v \frac{g}{2} \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} h_v | B(v) \rangle}{6M_B} \end{aligned} \quad (2.34)$$

ausgedrückt. Hierbei ist  $|B(v)\rangle$  ein  $B$ -Meson-Zustand in HQET. Er unterscheidet sich von  $|B(p_B)\rangle$ , dem  $B$ -Meson-Zustand in voller QCD, um einen konstanten Faktor aus der Normierung der Zustände sowie um  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Korrekturen. Für den Zusammenhang zwischen der Masse des  $B$ -Mesons und der Masse des  $b$ -Quarks gilt

$$M_B = m_b + \bar{\Lambda} - \frac{\lambda_1 + 3\lambda_2}{2m_b} + \mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}}^3/m_b^2), \quad (2.35)$$

während für den Zusammenhang zwischen der Masse des  $B^*$ -Mesons und der Masse des  $b$ -Quarks gilt

$$M_{B^*} = m_b + \bar{\Lambda} - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2m_b} + \mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}}^3/m_b^2). \quad (2.36)$$

Für exakte Spin-Symmetrie ist die Spin-Ausrichtung des schweren Quarks relativ zu den leichten Freiheitsgraden irrelevant. Deshalb ist die Abhängigkeit der  $B$ - und der  $B^*$ -Masse von den Spin-erhaltenden Operatoren gleich. Die beiden Massen unterscheiden sich nur durch die Abhängigkeit vom die Spin-Symmetrie brechenden chromomagnetischen Operator, was man durch Vergleich von (2.35) mit (2.36) explizit erkennt.  $\lambda_2$  kann daher aus der  $B - B^*$ -Massendifferenz bestimmt werden. Der hier auftretende nichtstörungstheoretische

Parameter  $\bar{\Lambda}$  ist von  $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}})$  und parametrisiert den Unterschied zwischen der Quark- und der Mesonmasse in führender Ordnung in der  $1/m_b$ -Entwicklung.

Bei der Beschreibung von inklusiven  $B$ -Zerfällen mittels HQET oder Heavy Quark Expansion ((HQE), siehe Abschnitt 3.2) werden in führender Ordnung die Ergebnisse auf Parton-niveau reproduziert. Nichtstörungstheoretische Korrekturen werden durch Matrixelemente der lokalen Operatoren höherer Dimension parametrisiert, die durch inverse Potenzen der  $b$ -Quark-Masse unterdrückt sind.

## 2.4 Soft-Collinear Effective Theory für massive kollineare Quarks

Zerfällt das  $\bar{B}$ -Meson in einen hadronischen Jet im Endzustand, der eine große Energie von Ordnung  $m_b$ , aber eine kleine invariante Masse von Ordnung  $\sqrt{\Lambda_{\text{QCD}} m_b}$  hat, so kann dieser Zerfall nicht durch HQET beschrieben werden. Es ist jedoch eine Entwicklung in inversen Potenzen der Masse des schweren Quarks möglich. Man benötigt eine effektive Theorie, die sowohl weiche als auch kollineare, d.h. energetische Freiheitsgrade, die parallel zum Jet emittiert werden, enthält. Die damit verbundenen zwei verschiedenen Niederenergieskalen müssen korrekt separiert werden. Dies geschieht durch die Verwendung von Soft-Collinear Effective Theory (SCET). Nichtstörungstheoretische Korrekturen werden durch Matrixelemente von nichtlokalen Operatoren auf dem Lichtkegel beschrieben.

SCET wurde zunächst in einer Mischung aus Orts- und Impulsraumdarstellung entwickelt [91, 92, 93, 94]. Kollineare Felder sind durch den großen Anteil des kollinearen Impulses der Teilchen, die sie erzeugen und vernichten, gekennzeichnet. Die entsprechenden Ableitungen werden durch „Label-Operatoren“ ersetzt. Daher spricht man bei dieser Darstellung auch vom „Label-Formalismus“. Wir verwenden hier die Ortsraumdarstellung, die bei der Entwicklung von SCET in [95, 96] eingeführt wurde.

In diesem Abschnitt werden sowohl die Grundlagen von SCET als auch die Verallgemeinerung von SCET zur Behandlung massiver kollinearere Quarks vorgestellt. Die hier dargestellten Grundlagen folgen vor allem [95]. An einigen Stellen wird auf Informationen aus [92] zurückgegriffen.

### 2.4.1 Lichtkegel-Kinematik und Skalierung mit $m_b$

Eine Komplikation in SCET ist, dass verschiedene Komponenten von Impulsen und Feldern unterschiedlich mit der großen Skala  $m_b$  skalieren. Um diese Skalierung explizit darzustellen, führen wir die Lichtkegel-Vektoren  $n_+^\mu$  und  $n_-^\mu$  ein, für die gilt

$$n_+^2 = n_-^2 = 0, \quad n_+ n_- = 2, \quad v \cdot n_\pm \sim 1, \quad v = \frac{1}{2}(n_+ + n_-). \quad (2.37)$$

Im Ruhesystem des  $\bar{B}$ -Mesons mit  $v = (1, 0, 0, 0)$  wählt man

$$n_+ = (1, 0, 0, 1) \quad \text{und} \quad n_- = (1, 0, 0, -1). \quad (2.38)$$

Jeder Lorentz-Vektor kann geschrieben werden als

$$p^\mu = (n_+ p) \frac{n_+^\mu}{2} + p_\perp^\mu + (n_- p) \frac{n_-^\mu}{2}, \quad (2.39)$$

wobei  $p_\perp$  zwei Komponenten bezeichnet, die senkrecht zu den beiden Lichtkegel-Vektoren  $n_+^\mu$  und  $n_-^\mu$  sind, für die also  $p_\perp \cdot n_- = p_\perp \cdot n_+ = 0$  gilt. Die beiden so definierten senkrechten Komponenten dürfen nicht mit den drei zum Vierervektor  $v$  senkrechten Komponenten, die bei der Herleitung von HQET in (2.21) eingeführt wurden, verwechselt werden. Für das Quadrat des Vektors erhalten wir

$$p^2 = (n_+ p)(n_- p) + p_\perp^2. \quad (2.40)$$

Soweit nicht anders vermerkt geben wir von hier an die Skalierung der verschiedenen Komponenten eines Vektors  $f$  mit der  $b$ -Masse – das sogenannte *Power Counting* – als  $(n_+ f, f_\perp, n_- f)$  an.

Um die Skalierung der verschiedenen Komponenten korrekt zu zählen, führt man den dimensionslosen Entwicklungsparameter

$$\lambda = \sqrt{\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{m_b}} \ll 1 \quad (2.41)$$

ein.<sup>2</sup>

Abbildung 1.7 zeigt den Zerfall eines schweren Quarks in einen Jet kollinearer Quarks und Gluonen sowie in weiche Gluonen. Der Jet kollinearer Teilchen bewegt sich mit einem großen Impuls von Ordnung  $m_b$  in die  $n_-$ -Richtung, so dass das Quadrat der invarianten Masse von Ordnung  $m_b^2 \lambda^2$  ist. Der Impuls eines *kollinearen* Teilchens skaliert wie  $p_c^\mu \sim m_b(1, \lambda, \lambda^2)$ , so dass  $p_c^2 \sim m_b^2 \lambda^2$  erfüllt ist. Wenn man zum Jet kollinearer Teilchen im Endzustand ein *weiches* Teilchen addiert, dessen Impuls wie  $p_s^\mu \sim m_b(\lambda^2, \lambda^2, \lambda^2)$  skaliert, ändert sich dadurch die invariante Masse des Endzustands nicht. Die effektive Theorie enthält daher weiche Teilchen. Die effektive Theorie enthält keine Teilchen, deren Impuls wie  $p^\mu \sim m_b(\lambda, \lambda, \lambda)$  skaliert. Die Addition eines solchen Teilchens zu einem Jet kollinearer Teilchen würde zu einer invarianten Masse von Ordnung  $m_b^2 \lambda$  führen, was der hier vorhandenen Kinematik widerspricht.<sup>3</sup>

Die Masse des Charm-Quarks zählen wir als

$$m_c \sim \sqrt{m_b \Lambda_{\text{QCD}}} \sim m_b \lambda, \quad (2.42)$$

<sup>2</sup>Zur Beschreibung exklusiver  $B$ -Zerfälle in SCET<sub>II</sub> wird manchmal auch  $\lambda = \frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{m_b}$  als Entwicklungsparameter verwendet.

<sup>3</sup>Die Bezeichnungen „weich“ und „kollinear“ werden in der Literatur unterschiedlich verwendet. Die hier als „weich“ bezeichneten Freiheitsgrade werden manchmal als „ultra-weich“ bezeichnet, Impulse, die wie  $p^\mu \sim m_b(\lambda, \lambda, \lambda)$  skalieren, werden dann „weich“ genannt. Ebenso werden die hier als „kollinear“ bezeichneten Moden mitunter „hart-kollinear“ genannt, dann werden Moden, die wie  $(1, \lambda^2, \lambda^4)$  skalieren, als „kollinear“ bezeichnet. Eine Gegenüberstellung der verschiedenen gängigen Terminologien findet sich in [97].

so behandeln wir das Charm-Quark als massives Quark in SCET. Eine weitere Möglichkeit wäre, das Charm-Quark wie das  $b$ -Quark als schweres Quark und somit das Verhältnis  $m_c/m_b$  als fest zu betrachten, wie dies bei der Beschreibung des Zerfalls  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  mittels HQET oder HQE der Fall ist. Bei der Beschreibung leichter kollinearere Quarks in SCET wird die entsprechende Quark-Masse als  $m \sim m_b \lambda^2$  gezählt.

Der Impuls eines kollinearen Charm-Quarks soll weiterhin

$$p_c^2 - m_c^2 \sim p_c^2 \sim m_b^2 \lambda^2 \quad (2.43)$$

erfüllen. Bei einem Charm-Quark für das  $p_c^2 - m_c^2 \sim m_b^2 \lambda^3$  gilt, das also weniger abseits seiner Massenschale ist als die hier beschriebenen Charm-Quarks im Jet, handelt es sich um ein in einem  $D$ -Meson gebundenes Charm-Quark.

Kollineare und weiche Freiheitsgrade eines Teilchens werden durch verschiedene Felder beschrieben. Wie bei der Herleitung von HQET führt man Projektionsoperatoren ein, um damit auf die „großen“ und „kleinen“ Komponenten des kollinearen Quarkfelds  $\psi_c$

$$\begin{aligned} \xi(x) &= \frac{\not{n}_- \not{n}_+}{4} \psi_c(x) \sim \lambda, \\ \eta(x) &= \frac{\not{n}_+ \not{n}_-}{4} \psi_c(x) \sim \lambda^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

zu projizieren. Dabei folgen die Skalierungsregeln für die Feldoperatoren aus der Skalierung der Ableitungen bzw. Impulse in der QCD-Lagrangedichte. Es gilt

$$\psi_c(x) = \xi(x) + \eta(x) \quad (2.45)$$

und  $\not{n}_- \xi = \not{n}_+ \eta = 0$ . Für masselose Quarks muss man zusätzlich ein weiches Quarkfeld einführen, für das

$$q \sim \lambda^3 \quad (2.46)$$

für alle Komponenten des Spinors gilt. Die Komponenten des kollinearen Gluonfelds skalieren so wie kollineare Impulse,

$$A_c^\mu \sim (1, \lambda, \lambda^2). \quad (2.47)$$

Entsprechend gilt

$$A_s^\mu \sim \lambda^2 \quad (2.48)$$

für alle Komponenten des weichen Gluonfelds. Die kollinearen Teilchen werden im Zerfall eines schweren Quarks erzeugt, daher braucht man auch ein effektives Feld für das schwere Quark. Wenn kollineare Moden mit einem schweren Quark wechselwirken, das sich nahe seiner Massenschale befindet, wird das schwere Quark danach um einen Betrag von Ordnung 1 abseits seiner Massenschale sein. Diese Freiheitsgrade, die sich abseits der Massenschale befinden, werden aus der effektiven Theorie entfernt. Schwere Quarks wechselwirken dann nur mit weichen Gluonen. Daher wird das schwere Quark in HQET beschrieben. Der große Anteil  $m_b v$  des Quarkimpulses (2.10) wird entfernt, indem man das Feld (2.14)

$$h_v(x) = e^{im_b v \cdot x} P_+ b(x) \sim \lambda^3 \quad (2.49)$$

einführt. Da der Restimpuls  $k$  ein weicher Impuls ist, skaliert  $h_v$  so wie die weichen Freiheitsgrade eines masselosen Quarks (2.46).

### 2.4.2 Effektive Lagrangedichte in SCET

In diesem Abschnitt wird einerseits gezeigt, wie die Herleitung der Lagrangedichte in SCET geschieht. Andererseits wird SCET gleichzeitig erweitert, so dass auch massive kollineare Teilchen, deren Masse als  $m_c \sim m_b \lambda$  skaliert, in SCET behandelt werden können. In [98, 99] wurde bereits die Masse eines kollinearen Quarks in die SCET-Lagrangedichte eingebaut, dabei handelte es sich jedoch um ein leichtes Quark, dessen Masse wie  $m \sim m_b \lambda^2$  skaliert. Wir erweitern hier SCET zur Beschreibung kollinearere Charm-Quarks.

Zur Herleitung der Lagrangedichte für massive kollineare Quarks, die mit kollinearen und weichen Gluonen wechselwirken, gehen wir von dem Teil der Lagrangedichte in QCD (1.25) aus, der die Wechselwirkungen von Quarks mit Gluonen enthält

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}_c(i\not{D} - m_c)\psi_c. \quad (2.50)$$

Hierbei beschreibt  $\psi_c$  ein kollineares Quark mit einer Masse  $m_c \sim m_b \lambda$ .  $D_\mu$  ist die in (1.21) definierte kovariante Ableitung in QCD. Nach Zerlegen der kovarianten Ableitung gemäß (2.39) und Einsetzen von (2.45) ergibt sich unter Verwendung der Eigenschaften der Projektoren

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\xi} i(n_- D) \frac{\not{n}_+}{2} \xi + \bar{\eta} i(n_+ D) \frac{\not{n}_-}{2} \eta + \bar{\xi} (i\not{D}_\perp - m_c) \eta + \bar{\eta} (i\not{D}_\perp - m_c) \xi. \quad (2.51)$$

Im nächsten Schritt wird das Feld  $\eta$  aus der Theorie ausintegriert. Durch Lösen der klassischen Bewegungsgleichung für  $\bar{\eta}$  erhält man für  $\eta$  in Abhängigkeit von  $\xi$

$$\eta = \frac{1}{in_+ D} (i\not{D}_\perp + m_c) \frac{\not{n}_+}{2} \xi. \quad (2.52)$$

Setzt man diesen Ausdruck in (2.51) ein, so erhält man

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\xi} \left( i(n_- D) + (i\not{D}_\perp - m_c) \frac{1}{in_+ D} (i\not{D}_\perp + m_c) \right) \frac{\not{n}_+}{2} \xi. \quad (2.53)$$

Die Masse  $m_c$  tritt immer zusammen mit der senkrechten Komponente der kovarianten Ableitung  $i\not{D}_\perp$  auf. Dies ist auch dadurch einsichtig, dass beide wie  $m_b \lambda$  skalieren.

Aus der Lagrangedichte (2.53) kann man den Propagator für ein massives kollineares Quark herleiten. Es ergibt sich

$$G_\xi(p) = \frac{i}{n_- p + (p_\perp^2 - m_c^2)/n_+ p} \frac{\not{n}_-}{2}. \quad (2.54)$$

Die effektive Lagrangedichte für masselose Quarks enthält Wechselwirkungen zwischen kollinearen und weichen Feldern masseloser Quarks [95]. Dies trifft nicht zu auf die effektive Lagrangedichte für massive Charm-Quarks. Aufgrund der endlichen Masse des Charm-Quarks enthalten Schleifendiagramme keine weichen IR-Divergenzen, die mit den Charm-Propagatoren verknüpft sind. Daher treten Charm-Quarks weder in der weichen Lagrangedichte noch in  $B$ -Meson-Zuständen auf. Neben der Lagrangedichte (2.53) für massive kollineare Quarks, die mit kollinearen und weichen Gluonen wechselwirken, verbleibt die Yang-Mills-Lagrangedichte, also der erste Teil von (1.25). In dieser Arbeit wird nicht näher auf

die Yang-Mills-Lagrangedichte eingegangen, da sie nur von den Gluonfeldern abhängt und sich daher durch Behandlung eines massiven anstelle eines masselosen kollinearen Quarks nicht ändert.

Um (2.53) zu erhalten, haben wir nur die QCD-Lagrangedichte umgeschrieben. Nun entwickeln wir die Lagrangedichte (2.53) im kleinen Parameter  $\lambda$ . Mittels (2.47) und (2.48) zählen wir, wie die einzelnen Einträge der kovarianten Ableitung

$$iD^\mu = i\partial^\mu + gA_c^\mu + gA_s^\mu = iD_c^\mu + gA_s^\mu \quad (2.55)$$

von Potenzen von  $\lambda$  abhängen. Im senkrechten Teil der kovarianten Ableitung

$$iD_\perp = iD_{\perp c} + gA_{\perp s} \quad (2.56)$$

ist der erste Term von Ordnung  $\lambda$ , während der zweite von Ordnung  $\lambda^2$  ist. In

$$in_+D = in_+D_c + gn_+A_s, \quad (2.57)$$

ist der erste Term von Ordnung 1 und der zweite von Ordnung  $\lambda^2$ . Wir entwickeln den inversen Differentialoperator als

$$\frac{1}{in_+D} = \frac{1}{in_+D_c} - \frac{1}{in_+D_c} gn_+A_s \frac{1}{in_+D_c} + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (2.58)$$

Alle Einträge von  $in_-D$  sind von Ordnung  $\lambda^2$ , daher müssen wir  $in_-D$  nicht entwickeln.

Darüber hinaus führt man die Multipol-Entwicklung der weichen Felder durch. Hierzu schreibt man den Ortsvektor  $x$  gemäß (2.39) und erhält für das Skalarprodukt von Orts- und Impulsvektor

$$p \cdot x = \frac{(n_+p)(n_-x)}{2} + p_\perp x_\perp + \frac{(n_-p)(n_+x)}{2}. \quad (2.59)$$

Aus der Unschärferelation folgt, dass  $p \cdot x$  von Ordnung 1 sein muss. Man verwendet die vorne eingeführten Skalierungseigenschaften für die Impulse kollinearere und weicher Felder und erhält für die Skalierung des Ortsvektors  $(n_-x, x_\perp, n_+x) \sim (1, \lambda^{-1}, \lambda^{-2})$  für ein kollineares Feld und  $x \sim (\lambda^{-2}, \lambda^{-2}, \lambda^{-2})$  für ein weiches Feld. Dies bedeutet, dass in der senkrechten und in der  $n_+$ -Richtung weiche Felder größere Wellenlängen als kollineare Felder haben, sich also langsamer verändern. Daher können wir die Argumente der weichen Felder in diesen Richtungen entwickeln und erhalten mit

$$x_- = (n_+x) \frac{n_-}{2} = n_-x_+ \quad (2.60)$$

$$\phi_s(x) = \phi_s(x_-) + [x_\perp \partial_\perp A_s](x_-) + \frac{1}{2}(n_-x)[(n_+\partial)\phi_s](x_-) + \frac{1}{2}[x_{\mu\perp}x_{\nu\perp}\partial^\mu\partial^\nu\phi_s](x_-) + \mathcal{O}(\lambda^3\phi). \quad (2.61)$$

Hierbei steht  $\phi_s$  für ein weiches Feld, das ein Gluonfeld oder ein schweres Quarkfeld sein kann. In (2.61) ist der zweite Term relativ zum ersten von Ordnung  $\lambda$ , der dritte und vierte Term sind von Ordnung  $\lambda^2$ . Alle Ableitungen auf weiche Felder skalieren wie  $\lambda^2$ .

(2.60) definiert den Vektor  $x_-$ , der sich aus dem Vektor  $n_-$  und dem Skalar  $x_+ = (n_+ x)/2$  zusammensetzt.

Wir führen die Entwicklung von (2.53) bis zur Ordnung  $\lambda^2$  durch und schreiben die Lagrangedichte für ein massives kollineares Quarks als

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\xi^{(0)} + \mathcal{L}_\xi^{(1)} + \mathcal{L}_\xi^{(2)}. \quad (2.62)$$

Für die führende Lagrangedichte erhält man

$$\mathcal{L}_\xi^{(0)} = \bar{\xi} \left( in_- D + (i\mathcal{D}_{\perp c} - m_c) \frac{1}{in_+ D_c} (i\mathcal{D}_{\perp c} + m_c) \right) \frac{\not{n}_+}{2} \xi. \quad (2.63)$$

Zu Ordnung  $\lambda$  und Ordnung  $\lambda^2$  ergeben sich folgende von der Masse des kollinearen Quarks abhängige Beiträge zur Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi m}^{(1)} &= m_c \bar{\xi} \left[ gA_{\perp s}, \frac{1}{in_+ D_c} \right] \frac{\not{n}_+}{2} \xi, \\ \mathcal{L}_{\xi m 1}^{(2)} &= m_c^2 \bar{\xi} \frac{1}{in_+ D_c} g n_+ A_s \frac{1}{in_+ D_c} \frac{\not{n}_+}{2} \xi, \\ \mathcal{L}_{\xi m 2}^{(2)} &= m_c \bar{\xi} \left[ \frac{1}{in_+ D_c} g n_+ A_s \frac{1}{in_+ D_c}, i\mathcal{D}_{\perp c} \right] \frac{\not{n}_+}{2} \xi, \\ \mathcal{L}_{\xi m 3}^{(2)} &= m_c \bar{\xi} \left[ (x_{\perp} \partial_{\perp} g A_{\perp s}), \frac{1}{in_+ D_c} \right] \frac{\not{n}_+}{2} \xi. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Darüber hinaus enthalten  $\mathcal{L}_\xi^{(1)}$  und  $\mathcal{L}_\xi^{(2)}$  auch von der Masse unabhängige Terme, die aus (53) in [95] entnommen werden können. In (2.63) und (2.64) hängen kollineare Felder von  $x$  ab, während weiche Felder Multipol-entwickelt sind und nur von  $x_-$  (2.60) abhängen. Im Folgenden gilt immer

$$h_v(x) \equiv h_v(x_-), \quad A_s(x) \equiv A_s(x_-), \quad (2.65)$$

ohne dass dies explizit dargestellt wird.

Die einzelnen Beiträge  $\mathcal{L}^{(i)}$  zur Lagrangedichte sind nicht eichinvariant unter kollinearen und weichen Eichtransformationen. Lediglich die Summe  $\sum_{i=0}^n \mathcal{L}^{(i)}$  ist eichinvariant bis auf Korrekturen höherer Ordnung. Die Lagrangedichte kann in eichinvarianter Form geschrieben werden, indem man die kollinearen Felder wie in [96] vorgestellt redefiniert. Die führende Lagrangedichte (2.63) bleibt unter dieser Feldredefinition unverändert. Zur Ordnung  $\lambda$  und

$\lambda^2$  ergeben sich die gleichen Ausdrücke wie im masselosen Fall [96]

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\xi^{(1)} &= \bar{\xi} x_\perp^\mu n_-^\nu W_c g G_{\mu\nu}^s W_c^\dagger \frac{\not{n}_+}{2} \xi \\
 \mathcal{L}_{1\xi}^{(2)} &= \frac{1}{2} \bar{\xi} (n_- x) n_+^\mu n_-^\nu W_c g G_{\mu\nu}^s W_c^\dagger \frac{\not{n}_+}{2} \xi, \\
 \mathcal{L}_{2\xi}^{(2)} &= \frac{1}{2} \bar{\xi} x_\perp^\mu x_{\perp\rho} n_-^\nu W_c [D_{\perp s}^\rho, g G_{\mu\nu}^s] W_c^\dagger \frac{\not{n}_+}{2} \xi, \\
 \mathcal{L}_{3\xi}^{(2)} &= \frac{1}{2} \bar{\xi} i \not{D}_{\perp c} \frac{1}{in_+ D_c} x_\perp^\mu \gamma_\perp^\nu W_c g G_{\mu\nu}^s W_c^\dagger \frac{\not{n}_+}{2} \xi \\
 &\quad + \frac{1}{2} \bar{\xi} x_\perp^\mu \gamma_\perp^\nu W_c g G_{\mu\nu}^s W_c^\dagger \frac{1}{in_+ D_c} i \not{D}_{\perp c} \frac{\not{n}_+}{2} \xi.
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

Hierbei bezeichnet  $G_{\mu\nu}^s$  die Feldstärke (1.24) für ein weiches Gluon.  $W_c$  ist die kollineare Wilsonlinie

$$W_c \equiv P \exp \left[ ig \int_{-\infty}^0 ds n_+ A_c(x + sn_+) \right], \tag{2.67}$$

wobei  $P$  die Pfadordnung bezeichnet, die als  $P[A_c(x)A_c(x + sn_+)] = A_c(x)A_c(x + sn_+)$  für  $s < 0$  definiert ist. Erst zur Ordnung  $\lambda^3$  treten wieder Terme auf, die von der Masse  $m_c$  abhängen. Nach der Feldredefinition und in kollinearere Lichtkegel-Eichung  $n_+ A_c = 0$  ersetzt man eigentlich

$$\frac{1}{in_+ D} \rightarrow \frac{1}{in_+ \partial} + \mathcal{O}(\lambda^3) \tag{2.68}$$

(siehe (23) in [96]) in der Entwicklung von (2.53). Somit sind alle Massenterme, die nicht in der führenden Lagrangedichte vorkommen, mindestens um einen Faktor  $\lambda^3$  unterdrückt.

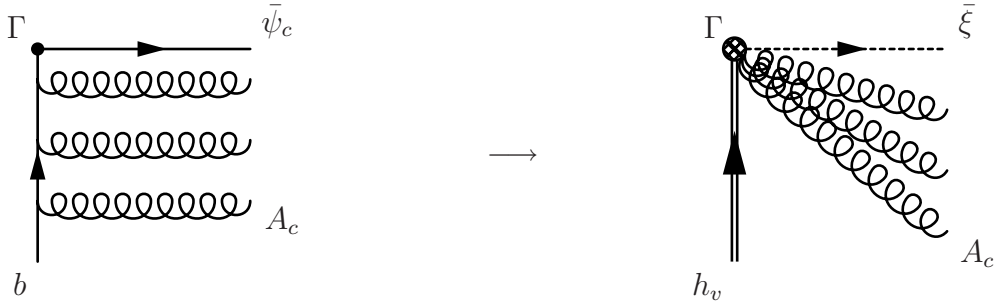
Im Gegensatz zur HQET-Lagrangedichte, wo das chromomagnetische Moment einen Matching-Koeffizienten aus der Anschlussrechnung der effektiven an die volle Theorie erhält, treten in der SCET-Lagrangedichte in höheren Ordnungen der Störungstheorie keine nicht-trivialen Renormierungseffekte auf. Sowohl die Feldrenormierung als auch die laufende Kopplung sind gleich wie in QCD. Es treten keine Matching-Koeffizienten und keine neuen Operatoren auf.

Wir werden die Erzeugung kollinearer Teilchen im Zerfall eines schweren Teilchens betrachten, das sich nahe seiner Massenschale befindet. Dieses System wird durch die Summe der Lagrangedichten in SCET und in HQET

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SCET}} + \mathcal{L}_{\text{HQET}} \tag{2.69}$$

beschrieben, wobei die Beschreibung des schweren Quarks durch die HQET-Lagrangedichte erfolgt.




 Abbildung 2.2: Matching des schwachen  $b \rightarrow c$ -Stroms auf Baumgraphenniveau.

### 2.4.3 Effektive Zerfallsströme in SCET

In diesem Abschnitt wird das Matching des in QCD definierten schwachen Stroms für  $b \rightarrow c$ -Zerfälle auf den entsprechenden Ausdruck in SCET vorgestellt. Das Ergebnis lässt sich als

$$(\bar{\psi}_c \Gamma b)_{\text{QCD}} \rightarrow e^{-im_b v \cdot x} [J^{(0)} + J^{(1)} + J^{(2)} + \dots] \quad (2.70)$$

schreiben, wobei  $\bar{\psi}_c$  ein kollineares Charm-Quark-Feld und  $\Gamma$  eine Kombination von Dirac-Matrizen beschreibt. Die  $J_i$  sind im Allgemeinen Faltungen von Koeffizienten mit Operatoren, die aus SCET- und HQET-Feldern bestehen.

#### Ströme auf Baumgraphenniveau

Auf Baumgraphenniveau sind die Koeffizienten lediglich Zahlen und die Faltungen reduzieren sich zu einfachen Multiplikationen. In führender Ordnung erhält man für den Strom

$$J^{(0)} = \bar{\xi} W_c \Gamma h_v. \quad (2.71)$$

Abbildung 2.2 zeigt das Matching des schwachen  $b \rightarrow c$ -Stroms auf Baumgraphenniveau. Das  $b$ -Quark kann ein kollineares Gluon abstrahlen und befindet sich danach um einen Betrag von Ordnung 1 abseits seiner Massenschale. Danach können noch beliebig viele weitere kollineare Gluonen abgestrahlt werden, das  $b$ -Quark bleibt dabei jeweils abseits seiner Massenschale. Schließlich zerfällt das  $b$ -Quark in das Charm-Quark. Der Jet, der aus dem kollinearen Quark und den kollinearen Gluonen besteht, bewegt sich mit einem großen Impuls von Ordnung 1 in die  $n_-$ -Richtung. Da  $n_+ A_c \sim 1$  gilt, kosten die kollinearen Gluonen keine weiteren Potenzen in der Entwicklung in  $\lambda$ . Die unendliche Summe von kollinearen Gluonen ist in der kollinearen Wilsonlinie (2.67) dargestellt. Dies erklärt das Auftreten der Wilsonlinie  $W_c$  im SCET-Strom. Es gilt  $W_c \rightarrow 1$  in Lichtkegel-Eichung,  $n_+ A_c = 0$ .

Die Beiträge zum  $b \rightarrow c$ -Strom von Ordnung  $\lambda$  und Ordnung  $\lambda^2$  erhält man aus den Ergebnissen in [96] indem man beachtet, dass auf Baumgraphenniveau das Auftreten der Masse in den Strömen mit dem  $\eta$ -Feld verknüpft ist. Aus (2.52) und [96] erhält man in

eichinvarianter Form für die Terme, die proportional zur Charm-Masse sind,

$$J_m^{(1)} = m_c \bar{\xi} \frac{\not{h}_+}{2} \frac{1}{-in_+ \overleftarrow{D}_c} W_c \Gamma h_v, \quad (2.72)$$

$$J_{m1}^{(2)} = m_c \bar{\xi} \frac{\not{h}_+}{2} \frac{1}{-in_+ \overleftarrow{D}_c} W_c \Gamma x_\perp D_{\perp s} h_v, \quad (2.73)$$

$$J_{m2}^{(2)} = m_c \bar{\xi} \frac{\not{h}_+}{2} \frac{1}{in_+ \overleftarrow{D}_c} \Gamma \frac{\not{h}_-}{2m_b} [i \not{D}_{\perp c} W_c] h_v. \quad (2.74)$$

Hier wirken Ableitungen nicht außerhalb von eckigen Klammern.

Die weiteren Beiträge zu  $J^{(1)}$  und  $J^{(2)}$  sind die gleichen wie im masselosen Fall [96, 100, 101]. Zur Berechnung der zeitgeordneten Produkte der SCET-Lagrangedichte mit den Strömen in Abschnitt 4.2 brauchen wir folgende von der Masse unabhängige Ströme

$$\begin{aligned} J_1^{(1)} &= \bar{\xi} W_c \Gamma x_{\perp \mu} D_{\perp s}^\mu h_v, & J_2^{(1)} &= -\bar{\xi} i \overleftarrow{D}_{\perp c} \frac{1}{in_+ \overleftarrow{D}_c} W_c \frac{\not{h}_+}{2} \Gamma h_v, \\ J_1^{(2)} &= \bar{\xi} W_c \Gamma \frac{n-x}{2} n_+ D_s h_v, & J_2^{(2)} &= \bar{\xi} W_c \Gamma \frac{x_{\mu\perp} x_{\nu\perp}}{2} D_{\perp s}^\mu D_{\perp s}^\nu h_v, \\ J_3^{(2)} &= -\bar{\xi} i \overleftarrow{D}_{\perp c} \frac{1}{in_+ \overleftarrow{D}_c} W_c \frac{\not{h}_+}{2} \Gamma x_{\perp \mu} D_{\perp s}^\mu h_v, & J_4^{(2)} &= \bar{\xi} W_c \Gamma \frac{i \not{D}_s}{2m_b} h_v. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Zeitgeordnete Produkte der SCET-Lagrangedichte mit den Strömen sind unabhängig davon, ob man die manifest eichinvariante oder die nicht-eichinvariante Form der Lagrangedichte und der Ströme verwendet. Man erhält jeweils die gleichen physikalischen Ergebnisse.

### Ströme auf Einschleifenniveau

Das Matching des schwachen QCD-Stroms auf den entsprechenden Ausdruck in SCET nimmt auf Einschleifenniveau folgende Form an [92, 95].

$$\begin{aligned} e^{im_b v \cdot x} \bar{\psi}_c(x) \Gamma b(x) &\rightarrow \sum_i \int ds \tilde{C}_i(s, m_b) (\bar{\xi} W_c)(x + sn_+) \Gamma_i^\mu h_v(x_-) \\ &= \sum_i C_i(n+p, m_b) (\bar{\xi} W_c)(x) \Gamma_i^\mu h_v(x_-). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Hierbei sind die  $C_i$  die harten Matching-Koeffizienten und  $p$  der Impuls des kollinearen Charm-Quarks. Zur Berechnung der Koeffizienten trägt nur die harte Region von QCD-Diagrammen bei. Diese hängt nicht von der kollinearen Skala  $m_c^2$  ab. Die Anschlussbedingungen sind also die gleichen wie im masselosen Fall. Daher können die Koeffizienten direkt aus [92] abgelesen werden.

Die Anschlussbedingungen beinhalten eine Stromrenormierung, der entsprechende Renormierungsfaktor lautet [92]

$$Z_J = 1 + \frac{C_F \alpha_s}{4\pi} \left( -\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{2}{\epsilon} \ln \frac{n+p}{\mu} - \frac{5}{2\epsilon} \right). \quad (2.77)$$

### 2.4.4 Massenrenormierung in SCET

Die Massenrenormierung in SCET hängt sehr eng mit der Massenrenormierung in QCD zusammen. Dies folgt daraus, dass man das Selbstenergie-Diagramm in SCET aus der Entwicklung des entsprechenden QCD-Diagramms in  $\lambda$  erhält, was für masselose SCET in [91] herausgestellt wurde. Massenrenormierung für SCET mit massiven kollinearen Teilchen, die wie  $m^2 \sim m_b^2 \lambda^4$  skalieren, wurde erstmals in [102] behandelt. Wir leiten hier Massenrenormierung in SCET für massive kollineare Teilchen, die wie  $m_c^2 \sim m_b^2 \lambda^2$  skalieren, her.

Der Propagator für ein massives kollineares Quark in SCET (2.54) wird auf Einschleifen-Niveau zu

$$G_\xi(p) = \frac{i}{u - \Sigma_\xi(u, n_+ p)} \frac{\not{n}_-}{2}. \quad (2.78)$$

Die Variable

$$u = n_- p - \frac{m_c^2}{n_+ p}, \quad (2.79)$$

worin  $m_c$  die Pol-Masse des Charm-Quarks ist, ist die Verallgemeinerung der im masselosen Fall verwendeten Variablen  $p_+ = n_- p$ . Hier und im Folgenden betrachten wir der Einfachheit halber jeweils ein System, in dem  $p_\perp = 0$  gilt. Die Selbstenergie  $\Sigma_\xi(u, n_+ p)$  des Quarks in SCET erhalten wir, indem wir den QCD-Propagator

$$G(p) = \frac{i}{\not{p} - m_c - \Sigma(p)}, \quad (2.80)$$

in  $\lambda$  entwickeln und dann mit dem SCET-Propagator (2.78) gleichsetzen. Aus diesem Matching erhalten wir

$$\Sigma_\xi(u, n_+ p) = u \Sigma_V(p^2) + \frac{m_c^2}{n_+ p} 2 (\Sigma_V(p^2) + \Sigma_S(p^2)). \quad (2.81)$$

Der Zusammenhang zwischen  $\Sigma_V(p^2)$ ,  $\Sigma_S(p^2)$  und der Fermion-Selbstenergie  $\Sigma(p)$  in QCD ist in (1.43) angegeben, die hier benötigten Ausdrücke für  $\Sigma_V(p^2)$  und  $\Sigma_S(p^2)$  finden sich in (1.44).

Der renormierte SCET-Propagator enthält die Massen- und die Feldstärkerenormierung, er lautet

$$\hat{G}_\xi(p) = \frac{i}{u(1 + \delta Z_\xi) - \Sigma_\xi(u, n_+ p) - \frac{\delta(m_c^2)}{n_+ p}} \frac{\not{n}_-}{2}, \quad (2.82)$$

mit  $\delta(m_c^2) = 2m_c \delta m_c$ . Der Propagator hat einen Pol für  $p^2 = m_c^2 \Leftrightarrow u = 0$ . Hieraus ergibt sich für die Massenrenormierung im Polschema

$$\begin{aligned} \frac{\delta(m_c^2)}{n_+ p} &= -\Sigma_\xi(0, n_+ p) = -\frac{m_c^2}{n_+ p} 2 (\Sigma_V(m_c^2) + \Sigma_S(m_c^2)) \\ &= -6 \frac{m_c^2}{n_+ p} \frac{C_F \alpha_s}{4\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} - \ln \left( \frac{m_c^2}{\mu^2} \right) + \frac{4}{3} \right), \end{aligned} \quad (2.83)$$

dies entspricht

$$\delta m_c = \frac{\delta(m_c^2)}{n+p} \frac{n+p}{2m_c} = -3m_c \frac{C_F \alpha_s}{4\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} - \ln \left( \frac{m_c^2}{\mu^2} \right) + \frac{4}{3} \right). \quad (2.84)$$

Wir erhalten also für die Massenrenormierung in SCET genau den gleichen Ausdruck wie für die Massenrenormierung in QCD (1.47). Dies wird dadurch erklärt, dass das Matching von QCD auf SCET an der harten Skala  $m_b$  geschieht, wo keine Freiheitsgrade, die mit der Masse des kollinearen Quarks zusammenhängen, ausintegriert werden.

Ebenso ergibt sich für die Feldstärkerenormierung  $\delta Z_\xi$  in SCET der gleiche Ausdruck wie für die Feldstärkerenormierung  $\delta Z_2$  in QCD. Die Feldstärkerenormierung  $\delta Z_\xi$  trägt in der üblichen Weise zur Stromrenormierung (2.77) bei.

# Kapitel 3

## QCD-Strahlungskorrekturen zur Zerfallsrate

Der Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  liefert derzeit die genaueste Bestimmung von  $|V_{cb}|$ . Mittels der Heavy Quark Expansion (HQE) ist es möglich, die differentielle Zerfallsrate in Potenzen von  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$  zu entwickeln. Außerdem müssen bei der Berechnung der Zerfallsrate QCD-Strahlungskorrekturen berücksichtigt werden. Wie in Abschnitt 1.2.4 beschrieben, sind einige Beiträge in der störungstheoretischen und in der nichtstörungstheoretischen Entwicklung bereits bekannt. Die größte theoretische Unsicherheit kommt aus dem ersten gemischten Term in der Entwicklung, den  $\alpha_s$ -Korrekturen zu den  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2$ -Termen.

In diesem Kapitel entwickeln wir einen geeigneten Formalismus zur Behandlung von QCD-Strahlungskorrekturen der Ordnung  $\alpha_s$  zum Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$ . Dabei werden die Infrarot-Divergenzen der einzelnen Diagramme in Dimensionaler Regularisierung – und nicht durch Einführen einer Gluonmasse – behandelt, was die Ausdrücke eichinvariant lässt. Die Berechnung der Zerfallsrate sowie der hadronischen und leptonischen Momente geschieht durch numerische Integration.

Mittels dieses Formalismus berechnen wir die  $\alpha_s$ -Korrekturen auf Partonniveau, stellen die numerischen Ergebnisse vor und vergleichen diese mit bereits bekannten Ergebnissen.

