

B-Zerfallsformfaktoren aus QCD-Summenregeln

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von

Dipl.-Phys. Nils Offen

geboren am 21.02.1977 in Bad-Oldesloe

genehmigt vom Fachbereich Physik
der Universität Siegen

Siegen
Januar 2008

Gutachter der Dissertation Univ. Prof. Dr. Thomas Mannel
Dr. Alexander Khodjamirian

Datum der Disputation 25.01.2008

gedruckt auf alterungsbeständigem holz- und säurefreiem Papier

Abstract

In the Standard Model of particle physics there is only one source of CP-violation. Namely, a single complex phase in the unitary 3×3 CKM-Matrix governing flavor transitions in the weak interaction. The unitarity is usually visualized by a triangle in the complex $\rho - \eta$ -plane. Therefore testing this framework comes down to measuring weak decays, relating observables to sides and angles of this so called Unitarity Triangle(UT). Particular interest in this respect is payed to decays of mesons containing a heavy b -quark, giving the opportunity to alone determine all parameters of the UT. Doing this is far from easy. Besides tedious experimental measurements the theoretical calculations are plagued by hadronic quantities which cannot be determined by perturbation theory. In this work several of these quantities so called form factors are computed using the well known method of light cone sum rules(LCSR). Two different setups have been used. One, established in this work, utilizing a correlation function with an on-shell B-Meson and one following the traditional calculation by taking the light meson on-shell. Both using light cone expansion in the respective on-shell mesons distribution amplitudes. While the first approach allows to calculate a whole bunch of phenomenologically interesting quantities by just changing Dirac-structures of the relevant currents it has the drawback that it does not have access to the well developed twist expansion of the latter. To incorporate higher Fock-state contributions the first models for three-particle distribution amplitudes of the B-Meson have been derived. α_s -corrections remain out of the scope of this work. Nevertheless does a comparison with more sophisticated methods show an encouraging numerical agreement. In the second setup all known corrections especially the never verified α_s -corrections to Twist three terms have been recalculated and a competitive result for the CKM-matrixelement $|V_{ub}|$ was obtained.

Zusammenfassung

Im Standardmodell wird CP-Verletzung über eine einzige komplexe Phase in der unitären 3×3 CKM-Matrix, die Übergänge zwischen den verschiedenen Quarksorten beschreibt, implementiert. Üblicherweise wird die Unitarität dieser Matrix durch ein Dreieck in der komplexen $\rho - \eta$ -Ebene veranschaulicht, so daß eine Verifikation auf das Messen der Winkel und Seitenlängen hinausläuft. Dies geschieht, indem Observable aus schwachen Zerfällen zu diesen in Beziehung gesetzt werden. Besonderes Interesse wurde dabei den Zerfällen von Mesonen mit einem schweren b -Quark zuteil, da allein aus diesen alle benötigten Parameter des sogenannten Unitaritätsdreieckes bestimmt werden können. Dabei treten hadronische Matrixelemente in den theoretischen Rechnungen auf, die nicht mittels störungstheoretischer Methoden berechnet werden können. In dieser Arbeit werden eine Reihe solcher Matrixelemente, sogenannte Formfaktoren, über zwei Ansätze im Rahmen der Lichtkegelsummenregeln berechnet. Einer, dessen Grundlagen im Laufe dieser Arbeit gelegt wurde, nutzt eine Korrelationsfunktion mit einem B-Meson, der andere mit dem leichten Meson im Endzustand auf der Massenskala. Ersterer ermöglicht es, verschiedene Endzustände durch eine einfache Änderung der Dirac-Struktur des entsprechenden Stroms zu berücksichtigen, birgt jedoch den Nachteil, daß nicht auf den Formalismus der Twistentwicklung des Zweiteren zurückgegriffen werden kann. Höhere Fockzustände des B-Mesons konnten berücksichtigt werden, indem die ersten Modelle für Dreiteilchenverteilungsamplituden hergeleitet wurden. Trotz fehlender α_s -Korrekturen zeigt sich bereits eine hinreichende numerische Übereinstimmung mit weiter entwickelten Methoden. Im zweiten Ansatz wurden alle bekannten Korrekturen, insbesondere die bisher noch nicht überprüften α_s -Beiträge zu Twist drei, neu berechnet und so $|V_{ub}|$ mit konkurrenzfähiger Genauigkeit erhalten.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Standardmodell	3
1.1.1	Teilcheninhalt und Symmetrie	3
1.1.2	Masse und Higgsfeld	6
1.1.3	CKM-Mechanismus	9
1.1.4	Quantenchromodynamik(QCD)	11
1.2	Aufgabenstellung und Gliederung	16
2	Exklusive semileptonische B-Zerfälle	19
2.1	Hadronische Matrixelemente, Formfaktoren	20
2.1.1	$B \rightarrow \pi l \nu$ Zerfall als Beispiel	21
2.1.2	Definitionen	24
2.1.3	Symmetrien	25
2.1.4	Asymptotisches Verhalten und Parametrisierungen	30
2.2	Analysen zu $ V_{ub} $ sowie $ V_{ts} / V_{td} $	34
3	Theoretische Grundlagen	41
3.1	Operator-Produkt-Entwicklung	41
3.1.1	Lokale Entwicklung	42
3.1.2	Lichtkegelentwicklung	46
3.2	Verteilungsamplituden	48
3.2.1	Pion-Verteilungsamplituden	49
3.2.2	B -Meson-Verteilungsamplituden	54
3.3	QCD-Summenregeln	58
3.3.1	SVZ-Summenregeln	59
3.3.2	Lichtkegelsummenregeln	67
4	B-Meson-Dreiteilchenverteilungsamplituden	71
4.1	Neue Zweipunktsummenregeln	71
4.2	Modelle und Bewegungsgleichungen	77
4.2.1	Herleitung der Differentialgleichungen	77
4.2.2	Lösung der DGLs mit neuen Modellen	81
4.3	Chromoelektrisches und -magnetisches Moment	84

5	Summenregeln für $B \rightarrow P, V$-Formfaktoren	87
5.1	Lichtkegelsummenregeln mit B -Verteilungsamplituden	87
5.1.1	Korrelationsfunktion	88
5.1.2	Lichtkegeldominanz	88
5.1.3	Berechnung der Summenregeln	91
5.1.4	Skalierung für $m_b \rightarrow \infty$	97
5.1.5	Numerik	100
5.2	Lichtkegelsummenregeln mit Pion-Verteilungsamplituden	107
5.2.1	Korrelationsfunktion	108
5.2.2	α_s -Korrekturen	110
5.2.3	Summenregeln	115
5.2.4	Numerik	120
6	Zusammenfassung und Diskussion	129
A	Formelsammlung	133
A.1	Einschleifenintegrale	133
A.1.1	Zweipunktintegrale	134
A.1.2	Dreipunktintegrale	134
A.1.3	Vierpunktintegrale	137
A.2	Komplexe Analysis	144
A.2.1	Analytische Fortsetzung	144
A.2.2	Schwarzsches Reflektionsprinzip	145
A.3	Lichtkegelvektoren	145
A.4	Imaginärteile	145
A.4.1	Imaginärteile ohne partielle Integration	146
A.4.2	Imaginärteile mit partieller Integration	148
A.5	Distributionen	149
A.5.1	$ _+$ -Distribution	149
A.6	Borel-Transformation	150
B	Zerlegung des $\bar{q}qG$-Matrixelementes	151
C	Kommentar zu Huang et al.	155
D	Summenregeln mit B-Meson-Verteilungsamplituden	157
D.1	Ausdrücke für $m_{q_1}, q^2 \neq 0$	157
D.2	Dreiteilchenkorrekturen	159
E	Liste der Pion-Verteilungsamplituden	163
F	Summenregeln mit Pion-Verteilungsamplituden	167
F.1	α_s -Korrekturen	167
F.1.1	LCSR für $f_{B\pi}^+(q^2)$	168
F.1.2	LCSR für $(f_{B\pi}^+(q^2) + f_{B\pi}^-(q^2))$	172
F.1.3	LCSR für $f_{B\pi}^T(q^2)$	175

F.2 Zweipunktsummenregeln für f_B 179

Kapitel 1

Einleitung

Aus der Beobachtung der Natur auf ihr Wesen zu schließen, diese Motivation läßt sich bis zu den frühesten Tagen der überlieferten Menschheitsgeschichte zurückverfolgen. Bereits im zweiten und dritten Jahrtausend vor Christus stellten Sumerer und Babylonier astronomische Beobachtungen und Berechnungen zur Länge des Jahres, des Tages, zum Mondmonat sowie ähnlicher periodischer Vorgänge an. Erst mit der modernen Physik unmittelbar verbunden mit dem Namen Galileo Galileis jedoch wird die passive Beobachtung, durch die aktive Untersuchung mit Hilfe des Experimentes ergänzt.¹ Die Verzahnung theoretischer Vorhersagen mit experimentellen Untersuchungen führte zu einem bis dato nicht dagewesenen Erkenntnisgewinn, der in der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) sowie dem Standardmodell (SM) der Elementarteilchen kumulierte. Neben dem methodologischen Übergang, vollzogen sich ebensolche in den zugrundeliegenden Begriffen und Konzepten. Teilchen und Trajektorie verloren ihre zentrale Stellung und wurden abgelöst durch Feld- bzw. Quantenfeldtheorien. Energie und Masse als zwei Erscheinungsformen desselben Phänomens erkannt. Symmetrie, anfangs noch ein Hilfsmittel oder Argument zur Vereinfachung vorliegender Probleme, Anaximander zum Beispiel argumentierte, die Erde müßte still verharren, da sie von sämtlichen Himmelskreisen gleich weit entfernt sei, wird zu einer der Grundlagen der modernen Physik. Emmy Noether formalisierte den Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen [1], Einsteins allgemeine Relativitätstheorie [2] sowie das Standardmodell führen Wechselwirkungen auf zugrundeliegende Symmetrien zurück. Erstere, eine klassische Feldtheorie, auf generelle Kovarianz, daß heißt auf Forminvarianz gegenüber allgemeinen Koordinatentransformationen, Zweiteres, eine Quantenfeldtheorie, auf Lorentz-Symmetrie und lokale Eichsymmetrien für die starke, elektromagnetische und schwache Wechselwirkung. Trotz aller Erfolge ergeben sich an diesem Punkte erste Probleme. Das nun in den Vordergrund rückende Standardmodell vermochte seit etwa 30 Jahren jeden experimentellen Test zu bestehen sowie Vorhersagen mit teilweise erstaunlicher Präzision zu machen und dennoch läßt es einige Fragen offen. Die wohl weitreichendste Frage betrifft die Vereinigung der ART mit dem Standardmodell. Bisher erwies es sich als unmöglich die ART in den konzeptionellen Rahmen des Standardmodells einzufügen,

¹An dieser Stelle wird einigen Ausnahmegestalten wie zum Beispiel Archimedes von Syrakus notwendigerweise nicht genüge getan.

die klassische Feldtheorie der Gravitation zu quantisieren. Doch auch so die Gravitation nicht in Betracht gezogen wird, ergibt sich noch immer ein unvollständiges Bild.

- Das Standardmodell sagt eine in Experimenten bisher stets bestätigte Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie voraus, die jedoch bei weitem nicht ausreicht, um bei symmetrischen Anfangsbedingungen den beobachteten Materieüberschuß im Universum zu erklären
- Materie taucht in drei Familien mit eindeutiger Massenhierarchie auf. Beide Umstände werden vom Standardmodell nicht erklärt, sondern werden von außen vorgegeben.
- Durch den Higgs-Mechanismus werden im Standardmodell die Massen der Fermionen, wie der Eichbosonen erklärt. Die Selbstenergie des hierfür benötigten und bisher nicht nachgewiesenen Higgs-Bosons ist jedoch quadratisch divergent, was eine Erklärung der bisher vorausgesetzten kleinen Higgs-Masse erschwert.
- Die Kopplungskonstanten der drei vom Standardmodell beschriebenen Wechselwirkungen nähern sich bei hohen Energien einander an, können jedoch ohne weitere Voraussetzungen nicht in einem Punkt vereinigt werden.
- Neutrinos, die in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet werden, sind im Standardmodell masselos implementiert. In Experimenten festgestellte Oszillationen zwischen verschiedenen Neutrinoarten deuten jedoch auf kleine Massendifferenzen hin, die zu neuen Phänomenen im leptonischen Sektor führen.

An Modellen, die für sich in Anspruch nehmen, einige oder alle Unzulänglichkeiten des Standardmodells zu beheben, herrscht kein Mangel. Meist wird eine weitere Symmetrie postuliert, wie zum Beispiel in supersymmetrischen Erweiterungen zwischen Bosonen und Fermionen, und zumeist werden zusätzliche schwere Teilchen eingeführt. Der direkte Nachweis solcher hypothetischer Teilchen und somit der direkte Nachweis von Physik jenseits des Standardmodells ist die Aufgabe des im Jahre 2008 in Betrieb gehenden Large-Hadron-Colliders(LHC). Es existiert jedoch noch ein anderer Weg, Informationen über solch neue Physik zu erhalten. Hohe Präzision von experimenteller wie von theoretischer Seite bei der Bestimmung von Observablen die potentiell von Physik jenseits des Standardmodells beeinflußt werden, bedingt starke Einschränkungen an den Parameterraum möglicher Modelle. In diese Richtung gehen die sogenannten *B*-Fabriken, Belle und BaBar sowie der geplante International Linear Collider (ILC) und eine geplante Super-*B*-Fabrik. In diese Richtung, wenn auch mit weit bescheidenerem Anspruch, geht auf theoretischer Seite auch diese Arbeit. Grundlage aller hier vorgenommenen Rechnungen bildet das Standardmodell, daher soll dieses im Folgenden kurz dargestellt werden.

1.1 Standardmodell

Seit dem Beweis der Renormierbarkeit der in [3, 4, 5] mittels des Higgs-Mechanismus [6, 7, 8, 9] vereinigten elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung [10, 11] sowie dem Beweis der asymptotischen Freiheit der Quantenchromodynamik [12, 13, 14] gilt das sogenannte Standardmodell als die Grundlage der modernen Elementarteilchenphysik. Als Quantenfeldtheorie vereint es die Konzepte der klassischen Feldtheorie und der Quantenmechanik, um in seinem Gültigkeitsbereich weit über beide hinauszugehen. Wie die klassische Elektrodynamik ist es explizit Lorentzinvariant und vermag im Gegensatz zur Quantenmechanik Teilchenentstehung- und Vernichtung zu beschreiben. Dies geschieht indem ein klassisches Feld, eine Funktion die jedem Punkt im Raum eine Feldstärke zuordnet, analog zu den Observablen der Quantenmechanik behandelt wird. So wird jedem Punkt ein Operator, welcher kanonische Kommutator-oder Antikommutatorrelationen erfüllt, zugeordnet und Teilchen werden als Anregungen, bzw. Quanten des Feldes interpretiert. Dies führt vorerst allerdings nur auf eine freie Quantenfeldtheorie. Wechselwirkungen werden in der Theorie durch Forderung lokaler Symmetrien, sogenannter Eichsymmetrien hervorgerufen und vollständig bestimmt. Ein bekanntes Beispiel, die Eichfreiheit des elektromagnetischen Potentials aus der klassischen Elektrodynamik, wird in der Quantenfeldtheorie als $U(1)$ -Symmetrie die Grundlage der Quantenelektrodynamik. Im nächsten Abschnitt wird auf Symmetrie und Teilcheninhalt des Standardmodells noch genauer eingegangen, für das Konzept der Quantenfeldtheorie sowie für weitere Grundlagen des Standardmodells sei auf entsprechende Literatur [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22] verwiesen.

1.1.1 Teilcheninhalt und Symmetrie

Eichsymmetrie und Teilcheninhalt sind die definierenden Eigenschaften einer Quantenfeldtheorie. Beide werden vom Standardmodell nicht vorhergesagt, sondern sind sozusagen die Konstruktionselemente. Materie kommt im Standardmodell in drei Generationen von Spin $\frac{1}{2}$ Fermionen, die sich nur in ihrer Masse unterscheiden und deren schwerstes Teilchen erst zwanzig Jahre nach seiner Postulierung entdeckt wurde [23, 24, 25], vor. Einzige mittelbare Erklärung für die drei Generationen, von

	Leptonen		Quarks	
	linkshändig	rechtshändig	linkshändig	rechtshändig
1. Generation	$\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}_L$	e_R, ν_R	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	$u_R d_R$
2. Generation	$\begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix}_L$	μ_R, ν_R	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$	$c_R s_R$
3. Generation	$\begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_L$	τ_R, ν_R	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	$t_R b_R$

Tabelle 1.1: Materieteilchen des Standardmodells, nach Händigkeit aufgeteilt.

denen nur die erste für den Aufbau der uns umgebenden Materie verantwortlich ist, besteht in der Implementierung der CP-Verletzung im Standardmodell, die zu ihrer Realisierung mindestens drei Fermionengenerationen benötigt. Die Verletzung der Paritätsinvarianz durch die schwache Wechselwirkung [26] macht eine unterschiedliche Behandlung links- und rechtshändiger Fermionen² notwendig. Demnach werden die fundamentalen Objekte der paritätserhaltenden Quantenelektrodynamik, die Dirac-Spinoren, in die entsprechenden Komponenten aufgeteilt:

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Psi, \quad \psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi, \quad \Psi = e, \nu_e, u, d, \dots \quad (1.1)$$

Diese entsprechen Weyl-Spinoren in einer vierdimensionalen Schreibweise.³ Die Paritätsverletzung wird nun implementiert, indem die linkshändigen Spinoren wie in Tabelle 1.1 zu Doublets angeordnet werden und damit ein unterschiedliches Transformationsverhalten unter der elektroschwachen Eichgruppe

$$U(1)_Y \otimes SU(2)_I \quad (1.2)$$

zugrundegelegt wird. Die Schreibweise als direktes Produkt impliziert umgekehrt, daß $U(1)_Y$ und $SU(2)_I$ miteinander kommutieren. Transformationen aus der abelschen $U(1)_Y$ -Gruppe wirken auf links- wie rechtshändige Komponenten:

$$\Psi(x) \rightarrow U_Y(x) \Psi(x) = e^{-i\frac{Y}{2}\Theta_Y(x)} \Psi(x). \quad (1.3)$$

Unterschiede ergeben sich nur aus unterschiedlichen Eigenwerten zu dem Generator Y , der Hyperladung. Die nichtabelsche $SU(2)_I$ hat drei Generatoren und wirkt nur auf die linkshändigen Komponenten, die wie in Tabelle 1.1 in Doublets zusammengefaßt werden⁴:

$$\begin{pmatrix} u_L(x) \\ d_L(x) \end{pmatrix} \rightarrow U_I(x) \begin{pmatrix} u_L(x) \\ d_L(x) \end{pmatrix} = \exp\left(-i\frac{\tau^a}{2}\Theta_I^a(x)\right) \begin{pmatrix} u_L(x) \\ d_L(x) \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Beispielhaft sind nur die Quarks angegeben. Für Leptonen ergibt sich jedoch ein identisches Bild. Die τ^a sind in dieser fundamentalen Darstellung nichts anderes als die bekannten Pauli-Matrizen. Somit können die Fermionen durch ihre Quantenzahlen bezüglich der Generatoren Y und I_W^3 , der z-Komponente des schwachen Isospins, geordnet werden:

	e_L	ν_L	e_R	ν_R	u_L	d_L	u_R	d_R
Y	-1	-1	-2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$
I_W^3	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0

²Für masselose Teilchen entspricht die Händigkeit der Helizität, d.h. der Spinprojektion auf die Impulsrichtung.

³Aus gruppentheoretischer Sicht sind sowohl Weyl-, wie auch Dirac-Spinoren Darstellungen der Lorentzgruppe. $\psi_L \in (\frac{1}{2}, 0)$, $\psi_R \in (0, \frac{1}{2})$, $\Psi \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, wobei die Dirac-Spinoren zusätzlich eine Darstellung der Paritätstransformation bilden [16].

⁴Hierbei ist zu beachten, daß aufgrund der Lorentz-Invarianz stets nur Felder mit gleichem Transformationsverhalten in einem Doublet oder bei der QCD in einem Triplet angeordnet werden dürfen.

Zur Vereinfachung der weiteren Schreibweise werden die drei Generationen der links- und rechtshändigen Quarks und Leptonen in jeweils einem Vektor zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} L_L^{1,2,3} &= \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}, & e_R^{1,2,3} &= e_R, \mu_R, \tau_R, & \nu_R^{1,2,3} &= \nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R} \\ Q_L^{1,2,3} &= \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}, & u_R^{1,2,3} &= u_R, c_R, t_R, & d_R^{1,2,3} &= d_R, s_R, b_R \end{aligned} \quad (1.5)$$

Wird für die freie masselose Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_f = \sum_{i=1}^3 (\bar{L}_L^i i \not{\partial} L_L^i(x) + \bar{Q}_L^i i \not{\partial} Q_L^i + \bar{e}_R^i i \not{\partial} e_R^i + \bar{u}_R^i i \not{\partial} u_R^i + \dots) \quad (1.6)$$

die Invarianz unter den oben angeführten Transformationen gefordert, so wird dies erreicht, indem die Ableitung ∂_μ durch die kovariante Ableitung

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - ig_2 \frac{\tau^a}{2} W_\mu^a + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu, \\ D_\mu &= \partial_\mu + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu, \end{aligned} \quad (1.7)$$

mit wie folgt transformierenden Eichfeldern

$$B_\mu(x) \rightarrow B_\mu(x) + \frac{i}{g_1} (\partial_\mu U_Y(x)) U_Y^\dagger(x), \quad (1.8)$$

$$W_\mu(x) = W_\mu^a(x) \frac{\tau^a}{2} \rightarrow U_I(x) W_\mu(x) U_I^\dagger(x) - \frac{i}{g_2} (\partial_\mu U_I(x)) U_I^\dagger(x), \quad (1.9)$$

ersetzt wird. Für jeden Generator der Symmetriegruppe wird genau ein Eichfeld eingeführt. In 1.9 ist nach Einsetzen von U_Y deutlich ein Analogon zur Eichfreiheit der klassischen Elektrodynamik zu erkennen, die, wie schon erwähnt, als $U(1)$ -Symmetrie in der Quantenelektrodynamik aufgeht. Die so entstehende Lagrange-Dichte beschreibt masselose Fermionfelder, die an insgesamt vier, drei für die $SU(2)_I$ und eines für $U(1)_Y$, masselose Eichbosonen koppeln. So gesehen, bestimmt die zugrundeliegende Symmetrie vollständig die Form der auftretenden Wechselwirkungen. Um die Dynamik der Eichbosonen zu beschreiben, fehlen allerdings noch kinetische Terme. Diese ergeben sich aus den Feldstärketensoren, die sich für Eichfelder zur abelschen $U(1)_Y$ und nichtabelschen $SU(2)_I$ um einen Kommutator unterscheiden:

$$F_{\mu\nu}^B(x) = \partial_\mu B_\nu(x) - \partial_\nu B_\mu(x), \quad (1.10)$$

$$F_{\mu\nu}^W(x) = \partial_\mu W_\nu(x) - \partial_\nu W_\mu(x) - ig_2 [W_\mu(x), W_\nu(x)], \quad (1.11)$$

$$\mathcal{L}_{B,W}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^B(x) F^{B\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} \text{Tr} [F_{\mu\nu}^W(x) F^{W\mu\nu}(x)]. \quad (1.12)$$

Hier ist bereits eine Besonderheit der nichtabelschen Eichtheorien, die im Abschnitt über QCD wieder aufgegriffen wird zu sehen. Im kinetischen Term zur $SU(2)_I$ tauchen kubische und biquadratische Terme auf, die Selbstwechselwirkungen dieser Felder beschreiben. Dies gilt ganz allgemein für $SU(n)$ -Eichtheorien, $n \geq 2$.

1.1.2 Masse und Higgsfeld

Im vorigen Abschnitt wurde aus der Symmetriegruppe $U(1)_Y \otimes SU(2)_I$ die Lagrange-Dichte für die Wechselwirkung masseloser Fermionen mit vier Eichfeldern hergeleitet. Die Implementierung der Masse ist nicht so ohne weiteres möglich. Einführen eines einfachen Massenterms $\mathcal{L}_m^F = m \bar{\Psi} \Psi$ bräche die $SU(2)_I$ -Symmetrie. Noch entscheidender jedoch: Die geringe Reichweite der schwachen Wechselwirkung weist auf massive Eichbosonen hin. Wird allerdings für diese ein Massenterm $\mathcal{L}_m^E = \frac{1}{2} m^2 W^2$ eingebaut, bräche dieser nicht nur die Eichsymmetrie, sondern führte zudem zu folgendem Propagator:

$$S_{\mu\nu}(k, m^2) = \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (1.13)$$

Weitere Details und Schwierigkeiten sind in [17] zu finden. Es ist eindeutig zu sehen, daß sich dieser für $k \rightarrow \infty$, grob gesprochen, wie $S_{\mu\nu}(k, m^2) \rightarrow 1$ verhält und somit die Renormierbarkeit der Theorie in Frage stellt. Die Hoffnung, daß dennoch eine renormierbare Theorie explizit massiver Eichbosonen aufgestellt werden könne, in der sich verschiedene Divergenzen gegeneinander weghöben, zerschlug sich, so daß ein anderer Weg gesucht werden mußte. Dieser wurde in [3, 4, 5] mit Hilfe des Higgs-Kibble-Mechanismus [6, 7, 8, 9], der hier kurz dargelegt werden soll, gefunden.

Zusätzlich zu dem fermionischen und bosonischen Anteil kann ein weiterer Beitrag zu der Lagrange-Dichte geschrieben werden, der die Symmetrie 1.2 erfüllt. Zu diesem Zwecke wird ein komplexes skalares Doublett

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

mit den Quantenzahlen $Y = 1$, $I_3 = \pm \frac{1}{2}$ eingeführt. Dies erlaubt neben einem kinetischen Term

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi), \quad (1.15)$$

mit der kovarianten Ableitung 1.7 und dem Potential

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \frac{\lambda}{2} (\Phi^\dagger \Phi)^2 - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi \quad (1.16)$$

weitere Kopplungen, sogenannte Yukawa-Kopplungen, zwischen Fermionen und dem skalaren Feld:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk} = & - \sum_{i,j=1}^3 \left(G_{ij}^d (\bar{Q}_L^i \Phi) d_R^j + h.c. \right) \\ & - \sum_{i,j=1}^3 \left(G_{ij}^u (\bar{Q}_L^i \tilde{\Phi}) u_R^j + h.c. \right). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Mit den bereits in 1.5 eingeführten Bezeichnungen für die Quarks, dem ladungskonjugierten Higgsdoublett

$$\tilde{\Phi} = i\sigma_2 \Phi^* = \begin{pmatrix} \Phi_B^* \\ -\Phi_A^* \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

sowie den Yukawa-Matrizen G_{ij} . Der Leptonsektor, der in dieser Arbeit keine Rolle spielen wird, wird von nun an nicht weiter betrachtet⁵. Bis zu diesem Punkte erfüllen alle eingeführten Terme die lokale $U_Y(1) \otimes SU_I(2)$ -Symmetrie und sowohl Fermionen wie Bosonen sind masselos. Um diesen Zustand zu ändern, wird die Symmetrie spontan gebrochen. Mittels einer lokalen $SU(2)$ -Transformation kann stets dafür gesorgt werden, daß $\Phi_A = 0$ und $\Phi_B \in \mathbb{R}$ gilt. Auf diese Weise ergibt sich in der sogenannten unitären Eichung das Minimum des Potentials 1.16 zu:

$$\Phi_{Grund} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix}, \quad \phi_0^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}. \quad (1.19)$$

Dieser Zustand niedrigster Energie ist nun im Gegensatz zum Potential selbst nicht symmetrisch unter der lokalen Eichsymmetrie. Eine $SU(2)$ -, bzw. $U(1)$ -Transformation überführt das Minimum nicht in sich selber. Einzige eine Kombination der Art

$$e^{-i\Theta \frac{Y}{2}} e^{-i\Theta \frac{\tau^3}{2}} = e^{-i\Theta} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\Theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Theta}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\Theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

läßt den Grundzustand invariant. Es verbleibt demnach eine Symmetrie mit dem Generator

$$Q = Y + \frac{\tau^3}{2}, \quad (1.21)$$

der elektrischen Ladung, womit die ursprüngliche Symmetrie der Lagrange-Dichte durch den Vakuumzustand auf

$$U_Y(1) \otimes SU_I(2) \xrightarrow{\phi_0} U_Q(1) \quad (1.22)$$

heruntergebrochen wird. Wird das skalare Doublett um das Minimum entwickelt

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad h(x) \in \mathbb{R} \quad (1.23)$$

und dies in den kinetischen Term, das Potential sowie die Yukawa-Kopplungen eingesetzt, so ergeben sich neben vielerlei Wechselwirkungen, die entscheidend für die Renormierbarkeit des Standardmodells sind [10, 11], vor allem die Massen für die Eichbosonen, für ein skalares Higgs-Feld und für die Quark-, bzw. Lepton-Felder. Werden konstante- und Terme linear in h vernachlässigt, ergeben sich für Potential

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \mu^2 h^2 + \frac{\mu^2 h^3}{\sqrt{2} \phi_0} \frac{\mu^2 h^4}{8 \phi_0^2} = V(h). \quad (1.24)$$

und für die in 1.15 eingeführte Lagrange-Dichte des skalaren Doubletts:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H &= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{g_2^2}{2} W_\mu^- W^{+\mu} \left(\phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{4} (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu \left(\phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \right)^2 - V(h). \end{aligned} \quad (1.25)$$

⁵Die Yukawa-Kopplungen besitzen für Leptonen dieselbe Form, doch läßt sich für das rechtshändige Neutrino aufgrund seiner Quantenzahlen ein weiterer, ein Majorana-Massenterm einführen. Dieser erlaubt Übergänge zwischen Neutrinos und Antineutrinos und demnach Leptonzahlverletzung. Eine kurze Einführung findet sich zum Beispiel in [22]

Hierbei sind einige neue Notationen eingeführt worden. Die W -Bosonen sind nach ihren Ladungseigenzuständen und die neutralen Bosonen wiederum nach ihren Massenzuständen aufgeteilt worden. Für eine detailliertere Herleitung sei zum Beispiel auf [22] verwiesen.

$$\begin{aligned} W_\mu^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \pm iW_\mu^2) \\ Z_\mu &= W_\mu^3 \sin \Theta_W + B_\mu \cos \Theta_W \\ A_\mu &= W_\mu^3 \cos \Theta_W + B_\mu \sin \Theta_W \end{aligned} \quad (1.26)$$

Der in obigen Gleichungen auftauchende Weinberg-Winkel Θ_W ist definiert durch

$$\cos \Theta_W = \frac{g_2}{(g_1^2 + g_2^2)^{1/2}} \quad \sin \Theta_W = \frac{g_1}{(g_1^2 + g_2^2)^{1/2}}. \quad (1.27)$$

Mit den Umkehrtransformationen zu 1.26

$$\begin{aligned} B_\mu &= A_\mu \cos \Theta_W - Z_\mu \sin \Theta_W \\ W_\mu^3 &= A_\mu \sin \Theta_W + Z_\mu \cos \Theta_W \end{aligned} \quad (1.28)$$

lassen sich die Feldstärketensoren 1.12 ebenfalls in diese Basis übertragen, so daß sich ein skalares, reelles Higgs-Boson, zwei massive geladene, ein massives sowie ein masseloses neutrales Vektorboson identifizieren lassen. Zudem kann mit der Kopplung an das Photon A_μ in 1.7 und mit der Identifikation

$$e = -g_1 \cos \Theta_W = g_2 \sin \Theta_W \quad (1.29)$$

die Gell-Mann-Nishijima-Formel 1.21 rückwirkend begründet werden. Ein Vergleich der Freiheitsgrade vor- und nach der spontanen Symmetriebrechung, vier masselose Vektorbosonen mit zwei sowie ein komplexes, skalares Doublett mit vier Freiheitsgraden, respektive drei massive Vektorbosonen mit drei, ein masseloses Vektorboson mit zwei und ein reelles skalares Higgs-Boson mit einem Freiheitsgrad, zeigt, daß die in der unitären Eichung 1.19 beseitigten Freiheitsgrade als longitudinale Komponenten der massiven Vektorbosonen wieder auftauchen. Deren Massen lauten wie folgt [27]:

$$M_W = \frac{g_2 \phi_0}{\sqrt{2}} = 80.403 \pm 0.029 \text{ GeV}, \quad (1.30)$$

$$M_Z = \frac{(g_1 + g_2)^{1/2} \phi_0}{\sqrt{2}} = \frac{M_W}{\cos \Theta_W} = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}. \quad (1.31)$$

Für das Higgs-Boson gibt die Particle-Data-Group(PDG) [27] die untere Grenze $\mu = m_h > 114.4 \text{ GeV}$ mit 95% Konfidenzlevel an. Im Hinblick auf die weitere Arbeit soll nun ein Blick auf die Konsequenzen der Symmetriebrechung im Quarksektor geworfen werden. Der leptonische Sektor wird in dieser Arbeit nicht betrachtet und daher nicht weiter angeführt. Werden mögliche Majorana-Massen der Neutrinos außer acht gelassen, ergibt sich zudem vom Mechanismus her ein identisches

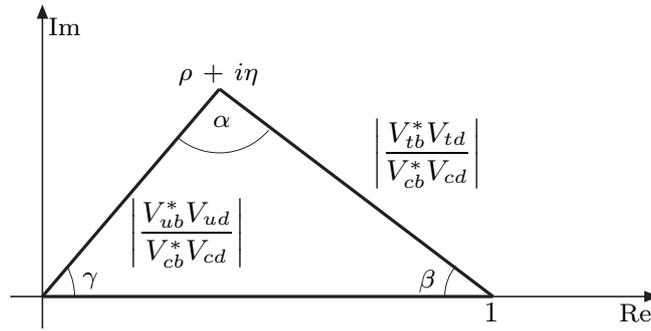


Abbildung 1.1: Das Unitaritätsdreieck

Bild. Weiterführende Informationen sind in der entsprechenden Literatur zu finden. Die resultierenden Kopplungen der Quarks an das Higgs-Boson sollen im Weiteren ebenfalls außer acht gelassen werden. Von entscheidendem Interesse sind hier die Massenterme, die aus den Yukawa-Kopplungen 1.17 entstehen:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{Yuk} \rightarrow \mathcal{L}_M = & -\phi_0 \sum_{i,j=1}^3 (G_{ij}^d \bar{d}_L^i d_R^j + h.c.) \\
 & -\phi_0 \sum_{i,j=1}^3 (G_{ij}^u \bar{u}_L^i u_R^j + h.c.). \quad (1.32)
 \end{aligned}$$

Die Matrizen G_{ij}^d , G_{ij}^u lassen sich durch eine biunitäre Transformation $U_1 G U_2^\dagger$ auf Diagonalf orm bringen⁶, so daß sich die Massenmatrizen der Quarks aus dem Produkt des Vakuumerwartungswertes ϕ_0 und der Stärke der Yukawa-Kopplung des jeweiligen Quarks in der rotierten Basis ergeben. Die Auswirkungen dieser Diagonalisierung auf die Kopplung der Quarks an die Eichbosonen wird im nächsten Abschnitt dargelegt.

1.1.3 CKM-Mechanismus

Zu Beginn dieses Abschnitts wird zur Verdeutlichung der stattfindenden Basisrotation noch einmal der Quark-Massenterm in Matrixschreibweise betrachtet, wobei hier die allgemeinste Konvention angenommen wird, indem weder up- noch down-Quarks

⁶Dies gilt für allgemeine quadratische Matrizen. Der Beweis basiert auf der Tatsache, daß GG^\dagger hermitesch ist und demnach $U_1 G G^\dagger U_1^\dagger = G_D^2$, mit G_D diagonal, ist. Ist keines der Diagonalelemente von G_D null, so läßt sich ein hermitesches $H = U_1^\dagger G_D U_1$ sowie sein ebenfalls hermitesches Inverses $H^{-1} = U_1^\dagger G_D^{-1} U_1$ definieren. Mit der Konstruktion eines unitären $V = H^{-1} G$, die Unitarität kann durch einsetzen in $VV^\dagger = 1$ gezeigt werden, und $G = HV = U_1^\dagger G_D U_1 V = U_1^\dagger G_D U_2$ ist die Aussage unter genannten Voraussetzungen gezeigt.

bereits diagonalisiert angesehen werden:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_M &= -(\bar{d}_L M^d d_R + \bar{u}_L M^u u_R + h.c.) \\
 &= -\left(\bar{d}_L U_1^{d\dagger} \underbrace{U_1^d M^d U_2^{d\dagger}}_{=\text{diag}(m_d, m_s, m_b)} U_2^d d_R + \bar{u}_L U_1^{u\dagger} \underbrace{U_1^u M^u U_2^{u\dagger}}_{=\text{diag}(m_u, m_c, m_t)} U_2^u u_R + h.c. \right).
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

Dieser Basiswechsel muß ebenso in den Wechselwirkungstermen, die aus den kovarianten Ableitungen 1.7 der Fermionen folgen, durchgeführt werden. In den Kopplungen an die neutralen Eichbosonen A_μ , bzw. Z_μ treten jeweils nur Quarks des up-Types oder des down-Types sowie entweder rechts- oder linkshändige Quarks auf. Es ergeben sich demnach keine Veränderungen. Einzig die Wechselwirkungen mit den geladenen W -Bosonen bedürfen der näheren Betrachtung. Der Übergang von up- zu down-Quarks resultiert hier in einer unitären Matrix, die Übergänge zwischen den verschiedenen Familien induzieren kann:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_W &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} (\bar{u}_L \gamma^\mu d_L W_\mu^+ + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L W_\mu^-) \\
 &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left(\bar{u}'_L \gamma^\mu \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^u & U_1^{d\dagger} \end{bmatrix}}_{V_{CKM}} d'_L W_\mu^+ + \bar{d}'_L \gamma^\mu \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^d & U_1^{u\dagger} \end{bmatrix}}_{V_{CKM}^\dagger} u'_L W_\mu^- \right).
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

Diese ist die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa- oder kurz CKM-Matrix. Eine komplexe, unitäre, 3×3 -Matrix:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}. \tag{1.35}$$

Als solche besitzt sie neun Parameter. Fünf davon können jedoch in Phasenredefinitionen der Quarkfelder absorbiert werden, so daß drei Euler-Winkel und eine komplexe Phase übrig bleiben. Letztere ist die einzige Quelle der CP-Verletzung im Standardmodell. Die einzelnen Transformationen C, die Ladungskonjugation sowie P, die Raumspiegelung, sind im Standardmodell durch die unterschiedliche Implementierung links- und rechtshändiger Komponenten in der schwachen Wechselwirkung maximal durch diese verletzt. Gäbe es nur zwei Fermionfamilien, wäre V_{CKM} rein reell und eine kombinierte CP-Transformation wäre eine Symmetrie des Standardmodells. CP-Verletzung tritt erst für drei Familien auf [28]. Für phänomenologische Zwecke hat sich die Wolfenstein-Parametrisierung [29]

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & \lambda & \lambda^3 A(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & \lambda^2 A \\ \lambda^3 A(1 - \rho - i\eta) & -\lambda^2 A & 1 \end{pmatrix} + O(\lambda^4), \quad \lambda \approx 0, 2, \tag{1.36}$$

die die Größenordnung der einzelnen CKM-Elemente deutlich macht, als nützlich erwiesen. Sie nutzt aus, daß die CKM-Matrix stark hierarchisch ist, daß heißt, daß Elemente umso kleiner werden je weiter sie von der Hauptdiagonalen entfernt sind, was

gleichbedeutend mit einer umso geringeren Übergangswahrscheinlichkeit für Quarks ist, aus je weiter entfernten Familien diese stammen. Der Parameter λ entspricht dabei dem Cabibbo-Winkel [30].