Bei der Berechnung der  $\alpha_s$ -Korrekturen zu den  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2$ -Termen erscheint eine analytische Behandlung aufgrund der Komplexität der auftretenden Ausdrücke ausgeschlossen, ist jedoch mit der hier vorgestellten numerischen Methode möglich. Da die Methode darüber hinaus die Eichinvarianz erhält, eignet sie sich sowohl zur Berechnung der  $\alpha_s$ -Korrekturen, die proportional zur kinetischen Energie sind, als auch zu denen, die proportional zum chromomagnetischen Moment sind.

### 3.1 Die Zerfallsrate

Die zentrale Größe zur Beschreibung des Zerfalls eines Teilchens im Anfangszustand in mehrere Teilchen im Endzustand ist die Zerfallsrate. Wir berechnen die Zerfallsrate für den Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  mittels

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \frac{1}{2M_B} \sum_{X_c} \int [d\Pi_{\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell}] |\mathcal{M}(\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell)|^2 \\
 &= \frac{1}{2M_B} \sum_{X_c} \int [d\Pi_{\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell}] |\langle X_c \ell \bar{\nu}_\ell | \mathcal{H}_{\text{eff}} | \bar{B} \rangle|^2 \\
 &= \frac{G_F^2 |V_{cb}|^2}{4M_B} \sum_{X_c} \int [d\Pi_{\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell}] \langle \bar{B} | J_{q,\mu}^\dagger | X_c \rangle \langle X_c | J_{q,\nu} | \bar{B} \rangle \langle 0 | J_\ell^{\dagger\mu} | \ell \bar{\nu}_\ell \rangle \langle \ell \bar{\nu}_\ell | J_\ell^\nu | 0 \rangle \\
 &= \frac{G_F^2 |V_{cb}|^2}{4M_B} \sum_{X_c} \int [d\Pi_{\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell}] W_{\mu\nu} L^{\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Hierbei bezeichnet  $\int [d\Pi_{\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell}]$  das Integral über den Phasenraum und  $\mathcal{M}$  das Übergangsmatrixelement. Da der Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  bei einer Energie geschieht, die ungefähr der Masse des  $\bar{B}$ -Mesons entspricht, können wir das Übergangsmatrixelement durch die in (2.9) eingeführte effektive Hamiltondichte der schwachen Wechselwirkung in Fermitheorie (siehe Abschnitt 2.2) ausdrücken

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} \left[ \bar{c} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) b \right] \left[ \bar{\ell} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_\ell \right] + \text{h. c.} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} J_{q,\mu} J_\ell^\mu + \text{h. c.} \tag{3.2}$$

Ab der dritten Zeile von (3.1) haben wir die effektive Hamiltondichte aufgeteilt in Vorfaktoren und die in (3.2) definierten Quark- und Leptonströme. Wir haben das Matrixelement in einen hadronischen und einen leptonischen Anteil faktorisiert, was möglich ist, da es sich bei  $|\bar{B}\rangle$  um einen rein hadronischen Zustand handelt, der bezüglich den leptonischen Feldern das Vakuum darstellt, und entsprechend für die anderen Zustände und Felder. In der letzten Zeile von (3.1) haben wir schließlich den hadronischen Tensor  $W_{\mu\nu}$  und den leptonischen Tensor  $L^{\mu\nu}$  eingeführt. Da es sich bei  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  um einen inklusiven Zerfall handelt, ignoriert man alle Details des hadronischen Endzustands  $X_c$  und summiert über alle Endzustände, die ein Charm-Quark enthalten.

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung der Zerfallsrate bietet sich durch Verwendung des optischen Theorems für den hadronischen Anteil. Man definiert den hadronischen Tensor als [25]

$$\tilde{W}_{\mu\nu} = \frac{1}{2M_B} \sum_{X_c} (2\pi)^3 \delta^4(p_B - p_\ell - p_\nu - p_{X_c}) \langle \bar{B}(p_B) | J_{q,\mu}^\dagger | X_c(p_{X_c}) \rangle \langle X_c(p_{X_c}) | J_{q,\nu} | \bar{B}(p_B) \rangle. \tag{3.3}$$

Abweichend vom im letzten Schritt in (3.1) eingeführten hadronischen Tensor enthält der hier definierte zusätzlich Teile des Phasenraums sowie die Summe über die hadronischen

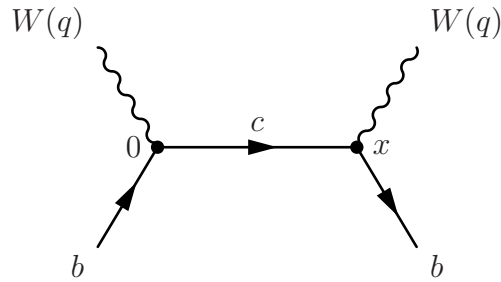


Abbildung 3.1: Die Vorwärtsstreuamplitude auf Baumgraphenniveau.

Endzustände  $X_c$ . Der hadronische Tensor (3.3) kann als Imaginärteil einer Vorwärtsstreuamplitude ausgedrückt werden

$$\tilde{W}_{\mu\nu} = \frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{\langle \bar{B}(p_B) | T_{\mu\nu} | \bar{B}(p_B) \rangle}{2M_B}. \quad (3.4)$$

Hierbei ist die Vorwärtsstreuamplitude

$$T_{\mu\nu} = i \int d^4x e^{-iq \cdot x} \text{T} \{ J_{q,\mu}^\dagger(x) J_{q,\nu}(0) \} \quad (3.5)$$

als zeitgeordnetes Produkt von zwei Quarkströmen definiert. Für die Normierung der Zustände gilt  $\langle \bar{B}(p_B) | \bar{B}(p_B) \rangle = 2M_B$ . Der  $B$ -Meson-Impuls kann als  $p_B = M_B v$  geschrieben werden.  $q = p_\ell + p_\nu$  ist der Impuls des Leptonpaares im Endzustand. Das die Vorwärtsstreuamplitude auf Baumgraphenniveau beschreibende Feynmandiagramm ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

Verwendet man die Definition (3.4) des hadronischen Tensors, so vereinfacht sich bei der Berechnung von Strahlungskorrekturen zur Zerfallsrate die Behandlung des verbleibenden Phasenraums im Vergleich zur direkten Berechnung des Übergangsmatrixelements und des Phasenraums mit (3.1). Hingegen wird die Rechnung dadurch komplizierter, dass man Schleifendiagramme mit mehr Nennern behandeln muss. Es führen jeweils beide Wege zum Ziel, jedoch ist oftmals – abhängig davon, welche Art von Korrekturen man behandelt – einer der beiden Wege mit deutlich weniger Aufwand verbunden als der andere.

## 3.2 Heavy Quark Expansion für den Zerfall $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$

Inklusive semileptonische Zerfälle von  $B$ -Mesonen können - wie alle inklusiven Zerfälle schwerer Hadronen - mittels effektiver Feldtheorien beschrieben werden. Als Ergebnis erhält man für die inklusiven Zerfallsspektren und Zerfallsraten eine Entwicklung in inversen Potenzen der Masse des im Meson enthaltenen schweren Quarks, also eine *Heavy Quark Expansion*. Die in diesem Abschnitt vorgestellten Methoden folgen [87, 25].

Wir nutzen die Tatsache aus, dass  $m_b$  verglichen mit  $\Lambda_{\text{QCD}}$  eine große Skala ist, und führen die gleiche Feldredefinition (2.12) wie bei der Herleitung von HQET durch

$$b_v(x) = e^{im_b v \cdot x} b(x).$$

Die differentielle Zerfallsrate kann - wie allgemein am Beispiel einer Hamiltondichte in (2.2) beschrieben - in der Heavy Quark Expansion als eine unendliche Reihe von inversen Potenzen der Masse, multipliziert mit einem Produkt aus Koeffizienten und Erwartungswerten von Operatoren dargestellt werden

$$d\Gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m_b^k} \sum_j c_{k,j} \langle \bar{B}(p_B) | \mathcal{O}_{k,j} | \bar{B}(p_B) \rangle |_{m_b}. \quad (3.6)$$

Dabei enthalten die Koeffizienten  $c_{k,j}$  die Hochenergiebeiträge, also die Beiträge von Skalen oberhalb  $m_b$ , während die Niederenergiebeiträge von Skalen unterhalb  $m_b$  in den *lokalen* Operatoren  $\mathcal{O}_k|_{m_b}$  enthalten sind. Auch hier ist es möglich, wie in (2.3) die Skala  $\mu$  einzuführen. (3.6) liefert noch nicht die vollständige Entwicklung in inversen Potenzen der  $b$ -Masse, da  $|\bar{B}(p_B)\rangle$  der  $B$ -Meson-Zustand in voller QCD ist, der von der  $b$ -Masse abhängt. Um die vollständige Entwicklung in  $1/m_b$  zu erhalten, muss man HQET-Methoden (siehe Abschnitt 2.3) verwenden, um jedes Matrixelement in  $1/m_b$  zu entwickeln. Hier ist es jedoch möglich und sinnvoll, nicht die HQET-Entwicklung (siehe Abschnitt 2.3.2) durchzuführen, sondern die Matrixelemente als phänomenologische Parameter zu behandeln. In führender Ordnung in der Heavy Quark Expansion, also für  $k = 0$ , tritt das Matrixelement eines Operators mit Massendimension drei auf, für das gilt

$$\langle \bar{B}(p_B) | \mathcal{O}_3 | \bar{B}(p_B) \rangle = \langle \bar{B}(p_B) | \bar{b}_v \not{v} b_v | \bar{B}(p_B) \rangle = 2M_B. \quad (3.7)$$

Es gibt keine Beiträge von Operatoren mit Dimension vier, also keine mit  $1/m_b$  unterdrückten Terme. Die nächsten Beiträge kommen aus Dimension-fünf-Operatoren, sie sind durch die nichtstörungstheoretischen Parameter

$$\mu_\pi^2 = \frac{-1}{2M_B} \langle \bar{B}(p_B) | \bar{b}_v (iD_\perp)^2 b_v | \bar{B}(p_B) \rangle$$

und

$$\mu_G^2 = \frac{1}{2M_B} \langle \bar{B}(p_B) | \bar{b}_v \frac{g}{2} \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} b_v | \bar{B}(p_B) \rangle \quad (3.8)$$

definiert.  $\mu_\pi^2$  und  $\mu_G^2$  enthalten je zwei auf das Feld  $b_v$  wirkende Ableitungen. Sie haben somit gegenüber dem führenden Operator (3.7) einen zusätzlichen Faktor  $\Lambda_{\text{QCD}}^2$  und müssen



daher mit  $1/m_b^2$  unterdrückt sein. Operatoren mit Dimension sechs und Dimension sieben enthalten entsprechend einen zusätzlichen Faktor  $\Lambda_{\text{QCD}}^3$  bzw.  $\Lambda_{\text{QCD}}^4$  und sind daher mit  $1/m_b^3$  bzw.  $1/m_b^4$  unterdrückt. Wir erkennen, dass  $\mu_\pi^2$  und  $\mu_G^2$  den Operator der kinetischen Energie (2.30) und des chromomagnetischen Moments (2.31) enthalten, allerdings nicht wie die in (2.34) definierten Parametern  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  mit dem HQET-Feld  $h_v$ , sondern mit dem redefinierten QCD-Feld  $b_v$ . Unter Beachtung der Relationen zwischen  $|B(v)\rangle$ , dem  $B$ -Meson-Zustand in HQET, und  $|B(p_B)\rangle$ , dem  $B$ -Meson-Zustand in voller QCD, sowie der Relationen zwischen dem HQET-Feld  $h_v$  und dem redefinierten QCD-Feld  $b_v$ , lässt sich der Zusammenhang zwischen  $\lambda_1$  und  $\mu_\pi^2$  sowie  $\lambda_2$  und  $\mu_G^2$  leicht ausrechnen. Sie unterscheiden sich jeweils um einen konstanten Faktor aus der Normierung der Felder und Zustände sowie um  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Korrekturen.

Die totale Zerfallsrate für den Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  zur Ordnung  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2$  in der Heavy Quark Expansion und zur Ordnung  $\alpha_s$  in der störungstheoretischen Reihe hat folgendes Aussehen [42]:

$$\Gamma = \frac{G_F^2 m_b^5 |V_{cb}|^2}{192\pi^3} \left\{ \left( 1 - \frac{\mu_\pi^2 - \mu_G^2}{2m_b^2} \right) \left[ f(\rho) + \frac{\alpha_s}{\pi} g(\rho) \right] - 2 \frac{\mu_G^2}{m_b^2} (1 - \rho)^4 [1 + \mathcal{O}(\alpha_s)] \right. \\ \left. + \mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^3 + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right\}. \quad (3.9)$$

Der führende Term in der Heavy Quark Expansion ist die totale partonische Rate

$$\Gamma_{\text{part.}} = \frac{G_F^2 m_b^5 |V_{cb}|^2}{192\pi^3} \left[ f(\rho) + \frac{\alpha_s}{\pi} g(\rho) + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right]. \quad (3.10)$$

Hierbei ist

$$f(\rho) = 1 - 8\rho + 8\rho^3 - \rho^4 - 12\rho^2 \ln(\rho) \quad (3.11)$$

ebenso wie  $g(\rho)$  eine Phasenraumfunktion, und es gilt

$$\rho = \frac{m_c^2}{m_b^2}. \quad (3.12)$$

### 3.3 Berechnung der Zerfallsrate auf Baumgraphenniveau

Wir berechnen die Zerfallsrate mittels (3.1). Das den zugehörigen Quark-Übergang  $b \rightarrow c\bar{\nu}_\ell$  auf Baumgraphenniveau beschreibende Feynmandiagramm ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Auf Baumgraphenniveau benötigt man zur Konstruktion des hadronischen Tensors die Amplitude

$$\mathcal{A}^{\text{tree}} = \begin{array}{c} W \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ b \end{array} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} c \quad = \quad - \bar{u}(p_c, \sigma_c) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(p_b, \sigma_b) \quad (3.13)$$

Hierbei bezeichnen  $u(p_b, \sigma_b)$  und  $\bar{u}(p_c, \sigma_c)$  den Spinor für das einlaufende  $b$ -Quark und das auslaufende  $c$ -Quark, mit Impuls  $p_b$  bzw.  $p_c$  und Spin  $\sigma_b$  bzw.  $\sigma_c$ . Die linkshändige Kopplung an das  $W$ -Boson wird durch  $\gamma_\mu(1 - \gamma^5)$  ausgedrückt. Zur Berechnung der Diagramme verwenden wir hier und im Folgenden die Feynman-Regeln, wie man sie in [8] findet. Wir bilden das Betragsquadrat der Amplitude, mitteln über den Spin des  $b$ -Quarks im Anfangszustand und summieren über den Spin des  $c$ -Quarks im Endzustand. Hieraus erhalten wir für den hadronischen Tensor

$$\begin{aligned}
 W_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma_b, \sigma_c} |\mathcal{A}^{\text{tree}}|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma_b, \sigma_c} \bar{u}(p_c, \sigma_c) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(p_b, \sigma_b) \bar{u}(p_b, \sigma_b) \gamma_\nu (1 - \gamma^5) u(p_c, \sigma_c) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma_b, \sigma_c} \sum_{k, l, m, n=1}^4 u_n(p_c, \sigma_c) \bar{u}_k(p_c, \sigma_c) (\gamma_\mu (1 - \gamma^5))_{kl} u_l(p_b, \sigma_b) \bar{u}_m(p_b, \sigma_b) (\gamma_\nu (1 - \gamma^5))_{mn} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma_b, \sigma_c} \text{tr} [u(p_c, \sigma_c) \bar{u}(p_c, \sigma_c) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(p_b, \sigma_b) \bar{u}(p_b, \sigma_b) \gamma_\nu (1 - \gamma^5)] \\
 &= \frac{1}{2} \text{tr} [(\not{p}_c + m_c) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) (\not{p}_b + m_b) \gamma_\nu (1 - \gamma^5)].
 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dabei haben wir für die Spinsumme

$$\sum_{\sigma} u(p, \sigma) \bar{u}(p, \sigma) = \not{p} + m \quad (3.15)$$

verwendet.

Der leptonische Tensor enthält den leptonischen Anteil, er beschreibt den Zerfall des  $W$ -Bosons in Lepton und Lepton-Antineutrino. Die Herleitung des leptonischen Tensors geschieht analog zu der des hadronischen Tensors. Man erhält

$$L^{\mu\nu} = \text{tr}[\not{p}_\ell \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \not{p}_\nu \gamma^\nu (1 - \gamma^5)]. \quad (3.16)$$

Hierbei betrachten wir sowohl das Lepton als auch das Neutrino als masselose Teilchen. Die Vernachlässigung der Leptonmasse im Vergleich mit der Massen der  $b$ - und  $c$ -Quarks ist für das Elektron und das Myon gerechtfertigt, für das  $\tau$ -Lepton muss die Masse berücksichtigt werden.

Zur Berechnung der totalen Rate auf Baumgraphenniveau kontrahieren wir den hadronischen mit dem leptonischen Tensor und integrieren anschliessend über den Phasenraum. Für die totale partonische Rate auf Baumgraphenniveau erhält man

$$\Gamma_0 = \frac{G_F^2 m_b^5 |V_{cb}|^2}{192\pi^3} f(\rho). \quad (3.17)$$

Hierbei ist  $f(\rho)$  die in (3.11) definierte Phasenraumfunktion.

## 3.4 QCD-Strahlungskorrekturen

Um die auftretenden Divergenzen handhaben zu können, behandeln wir die QCD-Strahlungskorrekturen in Dimensionaler Regularisierung (siehe Abschnitt 1.1.6). Wir berechnen Strahlungskorrekturen zur Ordnung  $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$  in  $D = 4 - 2\epsilon$  Dimensionen. Dies bedeutet, dass wir die Spuren zur Berechnung des hadronischen und leptonischen Tensors in  $D$  Dimensionen ausführen sowie die Phasenraumintegrale und die bei den virtuellen Korrekturen benötigten Schleifenintegrale in  $D$  Dimensionen auf eine geeignete Art beschreiben. Wir berechnen die Integrale, durch die eine Divergenz auftritt, analytisch. Die verbleibenden endlichen Phasenraum- und Schleifenintegrale berechnen wir numerisch, zuvor entwickeln wir den Integranden für  $D \rightarrow 4$ , d.h.  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Der leptonische Tensor enthält keine an der starken Wechselwirkung teilnehmenden Teilchen, daher müssen wir zu ihm auch keine QCD-Strahlungskorrekturen berechnen. Wir können immer die Verallgemeinerung des leptonischen Tensors (3.16) auf  $D$  Dimensionen verwenden, egal zu welcher Ordnung in  $\alpha_s$  wir Berechnungen durchführen. QCD-Strahlungskorrekturen berechnen wir zum hadronischen Tensor. Außerdem ändert sich bei der Behandlung der reellen Korrekturen im Vergleich zum Baumgraphenniveau auch der Phasenraum, da im Endzustand zusätzlich ein Gluon enthalten ist.

Die Berechnung von QCD-Strahlungskorrekturen beinhaltet einerseits die reellen Korrekturen, bei denen ein Gluon im Endzustand enthalten ist. Andererseits berechnet man virtuelle Korrekturen, bei denen ein Gluon nur an internen Prozessen beteiligt ist.

### 3.4.1 Die Berechnung der Spuren in $D$ Dimensionen

Wir berechnen die im hadronischen und leptonischen Tensor enthaltenen Spuren in  $D$  Dimensionen und kontrahieren anschließend hadronischen und leptonischen Tensor, um so das Betragsquadrat des Matrixelements zu erhalten. Das Ergebnis entwickeln wir um  $\epsilon = 0$  bis zur Ordnung  $\epsilon$ , da bei der Berechnung der Phasenraum- und Schleifenintegrale Ausdrücke entstehen, die von  $\mathcal{O}(1/\epsilon)$  oder  $\mathcal{O}(1)$  sind. Spuren, die kein  $\gamma^5$  enthalten, sind unabhängig von der Dimension. Lediglich die Ausdrücke, die man bei der Kontraktion von mehreren

Dirac-Matrizen miteinander erhält, hängen explizit von  $D$  ab. In früheren Berechnungen der  $\alpha_s$ -Korrekturen zur partonischen Rate wurde gezeigt, dass die Teile der Spuren, die  $\gamma^5$  enthalten, endliche Integrale multiplizieren, und daher eine vierdimensionale Definition dieser Spuren ausreicht. Es ist jedoch nicht klar, ob dies auch für die bei der Berechnung der  $\alpha_s$ -Korrekturen zu den  $1/m_b^2$  Termen benötigten Spuren und Integrale gilt. Um dann nicht jedes Integral einzeln untersuchen zu müssen, werden wir durchgehend eine  $D$ -dimensionale Definition der Spuren, die  $\gamma^5$  enthalten, verwenden. Wir definieren den axialen Quarkstrom in  $D$  Dimensionen gemäß [103]

$$J^{\mu,A} = -\frac{i}{3!} \epsilon^{\mu\rho_1\rho_2\rho_3} \bar{c} \gamma_{\rho_1} \gamma_{\rho_2} \gamma_{\rho_3} b. \quad (3.18)$$

Dies bedeutet, dass wir in den Amplituden

$$\bar{u}(p_c, \sigma_c) \gamma^\mu \gamma^5 u(p_b, \sigma_b) \rightarrow -\frac{i}{3!} \epsilon^{\mu\rho_1\rho_2\rho_3} \bar{u}(p_c, \sigma_c) \gamma_{\rho_1} \gamma_{\rho_2} \gamma_{\rho_3} u(p_b, \sigma_b) \quad (3.19)$$

ersetzen. Eine analoge Ersetzung führen wir auch im axialen Leptonstrom, d.h. bei der Berechnung des leptonischen Tensors in  $D$  Dimensionen, durch. Die verwendete Konvention für den total antisymmetrischen Tensor lautet  $\epsilon^{0123} = 1$ . In  $D$  Dimensionen gilt für Kontraktionen des  $\epsilon$ -Tensors  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -D^4 + 6D^3 - 11D^2 + 6D$ .

### 3.4.2 Die Behandlung der Infrarot-Divergenzen

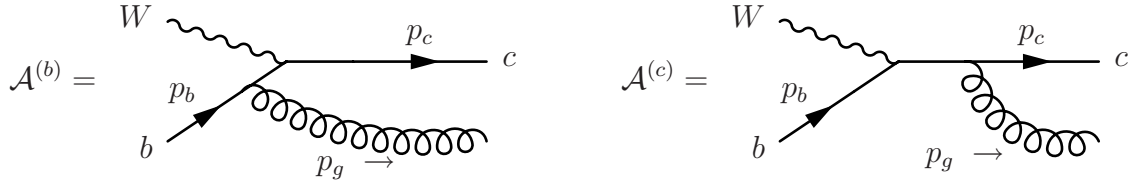
Bei der Berechnung der reellen und virtuellen Korrekturen treten infrarot(IR)-Divergenzen auf, also Divergenzen aufgrund von kleinen Impulsen. Die IR-Divergenzen hängen mit dem Gluonimpuls zusammen. Sie werden häufig durch die Einführung einer kleinen, aber endlichen Gluon-Masse regularisiert, so auch in [60]. Abweichend hiervon behandeln wir die IR-Divergenzen in Dimensionaler Regularisierung, sie treten dann ebenso wie die UV-Divergenzen als Pole in  $1/\epsilon$  auf. Wie wir im Abschnitt 3.5 sehen werden, kommen die IR-Divergenzen bei den reellen Korrekturen aus dem Integral über den Phasenraum, während sie bei den virtuellen Korrekturen aus dem Schleifenintegral kommen. IR-Divergenzen äußern sich dadurch, dass einer der Integrationsparameter zur Potenz  $(-1 - 2\epsilon)$  im Integranden vorkommt. Dies können wir durch Distributionen ausdrücken. Es gilt [104]

$$x^{-1-2\epsilon} = -\frac{1}{2\epsilon} \delta(x) + \left(\frac{1}{x}\right)_+ + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (3.20)$$

Die IR-Divergenz erkennt man jetzt an einem  $1/\epsilon$ -Pol, der eine Delta-Distribution multipliziert. Hinzu kommt ein endlicher Anteil, der aus einer Plus-Distribution besteht, sowie Terme, die für  $\epsilon \rightarrow 0$  verschwinden. Die Distributionen sind in Anhang A erklärt.

### 3.4.3 Die reellen Korrekturen

Zur Berechnung der reellen Korrekturen zum hadronischen Tensor tragen zwei Diagramme bei. Sowohl das  $b$ -Quark als auch das  $c$ -Quark können ein Gluon abstrahlen.



Die beiden Übergangsamplituden sind

$$A^{(b)} = \bar{u}(p_c, \sigma_c) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \frac{\not{p}_b - \not{p}_g + m_b}{(p_b - p_g)^2 - m_b^2 + i0} g_s \gamma_\alpha t^a \epsilon_\alpha^*(p_g) u(p_b, \sigma_b), \quad (3.21)$$

$$A^{(c)} = \bar{u}(p_c, \sigma_c) g_s \gamma_\alpha t^a \epsilon_\alpha^*(p_g) \frac{\not{p}_c + \not{p}_g + m_c}{(p_c + p_g)^2 - m_c^2 + i0} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(p_b, \sigma_b). \quad (3.22)$$

Hierbei bezeichnet  $\epsilon_\alpha^*(p_g)$  den Polarisationsvektor des Gluons mit Impuls  $p_g$ . Bei der Berechnung des Übergangsmatrixelements wird über die Polarisationen von Gluonen im Endzustand ebenso wie über die Spins von Fermionen summiert.

Für den Beitrag der reellen Korrekturen zum hadronischen Tensor ergibt sich

$$W_{\mu\nu}^{\text{reell}} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma_b, \sigma_c, \epsilon} |\mathcal{A}^{(b)} + \mathcal{A}^{(c)}|^2 = \frac{g_s^2 C_F}{2} \left\{ \begin{aligned} & - \text{tr} [(\not{p}_c + m_c) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) (\not{p}_b - \not{p}_g + m_b) \gamma^\alpha (\not{p}_b + m_b) \gamma_\alpha (\not{p}_b - \not{p}_g + m_b) \gamma_\nu (1 - \gamma^5)] \frac{1}{N_b^2} \\ & - \text{tr} [(\not{p}_c + m_c) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) (\not{p}_b - \not{p}_g + m_b) \gamma^\alpha (\not{p}_b + m_b) \gamma_\nu (1 - \gamma^5) (\not{p}_c + \not{p}_g + m_c) \gamma_\alpha] \frac{1}{N_b N_c} \\ & - \text{tr} [(\not{p}_c + m_c) \gamma^\alpha (\not{p}_c + \not{p}_g + m_c) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) (\not{p}_b + m_b) \gamma_\alpha (\not{p}_b - \not{p}_g + m_b) \gamma_\nu (1 - \gamma^5)] \frac{1}{N_b N_c} \\ & - \text{tr} [(\not{p}_c + m_c) \gamma^\alpha (\not{p}_c + \not{p}_g + m_c) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) (\not{p}_b + m_b) \gamma_\nu (1 - \gamma^5) (\not{p}_c + \not{p}_g + m_c) \gamma_\alpha] \frac{1}{N_c^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Hierbei haben wir die aus den Propagatoren stammenden Nenner mit

$$\begin{aligned} N_b &= (p_b - p_g)^2 - m_b^2, \\ N_c &= (p_c + p_g)^2 - m_c^2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

bezeichnet. Bei der Herleitung von (3.23) haben wir neben (3.15)

$$\text{tr}[t^a t^a] = C_F \text{tr}[\mathbf{1}] = C_F N_{\text{col}}, \quad (3.25)$$

$$\sum_\epsilon \epsilon_\alpha^* \epsilon_\beta = -g_{\alpha\beta} \quad (3.26)$$

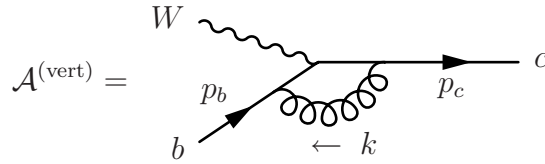
verwendet. Für SU(3) gilt  $C_F = 4/3$ . Der Faktor  $N_{\text{col}}$ , der die Anzahl der Farbfreiheitsgrade bezeichnet, kürzt mit einem Faktor  $1/N_{\text{col}}$ , der aus der Mittelung über die Farben des Quarks im Anfangszustand kommt.

Aus den in (3.23) dargestellten reellen Beiträgen zum hadronischen Tensor erhält man nach Kontraktion mit dem leptonischen Tensor (3.16) und Integration über den Phasenraum die reellen Korrekturen zur Zerfallsrate  $\Gamma$ . Der zweite und dritte Beitrag zum hadronischen Tensor in (3.23) ergeben nach Kontraktion mit dem leptonischen Tensor (3.16) und Integration über den Phasenraum das gleiche Ergebnis. Dies muss so sein, da die beiden Beiträge Spiegeldiagrammen zueinander entsprechen.

### 3.4.4 Die virtuellen Korrekturen

#### Vertexkorrektur

Zur Berechnung der virtuellen Korrekturen zum hadronischen Tensor trägt die Vertexkorrektur bei.



Hierbei ist der Gluonimpuls  $k$  ein Schleifenimpuls, über den in  $D$  Dimensionen integriert wird. Für die Amplitude erhält man

$$A^{\text{vert}} = i \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \bar{u}(p_c, \sigma_c) g_s \gamma^{\alpha t^a} \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2 + i0} \frac{\not{p}_c + \not{k} + m_c}{(p_c + k)^2 - m_c^2 + i0} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \frac{\not{p}_b + \not{k} + m_b}{(p_b + k)^2 - m_b^2 + i0} g_s \gamma^{\beta t^a} u(p_b, \sigma_b). \quad (3.27)$$

Einen Beitrag von  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  ergibt sich aus Produkten der Amplitude auf Baumgraphenniveau mit der Amplitude der Vertexkorrektur

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^{\text{vert}} &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma_b, \sigma_c} \mathcal{A}^{\text{tree}} (\mathcal{A}^{\text{vert}})^\dagger + \mathcal{A}^{\text{vert}} (\mathcal{A}^{\text{tree}})^\dagger \\ &= (-i) g_s^2 C_F \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + i0)((p_b + k)^2 - m_b^2 + i0)((p_c + k)^2 - m_c^2 + i0)} \\ &\quad \text{tr} [(\not{p}_c + m_c) \gamma^\alpha (\not{p}_c + \not{k} + m_c) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) (\not{p}_b + \not{k} + m_b) \gamma_\alpha (\not{p}_b + m_b) \gamma_\nu (1 - \gamma^5)]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Bei den beiden Beiträgen zum hadronischen Tensor handelt es sich um Spiegeldiagramme. Daher müssen beide nach Kontraktion mit dem leptonischen Tensor und Integration über den Schleifenimpuls  $k$  sowie den Phasenraum das gleiche Ergebnis liefern. Deshalb haben wir bereits bei der Berechnung des hadronischen Tensors nur einen der beiden Beiträge betrachtet und mit einem Faktor 2 multipliziert.

## Renormierung

Wie im Abschnitt 1.1.6 erläutert, muss bei der Berechnung von Schleifendiagrammen auch die Renormierung beachtet werden. Dies ist einerseits die Feldstärkerenormierung (1.28) im Polschema für jedes externe Fermion. Sie berechnet sich auf Einschleifen-Niveau im Polschema aus der Fermion-Selbstenergie gemäß (1.48). Man erhält [105]

$$Z_2(m) = 1 + \delta Z_2(m) = 1 + a_0(m) C_F \left( -\frac{3}{4\epsilon} - 1 \right) \quad (3.29)$$

mit

$$a_0(m) = \frac{\alpha_s \Gamma(1 + \epsilon) m^{-2\epsilon}}{\pi (4\pi)^{-\epsilon}}. \quad (3.30)$$

Bei der in der Feldstärkerenormierung vorkommenden Masse handelt es sich um die Pol-Masse des entsprechenden Fermions. An der Herleitung von (3.29) erkennt man ähnlich wie bei der Berechnung des Schleifenintegrals in Abschnitt 3.5.2, dass sich der divergente Teil von  $\delta Z_2(m)$  aus UV- und IR-Divergenzen zusammensetzt.

Hinzu kommt in unserem Fall eine *endliche Renormierung* des axialen Quarkstroms (3.18). Auf Einschleifen-Niveau gilt

$$J_0^{\mu,A} = -Z_A \frac{i}{3!} \epsilon^{\mu\rho_1\rho_2\rho_3} \bar{c}_0 \gamma_{\rho_1} \gamma_{\rho_2} \gamma_{\rho_3} b_0, \quad (3.31)$$

mit der endlichen Renormierungskonstanten

$$Z_A = 1 + \delta Z_A = 1 - C_F \frac{\alpha_s}{\pi}. \quad (3.32)$$

Die in (3.31) enthaltenen Quarkfelder  $q_0$  sind nackte Quarkfelder, die mit den renormierten Feldern durch die Feldstärkerenormierung zusammenhängen.

Man führt in der Übergangsamplitude auf Baumgraphenniveau (3.13) die Ersetzung (3.19) durch, multipliziert mit der Wurzel der Feldstärkerenormierung im Polschema für jedes externe Fermion, multipliziert den axialen Anteil mit  $Z_A$  für die endliche Renormierung des axialen Quarkstroms und erhält

$$\mathcal{A} = -\sqrt{Z_2(m_c)} \sqrt{Z_2(m_b)} \bar{u}(p_c, \sigma_c) \left( \gamma_\mu + Z_A \frac{i}{3!} \epsilon^{\mu\rho_1\rho_2\rho_3} \gamma_{\rho_1} \gamma_{\rho_2} \gamma_{\rho_3} \right) u(p_b, \sigma_b). \quad (3.33)$$

Um den hadronischen Tensor  $W_{\mu\nu}$  in  $D$  Dimensionen zu erhalten, berechnen wir das Betragsquadrat von (3.33) und summieren über die Spins. Wir ersetzen die Renormierungskonstanten  $Z_2(m_c)$ ,  $Z_2(m_b)$  und  $Z_A$  durch ihre Entwicklung in  $\alpha_s$  (3.29) bzw. (3.32) und multiplizieren das Produkt von Renormierungskonstanten aus. Dabei vernachlässigen wir alle Terme, die Produkte von mehreren  $\delta Z_i$ , ( $i = 2, A$ ), enthalten, da diese einen Beitrag von Ordnung  $\alpha_s^2$  oder höher darstellen. Terme ohne  $\delta Z_i$  liefern das Baumgraphenergebnis für den hadronischen Tensor, während Terme, die ein  $\delta Z_2$  oder  $\delta Z_A$  enthalten, einen Beitrag zur Ordnung  $\alpha_s$  darstellen. An der Struktur von (3.33) erkennt man, dass Terme proportional zu  $\delta Z_2(m_b)$  und  $\delta Z_2(m_c)$  jeweils aus einem Produkt von  $\delta Z_2(m_b)$  bzw.  $\delta Z_2(m_c)$  und dem hadronischen Tensor auf Baumgraphenniveau bestehen. Die hier berechneten Beiträge zur Ordnung  $\alpha_s$ , also die Ausdrücke proportional zu  $\delta Z_2(m_b)$ ,  $\delta Z_2(m_c)$  und  $\delta Z_A$ , bilden zusammen mit der Vertexkorrektur die virtuellen Korrekturen zum hadronischen Tensor.

## 3.5 Berechnung der QCD-Strahlungskorrekturen auf Partonniveau

Wie in Abschnitt 1.2.4 und Abschnitt 3.2 erklärt, ist der führende Term in der Heavy Quark Expansion der Zerfall auf Partonniveau, also der Zerfall eines freien  $b$ -Quarks in ein freies Charm-Quark, ein Lepton und ein Lepton-Antineutrino. In diesem Abschnitt stellen wir die Behandlung des Phasenraums und der Schleifenintegrale auf Partonniveau vor. Außerdem erläutern wir, wie die Phasenraum- und Schleifenintegrale durch numerische Integration berechnet werden.

### 3.5.1 Der Phasenraum

Der Phasenraum für den Zerfall eines Teilchens  $A$  in  $n$  Teilchen im Endzustand  $f$  berechnet sich in  $D$  Dimensionen aus

$$\int [d\Pi_{A \rightarrow f}] = \left( \prod_{i=1}^n \int \frac{d^{D-1}p_i}{(2\pi)^{(D-1)}2E_i} \right) (2\pi)^D \delta^D \left( p_A - \sum_{i=1}^n p_i \right). \quad (3.34)$$

Es bietet sich an, den zur Berechnung der reellen Korrekturen benötigten vier-Körper-Phasenraum  $b \rightarrow c + g + \ell + \bar{\nu}$  in einen drei-Körper-Phasenraum und einen zwei-Körper-Phasenraum aufzuteilen. In diesem Abschnitt wird eine mögliche Aufspaltung des vier-Körper-Phasenraums  $b \rightarrow c + g + \ell + \bar{\nu}$  vorgestellt. Ebenso wird erläutert, wie hieraus eine Parametrisierung des auf Baumgraphenniveau und für die Berechnung der virtuellen Korrekturen benötigten drei-Körper-Phasenraums  $b \rightarrow c + \ell + \bar{\nu}$  gewonnen werden kann. Weitere Phasenraumparametrisierungen werden in Anhang C präsentiert. Die konkrete Behandlung der Phasenräume greift Ideen aus [104] auf.

Da bei der hier vorgestellten Parametrisierung die Leptonenergie einer der Integrationsparameter ist, ist die Einführung eines Schnitts auf die Leptonenergie wesentlich einfacher möglich als bei den weiteren, in Anhang C präsentierten Parametrisierungen. Insbesondere bei der Berechnung der  $\alpha_s$ -Korrekturen zu den  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2$ -Termen ist dies von deutlichem Vorteil. Auf Partonniveau kann der Schnitt auf die Leptonenergie bei Verwendung der in Anhang C präsentierten Phasenraumparametrisierungen jedoch problemlos durch Multiplikation des Integranden mit der Heavisideschen Sprungfunktion (siehe A.9)  $\theta(\hat{E}_\ell - \hat{E}_{\text{cut}})$  eingeführt werden. Die verschiedenen hier und in Anhang C eingeführten Phasenraumparametrisierungen bieten insofern die Möglichkeit, auf Partonniveau die verschiedenen Phasenraumparametrisierungen und die numerische Genauigkeit der Methode zu überprüfen. Die in Abschnitt 3.6 vorgestellten numerischen Ergebnisse wurden jeweils mit mehreren Phasenraumparametrisierungen berechnet. Die numerischen Ergebnisse stimmen dabei innerhalb der angegebenen Fehlergrenzen überein.



### Aufteilung in einen drei-Körper-Phasenraum $b \rightarrow X + \ell + \bar{\nu}$ und einen zwei-Körper-Phasenraum $X \rightarrow c + g$

Wir teilen den Phasenraum so auf, dass das  $b$ -Quark zunächst in das masselose Lepton, das Antineutrino und einen Zustand  $X$  zerfällt, für dessen Impuls gilt

$$p_X = p_b - p_\ell - p_\nu = p_c + p_g. \quad (3.35)$$

Der Zustand  $X$  zerfällt dann in das Charm-Quark und das Gluon.  $p_X$  ist also der Gesamtimpuls des hadronischen Anteils im Endzustand. Die Aufspaltung des Phasenraums nimmt folgende Form an:

$$\int [d\Pi_{b \rightarrow c+g+\ell+\bar{\nu}}] = \int \frac{dp_X^2}{2\pi} \int [d\Pi_{b \rightarrow X+\ell+\bar{\nu}}] \int [d\Pi_{X \rightarrow c+g}]. \quad (3.36)$$

Die zur Berechnung eines vier-Körper-Phasenraums benötigten vier Parameter setzen sich zusammen aus insgesamt drei für das Integral über  $dp_X^2$  und den drei-Körper-Phasenraum und einem für den zwei-Körper-Phasenraum.

### Der drei-Körper-Phasenraum $b \rightarrow X + \ell + \bar{\nu}$ und das Integral über $dp_X^2$

Wir drücken alle Energien und Impulse im Ruhesystem des  $b$ -Quarks aus, für jede Energie gilt  $E = (p_b \cdot p)/m_b$ , wobei  $p$  der Viererimpuls des entsprechenden Teilchens ist. Wir parametrisieren die Impulse in Abhängigkeit von den Energien und Winkeln als

$$p_b = (m_b, 0, 0, 0), \quad p_\ell = (E_\ell, 0, 0, E_\ell), \quad p_\nu = (E_\nu, E_\nu s_1, 0, E_\nu c_1) \quad (3.37)$$

und die Energien und Winkel in Abhängigkeit von den Integrationsparametern  $y$ ,  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  als

$$E_\ell = m_b \frac{y}{2}, \quad E_\nu = m_b \frac{(1 - \delta^2 - y)}{2\kappa_1} \bar{\lambda}_2, \quad c_1 = 2\lambda_3 - 1 \quad (3.38)$$

mit

$$\delta = \frac{m_c}{m_b} \quad \text{und} \quad \kappa_1 = 1 - (1 - c_1) \frac{y}{2}. \quad (3.39)$$

Hier und im Folgenden bedeutet für alle Größen ein Querstrich über der Bezeichnung, dass es sich jeweils um 1 minus die entsprechende Größe handelt:

$$\bar{x} = 1 - x. \quad (3.40)$$

Bei allen Integrationsparametern handelt es sich um dimensionslose Größen. Der Integrationsparameter  $y$  parametrisiert die Leptonenergie. Die Leptonenergie nimmt Werte zwischen Null und  $m_b(1 - \delta^2)/2$  an, da in dem Zerfall jeweils das massive Charm-Quark erzeugt wird. Daher kann der Integrationsparameter  $y$  Werte zwischen Null und  $1 - \delta^2$  annehmen.  $c_1$  und  $s_1$  sind der Cosinus und Sinus des Winkels zwischen Leptonimpuls und Neutrinoimpuls,  $\lambda_3$  parametrisiert also diesen Winkel. Der Zusammenhang zwischen dem Cosinus den Winkels

und  $\lambda_3$  wurde so gewählt, dass bei einem Cosinus, für den Werte zwischen  $-1$  und  $1$  erlaubt sind,  $\lambda_3$  Werte zwischen Null und  $1$  durchläuft.  $\lambda_2$  beschreibt die Neutrinoenergie, die durch die Leptonenergie und die Energie, die auf das hadronische System übertragen wird, eingeschränkt ist. Auch der Zusammenhang zwischen der Neutrinoenergie und dem Integrationsparameter  $\lambda_2$  wurde so gewählt, dass  $\lambda_2$  Werte zwischen Null und  $1$  annimmt.

In Abhängigkeit von diesen Größen ergibt sich das Phasenraumintegral zu

$$\begin{aligned} & \int_{m_c^2}^{m_b^2} \frac{dp_X^2}{2\pi} \int [d\Pi_{b \rightarrow X + \ell + \bar{\nu}}] \\ &= \frac{\Omega_{D-1} \Omega_{D-2} m_b^{4-4\epsilon}}{2^{D+1} (2\pi)^{2D-2}} \int_0^{1-\delta^2} dy \int_0^1 d\lambda_2 d\lambda_3 (1 - \delta^2 - y)^{2-2\epsilon} \kappa_1^{2\epsilon-2} (y\bar{\lambda}_2)^{1-2\epsilon} (\bar{\lambda}_3 \lambda_3)^{-\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Hier haben wir im Integranden bereits die Ersetzung  $D \rightarrow 4 - 2\epsilon$  durchgeführt.  $\Omega_D$  ist das Integral über den Raumwinkel  $d\Omega_D$  in  $D$  Dimensionen und somit die Oberfläche der  $D$ -dimensionalen Einheitskugel, für die gilt

$$\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}. \quad (3.42)$$

Wir führen die Substitution  $y = (1 - \delta^2)\lambda_1$  durch. Alle drei Integrationsparameter  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  nehmen nun Werte zwischen Null und  $1$  an. Wir haben somit die Integrationsgrenzen des Phasenraums auf einen Einheitswürfel abgebildet. Dies vereinfacht die mehrdimensionale numerische Integration, die wir durchführen werden, um die Zerfallsrate und die Momente zu erhalten.

### Möglichkeit den drei-Körper-Phasenraum $b \rightarrow c + \ell + \bar{\nu}$ zu erhalten

Es ist auch leicht möglich, aus (3.41) den auf Baumgraphenniveau sowie für die Berechnung der virtuellen Korrekturen benötigten drei-Körper-Phasenraum  $b \rightarrow c + \ell + \bar{\nu}$  in Abhängigkeit der Integrationsparameter  $\lambda_1$  und  $\lambda_3$  zu erhalten. Das Teilchen  $X$  ist in diesem Fall einfach das Charm-Quark. Man multipliziert (3.41) mit  $2\pi\delta(p_X^2 - m_c^2) = 2\pi\delta((m_b^2 - m_c^2)\lambda_2\bar{\lambda}_1)$  und integriert über  $\lambda_2$ .

### Der zwei-Körper-Phasenraum $X \rightarrow c + g$

Wir teilen den Gluonimpuls  $\vec{p}_g$  in einen Teil in Richtung des Gesamtimpulses des hadronischen Anteils im Endzustand  $\vec{p}_X$  und einen hierzu senkrechten Anteil auf und schreiben den Viererimpuls des Gluons als

$$p_g = (E_g, 0, 0, 0) + E_g c_2 \left( 0, \frac{\vec{p}_X}{|\vec{p}_X|} \right) + E_g s_2 \left( 0, \vec{p}_\perp \right) \quad (3.43)$$

mit  $\vec{p}_X \cdot \vec{p}_\perp = 0$ ,  $\vec{p}_\perp^2 = 1$  und  $|\vec{p}_X| = \sqrt{E_X^2 - p_X^2}$ . Für die Gluonenergie gilt

$$E_g = \frac{p_X^2 - m_c^2}{2(E_X - c_2|\vec{p}_X|)}. \quad (3.44)$$

$c_2$  und  $s_2$  sind der Cosinus und Sinus des Winkels zwischen Gluonimpuls  $\vec{p}_g$  und dem Gesamtimpuls des hadronischen Anteils im Endzustand  $\vec{p}_X$ . Für den zwei-Körper-Phasenraum erhält man

$$\int [d\Pi_{X \rightarrow c+g}] = \frac{1}{2(2\pi)^{D-2}} \int_{-1}^1 dc_2 \frac{s_2^{D-4} E_g^{D-2}}{p_X^2 - m_c^2} \int d^{D-2} p_\perp. \quad (3.45)$$

Wir führen die Substitution  $c_2 = 2\lambda_4 - 1$  durch, so dass der Integrationsparameter  $\lambda_4$  wie die Integrationsparameter des drei-Körper-Phasenraums Werte von Null bis 1 annimmt. Die in (3.24) definierten Nenner  $N_b$  und  $N_c$  der reellen Diagramme sind unabhängig von  $p_\perp$ . Die einzige Abhängigkeit der Diagramme von  $p_\perp$  kommt aus Skalarprodukten von  $p_\perp$  mit leptonischen Impulsen im Zähler der Diagramme. Bei Integration über den Einheitsvektor  $\vec{p}_\perp$  tragen nur folgende Integrale bei:

$$\int d^{D-2} p_\perp \{1, p_\perp^i p_\perp^j\} = \left\{1, \frac{1}{D-2} \delta^{ij}\right\} \Omega_{D-2}. \quad (3.46)$$

Hierbei ist  $\delta^{ij}$  die Metrik im  $(D-2)$ -dimensionalen Unterraum, es gilt  $\delta_i^i = D-2$ .

Den vier-Körper-Phasenraum erhält man durch Zusammensetzen von (3.41) und (3.45) gemäß (3.36).

### IR-Divergenzen der reellen Korrekturen

Infrarot-Divergenzen treten im Grenzfall verschwindenden Gluonimpulses auf. Dies entspricht in der hier vorgestellten Phasenraumparametrisierung  $\lambda_2 = 0$ , da  $E_g \sim p_X^2 - m_c^2 = \bar{\lambda}_1(1 - \delta^2)\lambda_2$  gilt sowie beide in (3.24) definierten Nenner proportional zu  $\lambda_2$  sind und daher für  $\lambda_2 = 0$  verschwinden. Mit (3.45) ist auch (3.36) proportional zu einem Faktor  $\lambda_2^{1-2\epsilon}$ . Hinzu kommt ein Faktor  $\lambda_2^{-2}$  aus den Nennern  $N_b$  und  $N_c$  in (3.23). Insgesamt kommt also  $\lambda_2^{-1-2\epsilon}$  im Integranden vor. Dies drücken wir wie in (3.20) beschrieben durch Distributionen aus und können dann das Integral über  $\lambda_2$  ausführen. Auch an der Phasenraumparametrisierung (C.2) mit (C.6) und der direkten Parametrisierung (C.21) erkennt man explizit einen Faktor  $\lambda_2$ , der jeweils zur Potenz  $1 - 2\epsilon$  vorkommt. Infrarot-Divergenzen sind dort ebenso wie hier mit dem Integrationsparameter  $\lambda_2$  verknüpft.

Bei den virtuellen Korrekturen zeigen sich Infrarot-Divergenzen bei der Berechnung der Schleifenintegrale (siehe Abschnitt 3.5.2).

### 3.5.2 Die Berechnung der Schleifenintegrale für die virtuellen Korrekturen

Ein wesentlicher Aspekt bei der Berechnung der virtuellen Korrekturen ist die Berechnung der Schleifenintegrale in  $D$  Dimensionen. Die Schleifenintegrale sind sowohl UV- als auch IR-divergent, so dass die Behandlung der Divergenzen von zentraler Bedeutung ist. In diesem Abschnitt wird die Berechnung der Schleifenintegrale für die Vertexkorrektur explizit vorgeführt. Die Berechnung des Schleifenintegrals für die Feldstärkenormierung erfolgt analog. Am Ende dieses Abschnitts wird beschrieben, welche Divergenzen sich gegenseitig aufheben, so dass man ein UV-endliches Ergebnis für die virtuellen Korrekturen und ein endliches Ergebnis für die Summe aus reellen und virtuellen Korrekturen erhält.

#### Schleifenintegrale für die Vertexkorrektur

Durch Berechnung der Spur in (3.28) erhält man im Zähler Ausdrücke, die unabhängig vom Schleifenimpuls  $k$  sind, sowie Ausdrücke proportional zu  $k^\mu$  und Ausdrücke proportional zu  $k^\mu k^\nu$ . Die virtuellen Korrekturen beinhalten also Schleifenintegrale der Form

$$\{I, I^\mu, I^{\mu\nu}\} = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\{1, k^\mu, k^\mu k^\nu\}}{(k^2 + i0)(2p_b \cdot k + k^2 + i0)(2p_c \cdot k + k^2 + i0)}. \quad (3.47)$$

Hier haben wir im Nenner bereits  $p_b^2 = m_b^2$  und  $p_c^2 = m_c^2$  eingesetzt, was auf Partonniveau gilt. Nach Einführen der Feynman-Parameter  $y$  und  $z$  sowie der Substitution  $l = k + yp_b + zp_c$  erhält man mit  $d^D k = d^D l$  und

$$\Delta = (yp_b + zp_c)^2 - z(p_c^2 - m_c^2) = y^2 m_b^2 + z^2 m_c^2 + 2yz p_b \cdot p_c \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \{I, I^\mu, I^{\mu\nu}\} &= \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \\ &\int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz 2 \frac{\{1, l^\mu - yp_b^\mu - zp_c^\mu, (l^\mu - yp_b^\mu - zp_c^\mu)(l^\nu - yp_b^\nu - zp_c^\nu)\}}{[l^2 - \Delta + i0]^3} \\ &= \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \\ &\int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz 2 \frac{\{1, -yp_b^\mu - zp_c^\mu, l^\mu l^\nu + (yp_b^\mu + zp_c^\mu)(yp_b^\nu + zp_c^\nu)\}}{[l^2 - \Delta + i0]^3} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Hierbei haben wir im zweiten Schritt ausgenutzt, dass Terme mit einer ungeraden Anzahl von Potenzen von  $l$  beim Integrieren über  $l$  verschwinden, da eine in  $l$  ungerade Funktion über einen Integrationsbereich, dessen Grenzen symmetrisch um Null liegen, integriert wird. Nach Ausführen des Integrals über  $l$  in  $D$  Dimensionen und der Ersetzung  $D \rightarrow 4 - 2\epsilon$  erhält

man

$$\{I, I^\mu, I^{\mu\nu}\} = \frac{(-i)}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \Gamma(1+\epsilon) \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \Delta^{-1-\epsilon} \left\{ 1, -yp_b^\mu - zp_c^\mu, (yp_b^\mu + zp_c^\mu)(yp_b^\nu + zp_c^\nu) - \frac{g^{\mu\nu}}{2\epsilon} \Delta \right\}. \quad (3.50)$$

Wir führen einen Wechsel zu neuen Integrationsvariablen  $x_1, x_2$  durch, deren Zusammenhang mit  $y$  und  $z$  durch

$$z = x_1(1-x_2), \quad y = x_1 x_2, \quad dz dy = x_1 dx_1 dx_2 \quad (3.51)$$

gegeben ist. Die Schleifenintegrale in den neuen Variablen sind

$$\{I, I^\mu, I^{\mu\nu}\} = \frac{i}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \Gamma(1+\epsilon) \int_0^1 dx_2 \Delta_{\text{neu}}^{-1-\epsilon} \int_0^1 dx_1 \left\{ (-1)x_1^{-1-2\epsilon}, x_1^{-2\epsilon} (x_2 p_b^\mu + \bar{x}_2 p_c^\mu), x_1^{-2\epsilon} \left( -(x_2 p_b^\mu + \bar{x}_2 p_c^\mu)(x_2 p_b^\nu + \bar{x}_2 p_c^\nu) + \frac{g^{\mu\nu} \Delta_{\text{neu}}}{2\epsilon} \right) \right\}. \quad (3.52)$$

mit

$$\Delta_{\text{neu}} = \frac{\Delta}{x_1^2} = x_2^2 m_b^2 + \bar{x}_2^2 m_c^2 + 2x_2 \bar{x}_2 p_b \cdot p_c, \quad (3.53)$$

wobei  $\bar{x}_2$  gemäß (3.40) definiert ist. Der erste Term in (3.52) ist infrarot-divergent, was man daran erkennt, dass  $x_1$  zur Potenz  $(-1-2\epsilon)$  vorkommt. Die IR-Divergenz behandeln wir wie im Abschnitt 3.4.2 beschrieben. Wir drücken  $x_1^{-1-2\epsilon}$  gemäß (3.20) durch einen divergenten Anteil, der eine Delta-Distribution multipliziert, und einen endlichen Anteil, der aus einer Plus-Distribution besteht, aus. Danach integrieren wir über  $x_1$ . Das Integral über die Plus-Distribution wird hierbei Null. Als Ergebnis erhält man

$$\{I, I^\mu, I^{\mu\nu}\} = \frac{i}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \Gamma(1+\epsilon) \int_0^1 dx_2 \Delta_{\text{neu}}^{-1-\epsilon} \left\{ \frac{1}{2\epsilon}, \frac{1}{1-2\epsilon} (x_2 p_b^\mu + \bar{x}_2 p_c^\mu), \frac{1}{2-2\epsilon} \left( -(x_2 p_b^\mu + \bar{x}_2 p_c^\mu)(x_2 p_b^\nu + \bar{x}_2 p_c^\nu) + \frac{g^{\mu\nu} \Delta_{\text{neu}}}{2\epsilon} \right) \right\}. \quad (3.54)$$

Das Integral über  $x_2$  ist infrarot-endlich, daher können wir (3.54) in  $\epsilon$  entwickeln, indem wir den Integranden in  $\epsilon$  entwickeln. Bei der Berechnung der Zerfallsrate und der Momente multiplizieren die hier berechneten Schleifenintegrale endliche Ausdrücke aus dem Phasenraum. Daher genügt es, den Integranden in (3.54) bis zur Ordnung 1 zu entwickeln, wir brauchen keine Terme von Ordnung  $\epsilon$ . Nach dieser Entwicklung ergibt sich für die Schleifenintegrale

$$\{I, I^\mu, I^{\mu\nu}\} = \frac{i}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \Gamma(1+\epsilon) \int_0^1 dx_2 \Delta_{\text{neu}}^{-1-\epsilon} \left\{ \frac{1}{2\epsilon}, (x_2 p_b^\mu + \bar{x}_2 p_c^\mu), -\frac{1}{2} (x_2 p_b^\mu + \bar{x}_2 p_c^\mu)(x_2 p_b^\nu + \bar{x}_2 p_c^\nu) + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \Delta_{\text{neu}} + \frac{1}{4\epsilon} g^{\mu\nu} \Delta_{\text{neu}} \right\}. \quad (3.55)$$

Der erste Term in der zweiten Zeile von (3.55) ist IR-divergent, während der letzte Term UV-divergent ist. Sowohl IR- als auch UV-Divergenzen äußern sich jetzt durch  $1/\epsilon$ -Pole. Um welche Art von Divergenz es sich handelt, erkennt man lediglich daran, an welcher Stelle in der Herleitung des Ausdrucks sie auftritt. Das Integral über  $x_2$  wird zusammen mit den Phasenraumintegralen numerisch berechnet.

### Divergenzen der virtuellen Korrekturen

Die Berechnung des Schleifenintegrals für die Feldstärkerenormierung geschieht analog zur Berechnung der Schleifenintegrale für die Vertexkorrektur. Wie in Abschnitt 3.4.4 bereits angedeutet, treten bei der Berechnung des Schleifenintegrals für die Feldstärkerenormierung ebenfalls sowohl IR- als auch UV-Divergenzen auf. Die virtuellen Korrekturen als Ganzes, also die Summe der Beiträge aus Vertexkorrektur, Feldstärkerenormierung und (endlicher) Renormierung des axialen Stroms, sind frei von UV-Divergenzen. Die UV-Divergenzen aus der Vertexkorrektur heben sich mit den UV-Divergenzen aus der Feldstärkerenormierung auf. IR-Divergenzen bleiben jedoch übrig, diese kürzen mit den IR-Divergenzen der reellen Korrekturen. Als Ergebnis für die Rate und die Momente zur Ordnung  $\alpha_s$  ergibt sich ein endlicher Ausdruck, was so sein muss, da es sich um physikalische Größen handelt.

### 3.5.3 Die numerische Integration

Wir berechnen die Phasenraum- und Schleifenintegrale numerisch. Einen Großteil unserer Rechnung führen mit Hilfe von `Mathematica` [106] aus. Die mehrdimensionalen numerischen Integrale berechnen wir mittels des Integrationsalgorithmus `Vegas` [107], der Teil der `CUBA` library [108] ist. Aus dem jeweiligen Integral produzieren wir mit `Mathematica` C-Code. Dann berechnen wir das Integral mit `Vegas` in C/C++. Man gibt eine relative und absolute Genauigkeit an, die mindestens erreicht sein müssen, sowie wie viele Iterationen höchstens durchgeführt werden dürfen. Die Integration bricht ab, wenn entweder die geforderte Genauigkeit oder die Höchstzahl der Iterationen erreicht ist. `Vegas` gibt jeweils das Ergebnis für das Integral sowie die numerische Unsicherheit aus. Die geforderte Genauigkeit oder die Höchstzahl der Iterationen zu erhöhen, verringert die Unsicherheit, erhöht dabei jedoch die Rechenzeit. Es gilt also, einen Mittelweg zwischen erforderlicher Genauigkeit des Ergebnisses und der Verlängerung der Rechenzeit zu finden.

### 3.6 Numerische Ergebnisse auf Partonniveau

In diesem Abschnitt werden numerische Ergebnisse für die Zerfallsrate und die Momente auf Partonniveau vorgestellt, die mittels der in den vorherigen Abschnitten eingeführten Methoden berechnet wurden. Um die Momente des Leptonenergiespektrums zu erhalten, multipliziert man die differentielle Rate mit der auf die Masse des  $b$ -Quarks  $m_b$  normierten Leptonenergie  $\hat{E}_\ell = E_\ell/m_b$  zu einer Potenz  $n$ . Die hadronischen Momente erhält man, indem man die differentielle Rate mit der normierten Gesamtenergie des hadronischen Systems  $\hat{E}_X$  zu einer Potenz  $j$  sowie der Differenz zwischen der normierten hadronisch invarianten Masse  $\hat{M}_X$  zum Quadrat und  $\hat{M}_D^2$  zur Potenz  $i$  multipliziert. Hierbei ist  $\hat{M}_D = (\hat{M}_D + 3\hat{M}_{D^*})/4$  die normierte, spin-gemittelte  $D$ -Meson-Masse. Die Normierung der Momente erfolgt auf die totale partonische Rate auf Baumgraphenniveau (3.17). Für die leptonenischen und hadronischen Momente gilt somit

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{\Gamma_0} \int d\hat{M}_X^2 \int_{\hat{E}_{\text{cut}}} d\hat{E}_\ell (\hat{E}_\ell)^n \frac{d^2\Gamma}{d\hat{M}_X^2 d\hat{E}_\ell} \\ &= L_n^{(0)} + \frac{\alpha_s}{\pi} L_n^{(1)} + \mathcal{O}(\alpha_s^2), \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \frac{1}{\Gamma_0} \int d\hat{M}_X^2 \int_{\hat{E}_{\text{cut}}} d\hat{E}_\ell (\hat{M}_X^2 - \hat{M}_D^2)^i (\hat{E}_X)^j \frac{d^2\Gamma}{d\hat{M}_X^2 d\hat{E}_\ell} \\ &= H_{ij}^{(0)} + \frac{\alpha_s}{\pi} H_{ij}^{(1)} + \mathcal{O}(\alpha_s^2). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Alle mit einem Hut gekennzeichneten Größen sind jeweils auf  $m_b$  normiert. Auf Partonniveau können wir für die Spin-gemittelte  $D$ -Meson-Masse einfach die Charm-Quark-Masse einsetzen. Darüber hinaus können wir auf Partonniveau die hadronisch invariante Masse  $\hat{M}_X$  durch die partonisch invariante Masse ersetzen. Die Differenz zwischen der normierten hadronisch invarianten Masse  $\hat{M}_X$  zum Quadrat und  $\hat{M}_D^2$  ist somit auf Partonniveau  $((p_c + p_g)^2 - m_c^2)/m_b^2$  für die reellen Korrekturen. Diese Differenz ist Null für den Baumgraphenbeitrag und für die virtuellen Korrekturen, da in diesen Fällen nur das Charm-Quark im hadronischen Anteil des Endzustands enthalten ist und  $p_c^2 = m_c^2$  gilt. Daher werden für  $i > 0$  die hadronischen Momente auf Baumgraphenniveau Null, zu diesen hadronischen Momenten zur Ordnung  $\alpha_s$  tragen nur die reellen Korrekturen bei. Die normierte Gesamtenergie des hadronischen Systems  $\hat{E}_X$  ist auf Partonniveau gleich der partonischen Energie. Sie besteht aus der Summe aus den normierten Charm- und Gluonenergien für die reellen Korrekturen sowie nur aus der normierten Charm-Quark-Energie für den Baumgraphenbeitrag und für die virtuellen Korrekturen.

In (3.56) und (3.57) ist die doppelt differentielle Rate in der hadronisch invarianten Masse und der Leptonenergie dargestellt. Die hadronisch invariante Masse und die Leptonenergie fungieren als Integrationsparameter, über die integriert wird, um die Momente zu erhalten. Hierbei ist zu beachten, dass das Integral über die Leptonenergie nicht bei Null anfängt, sondern bei einer unteren Grenze  $\hat{E}_{\text{cut}}$ . Diesen Schnitt auf die Leptonenergie führt man ein, da im Experiment sehr niederenergetische Leptonen nicht gemessen werden können.

In unserer Rechnung drücken wir die differentielle Rate nicht in Abhängigkeit von der hadronisch invarianten Masse und der Leptonenergie aus, sondern in Abhängigkeit von den Integrationsparametern aus den Phasenraum- und Schleifenintegralen. Nur bei Verwendung der Aufspaltung des vier-Körper-Phasenraums  $b \rightarrow c + g + \ell + \bar{\nu}$  gemäß (3.36) und der daraus wie im Abschnitt nach (3.42) beschrieben gewonnenen Parametrisierung für den drei-Körper-Phasenraum  $b \rightarrow c + \ell + \bar{\nu}$  ist die Leptonenergie einer der Integrationsparameter. Dann kann der Schnitt auf die Leptonenergie direkt als Integrationsgrenze eingeführt werden. Bei Verwendung der anderen Parametrisierungen für den Phasenraum beachten wir den Schnitt auf die Leptonenergie, indem wir mit der Heavisideschen Sprungfunktion (siehe A.9)  $\theta(\hat{E}_\ell - \hat{E}_{\text{cut}})$  multiplizieren.

In der zweiten Zeile von (3.56) und (3.57) sind die Momente in einer Entwicklung in  $\alpha_s$  dargestellt. Zu den Momenten gibt es Beiträge nullter Ordnung in  $\alpha_s$ , die aus den Beiträgen zur differentiellen Rate auf Baumgraphenniveau kommen. Beiträge erster Ordnung kommen aus den reellen und virtuellen Korrekturen. Wir berechnen keine Beiträge, die von Ordnung  $\alpha_s^2$  und höher sind.

Auf  $\alpha_s$ -Niveau berechnen wir für jeden Beitrag zu den reellen und virtuellen Korrekturen den hadronischen und den leptonischen Tensor in  $D$  Dimensionen und kontrahieren beide miteinander. Bei den virtuellen Korrekturen beachten wir hierbei die Parametrisierung der Schleifenintegrale. Gemäß (3.1) multiplizieren wir anschliessend mit der jeweils passenden Parametrisierung des Phasenraums und entwickeln den Integranden in  $\epsilon$  bis  $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ . Wir erhalten divergente und endliche Ausdrücke. Zur Berechnung der Momente multiplizieren wir dann gemäß (3.56) und (3.57) mit der Leptonenergie bzw. der hadronischen Energie und der hadronisch invarianten Masse. Die mehrdimensionalen Integrale berechnen wir numerisch mit **Vegas**. Am Ende addieren wir die einzelnen Beiträge, um ein Ergebnis für das jeweilige normierte Moment zu bekommen. Dabei sehen wir, dass sich die divergenten Ausdrücke mit hoher numerischer Genauigkeit gegeneinander kürzen. Wir wissen, dass UV-Divergenzen sich innerhalb der virtuellen Korrekturen kürzen müssen, während die IR-Divergenzen der reellen und virtuellen Korrekturen sich gegenseitig aufheben. Wir können dies nicht mehr explizit überprüfen, da aufgrund der Behandlung der IR-Divergenzen in Dimensionaler Regularisierung alle Divergenzen als  $1/\epsilon$ -Pole ausgedrückt sind. Es genügt jedoch zu sehen, dass die physikalischen Größen, also die Zerfallsrate und die Momente, keine Divergenzen enthalten.

Numerische Ergebnisse für die in (3.56) und (3.57) definierten normierten Momente sind in den nachfolgenden Tabellen angegeben, und zwar einmal ohne Schnitt auf die Leptonenergie und einmal mit einem Schnitt auf die Leptonenergie  $E_\ell > 1$  GeV. Als Zahlenwerte für die Massen verwenden wir  $m_b = 4.6$  GeV und  $m_c = 1.15$  GeV. Diese Zahlenwerte, die auch in [60] verwendet werden, entsprechen nicht den Werten für die Polmassen, wie wir sie bei der numerischen Analyse in Abschnitt 4.3 benutzen. Die Verwendung dieser Zahlenwerte ermöglicht uns aber, die numerischen Ergebnisse mit [60] zu vergleichen. Die in den Tabellen angegebenen Unsicherheiten der Momente sind aus den von **Vegas** ausgegebenen Unsicherheiten der numerischen Integration mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung berechnet, d.h. die einzelnen Unsicherheiten werden quadratisch addiert. Es ist möglich, die Unsicherheiten zu verringern, indem man die Höchstzahl der erlaubten Iterationen und die geforderte Genau-



Tabelle 3.1: Die normierten hadronischen Momente ohne Schnitt auf die Leptonenergie.

$i$	$j$	$H_{ij}^{(0)}$	$H_{ij}^{(1)}$
0	0	$1,0 \pm 0,000070$	$-1,777507 \pm 0,002126$
0	1	$0,422009 \pm 0,000030$	$-0,718953 \pm 0,000902$
0	2	$0,183191 \pm 0,000013$	$-0,291882 \pm 0,000402$
0	3	$0,081475 \pm 0,000005$	$-0,117663 \pm 0,000187$
1	0	$0 \pm 0$	$0,090098 \pm 0,000040$
1	1	$0 \pm 0$	$0,047002 \pm 0,000020$
1	2	$0 \pm 0$	$0,025093 \pm 0,000011$
2	0	$0 \pm 0$	$0,009107 \pm 0,000005$
2	1	$0 \pm 0$	$0,005339 \pm 0,000003$
3	0	$0 \pm 0$	$0,001810 \pm 0,000002$

 Tabelle 3.2: Die normierten hadronischen Momente mit einem Schnitt auf die Leptonenergie:  $E_\ell > 1$  GeV.

$i$	$j$	$H_{ij}^{(0)}$	$H_{ij}^{(1)}$
0	0	$0,814793 \pm 0,000177$	$-1,439220 \pm 0,002677$
0	1	$0,334064 \pm 0,000074$	$-0,577081 \pm 0,001109$
0	2	$0,141112 \pm 0,000032$	$-0,234386 \pm 0,000480$
0	3	$0,061192 \pm 0,000014$	$-0,095899 \pm 0,000215$
1	0	$0 \pm 0$	$0,057266 \pm 0,000048$
1	1	$0 \pm 0$	$0,028499 \pm 0,000023$
1	2	$0 \pm 0$	$0,014472 \pm 0,000011$
2	0	$0 \pm 0$	$0,004440 \pm 0,000003$
2	1	$0 \pm 0$	$0,002420 \pm 0,000003$
3	0	$0 \pm 0$	$0,000640 \pm 0,000002$

igkeit erhöht. Da dies jedoch die Rechenzeit deutlich verlängert, und für einen Vergleich mit [60] die hier erreichte Genauigkeit bei Weitem ausreicht, haben wir hierauf verzichtet. Bei den in der ersten Zeile einer Tabelle, also für  $n = 0$  bzw.  $i = 0$  und  $j = 0$  angegebenen Ergebnissen handelt es sich jeweils um die totale Rate.

Die in Tabelle 3.1 angegebenen numerischen Ergebnisse für die hadronischen Momente ohne Schnitt auf die Leptonenergie wurden mit der direkten Parametrisierung (C.21) des Phasenraums für die reellen Korrekturen und dem aus (3.41) wie im Abschnitt nach (3.42) beschrieben gewonnenen drei-Körper-Phasenraum  $b \rightarrow c + \ell + \bar{\nu}$  für die virtuellen Korrekturen und das Baumgraphenniveau erzielt. Auch mit den anderen Phasenraumparametrisierungen erhält man Ergebnisse, die innerhalb der angegebenen Unsicherheiten mit den hier gezeigten Ergebnissen übereinstimmen. Alle in Tabelle 3.1 gezeigten hadronischen

Tabelle 3.3: Die normierten leptonischen Momente ohne Schnitt auf die Leptonenergie.

$n$	$L_n^{(0)}$	$L_n^{(1)}$
0	$1,0 \pm 0,000070$	$-1,777330 \pm 0,001429$
1	$0,307203 \pm 0,000022$	$-0,551150 \pm 0,000431$
2	$0,103000 \pm 0,000008$	$-0,187656 \pm 0,000160$
3	$0,036524 \pm 0,000003$	$-0,067818 \pm 0,000063$

 Tabelle 3.4: Die normierten leptonischen Momente mit einem Schnitt auf die Leptonenergie:  
 $E_\ell > 1$  GeV.

$n$	$L_n^{(0)}$	$L_n^{(1)}$
0	$0,814803 \pm 0,000152$	$-1,440080 \pm 0,002805$
1	$0,277641 \pm 0,000044$	$-0,497272 \pm 0,000809$
2	$0,097934 \pm 0,000014$	$-0,178466 \pm 0,000248$
3	$0,035615 \pm 0,000004$	$-0,066167 \pm 0,000082$

Momente stimmen innerhalb der angegebenen Unsicherheiten mit den ersten beiden Spalten in Tabelle 3 in [60] überein.

Die in Tabelle 3.2 angegebenen numerischen Ergebnisse für die hadronischen Momente mit einem Schnitt auf die Leptonenergie bei 1 GeV wurden mit der Aufteilung (3.36) des Phasenraums für die reellen Korrekturen und der daraus wie im Abschnitt nach (3.42) beschrieben gewonnenen Parametrisierung für den drei-Körper-Phasenraum  $b \rightarrow c + \ell + \bar{\nu}$  berechnet. Die hier gezeigten Ergebnisse stimmen innerhalb der angegebenen Unsicherheiten überein mit den mit der Aufteilung (C.2) des Phasenraums für die reellen Korrekturen und der entsprechenden Aufspaltung (C.14) für den drei-Körper-Phasenraum  $b \rightarrow c + \ell + \bar{\nu}$  erzielten Ergebnissen. Ebenfalls stimmen die Ergebnisse innerhalb der angegebenen Unsicherheiten überein mit Ergebnissen, die mit der direkten Parametrisierung (C.21) des Phasenraums für die reellen Korrekturen gewonnen wurden. Alle in Tabelle 3.2 gezeigten hadronischen Momente stimmen innerhalb der Unsicherheiten überein mit den ersten beiden Spalten in Tabelle 4 in [60].

In Tabelle 3.3 und Tabelle 3.4 sind Zahlenwerte für die Momente des Leptonenergiespektrums angegeben, und zwar in Tabelle 3.3 ohne Schnitt auf die Leptonenergie und in Tabelle 3.4 mit einem Schnitt auf die Leptonenergie von 1 GeV. Diese numerischen Ergebnisse sind mit der Aufteilung (C.2) des Phasenraums für die reellen Korrekturen und der entsprechenden Aufteilung (C.14) des Phasenraums für die virtuellen Korrekturen und das Baumgraphenniveau erzielt worden. Alle in Tabelle 3.3 und Tabelle 3.4 gezeigten Zahlenwerte stimmen innerhalb der angegebenen Unsicherheiten mit den Tabellen 1 und 2 in [60] überein.

Zwischen den in [60] und [58] vorgestellten Momenten bezüglich der hadronisch inva-

rianten Masse gab es nie einen detaillierten Vergleich, da in [58] Momente bezüglich der physikalischen hadronisch invarianten Masse angegeben werden, während [60] Momente bezüglich der partonisch invarianten Masse berechnen. Darüber hinaus verwenden [58] die  $b$ -Quark-Masse im 1S-Schema, wohingegen in [60] das Polschema benutzt wird. [60] vergleichen lediglich mit einigen älteren Ergebnissen [56, 57, 55, 62] sowie mit [59].

Unsere in diesem Abschnitt vorgestellten numerischen Ergebnisse für den Baumgraphenbeitrag und die  $\alpha_s$ -Korrekturen zu den leptonischen und hadronischen Momenten auf Partonniveau, die unter Verwendung der  $b$ -Quark-Masse im Polschema erzielt wurden, stimmen überein mit [60]. Dies liefert eine unabhängige Bestätigung der Ergebnisse von [60], die mit anderen Rechenmethoden erreicht wurde. Insbesondere wurden hier IR-Divergenzen in Dimensionaler Regularisierung und nicht durch Einführen einer Gluonmasse regularisiert.

### 3.7 Ausblick: QCD-Strahlungskorrekturen zu den $1/m_b^2$ -Termen

In den vorherigen Abschnitten haben wir einen Formalismus entwickelt, der sich zur Berechnung von Strahlungskorrekturen der Ordnung  $\alpha_s$  zum Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  eignet. Hiermit berechnete numerische Ergebnisse für die QCD-Strahlungskorrekturen zur Zerfallsrate und zu den Momenten auf Partonniveau wurden in Abschnitt 3.6 vorgestellt.

Die Berechnung der QCD-Strahlungskorrekturen auf Partonniveau ist Voraussetzung zur Berechnung der  $\alpha_s$ -Korrekturen zu den Ausdrücken nächstführender Ordnung in der HQE, den  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2$ -Termen. Es ist möglich, die in Abschnitt 3.5.1 gezeigte Behandlung des Phasenraums und die in Abschnitt 3.5.2 gezeigte Berechnung der Schleifenintegrale zu verallgemeinern, um damit auch die  $\alpha_s$ -Korrekturen zu den  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2$ -Termen berechnen zu können. Die numerische Integration läuft in diesem Fall gleich ab wie in Abschnitt 3.5.3 beschrieben.

Auf diese Art berechnete Ergebnisse für die  $\alpha_s$ -Korrekturen zu den Termen, die proportional zu  $\mu_\pi^2$  sind, werden in [63] vorgestellt. Mit einem Schnitt auf die Leptonenergie  $E_\ell > 1$  GeV machen diese Korrekturen für die Momente bezüglich der Leptonenergie und der partonischen Energie deutlich weniger als 1% aus, während sie für die Momente bezüglich der partonisch invarianten Masse, die auf Baumgraphenniveau verschwinden, von Ordnung 10% sind.

Da die hier entwickelte Methode die Eichinvarianz erhält, ist es auch möglich, sie zur Berechnung der  $\alpha_s$ -Korrekturen zu den weiteren  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2$ -Termen, also zu den Ausdrücken, die proportional zu  $\mu_G^2$  sind, zu verwenden.

Sind neben den  $\alpha_s$ -Korrekturen zu den  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2$ -Termen auch die  $\alpha_s^2$ -Korrekturen zur führenden Ordnung der HQE bekannt, so wird es möglich sein,  $|V_{cb}|$  aus  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  deutlich genauer als zur Zeit zu bestimmen. Voraussichtlich wird die theoretische Unsicherheit dann weniger als 1% betragen.



# Kapitel 4

## Zerfallsspektren in SCET

In diesem Kapitel behandeln wir den Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  in der Shapefunktions-Region mittels effektiver Feldtheorien. Hierbei gehen wir zunächst auf Faktorisierung ein. Anschließend stellen wir die Berechnung des Zerfallsspektrums bezüglich einer speziell gewählten Variablen in nächstführender Ordnung in  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$  und auf Baumgraphenniveau vor. Schließlich berechnen wir Strahlungskorrekturen der Ordnung  $\alpha_s$  zum Zerfallsspektrum zur führenden Ordnung in  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ . Hiermit stellen wir eine von der hadronischen Shapefunktion des  $B$ -Mesons unabhängige Beziehung zwischen Zerfallsspektren zu  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  und  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  auf, die zur Bestimmung von  $|V_{ub}|$  bei bekanntem  $|V_{cb}|$  verwendet werden kann.

Wie bereits im Abschnitt 3.1 erläutert, setzt sich die differentielle Zerfallsrate für den inklusiven semileptonischen Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  aus dem leptonischen und dem hadronischen Tensor zusammen. Der hadronische Tensor beschreibt den hadronischen Anteil des Zerfalls. Er enthält alle QCD-Effekte. Daher äußern sich sowohl  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Korrekturen als auch  $\alpha_s$ -Korrekturen zur differentiiellen Zerfallsrate als Korrekturen zum hadronischen Tensor, während der leptonische Tensor immer gleich bleibt. Die Berechnung der  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ - oder  $\alpha_s$ -Korrekturen zur differentiiellen Zerfallsrate reduziert sich auf die Berechnung der entsprechenden Korrekturen zum hadronischen Tensor. Wir verwenden den mittels des optischen Theorems definierten hadronischen Tensor (3.4) mit der Vorwärtsstreuamplitude (3.5) und dem bereits in (3.2) definierten Quarkstrom  $J_q^\mu$ .

Der Notation aus [109] folgend drücken wir den hadronischen Tensor durch fünf skalare Strukturfunktionen aus

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} = & W_1 (p_\mu v_\nu + v_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} v p - i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha v^\beta) \\ & - W_2 g_{\mu\nu} + W_3 v_\mu v_\nu + W_4 (p_\mu v_\nu + v_\mu p_\nu) + W_5 p_\mu p_\nu. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Hierbei wurden die unabhängigen Vektoren als  $v$ , die Geschwindigkeit des  $\bar{B}$ -Mesons, und  $p \equiv m_b v - q$  gewählt.  $m_b$  ist die Polmasse des  $b$ -Quarks und  $q$  der Impuls des auslaufenden Leptonpaares. Wir verwenden hier – abweichend zur im Kapitel 3 benutzten Konvention – die Konvention  $\epsilon^{0123} = -1$ .