Die Unitarität $V_{CKM}V_{CKM}^\dagger = 1$ der CKM-Matrix resultiert in neun Bedingungen⁷, von denen sechs als Dreiecke in der komplexen $\rho - \eta$ -Ebene dargestellt werden können. Eine aufgrund der identischen Größenordnungen aller Beiträge am häufigsten verwendeten

$$V_{cb}^*V_{cd} + V_{tb}^*V_{td} + V_{ub}^*V_{ud} = 0, \quad (1.37)$$

ist, normiert auf den am besten bekannten ersten Term, in Abbildung 1.1 dargestellt. Die Winkel des Dreiecks ergeben sich zu

$$\gamma = -\arg(V_{ub}), \quad \beta = \pi - \arg(V_{td}), \quad \alpha = \pi - \beta - \gamma. \quad (1.38)$$

Eine der wichtigsten Aufgaben der Flavourphysik ist es, die Parameter dieses Dreiecks zu bestimmen und auf diese Weise den CKM-Mechanismus des Standardmodells zu testen. Ausführliche Einführungen in Grundlagen und Phänomenologie der CP-Verletzung sowie der CKM-Matrix, die den Rahmen dieser Zusammenfassung übersteigen, finden sich zum Beispiel in [31, 32, 33, 34, 35].

1.1.4 Quantenchromodynamik(QCD)

Neben der dargelegten elektroschwachen- beinhaltet das Standardmodell auch die starke Wechselwirkung, die durch die Quantenchromodynamik(QCD) beschrieben wird. Diese ist verantwortlich für die Bindung von Quarks zu Nukleonen und wiederum die Bindung dieser zu Atomkernen. Ähnlich der elektroschwachen Wechselwirkung ist die QCD eine Eichtheorie, deren Eichbosonen jedoch nur an die Quarks koppeln. Aufgrund der nichtabelschen Eichgruppe

$$SU(3)_c$$

und den damit zusammenhängenden Eigenschaften der asymptotischen Freiheit sowie des Quark-confinements besitzt die QCD eine äußerst reichhaltige Struktur, die hier nur in ihren Grundzügen dargestellt werden kann. Für eine Einführung sei insbesondere auf [36] oder aber auf verschiedene Vorlesungen [37, 38, 39, 40] verwiesen. Analog zur schwachen Wechselwirkung, in der die linkshändigen Fermionen zu fundamentalen Doublets angeordnet werden, bilden die Quarks in der QCD Triplets⁸, wobei die der Eichgruppe zugeordnete Ladung Farbe genannt wird:

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad q = u, d, s, c, b, t. \quad (1.39)$$

⁷Daher werden weiter oben nur neun Parameter erwähnt. Eine allgemeine komplex 3×3 -Matrix besäße 18 Parameter.

⁸Neben den Hinweisen z.B. aus der notwendigen Asymmetrie der Wellenfunktion des Δ^{++} sind in [41] die Eigenwerte des quadratischen Kasimir-Operators für die fundamentale- und adjungierte Darstellung bestimmt worden. Die erhaltenen Werte $C_F = 1.30 \pm 0.01 \pm 0.09$, $C_A = 2.89 \pm 0.03 \pm 0.21$ stimmen hervorragend mit den Werten der $SU(3)$, $C_F = \frac{4}{3}$ und $C_A = 3$ überein.

Das Transformationsverhalten ergibt sich direkt aus dem Analogon für die $SU(2)$:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \rightarrow \exp\left(-i \sum_{a=1}^8 \chi^a T^a\right) \times \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

Für jeden der acht Generatoren T^a der $SU(3)_c$ -Gruppe wird ein Eichfeld A_μ^a , wobei eine Verwechslung mit dem Photon aus den vorigen Abschnitten ausgeschlossen sein sollte, eingeführt. Die kovariante Ableitung ergibt sich dann zu:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s A_\mu, \quad A_\mu = A_\mu^a T^a, \quad (1.41)$$

wobei die Generatoren die $su(3)$ -Algebra mit den Strukturkonstanten f^{abc} erfüllen:

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c, \quad \text{Tr} [T^a T^b] = 2\delta^{ab}. \quad (1.42)$$

Sowohl Transformationsverhalten der Eichfelder, wie auch der Feldstärketensor lassen sich direkt aus den entsprechenden Ausdrücken für die $SU(2)$ verallgemeinern:

$$\begin{aligned} A_\mu &= A_\mu^a T^a \rightarrow U_c(x) A_\mu(x) U_c^\dagger(x) - \frac{i}{g_s} (\partial_\mu U_c) U_c^\dagger \\ G_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig_s [A_\mu, A_\nu] \\ &= \frac{i}{g_s} [D_\mu, D_\nu] \end{aligned} \quad (1.43)$$

Mit diesen Konventionen läßt sich die Lagrange-Dichte der QCD als

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{2} \text{Tr} [G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}] + \sum_{q=u,d,s,\dots} \bar{q} (i\not{D} - m_q) q \quad (1.44)$$

schreiben. Wie schon in der schwachen Wechselwirkung und wie dort erwähnt generell in nichtabelschen $SU(n)$ -Eichtheorien, tauchen Selbstwechselwirkungen unter den Eichbosonen, den Gluonen, auf, da die Bosonen selbst Farbladung tragen. Letztere Eigenschaft führt unter anderem zur asymptotischen Freiheit der QCD, die im nächsten Abschnitt kurz erläutert werden soll.

Renormierung und laufende Kopplung

Die Renormierung von Quantenfeldtheorien füllt in Textbüchern ganze Kapitel, daher sei für eine ausführliche Behandlung auf [15, 17, 16, 36] verwiesen. Hier soll nur ein Blick auf einige der Besonderheiten der QCD geworfen werden. Eine Standardmethode zur Berechnung physikalischer Größen ist die Störungstheorie, daß heißt eine Reihenentwicklung in der notwendigerweise kleinen Kopplungskonstanten der entsprechenden Wechselwirkung. In der QCD taucht g_s stets quadratisch auf, daher hat es sich als günstig erwiesen,

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi} \quad (1.45)$$

als Entwicklungsparameter zu verwenden. Eine sehr elegante Methode zur Bestimmung der einzelnen Reihenglieder liegt in der Berechnung von Feynman-Diagrammen

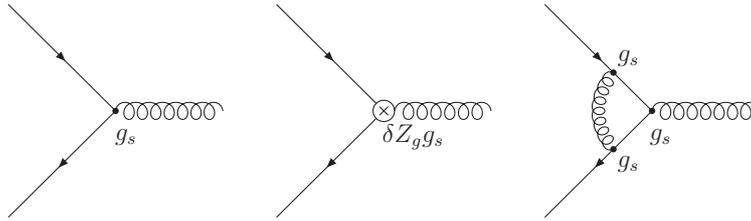


Abbildung 1.2: *Beispiel zur Renormierung der Kopplungskonstanten auf Einschleifen-niveau. Auf Baumgraphenlevel wird ein Gegenterm eingeführt, der Divergenz des Schleifendiagrammes absorbiert. Hier ist nur eines der relevanten Schleifendiagramme gezeigt.*

über die entsprechenden Feynman-Regeln. Letztere lassen sich aus der Lagrange-Dichte der betrachteten Theorie bestimmen und sind für die QCD zum Beispiel in [15, 17] oder [36] zu finden. In führender Ordnung, dem sogenannten Baumgraphen-niveau, sind die Impulse aller vorkommenden Teilchen durch Anfangs- und Endzustand festgelegt. Darüberhinaus kommen in höheren Ordnungen Schleifenkorrekturen vor, in denen Integrale über interne Quark- bzw. Gluonimpulse auftauchen. Diese Integrale sind zumeist divergent und es bedarf eines konsistenten Schemas, um die auftauchenden Divergenzen zu behandeln. In dieser Arbeit wird dort wo nötig die dimensionale Regularisierung, gemeinsam mit dem \overline{MS} -Schema verwendet. In dimensionaler Regularisierung werden divergente Integrale in $D = 4 + \epsilon$ -Raum-Zeit-Dimensionen⁹ berechnet. Für $\epsilon \neq 0$ sind diese endlich und die ursprünglichen Divergenzen resultieren im Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ in $\frac{1}{\epsilon}$ -Polen, bzw. für $D \rightarrow 4$ in $\frac{1}{4-D}$ -Polen. Die Renormierung basiert nun auf einer Redefinition der in der Lagrange-Dichte vorkommenden nackten Parameter und Felder. Sie werden dabei als Produkt der renormierten Größe mit dem entsprechenden Renormierungsfaktor geschrieben:

$$\begin{aligned}
 A_{\mu,0}^a &= \sqrt{Z_3} A_{\mu}^a, \\
 q_0 &= \sqrt{Z_2} q, \\
 g_{s,0} &= Z_g g_s, \\
 m_{q,0} &= Z_m m_q.
 \end{aligned}
 \tag{1.46}$$

Für diese Renormierungsfaktoren gilt jeweils:

$$Z_i = 1 + \delta Z_i = 1 + \mathcal{O}(\alpha_s) + \mathcal{O}(\alpha_s^2) + \dots
 \tag{1.47}$$

Das Einsetzen in die ursprüngliche Lagrange-Dichte kann als Einführen von Gegen-terminen angesehen werden. Die divergenten Term zu einer bestimmten Ordnung in α_s werden in die ebenfalls divergenten δZ_i zur selben Ordnung absorbiert, siehe zum Beispiel Abbildung 1.2. Dieses Vorgehen ist jedoch keineswegs Eindeutig. Zusätzlich zu den Divergenzen können endliche Terme mit in die Renormierungsfaktoren absorbiert werden. Unterschiedliche Renormierungsschemata geben unterschiedliche Vorschriften. Das in dieser Arbeit durchgehend verwendete modifizierte minimale

⁹Allgemeiner sollte dies $D = n + \epsilon$ mit n der Dimension der betrachteten Theorie heißen.

Subtraktionsschema (\overline{MS} -Schema) inkorporiert zu den in dimensionaler Regularisierung auftretenden $\frac{2}{\epsilon}$ auch die stets mit auftretenden endlichen Terme $\log(4\pi)$ und γ_E , die Eulersche Konstante, so daß

$$\delta Z_i \sim \Delta_{div} = -\frac{2}{\epsilon} + \log(4\pi) - \gamma_E. \quad (1.48)$$

gesetzt wird.¹⁰ In Kapitel 5.2 wird, um die Verbindung zu einer älteren Arbeit herzustellen der Übergang zu einem anderen Renormierungsschema, dem Polmassenschema, benötigt. Die verwendete Formel wird dort angegeben. Genauere Ausführungen zu verschiedenen Renormierungsschemata finden sich zum Beispiel in [36]. Durch die Renormierungsprozedur taucht ein unphysikalischer Parameter, die Renormierungsskala auf. Bei einer theoretischen Berechnung zu allen Ordnungen der Störungstheorie hebt sich diese wieder heraus. Da in der Praxis jedoch stets nur endliche Ordnungen betrachtet werden, hängt das Resultat gezwungenermaßen von dieser Skala ab. In dimensionaler Regularisierung wird diese zum Beispiel eingeführt, um die Massendimension der Schleifenintegrale zu erhalten:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \left(\frac{\mu}{(2\pi)} \right)^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}. \quad (1.49)$$

Die Abhängigkeit der renormierten Größen von der Skala μ wird durch die jeweilige Renormierungsgruppengleichung bestimmt. Diese wird gewonnen, indem 1.46 nach μ abgeleitet und ausgenutzt wird, daß die nackte Größe nicht von μ abhängt. Für die starke Kopplungskonstante g_s ergibt sich

$$Z_g \mu \left(\frac{dg_s}{d\mu} \right) + g_s \left[\mu \left(\frac{dZ_g}{d\mu} \right) \right] = Z_g g_s \left(\frac{1}{g_s} \beta(g_s) + \frac{1}{Z_g} \mu \frac{d}{d\mu} Z_g \right), \quad (1.50)$$

mit der β -Funktion

$$\beta(g_s) = \mu \frac{d}{d\mu} g_s = \frac{d}{d \ln \mu} g_s. \quad (1.51)$$

Andererseits ergibt sich aus 1.50:

$$\beta(g_s) = -g_s \frac{1}{Z_g} \mu \frac{d}{d\mu} Z_g. \quad (1.52)$$

Dies kann ebenso wie der Renormierungsfaktor Z_g in der Kopplungskonstante entwickelt und demnach Ordnung für Ordnung in Störungstheorie berechnet werden. In Einschleifenordnung wird dies zu

$$\beta(g_s) = -\beta_0 \frac{g_s^3}{(4\pi)^2} \quad (1.53)$$

mit dem bekannten Ausdruck¹¹

$$\beta_0 = \frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} n_f. \quad (1.54)$$

¹⁰Das minimale Subtraktionsschema (MS) setzt $\delta Z_i \sim \frac{2}{\epsilon}$

¹¹Die Ordnungen β_0 sowie β_1 hängen nicht vom verwendeten Renormierungsschema ab. Dies ändert sich für β_i , $i \geq 2$.

Hier geht die Anzahl der Farben N_c sowie der bei der Skala μ aktiven Quark-Flavour n_f ein. In der QCD mit $N_c = 3$ ist β_0 stets positiv und damit die β -Funktion ebenso stets negativ. Übertragen auf den üblichen Entwicklungsparameter α_s , 1.45, ergibt sich eine Differentialgleichung

$$\mu \frac{d}{d\mu} \alpha_s = -2\beta_0 \frac{\alpha_s^2}{4\pi}, \quad (1.55)$$

deren Lösung in dieser Ordnung

$$\alpha_s(\mu) = \frac{\alpha_s(\mu_0)}{1 + \frac{\alpha_s(\mu_0)}{4\pi} \beta_0 \ln \left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right)} \quad (1.56)$$

lautet. μ_0 ist eine Referenzskala. Üblicherweise die Skala, bei der α_s experimentell gemessen wird. Da $\beta_0 > 0$ ist, zeigt sich in dieser Ordnung

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \alpha_s(\mu) = 0 \quad (1.57)$$

und damit explizit die asymptotische Freiheit. Die Eigenschaft der QCD, die gewährleistet, daß sich Quarks bei großen Impulsüberträgen, daß heißt de facto bei kleinen Abständen, wie quasifreie Teilchen verhalten. Diese Aussage gilt darüber hinaus allgemein zu allen Ordnungen der Störungstheorie¹². In Abbildung 1.3 wird ein Vergleich zwischen experimentellen Daten und dem zur Ordnung α_s^4 berechneten Verhalten der Kopplungskonstante gezeigt. Deutlich ist der Abfall von α_s für wachsendes μ zu sehen.

Umgekehrt steigt die Kopplung für kleiner werdende Skala und demnach größer werdende Abstände. Schließlich divergiert sie und zeichnet so eine QCD-inhärente Skala Λ_{QCD}

$$\Lambda_{QCD}^2 = \mu_0^2 \exp \left(-\frac{4\pi}{\alpha_s(\mu_0) \beta_0} \right) \quad (1.58)$$

aus. Mit der sich 1.56 in folgende Form umschreiben läßt:

$$\alpha_s(\mu) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right)}. \quad (1.59)$$

Dies begründet auch, warum Quarks nie als freie Teilchen zu sehen sind, sondern nur in farbneutralen gebundenen Zuständen. Bei zunehmenden Abstand der Quarks nimmt die Kraft zwischen diesen und damit die Energie in der Feldkonfiguration zu, so daß es bei genügend großen Abstand energetisch günstiger wird, ein oder mehrere Quark-Antiquark-Paare zu erzeugen, die sich mit den ursprünglichen Quarks zu neuen Bindungszuständen anordnen. Für praktische Rechnungen ergibt sich somit das Problem, daß die elementaren Freiheitsgrade der QCD, die Quarks und Gluonen, nicht den beobachteten Bindungszuständen entsprechen und daß letztere zudem nicht via einer Störungsreihe angenähert werden können. Die konsistente Behandlung von hadronischen Matrixelementen und damit hadronischen Bindungszuständen stellt eine der größten Herausforderungen in der Flavour-Physik dar.

¹²Für die Entdeckung der asymptotischen Freiheit [12, 13] wurde im Jahr 2004 der Nobelpreis vergeben.

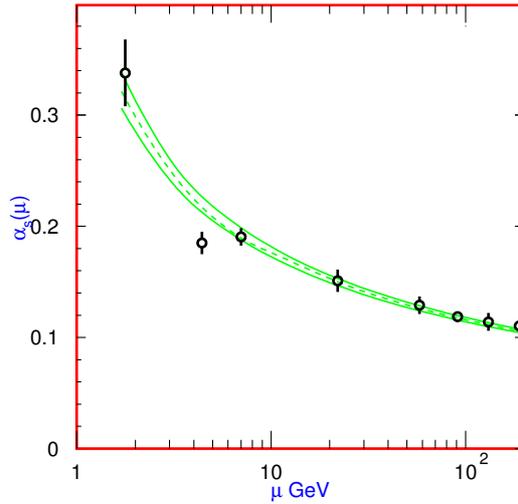


Abbildung 1.3: α_s in Abhängigkeit von der Energieskala μ [27]

1.2 Aufgabenstellung und Gliederung

Wie schon erwähnt bildet der CKM-Mechanismus einen der zentralen Punkte des Standardmodells. Eine komplexe Phase in der CKM-Matrix stellt die einzige Quelle der CP-Verletzung und damit der Materie-Antimaterie-Asymmetrie im Universum dar. Observable, die Aufschluß über die einzelnen CKM-Elemente geben könnten, sind, wie am Ende des letzten Abschnittes kurz dargelegt, zumeist mit hadronischen Unsicherheiten behaftet, die aus dem Quark-Confinement der QCD folgen. Ziel der theoretischen Flavour- und insbesondere auch der B-Physik muß es sein, diese Unsicherheiten zu minimieren, um im Wechselspiel zwischen Theorie und Experiment den CKM-Sektor genauest möglich zu überprüfen. Auf diese Weise zugleich Einschränkungen an Ansätze liefernd, die über das Standardmodell hinausgehen.

Im nächsten Kapitel wird die Phänomenologie einer Art Zerfälle, die geeignet ist, CKM-Matrixelemente zu extrahieren, vorgestellt. Die auftretenden hadronischen Matrixelemente werden dargelegt und bekannte Eigenschaften gesammelt. Zum Abschluß des Kapitels werden zum Vergleich einige Analysen der jüngeren Vergangenheit erklärt und Vor- wie Nachteile erläutert.

Kapitel drei liefert das im Weiteren Verlauf benötigte theoretische Rüstzeug der Operator-Produkt-Entwicklung sowie der QCD-Summenregeln. Zudem werden die Eigenschaften der in den Lichtkegelsummenregeln verwendeten Verteilungsamplituden ausführlich angeführt.

Mit Kapitel vier beginnt der eigentliche Kern der Arbeit. Hier wird die in [42] veröffentlichte Untersuchung der Dreiteilchenverteilungsamplituden des B-Mesons detailliert dargelegt. Neue Summenregeln zur Berechnung der asymptotischen Anteile der Verteilungsamplituden werden hergeleitet und die in [43] angegebenen Differentialgleichungen zwischen Zwei- und Dreiteilchenbeiträgen reproduziert. Letztere werden mit Hilfe von Modellen basierend auf den Summenregelergebnissen gelöst und einige Resultate sowie Probleme diskutiert. Zum Ende des Kapitels werden

bisher unveröffentlichte Summenregeln für das chromoelektrische- bzw. chromomagnetische Moment λ_E^2 respektive λ_H^2 des B-Mesons angegeben, die die Näherung $\lambda_E^2 = \lambda_H^2$ stützen, deren Stabilität jedoch eine numerische Auswertung unangemessen erscheinen lassen.

Kapitel fünf ist in zwei Abschnitte aufgeteilt, die jeweils eine Methode zur Bestimmung von B -Zerfallsformfaktoren umfassen. Im Ersten werden die Grundlagen sowie die Herleitung, der in [42] entwickelten Lichtkegelsummenregeln mit B-Meson-Verteilungsamplituden, erklärt und eine aufwendige numerische Auswertung für eine Vielzahl phänomenologisch interessanter Größen vorgenommen. Besonderes Augenmerk kommt dem Beweis der Lichtkegeldominanz sowie dem Verhalten im Grenzwert $m_b \rightarrow \infty$ verglichen mit den bekannten Resultaten aus Kapitel zwei zu.

Im Zweiten wird die in [44, 45] vorgestellte und bisher ungeprüfte Berechnung der $B \rightarrow \pi$ -Formfaktoren bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s)$ in den Zweiteilchen Twist drei Termen erneut durchgeführt. Im Unterschied zur Originalrechnung wird hier statt des Polmassenschemas das besser geeignete \overline{MS} -schema verwendet, was sich in einem günstigeren Verhalten der α_s -Entwicklung niederschlägt. Unter Einbeziehung von Termen bis Twist vier und erwähnten α_s -Korrekturen wird ein Wert für V_{ub} gewonnen, wobei hier strikt zwischen analytischer Rechnung, die der Autor selbst durchgeführt oder nachvollzogen hat und numerischer Auswertung, an der der Autor nur am Rande beteiligt war, getrennt werden muß. Eine Veröffentlichung der vorgestellten Ergebnisse ist in Arbeit [46].

Kapitel sechs gibt die obligatorische zusammenfassende Diskussion.

Die Anhänge, die einen nicht unerheblichen Anteil dieser Arbeit ausmachen sind wie folgt gegliedert:

Anhang A liefert neben mathematischen Grundlagen und Formeln auch explizite Rechnungen, die für Kapitel 5.2 benötigt werden.

Anhang B stellt eine bisher unveröffentlichte Erweiterung des vierten Kapitels unter Bezugnahme auf die in [47] angegebene allgemeine Zerlegung des Dreiteilchenmatrixelementes des B-Mesons dar.

Anhang C geht auf eine Inkonsistenz zwischen den in [48] und den hier auf [43] basierenden verwendeten Normierungen der Dreiteilchverteilungsamplituden ein.

Anhang D listet die vollständigen Ergebnisse aus Kapitel 5.1 mit endlicher Masse des leichten Zuschauerquarks sowie mit Dreiteilchenbeiträgen auf.

Anhang E gibt die in Kapitel 5.2 verwendeten Konventionen für die Pion-Verteilungsamplituden an.

In Anhang F sind erstmals sämtliche Streuamplituden und Imaginärteile zur Bestimmung der α_s -Korrekturen bis Twist drei für die Formfaktoren $f_{B\pi}^+$, $f_{B\pi}^+ + f_{B\pi}^-$ sowie $f_{B\pi}^T$ veröffentlicht.

Kapitel 2

Exklusive semileptonische B-Zerfälle

B-Zerfälle liefern eine hervorragende Möglichkeit, den CKM-Mechanismus des Standardmodells zu prüfen. Alleine aus diesen lassen sich sämtliche Größen des Unitaritätsdreiecks bestimmen, bzw. einschränken. (Siehe Abbildung 2.1) Während die Winkel des Dreiecks aus hadronischen B-Zerfällen, β aus $B \rightarrow J/\psi K_s$, α aus $B^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ und $B^0 \rightarrow \rho^+\rho^-$ sowie γ aus der Interferenz von $B^- \rightarrow D^0 K^-$ und $B^- \rightarrow \bar{D}^0 K^-$, bestimmt werden, werden die Seitenlängen aus semileptonischen bzw. radiativen Zerfällen bestimmt. (Siehe Abbildung 2.2)

Hierbei muß zwischen inklusiven, es wird über die hadronischen Zerfallsprodukte summiert, z.B. $B \rightarrow X_c l \nu_l$ und exklusiven Zerfällen, es wird ein spezieller Zerfallskanal, z.B. $B \rightarrow \pi l \nu_l$, betrachtet, unterschieden werden. Aus theoretischer Sicht sind die inklusiven Zerfälle einfacher zu behandeln. Mittels der Heavy-Quark-Expansion (HQE) wird hier bei der Bestimmung zum Beispiel des CKM-Elements V_{cb} bereits eine Genauigkeit im Bereich von einigen wenigen Prozent erreicht. Mit dem Aufkommen weiterer Daten insbesondere durch die B-Fabriken, durch LHC_b und eine eventuelle Super B-Fabrik sollte jedoch die Bedeutung exklusiver Zerfälle stetig zunehmen. Um die Datenmengen nutzen zu können, bedarf es daher zuverlässiger theoretischer Berechnungen. Größtes Hindernis sind auch hier, wie bei rein hadronischen Zerfällen, die hadronischen Matrixelemente. Vereinfacht wird dies bei semileptonischen Zerfällen jedoch dadurch, daß nur ein einziges solches Matrixelement, parametrisiert durch verschiedene Formfaktoren, benötigt wird. Beispielhaft sei hier das leptonische Spektrum des Zerfalles $B^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l$ für masselose Leptonen mit nur einem Formfaktor $f^+(q^2)$ angegeben:

$$\frac{d\Gamma}{dq^2}(B \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e) = \frac{G_F^2 |V_{ub}|^2}{192 \pi^3 m_B^3} \lambda^{3/2}(q^2) |f_{B\pi}^+(q^2)|^2, \quad (2.1)$$

wobei $\lambda(q^2) = (m_B^2 + m_\pi^2 - q^2)^2 - 4m_B^2 m_\pi^2$ der Phasenraumfaktor und $G_F = \sqrt{2} \frac{g_W^2}{8M_W^2}$ die Fermi-Konstante ist. Ist die Form von $f_{B\pi}^+(q^2)$ bekannt, kann das Spektrum integriert werden und via der mittleren Lebenszeit τ_B des B-Mesons mit dem expe-

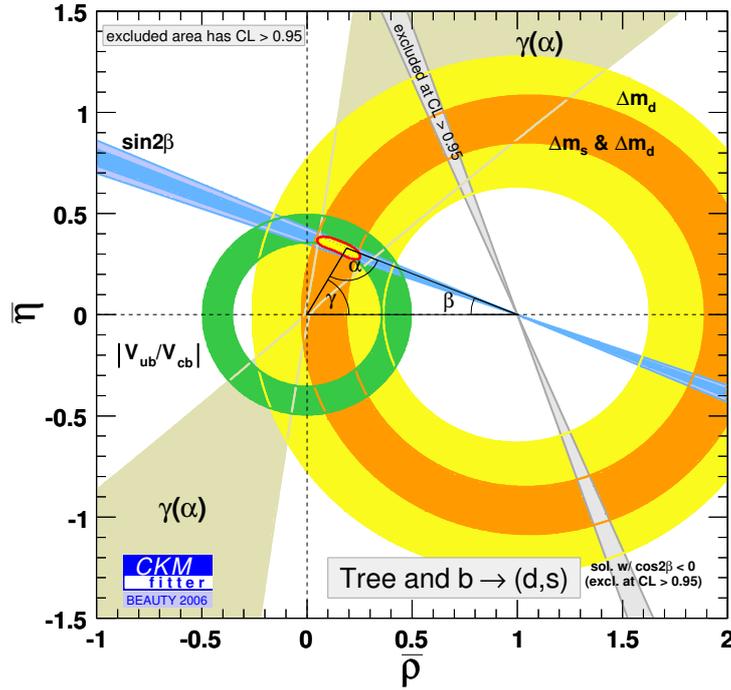


Abbildung 2.1: Einschränkungen für das Unitaritätsdreieck nur aus B -Zerfällen. (ICHEP 06)[50]

rimentell gemessenen Verzweigungsverhältnis verglichen werden:

$$\mathcal{B}(B \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e) = \frac{G_F^2 |V_{ub}|^2}{192\pi^2 m_B^3 \tau_B} \int_0^{q_{max}^2} dq^2 |f_{B\pi}^+(q^2)|^2 \lambda^{3/2}(q^2). \quad (2.2)$$

In Abschnitt 2.2 wird hierauf noch näher eingegangen. In Kapitel fünf werden neue Berechnungen für Formfaktoren im Bereich $0 \leq q^2 \leq 10 \text{ GeV}^2$ bzw. $0 \leq q^2 \leq 15 \text{ GeV}^2$, gegeben durch die Gültigkeit der entsprechenden Summenregeln, durchgeführt. Ziel dieses Kapitels ist es, einen Überblick über die Phänomenologie semileptonischer B -Zerfälle zu geben. Hierfür wird sich nach der Berechnung eines beispielhaften Zerfalls, insbesondere mit den Definitionen und Eigenschaften der Formfaktoren, die z.B. auch in QCD-Faktorisierung[49] eine entscheidene Rolle spielen, befaßt. Eine knapp gehaltene Übersicht über bisherige Analysen zu V_{ub} und $\frac{V_{td}}{V_{ts}}$ sowie ein Vergleich mit Ergebnissen aus inklusiven Zerfällen liefern Motivationen für die weitergehenden Betrachtungen des fünften Kapitels.

2.1 Hadronische Matrixelemente, Formfaktoren

In diesem Abschnitt wird, immer mit Blick auf die in Kapitel fünf durchgeführten Rechnungen, der Versuch unternommen, die theoretischen Grundlagen sowie die phänomenologische Relevanz der Formfaktoren herauszustellen. Dazu wird zunächst an einem einfachen Beispiel, dem $B \rightarrow \pi l \nu$ -Zerfall, die Notwendigkeit der Einführung

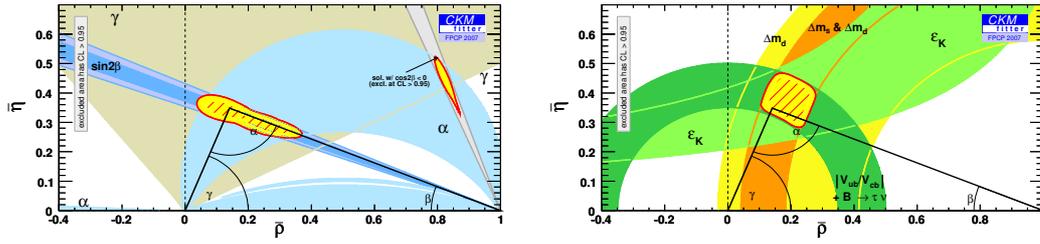


Abbildung 2.2: Links: Nur Bestimmung der Winkel. Rechts: Nur die Längen der Seiten. (Moriond 07)[50]

von Formfaktoren demonstriert. Daran anschließend werden die nötigen Definitionen eingeführt, um sodann auf generelle Eigenschaften, Symmetrien sowie Parametrisierungen, Ansätze und Probleme bei deren Bestimmung einzugehen. Um den Umfang der Arbeit nicht ungebührlich anwachsen zu lassen, werden die meisten theoretischen Konzepte nur angeführt und für weitergehende Behandlung wird auf die entsprechende Literatur verwiesen.

2.1.1 $B \rightarrow \pi l \nu$ Zerfall als Beispiel

Die angesprochene Problematik in semileptonischen B-Zerfällen läßt sich am einfachsten an einem Beispiel demonstrieren. Dafür wird hier der archetypische Zerfall $B \rightarrow \pi l \nu$, auf den in Kapitel 6 noch zurückgekommen wird, betrachtet. Auf Quarkniveau ist dieser leicht beschrieben. Ein b -Quark geht unter Aussendung eines W^+ -Bosons in ein \bar{u} -Quark über und das W^+ zerfällt in ein e^+ sowie ein ν_e . Siehe Abbildung 2.3. Wie bereits erwähnt existieren nach bisherigen Erkenntnissen keine freien

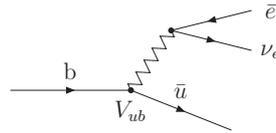


Abbildung 2.3: Zerfall $b \rightarrow \bar{u} e \nu_e$

Quarks oder Gluonen. Diese sind gebunden zu Hadronen, so daß anstelle eines einfachen Quarküberganges $\langle e^+ \nu_e \bar{u} | b \rangle$, das Übergangsmatrixelement $\langle e^+ \nu_e \pi^- | B^0 \rangle$, siehe Abbildung 2.4 (a), betrachtet werden muß. Dieses kann via Lehmann-Symanzik-Zimmermann Reduktionsformel [51]

$$\langle \nu_e(k_2) e^+(k_1) \pi^-(p) | B^0(p_B) \rangle = \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-ik_1 \cdot x_1} e^{-ik_2 \cdot x_2} \bar{u}_{\nu_e}(k_2) \Delta^{-1}(k_2) \langle \pi(p) | T \{ e(x_1) \bar{\nu}_e(x_2) \} | B^0(p_B) \rangle v_e(k_1) \Delta^{-1}(k_1), \quad (2.3)$$

mit Δ^{-1} den inversen Propagatoren sowie den Elektron- bzw. Neutrinospinoren v_e und \bar{u}_{ν_e} , behandelt werden. Das zeitgeordnete Produkt wird mittels Störungstheorie entwickelt, wobei ausgenutzt wird, daß die Leptonen nicht stark wechselwirken. Zwei

schwache Vertizes geladener Ströme, g_2 ist die $SU(2)$ -Kopplungskonstante,

$$L_{CC} = \frac{g_2}{2\sqrt{2}} (J_\mu^+ W^{+\mu} + J_\mu^- W^{-\mu}) \quad (2.4)$$

mit $J_\mu^+ = V_{ub}(\bar{u}b)_{V-A}$, $J_\mu^- (\bar{e}\nu_e)_{V-A}$ liefern so das bekannte Ergebnis zu Ordnung $O(g_2^2)$:

$$\begin{aligned} M_{fi} &= \langle \nu_e(k_2) e^+(k_1) \pi^-(p) | B^0(p_B) \rangle \\ &= \langle \pi^-(p) | b \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \bar{u} | B^0(p_B) \rangle V_{ub} \frac{g_2^2}{8} \frac{g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{M_W^2}}{M_W^2 - q^2} \bar{u}_{\nu_e}(k_2) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) v_e(k_1) \\ &\approx \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{ub} \langle \pi(p) | b \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \bar{u} | B(p_B) \rangle \bar{u}(\nu_e) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) v(e^+) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Im zweiten Schritt wurde der Propagator des W^+ -Mesons durch $\frac{g^{\mu\nu}}{M_W^2}$ angenähert, Abbildung 2.4 und die Fermikonstante $\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_2^2}{8}$ eingeführt. Dies entspricht an sich bereits einer Anwendung der Operator-Produkt-Entwicklung, die im nächsten Kapitel noch angesprochen wird, soll hier jedoch einfach aufgrund von $q^2 \leq (m_B - m_\pi)^2 \approx 26,4 \text{ GeV}^2 \ll M_W^2$ plausibel gemacht werden. Wie geht es nun weiter? Das B nach

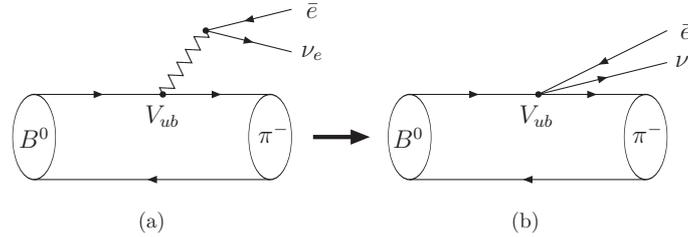


Abbildung 2.4: Schematische Darstellung des Zerfalls $B^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e$ (a) und Übergang zu $M_W^2 \gg q^2$ (b)

π Matrixelement entzieht sich der störungstheoretischen Berechnung, da die Größe der QCD-Kopplungskonstante im Energiebereich gebundener Zustände keine sinnvolle Entwicklung zuläßt. Die Antwort ist ebenso einfach, wie auf dem ersten Blick Unzufriedenstellend: Das Matrixelement wird nach Lorentzstrukturen aufgeteilt und mittels erstmal unbekannter Funktionen vom Impulsübertrag, bzw. der invarianten Masse der Leptonen parametrisiert:

$$\langle \pi(p) | b \gamma_\mu \bar{u} | B(p_B) \rangle = \left(p_B + p - \frac{m_B^2 - m_\pi^2}{q^2} q \right)_\mu f_{B\pi}^+(q^2) + \frac{m_B^2 - m_\pi^2}{q^2} q_\mu f_{B\pi}^0(q^2). \quad (2.6)$$

Diese Parametrisierung impliziert unmittelbar $f_{B\pi}^+(0) = f_{B\pi}^0(0)$, um Singularitäten zu vermeiden. Es sei darauf hingewiesen, daß der Axialvektoranteil des schwachen Stromes aufgrund der Paritätserhaltung in der starken Wechselwirkung nicht beiträgt. Es stehen rechter Hand nur Lorentzvektoren zur Verfügung, dementsprechend muß sich die linke Seite ebenso verhalten. Da sowohl das Pion, wie auch das B-Meson

pseudoskalare Teilchen sind, führt dies zu obengenannter Konsequenz. Um das leptonische Spektrum

$$\frac{d\Gamma}{dq^2} = \frac{1}{2E_p} |M_{fi}|^2 \frac{d\Phi^{(n)}}{dq^2}, \quad (2.7)$$

mit dem n-Teilchen-Phasenraum $d\Phi^{(n)}$ und der Energie des zerfallenden Teilchens E_p zu bestimmen, wird das Betragsquadrat des Übergangsmatrixelementes,

$$|M_{fi}|^2 = \frac{G_F^2}{2} |V_{ub}|^2 H_{\mu\nu} L^{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

mit leptonischem, bzw. hadronischem Tensor $L^{\mu\nu}$ respektive $H_{\mu\nu}$ sowie der entsprechende Phasenraum

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi^{(3)}}{dq^2} &= \frac{d^3p}{(2\pi)^3(2E_\pi)} \delta(q^2 - (p_B - p)^2) \\ &\times \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3(2E_e)} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3(2E_\nu)} (2\pi)^4 \delta^4(q - k_1 - k_2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

benötigt. Nach der Summation über die Spins der Leptonen und der damit verbundenen Ausnutzung der Spinsummen

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_i} u(k_i, \lambda_i) \bar{u}(k_i, \lambda_i) &= \not{k}_i + m, \\ \sum_{\lambda_i} v(k_i, \lambda_i) \bar{v}(k_i, \lambda_i) &= \not{k}_i - m, \end{aligned} \quad (2.10)$$

ergibt sich $L^{\mu\nu}$ für masselose Neutrinos als einfache Spur

$$L^{\mu\nu} = \text{Tr}[(\not{k}_1 - m_e)\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu]. \quad (2.11)$$

Kontraktion mit q_μ, q_ν zeigt, daß $f_{B\pi}^0$ stets mit der Elektronenmasse m_e im Quadrat auftaucht, so daß, für Elektronen sicher eine gerechtfertigte Näherung, im Weiteren sowohl m_e wie auch $f_{B\pi}^0$ vernachlässigt werden. Die Phasenraumintegration über die Leptonimpulse läßt sich dann ohne Probleme durchführen:

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3(2E_e)} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3(2E_\nu)} (2\pi)^4 \delta^4(q - k_1 - k_2) \text{Tr}[\not{k}_1 \gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu] \\ &= \frac{1}{6\pi} (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die Transversalität des Ergebnisses folgt aus der hier angenommenen Masselosigkeit der Leptonen, wohingegen der Vorfaktor durch Kontraktion mit $g_{\mu\nu}$ bestätigt werden kann. Anschließende Kontraktion mit dem hadronischen Tensor

$$H_{\mu\nu} = |f_{B\pi}^+(q^2)|^2 (p_B + p)_\mu (p_B + p)_\nu \quad (2.13)$$

liefert mit $q = p_B - p$

$$H_{\mu\nu} \frac{1}{6\pi} (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) = \frac{|f_{B\pi}^+(q^2)|^2}{6\pi} [(m_B^2 + m_\pi^2 - q^2)^2 - 4m_B^2 m_\pi^2]. \quad (2.14)$$

Von diesem Punkt an wird nur noch die Phasenraumfunktion

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 (2e_\pi)} \delta(q^2 - (p_B - p)^2) = \frac{1}{16\pi^2 m_B^2} \sqrt{(m_B^2 + m_\pi^2 - q^2)^2 - 4m_B^2 m_\pi^2} \quad (2.15)$$

benötigt, so daß Einsetzen von 2.14, 2.15 in 2.7 jenes bereits zu Beginn des Kapitels angegebene Ergebnis mit $\lambda(q^2) = (m_B^2 + m_\pi^2 - q^2)^2 - 4m_B^2 m_\pi^2$ ergibt:

$$\frac{d\Gamma}{dq^2}(B \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l) = \frac{G_F^2 |V_{ub}|^2}{192 \pi^3 m_B^3} \lambda^{3/2}(q^2) |f_{B\pi}^+(q^2)|^2. \quad (2.16)$$

Wie in der Einleitung erwähnt und aus 2.16, 2.2 ersichtlich, genügt demnach die Kenntnis einer einzigen Funktion, des Formfaktors $f_{B\pi}^+(q^2)$, um aus dem experimentell gemessenen Verzweigungsverhältnis V_{ub} zu extrahieren. Dies stellt sich jedoch als ein größeres Hindernis heraus, als es sich zunächst anhört. In den nächsten beiden Abschnitten werden die allgemeinen Definitionen der verschiedenen Formfaktoren sowie Symmetrien unter diesen, die sich aus eleganten kinematischen Überlegungen sowie Spin-Symmetrien ergeben, dargelegt. Erst dann wird, den Umständen entsprechend knapp, auf asymptotische Eigenschaften, generelle Einschränkungen aus grundlegenden Prinzipien und Parametrisierungen eingegangen.

2.1.2 Definitionen

Hier wird schlicht eine Liste der verschiedenen B -Zerfallsformfaktoren gegeben. Zu der im vorigen Abschnitt vorgestellten Parametrisierung des $B \rightarrow P$ -Matrixelementes des Vektorstromes gesellt sich eine weitere:

$$\begin{aligned} \kappa \langle P(p) | \bar{q}_1 \gamma_\mu b | \bar{B}(p+q) \rangle &= 2p_\mu f_{BP}^+(q^2) + q_\mu [f_{BP}^+(q^2) + f_{BP}^-(q^2)] \\ &= \left(2p + \left(1 - \frac{m_B^2 - m_\pi^2}{q^2} \right) q \right)_\mu f^+(q^2) \\ &\quad + \frac{m_B^2 - m_\pi^2}{q^2} q_\mu f^0(q^2). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Der Zusammenhang zwischen beiden, läßt sich wiederum ohne Probleme ablesen:

$$\begin{aligned} f^-(q^2) &= \frac{m_B^2 - m_\pi^2}{q^2} (f^0(q^2) - f^+(q^2)), \\ f^0(q^2) &= f^+(q^2) + \frac{q^2}{m_B^2 - m_\pi^2} f^-(q^2). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ein Formfaktor wird für den $B \rightarrow P$ -Übergang des Tensorstromes benötigt

$$\kappa \langle P(p) | \bar{q}_1 \sigma_{\mu\rho} q^\rho b | B(p+q) \rangle = [q^2 (2p_\mu + q_\mu) - (m_B^2 - m_P^2) q_\mu] \frac{i f_{BP}^T(q^2)}{m_B + m_P}, \quad (2.19)$$

vier für den $B \rightarrow V$ -Übergang des elektroschwachen Stroms

$$\begin{aligned} \kappa \langle V(p) | \bar{q}_1 \gamma_\mu (1 - \gamma_5) b | \bar{B}(p+q) \rangle &= -i \epsilon_\mu^* (m_B + m_V) A_1^{BV}(q^2) \\ &+ i(2p + q)_\mu (\epsilon^* q) \frac{A_2^{BV}(q^2)}{m_B + m_V} + i q_\mu (\epsilon^* q) \frac{2m_V}{q^2} (A_3^{BV}(q^2) - A_0^{BV}(q^2)) \\ &+ \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{*\nu} q^\rho p^\sigma \frac{2V^{BV}(q^2)}{m_B + m_V}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

mit $A_0^{BV}(0) = A_3^{BV}(0)$ und $2m_V A_3^{BV}(q^2) = (m_B + m_V) A_1(q^2) - (m_B - m_V) A_2^{BV}(q^2)$ sowie drei für den $B \rightarrow V$ -Übergang des Tensorstroms:

$$\begin{aligned} \kappa \langle V(p) | \bar{q}_1 \sigma_{\mu\rho} q^\rho (1 + \gamma_5) b | \bar{B}(p+q) \rangle &= i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{*\nu} q^\rho p^\sigma 2 T_1^{BV}(q^2) \\ &+ \{ \epsilon_\mu^* (m_B^2 - m_V^2) - (\epsilon^* q) (2p + q)_\mu \} T_2^{BV}(q^2) \\ &+ (\epsilon^* q) \left\{ q_\mu - \frac{q^2}{m_B^2 - m_V^2} (2p + q)_\mu \right\} T_3^{BV}(q^2). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Für alle angeführten Definitionen gilt: $\kappa = \sqrt{2}$, bzw. $\kappa = 1$ für π^0, ρ^0 , bzw. für andere Mesonen.

2.1.3 Symmetrien

Dieses weite Feld wird hier in zwei Blöcke aufgeteilt: Relationen zwischen Formfaktoren von schweren Mesonen, die in ebensolche Zerfallen, die aus den Spinsymmetrien der Heavy-Quark-Effective-Theory (HQET) [52, 53, 54, 55] folgen. Und, wichtiger für den weiteren Verlauf der Arbeit, Relationen für Zerfallsformfaktoren schwerer in leichte Mesonen, die aus kinematischen Eigenschaften dieser Zerfälle folgen.

Schwere Mesonen bezeichnen in diesem Zusammenhang Mesonen, die aus einem schweren Valenzquark, b oder c und einem leichten Valenzquark zusammengesetzt sind. Den Herleitungen, für die auf die Literatur verwiesen werden muß [56, 57, 58, 59, 60, 61, 62], der hier angegebene Symmetrien, liegt die Idee zugrunde, daß sich für große Massen der schweren Quarks, $m_b, m_c \ll \bar{\Lambda}, \Lambda_{QCD}$, wobei $\bar{\Lambda}$ die Skala der Bindungsenergie und Λ_{QCD} die QCD-Skala ist, zusätzliche Symmetrien offenbaren. Ein Blick auf die Lagrangedichte der HQET

$$\mathcal{L}_{HQET} = \sum_v \bar{Q}_v i v \cdot D Q_v \quad (2.22)$$

zeigt, daß in führender Ordnung weder die Masse noch der Spin des schweren Quarks auftauchen, es demnach neben der Geschwindigkeit kein Unterscheidungsmerkmal unter den Quarks gibt. Dieser Umstand ist als $SU(2N)$ Spin-Flavor-Symmetrie bekannt. Übertragen auf die betrachteten Mesonzerfälle heißt dies, daß die leichten Freiheitsgrade nicht unterscheiden, ob sie zu einem B, B^*, D oder D^* gehören und daß demnach ihr Zustand außer von internen Quantenzahlen nur von der Geschwindigkeit des Mesons abhängt. Wichtig ist, daß sich diese Geschwindigkeit nur durch

harte Gluonwechselwirkungen oder durch schwache Zerfälle, nicht aber durch Wechselwirkungen mit den leichten Freiheitsgraden, die von der Ordnung $O\left(\frac{\bar{\Lambda}}{m_Q}\right)$ sind, ändert. Dadurch kann als erste Näherung eine völlige Entkoppelung der leichten und schweren Freiheitsgrade angenommen und demnach das Wigner-Eckart-Theorem angewendet werden, wie es schematisch in folgender Formel dargestellt ist, wobei mit $\Psi(v)$, $\Psi'(v')$ schwere Mesonen der Geschwindigkeit v , v' sowie mit l die leichten Freiheitsgrade bezeichnet sind:

$$\begin{aligned} \langle \Psi'(v') | \bar{Q}'_{v'} \Gamma Q_v | \Psi(v) \rangle = \\ \langle Q'(v'), \pm \frac{1}{2} | \bar{Q}'_{v'} \Gamma Q_v | Q(v), \pm \frac{1}{2} \rangle \otimes \langle l, v', j', m'_j | l, v, j, m_j \rangle. \end{aligned} \quad (2.23)$$

In der Realität müssen noch Überlagerungen der leichten Zustände mit $-m_j, \dots, m_j$ sowie der zwei schweren Quark Spinzustände gebildet werden, um dann über eine Entwicklung mit Clebsch-Gordan-Koeffizienten Relationen zwischen den verschiedenen Formfaktoren herzuleiten. Die Originalveröffentlichungen [56, 57] wählen diesen Weg. In der Ersten werden im Ruhesystem die Symmetrierelationen

$$S_3^Q |P\rangle = -\frac{1}{2} |V\rangle \quad S_3^Q |V\rangle = -\frac{1}{2} |P\rangle \quad (2.24)$$

betrachtet. So wird z.B. im Matrixelement

$$\langle 0 | J | P \rangle \rightarrow -2 \langle 0 | J S_Q^3 | V \rangle \quad (2.25)$$

der Strom J durch den Kommutator $-[S_Q^3, J]$ ersetzt und mit der expliziten Darstellung von S_Q^3 aus dem Noether-Theorem

$$S_Q^3 = \frac{i}{4} \int d^3x : \bar{Q}(x) [\gamma^1, \gamma^2] Q(x) : \quad (2.26)$$

berechnet. Auf diese Weise ergeben sich Relationen für Zerfallskonstanten und für die Normierung von Formfaktoren. In der zweiten Veröffentlichung wird dieses Verfahren in der Art verallgemeinert, daß dynamische schwere Quarks betrachtet werden. So werden aus

$$h_Q |P_Q(\vec{p})\rangle = \frac{1}{2} |V(\vec{p}, 0)\rangle \quad h_Q = \vec{v} \cdot \vec{S}_Q \quad (2.27)$$

mit h_Q dem Helizitätsoperator und $|V(\vec{p}, 0)\rangle$ dem Zustand des Vektormesons mit Helizität null, nach analoger Rechnung die bekannten Zusammenhänge unter den Formfaktoren hergeleitet. Dieses Verfahren wird in [60, 61], siehe auch [63] auf eine lorentzinvariante Weise formuliert und zudem stark vereinfacht. Basierend hierauf werden in [62] Symmetrierelationen für schwere Mesonen und Baryonen beliebigen Spins hergeleitet. In Anlehnung an diese sollen hier die Fälle $B \rightarrow D$, D^* demonstriert werden. Die interessierenden Matrixelemente und ihre allgemeine Zerlegung in Formfaktoren, mit $V^\mu = \bar{Q}'_{v'} \gamma_\mu Q_v$, $A^\mu = \bar{Q}'_{v'} \gamma_\mu \gamma_5 Q_v$, sind:

$$\begin{aligned} \langle D(v') | V^\mu | B(v) \rangle &= \sqrt{m_B m_D} h_+(\omega) (v + v')^\mu + h_-(\omega) (v - v')^\mu, \\ \langle D^*(v', \epsilon) | V^\mu | B(v) \rangle &= \sqrt{m_B m_D} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} i h_V(\omega) \epsilon_\nu^* v'_\alpha v_\beta, \\ \langle D^*(v', \epsilon) | A^\mu | B(v) \rangle &= \sqrt{m_B m_D} h_{A_1}(\omega) (\omega + 1) \epsilon^{*\mu} - h_{A_2}(\omega) (\epsilon^* \cdot v) v^\mu \\ &\quad - h_{A_3}(\omega) (\epsilon^* \cdot v') v'^\mu. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Hierbei wurde die übliche HQET-Normierung der Zustände verwendet. Das $\langle D|A^\mu|B\rangle$ -Matrixelement verschwindet wie schon in 2.6 aufgrund der Paritätsinvarianz der starken Wechselwirkung. Die Spinsymmetrie der Zustände 2.24, 2.27 wird analog zu [61] in den vierdimensionalen Raum der Dirac-Indizes eingebettet. So werden den Mesonen 4×4 -Matrizen, die Mesonwellenfunktionen, zugeordnet,

$$|P\rangle \rightarrow -\frac{1 + \not{v}}{2}\gamma_5 \quad |V\rangle \rightarrow \frac{1 + \not{v}}{2}\not{v}. \quad (2.29)$$

mit ϵ dem Polarisationsvektor $v \cdot \epsilon = 0$, deren einer Index den Spinfreiheitsgrad des schweren Quarks repräsentiert, während der Zweite für die weitere Lorentz-Struktur steht. Folglich besitzen diese Matrizen unter Spin- und Lorentztransformation dieselben Eigenschaften, wie der Bispinor $u_Q(v)\bar{v}_q(v)$ [62, 64]. So können Matrixelemente von Operatoren im sogenannten "kovarianten Spurformalismus", der in dieser Arbeit desöfteren benutzt wird, durch Spuren über diese Matrizen und der allgemeinsten Matrix, die sich gemäß Lorentz- und Spintransformationen ebenso wie der Operator verhält, berechnet werden. Besonders transparent wird dieses Verfahren in [52, 54] durchgeführt. Dort werden die Mesonwellenfunktionen mit entsprechenden Feldoperatoren für Vektor- bzw. pseudoskalare Mesonen zu einem Doublett angeordnet, wobei hier $v_\mu P_v^{*\mu(Q)} = 0$ gilt:

$$H_v^{(Q)} = \frac{1 + \not{v}}{2} (\gamma_\mu P_v^{*\mu(Q)} - \gamma_5 P_v^{(Q)}), \quad \not{v} H_v^{(Q)} = H_v^{(Q)}. \quad (2.30)$$

Auf diese Weise kann der Quarkstrom durch einen Meson-Operator, der sich ebenso wie dieser transformiert, ersetzt werden:

$$\bar{Q}'_{v'} \Gamma Q_v \rightarrow \text{Tr} \left\{ \bar{H}_{v'}^{(Q')} \Gamma H_v^{(Q)} X \right\}. \quad (2.31)$$

Die Matrix X beinhaltet dabei den Einfluß, der durch die leichten Freiheitsgrade ins Spiel kommt. Welche Möglichkeiten stehen hierfür offen? Da die leichten Freiheitsgrade jeweils den Spin $\frac{1}{2}$ besitzen, besitzt diese Spinor-, jedoch keine Lorentzindizes. Ansonsten kann sie, wie schon angedeutet nur von der Anfangs- und Endgeschwindigkeit v , bzw v' abhängen. Somit lautet die allgemeinste Form:

$$X = X_1(v \cdot v) + X_2(v \cdot v') \not{v} + X_3(v \cdot v') \not{v}' + X_4(v \cdot v') \not{v} \not{v}' \quad (2.32)$$

Ein Blick auf 2.31 und 2.30 zeigt, daß die Strukturen X_2, X_3, X_4 redundant sind und demnach nur eine einzige Funktion $X(v \cdot v')$ benötigt wird. Dieses ist gerade die bekannte Isgur-Wise-Funktion $\xi(\omega)$, auf die alle in 2.28 angegebenen Formfaktoren zurückgeführt werden können. Einsetzen von 2.31 in 2.28 liefert genau die Spuren über die Mesonwellenfunktionen und die entsprechenden Lorentz-Strukturen. Dies führt auf die wohlbekanntes Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} h_+(\omega) &= h_V(\omega) = h_{A_1}(\omega) = h_{A_3} = \xi(\omega) \\ h_-(\omega) &= h_{A_2}(\omega) = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Bereits in [61] werden führende α_s -Korrekturen zu den Formfaktoren bestimmt, die zu unterschiedlichen Skalenabhängigkeiten der verschiedenen Matrixelemente

führen, jedoch keine zusätzlich nichtperturbative Funktion einführen.

Nach dieser eindrucksvollen Demonstration der Wirksamkeit von Symmetrieargumenten, sollen diese zumindest teilweise auf Übergänge zwischen schweren und leichten Mesonen übertragen werden. Diese Idee wurde erstmals in [65] verfolgt und wird dort ausführlich dargelegt. Für diese Zerfälle, für die $B \rightarrow \pi$ ein Musterbeispiel darstellt, spielt die große Energie,

$$E = \frac{m_B}{2} \left[1 - \frac{q^2}{m_B^2} + \frac{m_\pi^2}{m_B^2} \right], \quad (2.34)$$

die für $q^2 \ll (m_B - m_\pi)^2$ auf das Tochterhadron übertragen wird, eine ähnliche Rolle, wie die Masse des schweren Quarks in obigen Relationen. Dies wird deutlich, wenn davon ausgegangen wird, daß das aktive im Zerfall entstehende leichte Quark beinahe die gesamte Energie des leichten Mesons trägt. In diesem Falle wird es annähernd lichtartigen Impuls $p_q^\mu = E\bar{n}^\mu + k^\mu$, $|k| \ll E$, verglichen mit $p_Q^\mu = m_b v^\mu + k'^\mu$ für das schwere Quark in HQET, haben und seine Wechselwirkung wird in führender Ordnung $\frac{\Lambda_{QCD}}{E}$ unter Vernachlässigung harter Gluonstreuung durch die eikonale, bzw. Large-Energy-Effective-Theory (LEET) Lagrangedichte, für eine Herleitung siehe z.B. [65], beschrieben:

$$\mathcal{L}_{eik} = \bar{q}_n \frac{\not{n}}{2} (i\bar{n} \cdot D) q_n. \quad (2.35)$$

n und \bar{n} sind in Anhang A behandelte Lichtkegelvektoren, mit $\frac{1}{2}(n + \bar{n})^\mu = v^\mu$. Ein genauerer Blick offenbart, daß diese die gleiche Symmetrie wie die HQET-Lagrangedichte besitzt. Es tritt kein Massenterm auf, daher die Flavour-Symmetrie. Daß keine aktive Dirac-Matrix, also keine Gammamatrix, die mit der Ableitung kontrahiert wird, vorliegt, ermöglicht eine äquivalente Spinsymmetrie zu 2.22. In [65] werden die Quarkfelder im Übergangstrom durch die effektiven LEET- bzw. HQET-Felder ersetzt und mit Hilfe der Projektionseigenschaften

$$\bar{q} \Gamma Q \rightarrow \bar{q}_n \Gamma Q_v, \quad \bar{q}_n \frac{\not{n}}{4} \not{n} = \bar{q}_n, \quad \not{n} Q_v = Q_v \quad (2.36)$$

sowie zweier Identitäten unter den Dirac-Matrizen, werden Zusammenhänge zwischen den Strömen hergestellt, die zu einer Reduzierung der Formfaktoren von zehn auf deren drei führt. Der einfachere Weg scheint jedoch der in [66] eingeschlagene. Dort wird ganz analog zu obigen Überlegungen zur Isgur-Wise-Funktion vorgegangen. Leichtes und schweres Meson werden durch 4×4 -Matrizen ersetzt, die die jeweiligen Spinsymmetrien erfüllen, mit $\epsilon^* \cdot n = \epsilon^* \cdot \bar{n} = 0$,

$$\langle L | \rightarrow \bar{M}_L = \left\{ \begin{array}{c} -\gamma_5 \\ \not{\epsilon}^* \end{array} \right\} \frac{\not{n} \not{\bar{n}}}{4} \quad \begin{array}{l} L = P \\ L = V \end{array} \quad |B\rangle \rightarrow M_B = \frac{1 + \not{n}}{2} (-\gamma_5) \quad (2.37)$$

und die Berechnung folgt demselben Prinzip wie in 2.31, 2.33:

$$\langle L(E\bar{n}) | \bar{q}_n \Gamma Q_v | B(v) \rangle = \text{Tr} [A_L(E) \bar{M}_L \Gamma M_B]. \quad (2.38)$$

Die Gemeinsamkeiten enden in der Matrix A_L , die zwar ebenfalls den Einfluß der leichten, bzw. hier der weichen Freiheitsgrade beschreibt, die ebenfalls unabhängig

von der Lorentz-Struktur des Übergangstromes ist, die aber von der Energie des leichten Mesons abhängt, der einzige weitere Skalar $\bar{n} \cdot v = 1$, deren Normalisierung nicht wie in [56] bestimmt werden kann, da die Spinsymmetrie nicht auf den Zuständen realisiert ist, $S_{q_n}^3 |P_L\rangle \neq -\frac{1}{2} |V_L\rangle$ und die wie zu sehen sein wird, nicht auf nur eine Funktion zurückzuführen ist. Ihre allgemeinste Form lautet:

$$A_L(E) = a_{1L}(E) + a_{2L}(E)\psi + a_{3L}\bar{\eta} + a_{4L}(E)\bar{\eta}\psi. \quad (2.39)$$

Die Matrizen aus 2.37 erlauben auch hier eine Reduktion der unabhängigen Anteile, doch endet dies bei folgendem Ergebnis:

$$\begin{aligned} A_P(E) &= 2E \zeta_P(E), \\ A_V(E) &= E\bar{\eta} \left(\zeta_{\perp}(E) - \frac{\psi}{2} \zeta_{\parallel}(E) \right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Folgende Kommentare sind hier angebracht: Zum Ersten ist die Zerlegung in 2.40 so angelegt, daß ζ_{\perp} nur zum Zerfall transversal polarisierter, ζ_{\parallel} nur zum Zerfall longitudinaler Vektormesonen beiträgt. Zum Zweiten besteht, obwohl die Lagrange-funktion 2.35 symmetrisch unter Spintransformation ist, offenkundig keine Verbindung zwischen den Formfaktoren für pseudoskalare- und Vektormesonen. Dies ist, wie oben erwähnt, darauf zurückzuführen, daß die Spinsymmetrie nicht auf den entsprechenden Zuständen realisiert ist, daß diese, die Analogie zur HQET verletzend, gerade nicht aus einem energetischen, lichtartigen Quark und weichen Freiheitsgraden bestehen. Solche asymmetrischen Impulskonfigurationen spielen jedoch bei der Berechnung dieser weichen Formfaktoren eine, wie zu erwarten, entscheidende Rolle. Durch Berechnung der Spur in 2.38 lassen sich die folgenden Relationen, es werden die Konventionen von [66] verwendet,

$$f^+(q^2) = \frac{M}{2E} f^0(q^2) = \frac{M}{M + m_P} f^T(q^2) = \zeta_P(E), \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{M}{M + m_V} V(q^2) &= \frac{M + m_V}{2E} A_1(q^2) \\ &= T_1(q^2) = \frac{M}{2E} T_2(q^2) = \zeta_{\perp}(E), \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{m_V}{E} A_0(q^2) &= \frac{M + m_V}{2E} A_1(q^2) - \frac{M - m_V}{M} A_2(q^2) \\ &= \frac{M}{2E} T_2(q^2) - T_3(q^2) = \zeta_{\parallel}(E), \end{aligned} \quad (2.43)$$

finden. Wie bereits erwähnt berücksichtigen die Funktionen ζ_P , ζ_{\perp} , ζ_{\parallel} nur den weichen Anteil, Abbildung 2.5 (a) und keine harte Gluonwechselwirkung, Abbildung 2.5 (b)-(d). In [66] werden diese berücksichtigt und Korrekturen zu den Relationen 2.43 berechnet, die numerisch grob zwischen zehn und dreißig Prozent liegen. Zusammenfassend wird eine Faktorisierungsformel in führender Ordnung $\frac{1}{M}$ für die Formfaktoren vorgeschlagen, in welcher diese als eine Summe aus einem weichen Formfaktor ζ_P und der Faltung zweier Verteilungsamplituden mit einem harten Streukern beschrieben werden.

$$f^i(q^2) = C_i \zeta_P(E) + \Phi_B \otimes T_i \otimes \Phi_P \quad (2.44)$$

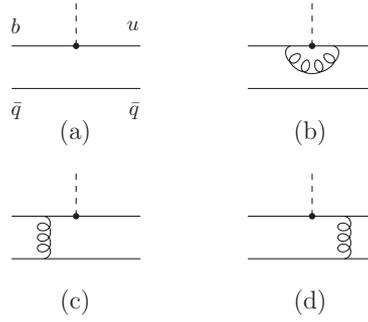


Abbildung 2.5: (a) weicher Beitrag zum Formfaktor (b) harte Vertexkorrektur (c),(d) harte Streuung am passiven Quark

Eine nachfolgende Veröffentlichung [67] bestätigte diese Faktorisierungs-Formel in führender Ordnung $\frac{1}{M}$ und zu allen Ordnungen α_s im Rahmen einer Soft-Collinear-Effective-Theory(SCET)-Rechnung. Abschließend für diesen Abschnitt seien zum späteren Vergleich noch die in [65] angegebenen expliziten Ergebnisse für die weichen Formfaktoren aus Lichtkegelsummenregeln im Grenzwert $m_b, E \rightarrow \infty$ aufgeführt:

$$\begin{aligned}
 \zeta_P(E) &= \frac{1}{f_B} \frac{1}{2E^2} \left[-f_P \phi'(1) I_2(\omega_0, \mu_0) + \frac{f_P m_P^2}{m_{q_1} + m_{q_2}} \phi_P(1) I_1(\omega_0, \mu_0) \right], \\
 \zeta_{\perp}(E) &= \frac{1}{f_B} \frac{1}{2E^2} \left[-f_V^{\perp} \phi'_{\perp}(1) I_2(\omega_0, \mu_0) + f_V m_V g_{\perp}^{(v)}(1) I_1(\omega_0, \mu_0) \right], \\
 \frac{M}{m_V} \zeta_{\parallel}(E) &= \frac{1}{f_B} \frac{1}{2E^2} \left[-f_V \phi'_{\parallel}(1) I_2(\omega_0, \mu_0) + f_V^{\perp} m_V h_{\parallel}^{(t)}(1) I_1(\omega_0, \mu_0) \right]. \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

$I_j(\omega_0, \mu_0)$ sind Integrale über die reskalierten Summenregelparameter ω_0, μ_0 , dazu in Kapitel fünf noch mehr, die weder von m_b noch von E abhängen.

$$I_j(\omega_0, \mu_0) = \int_0^{\omega_0} d\omega \omega^j \exp \left[\frac{2}{\mu_0} (\bar{\Lambda} - \omega) \right] \quad j = 1, 2 \quad (2.46)$$

2.1.4 Asymptotisches Verhalten und Parametrisierungen

Ebenso wie bei den Symmetrien, stellt die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Formfaktoren, den Versuch dar, aus grundlegenden Prinzipien Informationen über eine störungstheoretisch nicht zugängliche Funktion zu erhalten. Die phänomenologische Relevanz dieser läßt den nicht unerheblichen Aufwand, der seit etwa zwei Jahrzehnten betrieben wird, verständlich erscheinen. In diesem Abschnitt sollen einige der Ergebnisse zusammengefaßt werden. Zudem wird auf die verschiedenen Ansätze eingegangen, die Formfaktoren konsistent mit allen Einschränkungen über den gesamten relevanten kinematischen Bereich zu extrapolieren. Letzterer Punkt wird notwendig, da den bisher zur Verfügung stehenden Methoden, eine wird in Kapitel drei vorgestellt, nur bestimmte kinematische Bereiche zugänglich sind. So kann vorgreifend auf Kapitel drei festgestellt werden, daß Lichtkegelsummenregeln aus der Methode inhärenten Beschränkungen heraus stets nur kleine bis mittlere Impulsüberträge q^2 berücksichtigen können, während numerische Berechnungen

auf dem Gitter aufgrund der Probleme ein hochrelativistisches Pion zu simulieren in etwa den komplementären Bereich erfassen. So liefern, zum Beispiel im Zerfall $B \rightarrow \pi l \nu$, Summenregeln Ergebnisse im Bereich $0 \leq q^2 \leq 14 \text{ GeV}^2$, denen gegenüber die neuesten Gitterergebnisse [68] im Intervall $16 \text{ GeV}^2 \leq q^2 \leq 26.4 \text{ GeV}^2$ stehen. In Zukunft könnte sich jedoch das Bild für Gitterrechnungen durch "moving NRQCD" ändern. Grob gesagt geht diese von einem nichtrelativistischen Ansatz aus, um dann das Bezugssystem entsprechend zu bewegen und so niedrigere Impulsüberträge, bzw. energetischere Pionen zu erreichen.

Zwei Grenzwerte der Formfaktoren bedürfen der Beachtung. Zum Ersten $\vec{q}^2 \rightarrow 0$, bzw. $q^2 \rightarrow q_{max}^2$ und zum Zweiten $q^2 \rightarrow 0$. Im ersteren Falle, wenn das leichte Meson L nahezu ruht, wird aus der HQET Normierung des B-Meson Zustandes schlicht die Isgur-Wise-Skalierung [69] reproduziert:

$$\langle L(p) | J_\mu | B(p_B) \rangle \sim \sqrt{m_B} \left(1 + O\left(\frac{1}{m_B}\right) \right) \quad (2.47)$$

Im Falle $q^2 \rightarrow 0$ liefern zum Beispiel die Summenregelresultate 2.45, die für $B \rightarrow \pi$ erstmals in [70] und für $B \rightarrow \rho$ in [71] angegebene, allgemeine Skalierung der Formfaktoren:

$$f^i(q^2 \approx 0) \sim m_B^{-3/2}. \quad (2.48)$$

Hier ist jedoch zu beachten, daß dieses Ergebnis auf dem Endpunktverhalten der Verteilungsamplituden in 2.45 beruht und damit nur insoweit Gültigkeit beanspruchen kann, wie dieses Verhalten gesichert ist. In [49] und [66], siehe auch [72] wird diese Skalierung bestätigt, allerdings wird dort ebenfalls auf das Endpunktverhalten der Verteilungsamplituden zurückgegriffen, so daß in diesem Sinne keine Entwarnung gegeben werden kann. Nichtsdestoweniger scheint es so, wie bereits in [70] näher untersucht, als änderte sich die Abhängigkeit von der schweren Quarkmasse über den kinematisch erlaubten Bereich. Speziell für die $B \rightarrow \pi$ -Formfaktoren kann neben der konstruktionsbedingten Einschränkung

$$f^+(0) = f^0(0)$$

und der Isgur-Wise-Skalierung

$$f^+(q^2 = q_{max}^2) \sim \sqrt{m_B}, \quad f^0(q^2 = q_{max}^2) \sim \frac{1}{\sqrt{m_B}}, \quad (2.49)$$

noch eine weitere Einschränkung gewonnen werden. In [73] wird für verschwindende Pionmasse $m_\pi \rightarrow 0$ und verschwindenden Pionimpuls $p_\mu \rightarrow 0$ der Zusammenhang

$$f^0(m_B^2) = \frac{f_B}{f_\pi} \quad (2.50)$$

mit den Zerfallskonstanten des B-Mesons f_B und des Pions f_π hergeleitet. Mit diesen Grenzwerten an der Hand gilt es eine Parametrisierung zu finden, die es erlaubt, die zur Verfügung stehenden Daten konsistent zu beschreiben und über das benötigte Intervall zu extrapolieren. Besonderes Interesse kommt naturgemäß den $B \rightarrow \pi$ -Formfaktoren zu, die via 2.16 direkt mit dem CKM-Element V_{ub} verbunden sind

und so sollen diese noch ein wenig näher betrachtet werden. Eine grundsätzliche Eigenschaft der Formfaktoren ist, daß sich diese als Dispersionsintegrale, siehe auch Kapitel 3.3, darstellen lassen:

$$\begin{aligned} f^0(q^2) &= \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} dt \frac{\text{Im } f^0(s)}{s - q^2 - i\epsilon}, \\ f^+(q^2) &= \frac{\text{Res}_{q^2=m_{B^*}^2} f^+(q^2)}{m_{B^*}^2 - q^2} + \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} dt \frac{\text{Im } f^+(s)}{s - q^2 - i\epsilon}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Die Imaginärteile setzen sich aus Mehrteilchenzuständen mit den Formfaktoren f^+ , bzw. f^0 entsprechenden Quantenzahlen $J^P = 1^-$, bzw. $J^P = 0^+$ oberhalb der $B\pi$ -Produktionsschwelle $t_0 = (m_B + m_\pi)^2$ zusammen. Im $J^P = 1^-$ -Kanal findet sich unterhalb dieser Schwelle, aber oberhalb des maximalen Impulsübertrages im semileptonischen Zerfall $q_{max}^2 = (m_B - m_\pi)^2$ der Pol des Vektormesons B^* mit $m_{B^*} = 5.235 \text{ GeV}$. Mit Blick auf diese Eigenschaften wird in [74] argumentiert, daß eine Parametrisierung dieser Formfaktoren von der Kenntnis um die Existenz und die Position dieses Pols ausgehen sollte. Die einfache Vektormesondominanz

$$f^+(q^2) = \frac{f(0)}{1 - \frac{q^2}{m_{1^-}^2}}, \quad (2.52)$$

die f^+ nur durch den Pol des B^* annähert wird ebenso verworfen, wie das Pol-, bzw. Doppelpolverhalten [75] oder auch [65] für f^0 , bzw. f^+

$$f^0(q^2) = \frac{f(0)}{1 - \frac{q^2}{m_{0^+}^2}} \quad f^+(q^2) = \frac{f(0)}{(1 - \frac{q^2}{m_{1^-}^2})^2}. \quad (2.53)$$

Erstere, da sie neben der Vernachlässigung aller höheren Zustände, deren Einfluß für $q^2 \approx 0$ stark zunehmen sollte [70], im Widerspruch zu 2.48 steht. Zweiteres, da solch eine Parametrisierung neben den zugrundeliegenden Einschränkungen keinerlei weiterführende physikalische Begründung besäße. Aus der Motivation heraus, eben nicht nur den Einschränkungen gerecht zu werden, sondern auch möglichst viele Informationen aus einem eventuellen Prozeß zu ziehen, wird vorgeschlagen den Beitrag des B^* beizubehalten und den Einfluß der höheren Zustände durch einen effektiven Pol darzustellen.

$$\begin{aligned} f^+(q^2) &= \frac{r_1}{1 - \frac{q^2}{m_{B^*}^2}} + \frac{r_2}{1 - \alpha \frac{q^2}{m_{B^*}^2}} \\ f^0(q^2) &= \frac{r_1 + r_2}{1 - \frac{q^2}{\beta m_{B^*}^2}} \end{aligned} \quad (2.54)$$

r_2 , α , β geben demnach den Beitrag bzw. die Orte der effektiven Pole in f^+ und f^0 an, während r_1 dem Residuum von f^+ an der Stelle $q^2 = m_{B^*}^2$, welches mit der $B^*B\pi$ -Kopplung sowie der B^* -Kopplung an den Vektorstrom verbunden ist, entspricht:

$$r_1 = \frac{1}{2m_{B^*}} f_{B^*} g_{B^*B\pi}. \quad (2.55)$$

Aufgrund der zu der Zeit noch recht großen statistischen Unsicherheiten der Gitter-QCD Ergebnisse wurde in [74], motiviert durch die Symmetrierelationen 2.43, ein Parameter eliminiert, indem $r_2 = -\alpha r_1$ gesetzt wurde. Es ergeben sich Formeln in Abhängigkeit von demnach drei Parametern:

$$\begin{aligned} f^+(q^2) &= \frac{f^+(0)}{\left(1 - \frac{q^2}{m_{B^*}^2}\right)\left(1 - \alpha_{BK} \frac{q^2}{m_{B^*}^2}\right)} \\ f^0(q^2) &= \frac{f^0(0)}{1 - \frac{q^2}{\beta m_{B^*}^2}} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ball und Zwicky übernehmen in [44] und [76] die in Gleichung 2.54 gegebene Parametrisierung mit den Bezeichnungen $f^+(0) = r_1 + r_2$ sowie $r = \frac{r_2}{r_1+r_2}(\alpha - 1)$. In [72] werden die Symmetrierelationen unter den $B \rightarrow \pi$ -Formfaktoren nochmals vom Standpunkte der Soft-Collinear-Effective-Theory untersucht und es wird eine zu 2.54 äquivalente Parametrisierung vorgeschlagen, die jedoch darauf ausgerichtet ist, zwischem harten, bzw. weichen Anteil des Formfaktors zu unterscheiden. So werden die harten Korrekturen zu f^+ hier durch die Größe δ parametrisiert, während f^0 identisch zu 2.56 ist:

$$f^+(q^2) = \frac{f^+(0) \left(1 - \delta \frac{q^2}{m_{B^*}^2}\right)}{\left(1 - \frac{q^2}{m_{B^*}^2}\right) \left(1 - [\alpha + \delta(1 - \alpha)] \frac{q^2}{m_{B^*}^2}\right)}. \quad (2.57)$$

Zum Abschluß sei hier noch auf die Möglichkeit hingewiesen, daß allein aus der Analytizität des Formfaktors und der Unitarität der S-Matrix bereits wenn auch nicht sehr aussagekräftige Einschränkungen für den Formfaktor gewonnen werden können [77]. Diese werden, so der Formfaktor an einzelnen Punkten bekannt ist, erheblich stringenter [78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85] und werden als Grundlage einer Reihenentwicklung des Formfaktors in der Art

$$f^+(q^2) = \frac{1}{P(q^2)\Phi(q^2, t_0)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k [z(q^2, t_0)]^k \quad (2.58)$$

benutzt. Dabei kann $\Phi(q^2, t_0)$ eine beliebige analytische Funktion sein, $P(q^2)$ ist ein sogenannter Blaschke-Faktor, der unliebsame Polstellen wie z.B. B^* beseitigt und $z(q^2, t_0)$ ist eine Projektion von q^2 in den Einheitskreis:

$$z(q^2, t_0) = \frac{\sqrt{t_+ - q^2} - \sqrt{t_+ - t_0}}{\sqrt{t_+ - q^2} + \sqrt{t_+ - t_0}}. \quad (2.59)$$

$t_+ = (m_B + m_\pi)^2$, $t_- = (m_B - m_\pi)^2$ sind dabei die $B\pi$ -Produktionsschwelle, bzw. die kinematische Obergrenze des semileptonischen Zerfalls. Durch die richtige Wahl von t_0 läßt sich die maximale Größe von z beschränken, z.B. $z_{max} = 0.3$ für den Zerfall $B \rightarrow \pi$. Die Koeffizienten a_k können durch Berechnung der Zweipunktfunktion

$$\Pi_J^{\mu\nu}(q^2) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T \{ J^\mu(x) J^\nu(0) \} | 0 \rangle \quad J^\mu = \bar{q} \gamma^\mu b \quad (2.60)$$

eingeschränkt werden. Diese ist über Crossing-Symmetrie mit dem gesuchten Formfaktor verbunden. Für das genaue Verfahren sei auf [81] verwiesen. Es ergibt sich jedoch

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \leq 1, \quad (2.61)$$

so daß von einer raschen Konvergenz der Entwicklung in 2.58 ausgegangen werden kann. So eröffnet sich die Möglichkeit je nach Datenlage die Reihe abzurechnen und entsprechende Unsicherheiten abzuschätzen. Dieses interessante Verfahren wird im Laufe der Arbeit nicht weiter verfolgt, ein erstes Projekt diesbezüglich führte zu keinerlei Fortschritten, daher sei für weitergehende Herleitungen auf oben zitierte Literatur verwiesen.