## 4.1 Faktorisierung für $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$

Beim Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  spielen in der Shapefunktions-Region die drei Skalen  $m_b^2 \gg m_b^2 \lambda^2 \gg m_b^2 \lambda^4$  eine Rolle. Diese drei Skalen werden als die harte Skala, die Jet-Skala und die weiche Skala bezeichnet.  $\lambda$  ist hierbei der in (2.41) definierte Entwicklungsparameter. Die an den verschiedenen Skalen auftretenden Quantenfluktuationen können für inklusive  $b \rightarrow c$ -Zerfälle mit massiven kollinearen Charm-Quarks, für die (2.42) und (2.43) gilt, in ein Produkt aus harten Funktionen  $H$  und einer Faltung der Jetfunktionen  $J$  mit Shapefunktionen  $S$  faktorisiert werden. Dies bedeutet, dass die an den drei verschiedenen Skalen auftretende physikalische Dynamik voneinander getrennt wird. Für den hier betrachteten Zerfall geschieht dies ähnlich wie im masselosen Fall [94, 110]. Die differentielle Zerfallsrate lässt sich als

$$d\Gamma \sim H \cdot J \otimes S \quad (4.2)$$

schreiben, wobei  $\otimes$  die Faltung bezeichnet. Um Faktorisierung für den hier vorliegenden Zerfall zu beweisen, müsste man zeigen, dass beim Faktorisierungsbeweis im Vergleich zum masselosen Fall keine weiteren Komplikationen auftreten.

Das Matching und die damit einhergehende Faktorisierung geschieht in zwei Schritten QCD  $\rightarrow$  SCET  $\rightarrow$  HQET. Im ersten Schritt werden Fluktuationen an der harten Skala durch Matching der Lagrangedichte und der Ströme in QCD auf die entsprechenden Ausdrücke in SCET ausintegriert. Auf die Lagrangedichte und die Ströme bis Ordnung  $\lambda^2$  wurde in den Abschnitten 2.4.2 und 2.4.3 näher eingegangen. Zusätzlich zu diesen Ausdrücken in SCET brauchen wir auch die Lagrangedichte in HQET bis zur nächstführenden Ordnung, wie sie in (2.32) angegeben ist. Im Allgemeinen tritt in der Lagrangedichte in HQET (2.32) der Koeffizient  $a(\mu)$  auf, auch die Ströme in SCET werden mit Koeffizienten multipliziert. Die Koeffizienten hängen von Größen an der harten Skala ab und definieren die in der Faktorisierungsformel auftretenden harten Funktionen  $H$ .

Nach diesem ersten Matching-Schritt enthält die effektive Theorie ein kollineares Charm-Quark-Feld, ein HQET-Feld für das  $b$ -Quark sowie kollineare und weiche masselose Quarks und Gluonen. Im  $B$ -Meson sind nur weiche Freiheitsgrade enthalten, daher faktorisieren Matrixelemente gemäß

$$\langle 0 | [\text{kollineare Felder}] | 0 \rangle \otimes \langle \bar{B} | \bar{h}_v [\text{weiche Felder}] h_v | \bar{B} \rangle \equiv J \otimes S. \quad (4.3)$$

Das Vakuum-Matrixelement der kollinearen Felder definiert die störungstheoretisch berechenbaren Jetfunktionen  $J$ , die Fluktuationen an der Jet-Skala enthalten. Die Berechnung der Jetfunktionen entfernt kollineare Freiheitsgrade aus der Theorie und definiert den zweiten Matching-Schritt SCET  $\rightarrow$  HQET. Das Matrixelement der weichen Felder zwischen den  $\bar{B}$ -Meson-Zuständen wird in HQET berechnet und definiert einen Satz nichtstörungstheoretischer Shapefunktionen.

Die Trennung der Beiträge von den verschiedenen Skalen erreicht man auf dem Niveau von Feynman-Diagrammen durch Berechnung von QCD-Schleifenintegralen, indem man die „Method of Regions“ [111] verwendet. Zunächst muss man die Impulsregionen für den Schleifenimpuls bestimmen, in denen Singularitäten im Schleifenintegral auftreten. Man

entwickelt den Integranden in jeder der Impulsregionen in  $\lambda$  und berechnet danach das Schleifenintegral. Die Summe der Beiträge aller Regionen ergibt das Integral in voller QCD, bis auf höhere Ordnungen in  $\lambda$ . Zu inklusiven  $b \rightarrow c$ -Zerfällen mit massiven kollinearen Charm-Quarks, für die (2.42) und (2.43) gilt, tragen in der Shapefunktionsregion ebenso wie zu inklusiven  $b \rightarrow u$ -Zerfällen die harte, die kollineare und die weiche Region bei.

## 4.2 $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Korrekturen zum Baumgraphenniveau

In diesem Abschnitt berechnen wir für den Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  auf Baumgraphenniveau und in nächstführender Ordnung in  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ , also bis  $\mathcal{O}(\lambda^2)$ , zunächst die Vorwärtsstreuamplitude und den hadronischen Tensor. Hiermit berechnen wir die dreifach differentielle Rate und daraus das Zerfallsspektrum in der Variablen  $u$  (2.79).  $u$  ist die Verallgemeinerung der im masselosen Fall verwendeten Variablen  $p_+ = n_- p$  für massive kollineare Quarks, die wie  $m_c^2 \sim m_b^2 \lambda^2$  skalieren. Wir vergleichen unser Ergebnis mit dem Ergebnis für das Zerfallsspektrum in Heavy Quark Expansion (HQE), wo die nichtstörungstheoretischen Anteile durch HQET-Matrixelemente von lokalen Operatoren beschrieben werden. Schliesslich befassen wir uns mit den Effekten der führenden Shapefunktion, die aus  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  extrahiert werden und als Eingabewert für  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  verwendet werden kann.

### 4.2.1 Berechnung des hadronischen Tensors

Wir erwarten, dass die Vorwärtsstreuamplitude und der hadronische Tensor gemäß (4.2) in ein Produkt aus harten Funktionen und Faltungen von Jetfunktionen mit Shapefunktionen faktorisieren. Auf Baumgraphenniveau sind die harten Funktionen triviale Konstanten, und die Jetfunktionen bestehen aus Propagatoren kollinearere Felder. Die Faktorisierung der Vorwärtsstreuamplitude und des hadronischen Tensors in Faltungen (4.3) aus Jetfunktionen und Shapefunktionen wird im Folgenden zur hier betrachteten Ordnung durch explizite Rechnung gezeigt.

Wir berechnen zunächst die Vorwärtsstreuamplitude, um dann daraus den hadronischen Tensor zu erhalten, wobei wir uns – sowohl was die verwendete Notation als auch was die Vorgehensweise angeht – an [71] orientieren. In [71] wurde die Berechnung der Vorwärtsstreuamplitude und des hadronischen Tensors für inklusive  $B$ -Zerfälle mit einem leichten Quark im Endzustand vorgestellt.

Abbildung 4.1 zeigt die Diagramme, die zur Vorwärtsstreuamplitude bis Ordnung  $\lambda^2$  beitragen. Spiegeldiagramme der hier gezeigten sind dabei nicht abgebildet. Bei den abgestrahlten Gluonen handelt es sich um weiche Gluonen. Der führende Beitrag zur Vorwärtsstreuamplitude, der durch das erste Diagramm in Abbildung 4.1 dargestellt wird, ergibt sich durch Einsetzen des Stromes  $J^{(0)}$  (2.71) in (3.5). Unterdrückte Beiträge bis Ordnung  $\lambda^2$  erhält man einerseits aus Einsetzungen der Ströme (2.71-2.75). Diese Beiträge werden durch die beiden rechten Diagramme in der ersten Zeile von Abbildung 4.1 dargestellt. Hinzu kommen Einsetzungen von Beiträgen der Ordnung  $\lambda$  und  $\lambda^2$  zur Lagrangedichte (2.66), welche durch die Diagramme in der zweiten und dritten Zeile von Abbildung 4.1 ausge-

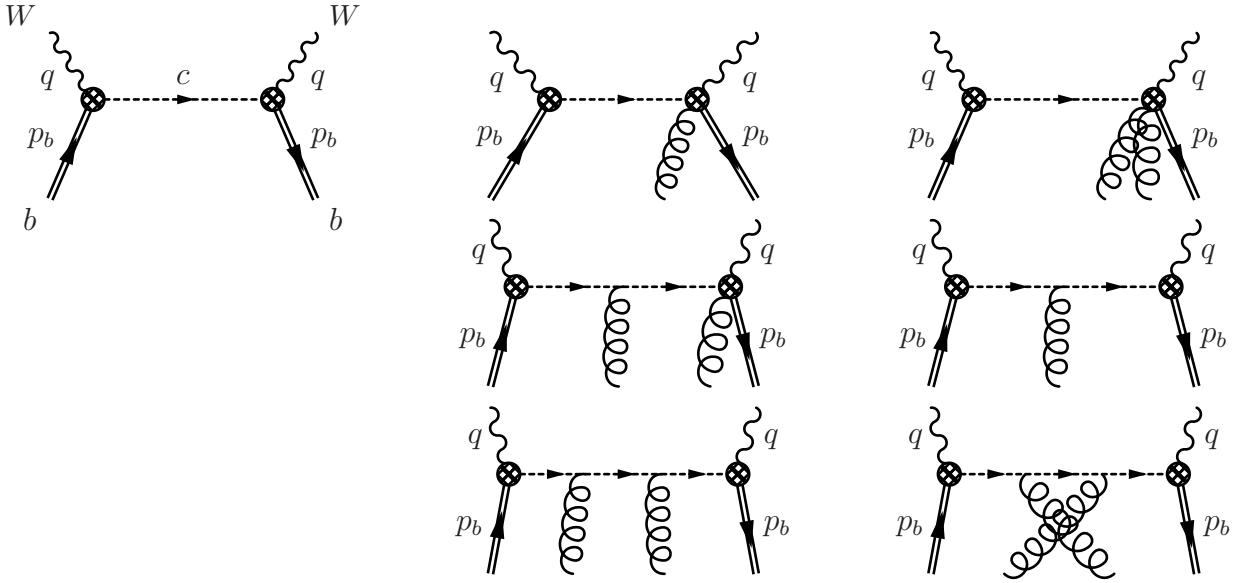


Abbildung 4.1: Diagramme, die zur Vorwärtsstreuamplitude auf Baumgraphenniveau bis Ordnung  $\lambda^2$  beitragen. Spiegeldiagramme sind hier nicht abgebildet.

drückt werden. Um insgesamt einen Ausdruck von Ordnung  $\lambda^2$  zu erhalten, können also Einsetzungen nur der Ströme sowie von zusätzlich bis zu zwei nächstführenden Lagrangedichten auftreten. Die einzelnen Beiträge zur Vorwärtsstreuamplitude werden im Folgenden jeweils durch den auf der linken Seite stehenden Ausdruck abgekürzt

$$J_A^\dagger J_B \equiv i \int d^4x e^{ip \cdot x} T \left\{ J_A^\dagger(x) J_B(0) \right\}, \quad (4.4)$$

$$J_A^\dagger J_B i\mathcal{L}_C \equiv i \int d^4x e^{ip \cdot x} T \left\{ J_A^\dagger(x) J_B(0) i \int d^4z \mathcal{L}_C(z) \right\}, \quad (4.5)$$

$$J_A^\dagger J_B i\mathcal{L}_C i\mathcal{L}_D \equiv i \int d^4x e^{ip \cdot x} T \left\{ J_A^\dagger(x) J_B(0) i \int d^4z_1 \mathcal{L}_C(z_1) i \int d^4z_2 \mathcal{L}_D(z_2) \right\}. \quad (4.6)$$

Der Vorfaktor  $e^{ip \cdot x}$  anstelle des Vorfaktors  $e^{-iq \cdot x}$  aus (3.5) ergibt sich durch den hier zusätzlich auftretenden Vorfaktor  $e^{-im_b v \cdot x}$ , der aus dem Zusammenhang zwischen QCD-Strom und SCET-Strom (2.70) bzw. zwischen QCD-Feld  $b$  und HQET-Feld  $h_v$  (2.15) kommt. Hierbei muss man beachten, dass der adjungierte Strom  $J_A^\dagger(x)$  am Ort  $x$  und der Strom  $J_B(0)$  am Ort 0 betrachtet wird.

Auf Baumgraphenniveau trägt das kollineare Gluon nicht zum vorliegenden Zerfall bei. Wir können also  $A_c = 0$  setzen, was die Ströme und Lagrangedichten wesentlich vereinfacht. Insbesondere gilt mit  $A_c = 0$  für die kollineare Wilsonlinie (2.67)  $W_c = 1$ , hieraus folgt  $J_{m2}^{(2)} = 0$  (2.74) auf Baumgraphenniveau.

Die Vorwärtsstreuamplitude lässt sich in einen Anteil, der mit  $m_c \rightarrow 0$  verschwindet,



und einen Anteil, der mit  $m_c \rightarrow 0$  nicht verschwindet, aufteilen. Da die nächstführende Lagrangedichte (2.66) in eichinvarianter Form die gleiche ist wie im masselosen Fall, können die Beiträge, die mit  $m_c \rightarrow 0$  nicht verschwinden, direkt aus Gleichung (53) und (54) in [71] abgelesen werden. Hierbei muss man den Ausdruck, der das weiche Quarkfeld enthält, weglassen, da massive Quarks nicht in der weichen Lagrangedichte vorkommen. Der einzige zunächst tetralokal erscheinende Term  $J^{(0)\dagger} J^{(0)} i\mathcal{L}_\xi^{(1)} i\mathcal{L}_\xi^{(1)}$  kann auf einen trilokalen Ausdruck reduziert werden [71]. Also kommen keine tetralokalen, sondern nur bilokale (4.4) und trilokale (4.5) Ausdrücke vor. Der Anteil der Vorwärtsstreuamplitude, der mit  $m_c \rightarrow 0$  nicht verschwindet, unterscheidet sich vom masselosen Fall nur durch Effekte der führenden Lagrangedichte (2.63) und somit durch den Propagator des kollinearen Teilchens. Aus dem zeitgeordneten Produkt der kollinearen Quarkfelder erhält man anstelle des Propagators für masselose kollineare Quarks den für massive kollineare Quarks, der im Ortsraum

$$\begin{aligned} G_\xi(x-y) &= \langle 0 | T \{ \xi(x)_{a\alpha} \bar{\xi}(y)_{b\beta} \} | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{in_+ k}{k^2 - m_c^2 + i\epsilon} \left( \frac{\not{p}_-}{2} \right)_{\alpha\beta} \delta_{ab} \\ &\equiv i\Delta(x-y) \delta_{ab} \left( \frac{\not{p}_-}{2} \right)_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.7)$$

lautet. Lateinische Indices beziehen sich auf die Farbstruktur, während die griechischen Buchstaben Dirac-Indices bezeichnen. Die hier definierte Funktion  $\Delta(z)$  erfüllt (siehe [71] für den masselosen Fall)

$$in_- \partial \Delta(z) = \delta^{(4)}(z) + \frac{1}{in_+ \partial} (m_c^2 - (i\partial_\perp)^2) \Delta(z). \quad (4.8)$$

Wie bereits in Abschnitt 2.4.4 erwähnt, betrachten wir ein System, in dem  $p_\perp = 0$  gilt. Daher gibt der Anteil proportional zu  $\partial_\perp$  keinen Beitrag.

Bei der Berechnung der Vorwärtsstreuamplitude treten aus (4.4) einfache und aus (4.5) doppelte Faltungen von Jet- und Shapefunktionen auf. Die Jetfunktionen hängen jeweils mit den Propagatoren kollinearere Felder zusammen. Ein Teil der Faltungsintegrale kann explizit ausgeführt werden, danach kann das Ergebnis als Faltung über eine einzige Variable geschrieben werden. Wir führen die Integraloperatoren

$$\begin{aligned} I_2 * f &\equiv - \int d^4 x e^{ipx} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \frac{n_+ k}{k^2 - m_c^2} f(x_+) \\ &= i \int_0^\infty dx_+ e^{iu x_+} f(x_+) \end{aligned} \quad (4.9)$$

für bilokale Beiträge zur Vorwärtsstreuamplitude und

$$\begin{aligned} I_3 * g &\equiv - \int d^4 x d^4 z e^{ipx} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-z)} e^{-ik'z} \frac{n_+ k}{(k^2 - m_c^2)(k'^2 - m_c^2)} g(x_+, z_+) \\ &= I_2 * \frac{-i}{n_+ p} \int_0^{x_+} dz_+ g(x_+, z_+) \end{aligned} \quad (4.10)$$

für trilokale Beiträge zur Vorwärtsstreuamplitude ein. Die Herleitung entsprechender Integraloperatoren ist in Anhang D.1 dargestellt.  $x_+$  und  $z_+$  sind gemäß (2.60) definiert. In (4.9) und (4.10) gilt jeweils  $m_c^2 \triangleq m_c^2 - i\epsilon$  und  $n_+p > 0$ .

Die Funktionen  $f$  und  $g$  stellen generische Shapefunktionen dar, die von einer oder zwei Variablen abhängen. Die impulsabhängigen Propagatoren entsprechen Jetfunktionen auf Baumgraphenniveau. Das Ausführen des Integrals, um die letzte Zeile von (4.9) und (4.10) zu erhalten, entspricht der Faltung in der Faktorisierungsformel (4.3). In (4.10) wird durch  $\int_0^{x_+} dz_+ g(x_+, z_+)$  eine *effektive Shapefunktion* eingeführt, die nur noch von einer Variablen abhängt. Effektive Shapefunktionen werden durch Faltungen von Jetfunktionen und Shapefunktionen definiert (siehe unten). Man muss sie von den Shapefunktionen unterscheiden, die direkt durch nichtlokale HQET-Matrixelemente zwischen  $\bar{B}$ -Zuständen definiert sind.

Die Integraloperatoren  $I_2, I_3$  sind die gleichen wie in [71], wenn man die Ersetzung  $n_-p \rightarrow u$  im Exponenten des dort definierten Integraloperators  $I_2^*$  durchführt. Die Beiträge zur Vorwärtsstreuamplitude, die für  $m_c \rightarrow 0$  nicht verschwinden, sind also die gleichen wie in (53) und (54) in [71] vorgestellt, man muss lediglich den Integraloperator  $I_2$  (4.9) anstelle  $I_2^*$  verwenden. Für den führenden Ausdruck ergibt sich mit  $x_- = n_-x_+$  (2.60)

$$\begin{aligned} J^{(0)\dagger} J^{(0)} &\equiv i \int d^4x e^{ip \cdot x} T \{ J^{(0)\dagger}(x) J^{(0)}(0) \} \\ &= - \int d^4x e^{ip \cdot x} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \frac{n_+k}{k^2 - m_c^2} \bar{h}_v(x_-) \bar{\Gamma} \frac{\not{h}_-}{2} \Gamma h_v(0) \\ &= I_2 * h_v(x_-) \bar{\Gamma} \frac{\not{h}_-}{2} \Gamma h_v(0). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Die Ausdrücke von Ordnung  $\lambda^2$ , die für  $m_c \rightarrow 0$  nicht verschwinden, können direkt aus (54) in [71] ohne den Ausdruck, der das weiche Quarkfeld enthält, übernommen werden.

Der Anteil der Vorwärtsstreuamplitude, der für  $m_c \rightarrow 0$  verschwindet, besteht zum einen aus Einsetzungen der von der Charm-Quark-Masse abhängigen Ströme  $J_m$  (2.72, 2.73). In weicher Lichtkegel-Eichung  $n_-A_s = 0$  ergeben sich folgende Beiträge

$$J^{(0)\dagger} J_m^{(1)} + J_m^{(1)\dagger} J^{(0)} = \frac{m_c}{n_+p} I_2 * \bar{h}_v(x_-) \bar{\Gamma} \Gamma h_v(0), \quad (4.12)$$

$$J_m^{(1)\dagger} J_m^{(1)} = \frac{m_c^2}{(n_+p)^2} I_2 * \bar{h}_v(x_-) \bar{\Gamma} \frac{\not{h}_+}{2} \Gamma h_v(0), \quad (4.13)$$

$$J_{m1}^{(2)\dagger} J^{(0)} = 0, \quad (4.14)$$

deren Herleitung wie die Herleitung des führenden Ausdrucks (4.11) abläuft.

Hinzu kommt ein für  $m_c \rightarrow 0$  verschwindender Beitrag zur Vorwärtsstreuamplitude aus

Einsetzungen von  $\mathcal{L}_{1\xi}^{(2)}$  (2.66) und  $J_1^{(2)}$  (2.75). Dieser lautet

$$\begin{aligned}
 J_1^{(2)\dagger} J^{(0)} + J^{(0)\dagger} J^{(0)} i\mathcal{L}_{1\xi}^{(2)} &= -\frac{m_c^2}{(n+p)^2} I_2 * (ix_+) \bar{h}_v(x_-) in_+ \overleftarrow{\partial} \bar{\Gamma} \frac{\not{h}_-}{2} \Gamma h_v(0) \\
 &\quad - \frac{m_c^2}{n+p} I_3 * \bar{h}_v(x_-) gn_+ A_s(z_-) \bar{\Gamma} \frac{\not{h}_-}{2} \Gamma h_v(0) \\
 &= \frac{im_c^2}{(n+p)^2} I_2 * \int_0^{x_+} dz_+ \bar{h}_v(x_-) (-in_+ \overleftarrow{D}_s)(z_-) \bar{\Gamma} \frac{\not{h}_-}{2} \Gamma h_v(0).
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Hierbei wurde partielle Integration benutzt, um in  $\mathcal{L}_{1\xi}^{(2)}$  den Feldstärketensor durch das Gluonfeld auszudrücken. Der für  $m_c \rightarrow 0$  verschwindende Beitrag (4.15) zur Vorwärtsstreuamplitude kommt dadurch zustande, dass  $n_-x$  im Impulsraum einer Ableitung entspricht, die in  $J_1^{(2)\dagger} J^{(0)}$  und  $J^{(0)\dagger} J^{(0)} i\mathcal{L}_{1\xi}^{(2)}$  auf den Propagator für masselose kollineare Quarks wirkt. Im Anhang D.2 sind die in Zwischenschritten entstehenden Ausdrücke skizziert.

Alle Beiträge zur Vorwärtsstreuamplitude können in eichinvarianter Form geschrieben werden. Hierzu setzt man die weiche Wilsonlinie  $Y$ , die von  $n_-A_s$  an der Stelle  $x_-$  abhängt, ein.

Als Ergebnis für die Vorwärtsstreuamplitude auf Baumgraphenniveau ergibt sich

$$\begin{aligned}
 T^{\mu\nu}(u) &= - \int \frac{dx_+ dn_- k}{2\pi} e^{i(u-n_-k)x_+} \frac{1}{n_-k + i\epsilon} \times \left\{ \right. \\
 &\quad (\bar{h}_v Y)(x_-) \bar{\Gamma} \left[ \frac{\not{h}_-}{2} + \frac{m_c}{n+p} + \frac{m_c^2}{(n+p)^2} \frac{\not{h}_+}{2} \right] \Gamma(Y^\dagger h_v)(0) \\
 &\quad + T \left\{ (\bar{h}_v Y)(x_-) \bar{\Gamma} \frac{\not{h}_-}{2} \Gamma(Y^\dagger h_v)(0) i \int d^4 z \mathcal{L}_{\text{HQET}}^{(2)}(z) \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2m_b} \left[ (\bar{h}_v (-i \overleftarrow{D}_s) Y)(x_-) \bar{\Gamma} \frac{\not{h}_-}{2} \Gamma(Y^\dagger h_v)(0) + (\bar{h}_v Y)(x_-) \bar{\Gamma} \frac{\not{h}_-}{2} \Gamma(Y^\dagger i \overleftarrow{D}_s h_v)(0) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{n+p} \left[ (\bar{h}_v (-i \overleftarrow{D}_s^{\mu\perp}) Y)(x_-) \bar{\Gamma} \frac{\not{h}_+}{2} \gamma_{\mu\perp} \frac{\not{h}_-}{2} \Gamma(Y^\dagger h_v)(0) \right. \\
 &\quad \quad \left. + (\bar{h}_v Y)(x_-) \bar{\Gamma} \frac{\not{h}_-}{2} \gamma_{\mu\perp} \frac{\not{h}_+}{2} \Gamma(Y^\dagger (-i \overleftarrow{D}_s^{\mu\perp}) h_v)(0) \right] \\
 &\quad + \frac{i}{n+p} \int_0^{x_+} dz_+ (\bar{h}_v Y)(x_-) \bar{\Gamma} \frac{\not{h}_-}{2} (Y^\dagger (-i \overleftarrow{D}_{s\perp}) (-i \overleftarrow{D}_{s\perp}) Y)(z_-) \Gamma(Y^\dagger h_v)(0) \\
 &\quad \left. + \frac{im_c^2}{(n+p)^2} \int_0^{x_+} dz_+ (\bar{h}_v Y)(x_-) (Y^\dagger (-in_+ \overleftarrow{D}_s) Y)(z_-) \bar{\Gamma} \frac{\not{h}_-}{2} \Gamma(Y^\dagger h_v)(0) \right\}, \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

indem man alle Beiträge addiert.

Um aus (4.16) den hadronischen Tensor zu erhalten, muss man einerseits den Imaginärteil bilden. Andererseits bildet man die Matrixelemente zwischen  $\bar{B}$ -Meson-Zuständen und drückt diese durch skalare Funktionen aus. Man könnte die Matrixelemente der letzten beiden Zeilen von (4.16) verwenden, um daraus direkt einen Satz effektiver Shapefunktionen, die von der Variablen  $u$  abhängen, zu definieren. Um Faktorisierung weiterhin sichtbar

zu machen, tun wir dies nicht, sondern führen effektive Shapefunktionen als Faltungen von Jetfunktionen und Shapefunktionen, die durch nichtlokale HQET-Matrixelemente zwischen  $\bar{B}$ -Zuständen definiert sind, ein.

Um das Matrixelement von (4.16) zwischen  $\bar{B}$ -Zuständen zu beschreiben, braucht man folgende nichtlokale Matrixelemente, die die Shapefunktionen definieren

$$\langle \bar{B} | (\bar{h}_v Y)(x_-)_\alpha (Y^\dagger h_v)(0)_\beta | \bar{B} \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \not{v}}{2} \right)_{\beta\alpha} \tilde{S}(x_+), \quad (4.17)$$

$$\langle \bar{B} | (\bar{h}_v Y)(x_-)_\alpha (Y^\dagger h_v)(0)_\beta i \int d^4 z \mathcal{L}_{\text{HQET}}^{(2)}(z) | \bar{B} \rangle = \frac{1}{2m_b} \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \not{v}}{2} \right)_{\beta\alpha} \tilde{s}(x_+), \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{B} | (\bar{h}_v Y)(x_-)_\alpha (Y^\dagger i D_s^\mu Y)(z_-) (Y^\dagger h_v)(0)_\beta | \bar{B} \rangle = & \quad (4.19) \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \not{v}}{2} \right)_{\beta\alpha} \left[ -i \tilde{S}'(x_+) v^\mu + \left( i \tilde{S}'(x_+) - \tilde{T}_1(x_+, 0) + \tilde{T}_1(x_+, z_+) \right) n_-^\mu \right] \\ & + \frac{\epsilon_{\perp}^{\mu\rho}}{4} \left( \frac{1 + \not{v}}{2} \gamma_{\rho\perp} \gamma_5 \frac{1 + \not{v}}{2} \right)_{\beta\alpha} \left[ \tilde{t}(x_+) - \tilde{T}_2(x_+, 0) + \tilde{T}_2(x_+, z_+) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{B} | (\bar{h}_v Y)(x_-)_\alpha (Y^\dagger i D_{\mu\perp}^s i D_{\nu\perp}^s Y)(z_-) (Y^\dagger h_v)(0)_\beta | \bar{B} \rangle = & \quad (4.20) \\ & \frac{g_{\mu\nu}^\perp}{4} \left( \frac{1 + \not{v}}{2} \right)_{\beta\alpha} \left[ \tilde{u}_1(x_+) + \tilde{U}_1(x_+, z_+) \right] - \frac{\epsilon_{\mu\nu}^\perp}{4} \left( \frac{1 + \not{v}}{2} \not{v}_- \gamma_5 \frac{1 + \not{v}}{2} \right)_{\beta\alpha} \tilde{U}_3(x_+, z_+). \end{aligned}$$

Hierbei gilt  $\epsilon_{\mu\nu}^\perp \equiv i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} n_-^\rho v^\sigma$ .

Der Zusammenhang zwischen den Shapefunktionen im Ortsraum und Impulsraum ergibt sich durch Fouriertransformation

$$\tilde{f}(x_+) = \int d\omega_1 e^{-i\omega_1 x_+} f(\omega_1), \quad (4.21)$$

$$\tilde{g}(x_+, z_+) = \int d\omega_1 d\omega_2 e^{-i\omega_1 x_+} e^{-i\omega_2 z_+} g(\omega_1, \omega_2) \quad (4.22)$$

Entsprechend erhält man für die Ableitung einer Shapefunktion

$$\tilde{f}'(x_+) = \frac{d}{dx_+} \int d\omega_1 e^{-i\omega_1 x_+} f(\omega_1) = \int d\omega_1 (-i\omega_1) e^{-i\omega_1 x_+} f(\omega_1). \quad (4.23)$$

Nach Bilden der Matrixelemente in (4.16) ergeben sich in Abhängigkeit von den Shapefunk-

tionen im Impulsraum Ausdrücke der Form

$$I_2 * \tilde{f}(x_+) = - \int d\omega_1 \frac{1}{u - \omega_1 + i\epsilon} f(\omega_1), \quad (4.24)$$

$$I_3 * \tilde{f}(x_+) = - \int d\omega_1 \frac{1}{n+p} \frac{1}{(u - \omega_1 + i\epsilon)^2} f(\omega_1), \quad (4.25)$$

$$I_3 * i\tilde{f}'(x_+) = - \int d\omega_1 \frac{1}{n+p} \frac{1}{(u - \omega_1 + i\epsilon)^2} \omega_1 f(\omega_1), \quad (4.26)$$

$$I_3 * \tilde{g}(x_+, z_+) = - \int d\omega_1 d\omega_2 \frac{1}{n+p} \frac{1}{(u - \omega_1 + i\epsilon)(u - \omega_1 - \omega_2 + i\epsilon)} g(\omega_1, \omega_2), \quad (4.27)$$

$$I_3 * \tilde{g}(x_+, 0) = - \int d\omega_1 d\omega' \frac{1}{n+p} \frac{1}{(u - \omega_1 + i\epsilon)^2} g(\omega_1, \omega'), \quad (4.28)$$

deren Herleitung in Anhang D.1 skizziert ist. Die Imaginärteile dieser Ausdrücke sind vollständig durch  $+i\epsilon$  aus den Feynman-Propagatoren bestimmt. Die Jetfunktionen

$$J_1(u; \omega_1) = - \frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{u - \omega_1 + i\epsilon} = \delta(u - \omega_1), \quad (4.29)$$

$$J_2(u; \omega_1, 0) = - \frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{(u - \omega_1 + i\epsilon)^2} = -\delta'(u - \omega_1), \quad (4.30)$$

$$J_2(u; \omega_1, \omega_2) = - \frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{(u - \omega_1 + i\epsilon)(u - \omega_1 - \omega_2 + i\epsilon)} = \frac{1}{\omega_2} (\delta(u - \omega_1 - \omega_2) - \delta(u - \omega_1)) \quad (4.31)$$

erhält man durch Bilden der Imaginärteile mittels der in Anhang B.1 dargestellten Relationen.  $J_1$  ist die Jetfunktion auf Baumgraphenniveau, die sich aus einem Propagator ergibt, während  $J_2$  mit dem Produkt von Propagatoren in (4.10) verknüpft ist.

Wir führen die effektiven Shapefunktionen

$$u_s(u) = \int d\omega_1 d\omega_2 J_2(u; \omega_1, \omega_2) [u_1(\omega_1)\delta(\omega_2) + U_1(\omega_1, \omega_2)], \quad (4.32)$$

$$u_a(u) = \int d\omega_1 d\omega_2 J_2(u; \omega_1, \omega_2) U_3(\omega_1, \omega_2), \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} t_1(u) &= \int d\omega_1 J_2(u; \omega_1, 0) \left[ \omega_1 S(\omega_1) - 2 \int d\omega' T_1(\omega_1, \omega') \right] \\ &\quad + 2 \int d\omega_1 d\omega_2 J_2(u; \omega_1, \omega_2) T_1(\omega_1, \omega_2) \end{aligned} \quad (4.34)$$

ein, die durch Faltungen von Jetfunktionen mit Shapefunktionen definiert sind. Außerdem führen wir in Ausdrücken der Form (4.24) das Faltungsintegral aus. So erhalten wir die Shapefunktionen  $S$ ,  $s$ ,  $t$  in Abhängigkeit von  $u$ .

Für den Teil des hadronischen Tensors  $W^{\mu\nu}$ , der für  $m_c \rightarrow 0$  verschwindet, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 W_m^{\mu\nu} = & \left( \frac{m_c}{n_+p} \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \frac{1 + \not{p}}{2} \bar{\Gamma} \Gamma \right] + \frac{m_c^2}{(n_+p)^2} \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \frac{1 + \not{p}}{2} \bar{\Gamma} \frac{\not{p}_+}{2} \Gamma \right] \right) S(u) \\
 & - \frac{m_c^2}{(n_+p)^2} \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \frac{1 + \not{p}}{2} \bar{\Gamma} \frac{\not{p}_-}{2} \Gamma \right] t_1(u).
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Hierbei ergibt sich die Spur jeweils aus der Diracstruktur der Matrixelemente (4.17-4.20) und der Diracstruktur der Kombination von Diracmatrizen  $\bar{\Gamma}$ ,  $\Gamma$ ,  $\not{p}_+$ ,  $\not{p}_-$  in (4.12, 4.13, 4.15). Die Beiträge zu  $W^{\mu\nu}$ , die für  $m_c \rightarrow 0$  nicht verschwinden, ergeben sich aus (59) in [71] durch die Ersetzung  $n_-p \rightarrow u$  und Weglassen der Ausdrücke proportional zu  $v_s$  und  $v_a$ , da diese mit dem Beitrag zusammenhängen, der das weiche Quarkfeld enthält und der für massive Quarks nicht vorkommt.

Der semileptonische Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  wird im Standardmodell rein durch linkshändige Ströme vermittelt. Wir setzen die entsprechende Kombination von Diracmatrizen

$$\bar{\Gamma} = \gamma^\mu (1 - \gamma_5), \quad \Gamma = \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \tag{4.36}$$

ein. Der Term in (4.35), der linear in der Charm-Quark-Masse ist, verschwindet für linkshändige Kopplungen. Nach Ausführen der Spuren ergibt sich für die Komponenten des hadronischen Tensors (4.1)

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \frac{2}{n_+p} \left[ \left( 1 + \frac{u}{n_+p} \right) S(u) + \frac{s(u)}{2m_b} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{uS(u) - t(u)}{m_b} - \frac{u_s(u) + u_a(u)}{n_+p} - \frac{m_c^2}{(n_+p)^2} t_1(u) \right], \\
 W_2 &= \frac{1}{2} W_3 = -\frac{2u}{n_+p} S(u), \\
 W_4 &= -\frac{4}{(n_+p)^2} t(u), \\
 W_5 &= \frac{8}{(n_+p)^2} \left[ \frac{uS(u) - t(u)}{m_b} + \frac{t(u) + u_a(u)}{n_+p} \right].
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Lediglich der in  $W_1$  enthaltene Ausdruck  $2/(n_+p) S(u)$  ist von Ordnung 1, alle anderen Beiträge zu den  $W_i$ ,  $i = 1 \dots 5$  sind von Ordnung  $\lambda^2$ .

Anstelle der im masselosen Fall auftretenden Variablen  $p_+ = n_-p$  tritt in (4.37) die Variable  $u$  auf, die die Verallgemeinerung von  $p_+$  für den inklusiven semileptonischen  $b \rightarrow c$ -Zerfall ist. Darüber hinaus unterscheidet sich der hadronische Tensor für  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  vom hadronischen Tensor für  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  durch die effektive Shapefunktion  $t_1(u)$ , die nur im massiven Fall in  $W_1$  enthalten ist. Der Beitrag proportional zu  $t_1(u)$  verschwindet für  $m_c \rightarrow 0$ . Durch  $t_1(u)$  erhält der hadronische Tensor und somit auch die Zerfallsrate im Vergleich zum masselosen Fall zusätzliche nichtstörungstheoretische Strukturen.

### 4.2.2 Differentielle Zerfallsspektren

Die dreifach differentielle Rate kann in Abhängigkeit von den skalaren Strukturfunktionen  $W_i$  ausgedrückt werden als [109]

$$\frac{1}{12\Gamma_c} \frac{d^3\Gamma}{d(n_{-\hat{p}})d(n_{+\hat{p}})d\bar{x}} = (n_{+\hat{p}} - n_{-\hat{p}}) \quad (4.38)$$

$$\left\{ (1 + \bar{x} - n_{-\hat{p}} - n_{+\hat{p}})(n_{+\hat{p}} + n_{-\hat{p}} - \bar{x} - n_{+\hat{p}}n_{-\hat{p}}) \frac{m_b^2}{2} W_1 \right.$$

$$\left. + (1 - n_{+\hat{p}} + n_{+\hat{p}}n_{-\hat{p}}) \frac{m_b}{2} W_2 + [\bar{x}(n_{+\hat{p}} - \bar{x}) - n_{+\hat{p}}n_{-\hat{p}}] \frac{m_b}{4} (W_3 + 2m_b W_4 + m_b^2 W_5) \right\},$$

mit

$$\Gamma_{u,c} = \frac{G_F^2 m_b^5 |V_{(u,c)b}|^2}{192\pi^3} \quad (4.39)$$

und

$$\bar{x} = 1 - 2E_\ell/m_b. \quad (4.40)$$

Wie bereits in Abschnitt 3.6 eingeführt, sind alle mit einem Hut gekennzeichneten Größen auf die  $b$ -Quark-Masse normiert, also z.B.  $\hat{p} = p/m_b$ ,  $\hat{m}_c = m_c/m_b$ . Um (4.38) zu erhalten, haben wir verwendet, dass nur  $W_1$  einen Ausdruck führender Ordnung enthält, und die differentielle Rate bereits bis zur Ordnung  $\lambda^2$  entwickelt. Für die Integrationsgrenzen gilt

$$\frac{\hat{m}_c^2}{n_{+\hat{p}}} \leq n_{-\hat{p}} \leq \bar{x} \leq n_{+\hat{p}} \leq 1. \quad (4.41)$$

Aus (4.38) zusammen mit (4.37) kann man verschiedene Zerfallsverteilungen erhalten. Für semileptonische  $b \rightarrow u$ -Übergänge ist das differentielle Spektrum in der Variablen  $P_+ = n_{-p} + \bar{\Lambda}$ ,  $\bar{\Lambda} = M_B - m_b$  von besonderem Interesse, da daraus  $|V_{ub}|$  extrahiert werden kann [77]. Die Variable  $u$  ist die natürliche partonische Verallgemeinerung von  $P_+$  für  $b \rightarrow c$ -Zerfälle, da sie im Argument der Shapefunktionen vorkommt.

Nach einem Wechsel der Integrationsvariablen  $n_{-\hat{p}} \rightarrow \hat{u}$  gilt für die Integrationsgrenzen

$$\hat{u} + \frac{\hat{m}_c^2}{n_{+\hat{p}}} \leq \bar{x} \leq n_{+\hat{p}}, \quad \frac{\hat{u}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\hat{u}^2 + 4\hat{m}_c^2} \leq n_{+\hat{p}} \leq 1. \quad (4.42)$$

Die kollineare Entwicklung gilt für  $n_{+\hat{p}} \sim O(1)$ . Sie bricht für die hier genannte untere Integrationsgrenze  $n_{+\hat{p}} \sim \hat{m}_c \sim O(\lambda)$  zusammen. Die doppelt differentielle Rate in  $u$  und  $n_{+\hat{p}}$  verhält sich in diesem Phasenraumbereich allerdings wie  $\lambda^2$ , so dass der Beitrag aus diesem Phasenraumbereich insgesamt von Ordnung  $\lambda^3$  ist und daher das hier dargestellte  $u$ -Spektrum bis Ordnung  $\lambda^2$  nicht beeinflusst.