2.2 Analysen zu $|V_{ub}|$ sowie $\frac{|V_{ts}|}{|V_{td}|}$

Dieses Kapitel liefert einen kurzen Überblick über jüngere Analysen zu den CKM-Matrixelement $|V_{ub}|$ sowie dem Verhältnis $\frac{|V_{ts}|}{|V_{td}|}$, um einen Bogen und eine Vergleichsmöglichkeit zu den Ergebnissen des fünften Kapitels zu schlagen. Um des CKM-Elementes V_{ub} habhaft zu werden, werden zumeist zwei Wege eingeschlagen, die Betrachtung der Zerfälle $B \rightarrow X_u l \nu$ sowie $B \rightarrow \pi l \nu$, die jeweils weiter unten noch erklärte Vor- wie Nachteile aufweisen. Ideal vom theoretischen Standpunkte aus gesehen, wäre der Zerfall, $B \rightarrow \tau \nu_\tau$, da hier nur die Zerfallskonstante f_B als hadronisches Matrixelement benötigt würde. Diesem haftet jedoch das Problem der mangelnden experimentellen Daten an [86, 87, 88], daher soll er hier nicht betrachtet werden. Im Folgenden werden kurz die Grundlagen und Probleme der inklusiven wie exklusiven Bestimmung von V_{ub} skizziert. Für weitergehende Diskussionen sei auf die im Text zitierte Literatur verwiesen.

Im inklusiven Zerfall wird im Unterschied zum exklusiven kein einzelner, sondern die Summe über alle hadronischen Endzustände betrachtet. Diese Summe ermöglicht, neben einer höheren Statistik, den hadronischen Tensor wiederum im Unterschied zum exklusiven Fall via des optischen Theorems als Imaginärteil einer virtuellen Compton-Vorwärtsstreuamplitude darzustellen:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= \frac{1}{2\pi} \sum_x (2\pi)^4 \delta^4(p_X - p - q) \langle B(p) | j_\mu(0) | X(p_X) \rangle \langle X(p_X) | j_\nu(0) | B(p) \rangle \\ &= \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle B(p) | j_\mu(x) j_\nu(0) | B(p) \rangle \\ &= \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle B(p) | [j_\mu(x), j_\nu(0)] | B(p) \rangle \\ &= \frac{1}{\pi} \text{Im } T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

mit

$$T_{\mu\nu} = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle B(p) | T \{ j_\mu(x) j_\nu(0) \} | B(p) \rangle. \quad (2.63)$$

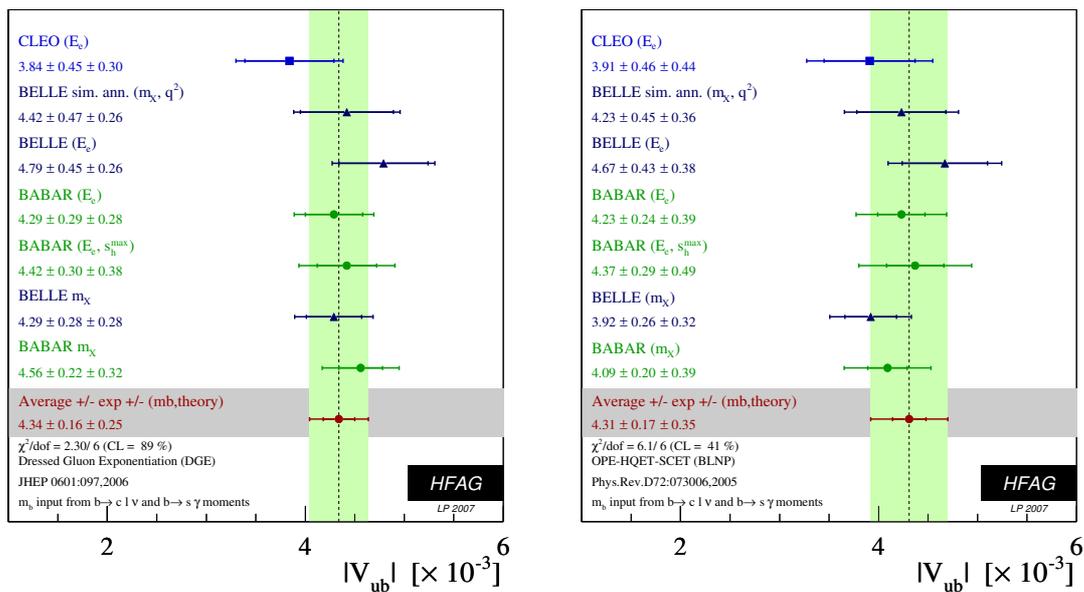


Abbildung 2.6: Ergebnisse zweier verschiedener Methoden, links [89], rechts [90], zur Bestimmung von $|V_{ub}|$

Diese kann nun analog zur tiefinelastischen Streuung in Strukturfunktionen aufgeteilt und in inversen Potenzen der Masse des schweren Quarks m_b entwickelt werden, wodurch eine systematische Behandlung der Unsicherheiten möglich sein sollte. Aufgrund von

$$\frac{|V_{cb}|^2}{|V_{ub}|^2} \approx 10^2 \quad (2.64)$$

ergibt sich jedoch auf experimenteller Seite das Problem des starken $B \rightarrow X_c l \nu$ -Hintergrundes, der mittels entsprechender Schnitte auf das Spektrum beseitigt, bzw. zumindest unterdrückt wird. Dies hat Folgen auf theoretischer Seite. Die bereits erwähnte und in $B \rightarrow X_c l \nu$ überaus erfolgreich angewandte Operator-Produkt-Entwicklung(OPE) in inversen Potenzen der schweren Quark-Masse m_b , siehe z.B. [91] für Terme bis $\mathcal{O}\left(\frac{1}{m_b}\right)$, wird durch die Beschränkung auf die Endpunktregion beeinträchtigt. Neben großen Logarithmen $\alpha_s^n \log^2 n \left(\frac{2E_X}{m_X}\right)$ in der perturbativen Entwicklung die resummiert werden müssen, muß die Fermi-Bewegung des schweren b -Quarks im B -Meson berücksichtigt werden. Zusätzlich spielen für $q^2 \rightarrow q_{max}^2$ Vierquarkoperatoren, die mit schwacher Annihilation verbunden sind, eine größere Rolle als in $B \rightarrow X_c l \nu$. Verschiedenste Methoden werden angewandt, um diese Probleme in den Griff zu kriegen. So wird z.B. in [92, 89], siehe auch [93], die Fermi-Bewegung aus dem Zerfall $B \rightarrow X_s \gamma$ extrahiert, während in [94, 95, 96, 97] Relationen zwischen den experimentellen Spektren von $B \rightarrow X_u l \nu$ und $B \rightarrow X_s \gamma$ hergeleitet werden, die es ermöglichen sollen auf ein Modell für die Fermi-Bewegung zu verzichten. Weitere Ansätze sind zum Beispiel ein kürzlich verwendetes Modell basierend auf einer effektiven, zeitartigen, analytischen QCD-Kopplung für den nichtperturbativen Bereich, siehe [98] und [99, 100] sowie die sogenannte "Dressed Gluon Exponentiation"

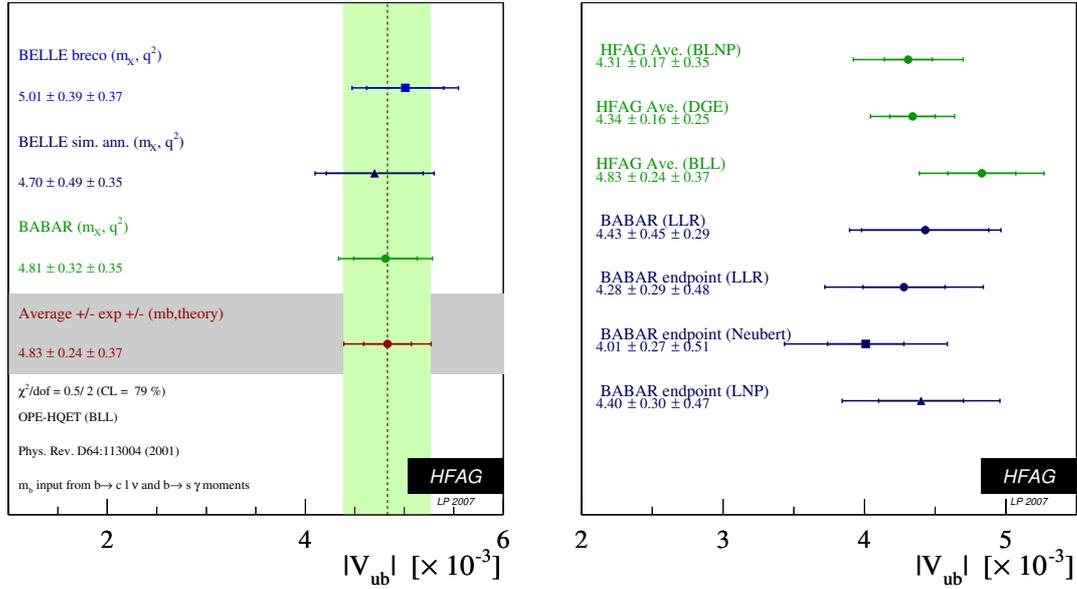


Abbildung 2.7: Links: Bestimmung von $|V_{ub}|$ nach [104]. Rechts: Vergleich der Durchschnittswerte aus den drei Methoden [89, 90, 104] mit einer BABAR-Messung [105] sowie drei Ergebnissen aus [101]

(DGE), die die partonische on-shell Rechnung direkt mit dem hadronischen Spektrum in Verbindung bringt, ohne auf ein nichtstörungstheoretisches Modell für die Fermi-Bewegung zugreifen zu müssen. In den Abbildungen 2.6, 2.7 sind die jüngsten Ergebnisse der "Heavy Flavor Averaging Group" (HFAG) gezeigt, wobei die Berechnung aus [101] auf den Messungen [102, 103] basiert. Diese zeigen noch eine deutliche Spannung zu den exklusiven Bestimmungen in Abbildung 2.9 sowie dem, unter der Voraussetzung der Gültigkeit des Standardmodells aus einem Fit an das Unitaritätsdreieck gewonnenen Wert

$$|V_{ub}| = (3.55 \pm 0.15) \times 10^{-3} \quad [106]. \quad (2.65)$$

Drei Analysen [92, 98, 93] jüngerer Datums, siehe Tabelle 2.1 liefern allerdings mit diesen konsistente Ergebnisse, wobei jeweils eine falsche Abschätzung der bisherigen Unsicherheiten kritisiert wird. Auf exklusiver Seite liegen die Hauptschwierigkeiten wie mehrfach erwähnt in der Berechnung des Formfaktors $f_{B\pi}^+(q^2)$. In der Einleitung ist bereits eine Möglichkeit erwähnt, aus der Kenntnis des Formfaktors über den gesamten kinetischen Bereich $|V_{ub}|$ zu bestimmen. Diese Kenntnis ist jedoch nicht gegeben. Mit den bisher zur Verfügung stehenden Methoden kann der Formfaktor nur in kinematisch begrenzten Regionen berechnet werden. In [68] werden zum Beispiel Werte für $q^2 \geq 16 \text{ GeV}^2$ auf dem Gitter bestimmt und dann mittels verschiedener, der im vorigen Abschnitt angegebenen, Parametrisierungen über den gesamten Bereich $16 \text{ GeV}^2 \leq q^2 \leq q_{max}^2$ extrapoliert. Auf diese Weise wird das Spektrum 2.16 im zugänglichen Intervall integriert und mit dem partiellen Verzweungsverhältnis

$$\Delta\mathcal{B}(B \rightarrow \pi e \nu_e)(q^2 \geq 16 \text{ GeV}^2) = \frac{G_F^2 |V_{ub}|^2}{192\pi^2 m_B^3 \tau_B} \int_{16 \text{ GeV}^2}^{q_{max}^2} dq^2 |f_{B\pi}^+(q^2)|^2 \lambda^{3/2}(q^2) \quad (2.66)$$

$ V_{ub} \times 10^{-3}$	Referenz
$3.87 \pm 0.26^{+0.27}_{-0.33}$	[92]
$4.44 \pm 0.32^{+0.36}_{-0.54}$	
$4.05 \pm 0.23^{+0.28}_{-0.51}$	
$3.69 \pm 0.13 \pm 0.31$	[98]
$3.70 \pm 0.15 \pm 0.28$	[93]

Tabelle 2.1: *Neuere inklusive Bestimmungen von $|V_{ub}|$*

verglichen. Um die statistische Unsicherheit zu reduzieren, kann der Formfaktor auch über den gesamten kinematisch erlaubten Bereich extrapoliert werden und das vollständige Verzweigungsverhältnis berechnet werden. In diesem Falle wird jedoch die Unsicherheit die durch die Parametrisierung hineinspielt größer. Ergebnisse beider Methoden sind in Abbildung 2.9 sowohl für Gitter-QCD als auch für Lichtkegelsummenregeln, die gerade den Bereich $q^2 \leq 16 \text{ GeV}^2$ abdecken, angegeben. Mit der Veröffentlichung der partiellen Verzweigungsverhältnisse in zwölf bins [107], im Gegensatz zu fünf bins in [108], mitsamt Fehlern und Korrelationsmatrizen, eröffnete sich die Möglichkeit mit Kenntnis des gesamten Verzweigungsverhältnisses, den Formfaktor bis auf die Normierung aus den experimentellen Daten zu gewinnen. Mittels

$$\frac{\Delta\mathcal{B}(B \rightarrow \pi e \nu_e)(q^2)}{\mathcal{B}(B \rightarrow \pi e \nu_e)} = \frac{\int_{q_1^2}^{q_2^2} dq^2 |f_{B\pi}^+(q^2)|^2 \lambda^{3/2}(q^2)}{\int_0^{q_{max}^2} dq^2 |f_{B\pi}^+(q^2)|^2 \lambda^{3/2}(q^2)} \quad (2.67)$$

und einer der Parametrisierungen des vorigen Abschnitts kann die funktionale Abhängigkeit des Formfaktors von q^2 bestimmt werden. Dies wird in [109] mit fünf Parametrisierungen, von denen vier im vorigen Abschnitt vorgestellt werden, durchgeführt. Zwei basieren auf 2.58 mit verschiedenen Werten von t_0 . 2.54, 2.56 sowie eine in [110, 111] propagierte Methode bilden die weiteren drei. Die resultierende Form ist in 2.8 dargestellt. Wichtiger ist jedoch, daß auf diese Weise ein Ergebnis für

$$|V_{ub} f_{B\pi}^+(0)| = (0.91 \pm [0.06]_{shape} \pm [0.03]_{BR}) \times 10^{-3} \quad (2.68)$$

gewonnen wird, welches die Bestimmung von $|V_{ub}|$ auf die Kenntnis des Formfaktors an einem Punkt reduziert. Eine Verwendung des Summenregelresultates aus [44] lieferte in [109]

$$|V_{ub}| = (3.5 \pm 0.4 \pm 0.1) \times 10^{-3}, \quad (2.69)$$

wobei der erste Fehler aus der Unsicherheit in der Bestimmung des Formfaktors folgt. Unter den gegebenen Voraussetzungen, die Streuung der Ergebnisse für $|V_{ub}|$ ist weiterhin groß, und mit den neuen experimentellen Daten scheint eine neuerliche Betrachtung des exklusiven Zerfalls angebracht. In Kapitel fünf wird mit diesem Hintergrund eine neue Analyse basierend auf Lichtkegelsummenregeln, deren Grundlagen in Kapitel drei erläutert werden, vorgestellt.

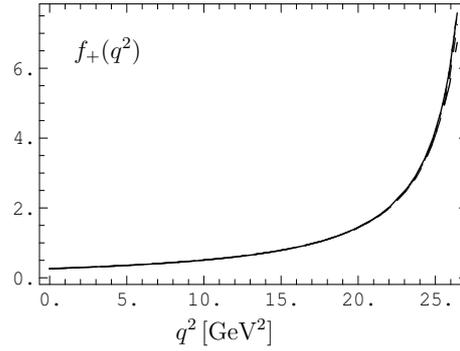


Abbildung 2.8: Fünf Formfaktorparametrisierungen im Vergleich. Die Normierung wird in [109] nicht angegeben.

Ein weiteres phänomenologisch relevantes Resultat, welches im Laufe dieser Arbeit berechnet wird, stellt das Verhältnis der Formfaktoren

$$\xi = \frac{T_1^{B \rightarrow K^*}(0)}{T_1^{B \rightarrow \rho}(0)} \quad (2.70)$$

dar. Durch Vorstellen vorheriger Analysen, die in diesem Falle ebenfalls auf QCD-Summenregeln basieren, wird hier wieder der Kontext für die Ergebnisse des fünften Kapitels bereitet. Die größte theoretische Unsicherheit bei der Extraktion von $\left| \frac{V_{td}}{V_{ts}} \right|^2$ aus der Relation der Verzweungsverhältnisse

$$\frac{\mathcal{B}(B \rightarrow \rho\gamma)}{\mathcal{B}(B \rightarrow K^*\gamma)} = \left| \frac{V_{td}}{V_{ts}} \right|^2 \left(\frac{1 - \frac{m_\rho^2}{m_B^2}}{1 - \frac{m_{K^*}^2}{m_B^2}} \right)^3 \left(\frac{T_1^{B \rightarrow \rho}(0)}{T_1^{B \rightarrow K^*}(0)} \right)^2 (1 + \Delta R), \quad (2.71)$$

folgt aus der Unsicherheit bei der Bestimmung von ξ . Da im Standardmodell $|V_{ts}| = |V_{cb}|$ bis auf eine Korrektur $\sim 2\%$ gilt und $|V_{cb}|$ mit einer Genauigkeit von etwa 2% bestimmt ist, kann über 2.71 ein Zugriff auf $|V_{td}|$ erhalten werden. Dieses ließe sich auch aus dem Zerfall $B \rightarrow \rho\gamma$ alleine bestimmen, doch ergibt obiges Vorgehen eine erhebliche Reduktion der theoretischen Unsicherheiten, die aus $\frac{1}{m_b}$ -Korrekturen zur Faktorisierungsformel der relevanten hadronischen Matrixelemente folgen:

$$\langle V\gamma | Q_i | B \rangle = \epsilon \cdot \left[T_1^{B \rightarrow V}(0) T_i^I + \int_0^1 d\xi du T_i^{II}(\xi, u) \phi_B(\xi) \phi_V^\perp(u) \right] \times \left(1 + \frac{1}{m_b} \right). \quad (2.72)$$

Die $T_i^{I,II}$ sind Streuamplituden, deren unterschiedliche Effekte, sowohl faktorisierbare wie nichtfaktorisierbare, in den zwei Zerfällen $B \rightarrow \rho\gamma$ und $B \rightarrow K^*\gamma$ zusammen mit dem Einfluß der schwachen Wechselwirkung in der Größe ΔR zusammengefaßt werden. Zu beachten ist, daß ΔR von den CKM-Parametern $\left| \frac{V_{ub}}{V_{cb}} \right|$ und $\gamma = \arg V_{ub}^*$ abhängt, so daß, um aus 2.71 $\left| \frac{V_{td}}{V_{ts}} \right|$ extrahieren zu können, einer dieser Parameter über die Unitarität der CKM-Matrix eliminiert werden muß. [114] ϕ_B, ϕ_V^\perp sind Verteilungsamplituden, auf die noch im dritten Kapitel zurückzukommen sein

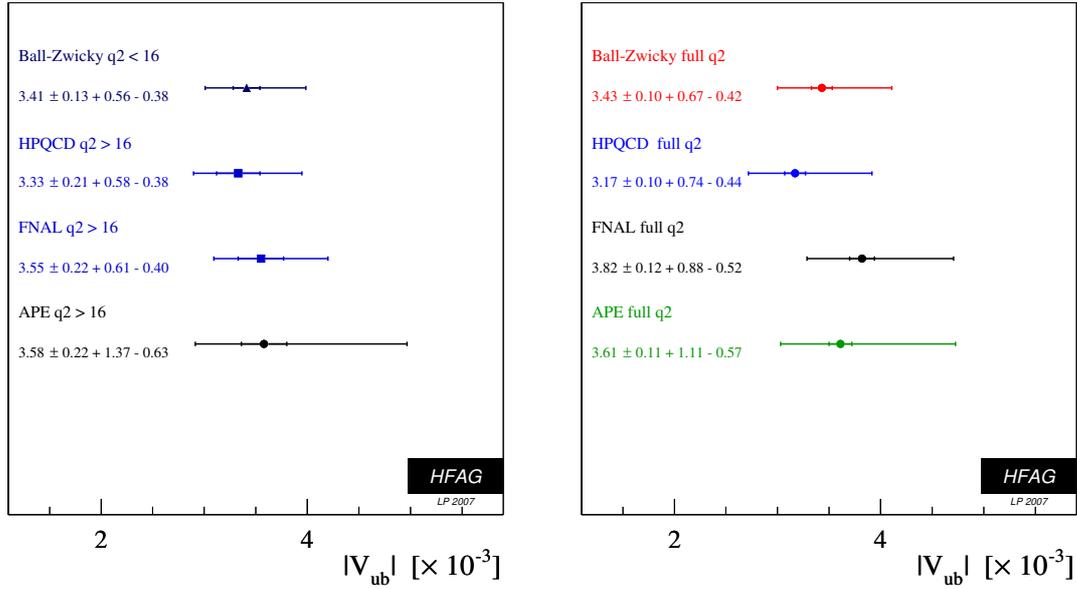


Abbildung 2.9: Ergebnisse für $|V_{ub}|$ aus $B \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e$. Links: Ergebnisse so die Auswertung auf den Gültigkeitsbereich der zugrundeliegenden Methode beschränkt wird. Rechts: Nach Extrapolation über den gesamten kinematisch erlaubten Bereich. Referenzen der Bestimmungen: [44, 68, 112, 113]

wird. In [115] wird 2.70 mittels Lichtkegelsummenregeln berechnet, wobei die $SU(3)$ -Brechung durch die unterschiedlichen Zerfallskonstanten und Massen des ρ^- , bzw. des K^* - Mesons sowie durch die unterschiedlichen Verteilungsamplituden, hauptsächlich jedoch durch das erste Gegenbauer-Moment der K^* -Verteilungsamplitude [116, 117] realisiert ist. Mittels dieses Ergebnisses wird über einen Vergleich mit den Daten aus [118, 119] $\left| \frac{V_{td}}{V_{ts}} \right|$ bestimmt. Die jeweiligen Resultate lauten:

$$\xi = \frac{T_1^{B \rightarrow K^*}(0)}{T_1^{B \rightarrow \rho}(0)} = 1.17 \pm 0.09, \quad (2.73)$$

$$\left| \frac{V_{td}}{V_{ts}} \right| = 0.207 \pm 0.016(\text{th}) \pm 0.027(\text{exp}) \quad [\text{Belle}], \quad (2.74)$$

$$\left| \frac{V_{td}}{V_{ts}} \right| = 0.179 \pm 0.014(\text{th}) \pm 0.020(\text{exp}) \quad [\text{BaBar}]. \quad (2.75)$$

Eine weiterführende Analyse in [114] betrachtet in Analogie zu [120] zusätzlich zu den Korrekturen aus schwacher Annihilation [121], Isospin-Symmetriebrechung [122], langreichweitiger Photonemission [123] sowie weicher Gluonemission aus Charm-Schleifen [115], weiche Gluonemission von Schleifen leichter Quarks, die jeweils zu 2.72 beitragen. Es werden nach Vergleich mit [118, 119, 124] die Ergebnisse

$$\left| \frac{V_{td}}{V_{ts}} \right| = 0.207 \begin{matrix} +0.014 \\ -0.015 \end{matrix} (\text{th}) \begin{matrix} +0.028 \\ -0.033 \end{matrix} (\text{exp}) \quad [\text{Belle}], \quad (2.76)$$

$$\left| \frac{V_{td}}{V_{ts}} \right| = 0.199 \pm 0.014(\text{th}) \begin{matrix} +0.022 \\ -0.025 \end{matrix} (\text{exp}) \quad [\text{BaBar}], \quad (2.77)$$

angegeben. Die Analysen stützen einander sowie den Wert, der über Bestimmungen von $|V_{ub}|$, $|V_{cb}|$ und γ aus der Unitarität der CKM-Matrix folgt:

$$\left| \frac{V_{td}}{V_{ts}} \right|_{SM} = 0.216 \pm 0.029. \quad (2.78)$$

Allerdings gehen beide von obengenannter Implementation der $SU(3)$ -Verletzung über die Zerfallskonstanten, Mesonmassen sowie Verteilungsamplituden aus. Ein alternativer Ansatz, der die Masse des Strange-Quarks und sogenannte Dualitätsparemeter verwendet, wird in Kapitel fünf gegeben.

Kapitel 3

Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel sollen die theoretischen Definitionen, Konzepte und Methoden vorgestellt werden, die für das Verständnis der in Kapitel 4 durchgeführten Rechnungen unabdingbar sind. Zuerst wird die Operator-Produkt-Entwicklung(OPE), eine von Wilson [125] vorgeschlagene und in [126, 127, 128, 129, 130, 131] störungstheoretisch bewiesene Methode zur Trennung lang- und kurzreichweitiger Anteile, an Hand eines Beispiels aus der ϕ_6^3 -Theorie näher dargelegt. Es wird plausibel gemacht, daß eine Entwicklung in Potenzen von $|q^2|^{-1}$ vorgenommen werden kann und daß das Ergebnis in einen kurz- bzw. langreichweitigen Anteil faktorisiert. Erstere sind der Störungstheorie zugänglich, während bei Zweiteren zu anderen Werkzeugen gegriffen werden muß. Mit der Skizzierung der Lichtkegelentwicklung sind die Grundlagen gelegt ein solches in den nächsten Abschnitten näher zu beleuchten.

Danach werden die für die Summenregeln benötigten Verteilungsamplituden des B-Mesons wie des Pions eingeführt. Beim Pion liegt der Schwerpunkt auf der Renormierung und damit verbunden auf dem eleganten Konzept der konformen Entwicklung der führenden Verteilungsamplitude φ_π . Beim B-Meson hingegen fehlt ein ähnlicher Rahmen. Hier wird ausführlicher auf erste Modelle, Bewegungsgleichungen, die Zwei- und Dreiteilchenverteilungsamplituden verbinden sowie auf die Probleme der Renormierung eingegangen. Weiterführende Analysen zu Dreiteilchenbeiträgen sowie Verbindungen zu anderen Veröffentlichungen finden sich in Kapitel vier, bzw. den Anhängen B und C. Dann im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden die Summenregeln selbst, auf denen die Rechnungen in Kapitel 4 und 5 basieren, vorgestellt.

3.1 Operator-Produkt-Entwicklung

Dieser Abschnitt basiert zum größten Teil auf einem ähnlichen in [36], jedoch mit einigen Unterschieden. Um den Rahmen der Arbeit zu wahren, werden hier größtenteils Plausibilitätsargumente verwendet. Der Beweis der Bogoliubov-Pasiuk-Hepp-Zimmermann(BPHZ)-Methode [132, 133, 134, 135] zur Renormierung von Feynman-Amplituden wird nur angeschnitten und ebenso muß für Beweise der OPE auf die Literatur verwiesen werden [126, 127, 128, 129, 130, 131]. Andererseits wird anhand zweier Beispiele die in [36] verwendete Methode erläutert und demonstriert. Ausgehend davon wird schließlich auf den allgemeinen Fall geschlossen. Eine gute

Einführung in die OPE bei schwachen Zerfällen findet sich z.B. auch in [136, 137]

3.1.1 Lokale Entwicklung

Streng genommen ist das Produkt zweier Feldoperatoren an einem Raumzeitpunkt kein mathematisch wohldefiniertes Objekt. Hierzu genügt es der Einfachheit halber den Propagator zweier freier skalarer Felder zu betrachten

$$\langle 0 | T[\phi(x) \phi(y)] | 0 \rangle = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{m^2 - p^2 - i\epsilon}, \quad (3.1)$$

der offensichtlich für $x \rightarrow y$ divergent ist. Dieser Schluß läßt sich zudem auf allgemeine N-Punkt-Funktionen $\langle 0 | T[\phi(x) \phi(y) \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n)] | 0 \rangle$ erweitern. Im Falle der freien Felder kann dieses Problem durch das Normalprodukt, bei welchem schlicht der Vakuumerwartungswert des Produktes subtrahiert wird, behoben werden:

$$: \phi(x)^2 : = \lim_{x \rightarrow y} \{ \phi(x) \phi(y) - \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \}. \quad (3.2)$$

Für wechselwirkende Felder läßt sich keine solch einfache Lösung finden. Hier greift die von Wilson vorgeschlagene [125] Operator-Produkt-Entwicklung(OPE), mit der das Produkt zweier Operatoren in eine Reihe von teils singulären Koeffizienten und lokalen wohldefinierten Operatoren entwickelt wird.

$$A(x) B(y) \stackrel{x \rightarrow y}{\sim} \sum_k C_k(x-y) O_k\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (3.3)$$

Dabei sind die Koeffizienten C_k nach absteigender Singularität und die Operatoren O_k nach aufsteigender Dimension sortiert. Von besonderem Interesse für die hier betrachteten Anwendung ist die OPE zweier Ströme 3.1

$$j(x) j(0) = \sum_k C_k(x) O_k(0), \quad (3.4)$$

wobei in der Summation über k eventuelle Lorentz-Indizes eingeschlossen sind. Um diese zu beweisen, bzw. plausibel zu machen, wird als einfaches Beispiel die ϕ_6^3 -Theorie herangezogen. Für die weitere Vorgehensweise erweist es sich als günstig, Matricelemente

$$\langle 0 | T[j(x) j(0) \phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | 0 \rangle = \sum_k C_k(x) \langle 0 | T[O_k(0) \phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | 0 \rangle \quad (3.5)$$

und schließlich amputierte Greens-Funktionen im Impulsraum

$$F(q, p_1, \dots, p_n) = \sum_k \tilde{C}_k(q) E_k(p_1, \dots, p_n) \quad (3.6)$$

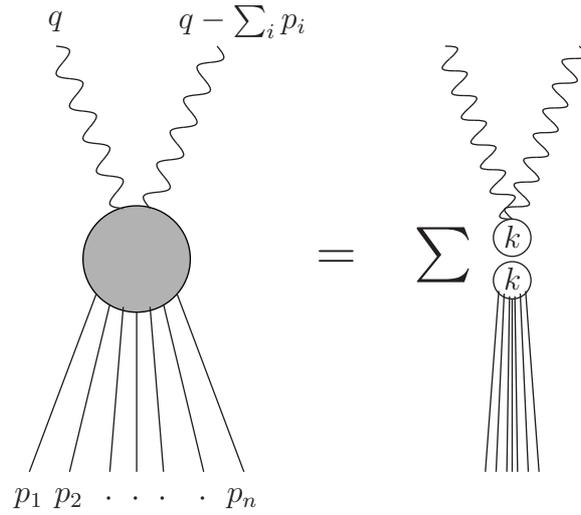


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung von Gleichung 3.4

mit

$$\begin{aligned}
 F(q, p_1, \dots, p_n) &= \int d^6 x d^6 x_1 \dots d^6 x_n e^{(iq \cdot x + ip_1 \cdot x_1 + \dots + ip_n \cdot x_n)} \\
 &\quad \times \langle 0 | T[j(x) j(0) \phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | 0 \rangle \Delta^{-1}(p_1) \dots \Delta^{-1}(p_n), \\
 E_k(p_1, \dots, p_n) &= \int d^6 x_1 \dots d^6 x_n e^{(ip_1 \cdot x_1 + \dots + ip_n \cdot x_n)} \\
 &\quad \times \langle 0 | T[O_k(0) \phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | 0 \rangle \Delta^{-1}(p_1) \dots \Delta^{-1}(p_n), \\
 \tilde{C}_k(q) &= \int d^6 x e^{iq \cdot x} C_k(x), \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

zu betrachten.

Zur Illustration des allgemeinen Beweises wird als einfaches Beispiel die Zweipunkt-Vorwärts-Streuamplitude, Abbildung 3.4 (a) behandelt. Es wird sich auf die Euklidische Region beschränkt, d.h.

$$|q^2| \gg |p \cdot q|, |p^2|, m^2.$$

Ein Exkurs zur Lichtkegelentwicklung findet sich im nächsten Abschnitt. Offenkundig ergibt sich in führender Ordnung Störungstheorie, Abbildung 3.4 (b):

$$F_0(q, p) = \frac{1}{m^2 - (q + p)^2}. \tag{3.8}$$

Hieran läßt sich bereits ein einfacher Fall der OPE demonstrieren. Die Amplitude F_0 kann aufgeteilt werden in führenden und nächstführenden Term der Ordnung $|q^2|^{-1}$.

$$\begin{aligned}
 F_0(q, p) &= \frac{1}{m^2 - q^2} + \left[\frac{1}{m^2 - (q + p)^2} - \frac{1}{m^2 - q^2} \right] \\
 &\stackrel{|q^2| \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{-q^2} + O\left(\frac{1}{q^4}\right) \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

Abbildung 3.2: Graphische Darstellung von Gleichung 3.9

Mittel eines einfachen Operators t_0^p , der den äußeren Impuls p null setzt, ist hier bereits die in Abbildung 3.2 dargestellte Entwicklung gelungen. Dies läßt sich in ähnlicher Weise auch für die $O(g^2)$ -Korrekturen, siehe Abbildung 3.4 (c), erreichen. Die Behandlung erfolgt im Folgenden auf dem Niveau der Feynman-Integranden, so daß

$$F_1(q, p) = i \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} g^2 I(q, p, k). \quad (3.10)$$

Zuvorderst wird der einfachere Fall des "Box"-Diagramms betrachtet, welches im Weiteren mit Diagramm a bezeichnet wird. Dieses ist endlich und besitzt keine Sub-Divergenzen, benötigt daher keine Renormierung. Würde hier ohne Umschweife der Grenzwert $|q^2| \rightarrow \infty$ gebildet werden, d.h. wie in Diagramm 3.3 der Propagator zwischen den beiden Strömen zu einem Punkt zusammengezogen, resultierte ein logarithmisch divergentes Dreiecksdiagramm. Dies ist eine Reminiszenz auf das $\frac{\log(|q^2|)}{q^2}$

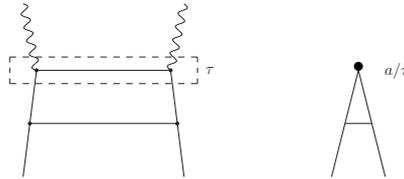


Abbildung 3.3: Diagrammatische Darstellung der Wirkung von t^τ auf Diagramm a.

Verhalten des ursprünglichen "Box"-Diagrammes im Grenzwert großen $|q^2|$. Um diesem Problem zu begegnen, werden sowohl der Operator t_0^p , wie auch der in Diagramm 3.3 erklärte Operator t^τ verwendet, so daß sich schematisch folgende Entwicklung

$$I_a = t_0^p I_a + (1 - t_0^p) I_{a/\tau} t^\tau I_\tau + (1 - t_0^p) I_{a/\tau} (1 - t^\tau) I_\tau \quad (3.11)$$

mit der konkreten Realisierung

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{1}{m^2 - (k+q)^2} \frac{1}{(m^2 - k^2)^3} + \frac{1}{(m^2 - k^2)^2} \left[\frac{1}{m^2 - (k-p)^2} - \frac{1}{m^2 - k^2} \right] \\ &\times \frac{1}{m^2 - q^2} + \frac{1}{(m^2 - k^2)^2} \left[\frac{1}{m^2 - (k-p)^2} - \frac{1}{m^2 - k^2} \right] \\ &\times \left[\frac{1}{m^2 - (k+q)^2} - \frac{1}{m^2 - q^2} \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

ergibt. Dies gibt sehr schön die in Abbildung 3.6 dargestellte Entwicklung wieder. Der erste Term ist von der Ordnung $O\left(\frac{\log(|q^2|)}{q^2}\right)$, der zweite von $O\left(\frac{1}{q^2}\right)$ und der

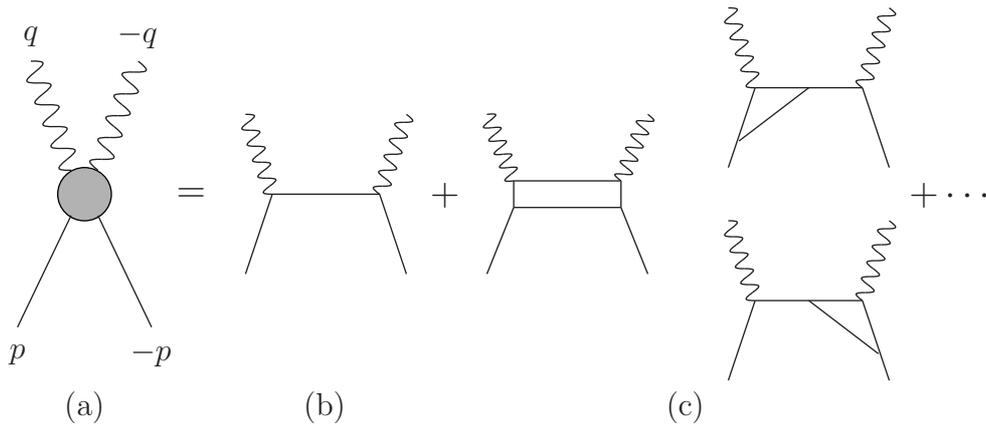


Abbildung 3.4: Entwicklung der Zweipunkt-Vorwärts-Streuamplitude (a) Vollständige Amplitude (b) Beitrag führender Ordnung (c) Beiträge der Ordnung g^2

dritte schließlich von $O\left(\frac{1}{q^4}\right)$, so daß dieser vernachlässigt werden kann. Ebenso wie die Entwicklung nach negativen Potenzen von q^2 ist die Faktorisierung von q - bzw. p -Abhängigkeit aus Gleichung 3.6 sehr gut zu erkennen. In ähnlicher Weise kann für die zwei weiteren Diagramme von $O(g^2)$ in Abbildung 3.4 vorgegangen werden. Vorsicht ist jedoch geboten, da hier im Gegensatz zum vorherigen Beispiel ein divergentes Unterdiagramm auftaucht. Es wird dasselbe Renormierungsschema verwendet wie in den Originalpapieren zur BPHZ-Methode [132, 133, 135], d.h. es wird ein Operator mit folgender Wirkung auf ein Unterdiagramm $H \subset G$ mit äußeren Impulsen p_1, \dots, p_{n_H} und oberflächlichem Divergenzgrad d_H eingeführt:

$$t^H I_H^0 = \sum_{n=0}^{d_H} \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^n I_H^0 (\lambda p_1, \dots, \lambda p_{n_H})|_{\lambda=0}. \quad (3.13)$$

Unter anderem bewirkt so t_0^p im letzten Beispiel, nachdem durch Anwendung von t^τ ein Diagramm mit oberflächlichem Divergenzgrad $d_{a/\tau} = 0$ entstand, eine Renormierung des resultierenden Operators im zweiten Term. Wird mit I_b^0 nun der Integrand des nichtrenormierten Diagrammes mit divergentem Unterdiagramm H_1 , $d_{H_1} = 0$, bezeichnet, ergibt sich für den Integranden I_b des entsprechenden renormierten Diagrammes:

$$\begin{aligned}
 I_b &= (1 - t^{H_1}) I_b^0 \\
 &= \frac{1}{m^2 - (p+q)^2} \left[\frac{1}{(m^2 - k^2)(m^2 - (p+k)^2)(m^2 - (k-q)^2)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{(m^2 - k^2)^3} \right]. \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Das weitere Vorgehen spiegelt jenes für Diagramm a wieder. Beachtung verdient jedoch, daß nach der Anwendung von t^τ ein Diagramm mit oberflächlichem Divergenzgrad $d_{b/\tau} = 2$ entsteht, siehe Abbildung 3.5. Dies führt zu einer entsprechenden Änderung in der nachfolgenden Anwendung von t^p , ohne daß allerdings am generellen Verfahren etwas modifiziert würde. In der nachfolgenden Entwicklung, siehe

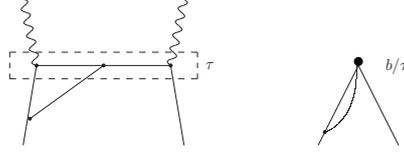


Abbildung 3.5: Wirkung von t^τ auf Diagramm b .

Abbildung 3.6 (b), ist auch ein Ausdruck der Ordnung $O\left(\frac{1}{q^4}\right)$ in der faktorisierten Form, nach q -, bzw. p -Abhängigkeit angegeben. An diesem können zwei Charakteristika der OPE beobachtet werden: Zum Ersten führen Vertizes zwischen den Strömen nach der Anwendung von t^τ zu Operatoren mit entsprechend der Anzahl der Vertizes höheren Potenzen in den Feldern und demnach höheren Dimensionen. Zum Zweiten sind diese höherdimensionalen Operatoren mit entsprechenden Potenzen von q^2 unterdrückt.

$$\begin{aligned}
 I_b &= \frac{1}{m^2 - q^2} \left[\left(\frac{1}{(m^2 - k^2)^2 (m^2 - (k - q)^2)} - \frac{1}{(m^2 - k^2)^3} \right) + \frac{1}{m^2 - q^2} \right. \\
 &\times \left\{ \frac{1}{(m^2 - k^2)(m^2 - (p + k)^2)} - \frac{1}{(m^2 - k^2)^2} \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{p^2 + 2p \cdot k}{(m^2 - k^2)^2} - \frac{4(p \cdot k)^2}{(m^2 - k^2)^4} \right\} \right] + \dots \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

Die hier an zwei Beispielen nur skizzierte Methodik läßt sich elegant verallgemeinern und für einen allgemeinen störungstheoretischen Beweis der OPE 3.4 heranziehen [36]. Mit den Ausführungen im nächsten Abschnitt wird damit die Grundlage für die in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen gelegt.

3.1.2 Lichtkegelentwicklung

Im vorigen Abschnitt wurden Beispiele gebracht, die die lokale OPE verdeutlichen sollten. Für einen Teil der Arbeit, der Berechnung von Lichtkegelsummenregeln, wird wie der Name schon sagt, ebenso wie für die tiefinelastische Streuung jedoch eine Entwicklung auf dem Lichtkegel $x^2 \sim 0$ benötigt. Dies entspricht im Gegensatz zum betrachteten Euklidischen Grenzwert, einer ähnlichen Größenordnung von $p \cdot q$ und q^2 , d.h.:

$$|q^2| \sim |p \cdot q| \gg |p^2|, m^2. \quad (3.16)$$

Unter diesen Voraussetzungen, die Entwicklung in 3.9 noch einmal ausgeführt, ergibt sich folgendes Bild:

$$\begin{aligned}
 F_0(q, p) &= \frac{1}{-q^2} \frac{1}{1 - \frac{2p \cdot q}{-q^2}} + O\left(\frac{1}{q^4}\right) \\
 &= \frac{1}{-q^2} \left(1 + \frac{2p \cdot q}{-q^2} + \frac{(2p \cdot q)^2}{q^4} + \dots \right) + O\left(\frac{1}{q^4}\right). \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Somit zeigt sich, daß eine unendliche Reihe von Beiträgen zur führenden und jeder weiteren Ordnung relevant ist. Eine Fouriertransformation von Gleichung 3.17

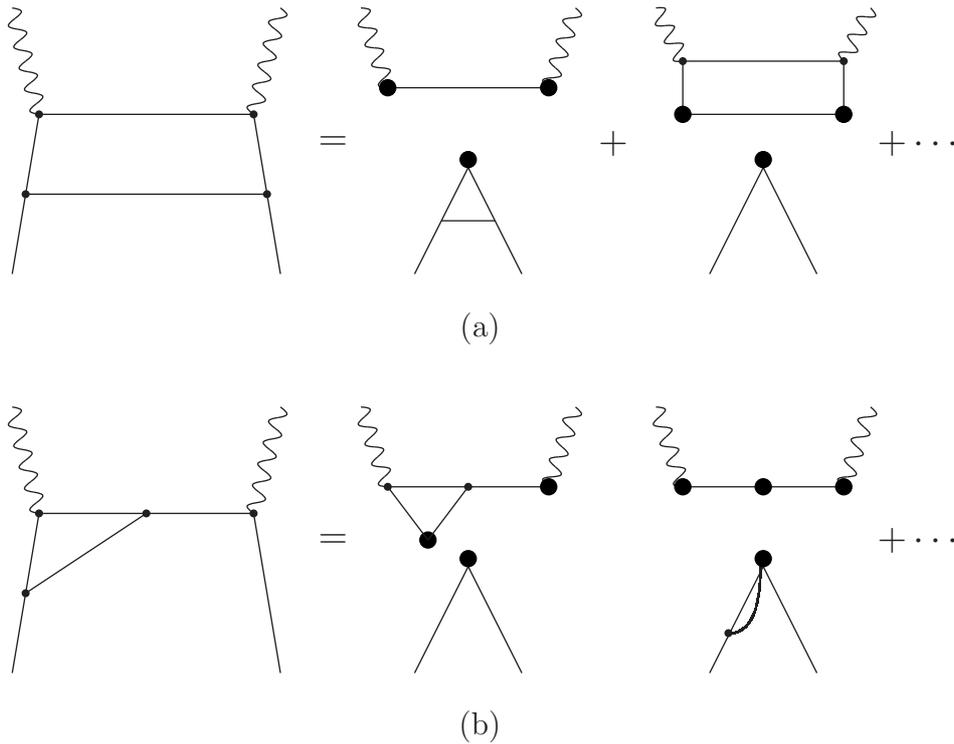


Abbildung 3.6: Zerlegung von I nach führenden Potenzen von $|q^2|^{-1}$. Vertices ohne äußere Impulse sind durch massive schwarze Kreise gekennzeichnet. (a) Die gezeigten Terme sind $O\left(\frac{1}{q^2}\right)$ bzw. $O(\log(|q^2|)/q^2)$ (b) Der führende Term ist $O(\log(|q^2|)/q^2)$, der nächstführende $O\left(\frac{1}{q^4}\right)$

ermöglicht die Systematisierung:

$$\int d^6 q e^{-iq \cdot x} F_0(q, p) \propto \frac{1}{x^4} + i \frac{p \cdot x}{x^4} - \frac{(p \cdot x)^2}{8x^4} + \dots \quad (3.18)$$

Der n -te Term ließe sich, die Lichtkegelsummenregeln, bzw. Verteilungsamplituden antizipierend, als Produkt eines Koeffizienten und des Matrixelementes eines Operators schreiben:

$$\frac{1}{(x^2)^2} x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} \langle \pi(p) | O_{\mu_1 \dots \mu_n} | 0 \rangle. \quad (3.19)$$

So wird der Schluß auf die allgemeine Form der Lichtkegellentwicklung

$$j(x) j(0) = \sum_{i,n} C_n^{(i)}(x^2) x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} O_{\mu_1 \dots \mu_n}^{(i)}(0) \quad (3.20)$$

plausibel. Im Gegensatz zur lokalen Entwicklung wird nicht nur über die Art (i) des Operators, sondern auch über Lorentz-Indizes summiert. Mit der Nomenklatur

$$C_k(x) = C_n^{(i)}(x^2) x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n}, \quad (3.21)$$

wird schließlich die allgemeine Form 3.4 reproduziert. Der nächste Abschnitt beschäftigt sich mit den bereits in Gleichung 3.19 angeführten lokalen Operatoren oder vielmehr mit den diese generierenden nichtlokalen Operatoren, den Verteilungsamplituden, die eine der Grundlagen der Lichtkegelsummenregeln bilden.

3.2 Verteilungsamplituden

Verteilungsamplituden wurden vor fast dreißig Jahren zur Beschreibung exklusiver Prozesse mit hohen Impulsüberträgen eingeführt. [138, 139, 140, 141, 142, 143] Sie spielen eine zentrale Rolle in longitudinalen Faktorisierungstheoremen [49, 144, 140] und im Kontext der Lichtkegelsummenregeln [145, 146, 70, 147, 44, 123, 148, 45]. Dieses Kapitel soll eine allgemeine aber kurzgehaltene Einführung in das Konzept der Verteilungsamplituden mit Schwerpunkten auf den in dieser Arbeit benötigten Eigenschaften liefern. Besonders hervorgehoben werden hierbei die Unterschiede und Gemeinsamkeiten der verwendeten Pion- und B-Meson-Verteilungsamplitude. Definiert werden die Verteilungsamplituden als Matrixelemente nichtlokaler Operatoren mit lichtartigem Abstand, z.B. für das Pion

$$\langle \pi(p) | \bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_5 [x, -x] d(-x) | 0 \rangle_{x^2=0} =: -i p_\mu f_\pi \int_0^1 du e^{iupx - i(1-u)px} \varphi_\pi(u, \mu), \quad (3.22)$$

wobei mittels des pfadgeordneten Eichfaktors

$$[x, 0] = \text{P exp} \left[ig_s \int_0^1 dt x^\mu A_\mu(tx) \right] \quad (3.23)$$

das Matrixelement eichinvariant gehalten wird oder als Integral über die transversalen Impulskomponenten der entsprechenden Wellenfunktionen:

$$\varphi_\pi(u, \mu) = \int \frac{d^2 \vec{k}_\perp}{16\pi^3} \Psi_{q\bar{q}/\pi}^{(\mu)}(u, \vec{k}_\perp) \quad 0 \leq u \leq 1. \quad (3.24)$$

Hier wird die Abhängigkeit von transversalen Impulsen k_\perp gegen die Skalenabhängigkeit μ eingetauscht. Heuristisch können diese analog zu Wellenfunktionen im Hilbertraum der Quantenmechanik als Wahrscheinlichkeitsamplituden im Fock-Raum angesehen werden. Es ließe sich auf diesem Wege jedes Meson oder Baryon in eine Reihe von Fock-Zuständen, siehe auch Abb. 3.7, entwickeln

$$|\pi\rangle = \sum_{\lambda_i} \int d^2 k_\perp du_i |q\bar{q}\rangle \Psi_{q\bar{q}/\pi} + \sum_{\lambda_i} \int d^2 k_\perp du_i |q\bar{q}g\rangle \Psi_{q\bar{q}g/\pi} + \dots \quad (3.25)$$

wobei u_i die longitudinalen Impulsanteile und λ_i die Spins der Partonen darstellen. Die Verteilungsamplituden stellen dann die Wahrscheinlichkeit dar, die Partonen mit Impulsanteilen u_i im Meson vorzufinden. Theoretische Grundlagen hierzu finden sich in [149, 140, 143]. Diese Entwicklung erweist sich als sehr nützlich in Prozessen mit kollinearen Partonen und beinahe lichtartigen Abständen $x^2 \approx 0$. Allerdings erweist sich, wie noch zu sehen sein wird, beim B-Meson diese partonische Interpretation durch die Renormierung als problematisch und es ist noch nicht klar, wie damit umzugehen sein wird.

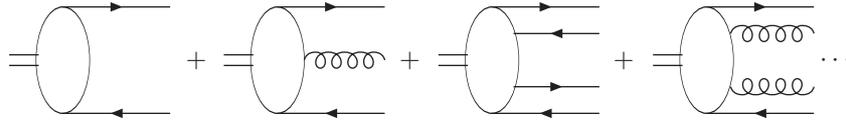


Abbildung 3.7: Schematische Entwicklung eines Mesons in Fockzustände

3.2.1 Pion-Verteilungssamplituden

Die wohl am besten untersuchte Verteilungssamplitude ist die über 3.22 definierte Verteilungssamplitude des Pions:

$$\langle \pi(p) | \bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_5 [x, -x] d(-x) | 0 \rangle |_{x^2=0} =: -i p_\mu f_\pi \int_0^1 du e^{iupx - i(1-u)px} \varphi_\pi(u, \mu).$$

Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, ein Quark mit Impulsanteil u bzw. ein Antiquark mit Impulsanteil $1-u$ im Pion vorzufinden. Im Weiteren wird der Einfachheit halber die Lichtkegelleichung

$$x^\mu A_\mu = 0 \quad (3.26)$$

verwendet, die es erlaubt den pfadgeordneten Eichfaktor $[x, 0]$ wegzulassen. Die bereits erwähnte Skalenabhängigkeit wurde bereits in [140, 141, 142, 143] untersucht und die Renormierungsgruppengleichung

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \varphi_\pi(u, \mu) = \int_0^1 dv V(u, v; \alpha_s(\mu)) \varphi_\pi(v, \mu) \quad (3.27)$$

ist unter dem Namen Efremov-Radyushkin-Brodsky-Lepage (ER-BL)-Evolutionsgleichung bekannt. Zur führenden Ordnung in α_s ist der Evolutionskern durch

$$\begin{aligned} V_0(u, v) &= C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[\frac{1-u}{1-v} \left(1 + \frac{1}{u-v} \right) \Theta(u-v) \right. \\ &\quad \left. + \frac{u}{v} \left(1 + \frac{1}{v-u} \right) \Theta(v-u) \right]_+ \end{aligned} \quad (3.28)$$

gegeben, wobei die $|_+$ -Distribution für zwei Variablen in folgender Art definiert ist, vergleiche auch A.67:

$$[V(u, v)]_+ = V(u, v) - \delta(u-v) \int_0^1 dt V(t, v). \quad (3.29)$$

Die Lösung der Renormierungsgruppengleichung 3.27, d.h. das Finden der Eigenfunktionen von 3.28, stellt auf den ersten Blick keine leichte Aufgabe dar. Sie läßt sich jedoch durch Rückgriff auf gruppentheoretische Mittel stark vereinfachen. Konkret bedarf es des Umweges über die Invarianz der masselosen QCD-Lagrange-Dichte unter Transformationen der konformen Gruppe [150, 151]. Diese stellt die maximale Erweiterung der Poincaré-Gruppe, die den Lichtkegel invariant läßt, dar. Sie umfaßt demnach neben den 4 Translationen und 6 Lorentz-Drehungen die Dilatation

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \lambda x^\mu, \quad (3.30)$$

sowie die sogenannten speziellen konformen Transformationen:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \frac{x^\mu + a^\mu x^2}{1 + 2a \cdot x + a^2 x^2}. \quad (3.31)$$

Zusammengenommen wird die konforme Algebra in vier Dimensionen von 15 Generatoren gebildet:

\mathbf{P}_μ	Translationen	4
$\mathbf{M}_{\mu\nu}$	Lorentz-Transformationen	6
\mathbf{D}	Dilatation	1
\mathbf{K}_μ	spezielle konforme Transformationen	4
		15

Da hier lichtartige Prozesse, bzw. Quarks mit kollinearen Impulsen, im Weiteren in +-Richtung, betrachtet werden, kann die konforme Gruppe auf die kollineare Untergruppe $SL(2, \mathbb{R})$ eingeschränkt werden. Diese besitzt nunmehr vier Generatoren, die in Analogie zu den Drehimpulsgeneratoren geschrieben werden

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_+ &= \mathbf{L}_1 + i\mathbf{L}_2 = -i\mathbf{P}_+, & \mathbf{L}_0 &= \frac{i}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{M}_{+-}), \\ \mathbf{L}_- &= \mathbf{L}_1 - i\mathbf{L}_2 = \frac{i}{2}\mathbf{K}_-, & \mathbf{E} &= \frac{i}{2}(\mathbf{D} - \mathbf{M}_{+-}), \end{aligned} \quad (3.32)$$

und folgende Algebra erfüllen:

$$[\mathbf{L}_0, \mathbf{L}_\pm] = \pm\mathbf{L}_\pm, \quad [\mathbf{L}_-, \mathbf{L}_+] = -2\mathbf{L}_0. \quad (3.33)$$

\mathbf{E} fällt offenkundig raus aus der Algebra und kommutiert mit allen Generatoren. Was es mit diesem Operator auf sich hat, wird noch gezeigt werden, doch sei vorher die Wirkung der Operatoren auf fundamentale Felder mit fester Spinprojektion auf die +-Richtung

$$\Sigma_{+-} \Phi(\alpha n) = s\Phi(\alpha n) \quad (3.34)$$

angegeben:

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}_+, \Phi(\alpha n)] &= -\partial_\alpha \Phi(\alpha n) \\ [\mathbf{L}_-, \Phi(\alpha n)] &= (\alpha^2 \partial_\alpha + 2j\alpha)\Phi(\alpha n) \\ [\mathbf{L}_0, \Phi(\alpha n)] &= (\alpha \partial_\alpha + j)\Phi(\alpha n) \\ [\mathbf{E}, \Phi(\alpha n)] &= \frac{1}{2}(l - s)\Phi(\alpha n) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Hier sind nun einige Anmerkungen nötig. Zuerst, der Notation von [150] folgend, sei n ein lichtartiger Vektor, α eine beliebige reelle Zahl, die die Position auf dem Lichtkegel angibt, $\partial_\alpha = \frac{d}{d\alpha}$, $j = l + s$ und l sei die kanonische Dimension des Feldes. Da E mit allen Generatoren vertauscht ist $l - s$ eine gute Quantenzahl, diese wird üblicherweise ein wenig ungenau Twist genannt. Ungenau, da Twist an sich als kanonische Dimension minus Spin, nicht minus Spinprojektion auf die +-Richtung, definiert ist. Genauer ist demnach die Nomenklatur kollinearer Twist. j

wird als konformer Spin des Feldes Φ bezeichnet und bestimmt die Darstellung der kollinearen Gruppe. Dies wird deutlich indem ein zweiter Kasimir-Operator

$$\sum_{i=0,1,2} [\mathbf{L}_i, [\mathbf{L}_i, \Phi(\alpha n)]] = j(j-1)\Phi(\alpha n) = L^2\Phi(\alpha n) \quad (3.36)$$

wiederum in Anlehnung an den Drehimpuls konstruiert wird. Eine Basis konformer Operatoren, die sich wie die fundamentalen Felder transformieren, läßt sich durch die n -fache Anwendung des Aufsteigeoperators \mathbf{L}_+ auf den Zustand mit höchstem Gewicht $\Phi(0)$, der lichtartige Vektor n im Argument des Feldes wird im Weiteren weggelassen, gewinnen:

$$\mathcal{O}_n = [\mathbf{L}_+, \dots, [\mathbf{L}_+, [\mathbf{L}_+, \Phi(0)]]] = (-\partial_\alpha)^n \Phi(\alpha)|_{\alpha=0} \quad (3.37)$$

Um dies auf den anvisierten Zweck anwenden zu können, bedarf es der Verallgemeinerung für das Produkt zweier Felder:

$$O(\alpha_1, \alpha_2) = \Phi_{j_1}(\alpha_1) \Phi_{j_2}(\alpha_2). \quad (3.38)$$

j_1 und j_2 geben den jeweiligen konformen Spin des Feldes an. Wird dieses Produkt für kurze Distanzen $|\alpha_1 - \alpha_2| \rightarrow 0$ entwickelt, tauchen lokale Operatoren der Art

$$\mathcal{O}_n(0) = \mathcal{P}_n(\partial_{\alpha_1}, \partial_{\alpha_2}) \Phi_{j_1}(\alpha_1) \Phi_{j_2}(\alpha_2), \quad (3.39)$$

wobei \mathcal{P}_n ein homogenes Polynom vom Grade n ist, auf. Die Aufgabe besteht nun darin, eine Basis konformer Operatoren zu finden, die sich wiederum wie die fundamentalen Felder transformieren. Mittels konformer Operator Produkt Entwicklung lassen sich somit die Polynome \mathcal{P}_n bestimmen. Für das explizite Vorgehen sei auf die Literatur [150] verwiesen, hier sei nur die Operatorbasis

$$\mathbb{O}_n^{j_1, j_2}(\alpha) = \partial_\alpha^n \left[\Phi_{j_1}(\alpha) P_n^{(2j_1-1, 2j_2-1)} \left(\frac{\overrightarrow{\partial}_\alpha - \overleftarrow{\partial}_\alpha}{\overrightarrow{\partial}_\alpha + \overleftarrow{\partial}_\alpha} \right) \Phi_{j_2}(\alpha) \right]. \quad (3.40)$$

mit den Jakobi-Polynomen $P_n^{(2j_1-1, 2j_2-1)}$, angegeben. Wie läßt sich dies auf die Quarkfelder in 3.22, die keinen festen konformen Spin besitzen, anwenden? Die Lösung liegt in Projektoren auf konforme Spinkomponenten.

$$\begin{aligned} \Pi_+ &= \frac{1}{2}\gamma_- \gamma_+, & \Pi_- &= \frac{1}{2}\gamma_+ \gamma_-, & \Pi_+ + \Pi_- &= 1, \\ \gamma_+ &= \gamma^\mu n_\mu, & \gamma_- &= \gamma^\mu \bar{n}_\mu. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Mit deren Hilfe lassen sich "plus" und "minus" Komponenten der Quark-, bzw. Gluonfelder mit definierten konformen Spin und kollinearen Twist angeben.

$$\begin{array}{cc} \underbrace{\psi_+ = \Pi_+ \Psi}_{s = +\frac{1}{2}, t = 1} & \underbrace{\psi_- = \Pi_- \Psi}_{s = -\frac{1}{2}, t = 2} \end{array} \quad (3.42)$$

Es existiert demnach ein Zweiquarkoperator von Twist zwei, ebenso ein Zweigluonoperator, der jedoch nur für den Fall von Singlet-Verteilungsamplituden, zum Beispiel des η [152, 153], relevant ist.

$$\mathcal{O}^{1,1} = \bar{\psi} \gamma_+ (\gamma_5) \psi \quad (3.43)$$

Mit den Abkürzungen $\overleftarrow{D} = \overrightarrow{D} - \overleftarrow{D}$, $\partial = \overrightarrow{D} + \overleftarrow{D}$ und den Gegenbauerpolynomen $C_n^{3/2} = P_n^{3/2,3/2}$, lauten die korrespondierenden lokalen konformen Operatoren nach 3.40:

$$\mathbb{Q}_n^{1,1}(\alpha) = (i\partial_\alpha)^n \left[\bar{\psi}(\alpha) \gamma_+ (\gamma_5) C_n^{3/2} \left(\frac{\overleftarrow{D}_\alpha}{\partial_\alpha} \right) \psi(\alpha) \right]. \quad (3.44)$$

Diese mischen unter Renormierung nicht mit Operatoren anderen konformen Spins und anderen Twists, d.h. sie werden multiplikativ renormiert. Nun wird die Verbindung mit der Verteilungsamplitude 3.22 hergestellt. In deren lokaler Entwicklung, wobei die Ersetzungen $\gamma_\mu \rightarrow \gamma_+$ sowie $x \rightarrow \alpha$ vorgenommen wurden, tauchen folgenden Momente

$$\langle \pi(p) | \bar{u}(0) \gamma_+ \gamma_5 (i\overleftarrow{D}_\alpha)^n d(0) | 0 \rangle = i f_\pi p_+^{n+1} \int_0^1 du (2u - 1)^n \varphi_\pi(u, \mu) \quad (3.45)$$

auf. Verglichen mit 3.44 ergibt sich demnach für die Gegenbauer-Momente:

$$i f_\pi p_+^{n+1} \int_0^1 du C_n^{3/2}(2u - 1) \varphi_\pi(u, \mu) = \langle \pi(p) | \mathbb{Q}_n^{1,1}(0) | 0 \rangle. \quad (3.46)$$

Die sich wiederum über das reduzierte Matrixelement

$$\langle \pi(p) | \mathbb{Q}_n^{1,1} | 0 \rangle = i f_\pi p_+^{n+1} \langle \langle \mathbb{Q}_n^{1,1} \rangle \rangle \quad (3.47)$$

darstellen lassen. Schließlich führt die Orthogonalität der Gegenbauer-Polynome

$$\int_0^1 du u(1-u) C_n^{3/2}(2u-1) C_m^{3/2}(2u-1) = \delta_{mn} \frac{(n+1)(n+2)}{4(2n+3)} \quad (3.48)$$

zur bekannten Entwicklung der Pion-Verteilungsamplitude

$$\varphi_\pi(u, \mu) = 6u(1-u) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mu) C_n^{3/2}(2u-1), \quad (3.49)$$

mit

$$a_n(\mu) = \frac{2(2n+3)}{3(n+1)(n+2)} \langle \langle \mathbb{Q}_n^{1,1} \rangle \rangle, \quad a_n(\mu) = a_n(\mu_0) \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(\mu_0)} \right)^{\gamma_n^{(0)}/\beta_0}. \quad (3.50)$$

Was ist nun erreicht worden? Ähnlich der Partialwellenanalyse für kugelsymmetrische Probleme in der nichtrelativistischen Quantenmechanik, in der radiale- und Winkelfreiheitsgrade getrennt werden, indem die Eigenfunktionen der $O(3)$ -Symmetrie, die Kugelflächenfunktionen Y_{lm} , als Basis gewählt werden, können durch die Eigenfunktionen der $SL(2, \mathbb{R})$ die longitudinalen- und transversalen Freiheitsgrade

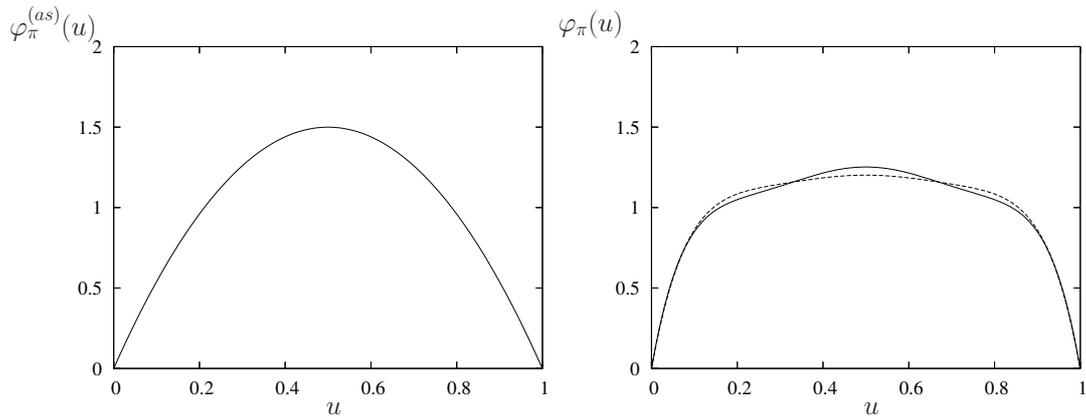


Abbildung 3.8: Links: asymptotische Verteilungssamplitude $\varphi_\pi^{(as)}(u)$, Rechts: durchgezogene Kurve $a_2^\pi(3 \text{ GeV}) = 0.16$, $a_4^\pi(3 \text{ GeV}) = 0.04$, gestrichelte Kurve $a_2^\pi(3 \text{ GeV}) = 0.17$, $a_4^\pi(3 \text{ GeV}) = 0.03$.

getrennt werden. Die Twist zwei Pion-Verteilungssamplitude kann danach als Reihe von Matrixelementen multiplikativ renormierbarer Operatoren, deren anomale Dimensionen

$$\gamma_n^{(0)} = C_F \left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} + 4 \sum_{m=2}^{n+1} \frac{1}{m} \right) \quad (3.51)$$

direkt aus der tiefinelastischen Streuung übernommen werden können, dargestellt werden. Ungerade Gegenbauer-Momente verschwinden für das Pion aufgrund der G-Parität. Diese, insbesondere $a_1(\mu)$, spielen für die $SU(3)$ -Brechung in der Kaon-Verteilungssamplitude eine wichtige Rolle. Für Momente a_n , $n \geq 2$ gilt $a_n \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow \infty$ und aus der Normierung

$$\int_0^1 du \varphi_\pi(u, \mu) = 1 \quad (3.52)$$

die $a_0 = 1$ impliziert, ergibt sich die asymptotische Verteilungssamplitude

$$\varphi_\pi^{as} = 6u(1-u). \quad (3.53)$$

Wie weit die tatsächliche Verteilungssamplitude von dieser abweicht, hängt naturgemäß von der Skala ab und wird sich demnach von Prozeß zu Prozeß unterscheiden, siehe zum Beispiel Abbildung 3.8 für die in Kapitel fünf verwendeten Gegenbauer-Momente. Ein Abbrechen der Reihe in 3.49 läßt sich mit der Anwachsenden anomalen Dimension $\gamma_n^{(0)}$ für anwachsendes n rechtfertigen. In den meisten Fällen, so auch in dieser Arbeit, siehe Anhang D, werden nur die ersten Gegenbauer-Momente a_2 , a_4 in die Analyse miteinbezogen. Numerische Werte für niedrige Momente lassen sich aus Zweipunktsummenregeln [154] oder vom Gitter [155] gewinnen. Für die Twist zwei Verteilungssamplitude ergibt sich demnach ein durchaus erfreuliches Bild, welches jedoch für höhere Twists zunehmend kompliziert wird. Für Twist drei existieren nicht nur zwei Zweiteilchen-, sondern auch eine Dreiteilchenverteilungssamplitude, die mit ersteren über die QCD-Bewegungsgleichungen verbunden ist. Twist

vier liefert bereits zwei Zweiteilchen- und vier Dreiteilchenverteilungsamplituden, die ebenfalls miteinander verknüpft sind. Diese Verknüpfungen waren und sind Mittelpunkt vieler Analysen in der Literatur, siehe zum Beispiel [156, 157, 154, 158] oder [159, 160] für den komplizierteren Fall der Vektormesonen, da sie gemeinsam mit der konformen Entwicklung eine Möglichkeit bieten, die Anzahl der unabhängigen Momente zu reduzieren. Renormierungsgruppengleichungen sind für Twist größer als zwei nicht bekannt. Dies wird auch in Kapitel fünf bei der Renormierung der α_s -Korrekturen zur Twist drei Streuamplitude noch einmal kurz Thema sein. Eine Liste der verwendeten Verteilungsamplituden und der verwendeten numerischen Werte ihrer Momente findet sich in Anhang E. Im nächsten Abschnitt wird zu klären sein, inwieweit die Erkenntnisse vom Pion auf das B-Meson übertragen werden können.

3.2.2 B-Meson-Verteilungsamplituden

Die B-Meson-Zweiteilchenverteilungsamplituden werden erstmalig in [64] zur Bestimmung des asymptotischen Verhaltens von Übergangsfaktoren schwerer Mesonen als Matrixelement eines nichtlokalen Lichtkegeloperators, wobei die pfadgeordneten Eichfaktoren im Folgenden weggelassen werden, in HQET definiert:

$$\langle 0 | \bar{q}(z) \Gamma Q_v(0) | \bar{B}(p) \rangle = -\frac{if_B m_B}{2} \text{Tr} \left[\gamma_5 \Gamma \frac{1 + \not{v}}{2} \left\{ \tilde{\phi}_+^B(t) - \not{z} \frac{\tilde{\phi}_+^B(t) - \tilde{\phi}_-^B(t)}{2t} \right\} \right]. \quad (3.54)$$

Deren Fouriertransformierte, $t = v \cdot z$,

$$\tilde{\phi}_\pm^B(t) = \int_0^\infty d\omega \phi_\pm^B(\omega), \quad (3.55)$$

die in führender Ordnung auf eins normiert sind

$$\int_0^\omega d\omega \phi_\pm^B(\omega) = 1, \quad (3.56)$$

geben die Wahrscheinlichkeit an, das leichte Quark im B-Meson mit Lichtkegelimpuls ω zu finden. Im Unterschied zur Pion-Verteilungsamplitude sollten sie stark asymmetrisch sein und ihr Maximum deutlich unter $2\bar{\Lambda}$, wobei $\bar{\Lambda}$ die effektive Bindungsenergie des B-Mesons ist, annehmen. Bei dem Versuch die Erkenntnisse des vorigen Abschnittes für das B-Meson zu übernehmen, ergibt sich das Problem, daß in HQET kein kollinearer Twist definiert ist und demnach die konforme Entwicklung nicht durchgeführt werden kann. Dennoch wird ϕ_+^B , bzw. ϕ_-^B desöfteren als Verteilungsamplitude von führendem bzw. nächstführendem dynamischen Twist bezeichnet. Dies bezieht sich schlicht auf die Unterdrückung des zweiten Terms in 3.54 bei hohen Geschwindigkeiten des B-Mesons. Eine gruppentheoretische Betrachtung, die hier nicht weiter behandelt werden soll, unter Einbeziehung der gesamten konformen Gruppe wird in [47, 161] auf der Basis von [162] in Angriff genommen. Ohne Zweifel sind im Vergleich zum vorigen Abschnitt andere Methoden vonnöten um Informationen über die Verteilungsamplituden zu erhalten. In [64] werden analog zu [163] Summenregeln aufgestellt, aus denen das asymptotische Verhalten

$$\phi_+^B(\omega) \sim \omega, \quad \phi_-^B(\omega) \sim \text{konst.}, \quad (3.57)$$

extrahiert und zur Grundlage eines einfachen Modells,

$$\phi_+^B(\omega) = \frac{\omega}{\omega_0^2} e^{-\frac{\omega}{\omega_0}}, \quad \phi_-^B(\omega) = \frac{1}{\omega_0} e^{-\frac{\omega}{\omega_0}}, \quad (3.58)$$

gemacht wird. Weiter wird in [66] eine Differentialgleichung vom Wandzura-Wilszek Typ, hergeleitet, die die beiden Verteilungssamplituden verbindet:

$$-\omega \frac{d\phi_-^B(\omega)}{d\omega} = \phi_+^B(\omega), \quad \phi_-^B(\omega) = \int_\omega^\infty d\rho \frac{\phi_+^B(\rho)}{\rho}. \quad (3.59)$$

Dreiteilchverteilungssamplituden, $t = v \cdot z$

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \bar{q}(z) g_s G_{\mu\nu}(uz) z^\nu \Gamma Q_v(0) | \bar{B}(p) \rangle \\ &= \frac{1}{2} f_B m_B \text{Tr} \left[\gamma_5 \Gamma \frac{1 + \not{z}}{2} \left\{ (v_\mu \not{z} - t \gamma_\mu) (\tilde{\Psi}_A^B(t, u) - \tilde{\Psi}_V^B(t, u)) \right. \right. \\ & \left. \left. - i \sigma_{\mu\nu} z^\nu \tilde{\Psi}_V^B(t, u) - z_\mu \tilde{X}_A^B(t, u) + \frac{z_\mu \not{z}}{t} \tilde{Y}_A^B(t, u) \right\} \right], \end{aligned} \quad (3.60)$$

und ihre Beiträge zu 3.59 werden erstmalig in [43] betrachtet. In Kapitel vier und Anhang B finden sich Herleitungen sowie erste Diskussionen zu diesen Beiträgen, daher werden hier nur die in [43] gefundenen Ergebnisse, zitiert und auf einen Unterschied zum Pion hingewiesen. Während dort Mischung von Zwei- und Dreiteilchenbeiträgen für die führende Amplitude von Twist zwei nicht auftrat, zeigen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \omega \frac{d\phi_-^B(\omega)}{d\omega} + \phi_+^B(\omega) &= I(\omega), \\ (\omega - 2\bar{\Lambda})\phi_+^B(\omega) + \omega \phi_-^B(\omega) &= J(\omega). \end{aligned} \quad (3.61)$$

mit I und J den Dreiteilchenbeiträgen, gegeben durch Integrale über die Verteilungssamplituden,

$$I(\omega) = 2 \frac{d}{d\omega} \int_0^\omega d\rho \int_{\omega-\rho}^\infty \frac{d\xi}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} [\Psi_A(\rho, \xi) - \Psi_V(\rho, \xi)], \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} J(\omega) &= -2 \frac{d}{d\omega} \int_0^\omega d\rho \int_{\omega-\rho}^\infty \frac{d\xi}{\xi} [\Psi_A(\rho, \xi) + X_A(\rho, \xi)] \\ &\quad - 4 \int_0^\omega d\rho \int_{\omega-\rho}^\infty \frac{d\xi}{\xi} \frac{\partial \Psi_V(\rho, \xi)}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

daß im B-Meson die Mischung bereits zu führender Ordnung auftritt. Mit den Normierungen, eine abweichende Definition wird in Anhang C kommentiert,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi \Psi_A(\omega, \xi) &= \frac{2}{3} \lambda_E^2, \\ \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi \Psi_V(\omega, \xi) &= \frac{2}{3} \lambda_H^2, \\ \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi X_A(\omega, \xi) &= \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi Y_{i_A}(\omega, \xi) = 0, \end{aligned} \quad (3.64)$$

wobei das chromoelektrische- respektive chromomagnetische Moment λ_E bzw. λ_H durch

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{q} \Gamma G^{\mu\nu} Q_v | B \rangle &= \frac{1}{3} f_B m_B \text{Tr} \left[\gamma_5 \Gamma \frac{1 + \not{v}}{2} \right. \\ &\times \left. \{ (\lambda_H^2 - \lambda_E^2) (\gamma^\mu v^\nu - \gamma^\nu v^\mu) - i \lambda_H^2 \sigma^{\mu\nu} \} \right]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

definiert werden [64], können die positiven Momente der Verteilungsamplituden ϕ_+^B, ϕ_-^B

$$\langle \omega^n \rangle_{\pm} = \int_0^{\infty} d\omega \phi_{\pm}^B(\omega) \quad (3.66)$$

ohne Kenntnis der konkreten Form der Dreiteilchenverteilungsamplituden berechnet werden [43]. Die Resultate

$$\begin{aligned} \langle \omega \rangle_+ &= \frac{4}{3} \bar{\Lambda}, & \langle \omega \rangle_- &= \frac{2}{3} \bar{\Lambda}, \\ \langle \omega^2 \rangle_+ &= 2\bar{\Lambda}^2 + \frac{2}{3} \lambda_E^2 + \frac{1}{3} \lambda_H^2, & \langle \omega \rangle_- &= \frac{2}{3} \bar{\Lambda}^2 + \frac{1}{3} \lambda_H^2 \end{aligned} \quad (3.67)$$

stimmen mit der früheren Analyse basierend auf lokalen Operatoren von Grozin und Neubert [64] überein. Dabei wird jedoch implizit davon ausgegangen, daß sich der renormierte nichtlokale Operator in 3.54 in renormierte lokale Operatoren entwickeln läßt. Daß dies nicht selbstverständlich ist, zeigt die Renormierung der Verteilungsamplitude ϕ_+^B . In [164] werden die Diagramme in Abbildung 3.9 für die Fourier-Transformation des auf die Pluskomponente projizierten Operators aus 3.54

$$\mathcal{O}_+(t) = \bar{q}(tn) \not{v} \Gamma Q_v(0), \quad (3.68)$$

betrachtet. Dies wird hier nicht wiederholt, für eine ausführliche Herleitung sei auf

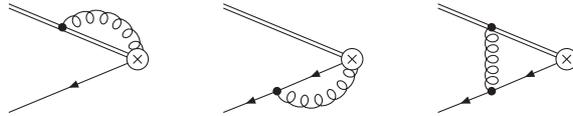


Abbildung 3.9: Diagramme, die zur Renormierung von ϕ_+^B beitragen, wobei das dritte Diagramm UV-endlich ist. Der gekreuzte Kreis steht für die Einsetzung des nichtlokalen Operators.