Wir führen die Integrale über  $\bar{x}$  und  $n_{+\hat{p}}$  aus und erhalten für das differentielle Zerfallsspektrum in der Variablen  $u$

$$\frac{1}{\Gamma_c} \frac{d\Gamma}{du} = \left( 1 - \frac{14}{3} \frac{u}{m_b} - 8 \frac{m_c^2}{m_b^2} \right) S(u) + \frac{s(u)}{2m_b} - 4 \frac{m_c^2}{m_b^2} t_1(u)$$

$$+ \frac{1}{3m_b} [t(u) + u_a(u) - 5u_s(u)], \quad (4.43)$$

wobei für den erlaubten Phasenraum

$$0 \leq u \leq m_b - \frac{m_c^2}{m_b} \quad (4.44)$$

gilt. In (4.43) ist lediglich der erste Term proportional zur führenden Shapefunktion  $S(u)$  von Ordnung 1, sowohl die weiteren Terme proportional zu  $S(u)$  als auch alle Ausdrücke, die nächstführende Shapefunktionen und effektive Shapefunktionen enthalten, sind von Ordnung  $\lambda^2$ . (4.43) stimmt im Grenzfall  $m_c \rightarrow 0$  mit dem in [70] vorgestellten  $p_+$ -Spektrum für  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  überein.

Wir können auch das Leptonenergiespektrum im Endpunktbereich herleiten, wo die Leptonenergievariable  $\bar{x}$  auf  $\bar{x} \sim \mathcal{O}(\lambda^2)$  beschränkt ist. Die Bedingung  $\bar{x} \sim \mathcal{O}(\lambda^2)$  reicht aus, um die Kinematik auf die Shapefunktions-Region zu beschränken. Die Integrationsgrenzen für die anderen beiden kinematischen Variablen sind

$$\frac{\hat{m}_c^2}{n_+\hat{p}} \leq n_-\hat{p} \leq \bar{x}, \quad \frac{\hat{m}_c^2}{(\bar{x} - \hat{u})} \leq n_+\hat{p} \leq 1, \quad (4.45)$$

so dass sichergestellt ist, dass  $n_-\hat{p} \sim \mathcal{O}(\lambda^2)$  und  $n_+\hat{p} \sim \mathcal{O}(1)$  gilt. Die untere Integrationsgrenze für  $n_+\hat{p}$  folgt aus der unteren Integrationsgrenze für  $\bar{x}$  in (4.42), wenn man die Integrationsreihenfolge  $\bar{x} \leftrightarrow n_+\hat{p}$  vertauscht.

Wir integrieren über  $n_+\hat{p}$  und erhalten für das doppelt differentielle Spektrum in den Variablen  $\bar{x}$  und  $u$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_c} \frac{d^2\Gamma}{d\bar{x}du} = & 2S(u) \left[ 1 - \frac{3\hat{m}_c^4}{(\bar{x} - \hat{u})^2} + \frac{2\hat{m}_c^6}{(\bar{x} - \hat{u})^3} \right] \\ & + S(u) \left[ -2(3\hat{m}_c^2 + 5\hat{u}) + 12\frac{\hat{m}_c^4 + \hat{u}\hat{m}_c^2}{\bar{x} - \hat{u}} + 6\frac{\hat{u}\hat{m}_c^4 - \hat{m}_c^6}{(\bar{x} - \hat{u})^2} - 8\frac{\hat{u}\hat{m}_c^6}{(\bar{x} - \hat{u})^3} \right] \\ & + \frac{s(u)}{m_b} \left[ 1 - \frac{3\hat{m}_c^4}{(\bar{x} - \hat{u})^2} + \frac{2\hat{m}_c^6}{(\bar{x} - \hat{u})^3} \right] + 12\hat{m}_c^2 t_1(u) \left[ 1 - \frac{\hat{m}_c^2}{\bar{x} - \hat{u}} + \ln\left(\frac{\hat{m}_c^2}{\bar{x} - \hat{u}}\right) \right] \\ & + \frac{t(u)}{m_b} \left[ 2 - \frac{6\hat{m}_c^4}{(\bar{x} - \hat{u})^2} + \frac{4\hat{m}_c^6}{(\bar{x} - \hat{u})^3} \right] - 6\frac{u_a(u) + u_s(u)}{m_b} \left[ 1 + \frac{2\hat{m}_c^2}{\bar{x} - \hat{u}} - \frac{\hat{m}_c^4}{(\bar{x} - \hat{u})^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Hierbei ist die erste Zeile von Ordnung 1, alle anderen Ausdrücke sind Ordnung  $\lambda^2$ .

### 4.2.3 Vergleich mit der lokalen Entwicklung

In diesem Abschnitt gehen wir von der bisher betrachteten Skalierung  $u \sim m_b\lambda^2$  zu  $u \sim m_b$  über, um dann mit dem in lokaler Heavy Quark Expansion (HQE) erzielten Ergebnis für die dreifach differentielle Rate [47] und dem daraus berechneten  $u$ -Spektrum vergleichen zu können. In lokaler HQE erzielte Ergebnisse gelten in dem kinematischen Bereich, wo alle



Komponenten des Charm-Impulses  $p$  und somit auch  $u$  wie  $m_b$  skalieren. Für die Komponenten des hadronischen Tensors bis  $\mathcal{O}(1/m_b^2)$  erhält man in lokaler HQE

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \frac{2}{n_+p} \delta(u) - \frac{5}{3} \frac{\lambda_1 + 3\lambda_2}{m_b} \frac{1}{n_+p} \delta'(u) \\
 &\quad + \frac{\lambda_1}{3} \left( -\frac{1}{n_+p} \delta''(u) + 2 \frac{n_-p}{(n_+p)^2} \delta''(u) + \frac{10}{(n_+p)^2} \delta'(u) \right) - \frac{2\lambda_2}{(n_+p)^2} \delta'(u) \\
 W_2 &= \frac{1}{2} W_3 = -\frac{2}{3} \frac{\lambda_1}{n_+p} \delta'(u), \\
 W_4 &= \frac{4\lambda_2}{(n_+p)^2} \delta'(u), \\
 W_5 &= \frac{8}{3} \frac{\lambda_1 + 3\lambda_2}{m_b} \frac{1}{(n_+p)^2} \delta'(u). \tag{4.47}
 \end{aligned}$$

Da wir HQE-Ergebnisse für die Zerfallsspektren mit den in der Shapefunktions-Region erzielten Ergebnissen vergleichen möchten, sind in (4.47) nur die Beiträge angegeben, die bei Anwendung des SCET-Power-Countings Beiträgen bis  $\mathcal{O}(\lambda^2)$  entsprechen. In den  $W_i$  in lokaler HQE kommen auch Ausdrücke proportional zu  $\lambda_{1,2} \delta(u)$  vor. Diese sind von Ordnung  $\Lambda_{\text{QCD}}^2/m_b^2$ , entsprechen daher Ordnung  $\lambda^4$  und werden deshalb hier nicht angegeben.  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind die in (2.34) durch Dimension-fünf-Operatoren definierten nichtstörungstheoretischen Parameter.

Nach Einsetzen von (4.47) in die dreifach differentielle Rate (4.38) und Integration über  $\bar{x}$  und  $n_+p$  in den Integrationsgrenzen (4.42) erhalten wir für das  $u$ -Spektrum in HQE

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Gamma_c} \frac{d\Gamma}{du} &= \left( 1 - 8 \frac{m_c^2}{m_b^2} \right) \delta(u) \\
 &\quad - \left( \frac{17}{18} \frac{\lambda_1}{m_b} + \frac{3}{2} \frac{\lambda_2}{m_b} \right) \delta'(u) + \lambda_1 \left( \frac{8m_c^2}{3m_b^2} - \frac{1}{6} \right) \delta''(u) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{m_b^3} \right). \tag{4.48}
 \end{aligned}$$

Auch hier sind die Ausdrücke von Ordnung  $1/m_b^2$ , die proportional zu  $\lambda_{1,2} \delta(u)$  sind und daher nicht zum Vergleich mit dem in der Shapefunktions-Region erreichten Ergebnis (4.43) beitragen, nicht angegeben. Wir können das HQE-Ergebnis für das  $u$ -Spektrum (4.48) mit dem  $u$ -Spektrum in der Shapefunktions-Region (4.43) vergleichen, indem wir  $u \sim m_b$  betrachten. Auf der Skala  $u \sim m_b$  sind die Shapefunktionen bei  $u_0 \sim m_b \lambda^2$  zentriert und können daher in Delta-Distributionen entwickelt werden. Die Momente der Shapefunktionen und effektiven Shapefunktionen werden durch lokale HQET-Matrixelemente ausgedrückt [64] (siehe auch [70, 112, 113, 69]). Die aus den Momenten folgenden Bedingungen für die Shapefunktionen werden durch die Entwicklung der Shapefunktionen in Distributionen

zusammengefasst, die

$$\begin{aligned}
 S(u) &= \delta(u) - \frac{\lambda_1}{6} \delta''(u), & s(u) &= -(\lambda_1 + 3\lambda_2) \delta'(u), \\
 u_s(u) &= -\frac{2\lambda_1}{3} \delta'(u), & u_a(u) &= \lambda_2 \delta'(u), \\
 t(u) &= -\lambda_2 \delta'(u), & t_1(u) &= -\frac{\lambda_1}{3} \delta''(u)
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

lautet. Weitere Terme in der Entwicklung entsprechen Operatoren in der HQE, deren Dimension größer als fünf ist und die hier vernachlässigt werden können.

Da es sich bei  $t_1(u)$  um eine neue effektive Shapefunktion handelt, die nur beim Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  auftritt, wird hier explizit gezeigt, wie die Entwicklung in Distributionen für  $t_1(u)$  geschieht.  $t_1(u)$  setzt sich aus  $S(\omega)$  und  $T_1(\omega_1, \omega_2)$  zusammen (4.34). Da die Entwicklung von  $S(\omega)$  bekannt ist, müssen wir nur die von  $T_1(\omega_1, \omega_2)$  herleiten. Zur hier betrachteten Ordnung kommen nur Operatoren bis Dimension fünf vor, daher genügt es, das erste Moment von  $T_1(\omega_1, \omega_2)$  in Bezug auf  $\omega_1$  oder  $\omega_2$  zu betrachten. Momente der Form

$$\int d\omega_1 d\omega_2 \omega_1^n T_1(\omega_1, \omega_2) \tag{4.50}$$

tragen zu  $t_1(u)$  nicht bei. Dies erkennt man, wenn man  $T_1(\omega_1, \omega_2) \sim \delta^{(n)}(\omega_1) \delta(\omega_2)$  in (4.34) einsetzt. Also müssen wir nur das erste Moment von  $T_1(\omega_1, \omega_2)$  in Bezug auf  $\omega_2$  berechnen. Aus

$$(Y^\dagger iD_s^\mu Y)(z)_{ab} = i\partial^\mu \delta_{ab} + (Y^\dagger [iD_s^\mu Y])(z)_{ab} \tag{4.51}$$

[71] und (4.19) ergibt sich die Definition von  $\tilde{T}_1(x_+, z_+)$  durch ein trilokales Matrixelement

$$\frac{n_+^\mu}{2} \langle \bar{B} | (\bar{h}_v Y)(x) [Y^\dagger iD_\mu^s Y](z) (Y^\dagger h_v)(0) | \bar{B} \rangle = \int d\omega_1 d\omega_2 e^{-i\omega_1 x_+ - i\omega_2 z_+} T_1(\omega_1, \omega_2), \tag{4.52}$$

wobei Ableitungen nicht außerhalb der eckigen Klammern wirken. Das erste Moment in Bezug auf  $\omega_2$  erhält man, indem man  $-in_- \partial_z$  auf beide Seiten von (4.52) anwendet und danach  $x$  und  $z$  Null setzt, um ein lokales HQET-Matrixelement zu erhalten. Mittels

$$-in_- \partial_z [Y^\dagger iD_\mu Y](z) = n_-^\nu [Y^\dagger igF_{\mu\nu} Y](z) \tag{4.53}$$

stellt sich heraus, dass das lokale HQET-Matrixelement verschwindet, woraus

$$\int d\omega_1 d\omega_2 \omega_2 T_1(\omega_1, \omega_2) = 0 \tag{4.54}$$

folgt. Somit trägt  $T_1(\omega_1, \omega_2)$  nicht zur Entwicklung von  $t_1(u)$  bei. Setzt man die Entwicklung für  $S(\omega)$  (siehe (4.49)) in (4.34) ein und wendet einige Relationen für die Ableitungen der Delta-Distribution (siehe Anhang A) an, so erhält man  $t_1(u) = -\frac{\lambda_1}{3} \delta''(u)$ , wie in (4.34) bereits erwähnt. Dass die Entwicklung der neuen effektiven Shapefunktion  $t_1(u)$  vollkommen durch die führende Shapefunktion  $S(\omega)$  bestimmt ist, zeigt auch, dass in dem Bereich,

in dem das HQE-Ergebnis gilt, die Effekte der Charm-Quark-Masse rein kinematischer Natur sind. Neue nichtstörungstheoretische Strukturen aufgrund  $t_1(u)$  treten nur in der Shapefunktions-Region auf.

Ersetzt man die Shapefunktionen in (4.43) durch ihre Entwicklung in Distributionen (4.49), so erkennt man, dass die lokale Entwicklung des  $u$ -Spektrums in der Shapefunktions-Region (4.43) das lokale HQE-Ergebnis für das  $u$ -Spektrum (4.48) reproduziert.

Ebenso haben wir gezeigt, dass aus dem doppelt differentiellen Spektrum in  $\bar{x}$  und  $u$  im Endpunktbereich (4.46) das Leptonenergiespektrum in lokaler HQE [25, 47] reproduziert werden kann. Hierzu setzen wir die Entwicklung der Shapefunktionen (4.49) in (4.46) ein und integrieren über  $u$ . Das Leptonenergiespektrum in lokaler HQE entwickeln wir für  $\hat{m}_c^2 \sim \lambda^2$ ,  $\bar{x} \sim \lambda^2$  in  $\lambda$ , um den Vergleich der beiden Leptonenergiespektren durchführen zu können.

#### 4.2.4 Effekte der führenden Shapefunktion

Vernachlässigt man nächstführende Shapefunktionen, so ist das  $u$ -Spektrum (4.43) direkt proportional zur führenden Shapefunktion  $S(u)$ . Hierbei handelt es sich um die gleiche führende Shapefunktion, die auch in  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  und  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  vorkommt. Daher ist es möglich, die nichtstörungstheoretische Funktion  $S(u)$  aus  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  zu extrahieren und als Eingabe für einen der anderen Zerfälle zu verwenden.

Zunächst ändern wir die Behandlung von  $m_c^2$ -Korrekturen. In (4.43) sind nur Terme bis  $m_c^2$  enthalten, dies entspricht Ordnung  $\lambda^2$  im SCET-Power-Counting. Kinematische Korrekturen höherer Ordnung, die die Charm-Masse beinhalten, kommen aus Phasenraumintegralen. Berücksichtigt man diese zusätzlichen kinematischen Korrekturen und vernachlässigt alle anderen nächstführenden Effekte, so wird das  $u$ -Spektrum zu

$$\frac{1}{\Gamma_c} \frac{d\Gamma}{du} = f(\rho)S(u). \quad (4.55)$$

Die Phasenraumfunktion  $f(\rho)$  sowie  $\rho$  sind in (3.11) und (3.12) angegeben. Die Phasenraumfunktion hat einen erheblichen numerischen Effekt. Der mit  $f(\rho) \sim (1 - 8\rho)$  erzielte Zahlenwert für die Phasenraumfunktion unterscheidet sich für  $\rho \sim 0.1$  deutlich vom mit (3.11) berechneten. Nimmt man zu  $f(\rho) \sim (1 - 8\rho)$  allerdings den logarithmischen Beitrag aus (3.11) hinzu, so erhält man beinahe den gleichen Zahlenwert wie mit der gesamten Phasenraumfunktion  $f(\rho)$  aus (3.11).

Um eine experimentelle Analyse durchführen zu können, muss (4.55) durch hadronische Variablen ausgedrückt werden. Für den Zusammenhang zwischen den hadronischen Impulsen  $P^\mu$  und den partonischen Impulsen  $p^\mu$  gilt

$$n_\pm P = n_\pm p + \bar{\Lambda} \quad (4.56)$$

mit

$$\bar{\Lambda} = M_B - m_b. \quad (4.57)$$

Man führt die hadronischen Variablen  $U$  und  $\hat{\omega}$  sowie die Shapefunktion in Abhängigkeit von den hadronischen Variablen

$$U = u + \bar{\Lambda}, \quad \hat{\omega} = \omega + \bar{\Lambda}, \quad \hat{S}(\hat{\omega}) \equiv S(\hat{\omega} - \bar{\Lambda}) = S(\omega) \quad (4.58)$$

ein.  $\omega$  ist in [67] mit dem umgekehrten Vorzeichen definiert, während die Shapefunktion  $\hat{S}(\hat{\omega})$  in Abhängigkeit von der hadronischen Variablen mit der in [67] verwendeten übereinstimmt.  $U$  ist die Verallgemeinerung der im masselosen Fall vorkommenden Variablen  $P_+ = n_- P$ . Für den Zusammenhang von  $U$  mit den hadronischen Impulsen  $n_{\pm} P$  gilt

$$U = n_- P - \frac{m_c^2}{n_+ p} = n_- P - \frac{m_c^2}{n_+ P} + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (4.59)$$

Das nur von hadronischen Variablen abhängige  $U$ -Spektrum lautet

$$\frac{1}{\Gamma_c} \frac{d\Gamma}{dU} = f(\rho) S(U - \bar{\Lambda}) = f(\rho) \hat{S}(U), \quad (4.60)$$

während für das  $P_+$ -Spektrum zum Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  in führender Ordnung

$$\frac{1}{\Gamma_u} \frac{d\Gamma}{dP_+} = S(U - \bar{\Lambda}) = \hat{S}(U) \quad (4.61)$$

gilt. Dies bietet die Möglichkeit, die nichtstörungstheoretische Shapefunktion  $\hat{S}$  bzw.  $\Gamma_c \hat{S}$  aus dem  $U$ -Spektrum (4.60) zu gewinnen.  $\hat{S}$  bzw.  $\Gamma_c \hat{S}$  kann dann als Eingabe in (4.61) verwendet werden, um aus dem  $P_+$ -Spektrum  $|V_{ub}|/|V_{cb}|$  und somit  $|V_{ub}|$  zu bestimmen.

### 4.3 QCD-Strahlungskorrekturen zur führenden Ordnung in $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$

In diesem Abschnitt wird die Berechnung von Strahlungskorrekturen der Ordnung  $\alpha_s$  zum Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  in der Shapefunktions-Region mittels effektiver Feldtheorien vorgestellt. Dabei bleiben wir in der Entwicklung in  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$  in führender Ordnung, betrachten also nur Beiträge der Ordnung  $\lambda^0$ . Wir berechnen den hadronischen Tensor zur Ordnung  $\alpha_s$ , wobei wir uns auf die Berechnung der Jetfunktion konzentrieren, da die harte Funktion und die Shapefunktion gleich sind wie im masselosen Fall. Unser Ergebnis für den hadronischen Tensor vergleichen wir mit dem entsprechend entwickelten QCD-Ergebnis. Wir berechnen das bis zu einer oberen Grenze integrierte  $U$ -Spektrum und stellen hiermit eine von der Shapefunktion unabhängige Beziehung zwischen teilweise integrierten Zerfallsspektren in  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  und  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  auf, aus der  $|V_{ub}|/|V_{cb}|$  extrahiert werden kann.

#### 4.3.1 Berechnung des hadronischen Tensors

Wir berechnen Einschleifen- $\alpha_s$ -Korrekturen zum hadronischen Tensor in der Shapefunktions-Region und betrachten dabei nur Beiträge führender Ordnung in der Entwicklung in  $\lambda$ . Der hadronische Tensor (3.4) auf Einschleifen-Niveau kann gemäß (4.2) in faktorisierter Form geschrieben werden

$$W^{\mu\nu} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} \text{tr} \left( \bar{\Gamma}_j^\mu \not{p}_- \Gamma_i^\nu \frac{1+\not{\psi}}{2} \right) H_{ij}(n_+ p) \int d\omega J(u - \omega, n_+ p) S(\omega), \quad (4.62)$$

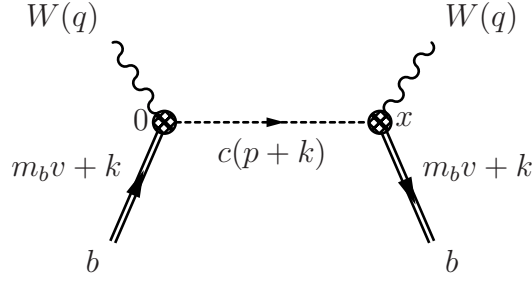


Abbildung 4.2: Die Vorwärtsstreuamplitude auf Baumgraphenniveau.

wobei  $p \equiv m_b v - q$  der Jetimpuls auf Partonniveau ist. Die Impulse, die die einzelnen am Zerfall beteiligten Fermionen tragen, können aus Abbildung 4.2 entnommen werden, die die Vorwärtsstreuamplitude (3.5) auf Baumgraphenniveau zeigt. Das kollineare Charm-Quark wird durch den Propagator (vgl. (2.54))

$$G_c(p+k) = \frac{i}{n_-(p+k) - m_c^2/n_+ p} \frac{\not{p}_-}{2} = \frac{i}{u + n_- k} \frac{\not{p}_-}{2} \quad (4.63)$$

beschrieben, wobei die Variable  $u$  in (2.79) definiert wurde. Zur Ordnung  $\alpha_s$  trägt zum Matching (2.76) des linkshändigen Stroms folgende Basis von Dirac-Matrizen bei

$$\Gamma_i^\mu = \left\{ \gamma^\mu(1 - \gamma_5), v^\mu(1 + \gamma_5), \frac{n_-^\mu}{n_- v}(1 + \gamma_5) \right\}. \quad (4.64)$$

Die harten Funktionen  $H_{ij}$ , die Jetfunktion  $J$  und die Shapefunktion  $S$  enthalten physikalische Effekte an den drei bei der Beschreibung des Zerfalls  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  in der Shapefunktions-Region relevanten Skalen  $m_b^2$ ,  $\Lambda_{\text{QCD}} m_b$  und  $\Lambda_{\text{QCD}}^2$ . Zur Ordnung  $\lambda^0$  werden – im Unterschied zur Betrachtung in nächstführender Ordnung in  $\lambda$  in Abschnitt 4.2 – nichtstörungstheoretische Effekte rein durch die führende Shapefunktion  $S$  parametrisiert, es treten keine nächstführenden Shapefunktionen auf. Die Integrationsgrenzen im Faltungsintegral (4.62) werden dadurch festgelegt, dass die Shapefunktion für  $-\bar{\Lambda} \leq \omega < \infty$  und die Jetfunktion für  $u - \omega \geq 0$  beiträgt.

Die faktorisierte Form (4.62) des hadronischen Tensors entsteht wie in Abschnitt 4.1 beschrieben aus einem Matching in zwei Schritten  $\text{QCD} \rightarrow \text{SCET} \rightarrow \text{HQET}$ , das gleich abläuft wie im masselosen Fall [66, 67]. Die harten Funktionen  $H_{ij}$  sind die Koeffizienten aus dem Matching des hadronischen Tensors in QCD auf den hadronischen Tensor in SCET. Man erhält  $H_{ij} = C_j C_i$ , wobei die  $C_i$  die in (2.76) definierten harten Koeffizienten aus dem Matching des Stroms sind. Da die harten Funktionen nur die harte Impulsregion der QCD-Diagramme berücksichtigen, die durch ein massives kollineares Charm-Quark im Propagator nicht beeinflusst wird, erhält man die gleichen harten Funktionen  $H_{ij}$  wie im masselosen

Fall. Diese können direkt aus (25) in [67] übernommen werden, sie lauten

$$\begin{aligned}
 H_{11}(n_+p) &= 1 + \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \left( -4L^2 + 10L - 4 \ln y - \frac{2 \ln y}{1-y} - 4\text{Li}_2(1-y) - \frac{\pi^2}{6} - 12 \right), \\
 H_{12}(n_+p) &= \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \frac{2}{1-y} \left( \frac{y \ln y}{1-y} + 1 \right), \\
 H_{13}(n_+p) &= \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \frac{y}{1-y} \left( \frac{1-2y}{1-y} \ln y - 1 \right)
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

mit

$$y = \frac{n_+p}{m_b} = n_+\hat{p} \quad \text{und} \quad L = \ln \left[ \frac{ym_b}{\mu} \right]. \tag{4.66}$$

Die Jetfunktion  $J$  ist der Koeffizient aus dem Matching des in SCET berechneten hadronischen Tensors auf den hadronischen Tensor in HQET an der mittleren Skala  $\Lambda_{\text{QCD}}m_b$ . Da sowohl  $p^2$  als auch  $m_c^2$  von Ordnung  $\Lambda_{\text{QCD}}m_b$  sind, ist die Jetfunktion komplizierter als für  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$ . Die Shapefunktion  $S$  ist wiederum gleich wie im masselosen Fall, da das sie definierende HQET-Matrixelement nicht von der Charm-Quark-Masse abhängt. Es unterscheidet sich für  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  in der Shapefunktionsregion also nur die Jetfunktion  $J$  vom masselosen Fall  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$ . Auf ihre Berechnung werden wir im Folgenden im Detail eingehen.

### Berechnung der Jetfunktion

Die Berechnung der Jetfunktion läuft gleich ab wie im masselosen Fall [66, 67]. Wir orientieren unsere Vorgehensweise an [67]. Die in Abbildung 4.3 dargestellten SCET-Schleifendiagramme bestimmen die  $\alpha_s$ -Korrekturen zur Faltung der Jetfunktion mit der Shapefunktion. Die Faltung lässt sich als

$$J^{(0)} \otimes S_{\text{part}}^{(1)} + J^{(1)} \otimes S_{\text{part}}^{(0)} \tag{4.67}$$

schreiben, wobei  $(n)$  den  $n$ -Schleifen-Beitrag zu jeder der Funktionen und  $S_{\text{part}}$  die Shapefunktion auf Partonniveau bezeichnet. Die Jet- und Shapefunktion auf Baumgraphenniveau sind  $J^{(0)}(u - \omega) = \delta(u - \omega) \equiv J_1(u; \omega)$  (4.29) und  $S_{\text{part}}^{(0)}(\omega) = \delta(\omega + n \cdot k)$ .

Die dem Produkt  $J^{(1)} \otimes S_{\text{part}}^{(0)}$  entsprechende Vorwärtsstreuamplitude berechnet sich aus den Diagrammen mit einem kollinearen Gluonaustausch, während sich die dem Produkt  $J^{(0)} \otimes S_{\text{part}}^{(1)}$  entsprechende Vorwärtsstreuamplitude aus den Diagrammen ergibt, bei denen ein weiches Gluon ausgetauscht wird. Wir berechnen die Diagramme in Dimensionaler Regularisierung in  $D = 4 - 2\epsilon$  Dimensionen.

Zunächst behandeln wir die Diagramme, bei denen ein kollineares Gluon ausgetauscht wird. Die Diagramme (a) und (c) berechnen wir unter Verwendung der SCET-Feynmanregeln [92], während wir das Selbstenergie-Diagramm in voller QCD berechnen und dann unter Verwendung des SCET-Power-Countings entwickeln. Das Diagramm (c) wird Null. Zur Summe der kollinearen Vertexkorrektur (a), des entsprechenden Spiegeldiagramms und der kollinearen Selbstenergie (b) addiert man die Einsetzung (d) des Counterterms aus der

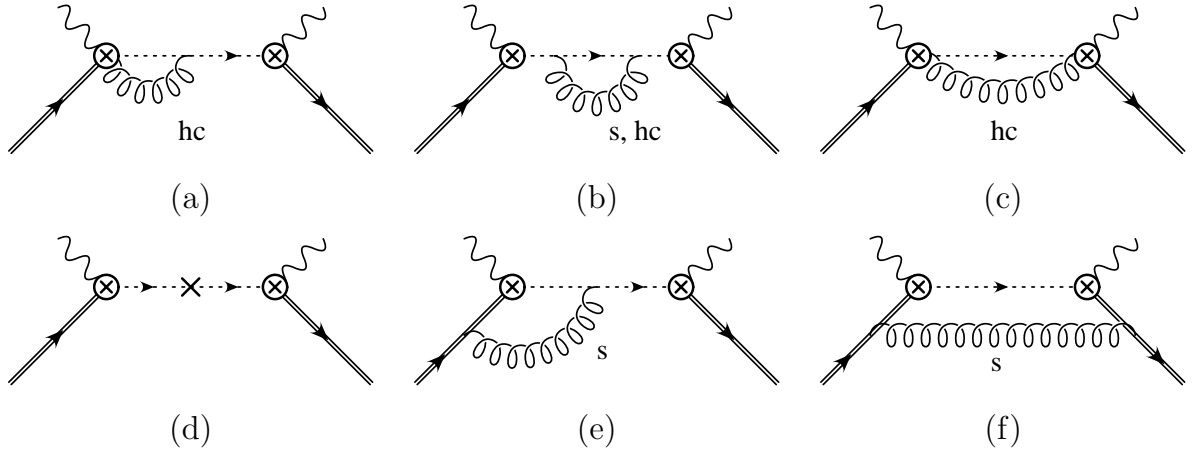


Abbildung 4.3: SCET-Schleifendiagramme, die  $\alpha_s$ -Korrekturen zur Vorwärtsstreuamplitude liefern. hc bezeichnet einen kollinearen Gluonaustausch, s einen weichen Gluonaustausch. Spiegeldiagramme sind hier nicht abgebildet. Diagramm (d) zeigt die Einsetzung des Counterterms aus der Massenrenormierung.

Massenrenormierung im Polschema (2.83) und erhält so als Ergebnis für die Summe der Diagramme, bei denen ein kollineares Gluon ausgetauscht wird

$$D_{hc}^{(1)} = \mathcal{J}_{hc}^{(1)} \left[ \bar{h}_v \bar{\Gamma}_j^\mu \frac{\not{h}_-}{2} \Gamma_i^\nu h_v \right] \quad (4.68)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{hc}^{(1)} = \frac{C_F \alpha_s}{4\pi} \frac{i}{u'} \left\{ \right. & \frac{4}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} - \frac{4}{\epsilon} \ln \left( \frac{-n_+ p u'}{\mu^2} \right) \\ & + 7 - \frac{\pi^2}{3} - 3 \ln \left( \frac{-n_+ p u'}{\mu^2} \right) + 2 \ln^2 \left( \frac{-n_+ p u'}{\mu^2} \right) \\ & + \frac{2\pi^2}{3} - 4 \text{Li}_2 \left( 1 + \frac{m_p}{u'} \right) \\ & \left. + \frac{m_p}{m_p + u'} - \frac{m_p (m_p + 2u')}{(m_p + u')^2} \ln \left( -\frac{u'}{m_p} \right) \right\}. \quad (4.69) \end{aligned}$$

Hier wurden die Abkürzungen

$$u' = u + n_- k \quad \text{und} \quad m_p \equiv m_c^2 / n_+ p \quad (4.70)$$

eingeführt.  $\alpha_s$  bezeichnet  $\alpha_s(\mu)$ . Unser Ergebnis (4.69) stimmt mit dem entsprechenden Ergebnis in [102] überein, wenn man es in  $m_c^2/p^2$  entwickelt und ins  $\overline{\text{MS}}$ -Schema übersetzt.

Als Summe der Diagramme, die einen weichen Gluonaustausch enthalten, ergibt sich

$$D_s^{(1)} = \mathcal{J}_s^{(1)} \left[ \bar{h}_v \bar{\Gamma}_j^\mu \frac{\not{h}_-}{2} \Gamma_i^\nu h_v \right] \quad (4.71)$$

mit

$$\mathcal{J}_s^{(1)} = \frac{C_F \alpha_s}{4\pi} \frac{i}{u'} \left\{ -\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{2}{\epsilon} + \frac{4}{\epsilon} \ln \left( \frac{-u'}{\mu} \right) - \frac{3\pi^2}{2} - 4 \ln \left( \frac{-u'}{\mu} \right) - 4 \ln^2 \left( \frac{-u'}{\mu} \right) \right\}. \quad (4.72)$$

Die sich durch Berechnung der in Abbildung 4.3 dargestellten SCET-Schleifendiagramme ergebenden Ausdrücke (4.68) und (4.71) entsprechen der kollinearen und der weichen Impulsregion des QCD-Schleifendiagramms. Den Beitrag des harten Impulsbereichs erhält man durch Multiplikation der Vorwärtsstreuamplitude mit dem Renormierungsfaktor  $Z_J^2$ , wobei  $Z_J$  die Stromrenormierung in SCET (2.77) darstellt. Die divergenten Terme aus den drei Impulsbereichen heben sich gegenseitig auf. Dies zeigt, dass hier die Beschreibung des Zerfalls  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  in der Shapefunktions-Region mittels SCET auf konsistente Weise erfolgt. Da die Struktur der divergenten Ausdrücke für jeden der Impulsbereiche gleich wie im masselosen Fall ist, gehorchen die harten Funktionen und die Shapefunktion der gleichen Renormierungsgruppenentwicklung wie für  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$ .

Um die Beiträge zum hadronischen Tensor (4.62) zu erhalten, nehmen wir den Imaginärteil von (4.69) und (4.72), der durch Stern-Distributionen (siehe Anhang A.3) ausgedrückt werden kann. Die benötigten Imaginärteile für die einzelnen Ausdrücke sind in Anhang B.1 in den Gleichungen (B.4), (B.7), (B.8) und (B.10) aufgelistet.

Der  $\alpha_s$ -Beitrag zur Jetfunktion  $J^{(1)}(u - \omega, n_+ p)$  hängt mit dem endlichen Anteil von  $\mathcal{J}_{hc}^{(1)}$  (4.69) über

$$J^{(1)} \otimes S_{\text{part}}^{(0)} = J^{(1)}(u - \omega, n_+ p) \otimes \delta(\omega + n_- k) = J^{(1)}(u', n_+ p) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[ i \mathcal{J}_{hc, \text{finite}}^{(1)} \right] \quad (4.73)$$

zusammen. Durch Bilden des Imaginärteils von (4.69) erhalten wir

$$\begin{aligned} J^{(1)}(u', n_+ p) = \frac{C_F \alpha_s}{4\pi} \left\{ \right. & (7 - \pi^2) \delta(u') - 3 \left( \frac{1}{u'} \right)_*^{[\mu^2/n_+ p]} + 4 \left( \frac{\ln(u' n_+ p / \mu^2)}{u'} \right)_*^{[\mu^2/n_+ p]} \\ & + \left( \frac{u'}{(m_p + u')^2} - \frac{4}{u'} \ln \left( 1 + \frac{u'}{m_p} \right) \right) \theta(u') + \left( 1 + \frac{2\pi^2}{3} \right) \delta(u') \\ & \left. - \left( \frac{1}{u'} \right)_*^{[m_p]} + 4 \left( \frac{\ln(u' / m_p)}{u'} \right)_*^{[m_p]} \right\}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Es gilt

$$J(u', n_+ p) = \delta(u') + J^{(1)}(u', n_+ p) \quad (4.75)$$

und für die Jetfunktion bis  $\mathcal{O}(\alpha_s)$

$$J(u - \omega, n_+ p) = \delta(u - \omega) + J^{(1)}(u - \omega, n_+ p). \quad (4.76)$$



Da die führende Shapefunktion  $S_{\text{part}}^{(0)} = \delta(\omega + n_- k)$  ist, erhält man  $J^{(1)}(u - \omega, n_+ p)$  einfach durch Ersetzen von  $u'$  durch  $u - \omega$  in (4.74). Die erste Zeile von (4.74) ergibt für  $m_c \rightarrow 0$  das Ergebnis im masselosen Fall [66, 67], während die zweite und dritte Zeile nur beim Zerfall in ein massives kollineares Quark auftreten und für  $m_c \rightarrow 0$  verschwinden.

Entsprechend hängen die  $\alpha_s$ -Korrekturen zur Shapefunktion auf Partonniveau  $S_{\text{part}}^{(1)}(\omega)$  mit dem endlichen Anteil von (4.72) über

$$J^{(0)} \otimes S_{\text{part}}^{(1)} = \delta(u - \omega) \otimes S_{\text{part}}^{(1)}(\omega) = S_{\text{part}}^{(1)}(u') = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[ i \mathcal{J}_{s, \text{finite}}^{(1)} \right] \quad (4.77)$$

zusammen. Durch Bilden des Imaginärteils von (4.72) ergibt sich

$$S_{\text{part}}^{(1)}(u') = -\frac{C_F \alpha_s}{4\pi} \left\{ \frac{\pi^2}{6} \delta(u') + 4 \left( \frac{1}{u'} \right)_*^{[\mu]} + 8 \left( \frac{\ln(u'/\mu)}{u'} \right)_*^{[\mu]} \right\}. \quad (4.78)$$

Auch dies stimmt im Grenzfall  $m_c \rightarrow 0$  mit dem Ergebnis im masselosen Fall [66, 67] überein. Für die Shapefunktion auf Partonniveau erhält man bis  $\mathcal{O}(\alpha_s)$

$$S(\omega) = \delta(\omega + n_- k) + S_{\text{part}}^{(1)}(\omega + n_- k). \quad (4.79)$$

### Ergebnis für den hadronischen Tensor und Vergleich mit QCD-Ergebnis

Für die einzelnen Komponenten des hadronischen Tensors erhält man

$$\begin{aligned} \frac{W_1}{2} &= \frac{1}{n_+ p} H_{11}(n_+ p) \int d\omega J(u - \omega, n_+ p) S(\omega), \\ \frac{W_4}{2} &= \frac{1}{n_+ p} H_{12}(n_+ p) \int d\omega J(u - \omega, n_+ p) S(\omega), \\ \frac{m_b}{4} W_5 &= \frac{1}{n_+ p} \frac{2}{y} H_{13}(n_+ p) \int d\omega J(u - \omega, n_+ p) S(\omega) \end{aligned} \quad (4.80)$$

mit den harten Funktionen  $H_{ij}$  aus (4.65).  $W_2$  und  $W_3$  sind zur betrachteten Ordnung der Störungsreihe in  $\alpha_s$  Null. Führt man in (4.80) das Faltungsintegral aus und entwickelt bis  $\mathcal{O}(\alpha_s)$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{W_1}{2} &= \frac{1}{n_+ p} \left[ H_{11}(n_+ p) \delta(u') + J^{(1)}(u', n_+ p) + S_{\text{part}}^{(1)}(u') \right] + \mathcal{O}(\alpha_s^2), \\ \frac{W_4}{2} &= \frac{1}{n_+ p} H_{12}(n_+ p) \delta(u') + \mathcal{O}(\alpha_s^2), \\ \frac{m_b}{4} W_5 &= \frac{1}{n_+ p} \frac{2}{y} H_{13}(n_+ p) \delta(u') + \mathcal{O}(\alpha_s^2). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Da  $H_{12}$  und  $H_{13}$  nur  $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Terme enthalten, tragen zu  $W_4$  und  $W_5$  zur betrachteten Ordnung nur führende Beiträge der Jetfunktion und der Shapefunktion bei.

Wir vergleichen unser Ergebnis für den hadronischen Tensor mit dem in voller QCD zu Ordnung  $\alpha_s$  berechneten Ergebnis in analytischer Form aus [60]. Hierzu müssen wir das QCD-Ergebnis unter Verwendung des SCET-Power-Countings  $m_c^2/m_b^2 \sim \lambda^2$ ,  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b \sim \lambda^2$  entwickeln. In unseren Ausdrücken (4.81) können wir  $u'$  durch  $u$  ersetzen, da es sich bei dem QCD-Ergebnis um den führenden Term einer lokalen Heavy Quark Expansion handelt, die in dem Bereich gilt, wo  $u$  wie  $m_b$  skaliert.  $n_k$  ist dort ein Korrekturterm nächstführender Ordnung in der  $1/m_b$ -Entwicklung und kann daher aus dem Ergebnis in führender Ordnung nicht reproduziert werden. Da in [60] eine andere Zerlegung des hadronischen Tensors als (4.1) verwendet wird, müssen wir darüber hinaus die jeweiligen  $W_i$  miteinander in Beziehung setzen. Zum Vergleich zwischen den beiden Ergebnissen ist zu zeigen

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \frac{W_3^{[60]}}{\pi m_b^2}, \\
 W_2 &= \frac{W_1^{[60]} - y W_3^{[60]}/2}{\pi m_b^2}, \\
 W_3 &= \frac{W_2^{[60]} + W_4^{[60]} + 2W_5^{[60]}}{\pi m_b^2}, \\
 W_4 &= -\frac{W_3^{[60]} + W_4^{[60]} + W_5^{[60]}}{\pi m_b^2}, \\
 W_5 &= \frac{W_4^{[60]}}{\pi m_b},
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

wobei sich der Vergleich für  $W_1$  am Schwierigsten gestaltet, weil hier eine harte Funktion, die Jetfunktion und die Shapefunktion enthalten sind und somit sowohl Beiträge proportional zur Delta- und Theta-Distribution als auch Beiträge, die proportional zu den Stern-Distributionen sind, auftreten.  $W_4$  und  $W_5$  beinhalten nur die harten Funktionen  $H_{12}$  bzw.  $H_{13}$  und eine Delta-Distribution und sind daher viel einfacher mit [60] zu vergleichen.  $W_2$  und  $W_3$  sind Null, daher ist hier nur zu zeigen, dass auch die Entwicklung der entsprechenden Ausdrücke in [60] Null ergibt. Wir finden völlige Übereinstimmung unseres Ergebnisses mit dem in  $\lambda$  entwickelten QCD-Ergebnis aus [60].

Da die in Kapitel 3 vorgestellten numerischen Ergebnisse für die normierte Zerfallsrate und die normierten hadronischen und leptonischen Momente mit den in [60] präsentierten übereinstimmen, kann gefolgert werden, dass auch zwischen den hier dargestellten Ergebnissen und den in voller QCD erzielten Ergebnissen in Kapitel 3 Übereinstimmung besteht. Um einen direkten Vergleich durchführen zu können, müssten die QCD-Ausdrücke in Kapitel 3 unter Verwendung des SCET-Power-Countings in  $\lambda$  entwickelt werden.

### 4.3.2 Das $U$ -Spektrum

Aus den Komponenten des hadronischen Tensors (4.80) und der dreifach differentiellen Rate (4.38), die man in führender Ordnung in  $\lambda$  entwickelt, können verschiedene Zerfallsverteilungen erhalten werden. Wir konzentrieren uns hier auf das Spektrum in der Variablen

$U$  (4.58,4.59), die die Verallgemeinerung der im masselosen Fall auftretenden Variablen  $P_+ = n_-P$  ist. Daher kann das  $U$ -Spektrum für  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  mit dem  $P_+$ -Spektrum für  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  in Beziehung gesetzt werden. Das  $P_+$ -Spektrum eignet sich ausgezeichnet zur Bestimmung von  $|V_{ub}|$  aus  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  [67, 77]. Bereits im vorherigen Abschnitt wurde argumentiert, dass die harten Funktionen und die Shapefunktion der gleichen Renormierungsgruppenentwicklung gehorchen wie im masselosen Fall. Daher können wir die in [67] unter Verwendung von Renormierungsgruppenmethoden hergeleiteten Ausdrücke verwenden. Wir führen das Integral über die Leptonenergie aus und erhalten für die doppelt differentielle Rate in  $u$  und  $y$

$$\frac{1}{\Gamma_c} \frac{d^2\Gamma_c}{du dy} = e^{V_H(m_b, \mu_i)} \int_{-\bar{\Lambda}}^u d\omega y^{2-a} (6 - 4y) \mathcal{H}(y) J(u - \omega, m_b y, \mu_i) S(\omega, \mu_i). \quad (4.83)$$

Nach der Renormierungsgruppenentwicklung werden alle Funktionen an der Jet-Skala  $\mu_i \sim m_c$  ausgewertet. Wir haben die Renormierungsgruppenfaktoren

$$a = \frac{16}{25} \ln \frac{\alpha_s(\mu_i)}{\alpha_s(m_b)} \quad (4.84)$$

und  $V_H(m_b, \mu_i)$  eingeführt, die Logarithmen zwischen der harten Skala und der Jet-Skala resumieren. Die genaue Form von  $V_H$  kann aus [67] entnommen werden. Die harte Funktion  $\mathcal{H}$  kann aus den  $H_{ij}$  (4.65) hergeleitet werden. Die totale Rate für  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  zu Ordnung  $\alpha_s(m_b)$  lautet [54]

$$\Gamma_c = |V_{cb}|^2 \left( \frac{G_F^2 m_b^5}{192\pi^3} \right) \left[ f \left( \frac{m_c^2}{m_b^2} \right) + \frac{C_F \alpha_s(m_b)}{4\pi} \left( \frac{25}{2} - 2\pi^2 \right) g \left( \frac{m_c^2}{m_b^2} \right) \right]. \quad (4.85)$$

In führender Ordnung in  $\lambda$  können die Phasenraumfunktionen  $f$  und  $g$  jeweils 1 gesetzt werden.

Wir führen einen Wechsel von den partonischen zu den hadronischen Variablen (4.56), (4.58), (4.59) durch. Der physikalische, von den hadronischen Variablen abhängige Phasenraum ist

$$\frac{M_D^2}{n_+ P} \leq n_- P \leq n_+ P \leq M_B. \quad (4.86)$$

Um in der Shapefunktions-Region zu bleiben, müssen wir die Phasenraumintegrationen auf  $U \sim \lambda^2 m_b$  beschränken. Analog zur Behandlung des  $P_+$ -Spektrums für  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  in [67] führen wir einen Schnitt  $U < \Delta$  ein. Für  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  unterdrückt der Schnitt  $P_+ < \Delta$  mit  $\Delta = M_D^2/M_B \approx 0,65$  GeV den Charm-Untergrund bei der Messung der Zerfallsrate. Durch den Schnitt wird die Kinematik auf die Shapefunktions-Region beschränkt. Der Effekt des Schnitts  $U < \Delta$  auf den physikalischen Phasenraum für  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  in den Variablen  $P_- = n_+ P$  und  $P_+ = n_- P$  wird in Abbildung 4.4 für typische Zahlenwerte  $\Delta = 0,65$  GeV und  $m_c = 1,36$  GeV gezeigt.



Abbildung 4.4: Physikalischer Phasenraum und Shapefunktions-Region. Der gesamte graue Bereich zeigt den physikalischen Phasenraum (4.86). Der dunkelgraue Bereich zeigt die Shapefunktions-Region mit  $\Delta = 0,65$  GeV und  $m_c = 1,36$  GeV.

Der Anteil aller  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$ -Ereignisse mit  $U < \Delta$  ist

$$\begin{aligned} F_c(\Delta) &= \frac{\Gamma_c(U < \Delta)}{\Gamma_c} \\ &= e^{V_H} \int_0^\Delta d\hat{\omega} \int_{\frac{m_c}{m_b}}^1 dy \int_0^\Delta dU y^{2-a} (6 - 4y) \mathcal{H}(y) J(U - \hat{\omega}, y m_b) \hat{S}(\hat{\omega}). \end{aligned} \quad (4.87)$$

$S(\hat{\omega})$  ist die in (4.58) definierte Shapefunktion in Abhängigkeit von der hadronischen Variablen  $\hat{\omega}$ . Die untere Integrationsgrenze für  $y$  kann Null gesetzt werden bis auf Terme der Ordnung  $(m_c/m_b)^{3-a}$ , die vernachlässigt werden können. Nach dieser Vereinfachung sind die Integrationsgrenzen gleich wie im masselosen Fall. Die Integrale über die  $\alpha_s$ -Korrekturen von der harten Funktion, dem führenden Beitrag der Jetfunktion und der ersten Zeile der  $\alpha_s$ -Korrekturen zur Jetfunktion (4.76 mit 4.74) sind gleich wie für  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$ . Daher kann das Ergebnis als

$$F_c(\Delta) = F_u(\Delta) + F_m(\Delta) \quad (4.88)$$

geschrieben werden.  $F_u(\Delta)$  ist das Ergebnis für  $b \rightarrow u$  Zerfälle [67]

$$F_u(\Delta) = T(a) e^{V_H(m_b, \mu_i)} \int_0^\Delta d\hat{\omega} \hat{S}(\hat{\omega}, \mu_i) f_u\left(\frac{m_b(\Delta - \hat{\omega})}{\mu_i^2}\right) \quad (4.89)$$

mit

$$\begin{aligned} f_u(x) &= 1 + \frac{C_F \alpha_s(m_b)}{4\pi} H(a) \\ &+ \frac{C_F \alpha_s(\mu_i)}{4\pi} [2 \ln^2 x + (4f_2(a) - 3) \ln x + (7 - \pi^2 - 3f_2(a) + 2f_3(a))] \end{aligned} \quad (4.90)$$

und den Funktionen

$$\begin{aligned} f_2(a) &= -\frac{30 - 12a + a^2}{(6-a)(4-a)(3-a)}, & f_3(a) &= \frac{2(138 - 90a + 18a^2 - a^3)}{(6-a)(4-a)^2(3-a)^2}, \\ T(a) &= \frac{2(6-a)}{(4-a)(3-a)}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Ein Ausdruck für  $H(a)$  kann aus [67] entnommen werden.

$F_m(\Delta)$  tritt nur bei  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  auf und verschwindet für  $m_c \rightarrow 0$ . Die hierfür relevanten Ausdrücke sind in den letzten beiden Zeilen der Jetfunktion (4.76 mit 4.74) enthalten. Nach Ausführen der Integration über  $U$  lautet das Ergebnis für diese Ausdrücke

$$\begin{aligned} F_m(\Delta) = e^{V_H} \int_0^\Delta d\hat{\omega} \hat{S}(\hat{\omega}) \int_0^1 dy y^{2-a} (6-4y) \frac{C_F \alpha_s(\mu_i)}{4\pi} \left\{ \frac{2\pi^2}{3} - \ln(y\Delta_{\hat{\omega}}) + 2 \ln^2(y\Delta_{\hat{\omega}}) \right. \\ \left. + \frac{1}{1+y\Delta_{\hat{\omega}}} + \ln(1+y\Delta_{\hat{\omega}}) + 4\text{Li}_2(-y\Delta_{\hat{\omega}}) \right\} \end{aligned} \quad (4.92)$$

mit

$$\Delta_{\hat{\omega}} = \frac{(\Delta - \hat{\omega})m_b}{m_c^2}. \quad (4.93)$$

Die Integrale über  $y$  können durch die Masterintegrale

$$G_1(n,x) = \int_0^1 dy \frac{y^n}{1+xy} = \frac{{}_2F_1(1, n+1; n+2; -x)}{n+1}, \quad (4.94)$$

$$G_2(n,x) = \int_0^1 dy y^n \ln(1+xy) = \frac{1}{n+1} \left( \ln(1+x) - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{G_1(n,x)}{n+1}, \quad (4.95)$$

$$G_3(n,x) = \int_0^1 dy y^n \text{Li}_2(-xy) = \frac{\text{Li}_2(-x)}{n+1} + \frac{G_2(n,x)}{n+1}, \quad (4.96)$$

ausgedrückt werden, wobei die hypergeometrische Funktion  ${}_2F_1$  über die Reihenentwicklung

$${}_2F_1(a_1, a_2; a_3; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k}{(a_3)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (a_i)_k = \frac{\Gamma(a_i + k)}{\Gamma(a_i)} \quad (4.97)$$

definiert ist. Neben den Abkürzungen (4.91) aus [67] führen wir

$$g_n(a, X) = \frac{6G_n(2-a, X) - 4G_n(3-a, X)}{T(a)} \quad (4.98)$$

ein.

Als Ergebnis für den von der Charm-Quark-Masse abhängigen Ausdruck  $F_m(\Delta)$  erhält man im Polschema

$$F_m(\Delta) = T(a) e^{V_H(m_b, \mu_i)} \int_0^\Delta d\hat{\omega} \hat{S}(\hat{\omega}, \mu_i) f_m \left( \frac{m_b(\Delta - \hat{\omega})}{m_c^2} \right) \quad (4.99)$$

mit

$$f_m(x) = \frac{C_F \alpha_s(\mu_i)}{4\pi} \left[ 2 \ln^2 x + (4f_2(a) - 1) \ln x + \frac{2\pi^2}{3} - f_2(a) + 2f_3(a) + g_1(a,x) + g_2(a,x) + 4g_3(a,x) \right]. \quad (4.100)$$

Für den Bruchteil der Rate mit  $U < \Delta$  ergibt sich somit insgesamt

$$\begin{aligned} F_c(\Delta) &= \frac{1}{\Gamma_c} \int_0^\Delta dU \frac{d\Gamma_c}{dU} = \frac{\Gamma_c(U < \Delta)}{\Gamma_c} = F_u(\Delta) + F_m(\Delta) \\ &= T(a) e^{V_H(m_b, \mu_i)} \int_0^U d\hat{\omega} \hat{S}(\hat{\omega}, \mu_i) \left[ f_u \left( \frac{m_b(U - \hat{\omega})}{\mu_i^2} \right) + f_m \left( \frac{m_b(U - \hat{\omega})}{m_c^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Durch Differentiation von (4.101) erhält man das  $U$ -Spektrum. Unter Verwendung von partieller Integration und  $\hat{S}(0) = 0$  ergibt sich

$$\frac{1}{\Gamma_c} \frac{d\Gamma_c}{dU} = T(a) e^{V_H(m_b, \mu_i)} \int_0^U d\hat{\omega} \left( \frac{d}{d\hat{\omega}} \hat{S}(\hat{\omega}, \mu_i) \right) \left[ f_u \left( \frac{m_b(U - \hat{\omega})}{\mu_i^2} \right) + f_m \left( \frac{m_b(U - \hat{\omega})}{m_c^2} \right) \right]. \quad (4.102)$$

### Wechsel des Massenschemas

Bei der Berechnung des hadronischen Tensors und des bis zu einer oberen Grenze integrierten  $U$ -Spektrums  $F_c(\Delta)$  haben wir die Charm-Quark-Masse im Polschema verwendet. In diesem Abschnitt soll untersucht werden, welche Auswirkungen der Wechsel zu einem anderen Renormierungsschema für die Charm-Quark-Masse gemäß

$$m_c \rightarrow \tilde{m}_c = m_c - \delta m \quad (4.103)$$

mit  $\delta m \sim m_c \alpha_s(\mu_i)$  auf  $F_c(\Delta)$  hat. Einerseits ändert sich der in  $F_m(\Delta)$  eingesetzte Wert für die Charm-Quark-Masse. Da  $F_m(\Delta)$  jedoch bereits von Ordnung  $\alpha_s$  ist, ist dies formal ein Effekt von Ordnung  $\alpha_s^2$ . Andererseits erhält die Jetfunktion eine störungstheoretische Korrektur, die proportional zu  $\delta m$  ist. Beim Übergang zu einem anderen Renormierungsschema für die Charm-Quark-Masse ändert sich die Variable  $u$  gemäß

$$u \rightarrow \tilde{u} = n_- p - \frac{\tilde{m}_c^2}{n_+ p}. \quad (4.104)$$

Dies muss im Baumgraphenbeitrag der Jetfunktion (4.76) berücksichtigt werden. Für diesen gilt

$$\delta(u - \omega) \simeq \delta(\tilde{u} - \omega) - \frac{2\tilde{m}_c \delta m}{n_+ p} \delta'(\tilde{u} - \omega). \quad (4.105)$$

Setzt man den Korrekturterm zur Jetfunktion in (4.87) ein, so erhält man einen zusätzlichen Beitrag zu  $F_c(\Delta)$ . Es ergibt sich

$$\begin{aligned} F_c(\Delta) &\rightarrow F_c(\Delta) - e^{V_H} \int_0^\Delta d\hat{\omega} \int_0^1 dy \int_0^\Delta dU y^{2-a} (6-4y) \frac{2\tilde{m}_c \delta m}{y m_b} \delta'(U - \hat{\omega}) \hat{S}(\hat{\omega}) \\ &= F_c(\Delta) - e^{V_H} T(a+1) \frac{2\tilde{m}_c \delta m}{m_b} \hat{S}(\Delta) . \end{aligned} \quad (4.106)$$

Bei  $F_c(\Delta)$  handelt es sich um eine physikalische Messgröße, nämlich den Anteil aller  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$ -Ereignisse mit  $U < \Delta$ . Um die Unabhängigkeit dieser Observablen vom Renormierungsschema zu einer festen Ordnung in  $\alpha_s$  zu sehen, muss man beachten, dass sich auch die Variable  $U$  (4.59) bei einem Wechsel des Renormierungsschemas ändert. Daher sollte das in verschiedenen Massenschemen erzielte Ergebnis für  $F_c(\Delta)$  bei verschiedenen Werten des Abschneideparameters  $\Delta$  verglichen werden. Mit

$$\tilde{U} = n_- P - \frac{\tilde{m}_c^2}{n_+ P} < \tilde{\Delta} \simeq \Delta + \frac{2\tilde{m}_c \delta m}{n_+ P} \quad (4.107)$$

lautet  $\tilde{F}_c(\tilde{\Delta})$  im neuen Schema

$$\tilde{F}_c(\tilde{\Delta}) = F_u(\tilde{\Delta}) + F_{\tilde{m}}(\tilde{\Delta}) - e^{V_H} T(a+1) \frac{2\tilde{m}_c \delta m}{m_b} \hat{S}(\tilde{\Delta}) . \quad (4.108)$$

Entwickelt man im führenden Term in  $F_u(\tilde{\Delta})$  die obere Integrationsgrenze  $\tilde{\Delta}$  um  $\Delta$  und vernachlässigt Ausdrücke von Ordnung  $\alpha_s^2$ , so erhält man explizit die Unabhängigkeit von  $F_c$  vom verwendeten Renormierungsschema

$$\tilde{F}_c(\tilde{\Delta}) = F_c(\Delta) + \mathcal{O}(\alpha_s^2) . \quad (4.109)$$

In den folgenden Abschnitten verwenden wir für die Charm-Quark-Masse neben dem Polschema das  $\overline{\text{MS}}$ -Schema sowie das Potential-Subtracted(PS)-Schema. Der Zusammenhang zwischen den drei verschiedenen Massendefinitionen auf Einschleifenniveau ist in (1.50) und (1.51) angegeben.

### numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt präsentieren wir numerische Ergebnisse für  $F_c(\Delta)$  in Abhängigkeit von den verschiedenen Massenschemen und von der Modellierung der nichtstörungstheoretischen Shapefunktion.

Zunächst stellen wir die Zahlenwerte für die Parameter vor, die wir in der numerischen Analyse in diesem und den folgenden Abschnitten verwenden. Die harte Skala wird auf die  $b$ -Quark-Masse  $m_b = 4,65$  GeV festgelegt. Als Standardwert für die Jet-Skala verwenden wir  $\mu_i = 1,5$  GeV. Als Standard-Massenschema benutzen wir das PS-Schema mit  $m_c^{\text{PS}}(\mu_f = 1 \text{ GeV}) = 1,36$  GeV. Die Polmasse für das Charm-Quark ist 1,65 GeV, während für die  $\overline{\text{MS}}$ -Masse an der Jetskala  $\bar{m}_c(\mu_i) = 1,20$  GeV gilt. Für die laufende Kopplung  $\alpha_s$  benutzen

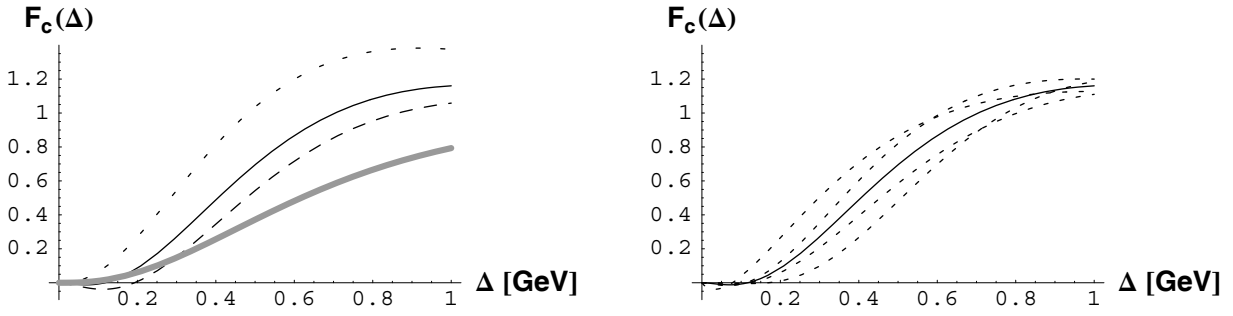


Abbildung 4.5: Vorhersagen für  $F_c(\Delta)$ , das bis zu einer oberen Grenze  $\Delta$  integrierte  $U$ -Spektrum, in verschiedenen Massenschemen (links) und unter Verwendung verschiedener Modelle zur Beschreibung der Shapefunktion (rechts).

wir die (1.40) auf Zweischleifenniveau entsprechende Gleichung mit  $\Lambda_{\text{QCD}}^{(n_f=4)} = 345 \text{ MeV}$ . Dies entspricht  $\alpha_s(m_b) = 0,22$  and  $\alpha_s(\mu_i) = 0,37$ .

Um numerische Vorhersagen machen zu können, müssen wir die nichtstörungstheoretische Shapefunktion mittels eines Modells beschreiben. Hierzu verwenden wir den von zwei Parametern abhängigen Ansatz [67]<sup>1</sup>:

$$\hat{S}(\hat{\omega}, \mu_i) = \frac{1}{\Lambda} \left[ 1 - \frac{C_F \alpha_s(\mu_i)}{4\pi} \left( \frac{\pi^2}{6} - 1 \right) \right] \frac{b^b}{\Gamma(b)} \left( \frac{\hat{\omega}}{\Lambda} \right)^{b-1} \exp \left( -b \frac{\hat{\omega}}{\Lambda} \right). \quad (4.110)$$

Als Standard benutzen wir  $\Lambda = 0,685 \text{ GeV}$  und  $b = 2,93$  (Szenario “S5” in [67]).

In Abbildung 4.5 vergleichen wir Ergebnisse für  $F_c(\Delta)$  in verschiedenen Massenschemen und für verschiedene Szenarien zur Modellierung der Shapefunktion in Abhängigkeit vom Abschneideparameter  $\Delta$ . Das linke Bild vergleicht die Vorhersage für  $F_c(\Delta)$  zur Ordnung  $\alpha_s$  im PS-Schema (durchgezogene Linie) mit dem  $\overline{\text{MS}}$ -Schema (gestrichelte Linie) und dem Polschema (gepunktete Linie). Das Ergebnis auf Baumgraphenniveau ist ebenfalls eingezeichnet (dicke graue Linie). Dabei wird jeweils das Standardszenario S5 [67] zur Modellierung der Shapefunktion verwendet. Das rechte Bild zeigt für  $F_c(\Delta)$  zur Ordnung  $\alpha_s$  im PS-Schema das Ergebnis im Standardszenario S5 (durchgezogene Linie) im Vergleich mit den Szenarien S1, S3, S7, S9 (gepunktete Linien).

Aus Abbildung 4.5 kann Folgendes entnommen werden:

- Für typische Werte  $\Delta \sim 0,65 \text{ GeV}$  sind die  $\alpha_s$ -Korrekturen groß und positiv.
- Oberhalb von einem kritischen Wert  $\Delta_{\text{max}}$  werden die  $\alpha_s$ -Korrekturen so groß, dass  $F_c$  größer als 1 wird. Da es sich bei  $F_c(\Delta)$  jedoch um den Anteil aller  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$ -Ereignisse mit  $U < \Delta$  und somit um einen Bruchteil der totalen Rate handelt, kann

<sup>1</sup> In [67] enthält der Ansatz für  $\hat{S}(\hat{\omega})$  einen weiteren Term, der aber bei den zu  $F_c(\Delta)$  für den hier verwendeten Wert von  $\Delta$  beitragenden Werten von  $\hat{\omega}$ , nur einen geringen Effekt auf  $\hat{S}(\hat{\omega})$  hat. Aus diesem Grund lassen wir diesen zweiten Term im Modell für die Shapefunktion weg.



$F_c(\Delta)$  physikalisch nicht größer als 1 werden. Daher kann man dem Ergebnis für  $F_c(\Delta)$  oberhalb von  $\Delta_{\text{max}}$  nicht mehr trauen.

- Der kritische Wert  $\Delta_{\text{max}}$  ist ungefähr 0,48 GeV im Poleschema, 0,7 GeV im PS-Schema und 0,86 GeV im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema.
- Aufgrund der Modellabhängigkeit der Shapefunktion besteht eine Unsicherheit von ungefähr 25%.

### Abschätzung der systematischen Unsicherheiten

$\alpha_s$ -Korrekturen wurden hier nur zur führenden Ordnung in der  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Entwicklung berechnet. In diesem Abschnitt sollen die systematischen Unsicherheiten unserer Ergebnisse aufgrund der Vernachlässigung höherer Ordnungen in der  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Entwicklung, sogenannter „power corrections“, abgeschätzt werden. Wie wir in Abschnitt 4.2 gesehen haben, erhält man bei der Berechnung von  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Korrekturen einerseits neue nichtstörungstheoretische Strukturen in Form von nächstführenden Shapefunktionen und andererseits kinematische Korrekturen, die proportional zu  $m_c^2/m_b^2 \sim \lambda^2$  und  $u \sim \lambda^2 m_b$  sind. Bei der Integration über den Phasenraum treten große Logarithmen der Form  $\ln(m_c^2/m_b^2)$  auf, die einige der mit  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$  unterdrückten Terme multiplizieren und deren Beitrag dadurch deutlich vergrößern.<sup>2</sup>

Um eine Abschätzung der systematischen Unsicherheiten aufgrund der Vernachlässigung höherer Ordnungen in der  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Entwicklung zu erhalten, genügt es,  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Korrekturen zum Baumgraphenniveau zu betrachten. Da die Effekte der nächstführenden Shapefunktionen nur modellabhängig angegeben werden können, schätzen wir die systematischen Unsicherheiten allein durch kinematische Korrekturen, die die führende Shapefunktion multiplizieren, ab.

Die kinematischen Korrekturen proportional zur führenden Shapefunktion auf Baumgraphenniveau erhalten wir, indem wir die Terme in (4.37), die proportional zur führenden Shapefunktion  $S$  sind, in (4.38) einsetzen und über  $\bar{x}$  und  $n_+ \hat{p}$  in den in (4.42) angegebenen Integrationsgrenzen integrieren. Wir normieren auf die totale Rate (4.85), die sich auf Baumgraphenniveau (3.17) von (4.39) um den Phasenraumfaktor  $f(\rho)$  (3.11) unterscheidet. Durch Entwickeln in  $\lambda$  ergibt sich für die kinematischen Korrekturen proportional zur führenden Shapefunktion auf Baumgraphenniveau

$$\frac{1}{\Gamma_c} \frac{d\Gamma_c}{dU} = \left\{ 1 - \frac{U - \bar{\Lambda}}{m_b} \left( \frac{14}{3} + \frac{m_c^2}{m_b^2} \left( \frac{215}{6} + 3 \ln \frac{m_c^2}{m_b^2} \right) \right) + \mathcal{O}(u^2, \lambda^5) \right\} \hat{S}(U). \quad (4.111)$$

Abbildung 4.6 zeigt den numerischen Effekt dieser Korrekturen. Abgebildet ist das  $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Ergebnis für  $F_c(\Delta)$  unter Berücksichtigung der kinematischen Korrekturen zum Baumgraphenbeitrag (4.111), normiert auf das  $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Ergebnis für  $F_c(\Delta)$  (4.101).  $F_c(\Delta)$  wird bei  $\Delta = 0,65$  GeV durch die kinematischen Korrekturen um ungefähr 20% größer. Dieser Wert dient als grobe Abschätzung der durch die Vernachlässigung höherer Ordnungen in der  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Entwicklung entstehenden systematischen Unsicherheiten.

<sup>2</sup> Die Logarithmen können mittels Renormierungsgruppenmethoden resummiert werden, siehe[114].

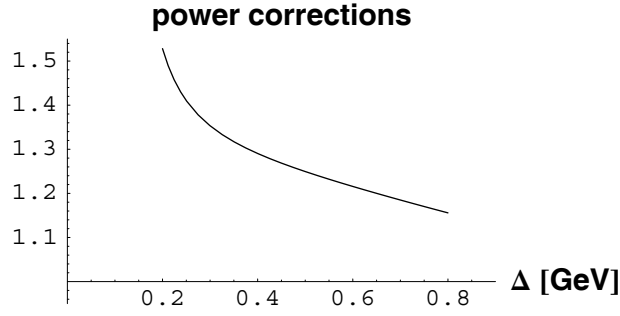


Abbildung 4.6: Abschätzung der systematischen Unsicherheiten aufgrund von „power corrections“ durch die kinematischen Korrekturen (4.111) proportional zur führenden Shapefunktion.

### 4.3.3 Beziehung zwischen $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$ und $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$

Zwischen dem  $P_+$ -Spektrum zu  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  und dem  $U$ -Spektrum zu  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  kann eine Beziehung aufgestellt werden, die unabhängig von der Shapefunktion ist und daher zur Bestimmung des Verhältnisses  $|V_{ub}|/|V_{cb}|$  ohne hadronische Unsicherheiten dienen kann. Bei bekanntem  $|V_{cb}|$  kann hieraus  $|V_{ub}|$  bestimmt werden. Diese Beziehung erhält man auf ähnliche Weise, wie dies für den Vergleich von  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  mit  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  in [80] vorgestellt wurde. Dies beinhaltet die Konstruktion einer Gewichtsfunktion, so dass für die Beziehung zwischen den beiden Zerfallsspektren

$$F_u(\Delta) = \int_0^\Delta dP_+ \frac{d\Gamma_u}{dP_+} = \frac{\Gamma_u}{\Gamma_c} \int_0^\Delta dU W(\Delta, U) \frac{d\Gamma_c}{dU} \simeq \frac{|V_{ub}|^2}{|V_{cb}|^2} \int_0^\Delta dU W(\Delta, U) \frac{d\Gamma_c}{dU} \quad (4.112)$$

gilt. Hierbei haben wir verwendet, dass in führender Ordnung in  $\lambda$  die Phasenraumfunktionen  $f$  und  $g$  in der totalen Rate für  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  (4.85) jeweils 1 gesetzt werden können und somit  $\Gamma_u/\Gamma_c = |V_{ub}|^2/|V_{cb}|^2$  gilt. Die Gewichtsfunktion kompensiert im Vergleich von  $F_u(\Delta)$  (4.89) und  $F_c(\Delta)$  (4.101) den Teil, der in  $F_c(\Delta)$  aufgrund der nichtverschwindenden Charm-Quark-Masse zusätzlich auftritt, also proportional zu  $f_m$  (4.100) ist. Außerdem kommt beim Wechsel in ein anderes Massenschema als das PS-Schema aus (4.106) ein weiterer Term hinzu. Im PS-Schema lautet die Gewichtsfunktion

$$W(\Delta, U) = 1 - f_m \left( \frac{m_b(\Delta - U)}{(m_c^{\text{PS}})^2} \right) + \frac{C_F \alpha_s(\mu_i) T(a+1)}{4\pi T(a)} \frac{8\mu_f m_c^{\text{PS}}}{m_b} \delta(\Delta - U) + \mathcal{O}(\alpha_s^2) + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{m_b}\right). \quad (4.113)$$

Während sowohl die Gewichtsfunktion als auch das  $U$ -Spektrum zu  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  vom Massenschema für die Charm-Quark-Masse abhängen, hebt sich die Abhängigkeit vom Massenschema in (4.112) auf. Dies muss schon allein deshalb so sein, weil die linke Seite von (4.112)

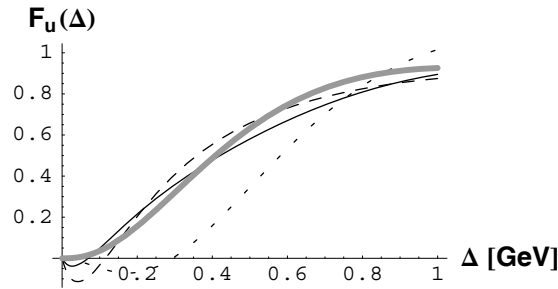


Abbildung 4.7: Vorhersagen für  $F_u(\Delta)$  unter Verwendung der Gewichtsfunktion (4.113) und des theoretischen  $b \rightarrow c$ -Spektrums (4.102) in verschiedenen Massenschemen und Vergleich mit dem direkten Ergebnis für  $F_u(\Delta)$  aus (4.89).

durch das  $P_+$ -Spektrum zu  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  gegeben ist, das von der Charm-Quark-Masse und somit auch vom entsprechenden Massenschema nicht abhängen kann.

Der Zusammenhang (4.112) zwischen dem  $P_+$ -Spektrum zu  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  und dem  $U$ -Spektrum zu  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  liefert eine Methode zur Bestimmung von  $|V_{ub}|$ . Durch Messung der  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$ -Rate für  $P_+ < \Delta$  und Messung des  $U$ -Spektrums zu  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  kann mit der theoretisch berechneten Gewichtsfunktion (4.113)  $|V_{ub}|$  bei bekanntem  $|V_{cb}|$  bestimmt werden.

Die systematischen Unsicherheiten einer so durchgeführten Bestimmung von  $|V_{ub}|$  aufgrund höherer, nicht in der Gewichtsfunktion (4.113) enthaltener Ordnungen in der  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Entwicklung betragen – wie im vorherigen Abschnitt abgeschätzt – mindestens 20%.

Im Folgenden soll illustriert werden, wie die hier vorgestellte Methode angewendet werden kann. Da uns keine experimentellen Informationen über das  $U$ -Spektrum zu  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  zur Verfügung stehen, müssen wir auf theoretische Beschreibungen dieses Spektrums zurückgreifen. Zunächst machen wir aus der theoretischen Beschreibung (4.102) für das  $U$ -Spektrum und der Gewichtsfunktion (4.113) mittels (4.112) Vorhersagen für  $F_u(\Delta)$ , die  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$ -Rate mit  $P_+ < \Delta$ . Dies dient vor allem der Abschätzung von störungstheoretischen Unsicherheiten. Danach konstruieren wir ein einfaches Spielmodell für das  $U$ -Spektrum, das Effekte der  $D$ - und  $D^*$ -Resonanz enthält, und machen aus diesem und der Gewichtsfunktion Vorhersagen für  $F_u(\Delta)$ . Dabei wird auf wichtige Aspekte, die bei der Verwendung des physikalischen  $U$ -Spektrums beachtet werden müssen, eingegangen.

### numerische Analyse mittels des theoretischen $b \rightarrow c$ -Spektrums

Um die störungstheoretischen Unsicherheiten der hier präsentierten Methode zur Bestimmung von  $|V_{ub}|$  abzuschätzen, machen wir in diesem Abschnitt aus der theoretischen Beschreibung (4.102) des  $U$ -Spektrums und der Gewichtsfunktion (4.113) mittels (4.112) Vorhersagen für  $F_u(\Delta)$ . Wir verwenden dabei für die Shapefunktion jeweils das Modell (4.110) im Standard-Szenario S5.

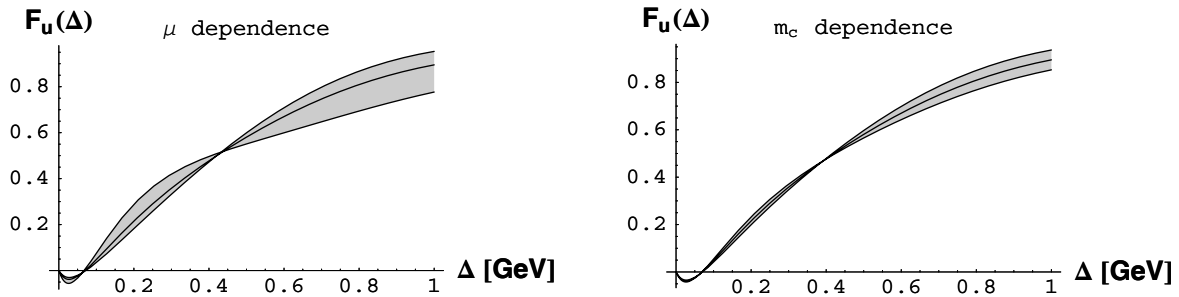


Abbildung 4.8: Vorhersagen für  $F_u(\Delta)$  unter Verwendung der Gewichtsfunktion (4.113) und des theoretischen  $b \rightarrow c$ -Spektrums (4.102). Die linke Abbildung zeigt die Skalenabhängigkeit ( $1 \text{ GeV} < \mu_i < 2,25 \text{ GeV}$ ). Die rechte Abbildung zeigt die Abhängigkeit von der Charm-Quark-Masse  $m_c^{\text{PS}}$ , die um  $\pm 0,15 \text{ GeV}$  um ihren Standardwert variiert wird.

Abbildung 4.7 zeigt so erhaltene Vorhersagen für  $F_u(\Delta)$  in verschiedenen Massenschemen: die durchgezogene Linie zeigt die Vorhersage im PS-Schema, die gestrichelte Linie die Vorhersage im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema und die gepunktete Linie die Vorhersage im Polschema. Die zum Vergleich eingezeichnete dicke graue Linie stellt das direkte Ergebnis für  $F_u(\Delta)$  aus (4.89) dar. Der Unterschied zwischen den Kurven ist formal von Ordnung  $\alpha_s^2$  und gibt uns daher ein ungefähres Maß für störungstheoretische Effekte höherer Ordnung. Wir stellen fest, dass die Abweichung zwischen der Vorhersage im Polschema und den anderen Vorhersagen für Werte von  $\Delta$  bis  $0,7 \text{ GeV}$  ziemlich groß ist. Für  $\Delta = 0,65 \text{ GeV}$  erhalten wir in den verschiedenen Massenschemen

$$\begin{aligned} F_u(0,65 \text{ GeV}) &= 0,71 && \text{aus (4.102) und (4.112), PS-Schema,} \\ F_u(0,65 \text{ GeV}) &= 0,62 && \text{aus (4.102) und (4.112), Polschema,} \\ F_u(0,65 \text{ GeV}) &= 0,76 && \text{aus (4.102) und (4.112), } \overline{\text{MS}}\text{-Schema,} \end{aligned}$$

im Vergleich zu

$$F_u(0,65 \text{ GeV}) = 0,79 \quad \text{aus (4.89).} \quad (4.114)$$

Hieraus folgern wir eine verbleibende Schemenabhängigkeit von ungefähr 10-15%.

In Abbildung 4.8 untersuchen wir die durch die Gewichtsfunktion verursachte explizite Abhängigkeit der hier vorgestellten Methode von der Renormierungsskala  $\mu_i$  und der Charm-Quark-Masse  $m_c$ . Um diese Effekte zu isolieren, halten wir dabei  $\mu_i$  und  $m_c$  im theoretischen Ausdruck für das  $b \rightarrow c$ -Spektrum fest. Wir variieren die Renormierungsskala  $\mu_i$  zwischen  $1 \text{ GeV}$  und  $2,25 \text{ GeV}$ . Für die Charm-Quark-Masse  $m_c$  betrachten wir Werte, die um  $\pm 0,15 \text{ GeV}$  vom Standardwert im PS-Schema abweichen. Die Abhängigkeit von der Charm-Quark-Masse beträgt für  $\Delta \approx 0,65 \text{ GeV}$  weniger als 10% und ist somit ein kleiner Effekt, während die Abhängigkeit von der Renormierungsskala  $\mu_i$  mit 10-15%

relativ groß ist. Diese störungstheoretischen Unsicherheiten können durch die Berechnung der  $\alpha_s^2$ -Korrekturen zum hadronischen Tensor deutlich verringert werden. Der Nutzen der genauen Kenntnis dieser Korrekturen ist jedoch fraglich, solange die Methode aufgrund der Vernachlässigung höherer Ordnungen in der  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Entwicklung mit systematischen Unsicherheiten von mindestens 20% behaftet ist.