[165] verwiesen, aber einige der Folgen sollen angeführt werden. Am deutlichsten sind diese zu sehen, wenn die Renormierung im Ortsraum durchgeführt wird [166]. Der Zusammenhang zwischen renormierten und nackten Operator lautet dann:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_+^{ren}(t, \mu) &= \mathcal{O}_+(t) + \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \left\{ \left(\frac{4}{\epsilon^2} + \frac{4}{\epsilon} \log(it\mu) \right) \mathcal{O}_+(t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{\epsilon} \int_0^1 du \frac{u}{1-u} [\mathcal{O}_+(ut) - \mathcal{O}(t)] \frac{1}{\epsilon} \mathcal{O}_+(t) \right\}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Ohne Frage besteht durch $\log it\mu$ für $t \rightarrow 0$ eine Singularität. Diese hat zweierlei Folgen: Zum Einen kommutiert die Renormierung nicht mit der lokalen Entwicklung $t \rightarrow 0$, daß heißt:

$$[\bar{q}(tn) \not{n} \Gamma Q_v(0)]_R \neq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left[\bar{q}(0) (\overleftarrow{D} \cdot n)^k \Gamma Q_v \right]_R. \quad (3.70)$$

Zum Anderen entwickelt $\phi_+^B(\omega)$ für große Impulse des leichten Quarks eine Art radiativen Schwanz $\sim \frac{\log(\omega)}{\omega}$, was wiederum dazu führt, daß alle nicht negativen Momente divergieren. Was bleibt demnach? Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Situation für das B-Meson theoretisch sehr viel unzufriedenstellender ist als für das Pion. Die Möglichkeit, über Momente die Form der Verteilungssamplituden zu bestimmen, ist nicht gegeben. Die Mischung der Zwei- und Dreiteilchenbeiträge bedarf jenseits führender Ordnung nochmaliger Prüfung. Die Renormierungsgruppengleichung ist bisher nur für $\phi_+^B(\omega)$ und auch dort nur unter Vernachlässigung von Mehrteilchenzuständen bekannt. Dreiteilchen- und nächstführende Zweiteilchenverteilungssamplituden sind de facto unbekannt. Allerdings gibt es auch positive Punkte zu verzeichnen. Die für Faktorisierungstheoreme wichtigste Größe

$$\lambda_B^{-1}(\mu) = \int_0^{\infty} d\rho \frac{\phi_+^B(\omega, \mu)}{\omega}, \quad (3.71)$$

ist trotz des Verhaltens von $\phi_+^B(\omega)$ für $\omega \rightarrow \infty$ endlich und wohldefiniert. Numerische Werte wurden zur Ordnung α_s aus Zweipunktsummenregeln [157] und Momentanalysen [167] sowie auf Baumgraphenniveau aus Lichtkegelsummenregeln [168] gewonnen:

$$\begin{aligned} \lambda_B(1 \text{ GeV}) &= 460 \pm 110 \text{ MeV} & [157], \\ \lambda_B(1 \text{ GeV}) &= 478 \pm 55 \text{ MeV} & [167], \\ \lambda_B(\sim 2.2 \text{ GeV}) &= 460 \pm 160 \text{ MeV} & [168]. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Es existieren verschiedene Modelle für $\phi_+^B(\omega)$, die die Renormierungseffekte berücksichtigen. Eines, gewonnen aus Momentanalysen, [167] benutzt für niedrige Impulse das Verhalten von 3.58 und geht stetig in ein $\frac{\log(\omega)}{\omega}$ -Verhalten über. Ein Zweites aus Zweipunktsummenregeln [157] zeigt trotz unterschiedlicher funktionaler Form sehr ähnliches Verhalten über den gesamten Definitionsbereich, was ein gewisses Vertrauen in diese rechtfertigt. Schlußendlich wird im vierten Kapitel eine erste, vorsichtige Analyse der Dreiteilchenverteilungssamplituden unternommen, die zu ersten Modellen und darüber zur Quantifizierung der Dreiteilchenbeiträge in ϕ_{\pm}^B führt. Oben angesprochene Probleme werden durch die Beschränkung auf Baumgraphenniveau vermieden, doch kann dies nur ein erster Schritt in diese Richtung sein. Zu beachten ist ferner, daß, so 3.60 nicht mit einem lichtartigen Vektor hier z' kontrahiert wird, sich vier weitere Strukturen ergeben, denen wiederum Verteilungssamplituden zugeordnet werden müssen [47]. Weitere Anmerkungen dazu finden sich in Anhang B. Im Allgemeinen wartet hier noch ein weites Feld, welches noch einiger Analysen bedarf, ehe sich die theoretische Beschreibung auf ähnlichem Niveau wie beim Pion bewegt.

3.3 QCD-Summenregeln

QCD-Summenregeln wurden bereits 1979 von Shifman, Vainshtein und Zakharov [169, 170] eingeführt und zur Analyse von Charmonium bzw. von ρ , ϕ , K^* -Mesonen eingesetzt. Seitdem haben sich die Summenregeln als zuverlässige und insbesondere flexible Methode zur Berechnung hadronischer Größen bewährt. Schon mit relativ geringem Aufwand lassen sich Abschätzungen finden, zu denen in systematischer Art und Weise Korrekturen höherer Ordnung berechnet werden können. Verbleiben auch durch der Methode inhärente Näherungen einige schwer abzuschätzende, jedoch erfahrungsgemäß geringe, Unsicherheiten in den Ergebnissen, so macht das breite Anwendungsfeld, Bestimmung von Quarkmassen, Formfaktoren, Zerfallskonstanten und starken Kopplungen, um einige Anwendungen zu nennen, Summenregeln dennoch zu einem wertvollen Werkzeug für Teilchenphysiker. Allein die weit über dreitausend Zitierungen des Originalpapiers zeugen von der vielfältigen Verwendung.

Es werden SVZ- und Lichtkegelsummenregeln vorgestellt, deren grundlegende Methodik sich nur wenig unterscheidet. Beide gehen von einer für die entsprechende Rechnung speziell aufgestellten Korrelationsfunktion aus. Diese wird zum Einen via oben vorgestellter OPE, zum anderen via hadronischer Dispersionsrelation, von der der begehrte Zustand separiert wird, berechnet. Beide Darstellungsformen werden einander unter Annahme der Quark-Hadron-Dualität, siehe z.B. [171, 172, 173, 174], gleichgesetzt, wodurch sich die gewünschte Summenregel für den separierten Zustand als Dispersionsintegral bis zu einem Schwellenparameter ergibt. Um Beiträge von angeregten-, bzw. Kontinuumszuständen zu unterdrücken und um Probleme mit Subtraktionstermen, die für die im Allgemeinen divergenten Dispersionsrelationen benötigt werden, zu umgehen, wird eine Borel-Transformation durchgeführt, die Subtraktionsterme entfernt und höhere Zustände exponentiell unterdrückt. Für die numerische Auswertung wird in Abhängigkeit vom Borel- und Schwellenparameter, mit der Einschränkung, daß der Beitrag des abgeschnittenen Kontinuums nicht mehr als einen gewissen Prozentsatz des Ergebnisses ausmacht, ein Plateau, d.h. ein Gebiet maximaler Stabilität der Summenregeln bestimmt. Die allgemeine Prozedur ist in Abbildung 3.10 skizziert.

Soweit die Gemeinsamkeiten. Unterschiede liegen in der Korrelationsfunktion, zeitgeordnetes Produkt von Strömen zwischen Vakuumzuständen, gegenüber zeitgeordnetem Produkt zwischen Vakuum und Meson auf der Massenschale, in der Art der OPE, lokale Entwicklung um $x = 0$, gegenüber Entwicklung um den Lichtkegel $x^2 = 0$, und in den mit der OPE verbundenen nichtperturbativen Größen, Fluktuationen des QCD-Vakuums, sogenannte Kondensate, gegenüber Lichtkegelverteilungsamplituden. Diese liegen auch in den unterschiedlichen Anwendungsgebieten begründet. Bestimmung von Zerfallskonstanten, Quark-, Meson- und Nukleonmassen gegenüber Formfaktoren und Kopplungen, um nur einige zu nennen.

Beide Arten von Summenregeln werden in [146] ausführlich mitsamt verschiedener Anwendungsgebiete behandelt, daher sei für eine detailliertere Herleitung auf diese Veröffentlichung verwiesen.

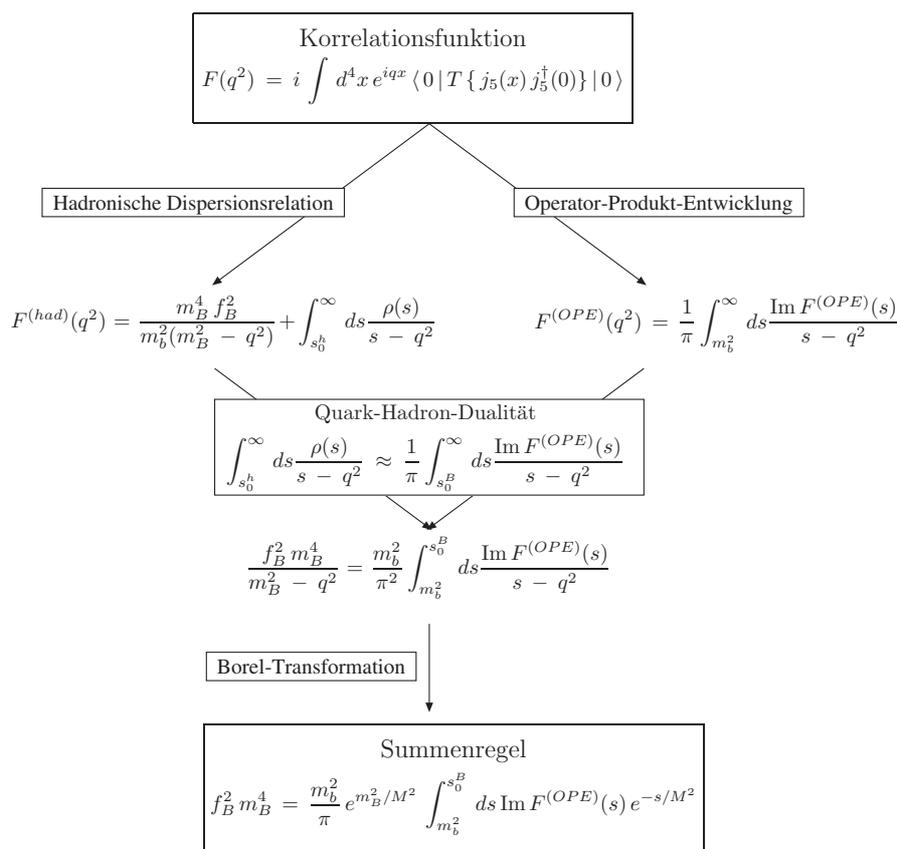


Abbildung 3.10: Schematische Darstellung einer Summenregelrechnung am Beispiel der Zerfallskonstante des B-Mesons f_B

3.3.1 SVZ-Summenregeln

Wie bereits erwähnt besitzen die von Shifman, Vainshtein und Zakharov 1979[169] eingeführten Summenregeln ein sehr breites Anwendungsfeld. Neben der Bestimmung von Zerfallskonstanten, die Summenregel für f_B wird in der numerischen Auswertung von Kapitel 5.2 benötigt, wird insbesondere auch die Möglichkeit verwendet, Informationen über die Form von Verteilungsamplituden zu erhalten. (Siehe hierfür Kapitel 4)

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Prinzipien anhand obengenannter Rechnung für f_B erläutert, wobei nur der führende Term und zur Demonstration das Quark-Kondensat behandelt werden. Die für die Auswertung benutzte Summenregel mit α_s -Korrekturen findet sich in Anhang C. (Summenregeln mit $O(\alpha_s^2)$ -Genauigkeit finden sich in [175, 176])

Korrelationsfunktion und f_B

Ausgangspunkt ist wie in Abbildung 3.10 gezeigt eine eigens für das Problem ausgelegte Korrelationsfunktion. Diese wird den zu berechnenden Matrixelementen angepaßt. Die Zerfallskonstante f_B ist über die folgenden definiert, mit dem Flavorinhalt

des B-Mesons entsprechenden Quarkfeldern b, q :

$$\langle 0 | \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 b | B(q) \rangle = i q_\mu f_B, \quad (3.73)$$

$$\langle 0 | \bar{q} i \gamma_5 b | B(q) \rangle = \frac{m_B^2}{m_b} f_B, \quad (3.74)$$

Zum Aufstellen der Summenregeln wird die Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} F(q^2) &= i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ j_5(x) j_5^\dagger(0) \} | 0 \rangle \\ &= i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ \bar{q}(x) i \gamma_5 b(x), \bar{b}(0) i \gamma_5 q(0) \} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.75)$$

verwendet. Die Rechnung erfolgt weitestgehend wie bereits skizziert, mit anderer Schwerpunktlegerung und weniger ausführlich als in [177].

Hadronische Dispersionsrelation

In der nichtrelativistischen Quantenmechanik ist ein 1-Operator über einen vollständigen Satz von Zuständen im Hilbertraum definiert:

$$1 = \sum_n |n\rangle \langle n|.$$

In Analogie zu diesem wird hier ein vollständiger Satz hadronischer Fockzustände mit B-Meson Quantenzahlen zwischen den pseudoskalaren Strömen in 3.75 eingesetzt.

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_h \int \frac{d^3p}{2(2\pi)^3 p_0} |h(p)\rangle \langle h(p)| \\ &= \sum_h \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m_h^2) \Theta(p^0) |h(p)\rangle \langle h(p)|. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Die so erhaltene hadronische Summe, wird separiert in B-Meson und höhere Zustände (die $-i\epsilon$ Vorschrift wurde und wird im Weiteren weggelassen.):

$$F^{(had)}(q^2) = \frac{\langle 0 | \bar{q} i \gamma_5 b | B \rangle \langle B | \bar{b} i \gamma_5 q | 0 \rangle}{m_B^2 - q^2} + \sum_h \frac{\langle 0 | \bar{q} i \gamma_5 b | h \rangle \langle h | \bar{b} i \gamma_5 q | 0 \rangle}{m_h^2 - q^2}. \quad (3.77)$$

Einsetzen von 3.74 und Darstellung der höheren Resonanzen, bzw. Mehrteilchenzustände durch ein Dispersionsintegral über eine Spektraldichte liefert die übliche Form:

$$F^{(had)}(q^2) = \frac{m_B^4 f_B^2}{m_b^2 (m_B^2 - q^2)} + \int_{s_0^h}^{\infty} ds \frac{\rho^h(s)}{s - q^2}. \quad (3.78)$$

Dasselbe Ergebnis läßt sich auf rigorose Weise aus der Unitarität der Streumatrix und damit dem optischen Theorem gewinnen. Das optische Theorem besagt, daß

$$\text{Im} \text{ wavy line } \bullet \text{ wavy line} = \sum_h \text{ wavy line } \circ \text{ h } \circ \text{ h } \text{ wavy line}$$

Abbildung 3.11: Schematische Darstellung des optischen Theorems

der Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude identisch dem totalen Wirkungsquerschnitt, bzw. dem Betragsquadrat der Summe über all Zwischenzustände ist. (Siehe auch Abbildung 3.11.)

$$\text{Im } T_{ii} = \sum_h \langle i | T | h \rangle \langle h | T | i \rangle \quad (3.79)$$

Mittels des Cauchyschen Integralsatzes

$$F(q^2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C ds \frac{F(s)}{s - q^2} \quad (3.80)$$

und der in Abbildung 3.12 gezeigten Integrationskontur wird die Korrelationsfunktion zu:

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{|s|=R} ds \frac{F(s)}{s - q^2} + \int_0^R ds \frac{F(s + i\epsilon) - F(s - i\epsilon)}{s - q^2} \right) \\ &\stackrel{R \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty ds \frac{F(s + i\epsilon) - F(s - i\epsilon)}{s - q^2}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Der Integrationsweg C liefert für infinitesimales ϵ keinen Beitrag. Ebenso verschwindet der Beitrag des Weges A wenn $\lim_{|q^2| \rightarrow \infty} F(q^2) = 0$. Letztere Voraussetzung kann nicht ohne weiteres als gegeben angenommen werden. Die damit verbundenen Probleme können jedoch, wie noch gezeigt wird, behoben werden und werden daher vorerst nicht berücksichtigt. In einem letzten Schritt wird ausgenutzt, daß $F(q^2)$ für $q^2 < m_B^2$ reell ist und somit für $q^2 \geq m_B^2$ das Schwarzsche Spiegelungsprinzip, siehe Anhang A angewandt werden kann:

$$2i \text{Im } F(q^2) = F(q^2 + i\epsilon) - F(q^2 - i\epsilon). \quad (3.82)$$

Demnach ergibt sich der Korrelator als Dispersionsintegral über seinen Imaginärteil, der durch das optische Theorem 3.79 mit einer Summe über hadronische Zustände verbunden ist:

$$F(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{m_B^2}^\infty ds \frac{\text{Im } F(s)}{s - q^2}. \quad (3.83)$$

Der niedrigste Zustand ist dabei einfach das Residuum des B-Meson-Pols, der schon in 3.77, 3.78 separiert wurde, wohingegen die Imaginärteile der Mehrteilchenzustände komplizierte Funktionen von q^2 sein können, die in der Spektraldichte $\rho^h(s)$ zusammengefaßt werden..

Für UV-divergente Korrelationsfunktionen ist die Voraussetzung $\lim_{|q^2| \rightarrow \infty} F(q^2) = 0$ nicht erfüllt, d.h. die Dispersionsintegrale sind ebenfalls divergent. Um dennoch ein

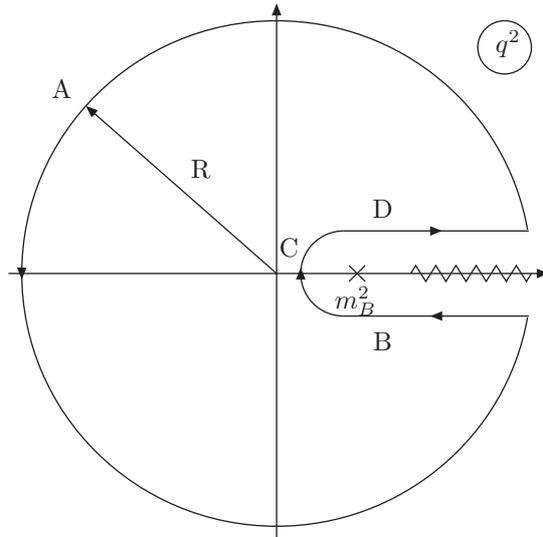


Abbildung 3.12: Integrationskontur für das optische Theorem

endliches Ergebnis zu erhalten, werden die ersten Terme einer Taylor-Entwicklung von $F(q^2)$ abgezogen:

$$\bar{F}(q^2) = F(q^2) - F(0) - q^2 F'(0). \quad (3.84)$$

Da jedoch die üblicherweise durchgeführte Borel-Transformation A.69 diese wieder entfernt, sollen sie in dieser Einführung nicht weiter interessieren.

Operator-Produkt-Entwicklung

In diesem Abschnitt wird heuristisch ausgedrückt die andere Seite der Summenregeln behandelt. Zum Einen wird der Korrelator via OPE 3.3 entwickelt, wobei diese hier folgende konkrete Form

$$F(q^2) = \sum_d C_d(q^2) \langle 0 | O_d | 0 \rangle, \quad (3.85)$$

mit den Beiträgen, siehe auch Abbildung 3.13,

$O_0 = 1$		Perturbativer Beitrag,
$O_3 = \bar{q}q$	$q = u, d, s$	Quark-Kondensat,
$O_4 = G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}$		Gluon-Kondensat,
$O_5 = \bar{q}\sigma_{\mu\nu}t^a G^{a\mu\nu}q$	$q = u, d, s$	Quark-Gluon-Kondensat,
$O_6 = (\bar{q}\Gamma_r q)(\bar{q}\Gamma_s q)$	$q = u, d, s$	Vier-Quark-Kondensat.

annimmt. Zum Anderen wird eine perturbative Entwicklung der Wilsonkoeffizienten vorgenommen, wobei hier der wichtigste Beitrag von Korrekturen zu C_0 stammt. (Siehe 3.14) Aus ökonomischen Gründen wird für diese Einführung nur die führende

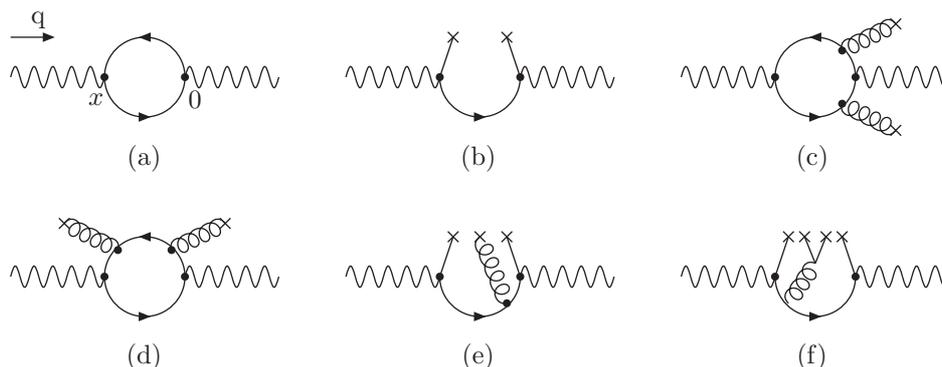


Abbildung 3.13: Nichtstörungstheoretische Entwicklung der Korrelationsfunktion 3.75
 (a) führender Perturbativer Term (b) Quark-Kondensat (c) und
 (d) Gluon-Kondensate (e) Quark-Gluon-Kondensat (f) Vier-Quark-
 Kondensat

Ordnung Störungstheorie und der Beitrag des Quark-Kondensats betrachtet. Weiterführend sei auf [145], für die Berechnung der Zweipunktfunktion bis $O(\alpha_s^2)$ auf [178, 179] sowie für die entsprechende Summenregel auf [175, 176] verwiesen. In Anhang F findet sich die, für die numerische Auswertung in Kapitel 5.2 verwendete, Summenregel mit Beiträgen bis $\mathcal{O}(\alpha_s)$ und $d = 6$.

Die Beiträge mit $d \geq 3$ sind auf das QCD-Vakuum zurückzuführen, das entgegen seinem Namen alles andere als leer ist. Quarks und Gluonen fluktuieren auf Längenskalen $\sim \Lambda_{QCD}^{-1}$ und werden, von den mit hohen Impulsen $|q^2| \gg \Lambda_{QCD}^2$ injizierten Quarks, in erster Näherung als statische Hintergrundfelder wahrgenommen. Die Berechnung dieser Einflüsse geschieht mit Hilfe von Vakuumerwartungswerten lokaler Operatoren. Diese sind offenkundig prozeßunabhängig und können demnach, einmal bestimmt, für verschiedenste Rechnungen verwendet werden. Operatoren höherer Dimension sind mit zusätzlichen Potenzen des b-Propagator Nenners $(m_b - q^2)^{-1}$ im Wilson-Koeffizienten unterdrückt. Daher ist für die Verwendung des Ansatzes entscheidend, daß nicht nur $q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$, sondern auch $q^2 \ll m_b^2$ gilt und somit die Entwicklung in 3.85 nach einigen Termen abgebrochen werden kann.

Die Berechnung der Beiträge der Diagramme 3.13 (a) und (b), wobei durchgehend die Masse des leichten Quarks vernachlässigt wird, führt zu keinerlei prinzipiellen Schwierigkeiten. Für Diagramm (a) werden alle Quarkfelder zu freien Propagatoren kontrahiert, während in Diagramm (b) die leichten Quarkfelder als externe Vakuumfelder behandelt werden, deren Impuls gegenüber dem des b-Quarks vernachlässigt wird.

Konkret heißt dies für Diagramm (a):

$$\begin{aligned}
 F^{(pert)}(q^2) &= 3i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ i\gamma_5 \frac{i(\not{q} - \not{k})}{(q - k)^2} i\gamma_5 \frac{i(\not{k} + m_b)}{k^2 - m_b^2} \right\} \\
 &= \frac{3}{8\pi^2} (B_0(0, m_b^2, m_b^2)m_b^2 + m_b^2 - B_0(q^2, 0, m_b^2)(m_b - q^2)). \quad (3.86)
 \end{aligned}$$

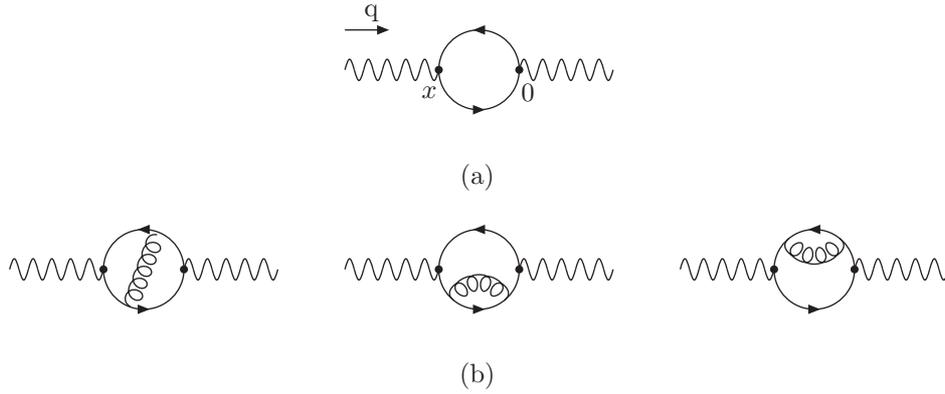


Abbildung 3.14: (a) Führender Term in der Störungsreihe von 3.75 (b) $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Korrekturen

Dies läßt sich analog zur hadronischen Summe als Dispersionsintegral schreiben, wobei das Problem der Divergenz des Integrales wieder nicht interessieren soll:

$$F^{(pert)} = \frac{1}{\pi} \int_{m_b^2}^{\infty} ds \frac{\text{Im} F^{(pert)}(s)}{s - q^2}. \quad (3.87)$$

Eine gewisse Vorsicht ist bei der Interpretation des Imaginärteiles geboten. Da Quarks nicht als freie Teilchen auftauchen, der volle Quarkpropagator keinen Pol hat, gibt es keine reellen Quarkzwischenzustände. Es verbietet sich demnach eine physikalische Interpretation wie in 3.79 und der Imaginärteil ist ein rein mathematisches Objekt. Mit den Formeln aus Anhang A ergibt sich dieser zu:

$$\text{Im} F^{(pert)}(s) = \frac{3}{8\pi} \frac{(s - m_b^2)^2}{s}. \quad (3.88)$$

Ausgangspunkt für Diagramm (b) ist

$$F^{\bar{q}q}(q^2) = \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | \bar{q}(x)_{i\alpha} q(0)_{j\beta} | 0 \rangle \{ \gamma_5 \hat{S}_{ij}^b(x) \gamma_5 \}_{\alpha\beta}, \quad (3.89)$$

mit dem freien b-Quarkpropagator $\hat{S}_{ij}^b(x)$:

$$\hat{S}_{ij}^b(x) = \delta_{ij} \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \frac{\not{k} + m_b}{m_b^2 - k^2} e^{-ikx}. \quad (3.90)$$

Die Entwicklung der leichten Quarkfelder in Fock-Schwinger-Eichung $x^\rho A_\rho$

$$\bar{q}(x) = \bar{q}(0) + \bar{q}(0) \overleftarrow{D}_\rho x^\rho + \dots, \quad (3.91)$$

ergibt zwei Matrixelemente,

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{q}_{i\alpha} q_{j\beta} | 0 \rangle &= \frac{1}{12} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \langle \bar{q}q \rangle, \\ \langle 0 | \bar{q}_{i,\alpha} \overleftarrow{D}_\rho q_{j\beta} | 0 \rangle &= \frac{im_q}{48} \langle \bar{q}q \rangle (\gamma_\rho)_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.92)$$

von denen eines aufgrund der leichten Quarkmasse vernachlässigt wird. Eingesetzt in 3.89 liefert dies nach Spurbildung und Ausführung der Integrationen einen sehr einfachen Ausdruck:

$$F^{\bar{q}q}(q^2) = \frac{m_b}{q^2 - m_b^2} \langle \bar{q}q \rangle. \quad (3.93)$$

Zusammenführen der Ergebnisse

In den vorigen Abschnitten wird die Korrelationsfunktion auf zwei Arten dargestellt:

$$\begin{aligned} F^{(had)}(q^2) &= \frac{m_B^4 f_B^2}{m_b^2 (m_B^2 - q^2)} + \int_{s_0^h}^{\infty} ds \frac{\rho^h(s)}{s - q^2} \\ F^{(ope)}(q^2) &= \frac{1}{\pi} \int_{m_b^2}^{\infty} ds \frac{\text{Im} F^{(pert)}(s)}{s - q^2} + \frac{m_b}{q^2 - m_b^2} \langle \bar{q}q \rangle. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Um hieraus eine Summenregel für f_B zu erhalten, bedarf es noch einer Möglichkeit, das bisher unbekannte Integral über die hadronische Spektraldichte abzuschätzen. Solch eine Möglichkeit liefert die bereits erwähnte Quark-Hadron-Dualität. Erstmalig in [171] vorgeschlagen, besagt diese grob gesagt, daß, wenn nur über einen gewissen Energiebereich gemittelt wird, die hadronische Spektraldichte über den via QCD-Störungstheorie berechneten, rein mathematischen Imaginärteil angenähert werden kann. Voraussetzungen und Gültigkeit sind noch nicht abschließend geklärt [56, 180], aber die Erfahrung in QCD-Summenregeln zeigt, daß die semilokale Quark-Hadron-Dualität eine gerechtfertigte Näherung darstellt:

$$\int_{s_0^h}^{\infty} ds \frac{\rho^h(s)}{s - q^2} \approx \frac{1}{\pi} \int_{s_0^B}^{\infty} ds \frac{\text{Im} F^{(pert)}(s)}{s - q^2}. \quad (3.95)$$

Auf diese Weise läßt sich, nachdem noch die mehrfach erwähnte Borel-Transformation durchgeführt wurde, eine einfache Summenregel für f_B aufstellen:

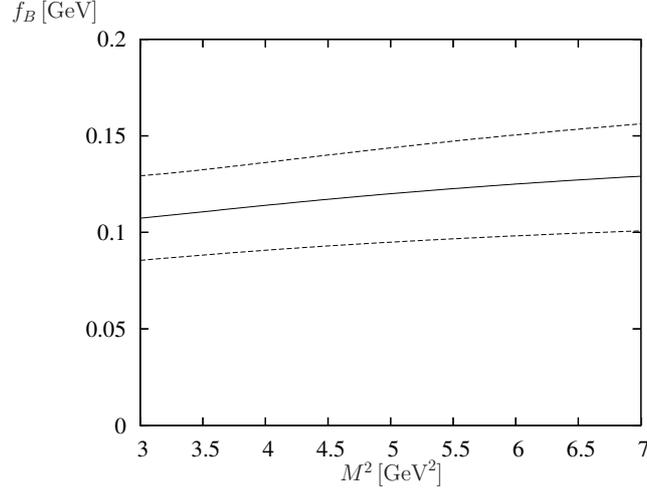
$$f_B^2 m_B^4 = \frac{3m_b^2}{8\pi^2} \int_{m_b^2}^{s_0^B} ds \frac{(s - m_b^2)^2}{s} e^{(m_B^2 - s)/M^2} - m_b^2 (m_b \langle \bar{q}q \rangle) e^{(m_B^2 - m_b^2)/M^2}. \quad (3.96)$$

Zu beachten ist, daß neben verschiedenen Eingabegrößen, wie der Masse des b -Quarks, auch zwei Summenregelinhärente Parameter, s_0^B aus der Quark-Hadron-Dualität sowie M aus der Borel-Transformation eingeführt wurden, die im Endeffekt für eine, wie in der Einleitung erwähnt, nur schwer reduzierbare systematische Unsicherheit in der Methode verantwortlich sind. Es bedarf einiges an Aufwand, sowohl s_0^B , als auch M nach nunmehr relativ festen Kriterien einzuschränken und so die mit diesen verbundenen Unsicherheiten zu reduzieren.

Resultate

Um einen Eindruck von der Numerik zu erhalten, wird hier 3.96 ausgewertet. Abbildung 3.15 zeigt die Ergebnisse für f_B in Abhängigkeit vom Borelparameter. Die Wahl des Borel-Fensters $3 \text{ GeV}^2 \leq M^2 \leq 5.5 \text{ GeV}^2$ folgt aus zweierlei Überlegungen: Zum Ersten darf der Borel-Parameter nicht zu groß sein, damit höhere Zustände in

m_b	4.6 – 4.8 GeV
m_B	5.279 GeV
s_0^B	33 – 37 GeV ²

Tabelle 3.1: Eingabewerte für die Summenregel 3.96

Abbildung 3.15: Ergebnisse für f_B in Abhängigkeit von M^2 . Die gestrichelten Kurven geben die Werte für $m_b = 4.8 \text{ GeV}$, $s_0^B = 33 \text{ GeV}^2$, $m_b = 4.6 \text{ GeV}$, $s_0^B = 37 \text{ GeV}^2$ an, die durchgezogene Kurve den Zentralwert $m_b = 4.7 \text{ GeV}$, $s_0^B = 35 \text{ GeV}^2$.

der hadronischen Spektraldichte unterdrückt sind. Zum Zweiten darf er nicht zu klein sein, da sonst höherdimensionale Operatoren in der OPE, die durch die Borel-Transformation mit negativen Potenzen von M^2 unterdrückt sind, zu große Beiträge ergeben. Diese widersprüchlichen Bedingungen führen zur oben angegebenen Festlegung in einem Bereich, in dem beide Voraussetzungen mehr oder weniger erfüllt sind. Mit den weiteren Eingabewerten aus Tabelle 3.1 führt die Auswertung dieser sehr groben Näherung zu einem deutlich zu niedrigen Wert

$$f_B = 120 \pm 30 \text{ MeV}, \quad (3.97)$$

der schon eine der größten Schwierigkeiten zeigt: Die Abschätzung der Auswirkungen von α_s -Korrekturen sowie höheren Termen in der OPE, die in diesem Falle erheblichen Einfluß auf das Resultat haben, ist nicht so ohne weiteres möglich. In dem angegebenen Fehler sind nur die Unsicherheiten der Eingabewerte berücksichtigt. Ein Vergleich mit aktuellen Ergebnissen aus Summenregeln, vom Gitter und aus dem Experiment verdeutlicht, daß dies die tatsächlichen Unsicherheiten bei weitem nicht erfaßt und dementsprechend zu Unstimmigkeiten führt .

$$\begin{aligned}
 f_B &= 210 \pm 19 \text{ MeV} && \text{(Summenregeln [175]),} \\
 f_B &= 216 \pm 9 \pm 19 \pm 4 \pm 6 \text{ MeV} && \text{(Gitter [181]),} \\
 f_B &= 229_{-0.031}^{+0.036}(\text{stat})_{-0.0037}^{+0.034}(\text{syst}) \text{ MeV} && \text{(Experiment [182]).}
 \end{aligned}$$

3.3.2 Lichtkegelsummenregeln

Wie in der Einleitung schon erwähnt, bestehen im Vorgehen starke Ähnlichkeiten zwischen Lichtkegel- und SVZ-Summenregeln. Dies wird zum Anlaß genommen in diesem Abschnitt nur auf die spezifischen Unterschiede einzugehen, während für das allgemeine Prozedere der vorangegangene Abschnitt als Referenz gelten soll. Eingeführt wurden Lichtkegelsummenregeln (LCSR) in [183, 184, 185, 186] als alternative Methode zu Dreipunktsummenregeln zur Bestimmung von Meson-Zerfallsformfaktoren. Der wesentliche Unterschied darin bestehend, daß, anstatt beide Mesonen via entsprechender Ströme zu interpolieren, eines auf die Massenschale (on-shell) gesetzt wird und mittels Verteilungsamplituden beschrieben wird. Es stellte sich heraus, daß für Zerfälle schwerer in leichte Mesonen, die Methode der LCSR besser geeignet schien. Qualitativ dadurch begründet, daß in diesen Zerfällen der weiche Formfaktor, bei dem das aktive Quark fast den gesamten Impuls des Mesons im Endzustand annimmt, stark vom Endpunktverhalten der Verteilungsamplitude abhängt, siehe zum Beispiel 2.45. Dieses Endpunktverhalten wird von der Entwicklung in lokale Kondensate nicht korrekt wiedergegeben. Für eine ausführliche Diskussion dieses Problems sei allerdings auf [187] verwiesen.