### numerische Analyse mittels eines Spielmodells

In diesem Abschnitt sollen einige Aspekte beleuchtet werden, die aufgrund der speziellen Form des physikalischen  $U$ -Spektrums zu  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  bei Verwendung dieser Methode zur Bestimmung von  $|V_{ub}|$  wichtig werden. Eine Besonderheit inklusiver semileptonischer  $b \rightarrow c$ -Zerfälle ist, dass die beiden exklusiven Zerfallskanäle  $\bar{B} \rightarrow D \ell \bar{\nu}_\ell$  und  $\bar{B} \rightarrow D^* \ell \bar{\nu}_\ell$  bereits 80% der totalen Rate ausmachen. Für ein  $D(D^*)$ -Meson, das sich auf seiner Massenschale befindet, gilt formal

$$U_{D(D^*)} = \frac{M_{D(D^*)}^2 - m_c^2}{n_+ P} \ll \Delta \quad (n_+ P \sim m_b) . \quad (4.115)$$

Daher sind ungefähr 80% des Spektrums bei „kleinen“ Werten von  $U$  konzentriert.<sup>3</sup>

Unter Beachtung dieser Resonanzstruktur konstruieren wir ein Spielmodell für das  $U$ -Spektrum. Hierzu nehmen wir an, dass die doppelt differentielle Rate am  $D/D^*$ -Pol konzentriert ist und mit einer Funktion  $f(y)$  moduliert wird

$$\frac{1}{\Gamma_c} \frac{d^2 \Gamma_c}{d(n_- P) dy} \simeq \frac{m_b y^2}{\bar{M}_D^2} f(y) \delta \left( y - \frac{\bar{M}_D^2}{n_- P m_b} \right), \quad (4.116)$$

wobei  $\int_0^1 dy f(y) = 1$  gilt.  $\bar{M}_D = 1,975$  GeV ist der Spin-gewichtete Mittelwert der  $D$ - und  $D^*$ -Massen. Hieraus erhält man (in einem gegebenen Massenschema) das  $U$ -Spektrum, indem man

$$n_- P = U + \frac{m_c^2}{y m_b} \quad (4.117)$$

einsetzt und das Integral über  $y$  ausführt. So ergibt sich

$$\frac{1}{\Gamma_c} \frac{d\Gamma_c}{dU} \simeq \frac{\bar{M}_D^2 - m_c^2}{m_b U^2} f \left( \frac{\bar{M}_D^2 - m_c^2}{m_b U} \right) \theta \left( U - \frac{\bar{M}_D^2 - m_c^2}{m_b} \right). \quad (4.118)$$

Wir verwenden bei der im Folgenden präsentierten Diskussion der Effekte des physikalischen  $U$ -Spektrums die Parametrisierung

$$f(y) = \frac{\Gamma(2 + \alpha + \beta)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)} y^\alpha (1 - y)^\beta. \quad (4.119)$$

Die Parameter  $\alpha = 3,66$  und  $\beta = -0,51$  legen wir aus der Forderung fest, dass  $F_c(\Delta)$  für  $\Delta = 0,65$  GeV und  $d\Gamma_c/dU$  für  $U = 0,55$  GeV mit den entsprechenden theoretischen Ausdrücken im PS-Schema übereinstimmen.<sup>4</sup>

<sup>3</sup>Wir setzen „klein“ hier in Anführungszeichen, denn es gilt  $(M_D^2 - m_c^2)/m_b \simeq 0,35$  GeV im PS-Schema.

<sup>4</sup> Der Bezugspunkt für  $F_c(\Delta)$  muss weit genug unterhalb des kritischen Wertes  $\Delta_{\text{max}} = 0,7$  GeV liegen. Der Bezugspunkt für  $d\Gamma_c/dU$  muss weit genug oberhalb der exklusiven Schwelle  $U_{\text{min}} \simeq 0,45$  GeV liegen.

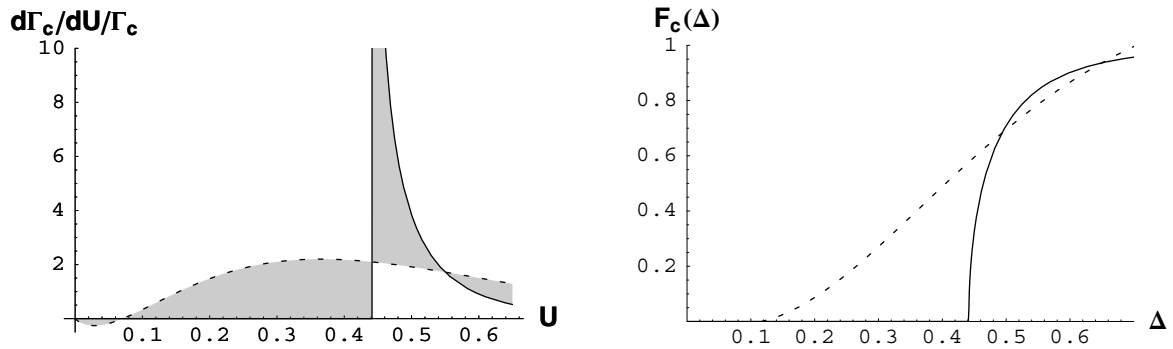


Abbildung 4.9:  $U$ -Spektrum (links) und  $F_c(\Delta)$  (rechts) im Spielmodell (durchgezogene Linie) und laut theoretischer Vorhersage (gepunktete Linie).

Das linke Bild in Abbildung 4.9 vergleicht für das  $U$ -Spektrum die Vorhersage im Spielmodell (durchgezogene Linie) mit der theoretischen Vorhersage (4.102) im PS-Schema (gepunktete Linie), wobei dort für die Shapefunktion das Modell (4.110) im Standard-Szenario S5 verwendet wird. Das rechte Bild zeigt den entsprechenden Vergleich für das bis zum Abschneideparameter  $\Delta$  integrierte  $U$ -Spektrum.

Abbildung 4.10 zeigt durch Verwendung der Gewichtsfunktion und des Spielmodells für das  $U$ -Spektrum mit (4.112) erhaltene Vorhersagen für  $F_u(\Delta)$  in verschiedenen Massenschemen: Vorhersage im Polschema (gepunktete Linie), Vorhersage im PS-Schema (durchgezogene Linie), Vorhersage im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema (gestrichelte Linie). Ebenfalls eingezeichnet ist das direkte theoretische Ergebnis (4.89) für  $F_u(\Delta)$  (dicke graue Linie), um das zu erhalten für die Shapefunktion wiederum das Modell (4.110) im Standard-Szenario S5 eingesetzt wurde. Für kleinere und mittlere Werte von  $\Delta$  ist die Abhängigkeit von der Resonanzstruktur und vom Massenschema ziemlich groß. Andererseits wird für größere Werte von  $\Delta$  die Resonanzstruktur verwaschen, und die Vorhersagen in verschiedenen Massenschemen konvergieren. Die Abhängigkeit von der Resonanzstruktur bei mittleren Werten von  $\Delta$  bedeutet, dass der phänomenologisch erlaubte Bereich für  $\Delta$  kleiner ist als im masselosen Fall, wo die Beiträge der Zustände  $\pi$ ,  $\eta$ ,  $\rho$  und  $\omega$  sich zu nur ungefähr 25% der totalen semileptonischen  $b \rightarrow u$ -Rate addieren und außerdem bei Werten für  $P_+$  konzentriert sind, die nicht viel größer als 0,1 GeV sind.

Aus diesen Beobachtungen müssen wichtige Folgerungen für die Bestimmung von  $|V_{ub}|$  aus der Beziehung zwischen den bis zum Abschneideparameter  $\Delta$  integrierten  $b \rightarrow u$ - und  $b \rightarrow c$ -Zerfallsspektren gezogen werden. Um nicht von der Resonanzstruktur des  $U$ -Spektrums zu  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  abhängig zu sein, muss der Abschneideparameter entsprechend groß sein. Andererseits muss er klein genug sein, um bei der Messung der Zerfallsrate zu  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  den Untergrund aus  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  zu unterdrücken. Aus diesen beiden Forderungen folgt ein ziemlich schmales Intervall für den Abschneideparameter  $\Delta$ .

Außerdem stellen wir fest, dass die Vorhersage für  $F_u(\Delta)$  aus der Gewichtsfunktion und dem Spielmodell für das  $U$ -Spektrum das „wahre“ theoretische Ergebnis (4.89) systematisch

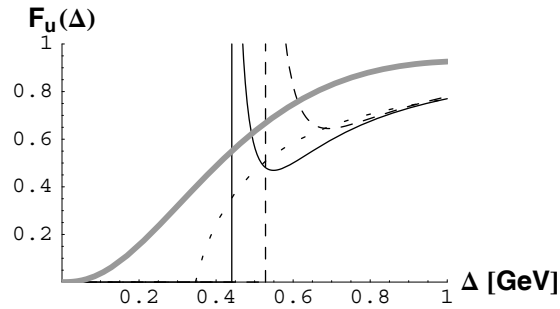


Abbildung 4.10: Vorhersagen für  $F_u(\Delta)$  unter Verwendung der Gewichtsfunktion und des Spielmodells für das  $U$ -Spektrum in verschiedenen Massenschemen und Vergleich mit dem direkten theoretischen Ergebnis.

unterschätzt. So gilt z.B. an unserem Bezugspunkt  $\Delta = 0,65$  GeV

$$F_u(0,65 \text{ GeV}) = 0,79 \quad \text{aus (4.89),} \quad (4.120)$$

$$F_u(0,65 \text{ GeV}) = 0,55 \quad \text{aus dem Spielmodell und (4.112), PS-Schema.} \quad (4.121)$$

Diese Diskrepanz ist zumindest teilweise der Einfachheit unseres Modells zuzuschreiben, das das nicht zu vernachlässigende Kontinuum überhaupt nicht beachtet. Es wäre möglich, das Modell entsprechend zu verbessern. Das hier vorgestellte Modell beinhaltet jedoch mit der Resonanzstruktur den entscheidenden Teil des Spektrums, um die bei der Verwendung der hier präsentierten Methode zur Bestimmung von  $|V_{ub}|$  zu beachtenden Aspekte zu illustrieren. Ist das  $U$ -Spektrum zu  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  aus dem Experiment bekannt, so kann mit der theoretisch berechneten Gewichtsfunktion und dem aus Experimenten bekannten  $P_+$ -Spektrum zu  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  mittels der hier vorgestellten Methode  $|V_{ub}|$  bestimmt werden.





# Kapitel 5

## Zusammenfassung und Ausblick

Die genaue Bestimmung der Beträge der CKM-Elemente  $V_{ub}$  und  $V_{cb}$  ist von zentraler Bedeutung, um die Unitarität der CKM-Matrix und somit den Quark-Flavour-Sektor des Standardmodells zu testen.  $|V_{ub}|/|V_{cb}|$  bestimmt gerade die Länge der Seite des Unitaritätsdreiecks, die dem aus der Messung der zeitabhängigen CP-Asymmetrie im goldenen Kanal  $B \rightarrow J/\psi K_S^0$  sehr genau bekannten Winkel  $\beta$  gegenüber liegt.

Der inklusive semileptonische Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  liefert den genauesten Wert für  $|V_{cb}|$ , während  $|V_{ub}|$  sowohl aus  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  als auch aus dem exklusiven Zerfall  $\bar{B} \rightarrow \pi \ell \bar{\nu}_\ell$  präzise bestimmt werden kann [37].

Die differentielle Rate zum Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  kann mittels der Heavy Quark Expansion (HQE) in  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$  entwickelt werden. Die HQE als theoretische Grundlage liefert zusammen mit den experimentellen Messungen der Zerfallsrate sowie der Momente bezüglich der Leptonenergie, der hadronisch invarianten Masse und der hadronischen Energie neben der exaktesten Bestimmung von  $|V_{cb}|$  eine der genauesten Bestimmungen der schweren Quarkmassen  $m_b$  und  $m_c$ . Die theoretische Unsicherheit dieser Größen kann einerseits durch die Berechnung höherer Ordnungen in der störungstheoretischen Entwicklung in  $\alpha_s$  sowie andererseits durch die Berechnung höherer Ordnungen in der nichtstörungstheoretischen Reihe, der Entwicklung in  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ , verringert werden. Beiträge bis Ordnung  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^4$  sind auf Baumgraphenniveau bekannt. Zur führenden Ordnung der HQE sind die  $\alpha_s$ -Korrekturen sowie die BLM-Korrekturen höherer Ordnung in  $\alpha_s$  bekannt. Die größten theoretischen Unsicherheiten kommen somit aus den gesamten  $\alpha_s^2$ -Korrekturen zur führenden Ordnung sowie aus dem ersten gemischten Term in der störungstheoretischen und nichtstörungstheoretischen Entwicklung, den  $\alpha_s$ -Beiträgen zu den  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2$ -Termen.

In dieser Arbeit wurde ein geeigneter Formalismus zur Behandlung von QCD-Strahlungskorrekturen der Ordnung  $\alpha_s$  zum Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  entwickelt. Dieser beinhaltet die Parametrisierung des Phasenraums und die Berechnung der Schleifenintegrale in Dimensionaler Regularisierung. Da die Infrarot-Divergenzen der einzelnen Diagramme mittels Dimensionaler Regularisierung – und nicht durch Einführen einer Gluonmasse – behandelt werden, bleibt bei Verwendung dieser Methode die Eichinvarianz erhalten. Die mehrdimensionalen Phasenraum- und Schleifenintegrale werden numerisch unter Verwendung des Integrationsalgorithmus **Vegas** berechnet.

Mittels dieses Formalismus wurden die  $\alpha_s$ -Korrekturen zur Zerfallsrate sowie den hadronischen und leptonischen Momenten auf Partonniveau berechnet. Hierbei wurden mit

hoher numerischer Genauigkeit bereits bekannte Ergebnisse [60] durch eine unabhängige Rechnung mit anderen Methoden reproduziert. Dies stellt eine wichtige Gegenprobe der in [60] präsentierten Ergebnisse dar, insbesondere da die Ergebnisse aus [60] nie im Detail mit [58] verglichen wurden.

Die Berechnung der  $\alpha_s$ -Korrekturen auf Partonniveau bildet den ersten Schritt zur Berechnung der  $\alpha_s$ -Korrekturen zu den  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2$ -Termen. Der hier vorgestellte Formalismus wurde speziell in Hinblick auf die Berechnung dieser Korrekturen entwickelt. So berechnete Ergebnisse für die  $\alpha_s$ -Korrekturen zu den Termen, die proportional zum Erwartungswert  $\mu_\pi^2$  der kinetischen Energie sind, werden in [63] präsentiert. Da die hier entwickelte Methode die Eichinvarianz erhält, eignet sie sich insbesondere auch zur Berechnung der  $\alpha_s$ -Korrekturen zu den weiteren  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2$ -Termen, also zu den Ausdrücken, die proportional zum Erwartungswert  $\mu_G^2$  des chromomagnetischen Moments sind. Sind neben diesen Korrekturen auch die  $\alpha_s^2$ -Korrekturen zur führenden Ordnung der HQE bekannt, so wird die theoretische Unsicherheit der Bestimmung von  $|V_{cb}|$  aus  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  voraussichtlich weniger als 1% betragen.

Die Bestimmung von  $|V_{ub}|$  aus  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  wird dadurch erschwert, dass die totale Rate in einem großen Teil des Phasenraums aufgrund eines großen Untergrunds aus  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  nicht gemessen werden kann. Daher ist es nötig, Schnitte im Phasenraum einzuführen. Daten für inklusive  $b \rightarrow u \ell \bar{\nu}_\ell$ -Übergänge sind dann durch den Phasenraumbereich dominiert, wo der hadronische Jet im Endzustand eine große Energie von Ordnung  $m_b$ , aber eine kleine invariante Masse von Ordnung  $\sqrt{\Lambda_{\text{QCD}} m_b}$  trägt. Da die theoretisch berechnete Zerfallsrate in diesem Phasenraumbereich proportional zu nichtstörungstheoretischen Objekten, den Shapefunktionen, ist, spricht man auch von der „Shapefunktions-Region“. Die theoretische Beschreibung von Zerfällen in der Shapefunktions-Region geschieht unter Verwendung von Soft-Collinear Effective Theory (SCET). Eine Entwicklung in inversen Potenzen der Masse des schweren Quarks ist möglich, diese wird aber im Gegensatz zur HQE, wo lokale Operatoren auftreten, durch nichtlokale Operatoren auf dem Lichtkegel vermittelt.

Durch die Abhängigkeit der Zerfallsrate von den Shapefunktionen ergeben sich hadronische Unsicherheiten bei der Bestimmung von  $|V_{ub}|$ . Die größten Unsicherheiten entstehen dabei durch die in führender Ordnung in der  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Entwicklung auftretende Shapefunktion. Sie beinhaltet nur Eigenschaften des  $B$ -Mesons und ist daher für alle inklusiven  $B$ -Zerfälle gleich.

Es gibt zwei Möglichkeiten, mit diesen hadronischen Unsicherheiten umzugehen bzw. sie aus der Bestimmung von  $|V_{ub}|$  zu eliminieren: entweder man verwendet die aus einem anderen Prozess extrahierte Shapefunktion als Eingabe für  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$ , oder man konstruiert eine von der Shapefunktion unabhängige Beziehung zwischen Zerfallsverteilungen in  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  und einem anderen Prozess. In diesem Zusammenhang wird am Häufigsten und sehr erfolgreich der Prozess  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  verwendet.

In dieser Arbeit wurden im Zerfallskanal  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  ähnliche Schnitte im Phasenraum eingeführt wie bei  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$ . Wenn die Charm-Quark-Masse als  $m_c \sim \sqrt{m_b \Lambda_{\text{QCD}}}$  gezählt wird, ist es möglich, auch den Zerfall  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  in der Shapefunktions-Region unter Verwendung von SCET zu beschreiben. Die dazu benötigte Erweiterung von SCET zur Beschreibung massiver kollinearere Quarks ist in dieser Arbeit durchgeführt worden. Die La-

---

grangedichte für ein massives kollineares Quark, das mit weichen und kollinearen Gluonen wechselwirkt, wurde ebenso wie die entsprechenden  $b \rightarrow c$ -Ströme konstruiert. Die Faktorisierung von Observablen zur jeweils betrachteten Ordnung in der Entwicklung in  $\alpha_s$  und  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$  in ein Produkt einer harten Funktion mit einer Faltung von Jetfunktionen und Shapefunktionen wurde anhand der mittels effektiver Feldtheoriemethoden berechneten differentiellen  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$ -Zerfallsrate gezeigt. Hierdurch wird die physikalische Dynamik an den drei beteiligten Skalen  $m_b \gg \sqrt{\Lambda_{\text{QCD}} m_b} \gg \Lambda_{\text{QCD}}$  voneinander getrennt.

Aus der differentiellen Zerfallsrate wurden Zerfallsspektren zu  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  berechnet. Da für die Extraktion von  $|V_{ub}|$  aus  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  das Spektrum in der Variablen  $P_+$  besonders geeignet ist, wurde hier dem Spektrum in der Variablen  $U$ , die die Verallgemeinerung von  $P_+$  für den massiven Fall ist, besondere Aufmerksamkeit gewidmet.

Bei der zunächst durchgeführten Berechnung des  $U$ -Spektrums zu  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  in nächstführender Ordnung in der  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Entwicklung auf Baumgraphenniveau treten neben der führenden Shapefunktion nächstführende Shapefunktionen und effektive Shapefunktionen auf. Diese sind bis auf eine Ausnahme gleich wie für  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$ . Die zusätzliche effektive Shapefunktion, deren Beitrag für  $m_c \rightarrow 0$  verschwindet, zeigt, dass das massive Charm-Quark im Endzustand nicht nur für kinematische Korrekturen verantwortlich ist, sondern auch neue nichtstörungstheoretische Strukturen mit sich bringt. Um einen Vergleich des  $U$ -Spektrums in der Shapefunktions-Region mit dem entsprechenden Ergebnis in lokaler HQE durchzuführen, wurden für die Shapefunktionen ihre aus den Momenten folgende Entwicklung in Distributionen eingesetzt. Dabei ist die Entwicklung der zusätzlichen effektiven Shapefunktion vollkommen durch die führende Shapefunktion bestimmt. Hieraus folgt, dass in dem Phasenraumbereich, wo die lokale HQE gilt, die Effekte der Charm-Quark-Masse rein kinematischer Natur sind und keine neuen nichtstörungstheoretischen Strukturen auftreten. Da die führende Shapefunktion gleich ist wie für  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$ , kann sie aus dem  $U$ -Spektrum in  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  extrahiert und als Eingabe für das  $P_+$ -Spektrum in  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  verwendet werden. Dies ermöglicht bei bekanntem  $|V_{cb}|$  die Bestimmung von  $|V_{ub}|$ .

Weiterhin wurden für  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  in der Shapefunktions-Region Strahlungskorrekturen der Ordnung  $\alpha_s$  zur führenden Ordnung in der  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Entwicklung berechnet. Die harte Funktion und die hier vorkommende, führende Shapefunktion sind die gleichen wie für  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$ , nur die Jetfunktion hängt von der Charm-Quark-Masse ab. Nach der Berechnung der Jetfunktion für  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  wurde ein Vergleich des durch Verwendung effektiver Feldtheoriemethoden erzielten Ergebnisses für den hadronischen Tensor mit dem hadronischen Tensor in voller QCD durchgeführt. Aus der differentiellen Zerfallsrate ergibt sich das bis zur einer oberen Grenze  $\Delta$  integrierte  $U$ -Spektrum, das den Anteil aller  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$ -Ereignisse mit  $U < \Delta$  beschreibt. Für das integrierte  $U$ -Spektrum wurden unter Verwendung verschiedener Renormierungsschemata für die Charm-Quark-Masse und verschiedener Modelle für die Shapefunktion erzielte Ergebnisse angegeben. Außerdem erfolgte eine Abschätzung der systematischen Unsicherheit aufgrund höherer Ordnungen in der  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Entwicklung. Schließlich wurde eine von der Shapefunktion unabhängige Beziehung zwischen dem  $P_+$ -Spektrum in  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$  und dem  $U$ -Spektrum in  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  durch Konstruktion einer Gewichtsfunktion zur Ordnung  $\alpha_s$  aufgestellt. Sind die beiden Spektren aus dem Experiment bekannt, so kann unter Verwendung der theoretisch berechneten

Gewichtsfunktion  $|V_{ub}|/|V_{cb}|$  bestimmt werden. Der hieraus mit bekanntem  $|V_{cb}|$  bestimmte Wert von  $|V_{ub}|$  kann als unabhängige Gegenprobe zu aus anderen Kombinationen von Zerfällen, insbesondere aus  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  mit  $\bar{B} \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}_\ell$ , bestimmten Werten für  $|V_{ub}|$  dienen.

# Anhang A

## Distributionen

Der Begriff der Distribution ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der Funktion. Daher werden Distributionen mitunter auch als *verallgemeinerte Funktionen* bezeichnet [115, 116]. Eine Distribution ist eine lineare und stetige Abbildung eines Testfunktionsraums auf die reellen Zahlen. Die hier vorgestellten Distributionen sind jeweils durch das Integral über eine reguläre Testfunktion definiert.

### A.1 Die Delta-Distribution

Die Delta-Distribution - auch als Diracsche Delta-Funktion bezeichnet - ist durch die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) f(x) = f(0) \quad (\text{A.1})$$

definiert, die für jede im Ursprung definierte Funktion  $f(x)$  gültig ist. Allgemeiner wird  $\delta(x - x_0)$  definiert durch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0). \quad (\text{A.2})$$

Für beliebige Integrationsgrenzen  $a$  und  $b$  gilt

$$\int_a^b dx \delta(x - x_0) f(x) = \begin{cases} f(x_0) & \text{für } a \leq x_0 \leq b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Insbesondere gilt mit  $M > 0$

$$\int_{\leq 0}^M dx \delta(x) f(x) = f(0). \quad (\text{A.4})$$

Der Ausdruck  $\leq 0$  an der unteren Integrationsgrenze ist eine andere Schreibweise für eine infinitesimale Verschiebung der unteren Integrationsgrenze nach links. Es wird also eigentlich von  $0 - \epsilon$  ( $\epsilon > 0$ , infinitesimal) bis  $M$  integriert. Die 0 gehört somit noch vollständig zum Integrationsintervall, und das Integral nimmt den Wert  $f(0)$  an.

Für die Delta-Distribution gilt

$$\delta[g(x)] = \sum_j \frac{1}{|g'(x_j)|} \delta(x - x_j). \quad (\text{A.5})$$

$g'(x)$  ist die Ableitung der Funktion  $g(x)$ , die Summation erfolgt über die einfachen Nullstellen  $x_j$  von  $g(x)$ .

Außerdem gilt

$$\int dx e^{ikx} = (2\pi)\delta(k) \quad (\text{A.6})$$

bzw. in vier Raum-Zeit-Dimensionen

$$\int d^4x e^{ikx} = (2\pi)^4 \delta^4(k). \quad (\text{A.7})$$

### Integral und Ableitung der Delta-Distribution

Die Delta-Distribution ist die Ableitung der Heavisideschen Sprungfunktion

$$\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x), \quad (\text{A.8})$$

für die gilt

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Die Ableitung der Delta-Distribution ist durch partielle Integration definiert als

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta'(x) f(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) f'(x) = -f(0). \quad (\text{A.10})$$

Auf die gleiche Weise kann die  $n$ . Ableitung  $\delta^{(n)}(x)$  definiert werden als

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta^{(n)}(x) f(x) = (-1)^n f^{(n)}(0). \quad (\text{A.11})$$

Hieraus folgt

$$\delta^{(n)}(-x) = (-1)^n \delta^{(n)}(x) \quad (\text{A.12})$$

und

$$x \delta^{(n)}(x) = -n \delta^{(n-1)}(x). \quad (\text{A.13})$$

## A.2 Die Plus-Distribution

Die Plus-Distribution ist definiert als

$$\int_{\leq 0}^M dx \left(\frac{1}{x}\right)_+ f(x) = \int_0^M dx \frac{f(x) - f(0)}{x}. \quad (\text{A.14})$$

Hierbei ist  $f(x)$  eine beliebige reguläre Funktion und  $M > 0$ .  $f(x)/x$  und  $f(0)/x$  haben die gleichen Polstellen. Diese werden in der Differenz der beiden Ausdrücke abgezogen, es ergibt sich ein endliches Integral.

### A.3 Stern-Distributionen

Bei den Stern-Distributionen handelt es sich um Verallgemeinerungen der Plus-Distributionen, sie sind definiert als [109]

$$\int_{\leq 0}^M dx f(x) \left(\frac{1}{x}\right)_*^{[m]} = \int_0^M dx \frac{f(x) - f(0)}{x} + f(0) \ln\left(\frac{M}{m}\right), \quad (\text{A.15})$$

$$\int_{\leq 0}^M dx f(x) \left(\frac{\ln(x/m)}{x}\right)_*^{[m]} = \int_0^M dx \frac{f(x) - f(0)}{x} \ln\left(\frac{x}{m}\right) + \frac{f(0)}{2} \ln^2\left(\frac{M}{m}\right),$$

wobei  $f(x)$  eine beliebige reguläre Testfunktion ist. Für die Stern-Distributionen gelten folgende nützliche Identitäten [67]

$$\lambda \left(\frac{1}{\lambda x}\right)_*^{[m]} = \left(\frac{1}{x}\right)_*^{[m/\lambda]} = \left(\frac{1}{x}\right)_*^{[m]} + \delta(x) \ln \lambda,$$

$$\lambda \left(\frac{\ln(\lambda x/m)}{\lambda x}\right)_*^{[m]} = \left(\frac{\ln(\lambda x/m)}{x}\right)_*^{[m/\lambda]} = \left(\frac{\ln(x/m)}{x}\right)_*^{[m]} + \left(\frac{1}{x}\right)_*^{[m]} \ln \lambda + \frac{\delta(x)}{2} \ln^2 \lambda. \quad (\text{A.16})$$





# Anhang B

## Komplexe Analysis

Der komplexe Logarithmus kann gemäß

$$\ln(-X \pm i\epsilon) = \pm i\pi\theta(X) + \ln|X| \quad (\text{B.1})$$

in Realteil und Imaginärteil zerlegt werden.

### B.1 Imaginärteile

Der Imaginärteil eines Produkts zweier komplexer Ausdrücke ergibt sich aus

$$\text{Im}(A \cdot B) = \text{Im}(A)\text{Re}(B) + \text{Re}(A)\text{Im}(B). \quad (\text{B.2})$$

Folgende Imaginärteile sind für uns von Interesse

$$\text{Im}[\ln(-X \pm i\epsilon)] = \pm\pi\theta(X), \quad (\text{B.3})$$

$$\text{Im}\left[\frac{1}{X \pm i\epsilon}\right] = \mp\pi\delta(X), \quad (\text{B.4})$$

$$\text{Im}\left[\frac{1}{(X \pm i\epsilon)^2}\right] = \pm\pi\delta'(X), \quad (\text{B.5})$$

$$-\frac{1}{\pi}\text{Im}[\text{Li}_2(-X - i\epsilon)] = \ln|X|\theta(-X - 1). \quad (\text{B.6})$$

Außerdem gilt

$$-\frac{1}{\pi}\text{Im}\left[\ln\left(-\frac{X}{m} - i\epsilon\right)\frac{1}{X + i\epsilon}\right] = \left(\frac{1}{X}\right)_*^{[m]}, \quad (\text{B.7})$$

$$-\frac{1}{\pi}\text{Im}\left[\ln^2\left(-\frac{X}{m} - i\epsilon\right)\frac{1}{X + i\epsilon}\right] = 2\left(\frac{\ln(X/m)}{X}\right)_*^{[m]} - \frac{\pi^2}{3}\delta(X) \quad (\text{B.8})$$

mit den in A.3 angegebenen Stern-Distributionen. Mit

$$\begin{aligned} \text{Li}_2\left(1 + \frac{m}{X + i\epsilon}\right) &= -\frac{1}{2}\ln^2\left(-\frac{X}{m} - i\epsilon\right) - \frac{\pi^2}{6} + \ln\left(-\frac{X}{m} - i\epsilon\right)\ln\left(1 + \frac{X}{m} + i\epsilon\right) \\ &\quad + \text{Li}_2\left(-\frac{X}{m} - i\epsilon\right) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

erhält man unter Verwendung von (B.2), (B.6), (B.7) und (B.8)

$$-\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[ \operatorname{Li}_2 \left( 1 + \frac{m}{X + i\epsilon} \right) \frac{1}{X + i\epsilon} \right] = - \left( \frac{\ln(X/m)}{X} \right)_*^{[m]} + \frac{1}{X} \ln \left| 1 + \frac{X}{m} \right| \theta(X). \quad (\text{B.10})$$

# Anhang C

## Phasenraumparametrisierungen

In diesem Abschnitt werden weitere mögliche Parametrisierungen des vier-Körper-Phasenraums  $b \rightarrow c + g + \ell + \bar{\nu}$  sowie des drei-Körper-Phasenraums  $b \rightarrow c + \ell + \bar{\nu}$  vorgestellt. Diese können bei der Berechnung des  $\alpha_s$ -Korrekturen auf Partonniveau ebenso wie die in Abschnitt 3.5.1 eingeführte Parametrisierung verwendet werden. Sie bieten insofern die Möglichkeit, auf Partonniveau die in Abschnitt 3.5.1 vorgestellte Phasenraumparametrisierung sowie die numerische Genauigkeit der zur Berechnung der  $\alpha_s$ -Korrekturen verwendeten Methode zu überprüfen. Die hier präsentierten Phasenraumparametrisierungen haben im Vergleich mit der in Abschnitt 3.5.1 vorgestellten Parametrisierung den Nachteil, dass hier die Leptonenergie nicht als Integrationsparameter auftritt. Dies verkompliziert das Einführen eines Schnitts auf die Leptonenergie. Daher sind die hier präsentierten Phasenraumparametrisierungen insbesondere zur Berechnung der  $\alpha_s$ -Korrekturen zu den  $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^2$ -Termen weniger gut geeignet als die in Abschnitt 3.5.1 vorgestellte.

### C.1 weitere Möglichkeit zur Aufspaltung des vier-Körper-Phasenraums

Im Unterschied zur in Abschnitt 3.5.1 gezeigten Aufspaltung teilen wir den Phasenraum nun so auf, dass das  $b$ -Quark zunächst in das Charm-Quark, das Gluon und einen Zustand  $A$  zerfällt, der dann in das masselose Lepton und das Lepton-Antineutrino übergeht.  $p_A$  ist der Gesamtimpuls des leptonischen Anteils im Endzustand, es gilt

$$p_A = p_b - p_c - p_g = p_\ell + p_\nu. \quad (\text{C.1})$$

Die Aufspaltung des Phasenraums nimmt folgende Form an:

$$\int [d\Pi_{b \rightarrow c+g+\ell+\bar{\nu}}] = \int \frac{dp_A^2}{2\pi} \int [d\Pi_{b \rightarrow A+c+g}] \int [d\Pi_{A \rightarrow \ell+\bar{\nu}}]. \quad (\text{C.2})$$

Die zur Berechnung eines vier-Körper-Phasenraums benötigten vier Parameter setzen sich zusammen aus insgesamt drei für das Integral über  $dp_A^2$  und den drei-Körper-Phasenraum und einem für den leptonischen zwei-Körper-Phasenraum.

### Der drei-Körper-Phasenraum $b \rightarrow A + c + g$ und das Integral über $dp_A^2$

Wir parametrisieren die Impulse in Abhängigkeit von den Energien und Winkeln als

$$p_b = (m_b, 0, 0, 0), \quad p_c = (E_c, 0, 0, \beta E_c), \quad p_g = (E_g, E_g s_1, 0, E_g c_1) \quad (\text{C.3})$$

und die Energien und Winkel in Abhängigkeit von den dimensionslosen Integrationsparametern  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  als

$$E_c = m_b \left( \delta + \bar{\delta}^2 \frac{\lambda_1}{2} \right), \quad E_g = m_b \frac{\bar{\delta}^2 \bar{\lambda}_1}{2\kappa_1} \lambda_2, \quad c_1 = 2\lambda_3 - 1 \quad (\text{C.4})$$

mit den dimensionslosen Größen

$$\delta = \frac{m_c}{m_b}, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{m_c^2}{E_c^2}}, \quad \kappa_1 = 1 - (1 - \beta c_1) \frac{E_c}{m_b}. \quad (\text{C.5})$$

Alle drei Integrationsparameter  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  nehmen Werte zwischen Null und 1 an. Wir haben somit auch hier die Integrationsgrenzen des Phasenraums auf einen Einheitswürfel abgebildet.

Der Integrationsparameter  $\lambda_1$  parametrisiert die Energie des Charm-Quarks. Die Energie des Charm-Quarks nimmt Werte zwischen  $m_c$  und  $m_b(1 + \delta^2)/2$  an.  $c_1$  und  $s_1$  sind der Cosinus und Sinus des Winkels zwischen Charmimpuls und Gluonimpuls,  $\lambda_3$  parametrisiert diesen Winkel.  $\lambda_2$  beschreibt die Gluonenergie, die durch die Energie des Charm-Quarks und die Energie, die auf das leptonische System übertragen wird, eingeschränkt ist.

In Abhängigkeit von den dimensionslosen Größen ergibt sich das Phasenraumintegral zu

$$\begin{aligned} & \int_0^{m_b^2} \frac{dp_A^2}{2\pi} \int [d\Pi_{b \rightarrow A+c+g}] \\ &= \frac{\Omega_{D-1} \Omega_{D-2} m_b^{4-4\epsilon}}{2^{D+1} (2\pi)^{2D-2}} \int_0^1 d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 \bar{\delta}^{6-4\epsilon} \bar{\lambda}_1^{2-2\epsilon} \kappa_1^{2\epsilon-2} (\beta (\lambda_1 \bar{\delta}^2 + 2\delta) \lambda_2)^{1-2\epsilon} (\bar{\lambda}_3 \lambda_3)^{-\epsilon}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Hier haben wir zum Teil bereits die Ersetzung  $D \rightarrow 4 - 2\epsilon$  durchgeführt.  $\Omega_D$  ist die in (3.42) definierte Oberfläche der  $D$ -dimensionalen Einheitskugel.

### Möglichkeit den drei-Körper-Phasenraum $b \rightarrow c + \ell + \bar{\nu}$ zu erhalten

Auch aus (C.6) ist es möglich, den auf Baumgraphenniveau sowie für die Berechnung der virtuellen Korrekturen benötigten drei-Körper-Phasenraum  $b \rightarrow c + \ell + \bar{\nu}$  zu erhalten. Man ersetzt das Gluon durch das Elektron und verwendet die Parametrisierung des Gluonimpulses  $p_g$  für den Elektronimpuls. Das verbleibende Teilchen  $A$  ist dann das Neutrino. Man multipliziert (C.6) mit  $2\pi\delta(p_A^2) = 2\pi\delta((m_b - m_c)^2 \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_1)$  und integriert über  $\lambda_2$ . Als Ergebnis erhält man den drei-Körper-Phasenraum  $b \rightarrow c + \ell + \bar{\nu}$  in Abhängigkeit der Integrationsparameter  $\lambda_1$  und  $\lambda_3$ .

**Der zwei-Körper-Phasenraum  $A \rightarrow \ell + \bar{\nu}$** 

Wir teilen den Leptonimpuls  $\vec{p}_\ell$  in einen Teil in Richtung des Gesamtimpulses des leptoni- schen Anteils im Endzustand  $\vec{p}_A$  und einen hierzu senkrechten Anteil  $\vec{p}_\perp$  auf und schreiben den Viererimpuls des Leptons als

$$p_\ell = (E_\ell, 0, 0, 0) + E_\ell c_2 \left( 0, \frac{\vec{p}_A}{|\vec{p}_A|} \right) + E_\ell s_2 \left( 0, \vec{p}_\perp \right) \quad (\text{C.7})$$

mit  $\vec{p}_A \cdot \vec{p}_\perp = 0$  und  $\vec{p}_\perp^2 = 1$ .  $c_2$  und  $s_2$  sind der Cosinus und Sinus des Winkels zwischen Leptonimpuls  $\vec{p}_\ell$  und dem Gesamtimpuls des leptonischen Anteils im Endzustand  $\vec{p}_A$ . Der Cosinus des Winkels lässt sich in Abhängigkeit vom Impuls und der Energie des leptonischen Anteils sowie von der Leptonenergie ausdrücken als

$$c_2 = \frac{2E_A E_\ell - p_A^2}{2|\vec{p}_A| E_\ell}. \quad (\text{C.8})$$

Für den zwei-Körper-Phasenraum erhält man

$$\int [d\Pi_{A \rightarrow \ell + \bar{\nu}}] = \frac{1}{2^2 (2\pi)^{D-2}} \int_{E_-}^{E_+} dE_\ell (E_\ell s_2)^{D-4} \frac{1}{|\vec{p}_A|} \int d^{D-2} p_\perp \quad (\text{C.9})$$

mit den Grenzen

$$E_\pm = \frac{E_A \pm |\vec{p}_A|}{2}, \quad (\text{C.10})$$

was Werten für  $c_2$  von  $-1$  bis  $1$  entspricht. Wir führen eine Substitution hin zu einem neuen Integrationsparameter  $\lambda_4$  durch, der wie die Integrationsparameter des drei-Körper-Phasenraums Werte von Null bis  $1$  annimmt. Für den Zusammenhang zwischen der Leptonenergie und  $\lambda_4$  gilt

$$E_\ell = \frac{E_A - |\vec{p}_A|(1 - 2\lambda_4)}{2}. \quad (\text{C.11})$$

Als Ergebnis für den zwei-Körper-Phasenraum in Abhängigkeit vom Integrationsparameter  $\lambda_4$  ergibt sich

$$\int [d\Pi_{A \rightarrow \ell + \bar{\nu}}] = \frac{1}{2^2 (2\pi)^{D-2}} \int_0^1 d\lambda_4 (p_A^2 \lambda_4 \bar{\lambda}_4)^{\frac{D-4}{2}} \int d^{D-2} p_\perp. \quad (\text{C.12})$$

Die in (3.24) definierten Nenner  $N_b$  und  $N_c$  der reellen Diagramme sind unabhängig von  $p_\perp$ . Die einzige Abhängigkeit der Diagramme von  $p_\perp$  kommt aus Skalarprodukten von  $p_\perp$  mit hadronischen Impulsen im Zähler der Diagramme. Bei Integration über den Einheitsvektor  $\vec{p}_\perp$  tragen nur folgende Integrale bei:

$$\int d^{D-2} p_\perp \{1, p_\perp^i p_\perp^j\} = \left\{ 1, \frac{1}{D-2} \delta^{ij} \right\} \Omega_{D-2}. \quad (\text{C.13})$$

Hierbei ist  $\delta^{ij}$  die Metrik im  $(D-2)$ -dimensionalen Unterraum, es gilt  $\delta_i^i = D-2$ .