Ausgangspunkt ist wie bei den SVZ-Summenregeln eine speziell für den gewünschten Zweck aufgestellte Korrelationsfunktion. Hier zum Beispiel die in Kapitel fünf noch näher betrachtete zur Bestimmung der $B \rightarrow \pi$ -Formfaktoren f^+ sowie $f^+ + f^-$:

$$\begin{aligned} F_\mu(p, q) &= i \int d^4x e^{iqx} \langle \pi(p) | T \{ \bar{u}(x) \gamma_\mu b(x), \bar{b}(0) i m_b \gamma_5 d(0) \} | 0 \rangle \\ &= F(q^2, (p+q)^2) p_\mu + \tilde{F}(q^2, (p+q)^2) q_\mu. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Auf hadronischer Seite besteht kein Unterschied zum vorigen Abschnitt. Ein kompletter Satz hadronischer Zustände mit B-Meson-Quantenzahlen führt in identischer Weise zur hadronischen Dispersionsrelation:

$$F^{(Had)}(q^2, (p+q)^2) = \frac{2m_B^2 f_B f_{B\pi}^+(q^2)}{(m_B^2 - (p+q)^2)} + \int_{s_0^h}^{\infty} ds \frac{\rho^h(s)}{s - (p+q)^2}. \quad (3.99)$$

Auf der anderen Seite wird die Korrelationsfunktion um den Lichtkegel $x^2 = 0$ entwickelt. Um dies noch ein wenig näher darzulegen werde die nach der Kontraktion der b -Quarks auftretenden Matrixelemente untersucht:

$$\begin{aligned} F_\mu^{(pert)}(p, q) &= i m_b \int \frac{d^4x d^4k}{(2\pi)^4 (m_b^2 - k^2)} e^{i(q-k)x} (m_b \langle \pi(p) | \bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_5 d(0) | 0 \rangle \\ &+ k^\nu \langle \pi(q) | \bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 d(0) | 0 \rangle). \end{aligned} \quad (3.100)$$

Diese weisen bereits die Form der Verteilungsamplituden aus Abschnitt 3.2 auf. Hier sei jedoch noch skizziert, warum eine lokale Entwicklung dieser inadequat erscheint. Als Beispiel wird das erste Matrixelement in 3.100 verwendet und der Operator lokal entwickelt:

$$\bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_5 d = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \bar{u} (\overleftarrow{D} \cdot x)^n \gamma_\mu \gamma_5 d. \quad (3.101)$$

Die daraufhin auftauchenden Matrixelemente lokaler Operatoren, weisen, da nur der Vierervektor p zur Verfügung steht, folgende allgemeine Form auf, wobei $M_n^{(i)}$ reduzierte Matrixelemente mit Dimension i sind:

$$\begin{aligned} \langle \pi(p) | \bar{u} \overleftarrow{D}_{\alpha_1} \overleftarrow{D}_{\alpha_2} \cdots \overleftarrow{D}_{\alpha_n} \gamma_\mu \gamma_5 d | 0 \rangle &= i^n p_\mu p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_n} M_n^{(2)} \\ &+ i^n p_\mu g_{\alpha_1 \alpha_2} \cdots p_{\alpha_n} M_n^{(4)} \\ &+ i^n g_{\mu \alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_n} M_n^{(4)} \cdots \end{aligned} \quad (3.102)$$

Weitere Terme mit einem oder mehr metrischen Tensoren folgen. Wird dies in 3.100 eingesetzt und über x sowie k integriert, zeigt sich mit

$$\xi = \frac{2p \cdot q}{m_b^2 - q^2} = \frac{(p+q)^2 - q^2}{m_b^2 - q^2} \quad (3.103)$$

ein Bild wie in 3.17:

$$F^{(OPE)}(q^2, (p+q)^2) = i \frac{m_b^2}{m_b^2 - q^2} \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n M_n^{(2)} + i m_b^2 \frac{q^2}{(m_b^2 - q^2)^2} \sum_{n=2}^{\infty} \xi^n M_n^{(4)}. \quad (3.104)$$

Ist ξ nun endlich und nicht klein, muß analog zu 3.17, 3.18 zu jeder Ordnung $\frac{1}{m_b^2 - q^2}$ eine unendliche Reihe von lokalen Matrixelementen berechnet werden. Eine lokale Entwicklung ist demnach nur für $(p+q)^2 \sim q^2$ oder für verschwindenden Pion-Impuls $p \rightarrow 0$ sinnvoll. Andererseits zeigt ein Blick auf 3.102, daß die führenden Operatoren symmetrisch und spurlos in den Lorentz-Indizes sind, demnach höchstmöglichem Spin entsprechen. Weiterhin folgt, da der Operator ohne Einsetzung einer Ableitung gerade von Dimension drei und Spin eins ist, daß die führenden Beiträge von Twist $3 - 1 = 2$ kommen. Eine weitere Analyse zeigt, daß die Beiträge in 3.102, 3.104 geordnet nach ihrem jeweiligem Twist auftreten, so daß die Lichtkegelentwicklung der nichtlokalen Matrixelemente gerade einer Entwicklung der Verteilungsamplituden in aufsteigendem Twist entspricht. Hiernach verläuft das weitere Vorgehen identisch zu den SVZ-Summenregeln. Die perturbative Berechnung wird zu physikalischen Impulsen analytisch fortgesetzt, hadronische und perturbative Seite werden einander via Quark-Hadron-Dualität gleichgesetzt und schlußendlich wird ebenfalls eine Borel-Transformation durchgeführt, so daß sich ein Ergebnis der Form

$$f_{B\pi}^+(q^2) = \frac{e^{m_B^2/M^2}}{2m_B^2 f_B} \int_{m_2^2}^{s_0^B} ds e^{-s/M^2} \text{Im } F^{(pert)}(s, q^2) \quad (3.105)$$

ergibt. Das perturbative Spektrum wird stets in einer Art longitudinaler Faktorisierung als eine Konvolution von Verteilungs- und Streuamplitude gegeben:

$$F^{(pert)}(s, q^2) = \sum_{t=2,3,4,\dots} \int_0^1 du T^t(s, q^2, u, \mu) \phi_t(u, \mu). \quad (3.106)$$

Dabei kompensiert die Skalenabhängigkeit der Streuamplitude die der Verteilungsamplitude. Es existiert bisher kein Beweis dieser Faktorisierung, so daß bei jeder Rechnung die Gültigkeit aufs neue geprüft werden muß. In Kapitel fünf wird

dies nochmals aufgegriffen werden. Dort werden ebenfalls numerische Auswertungen durchgeführt, so daß an dieser Stelle darauf verzichtet sei. Wichtig jedoch auch hier, darauf hinzuweisen, daß neben anderen Eingabegrößen zwei den Summenregeln eigene Parameter, durch die Dualitätsnäherung und durch die Borel-Transformation, eingeführt werden, die auf dem Niveau, auf dem sich neuere Rechnungen bewegen, einen Großteil der resultierenden Unsicherheit ausmachen. Trotz der sich daraus ergebenden Schwierigkeiten die Präzision weiterer Rechnungen noch zu erhöhen, bleibt jedoch festzuhalten, daß die Lichtkegelsummenregeln oder Summenregeln allgemein noch immer eine der zuverlässigsten und besterprobten Methoden bilden, Zugriff auf hadronische Größen zu erhalten.

Kapitel 4

B-Meson- Dreiteilchenverteilungsamplituden

Obgleich in [188] gezeigt wurde, daß Dreiteilchenzustände in führender Ordnung zu den weichen Formfaktoren von schweren zu leichten Mesonen beitragen, gab es in der Literatur keine Untersuchung, die über die Herleitung von Relationen durch QCD-Bewegungsgleichungen [43] oder gruppentheoretische Überlegungen [47, 161] hinausgingen. Dieses Fehlen von Informationen über die funktionale Form von und dieser Mangel an realistischen Modellen für Dreiteilchenverteilungsamplituden verhinderte bis dato quantitative Berechnungen von Beiträgen höherer Fockzustände. In diesem Kapitel wird die erste summenregelbasierte Analyse der von Kawamura et al. [43] eingeführten Dreiteilchenverteilungsamplituden vorgestellt.

Im ersten Abschnitt wird aus SVZ-Summenregeln in Heavy-Quark-Effective-Theory (HQET) analog zu [64] bzw. [166] das asymptotische Verhalten der Verteilungsamplituden abgeleitet, welches als Grundlage für zwei Modelle dient: Eines, das dem Ergebnis des lokalen Dualitätsgrenzwertes der Summenregeln entspricht, und eines, das einen exponentiellen Abfall zu höheren Impulsen des leichten Quarks, bzw. Gluons vorweist. Mit diesen werden die Bewegungsgleichungen gelöst, so daß zwei konsistente Sets von Zwei- und Dreiteilchenverteilungsamplituden erhalten werden. Gemeinsamkeiten und Unterschiede sowie, in einem Vorgriff auf das fünfte Kapitel, die Auswirkungen auf die Numerik der *B*-Meson-Summenregeln werden beleuchtet. Abschließend werden die bisher unveröffentlichten lokalen Summenregeln für das chromoelektrische, bzw. chromomagnetische Moment, d.h. für die Normierung der Verteilungsamplituden Ψ_V und Ψ_A vorgestellt und analysiert.

4.1 Neue Zweipunktsummenregeln

Im dritten Kapitel wurden bereits die HQET-Summenregeln erwähnt, die Grozin-/Neubert [64, 165] und Braun/Ivanov/Korchensky[166] nutzten, um Informationen über die Form der Zweiteilchenverteilungsamplituden $\phi_+^B(\omega)$, $\phi_-^B(\omega)$ zu erhalten. Diese Methode wird hier für die vier Dreiteilchenverteilungsamplituden $\Psi_A(\omega, \xi)$, $\Psi_V(\omega, \xi)$, $X_A(\omega, \xi)$, $Y_A(\omega, \xi)$ verwandt. Ausgangspunkt ist dabei folgende Korrelationsfunktion eines lokalen $q\bar{q}G$ -Stromes und eines $q\bar{q}G$ -Stromes bei dem sich Quark-

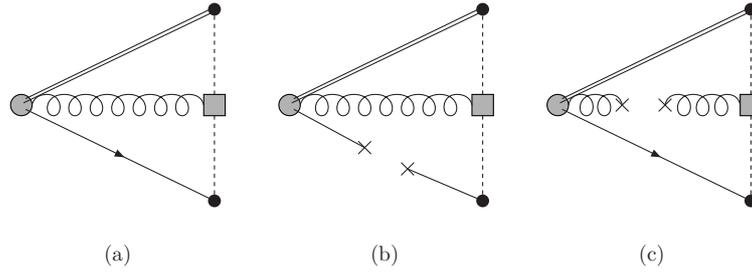


Abbildung 4.1: (a) *Perturbativer Teil der Korrelationsfunktion* (b) *Quark-Kondensat* (c) *Gluon-Kondensat*

und Gluonfelder auf dem Lichtkegel befinden:

$$\Pi_\lambda^{(\Gamma)}(\rho, t, u) = i \int d^4x e^{-i\rho(v \cdot x)} \langle 0 | T \{ \bar{q}(tn) \Gamma G_{\lambda\sigma}(utn) n^\sigma Q_v(0), Q_v^*(x) G_{\alpha\beta}(x) \sigma^{\alpha\beta} \gamma_5 q(x) \} | 0 \rangle, \quad (4.1)$$

wobei n^σ ein lichtartiger Vektor, Q_v ein HQET-Quarkfeld, $G_{\alpha\beta}$ der Gluon-Feldstärketensor, t eine reelle Zahl, die die Position auf dem Lichtkegel angibt und ρ die Residualenergie ist. Die lichtartigen Vektoren n und \bar{n} , siehe Anhang, werden wiederum so definiert, daß $v_\mu = \frac{1}{2}(n_\mu + \bar{n}_\mu)$ und $n^2 = \bar{n}^2 = 0, n \cdot \bar{n} = 2$. Der lokale Strom wurde der Einfachheit halber rein skalar gewählt und Wilsonlinien, die für die Eichinvarianz des Matrixelementes vonnöten wären, wurden nicht angeführt, da sie in der Rechnung zur führenden Ordnung keine Rolle spielten. In diesem Kapitel wird als einzigem der Einfachheit halber die nichtrelativistische Normierung der HQET verwendet. D.h. $f = \frac{\sqrt{m_B}}{2} f_B$ und $|B_v\rangle = \frac{1}{\sqrt{m_B}} |B(p)\rangle$

Diese erfolgt nun in bereits beschriebenen Bahnen, wobei hier theoretische Feinheiten, die der Rechnung zugrundeliegen, aber keinen Einfluß auf den Gang der Selbigen haben, beiseite gelassen werden. Zuvorderst wird ein vollständiger Satz HQET-Zustände $|B_v\rangle$ eingesetzt und die Korrelationsfunktion aufgespalten in Spektraldichte sowie niedrigsten Pol, welcher bei der effektiven Bindungsenergie des B-Mesons $\rho = \bar{\Lambda} = m_B - m_b$ liegt. Schematisch hat die hadronische Seite somit folgende Form:

$$\Pi_\lambda^{(\Gamma)}(\rho, t, u) = \frac{C_\lambda}{\bar{\Lambda} - \rho} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi e^{-i(\omega+u\xi)t} F(\omega, \xi) + \int_{\tilde{s}_0^h}^\infty ds \frac{\rho(s, t, u)}{s - \rho}. \quad (4.2)$$

$F(\omega, \xi)$ ist eine der Verteilungssamplituden \tilde{s}_0^h ist das HQET-äquivalent mit allerdings nur einer Massendimension zu s_0^h und C_λ hängt vom Matrixelement des lokalen Stroms sowie der Normierung von F ab. Dieses Matrixelement kann aus der in [64] gegebenen Definition des chromoelektrischen bzw. chromomagnetischen Moments

$$\langle 0 | \bar{q} \Gamma G^{\mu\nu} Q_v | B_v \rangle = \frac{1}{3} f \text{Tr} \left[\gamma_5 \Gamma \frac{1 + \not{v}}{2} \{ (\lambda_H^2 - \lambda_E^2) (\gamma^\mu v^\nu - \gamma^\nu v^\mu) - i \lambda_H^2 \sigma^{\mu\nu} \} \right], \quad (4.3)$$

gewonnen werden:

$$\langle 0 | Q_v^* G_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} \gamma_5 q | B_v \rangle = -4if [(\lambda_E^2 + \lambda_H^2)]. \quad (4.4)$$

Für die Verteilungsamplituden kann mit Hilfe von 3.60 folgende Korrespondenz aufgestellt werden:

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \gamma_\mu \gamma_5 &\rightarrow F &= \Psi_A \\
&\gamma_\mu &\rightarrow &\Psi_V \\
&\sigma_{\mu\nu} \gamma_5 &\rightarrow &\Psi_A - \Psi_V \\
&\not{v} \gamma_5 &\rightarrow &X_A + \Psi_A \\
&i \gamma_5 &\rightarrow &Y_A - X_A.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Bei der Berechnung der Summenregeln treten einige technische Feinheiten auf, die im Folgenden skizziert werden. Dabei wird die Rechnung möglichst allgemein gehalten, um einen gemeinsamen Ausgangspunkt für alle vier Verteilungsamplituden zu erhalten. Ausgehend von 4.1 werden alle Quark- und Gluonfelder kontrahiert, siehe Abbildung 4.1(a). Zuvorderst interessiert die funktionale Abhängigkeit der Verteilungsamplituden von Quark- bzw. Gluonimpuls, so daß im Laufe der Rechnung numerische Faktoren, die einzig für die Normierung der jeweiligen Verteilungsamplitude relevant sind, der Einfachheit halber weggelassen, bzw. in einer allgemeinen Konstanten zusammengefaßt werden. Dies wird jedoch auch an entsprechender Stelle nochmals verdeutlicht.

$$\begin{aligned}
\Pi_\lambda^\Gamma(\rho, t, u) &= i \int d^4x e^{-i\rho(v \cdot x)} i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{iq \cdot (x - tn)}}{q^2} \\
&(-i) \delta^{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (utn - x)}}{k^2} (k_\alpha k_\lambda n_\beta - k_\beta k_\lambda n_\alpha - (n \cdot k) k_\alpha g_{\beta\lambda} + (n \cdot k) k_\beta g_{\alpha\lambda}) \\
&\quad i \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{e^{-il \cdot x}}{v \cdot l} \text{Tr} \left[\frac{\lambda^a \lambda^b}{2 \ 2} \right] \text{Tr} \left[\Gamma \frac{1 + \not{v}}{2} \sigma^{\alpha\beta} \gamma_5 \not{v} \right] \tag{4.6}
\end{aligned}$$

Nach Ausführung der x - und l -Integration sowie Vereinfachung einiger Terme lautet der Korrelator:

$$\begin{aligned}
\Pi_\lambda^\Gamma(\rho, t, u) &= 8 \int \frac{d^4q d^4k}{(2\pi)^8} e^{-it(q + uk) \cdot n} \\
&\quad \frac{k_\alpha k_\lambda n_\beta + k \cdot n k_\beta g_{\alpha\lambda}}{q^2 k^2 v \cdot (q + k - \rho v)} \text{Tr} \left[\Gamma \frac{1 + \not{v}}{2} \sigma^{\alpha\beta} \gamma_5 \not{v} \right]. \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Der Imaginärteil dieses Ausdrucks wird mittels der Cutkosky-Regeln [189] bestimmt. Diese besagen grob gesprochen, daß der Imaginärteil eines Feynman-Diagramms, verbunden mit reellen Zwischenzuständen, bestimmt werden kann, indem dieses in jeder möglichen Weise durchgeschnitten wird und die dabei durchtrennten Linien on-shell gesetzt werden. Siehe hierzu z.B. [15, 17]. In diesem Falle, Abbildung 4.2, ist nur ein Schnitt nötig. Für die Rechnung heißt dies nichts anderes, als das die Propagatoren durch entsprechende Delta- und Theta-Distributionen ersetzt werden:

$$\frac{1}{p^2 - m^2} \rightarrow -2\pi i \delta(p^2 - m^2) \Theta(p_0). \tag{4.8}$$

Nach dem Einsetzen der Cutkosky-Regeln 4.8 und Übergang zum Dispersionsintegral

$$\begin{aligned} \Pi_\lambda^\Gamma(\rho, t, u) = & 16 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{s - \rho} \int \frac{d^4q d^4k}{(2\pi)^6} e^{-it(q+uk)\cdot n} \\ & (k_\alpha k_\lambda n_\beta + (k \cdot n) k_\beta g_{\alpha\lambda}) \text{Tr} \left[\Gamma \frac{1 + \not{v}}{2} \sigma^{\alpha\beta} \gamma_5 \not{q} \right] \\ & \delta(s - (q + k) \cdot v) \delta(k^2) \delta(q^2) \Theta(s - (q + k) \cdot v) \Theta(k_0) \Theta(q_0), \end{aligned} \quad (4.9)$$

erweist es sich als günstig zum Ruhesystem des B-Mesons überzugehen und Lichtkegelkoordinaten bzw. Lichtkegelvektoren, siehe auch Anhang A, einzuführen. Die Integrale über die senkrechten Komponenten können dann analog zu zweidimensionalen Euklidischen Integralen über Winkel und Betrag ausgeführt werden. Dabei treten drei Fälle auf:

1. Fall

$$\int d^2k_\perp k_\perp^\mu = 0. \quad (4.10)$$

2. Fall

$$\begin{aligned} \int d^2k_\perp \delta((k \cdot n)(k \cdot \bar{n}) - \vec{k}_\perp^2) &= \int d\phi d|\vec{k}_\perp| \frac{|\vec{k}_\perp|}{2\sqrt{(k \cdot n)(k \cdot \bar{n})}} \\ &\times \delta(|\vec{k}_\perp| - \sqrt{(k \cdot n)(k \cdot \bar{n})}) \\ &= \pi [\Theta(k \cdot n)\Theta(k \cdot \bar{n}) + \Theta(-k \cdot n)\Theta(-k \cdot \bar{n})]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

3. Fall

$$\begin{aligned} \int d^2k_\perp k_\perp^\mu k_\perp^\nu \delta((k \cdot n)(k \cdot \bar{n}) - \vec{k}_\perp^2) &= -\frac{\pi}{2} (k \cdot n)(k \cdot \bar{n}) \\ &\times \left(g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (n^\mu \bar{n}^\nu + \bar{n}^\mu n^\nu) \right) \\ &\times [\Theta(k \cdot n)\Theta(k \cdot \bar{n}) + \Theta(-k \cdot n)\Theta(-k \cdot \bar{n})]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Die Θ -Distributionen, die scheinbar nur der Korrektheit wegen angegeben werden, spielen eine nicht unerhebliche Rolle für den Fortgang der Rechnung. Im Ruhesystem des B-Mesons gilt $k_0 = k \cdot v = \frac{1}{2}k \cdot (n + \bar{n})$. Damit wird aus $\Theta(k_0)$ bzw. $\Theta(q_0)$, $\Theta(k \cdot n + k \cdot \bar{n})$ bzw. $\Theta(q \cdot n + q \cdot \bar{n})$ und mit obigen Resultaten folgt, daß sämtliche Lichtkegelkomponenten der Impulse größer als null sind. Diese Ergebnisse zur Hand können bis auf zwei alle Integrale ausgeführt werden und es stellt kein größeres Problem dar, zu folgendem Ausdruck, der als allgemeiner Ausgangspunkt

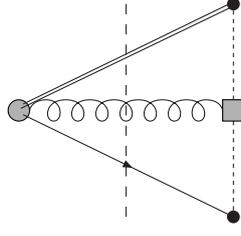


Abbildung 4.2: Anwendung der Cutkosky-Regeln auf 4.7. Der Schnitt erfolgt an der linken gestrichelten Linie. Alle Propagatoren werden on-shell gesetzt.

zur Berechnung der Summenregeln benutzt wird, zu gelangen:

$$\begin{aligned}
 \Pi_\lambda^\Gamma(\rho, t, u) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{s - \rho} \int \frac{d(q \cdot n) d(k \cdot n)}{(2\pi)^4} e^{-it(q+uk) \cdot n} \Theta(k \cdot n) \Theta(q \cdot n) \\
 &\quad (2s - q \cdot n - k \cdot n)(k \cdot n) \Theta(2s - q \cdot n - k \cdot n) \\
 &\quad \left\{ \text{Tr} \left[\Gamma \left(1 + \frac{1}{2}(n + \bar{n}) \right) \sigma^{\alpha\beta} \gamma_5 \not{n} \right] (q \cdot n) \right. \\
 &\quad \left[\frac{1}{2} ((k \cdot n) \bar{n}_\rho + (2s - q \cdot n - k \cdot n) n_\rho) \bar{n}_\rho n_\beta + (k \cdot n) \bar{n}_\beta g_{\alpha\rho} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\Gamma \left(1 + \frac{1}{2}(n + \bar{n}) \right) \sigma^{\alpha\beta} \gamma_5 \not{n} \right] (2s - q \cdot n - k \cdot n) \\
 &\quad \left. \left[\left(\frac{1}{2}(k \cdot n) \bar{n}_\rho + \frac{1}{3}(2s - q \cdot n - k \cdot n) n_\rho \right) \bar{n}_\rho n_\beta + (k \cdot n) \bar{n}_\beta g_{\alpha\rho} \right] \right\} \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Von hier aus bedarf es nur noch der Berechnung der Spur mit der jeweiligen Dirac-Matrix und der Extraktion der entsprechenden Lorentz-Struktur. Ist dies geschehen, können hadronische und perturbative Seite einander wie in Kapitel drei gezeigt via Quark-Hadron-Dualität gleich gesetzt werden. Die resultierenden Summenregeln mit zusammengefaßten Vorfaktoren ergeben nach Borel-Transformation relativ kompakte Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 C e^{-\frac{\bar{\Lambda}}{M}} \int_0^\infty d\omega d\xi \Psi_V(\omega, \xi) &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\omega+\xi}{2}}^{s_0} ds e^{-\frac{s}{M}} \int_0^\infty d(k \cdot n) d(q \cdot n) \\
 &\quad \times (k \cdot n)^2 (2s - q \cdot n - k \cdot n)^2 e^{-it(q+uk) \cdot n} \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C e^{-\frac{\bar{\Lambda}}{M}} \int_0^\infty d\omega d\xi \Psi_A(\omega, \xi) &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\omega+\xi}{2}}^{s_0} ds e^{-\frac{s}{M}} \int_0^\infty d(k \cdot n) d(q \cdot n) \\
 &\quad \times (k \cdot n)^2 (2s - q \cdot n - k \cdot n)^2 e^{-it(q+uk) \cdot n} \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

$$C e^{-\frac{\bar{\Lambda}}{M}} \int_0^\infty d\omega d\xi (\Psi_A(\omega, \xi) - \Psi_V(\omega, \xi)) = 0 \quad (4.16)$$

$$C e^{-\frac{\bar{\Lambda}}{M}} \int_0^\infty d\omega d\xi (\Psi_A(\omega, \xi) + X_A(\omega, \xi)) = \int_{\frac{\omega+\xi}{2}}^{s^0} ds e^{-\frac{s}{M}} \int_0^\infty d(k \cdot n) d(q \cdot n) (k \cdot n)(q \cdot n)(2s - q \cdot n - k \cdot n)^2 e^{-it(q+uk) \cdot n} \quad (4.17)$$

$$C e^{-\frac{\bar{\Lambda}}{M}} \int_0^\infty d\omega d\xi (Y_A(\omega, \xi) - X_A(\omega, \xi)) = -\frac{1}{6} \int_{\frac{\omega+\xi}{2}}^{s^0} ds e^{-\frac{s}{M}} \int_0^\infty d(k \cdot n) d(q \cdot n) (k \cdot n)(2s - q \cdot n - k \cdot n)^2 (2s - 4(k \cdot n) - q \cdot n) e^{-it(q+uk) \cdot n} \quad (4.18)$$

C steht in allen Summenregeln für die gleiche Konstante, aus anfangs beschriebenen Matrixelement, rationalen Zahlenfaktoren und $(2\pi)^4$. Unterschiede bestehen einzig in Vorfaktoren $\frac{1}{2}$, bzw. $-\frac{1}{6}$. Obige Summenregeln werden nun nach den einzelnen Verteilungssamplituden aufgeteilt. Die endgültige Form ergibt sich dann, indem die resultierenden Formeln jeweils mit $e^{-i\xi'ut}$ sowie $e^{-i\omega't}$ multipliziert und über u respektive t integriert werden.

$$\begin{aligned} C e^{-\frac{\bar{\Lambda}}{M}} \Psi_A(\omega, \xi) &= \frac{1}{2} \xi^2 \int_{\frac{\omega+\xi}{2}}^{s^0} ds e^{-\frac{s}{M}} (2s - \omega - \xi)^2 \Theta(2s^0 - \omega - \xi) \\ C e^{-\frac{\bar{\Lambda}}{M}} X_A(\omega, \xi) &= \frac{1}{2} (2\omega - \xi) \xi \int_{\frac{\omega+\xi}{2}}^{s^0} ds e^{-\frac{s}{M}} (2s - \omega - \xi)^2 \Theta(2s^0 - \omega - \xi) \\ C e^{-\frac{\bar{\Lambda}}{M}} Y_A(\omega, \xi) &= -\frac{1}{6} \xi \int_{\frac{\omega+\xi}{2}}^{s^0} ds e^{-\frac{s}{M}} (2s - \omega - \xi)^2 (2s - 10\omega + 2\xi) \\ &\quad \times \Theta(2s^0 - \omega - \xi) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Diese Ausdrücke verdienen Kommentierung. Zum Ersten hängt der asymptotische Anteil aller Verteilungssamplituden offenkundig mindestens linear vom Gluonimpuls ξ ab. Dies ist ähnlich dem Pion Twist 4 Fall, wo ebenfalls zwei der Verteilungssamplituden linear und zwei quadratisch von α_3 abhängen. Zum Zweiten wie schon aus 4.14, 4.15 und 4.16 ersichtlich, erfüllen Ψ_V und Ψ_A die gleichen Summenregeln, d.h. daß sich in dieser Näherung kein Unterschied zwischen diesen beiden feststellen läßt. Unter anderem begründet dies aus der Normierung von Ψ_A respektive Ψ_V heraus die Näherung $\lambda_E^2 = \lambda_H^2$, die bereits in Kapitel 3 mit Grozin/Neuberts Modell [64] für die Zweiteilchenverteilungssamplituden aufgebracht wurde. Erste Korrekturen zu dieser werden in Kapitel 4.3 unter die Lupe genommen, wo die entsprechenden lokalen Summenregeln für das chromoelektrische- bzw. chromomagnetische Moment unter Einbeziehung von Quark- und Gluon-Kondensat aufgestellt werden. In [168, 177] wurde für eine grobe numerische Abschätzung der Dreiteilchenkorrekturen zur Wandzura-Wilszek Relation 3.59 aus einem heuristischen Vergleich der Matrixelemente von $\Psi_V - \Psi_A$ und $\phi_{3\pi}$ auf eine identische Asymptotik der Verteilungssamplituden geschlossen. Diese

$$\Psi_V(\omega, \xi) - \Psi_A(\omega, \xi) \sim \omega \xi^2$$

konnte in der hier vorgenommenen Näherung nicht bestätigt werden. Eine Möglichkeit über die gezeigten Ergebnisse hinauszugehen, bestünde in der Berechnung der

Diagramme 4.1(b) und (c). Dabei tauchten nicht-kollineare Kondensate auf, die mit den Methoden aus [190] in bilokale Kondensate entwickelt werden könnten. Analog zu [64, 165] würde dann der Summenregelbeitrag dieser Diagramme modelliert. Ein nicht unerheblicher Aufwand, dessen Ergebnis zudem von dem Modell des bilokalen Kondensats abhinge. Aus dieser Überlegung heraus und da in [64] die Modelle für ϕ_+ , ϕ_- ohne Beitrag des Kondensates aufgestellt wurden, wurde hier auf die Berechnung verzichtet.

4.2 Modelle und Bewegungsgleichungen

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse des Vorherigen zum Aufstellen zweier Modelle benutzt. Mit diesen werden die in Kapitel drei aus [43, 165] zitierten und hier nochmals hergeleiteten Relationen 3.61 zwischen Zwei- und Dreiteilchenverteilungsamplituden gelöst. Die sich ergebenden Modelle für die Zweiteilchenverteilungsamplituden werden diskutiert und den in der Literatur angegebenen gegenübergestellt. Probleme folgend aus der Renormierung von ϕ_+ bezüglich der Gültigkeit der Relationen und ihrer Lösung jenseits führender Ordnung, wie in [191] angesprochen, können hier nicht weiter behandelt werden und bedürfen noch eindringlicher Untersuchung. Zwecks Übersichtlichkeit und mangels Verwechslungsgefahr wird in diesem und dem nächsten Abschnitt der hochgestellte Index B bei den Verteilungsamplituden weggelassen.

4.2.1 Herleitung der Differentialgleichungen

Grundlegend für die folgende Herleitung ist die Fock-Schwinger-Eichung

$$(x - x_f)^\mu A_\mu^a(x) = 0, \quad (4.20)$$

und insbesondere die daraus folgende Verbindung zwischen Feldstärketensor und Eichfeld, siehe z.B. Anhang von [177]:

$$A_\mu^a(x) = \int_0^1 d\alpha \alpha (x - x_f)^\nu G_{\nu\mu}^a(\alpha x + (1 - \alpha)x_f). \quad (4.21)$$

Mit Hilfe dieser lassen sich die folgenden Identitäten zeigen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \bar{q}(x) \gamma^\mu \Gamma Q_v &= \bar{q}(x) \overleftarrow{D} \Gamma Q_v + i \int_0^1 du u \bar{q}(x) g G_{\mu\nu}(ux) x^\nu \gamma^\mu \Gamma Q_v, \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \bar{q}(x) \Gamma Q_v &= -\bar{q}(x) \Gamma D_\mu Q_v(y)|_{y=0} + \frac{\partial}{\partial y^\mu} \{\bar{q}(x+y) \Gamma Q_v(y)\}|_{y=0} \\ &+ i \int_0^1 du (u-1) \bar{q}(x) g G_{\mu\nu}(ux) x^\nu \Gamma Q_v \end{aligned} \quad (4.22)$$

Hierzu einige Anmerkungen: Wie üblich gilt, wenn ein Feld oder Operator ohne Ortsabhängigkeit angegeben wird, ist dieses bzw. dieser am Ursprung zu nehmen.

Die erste dieser Identitäten folgt mit 4.21 für $x_0 = 0$ direkt aus $\overleftarrow{\partial} = \overleftarrow{\mathcal{D}} - ig\mathcal{A}(x)$. Bei der Zweiten bedarf es ein wenig Vorsicht. Hier muß $A_\mu(0)$ in die Form 4.21 gebracht werden. Entscheidend ist jedoch, daß um die Eichungen in beiden Identitäten konsistent zu halten, das Eichzentrum gleich sein muß, d.h. daß die Eichung von $A_\mu(0)$ orstabhängig wird:

$$A_\mu(0) \rightarrow - \int_0^1 du u x^\nu G_{\nu\mu}((1-u)x).$$

Mit einer einfachen Substitution $u \rightarrow 1-u$ wird so der Ausdruck in 4.22 erhalten. Das weitere Vorgehen wird durch Bilden der Matrixelemente $\langle 0 | \dots | \bar{B}(p) \rangle$ der Operatoren und durch Ausnutzen der Bewegungsgleichungen des leichten bzw. schweren Quarks bestimmt. Erstere Identität wird so unter Vernachlässigung der Masse des leichten Quarks zu:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle 0 | \bar{q}(x) \gamma^\mu \Gamma Q_v | \bar{B}(p) \rangle = i \int_0^1 du u \langle 0 | \bar{q}(x) g G_{\mu\nu}(ux) x^\nu \gamma^\mu \Gamma Q_v | \bar{B}(p) \rangle. \quad (4.23)$$

Hier werden die Definitionen der Zwei- bzw. Dreiteilchenverteilungsamplituden 3.54, 3.60, eingesetzt und auf der linken Seite die Ableitung gebildet. Zu beachten ist dabei, daß die Ableitung nach x^μ vor dem Übergang zum Lichtkegel $x^2 \rightarrow 0$ durchgeführt werden muß, d.h. daß in

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tilde{\phi}_\pm(t, x^2) = v_\mu \frac{d\tilde{\phi}_\pm(t, x^2)}{dt} + 2x_\mu \frac{d\tilde{\phi}_\pm(t, x^2)}{dx^2} \quad (4.24)$$

der zweite Term nicht vergessen werden darf. Auf diese Weise werden durch Vergleich der Anzahl der Dirac-Matrizen, unter Ausnutzung von $(1+\not{x})\not{x} = 2t(1+\not{x}) - (1+\not{x})\not{x}$ zwei Differentialgleichungen erhalten

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{\phi}_-(t, x^2)}{\partial t} + \frac{1}{t} \left(\tilde{\phi}_-(t, x^2) - \tilde{\phi}_+(t, x^2) \right) + \frac{x^2}{t} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}_-(t, x^2)}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{\phi}_+(t, x^2)}{\partial x^2} \right) \\ &= - \int_0^1 du u \left(\frac{x^2}{t} \tilde{Y}_A(t, u, x^2) - 2t \left(\tilde{\Psi}_A(t, u, x^2) - \tilde{\Psi}_V(t, u, x^2) \right) \right), \\ & 2 \frac{\partial \tilde{\phi}_+(t, x^2)}{\partial x^2} - \frac{1}{2t} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}_-(t, x^2)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{\phi}_+(t, x^2)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2t^2} \left(\tilde{\phi}_-(t, x^2) - \tilde{\phi}_+(t, x^2) \right) \\ &= \int_0^1 du u \left(\tilde{\Psi}_A(t, u, x^2) + 2\tilde{\Psi}_V(t, u, x^2) + \tilde{X}_A(t, u, x^2) \right), \end{aligned} \quad (4.25)$$

die mit $x^2 = 0$ das erste Zwischenergebnis bilden:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{\phi}_-(t)}{\partial t} + \frac{1}{t} \left(\tilde{\phi}_-(t) - \tilde{\phi}_+(t) \right) = 2t \int_0^1 du u \left(\tilde{\Psi}_A(t, u) - \tilde{\Psi}_V(t, u) \right), \\ & 2 \frac{\partial \tilde{\phi}_+(t, x^2)}{\partial x^2} \Big|_{x^2=0} - \frac{1}{2t} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}_-(t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{\phi}_+(t)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2t^2} \left(\tilde{\phi}_-(t) - \tilde{\phi}_+(t) \right) \\ &= \int_0^1 du u \left(\tilde{\Psi}_A(t, u) + 2\tilde{\Psi}_V(t, u) + \tilde{X}_A(t, u) \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Bei der zweiten Identität in 4.22 bedarf es der Kontraktion mit v^μ , um die Bewegungsgleichung des schweren Quarks $v \cdot D Q_v(x) = 0$ auszunutzen. Desweiteren wird zusätzlich folgender Zusammenhang

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \langle 0 | \bar{q}(x+y) \Gamma Q_v(y) | \bar{B}(p) \rangle \Big|_{y=0} &= \frac{\partial}{\partial y^\mu} \langle 0 | e^{i\hat{p}y} \bar{q}(x) \Gamma Q_v e^{-i(\hat{p}-m_b v)y} | \bar{B}(p) \rangle \Big|_{y=0} \\ &= -i v_\mu \bar{\Lambda} \langle 0 | \bar{q}(x) \Gamma Q_v | \bar{B}(p) \rangle \end{aligned} \quad (4.27)$$

mit $\bar{\Lambda} = m_B - m_b$ benötigt, ehe auf dieselbe Weise wie oben zwei weitere Differentialgleichungen hergeleitet werden können:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial \tilde{\phi}_+(t)}{\partial t} + 2t \frac{\partial \tilde{\phi}_+(t, x^2)}{\partial x^2} \right|_{x^2=0} + \frac{1}{2t} \left(\tilde{\phi}_-(t) - \tilde{\phi}_+(t) \right) + i\bar{\Lambda} \tilde{\phi}_+(t) \\ &= -t \int_0^1 du (1-u) \left(\tilde{\Psi}_A(t, u) + \tilde{X}_A(t, u) \right), \quad (4.28) \\ & \left. \frac{\partial \tilde{\phi}_-(t, x^2)}{\partial x^2} \right|_{x^2=0} - \left. \frac{\partial \tilde{\phi}_+(t, x^2)}{\partial x^2} \right|_{x^2=0} + \frac{i\bar{\Lambda}}{2t} \left(\tilde{\phi}_-(t) - \tilde{\phi}_+(t) \right) \\ &+ \frac{1}{2t} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}_-(t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{\phi}_+(t)}{\partial t} - \frac{1}{t} \left(\tilde{\phi}_-(t) - \tilde{\phi}_+(t) \right) \right) \\ &= \int_0^1 du (1-u) \left(\tilde{\Psi}_A(t, u) + \tilde{Y}_A(t, u) \right). \quad (4.29) \end{aligned}$$

In diesen tauchen keine Terme $\sim x^2$ auf, daher wurde direkt zum Lichtkegelgrenzwert übergegangen.