Den vier-Körper-Phasenraum erhält man durch Zusammensetzen von (C.6) und (C.12) gemäß (C.2).

## C.2 weitere Möglichkeit zur Darstellung des drei-Körper-Phasenraums

Eine naheliegende Möglichkeit, den auf Baumgraphenniveau und bei den virtuellen Korrekturen benötigten drei Körper-Phasenraum  $b \rightarrow c + \ell + \bar{\nu}$  zu erhalten, besteht darin, aus der in Abschnitt C.1 gezeigten Parametrisierung für den vier-Körper-Phasenraum  $b \rightarrow c + g + \ell + \bar{\nu}$  alle Effekte des Gluons zu entfernen. Die Aufspaltung des Phasenraums nimmt folgende Form an:

$$\int [d\Pi_{b \rightarrow c + \ell + \bar{\nu}}] = \int \frac{dp_A^2}{2\pi} \int [d\Pi_{b \rightarrow A + c}] \int [d\Pi_{A \rightarrow \ell + \bar{\nu}}]. \quad (\text{C.14})$$

Die Formeln (C.3) bis (C.5) vereinfachen sich durch Entfernen aller Effekte des Gluons deutlich. Anstelle (C.6) erhält man

$$\int_0^{m_b^2} \frac{dp_A^2}{2\pi} \int [d\Pi_{b \rightarrow A + c}] = \frac{\Omega_{D-1} m_b^{2-2\epsilon}}{2^2 (2\pi)^{D-1}} \int_0^1 d\lambda_1 \bar{\delta}^2 \left( \beta \left( \lambda_1 \frac{\bar{\delta}^2}{2} + \delta \right) \right)^{1-2\epsilon}. \quad (\text{C.15})$$

Am leptonischen zwei-Körper-Phasenraum ändert sich gegenüber Abschnitt C.1 nichts. Wir können die Formeln (C.7) bis (C.13) verwenden und erhalten so den drei-Körper-Phasenraum  $b \rightarrow c + \ell + \bar{\nu}$  in Abhängigkeit von den Integrationsparametern  $\lambda_1$  und  $\lambda_4$ .

## C.3 direkte Parametrisierung des vier-Körper-Phasenraums

Es ist auch möglich, den vier-Körper-Phasenraum  $b \rightarrow c + g + \ell + \bar{\nu}$  direkt in Abhängigkeit von fünf Integrationsparametern auszudrücken. Wir parametrisieren die Impulse in Abhängigkeit von den Energien und Winkeln als

$$p_b = (m_b, 0, 0, 0), \quad p_c = (E_c, 0, 0, \beta E_c), \quad (\text{C.16})$$

$$p_\ell = (E_\ell, E_\ell s_1, 0, E_\ell c_1), \quad p_g = (E_g, E_g s_2 c_\phi, E_g s_2 s_\phi, E_g c_2) \quad (\text{C.17})$$

und die Energien und Winkel in Abhängigkeit von den dimensionslosen Integrationsparametern  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  und  $\lambda_5$  als

$$c_1 = 2\lambda_3 - 1, \quad c_2 = 2\lambda_4 - 1, \quad c_\phi = 2\lambda_5 - 1, \quad (\text{C.18})$$

$$E_c = m_b \left( \delta + \bar{\delta}^2 \frac{\lambda_1}{2} \right), \quad E_\ell = m_b \frac{\bar{\delta}^2 \bar{\lambda}_1}{2\kappa_1} \bar{\lambda}_2, \quad E_g = m_b \frac{\bar{\delta}^2 \kappa_1 \bar{\lambda}_1}{2\kappa_{12}} \lambda_2, \quad (\text{C.19})$$

mit den dimensionslosen Größen

$$\delta = \frac{m_c}{m_b}, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{m_c^2}{E_c^2}}, \quad \kappa_1 = 1 - (1 - \beta c_1) \frac{E_c}{m_b}, \quad (\text{C.20})$$

$$\kappa_{12} = \kappa_1 - (1 - \beta c_2) \kappa_1 \frac{E_c}{m_b} - \frac{1}{2} (1 - c_1 c_2 - s_1 s_2 c_\phi) \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\delta}^2.$$

Alle fünf Integrationsparameter  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$  nehmen Werte zwischen Null und 1 an. Wir haben somit auch hier die Integrationsgrenzen des Phasenraums auf einen Einheitswürfel abgebildet.

In Abhängigkeit von den dimensionslosen Größen ergibt sich das Phasenraumintegral zu

$$\int [d\Pi_{b \rightarrow \ell + \nu + c + g}] = \frac{\Omega_{D-1} \Omega_{D-2} \Omega_{D-3} m_b^{4-6\epsilon}}{2^7 (2\pi)^{3D-4}} \int_0^1 d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 d\lambda_4 d\lambda_5 \bar{\delta}^{8-8\epsilon} \bar{\lambda}_1^{3-4\epsilon} \kappa_{12}^{2\epsilon-2} (\beta (\lambda_1 \bar{\delta}^2 + 2\delta) \bar{\lambda}_2 \lambda_2)^{1-2\epsilon} (\bar{\lambda}_3 \lambda_3 \bar{\lambda}_4 \lambda_4)^{-\epsilon} (\bar{\lambda}_5 \lambda_5)^{-\epsilon - \frac{1}{2}}. \quad (\text{C.21})$$

Auch hier haben wir zum Teil bereits die Ersetzung  $D \rightarrow 4 - 2\epsilon$  durchgeführt.  $\Omega_D$  ist die in (3.42) definierte Oberfläche der  $D$ -dimensionalen Einheitskugel. Bei der hier vorliegenden Parametrisierung handelt es sich um die Verallgemeinerung des drei-Körper-Phasenraums (C.6) auf einen vier-Körper-Phasenraum. Nachteil dieser Parametrisierung ist die längere Rechenzeit und schlechtere numerische Genauigkeit, da über fünf anstelle in (3.36) und (C.2) vier Parameter integriert wird. Mittels der hier vorgestellten Parametrisierung ist es jedoch möglich, sowohl die mit anderen Phasenräumen gewonnenen Zahlenwerte für die Momente als auch deren numerischen Genauigkeit zu überprüfen.





# Anhang D

## Herleitung einiger in Abschnitt 4.2.1 benötigter Ausdrücke

In diesem Abschnitt soll die Herleitung einiger bei der Berechnung des hadronischen Tensors auf Baumgraphenniveau bis  $\mathcal{O}(\lambda^2)$  in Abschnitt 4.2.1 benötigter Ausdrücke gezeigt werden.

### D.1 Integraloperatoren

Der Integraloperator  $I_2$  (4.9) ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
 I_2 * f &\equiv - \int d^4x e^{ipx} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \frac{n_+k}{k^2 - m_c^2} f(x_+) \\
 &= - \int dx_+ e^{in_+px_+} \int \frac{dn_-k}{2\pi} e^{-i(n_-k)x_+} \frac{1}{n_-k - m_c^2/n_+p} f(x_+) \\
 &= - \int dx_+ e^{iu_+x_+} \int \frac{dn_-l}{2\pi} e^{-i(n_-l)x_+} \frac{1}{n_-l + i\epsilon} f(x_+) \\
 &= i \int_0^\infty dx_+ e^{iu_+x_+} f(x_+).
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

Hierbei ist  $x_+$  gemäß (2.60) definiert. Es gilt  $m_c^2 \triangleq m_c^2 - i\epsilon$  und  $n_+p > 0$ . Um die zweite Zeile zu erhalten, wurden die Impulsvektoren und der Ortsvektor laut (2.39) in Komponenten zerlegt und ein Teil der Integrale über Komponenten des Ortsvektors ausgeführt, so dass sich gemäß

$$\begin{aligned}
 \int d^4x e^{i(p-k)x} &= \int dx_+ d\left(\frac{n_-x}{2}\right) d^2x_\perp e^{i(n_+(p-k))(n_-x)/2} e^{i(p_\perp - k_\perp)x_\perp} e^{i(n_-(p-k))x_+} \\
 &= \int dx_+ (2\pi)^3 \delta(n_+(p-k)) \delta^2(p_\perp - k_\perp) e^{i(n_-(p-k))x_+}
 \end{aligned} \tag{D.2}$$

Delta-Distributionen (siehe (A.7)) von Komponenten des Impulsvektors ergaben. Anschließend wurden die Integrale über die entsprechenden Komponenten der Impulsvektoren ebenfalls ausgeführt. Die dritte Zeile von (D.1) ergibt sich durch die Substitution  $n_-l = n_-k - m_c^2/n_+p$ .

Die Herleitung von  $I_3$  (4.10) läuft analog zur hier gezeigten Herleitung von  $I_2$  ab.

Führt man durch Fouriertransformation den Übergang vom Ortsraum zum Impulsraum durch, so erhält man für Funktionen, auf die der Integraloperator  $I_2$  wirkt, den Ausdruck (4.24) durch die hier dargestellten Umformungen

$$\begin{aligned}
 I_2 * \tilde{f}(x_+) &= - \int dx_+ e^{iu x_+} \int \frac{dn_- k}{2\pi} e^{-in_- k x_+} \frac{1}{n_- k + i\epsilon} \int d\omega_1 e^{-i\omega_1 x_+} f(\omega_1) \\
 &= - \int d\omega_1 \int \frac{dn_- k}{2\pi} \int dx_+ e^{i(u - n_- k - \omega_1)x_+} \frac{1}{n_- k + i\epsilon} f(\omega_1) \\
 &= - \int d\omega_1 \int \frac{dn_- k}{2\pi} (2\pi) \delta(u - n_- k - \omega_1) \frac{1}{n_- k + i\epsilon} f(\omega_1) \\
 &= - \int d\omega_1 \frac{1}{u - \omega_1 + i\epsilon} f(\omega_1).
 \end{aligned} \tag{D.3}$$

Hierbei wurde zunächst die Fouriertransformierte der Funktion  $\tilde{f}$  (4.21) eingesetzt und danach die Integrale über  $x_+$  und  $n_- k$  ausgeführt, wobei wiederum (A.7) beachtet wurde.

Der Übergang zum Impulsraum geschieht für Funktionen, auf die der Integraloperator  $I_3$  wirkt, mit den gleichen Rechenschritten wie hier für den Integraloperator  $I_2$  gezeigt. So ergeben sich die Ausdrücke (4.25)-(4.28).

## D.2 Beitrag aus Einsetzungen der Lagrangedichte

Hier soll gezeigt werden, wie sich aus Einsetzungen von  $\mathcal{L}_{1\xi}^{(2)}$  (2.66) und  $J_1^{(2)}$  (2.75) ein Beitrag zum für  $m_c \rightarrow 0$  verschwindenden Teil der Vorwärtsstreuamplitude ergibt.

In  $\mathcal{L}_{1\xi}^{(2)}$  und  $J_1^{(2)}$  tritt jeweils  $n_- x/2$  auf, dies entspricht im Impulsraum

$$-\frac{i}{2} n_- \frac{\partial}{\partial k} = -i \frac{\partial}{\partial(n_+ k)}. \tag{D.4}$$

In den Ausdrücken  $J_1^{(2)\dagger} J^{(0)}$  und  $J^{(0)\dagger} J^{(0)} i \mathcal{L}_{1\xi}^{(2)}$  wirkt  $n_- x/2$  auf den Propagator  $G_\xi(x)$  (4.7) im Ortsraum bzw. (D.4) auf den Propagator  $G_\xi(k)$  im Impulsraum. Man erhält

$$-i \frac{\partial}{\partial(n_+ k)} \frac{in_+ k}{(n_+ k)(n_- k) - m_c^2} \frac{\not{n}_-}{2} = -m_c^2 \left( \frac{1}{n_+ k} \left( \frac{1}{n_- k - m_c^2/n_+ k} \right) \right)^2 \frac{\not{n}_-}{2}. \tag{D.5}$$

Man verwendet nun die Relation

$$\begin{aligned}
 & - \int dx_+ e^{in_- px_+} \int \frac{dn_- k}{2\pi} e^{-in_- kx_+} \left( \frac{1}{n_- k - m_c^2/n_{+p}} \right)^2 f(x_+) \\
 = & - \int dx_+ e^{in_- px_+} \int \frac{dn_- k}{2\pi} \frac{dn_- k'}{2\pi} (2\pi) \delta(n_-(k - k')) e^{-in_- kx_+} \\
 & \left( \frac{1}{n_- k - m_c^2/n_{+p}} \right) \left( \frac{1}{n_- k' - m_c^2/n_{+p}} \right) f(x_+) \\
 = & - \int dx_+ dz_+ e^{in_- px_+} \int \frac{dn_- k}{2\pi} \frac{dn_- k'}{2\pi} e^{-in_- k(x_+ - z_+)} e^{-in_- k' z_+} \\
 & \left( \frac{1}{n_- k - m_c^2/n_{+p}} \right) \left( \frac{1}{n_- k' - m_c^2/n_{+p}} \right) f(x_+) \\
 = & - iI_2 * \int_0^{x_+} dz_+ f(x_+) = -I_2 * (ix_+) f(x_+),
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

und die Relation (4.10), um die Gleichung (4.15)

$$\begin{aligned}
 J_1^{(2)\dagger} J^{(0)} + J^{(0)\dagger} J^{(0)} i\mathcal{L}_{1\xi}^{(2)} &= - \frac{m_c^2}{(n_{+p})^2} I_2 * (ix_+) \bar{h}_v(x_-) in_+ \overleftarrow{\partial} \bar{\Gamma} \frac{\not{h}_-}{2} \Gamma h_v(0) \\
 & - \frac{m_c^2}{n_{+p}} I_3 * \bar{h}_v(x_-) gn_+ A_s(z_-) \bar{\Gamma} \frac{\not{h}_-}{2} \Gamma h_v(0) \\
 &= \frac{im_c^2}{(n_{+p})^2} I_2 * \int_0^{x_+} dz_+ \bar{h}_v(x_-) (-in_+ \overleftarrow{D}_s)(z_-) \bar{\Gamma} \frac{\not{h}_-}{2} \Gamma h_v(0).
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

zu erhalten. Hierbei wurde partielle Integration benutzt, um in  $\mathcal{L}_{1\xi}^{(2)}$  den Feldstärketensor durch das Gluonfeld auszudrücken.



# Literaturverzeichnis

- [1] D. J. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*. Wiley, New York, USA, 1987.
- [2] S. L. Glashow, *Partial Symmetries of Weak Interactions*, *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579–588.
- [3] A. Salam, *Weak and Electromagnetic Interactions*, Originally printed in \*Svartholm: Elementary Particle Theory, Proceedings Of The Nobel Symposium Held 1968 At Lerum, Sweden\*, Stockholm 1968, 367-377.
- [4] S. Weinberg, *A Model of Leptons*, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264–1266.
- [5] D. J. Gross und F. Wilczek, *Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories*, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1343–1346.
- [6] H. D. Politzer, *Reliable perturbative results for strong interactions?*, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1346–1349.
- [7] H. Fritzsch, M. Gell-Mann und H. Leutwyler, *Advantages of the Color Octet Gluon Picture*, *Phys. Lett.* **B47** (1973) 365–368.
- [8] M. E. Peskin und D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [9] O. Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*. Vieweg, Braunschweig, 1991.
- [10] W. Kilian, *Übungen zu Strahlungskorrekturen in Eichtheorien*. 33. Herbstschule für Hochenergiephysik, Maria Laach, 2001.
- [11] P. W. Higgs, *Broken symmetries and the masses of gauge bosons*, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 508–509.
- [12] P. W. Higgs, *Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons*, *Phys. Rev.* **145** (1966) 1156–1163.
- [13] N. Cabibbo, *Unitary symmetry and leptonic decays*, *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963) 531–532.
- [14] M. Kobayashi und T. Maskawa, *CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction*, *Prog. Theor. Phys.* **49** (1973) 652–657.

- [15] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes und R. P. Hudson, *Experimental test of parity conservation in beta decay*, *Phys. Rev.* **105** (1957) 1413–1414.
- [16] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch und R. Turlay, *Evidence for the  $2\pi$  Decay of the  $K_2^0$  Meson*, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 138–140.
- [17] BABAR Kollaboration, B. Aubert *et. al.*, *Observation of CP violation in the  $B^0$  meson system*, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 091801 [[hep-ex/0107013](#)].
- [18] Belle Kollaboration, K. Abe *et. al.*, *Observation of large CP violation in the neutral B meson system*, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 091802 [[hep-ex/0107061](#)].
- [19] Particle Data Group Kollaboration, W. M. Yao *et. al.*, *Review of particle physics*, *J. Phys.* **G33** (2006) 1–1232.
- [20] L. Wolfenstein, *Parametrization of the Kobayashi-Maskawa Matrix*, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 1945.
- [21] A. J. Buras, M. E. Lautenbacher und G. Ostermaier, *Waiting for the top quark mass,  $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ ,  $B_s^0$ - $\bar{B}_s^0$  mixing and CP asymmetries in B decays*, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 3433–3446 [[hep-ph/9403384](#)].
- [22] CKMfitter Group Kollaboration, J. Charles *et. al.*, *CP violation and the CKM matrix: Assessing the impact of the asymmetric B factories*, *Eur. Phys. J.* **C41** (2005) 1–131 [[hep-ph/0406184](#)].
- [23] UTfit Kollaboration, M. Bona *et. al.*, *The unitarity triangle fit in the standard model and hadronic parameters from lattice QCD: A reappraisal after the measurements of  $\Delta m_s$  and  $BR(B \rightarrow \tau \nu_\tau)$* , *JHEP* **10** (2006) 081 [[hep-ph/0606167](#)].
- [24] C. Itzykson und J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill, International Edition, 1985.
- [25] A. V. Manohar und M. B. Wise, *Heavy Quark Physics*, *Cambridge Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol.* **10** (2000) 1–191.
- [26] G. Buchalla, A. J. Buras und M. E. Lautenbacher, *Weak decays beyond leading logarithms*, *Rev. Mod. Phys.* **68** (1996) 1125–1144 [[hep-ph/9512380](#)].
- [27] M. Beneke, *A quark mass definition adequate for threshold problems*, *Phys. Lett.* **B434** (1998) 115–125 [[hep-ph/9804241](#)].
- [28] ARGUS Kollaboration, H. Albrecht *et. al.*, *Observation of  $B^0 - \bar{B}^0$  Mixing*, *Phys. Lett.* **B192** (1987) 245.

- 
- [29] BABAR Kollaboration, P. F. Harrison und H. R. Quinn, eds., *The BaBar Physics Book: Physics at an Asymmetric B Factory*. Papers from Workshop on Physics at an Asymmetric B Factory (BaBar Collaboration Meeting), Rome, Italy, 11-14 Nov 1996, Princeton, NJ, 17-20 Mar 1997, Orsay, France, 16-19 Jun 1997 and Pasadena, CA, 22-24 Sep 1997.
- [30] <http://www-linac.kek.jp/>. Homepage des KEK-Linearbeschleunigers.
- [31] <http://www-kekb.kek.jp/>. Homepage von KEKB.
- [32] D0 Kollaboration, V. M. Abazov *et. al.*, *First direct two-sided bound on the  $B_s^0$  oscillation frequency*, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 021802 [hep-ex/0603029].
- [33] CDF Kollaboration, A. Abulencia *et. al.*, *Measurement of the  $B_s^0 - \bar{B}_s^0$  Oscillation Frequency*, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 062003 [hep-ex/0606027].
- [34] S. Stone, *Experimental status of b physics*, *AIP Conf. Proc.* **857** (2006) 18–33 [hep-ph/0604006].
- [35] BABAR Kollaboration, B. Aubert *et. al.*, *Measurements of moments of the hadronic mass distribution in semileptonic B decays*, *Phys. Rev.* **D69** (2004) 111103 [hep-ex/0403031].
- [36] BELLE Kollaboration, C. Schwanda *et. al.*, *Moments of the hadronic invariant mass spectrum in  $B \rightarrow X_c \ell \nu$  decays at Belle*, *Phys. Rev.* **D75** (2007) 032005 [hep-ex/0611044].
- [37] Heavy Flavor Averaging Group (HFAG) Kollaboration, E. Barberio *et. al.*, *Averages of b-hadron properties at the end of 2006*, arXiv:0704.3575 [hep-ex].
- [38] O. Buchmüller und H. Flächer, *Fit to moments of inclusive  $B \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}$  and  $B \rightarrow X_s \gamma$  decay distributions using heavy quark expansions in the kinetic scheme*, *Phys. Rev.* **D73** (2006) 073008 [hep-ph/0507253].
- [39] C. W. Bauer, Z. Ligeti, M. Luke und A. V. Manohar, *B decay shape variables and the precision determination of  $|V_{cb}|$  and  $m_b$* , *Phys. Rev.* **D67** (2003) 054012 [hep-ph/0210027].
- [40] C. W. Bauer, Z. Ligeti, M. Luke, A. V. Manohar und M. Trott, *Global analysis of inclusive B decays*, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 094017 [hep-ph/0408002].
- [41] J. H. Kühn, M. Steinhauser und C. Sturm, *Heavy quark masses from sum rules in four-loop approximation*, hep-ph/0702103.
- [42] D. Benson, I. I. Bigi, T. Mannel und N. Uraltsev, *Imprecated, yet impeccable: On the theoretical evaluation of  $\Gamma(B \rightarrow X_c \ell \nu)$* , *Nucl. Phys.* **B665** (2003) 367–401 [hep-ph/0302262].
-

- [43] J. Chay, H. Georgi und B. Grinstein, *Lepton energy distributions in heavy meson decays from QCD*, *Phys. Lett.* **B247** (1990) 399–405.
- [44] I. I. Y. Bigi, N. G. Uraltsev und A. I. Vainshtein, *Nonperturbative corrections to inclusive beauty and charm decays: QCD versus phenomenological models*, *Phys. Lett.* **B293** (1992) 430–436 [hep-ph/9207214].
- [45] I. I. Y. Bigi, M. A. Shifman, N. G. Uraltsev und A. I. Vainshtein, *QCD predictions for lepton spectra in inclusive heavy flavor decays*, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 496–499 [hep-ph/9304225].
- [46] B. Blok, L. Koyrakh, M. A. Shifman und A. I. Vainshtein, *Differential distributions in semileptonic decays of the heavy flavors in QCD*, *Phys. Rev.* **D49** (1994) 3356–3366 [hep-ph/9307247].
- [47] A. V. Manohar und M. B. Wise, *Inclusive semileptonic  $B$  and polarized  $\Lambda_b$  decays from QCD*, *Phys. Rev.* **D49** (1994) 1310–1329 [hep-ph/9308246].
- [48] T. Mannel, *Operator product expansion for inclusive semileptonic decays in heavy quark effective field theory*, *Nucl. Phys.* **B413** (1994) 396–412 [hep-ph/9308262].
- [49] M. Gremm und A. Kapustin, *Order  $1/m_b^3$  corrections to inclusive semileptonic  $B$  decay*, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 6924–6932 [hep-ph/9603448].
- [50] B. M. Dassinger, T. Mannel und S. Turczyk, *Inclusive semi-leptonic  $B$  decays to order  $1/m_b^4$* , *JHEP* **03** (2007) 087 [hep-ph/0611168].
- [51] A. Ali und E. Pietarinen, *Semileptonic decays of heavy quarks in quantum chromodynamics*, *Nucl. Phys.* **B154** (1979) 519.
- [52] M. Jezabek und J. H. Kühn, *QCD Corrections to Semileptonic Decays of Heavy Quarks*, *Nucl. Phys.* **B314** (1989) 1.
- [53] M. Jezabek und J. H. Kühn, *Lepton Spectra from Heavy Quark Decay*, *Nucl. Phys.* **B320** (1989) 20.
- [54] Y. Nir, *The mass ratio  $m_c/m_b$  in semileptonic  $b$  decays*, *Phys. Lett.* **B221** (1989) 184.
- [55] M. B. Voloshin, *Moments of lepton spectrum in  $B$  decays and the  $m_b-m_c$  quark mass difference*, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 4934–4938 [hep-ph/9411296].
- [56] A. F. Falk, M. E. Luke und M. J. Savage, *Hadron Spectra for Semileptonic Heavy Quark Decay*, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 2491–2505 [hep-ph/9507284].
- [57] A. F. Falk und M. E. Luke, *Hadronic Spectral Moments in Semileptonic  $B$  Decays with a Lepton Energy Cut*, *Phys. Rev.* **D57** (1998) 424–430 [hep-ph/9708327].



- 
- [58] M. Trott, *Improving Extractions of  $|V_{cb}|$  and  $m_b$  from the Hadronic Invariant Mass Moments of Semileptonic Inclusive  $B$  decay*, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 073003 [[hep-ph/0402120](#)].
- [59] N. Uraltsev, *Perturbative corrections to the semileptonic  $b$ -decay moments:  $E_{cut}^l$  dependence and running- $\alpha_s$  effects in the OPE approach*, *Int. J. Mod. Phys.* **A20** (2005) 2099–2118 [[hep-ph/0403166](#)].
- [60] V. Aquila, P. Gambino, G. Ridolfi und N. Uraltsev, *Perturbative corrections to semileptonic  $b$  decay distributions*, *Nucl. Phys.* **B719** (2005) 77–102 [[hep-ph/0503083](#)].
- [61] S. J. Brodsky, G. P. Lepage und P. B. Mackenzie, *On the elimination of scale ambiguities in perturbative quantum chromodynamics*, *Phys. Rev.* **D28** (1983) 228.
- [62] M. Gremm und I. Stewart, *Order  $\alpha_s^2\beta_0$  Correction to the Charged Lepton Spectrum in  $b \rightarrow c\bar{\nu}_\ell$  decays*, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 1226–1232 [[hep-ph/9609341](#)].
- [63] T. Becher, H. Boos und E. Lunghi, *Kinetic corrections to  $\bar{B} \rightarrow X_c\bar{\nu}$  at one loop*, [arXiv:0708.0855](#) [[hep-ph](#)].
- [64] M. Neubert, *QCD-based interpretation of the lepton spectrum in inclusive  $\bar{B} \rightarrow X_u\bar{\nu}$  decays*, *Phys. Rev.* **D49** (1994) 3392–3398 [[hep-ph/9311325](#)].
- [65] I. I. Y. Bigi, M. A. Shifman, N. G. Uraltsev und A. I. Vainshtein, *On the motion of heavy quarks inside hadrons: Universal distributions and inclusive decays*, *Int. J. Mod. Phys.* **A9** (1994) 2467–2504 [[hep-ph/9312359](#)].
- [66] C. W. Bauer und A. V. Manohar, *Shape function effects in  $B \rightarrow X_s\gamma$  and  $B \rightarrow X_u\bar{\nu}$  decays*, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 034024 [[hep-ph/0312109](#)].
- [67] S. W. Bosch, B. O. Lange, M. Neubert und G. Paz, *Factorization and Shape-Function Effects in Inclusive  $B$ -Meson Decays*, *Nucl. Phys.* **B699** (2004) 335–386 [[hep-ph/0402094](#)].
- [68] M. Neubert, *Renormalization-group improved calculation of the  $B \rightarrow X_s\gamma$  branching ratio*, *Eur. Phys. J.* **C40** (2005) 165–186 [[hep-ph/0408179](#)].
- [69] K. S. M. Lee und I. W. Stewart, *Factorization for Power Corrections to  $B \rightarrow X_s\gamma$  and  $B \rightarrow X_u\bar{\nu}$* , *Nucl. Phys.* **B721** (2005) 325–406 [[hep-ph/0409045](#)].
- [70] S. W. Bosch, M. Neubert und G. Paz, *Subleading shape functions in inclusive  $B$  decays*, *JHEP* **11** (2004) 073 [[hep-ph/0409115](#)].
- [71] M. Beneke, F. Campanario, T. Mannel und B. D. Pecjak, *Power corrections to  $\bar{B} \rightarrow X_u\bar{\nu}$  ( $X_s\gamma$ ) decay spectra in the “shape-function” region*, *JHEP* **06** (2005) 071 [[hep-ph/0411395](#)].
-

- [72] F. J. Tackmann, *Full-Phase-Space Twist Expansion in Semileptonic and Radiative B-Meson Decays*, *Phys. Rev.* **D72** (2005) 034036 [[hep-ph/0503095](#)].
- [73] K. S. M. Lee und I. W. Stewart, *Shape-function effects and split matching in  $B \rightarrow X_s \ell^+ \ell^-$* , *Phys. Rev.* **D74** (2006) 014005 [[hep-ph/0511334](#)].
- [74] M. Neubert, *Analysis of the photon spectrum in inclusive  $B \rightarrow X_s \gamma$  decays*, *Phys. Rev.* **D49** (1994) 4623–4633 [[hep-ph/9312311](#)].
- [75] T. Mannel und S. Recksiegel, *Comparing  $B \rightarrow X_u \ell \nu_\ell$  to  $B \rightarrow X_s \gamma$  and the determination of  $|V_{ub}|/|V_{ts}|$* , *Phys. Rev.* **D60** (1999) 114040 [[hep-ph/9904475](#)].
- [76] A. K. Leibovich, I. Low und I. Z. Rothstein, *Extracting  $V_{ub}$  without recourse to structure functions*, *Phys. Rev.* **D61** (2000) 053006 [[hep-ph/9909404](#)].
- [77] S. W. Bosch, B. O. Lange, M. Neubert und G. Paz, *Proposal for a precision measurement of  $|V_{ub}|$* , *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 221801 [[hep-ph/0403223](#)].
- [78] A. H. Hoang, Z. Ligeti und M. Luke, *Perturbative corrections to the determination of  $V_{ub}$  from the  $P_+$  spectrum in  $B \rightarrow X_u \ell \bar{\nu}$* , *Phys. Rev.* **D71** (2005) 093007 [[hep-ph/0502134](#)].
- [79] B. O. Lange, M. Neubert und G. Paz, *Theory of charmless inclusive B decays and the extraction of  $V_{ub}$* , *Phys. Rev.* **D72** (2005) 073006 [[hep-ph/0504071](#)].
- [80] B. O. Lange, M. Neubert und G. Paz, *A two-loop relation between inclusive radiative and semileptonic B-decay spectra*, *JHEP* **10** (2005) 084 [[hep-ph/0508178](#)].
- [81] B. O. Lange, *Shape-function independent relations of charmless inclusive B-decay spectra*, *JHEP* **01** (2006) 104 [[hep-ph/0511098](#)].
- [82] T. Mannel und M. Neubert, *Resummation of nonperturbative corrections to the lepton spectrum in inclusive  $B \rightarrow X \ell \bar{\nu}$  decays*, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 2037–2047 [[hep-ph/9402288](#)].
- [83] T. Mannel und F. J. Tackmann, *Shape function effects in  $B \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$* , *Phys. Rev.* **D71** (2005) 034017 [[hep-ph/0408273](#)].
- [84] H. Boos, T. Feldmann, T. Mannel und B. D. Pecjak, *Shape functions from  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$* , *Phys. Rev.* **D73** (2006) 036003 [[hep-ph/0504005](#)].
- [85] H. Boos, T. Feldmann, T. Mannel und B. D. Pecjak, *Can  $\bar{B} \rightarrow X_c \ell \bar{\nu}_\ell$  help us extract  $|V_{ub}|$ ?*, *JHEP* **05** (2006) 056 [[hep-ph/0512157](#)].
- [86] T. Appelquist und J. Carazzone, *Infrared singularities and massive fields*, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 2856.

- 
- [87] T. Mannel, *Effective Field Theories in Flavour Physics*, *Springer Tracts Mod. Phys.* **203** (2004) 1–175.
- [88] M. Neubert, *Heavy Quark Symmetry*, *Physics Reports* **245** (1994) 259.
- [89] A. G. Grozin, *Heavy Quark Effective Theory*, *Springer Tracts Mod. Phys.* **201** (2004) 1–213.
- [90] M. E. Luke und A. V. Manohar, *Reparametrization invariance constraints on heavy particle effective field theories*, *Phys. Lett.* **B286** (1992) 348–354 [[hep-ph/9205228](#)].
- [91] C. W. Bauer, S. Fleming und M. E. Luke, *Summing Sudakov logarithms in  $B \rightarrow X_s \gamma$  in effective field theory*, *Phys. Rev.* **D63** (2001) 014006 [[hep-ph/0005275](#)].
- [92] C. W. Bauer, S. Fleming, D. Pirjol und I. W. Stewart, *An effective field theory for collinear and soft gluons: Heavy to light decays*, *Phys. Rev.* **D63** (2001) 114020 [[hep-ph/0011336](#)].
- [93] C. W. Bauer und I. W. Stewart, *Invariant operators in collinear effective theory*, *Phys. Lett.* **B516** (2001) 134–142 [[hep-ph/0107001](#)].
- [94] C. W. Bauer, D. Pirjol und I. W. Stewart, *Soft-collinear factorization in effective field theory*, *Phys. Rev.* **D65** (2002) 054022 [[hep-ph/0109045](#)].
- [95] M. Beneke, A. P. Chapovsky, M. Diehl und T. Feldmann, *Soft-collinear effective theory and heavy-to-light currents beyond leading power*, *Nucl. Phys.* **B643** (2002) 431–476 [[hep-ph/0206152](#)].
- [96] M. Beneke und T. Feldmann, *Multipole-expanded soft-collinear effective theory with non-abelian gauge symmetry*, *Phys. Lett.* **B553** (2003) 267–276 [[hep-ph/0211358](#)].
- [97] M. Beneke und T. Feldmann, *Factorization of heavy-to-light form factors in soft-collinear effective theory*, *Nucl. Phys.* **B685** (2004) 249–296 [[hep-ph/0311335](#)].
- [98] I. Z. Rothstein, *Factorization, power corrections, and the pion form factor*, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 054024 [[hep-ph/0301240](#)].
- [99] A. K. Leibovich, Z. Ligeti und M. B. Wise, *Comment on quark masses in SCET*, *Phys. Lett.* **B564** (2003) 231–234 [[hep-ph/0303099](#)].
- [100] J. Chay und C. Kim, *Collinear effective theory at subleading order and its application to heavy-light currents*, *Phys. Rev.* **D65** (2002) 114016 [[hep-ph/0201197](#)].
- [101] D. Pirjol und I. W. Stewart, *A complete basis for power suppressed collinear-ultrasoft operators*, *Phys. Rev.* **D67** (2003) 094005 [[hep-ph/0211251](#)].
-

- [102] J. Chay, C. Kim und A. K. Leibovich, *Quark mass effects in the soft-collinear effective theory and  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  in the endpoint region*, *Phys. Rev.* **D72** (2005) 014010 [[hep-ph/0505030](#)].
- [103] S. A. Larin, *The renormalization of the axial anomaly in dimensional regularization*, *Phys. Lett.* **B303** (1993) 113–118 [[hep-ph/9302240](#)].
- [104] C. Anastasiou, K. Melnikov und F. Petriello, *The electron energy spectrum in muon decay through  $\mathcal{O}(\alpha^2)$* , [hep-ph/0505069](#).
- [105] K. Melnikov und T. van Ritbergen, *The three-loop on-shell renormalization of QCD and QED*, *Nucl. Phys.* **B591** (2000) 515–546 [[hep-ph/0005131](#)].
- [106] S. Wolfram, *The Mathematica Book*. Wolfram Media, 5. ed., 2003.
- [107] G. P. Lepage, *A new algorithm for adaptive multidimensional integration*, *J. Comput. Phys.* **27** (1978) 192.
- [108] T. Hahn, *CUBA: A library for multidimensional numerical integration*, *Comput. Phys. Commun.* **168** (2005) 78–95 [[hep-ph/0404043](#)].
- [109] F. De Fazio und M. Neubert,  *$B \rightarrow X_u l \bar{\nu}_l$  decay distributions to order  $\alpha_s$* , *JHEP* **06** (1999) 017 [[hep-ph/9905351](#)].
- [110] G. P. Korchemsky und G. Sterman, *Infrared factorization in inclusive  $B$  meson decays*, *Phys. Lett.* **B340** (1994) 96–108 [[hep-ph/9407344](#)].
- [111] M. Beneke und V. A. Smirnov, *Asymptotic expansion of Feynman integrals near threshold*, *Nucl. Phys.* **B522** (1998) 321–344 [[hep-ph/9711391](#)].
- [112] C. W. Bauer, M. E. Luke und T. Mannel, *Light-cone distribution functions for  $B$  decays at subleading order in  $1/m_b$* , *Phys. Rev.* **D68** (2003) 094001 [[hep-ph/0102089](#)].
- [113] C. W. Bauer, M. Luke und T. Mannel, *Subleading shape functions in  $B \rightarrow X_u l \bar{\nu}$  and the determination of  $|V_{ub}|$* , *Phys. Lett.* **B543** (2002) 261–268 [[hep-ph/0205150](#)].
- [114] C. W. Bauer, A. F. Falk und M. E. Luke, *Resumming Phase Space Logarithms in Inclusive Semileptonic  $B$  Decays*, *Phys. Rev.* **D54** (1996) 2097–2107 [[hep-ph/9604290](#)].
- [115] I. Bronstein, K. Semendjajew, G. Musiol und H. Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main. 5., überarbeitete und erweiterte Auflage, 2000.
- [116] T. Rowland, *Generalized Function*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein, <http://mathworld.wolfram.com/GeneralizedFunction.html>.

# Danksagung

Mein Dank für die Vergabe und Betreuung dieser Arbeit gilt meinem Doktorvater Thomas Mannel. Für alle auftretenden Fragen und Probleme hatte er stets ein offenes Ohr. Darüber hinaus gab er mir die Möglichkeit, mich weiter zu entwickeln: durch den Ortswechsel von Karlsruhe nach Siegen, durch die Organisation von Aktionen zur Öffentlichkeitsarbeit, durch den Besuch von Konferenzen und Schulen, durch meine Forschungsaufenthalte am Fermilab. Wolfgang Kilian danke ich für die Übernahme des Korreferats der Dissertation.

Ein ganz besonderer Dank gilt Thorsten Feldmann. Er war stets mein erster Ansprechpartner und war immer bereit, Zeit zu investieren, sei es, um meine Fragen zu beantworten und bei Problemen durch gemeinsame Diskussion eine Lösung zu finden, oder um hilfreiche Tipps zu den Entwürfen von Vorträgen oder von dieser Arbeit zu geben. Ihm und Ben D. Pecjak danke ich für die Zusammenarbeit, die zu zwei Veröffentlichungen geführt hat.

Thomas Becher war mein Ansprechpartner während meiner Forschungsaufenthalte am Fermilab. Auch danach gab er per email und telefonisch wichtige Hinweise bei der Durchführung von Rechnungen sowie zum Entwurf von Teilen dieser Arbeit. Ihm und Enrico Lunghi danke ich für die seit meiner Aufenthalte am Fermilab andauernde Zusammenarbeit, aus der eine Veröffentlichung entstehen wird.

Der Theoriegruppe des Fermilab danke ich für ihre Gastfreundschaft während zweier Forschungsaufenthalte.

Martin Melcher und Robert Feger danke ich für Hilfestellungen beim Umgang mit LaTeX und Mathematica sowie bei sonstigen auftretenden Computer-Problemen. Darüber hinaus möchte ich Kai Grybel, Sven Over und Wolfgang Walkowiak für das Bereitstellen einer funktionierenden Computer-Infrastruktur danken.

Durch zahlreiche informative und angenehme Gespräche über physikalische Fragestellungen, aktuelle Themen aus Politik und Gesellschaft sowie persönliche Erfahrungen sorgten Siegmund Brandt, Christina Breidenbach, Fritz Bopp, Hans-Werner Boschmann, Hans D. Dahmen, Benjamin Dassinger, Sven Faller, Robert Feger, Thorsten Feldmann, Martin Jung, Alexander Khodjamirian, Wolfgang Kilian, Christoph Klein, Thomas Mannel, Martin Melcher, Nils Offen, Christian Schött, Saba Shafaq, Sascha Turczyk und Angelika Wied für Abwechslung im Arbeitsalltag. Ich habe die angenehme Atmosphäre in der Arbeitsgruppe sehr genossen und werde gerne an die drei Jahre in Siegen zurück denken.

Mein Dank für seine Unterstützung durch Tipps aus der Ferne und Gespräche, die mir geholfen haben, den Blick für das Wesentliche nicht zu verlieren, gilt meinem Freund Ulrich Husemann.

Meinen Eltern danke ich für ihre bedingungslose Unterstützung auf meinem gesamten bisherigen Lebensweg.