Hier bestehen nun mehrere Möglichkeiten weiter vorzugehen. Die erste und offensichtlichste, die auch hier verfolgt werden soll, und erstmals in [43] durchgeführt wurde, besteht darin, die vier Differentialgleichungen nach $\frac{\partial \tilde{\phi}_\pm(t)}{\partial t}$ aufzulösen und zur Impulsdarstellung überzugehen. Es entsteht ein vollständiges System, welches mit entsprechenden Modellen für die Dreiteilchenbeiträge die Form von $\phi_\pm(\omega)$ vollständig bestimmt. Eine zweite Möglichkeit, die Bestimmung der nächstführenden Verteilungsamplituden $\left. \frac{\partial \tilde{\phi}_\pm(t, x^2)}{\partial x^2} \right|_{x^2=0}$ zur Parametrisierung von Abweichungen vom Lichtkegel, wurde im Verlauf dieser Arbeit kurz verfolgt, beim Auftreten nicht unerheblicher Probleme jedoch vorläufig ad acta gelegt. Schlußendlich wurden in [192] die Differentialgleichungen unter Vernachlässigung der Dreiteilchenbeiträge, jedoch Beibehaltung der Terme $\sim x^2$ für $\frac{\partial \tilde{\phi}_\pm(t, x^2)}{\partial x^2}$ gelöst, um die funktionale Abhängigkeit der Zweiteilchenverteilungsamplituden von der transversalen Separierung, bzw. vom transversalen Impuls zu bestimmen. Gerade diese Abtrennung der Dreiteilchenbeiträge ist jedoch einer der Hauptkritikpunkte in [191]. Daher wird hier, auch wenn diese Ergebnisse in [48, 193] gestützt und erweitert wurden, noch weitere Prüfung nötig sein.

Eine Gleichung für $\phi_\pm(\omega)$ läßt sich direkt durch Übergang zur Impulsdarstellung aus der ersten Relation von 4.26 erhalten. Für eine Weitere muß aus der zweiten Relation in 4.26 und der Ersten in 4.29 $\left. \frac{\partial \tilde{\phi}_\pm(t, x^2)}{\partial x^2} \right|_{x^2=0}$ eliminiert werden, ehe dort ebenfalls zur

Impulsdarstellung gewechselt werden kann. Dieser Wechsel wird vollzogen, indem die Definition der Verteilungssamplituden

$$\tilde{\phi}_{\pm}(t) = \int_0^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \phi_{\pm}(\omega) \quad \tilde{F}(t, u) = \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} d\xi e^{-i(\omega+u\xi)t} F(\omega, \xi),$$

sowie die Ersetzung $t \rightarrow i \frac{d}{d\omega}$ bzw. $u \rightarrow \frac{1}{t} \frac{d}{d\xi}$ benutzt werden und soll im Folgenden am ersten Fall kurz demonstriert werden.

$$\int_0^{\infty} d\omega \left[\omega \phi_{-}(\omega) \frac{d}{d\omega} + \phi_{-}(\omega) - \phi_{+}(\omega) \right] e^{-i\omega t} = 2i \int_0^{\infty} d\omega d\xi \int_0^1 du t \left(\frac{d}{d\xi} e^{-i(\omega+u\xi)t} \right) (\Psi_A(\omega, \xi) - \Psi_V(\omega, \xi)) \quad (4.30)$$

Mit einer partiellen Integration linkerhand und nach ausführen der u -Integration, durch die sich t rechterhand rauskürzt, ergibt sich folgendes Bild:

$$\int_0^{\infty} d\omega \left[-\omega \frac{d\phi_{-}(\omega)}{d\omega} - \phi_{+}(\omega) \right] e^{-i\omega t} = -2 \int_0^{\infty} d\omega d\xi e^{-i\omega t} \left(\frac{d}{d\xi} \frac{1}{\xi} (e^{-i\xi t} - 1) \right) (\Psi_A(\omega, \xi) - \Psi_V(\omega, \xi)) \quad (4.31)$$

Zu den partiellen Integrationen ist zu sagen, daß davon ausgegangen wird, daß die Verteilungssamplituden generell im unendlichen verschwinden und daß speziell die Dreiteilchenverteilungssamplituden für verschwindenden Gluonimpuls, eben weil dieser Zustand von den Zweiteilchenverteilungssamplituden beschrieben wird, ebenfalls verschwinden. Anderenfalls träten in der Rechnung zusätzliche Oberflächenterme auf, die im Weiteren nicht berücksichtigt werden. In 4.31 wird auf der rechten Seite eine partielle Integration in ξ durchgeführt und auf beiden Seiten mit $e^{i\rho t}$ multipliziert sowie über t integriert. Die entstehenden Delta-Distributionen ermöglichen es die ω -Integration auszuführen, was nach einer Umbenennung $\rho \rightarrow \omega$ das Ergebnis

$$\omega \frac{d\phi_{-}(\omega)}{d\omega} + \phi_{+}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\xi} \left[\frac{d}{d\xi} (\Psi_A(\omega, \xi) - \Psi_V(\omega, \xi)) - \Theta(\omega - \xi) \frac{d}{d\xi} (\Psi_A(\omega, \xi) - \Psi_V(\omega, \xi)) \right] \quad (4.32)$$

liefert. Dies entspricht dem in [43] angegebenen Ergebnis, wobei dort die rechte Seite kompakter geschrieben wurde. Die zweite Gleichung ergibt sich auf ähnliche Weise, daher wird hier auf die Herleitung verzichtet und es werden die beiden resultierenden Relationen in der Schreibweise von [43] angegeben:

$$\omega \frac{d\phi_{-}(\omega)}{d\omega} + \phi_{+}(\omega) = I(\omega), \quad (4.33)$$

$$(\omega - 2\bar{\Lambda}) \phi_{+}(\omega) + \omega \phi_{-}(\omega) = J(\omega). \quad (4.34)$$

$I(\omega)$ und $J(\omega)$ sind die Dreiteilchenbeiträge und werden dort, wie bereits in 3.63 zitiert, in der folgenden kompakten Form angegeben:

$$I(\omega) = 2 \frac{d}{d\omega} \int_0^\omega d\rho \int_{\omega-\rho}^\infty \frac{d\xi}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} [\Psi_A(\rho, \xi) - \Psi_V(\rho, \xi)], \quad (4.35)$$

$$J(\omega) = -2 \frac{d}{d\omega} \int_0^\omega d\rho \int_{\omega-\rho}^\infty \frac{d\xi}{\xi} [\Psi_A(\rho, \xi) + X_A(\rho, \xi)] - 4 \int_0^\omega d\rho \int_{\omega-\rho}^\infty \frac{d\xi}{\xi} \frac{\partial \Psi_V(\rho, \xi)}{\partial \xi}. \quad (4.36)$$

Im nächsten Abschnitt werden 4.34 unter Verwendung von Modellen, die auf dem berechneten asymptotischen Verhalten der Dreiteilchenverteilungsamplituden basieren, gelöst, daraus resultierende Konsequenzen diskutiert und einige strittige Punkte angesprochen.

4.2.2 Lösung der DGLs mit neuen Modellen

Die Gleichungen 4.34 können in Anlehnung an [43] gelöst werden, indem die Verteilungsamplituden ϕ_\pm aufgeteilt werden in den sogenannten Wandzura-Wilczek-Anteil, der die Gleichungen unter Vernachlässigung der Dreiteilchenbeiträge $I(\omega)$, $J(\omega)$ löst sowie in einen Anteil, der diese Beiträge berücksichtigt:

$$\phi_\pm(\omega) = \phi_\pm^{(WW)}(\omega) + \phi_\pm^{(g)}(\omega). \quad (4.37)$$

In bereits erwähnten Vortrag [191] wird dieser Punkt aufgegriffen und die Frage aufgeworfen, inwieweit die Abspaltung legitim sei. Dazu wird angeführt, daß in [43] nichtlokale Operatoren als generierende Funktionen von renormierten lokalen Operatoren

$$\bar{q}(tn) \Gamma Q_v(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} \left[\bar{q}(0) (\overleftarrow{D} \cdot n)^n \Gamma Q_v(0) \right] \quad (4.38)$$

angenommen werden und somit eine Äquivalenz zwischen Momenten der Verteilungsamplituden und Matrixelementen von lokalen Operatoren besteht:

$$f \int_0^\infty d\omega \omega^n \phi_\pm(\omega) = \langle 0 | \bar{q} (-i \overleftarrow{D} \cdot n)^n \gamma_5 \not{n}_\pm Q_v | B \rangle.$$

Unter diesem Gesichtspunkt ist nicht klar welche Bedeutung $\phi_\pm^{(WW)}$ haben sollte. Andererseits wird darauf hingewiesen, daß, wenn die nicht-triviale Renormierung von ϕ_+ berücksichtigt würde [164, 166, 167], daß dann die Herleitung der zweiten Relation von 4.34 noch einmal überprüft werden müsse. In [161] wurden die Ergebnisse aus [43] über gruppentheoretische Zerlegung der Verteilungsamplituden nach konformen Twist noch einmal bestätigt. Ein weiterhin interessantes Feld, welches jedoch jenseits des Fokus dieser Arbeit liegt. Hier wird eine sehr pragmatische Sicht auf 4.37 eingenommen. Diese wird schlicht als legitimer Ansatz zur Lösung der Gleichungen 4.34 gesehen, mit dessen Hilfe schlußendlich die vollständigen Verteilungsamplituden ϕ_\pm erhalten werden. So gesehen bilden die Wandzura-Wilczek

Verteilungssamplituden

$$\begin{aligned}\phi_+^{(WW)}(\omega) &= \frac{\omega}{2\bar{\Lambda}^2} \Theta(2\bar{\Lambda} - \omega), \\ \phi_-^{(WW)}(\omega) &= \frac{2\bar{\Lambda} - \omega}{2\bar{\Lambda}^2} \Theta(2\bar{\Lambda} - \omega),\end{aligned}$$

die Lösung der homogenen Gleichungen mit der physikalischen Randbedingung, daß in führender Ordnung das leichte Quark im B-Meson nur einen Lichtkegelimpuls bis $2\bar{\Lambda}$ einnehmen. Die Lösungen der inhomogenen Gleichungen

$$\begin{aligned}\phi_+^{(g)}(\omega) &= \frac{\omega}{2\bar{\Lambda}} \Phi(\omega), \\ \phi_-^{(g)}(\omega) &= \frac{2\bar{\Lambda} - \omega}{2\bar{\Lambda}} \Phi(\omega) + \frac{J(\omega)}{\omega}\end{aligned}\quad (4.39)$$

mit den längliche Ausdrücken

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= \Theta(2\bar{\Lambda} - \omega) \left\{ \int_0^\omega d\rho \frac{K(\rho)}{2\bar{\Lambda} - \rho} - \frac{J(0)}{2\bar{\Lambda}} \right\} \\ &\quad - \Theta(\omega - 2\bar{\Lambda}) \int_\omega^\infty d\rho \frac{K(\rho)}{2\bar{\Lambda} - \rho} - \int_\omega^\infty d\rho \left(\frac{K(\rho)}{\rho} + \frac{J(\rho)}{\rho^2} \right)\end{aligned}\quad (4.40)$$

und

$$K(\rho) = I(\rho) + \left(\frac{1}{2\bar{\Lambda}} - \frac{d}{d\rho} \right) J(\rho)\quad (4.41)$$

geben dann die Möglichkeit unter Kenntnis der Dreiteilchenbeiträge die vollständigen Zweiteilchenverteilungssamplituden zu erhalten. In Kapitel 4.1 wurde der asymptotische Anteil der Dreiteilchenverteilungssamplituden berechnet. Um jedoch 4.39 zu erhalten, bedarf es der gesamten Verteilungssamplituden. Daher werden auf der Basis des asymptotischen Anteils zwei verschiedene Modelltypen aufgestellt. Zum Einen wird der sogenannte lokale Dualitätsgrenzwert $M \rightarrow \infty$ der Summenregeln 4.19 ausgewertet und die so erhaltene funktionale Form mit der richtigen Normierung 3.64 ausgestattet:

$$\begin{aligned}\Psi_A^{LD}(\omega, \xi) &= \Psi_V^{LD}(\omega, \xi) = \left(\frac{35\lambda_E^2}{4\tilde{s}_0^4} \right) \xi^2 \left(1 - \frac{\omega + \xi}{2\tilde{s}_0} \right)^3 \Theta(2\tilde{s}_0 - \omega, -\xi), \\ X_A^{LD}(\omega, \xi) &= \left(\frac{35\lambda_E^2}{4\tilde{s}_0^4} \right) \xi(2\omega - \xi) \left(1 - \frac{\omega + \xi}{2\tilde{s}_0} \right)^3 \Theta(2\tilde{s}_0 - \omega - \xi), \\ Y_A^{LD}(\omega, \xi) &= - \left(\frac{35\lambda_E^2}{16\tilde{s}_0^4} \right) \xi \left(1 - \frac{\omega + \xi}{2\tilde{s}_0} \right)^3 (2\tilde{s}_0 - 13\omega + 3\xi) \Theta(2\tilde{s}_0 - \omega - \xi).\end{aligned}\quad (4.42)$$

Zum Zweiten wird, anstatt größere Impulse des Quarks und Gluons respektive mittels einer Theta-Distribution abzuschneiden, ein exponentieller Abfall angenommen:

$$\begin{aligned}\Psi_A(\omega, \xi) &= \Psi_V(\omega, \xi) = \frac{\lambda_E^2}{6\omega_0^4} \xi^2 e^{-(\omega+\xi)/\omega_0}, \\ X_A(\omega, \xi) &= \frac{\lambda_E^2}{6\omega_0^4} \xi(2\omega - \xi) e^{-(\omega+\xi)/\omega_0}, \\ Y_A(\omega, \xi) &= - \frac{\lambda_E^2}{24\omega_0^4} \xi(7\omega_0 - 13\omega + 3\xi) e^{-(\omega+\xi)/\omega_0}.\end{aligned}\quad (4.43)$$

Ehe die Lösungen der Gleichungen 4.34 besprochen werden, sei noch auf einige mehr oder weniger offenkundige Punkte hingewiesen: Beide Modelle führen offensichtlich zu $I(\omega) = 0$, so daß die Relationen

$$\phi_-(\omega) = \int_{\omega}^{\infty} d\rho \frac{\phi_+(\rho)}{\rho}, \quad \lambda_B^{-1} = \phi_-(0) = \int_0^{\infty} d\rho \frac{\phi_+(\rho)}{\rho}$$

keine Korrekturen erhalten. Desweiteren ergeben sich für $J(\omega)$ Ausdrücke

$$\begin{aligned} J^{(esp)}(\omega) &= -\frac{2\lambda_E^2}{3\omega_0^4} \omega (2\omega_0 - \omega) e^{-\frac{\omega}{\omega_0}}, \\ J^{(LD)}(\omega) &= -\frac{35\lambda_E^2}{32\tilde{s}_0^7} \omega (2\tilde{s}_0 - \omega)^3 \{(2\tilde{s}_0 - 5\omega)\Theta(2\tilde{s}_0 - \omega) + 2\tilde{s}_0 - \omega\}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

aus denen ersichtlich wird, daß $J(\omega = 0) = 0$ und somit das Verhalten von $\phi_+(\omega)$ für $\omega \rightarrow 0$ unverändert bleibt.

Für die vollständigen Zweiteilchenamplituden liefern die Modelle dennoch wenig erhellende, recht komplizierte Ausdrücke in Abhängigkeit von ω_0 bzw. \tilde{s}_0 sowie $\bar{\Lambda}$ und λ_E , deren erste inverse Momente $\lambda_B^{(exp)}$, $\lambda_B^{(ld)}$ durch folgende Zusammenhänge gegeben werden:

$$\lambda_B^{(exp)} = \frac{1}{\bar{\Lambda}} \left(1 + \frac{\lambda_E^2}{3\omega_0^2} \right) \quad (4.45)$$

$$\lambda_B^{(LD)} = \frac{1}{\bar{\Lambda}} \left(1 + \frac{7\lambda_E^2}{2\tilde{s}_0^2} \right). \quad (4.46)$$

Trotz der sehr unübersichtlichen Form lassen sich einige Auffälligkeiten finden: Für beide Modelle ergibt sich, bei gleichgewähltem ersten inversen sowie erstem und zweitem Moment 3.67, eine sehr ähnliche Form bei niedrigen Impuls ω , siehe Abbildung 4.3. Dies ist interessant für die Numerik in Kapitel 5.1, wo die Verteilungsamplituden nur bis zu einem Impuls $\frac{s_0}{m_B}$ benötigt werden, bis zu welchem praktisch kein Unterschied zwischen den Modellen besteht. Weiter fällt auf, daß Lösungen ohne Divergenzen für das exponentielle Modell nur unter der Voraussetzung $\omega_0 = \frac{2}{3}\bar{\Lambda}$ möglich sind, während für das Modell aus dem lokalen Dualitätsgrenzwert stets eine logarithmische Divergenz vorhanden ist. Wird noch nach einer stetigen Lösung gesucht, so ergibt sich als einzige Möglichkeit $\lambda_E^2 = \frac{2}{3}\bar{\Lambda}^2$, $\lambda_B = \omega_0 = \frac{2}{3}\bar{\Lambda}$. Da es sich bei den Verteilungsamplituden um Distributionen handelt, die stets mit Streuamplituden gefaltet werden, stellen Unstetigkeiten kein Problem dar, doch ist bemerkenswert, daß genau die Voraussetzungen

$$\omega_0 = \lambda_B = \frac{2}{3}\bar{\Lambda} \quad \lambda_E^2 = \lambda_H^2 = \frac{2}{3}\bar{\Lambda}^2$$

von Grozin/Neubert [64] für ihr einfaches Modell

$$\phi_+(\omega) = \frac{\omega}{\omega_0^2} e^{-\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \phi_-(\omega) = \frac{1}{\omega_0} e^{-\frac{\omega}{\omega_0}}$$

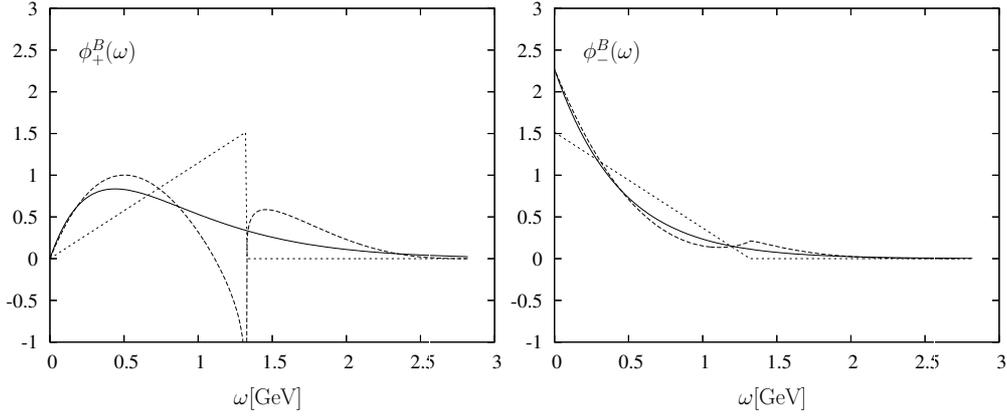


Abbildung 4.3: *B*-Meson Zweiteilchenverteilungssamplituden $\phi_+^B(\omega)$ (links) und $\phi_-^B(\omega)$ (rechts). Das Modell mit exponentiellem Abfall ist als durchgezogene, das aus dem lokalen Dualitätsgrenzwert als gestrichelte Linie dargestellt. Zum Vergleich ist der jeweilige Wandzura-Wilczek-Anteil als gepunktete Linie eingezeichnet. Für beide Modelle gilt: $\lambda_B = \frac{2}{3}\bar{\Lambda}$ und $\lambda_E^2 = \lambda_H^2 = \frac{2}{3}\bar{\Lambda}^2$.

benötigt wurden und diese nun nicht nur die einzige stetige Lösung liefern, sondern unter diesen Voraussetzungen auch dieses Modell reproduzieren.

Zum Abschluß dieses Abschnitts sei der Vollständigkeit halber noch angemerkt, daß in [193] darauf hingewiesen wird, daß 4.40 nur eine spezielle Möglichkeit einer allgemeinen Lösung mit zwei Integrationskonstanten sei. Es zeigt sich jedoch, daß dies für die hier vorgenommene Analyse und die gezogenen Schlüsse keine weitere Rolle spielt.

4.3 Chromoelektrisches und -magnetisches Moment

In diesem Abschnitt werden noch einmal einige Worte zu der Näherung $\lambda_E^2 = \lambda_H^2$ verloren. Dazu werden zunächst die in [64] hergeleiteten Summenregeln aus einer nichtdiagonalen Korrelationsfunktion unter einbeziehung von Quark- $\langle \bar{q}q \rangle$, Gluon- $\langle G_a^{\mu\nu} G_a^{\mu\nu} \rangle = \langle G^2 \rangle$ und Quark-Gluon-Kondensat $\langle \bar{q}\sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} q \rangle = m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle$ vorgestellt, siehe Abbildung 4.4 (d)-(g), um diese dann mit zwei simplen diagonalen Summenregeln zu vergleichen. Die numerische Auswertung der in [64] erlangten Ergebnisse

$$\begin{aligned}
 f^2 \lambda_E^2 e^{-\frac{\bar{\Lambda}}{M}} &= -N_c C_F \frac{\alpha_s}{\pi^3} M^5 \delta_4 \left(\frac{\tilde{s}_0}{M} \right) - \frac{m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle}{16}, \\
 f^2 \lambda_H^2 e^{-\frac{\bar{\Lambda}}{M}} &= -N_c C_F \frac{\alpha_s}{2\pi^3} M^5 \delta_4 \left(\frac{\tilde{s}_0}{M} \right) - C_F \frac{3\alpha_s}{4\pi} M^2 \langle \bar{q}q \rangle \delta_1 \left(\frac{\tilde{s}_0}{M} \right) \\
 &\quad + \frac{\alpha_s \langle G^2 \rangle}{16\pi} M \delta_0 \left(\frac{\tilde{s}_0}{M} \right) - \frac{m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle}{16}, \tag{4.47}
 \end{aligned}$$

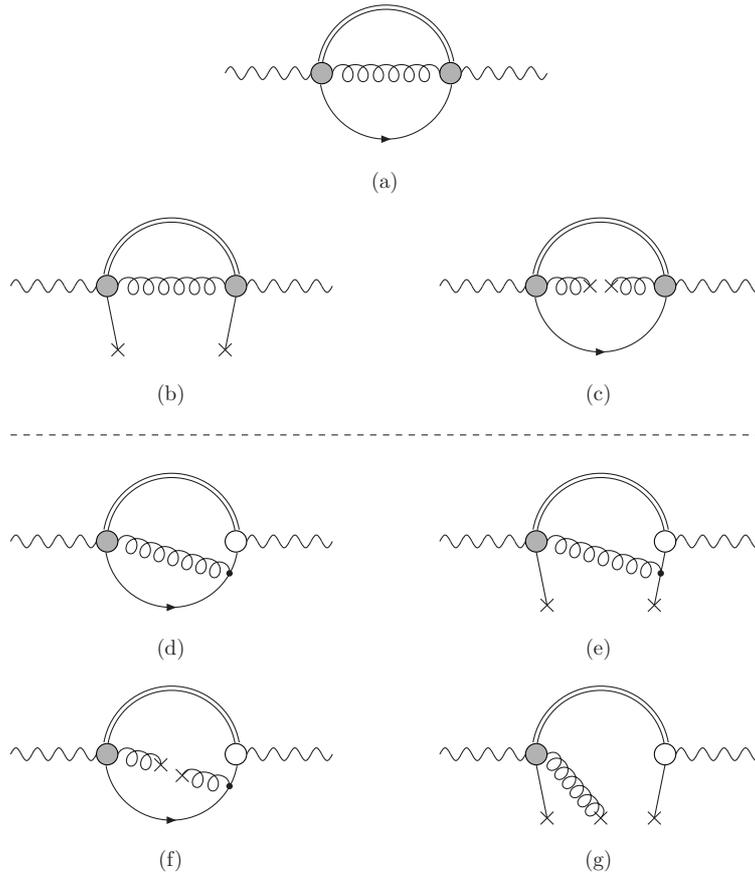


Abbildung 4.4: Vergleich der Diagramme, die hier bzw. in [64] berechnet werden. (a)-(c) werden in dieser Arbeit betrachtet, (d)-(g) in [64]

mit

$$\delta_n(x) = \Theta(x) \left(1 - e^{-x} \sum_{m=0}^n \frac{x^m}{m!} \right) \quad (4.48)$$

lieferte die bis heute zitierten Werte

$$\lambda_E^2 = (0.11 \pm 0.06) \text{ GeV}^2, \quad \lambda_H^2 = (0.18 \pm 0.07) \text{ GeV}^2. \quad (4.49)$$

Dafür wurden die Summenregeln 4.47 durch die Summenregel für die Zerfallskonstante [194, 195]

$$f^2 e^{-\frac{\Lambda}{M}} = \frac{N_c}{2\pi^2} M^3 \delta_2 \left(\frac{\tilde{s}_0}{M} \right) - \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{4} \left(1 - \frac{m_0^2}{16 M^2} \right) \quad (4.50)$$

geteilt und folgende Eingabeparameter verwendet:

$$\langle \bar{q}q \rangle = -(0.23 \text{ GeV})^3, \quad \alpha_s \langle G^2 \rangle = 0.04 \text{ GeV}^4, \quad m_0^2 = 0.8 \text{ GeV}^2, \quad \alpha_s = 0.4. \quad (4.51)$$

Für die Stabilität der Summenregel werden die Intervalle $\tilde{s}_0 = 1.00 \pm 0.15 \text{ GeV}$ und $M = 0.3 - 0.5 \text{ GeV}$ als optimal angegeben. Numerisch ist damit die Näherung $\lambda_E^2 = \lambda_H^2$ durchaus begründet. In 4.19 wurde jedoch gezeigt, daß λ_E^2 und λ_H^2 in erster

Näherung sogar identische Summenregeln erfüllen sollten. Um diesen Punkt weiter zu beleuchten, werden die entsprechenden diagonalen Summenregeln mit Einbeziehung von Quark- und Gluon-Kondensat hergeleitet, siehe Abbildung 4.4 (a)-(c). Ausgangspunkt dieser Herleitung ist die 4.1 äquivalente lokale Korrelationsfunktion:

$$\Pi_\lambda^{(\Gamma)}(\rho) = i \int d^4x e^{-i\rho(v \cdot x)} \langle 0 | T \{ \bar{q}(0) \Gamma G_{\lambda\sigma}(0) n^\sigma Q_v(0), h_v^*(x) G_{\alpha\beta}(x) \sigma^{\alpha\beta} \gamma_5 q(x) \} | 0 \rangle. \quad (4.52)$$

Die Rechnung folgt bereits bekannten Bahnen. Einzig die lokalen Entwicklungen der Kondensate

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{q}^i(x) q^j | 0 \rangle &\approx \langle 0 | \bar{q}^i q^j | 0 \rangle = \frac{1}{12} \delta^{ij} \langle \bar{q}q \rangle, \\ \langle 0 | G_{\alpha\beta}^a(x) G_{\mu\nu}^b | 0 \rangle &\approx \langle 0 | G_{\alpha\beta}^a G_{\mu\nu}^b | 0 \rangle = \frac{1}{96} \delta^{ab} (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) \langle G^2 \rangle \end{aligned} \quad (4.53)$$

und 4.3 werden benötigt, um folgende kompakte Ausdrücke zu erhalten:

$$\begin{aligned} (\lambda_E^2 + \lambda_H^2) \lambda_H^2 f^2 e^{-\frac{\tilde{\Lambda}}{M}} &= \frac{\alpha_s}{\pi} \left[\frac{192}{2\pi^2} M^7 \delta_6 \left(\frac{\tilde{s}_0}{M} \right) - 4 M^4 \langle \bar{q}q \rangle \delta_3 \left(\frac{\tilde{s}_0}{M} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} M^3 \langle G^2 \rangle \delta_2 \left(\frac{\tilde{s}_0}{M} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} (\lambda_E^2 + \lambda_H^2) \lambda_E^2 f^2 e^{-\frac{\tilde{\Lambda}}{M}} &= \frac{\alpha_s}{\pi} \left[\frac{192}{2\pi^2} M^7 \delta_6 \left(\frac{\tilde{s}_0}{M} \right) + 4 M^4 \langle \bar{q}q \rangle \delta_3 \left(\frac{\tilde{s}_0}{M} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} M^3 \langle G^2 \rangle \delta_2 \left(\frac{\tilde{s}_0}{M} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.55)$$

Es ist noch einmal deutlich zu sehen, daß der führende perturbative Term in beiden Formeln exakt identisch ist, während sich die Kondensatbeitrage in ihren Vorzeichen unterscheiden. Eine numerische Auswertung ergibt hier einige Probleme. Wie in [64] wird eine starke Abhängigkeit der Summenregeln vom Borel- und Dualitätsparameter beobachtet. Im Gegensatz zu dort erscheint jedoch eine Divison durch 4.50 nicht sinnvoll, da sich kein gemeinsames Stabilitätsfenster finden läßt. Dies ist unter anderem darauf zurückzuführen, daß in 4.55 in oben angegebenen Intervall $\tilde{s}_0 = 1.00 \pm 0.15 \text{ GeV}$, $M = 0.3 - 0.5 \text{ GeV}$ der Beitrag des Gluonkondensates dominiert und demnach die zweite Summenregel negative Werte annimmt. Erst für $\tilde{s}_0 \gtrsim 2.0 \text{ GeV}$ liefert der perturbative Term den größten Anteil. Mit zunehmenden \tilde{s}_0 , bzw. M verlieren die Kondensate weiter an Bedeutung doch ergibt sich für die einzelnen Summenregeln kein eindeutiger Bereich, an dem eine numerische Auswertung sinnvoll erschiene. Das Verhältnis der Summenregeln weist erwartungsgemäß eine recht hohe Stabilität über weite Teile des Parameterraumes auf. Die resultierenden Werte für $\frac{\lambda_H^2}{\lambda_E^2}$ variieren grob zwischen 1.0 und 1.5. Wie in vielen Punkten dieses Kapitels bedarf es hier weiterer Analysen, die eventuell die Schwächen dieser Summenregeln beheben. In dem Zusammenhang wäre es insbesondere Interessant, inwieweit sich, durch miteinbeziehen der Quark- und Gluonkondensate auch in den Summenregeln 4.19, das Verhalten der Dreiteilchen- und über die Bewegungsgleichungen der Zweiteilchenverteilungsamplituden verändert.

Kapitel 5

Summenregeln für $B \rightarrow P, V$ -Formfaktoren

Nachdem in den vorhergehenden Kapiteln die physikalischen Methoden, Probleme und Grundlagen erläutert bzw. geschaffen wurden, werden in diesem Kapitel, dem Kern dieser Arbeit, zwei Rechnungen vorgestellt, die beide auf den Lichtkegelsummenregeln basieren. Grob gesagt, besteht der Unterschied zwischen den beiden Methoden im Vertauschen der Rollen des leichten und des schweren Mesons. Im klassischen Ansatz, wie in Kapitel drei vorgestellt, wird eine Korrelationsfunktion mit einem leichten Meson on-shell und einem durch einen entsprechenden Quarkstrom interpolierten schweren Meson betrachtet. Bei den B-Meson-Summenregeln, wie sie im Weiteren genannt werden sollen, wird das leichte Meson durch einen Quarkstrom interpoliert und das B-Meson befindet sich auf seiner Massenschale. Der Zweitere Ansatz wurde dabei erstmals im Laufe dieser Dissertation und der zuvor geschriebenen Diplomarbeit vorgeschlagen und entwickelt [168]. Unabhängig davon auch [67]. Die Rechnung im klassischen Ansatz stellt hingegen die aktualisierte Fassung einer bereits von Patricia Ball und Roman Zwicky [123, 45] durchgeführten Rechnung und damit den neuesten Stand der Lichtkegelsummenregeln mit Verteilungsamplituden leichter Mesonen dar.

So sind auch die Ergebnisse stark unterschiedlicher Natur. Während die Summenregeln mit B-Meson-Verteilungsamplituden ihre Feuerprobe bestanden haben und nun der Weiterentwicklung bedürfen, befinden sich die klassischen Summenregeln in einem Stadium der Präzision, in dem weitere Verbesserungen mit stets wachsendem Aufwand verbunden sind. Demnach ist es nicht verwunderlich, daß die Ergebnisse der B-Meson-Summenregeln noch mit erheblich höheren Unsicherheiten behaftet sind, als die des klassischen Ansatzes.

5.1 Lichtkegelsummenregeln mit Verteilungsamplituden des B -Mesons

Zwei nicht unerheblich Vorteile besitzen die B-Meson-Summenregeln gegenüber dem klassischen Ansatz: Zum Ersten lassen sich alle Formfaktoren, die hier berechnet

werden, durch einfaches ändern der Dirac-Struktur und des Flavor-Inhaltes der Ströme in 5.1 erhalten. Es werden keine verschiedenen Verteilungsamplituden für die verschiedenen Endzustände benötigt, was den Rechenaufwand erheblich reduziert. Zum Zweiten können, da der Schnitt im selben Kanal erfolgt, Borel- und Schwellen-Parameter aus den Zweipunktsummenregeln für die jeweilige Zerfallskonstante übernommen werden, was den Rückgriff auf jahrelange Erfahrung erlaubt. Die Berechnung der B-Meson-Summenregeln unterscheidet sich nicht sehr vom klassischen Ansatz und folgt dem in Kapitel drei vorgestellten allgemeinem Schema, siehe Diagramm 3.10, so daß auf eine detaillierte Betrachtung der bereits dargelegten theoretischen Grundlagen verzichtet werden kann. Ausführlicher werden die Lichtkegeldominanz der betrachteten Korrelationsfunktion, die Herleitung der Dispersionsintegrale auf Seiten der OPE sowie der Grenzwert, daß die b-Quark Masse gegen unendlich geht und damit verbundene Eigenschaften, behandelt. Die hier vorgestellte Rechnung stellt weitestgehend eine detailliertere Darstellung, der bereits in [42] veröffentlichten Rechnung, dar, so daß in einigen Punkten auf diese verwiesen wird.

5.1.1 Korrelationsfunktion

Zur Berechnung der $B \rightarrow P, V$ -Formfaktoren wird eine Korrelationsfunktion von einem elektroschwachen Übergangstrom $\bar{q}_1 \Gamma_b b$ und einem interpolierenden Strom für das leichte Meson $\bar{q}_2 \Gamma_a q_1$ betrachtet.

$$F_{ab}^{(B)}(p, q) = i \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle 0 | T \{ \bar{q}_2(x) \Gamma_a q_1(x), \bar{q}_1(0) \Gamma_b b(0) \} | \bar{B}(P_B) \rangle, \quad (5.1)$$

Die Quarksorte q_1, q_2 wird dabei durch die Valenzquarks des leichten Mesons, die Gammamatrizen Γ_a, Γ_b respektive durch die Art des Mesons, Pseudoskalar oder Vektor, und die Art des Übergangs, Vektor, Axialvektor oder Tensor, bestimmt. Die äusseren Impulse werden mit p, q bezeichnet, während der Impuls des B-Mesons auf der Massenschale $P_B = p + q$ mit $P_B^2 = m_B^2$ ist. In Tabelle 5.1 werden die hier verwendeten Kombinationen von Quarksorten und Gammamatrizen mit den entsprechenden Formfaktoren aufgelistet.

5.1.2 Lichtkegeldominanz

Zum Beweis der Lichtkegeldominanz der Korrelationsfunktion 5.1 wird diese in erster Ordnung HQET dargestellt, d.h. der Impuls des B-Mesons wird in statischen- und Residuumsimpuls aufgeteilt $P_B = p + q = m_b v + k$ und das b-Quark-Feld durch ein effektives HQET-Feld ersetzt $b(x) = e^{im_b v \cdot x} Q_v(x)$. Die Masse des B-Mesons ist dann $m_B = m_b + \bar{\Lambda}$ und im gewählten Ruhesystems des B-Mesons $v = (1, 0, 0, 0)$ ist $k_0 \sim \bar{\Lambda}$. Es wird die relativistische Normierung des Zustandes beibehalten, d.h. $|B(P_B)\rangle = |B_v\rangle$ und zur Vereinfachung der weiteren Herleitung wird der Impulsübertrag q analog zum Impuls des B-Mesons aufgespalten $q = m_b v + \tilde{q}$, so daß $p + \tilde{q} = k$.

Zerfall	q_1	q_2	Γ_a	Γ_b	Formfaktoren
$\bar{B} \rightarrow \pi$	u	d, u	$\gamma_\nu \gamma_5$	γ_μ $\sigma_{\mu\rho}$	$f_{B\pi}^+, f_{B\pi}^-$ $f_{B\pi}^T$
$\bar{B} \rightarrow K$	s	d, u	$\gamma_\nu \gamma_5$	γ_μ $\sigma_{\mu\rho}$	f_{BK}^+, f_{BK}^- f_{BK}^T
$\bar{B} \rightarrow \rho$	u	d, u	γ_ν	γ_μ $\gamma_\mu \gamma_5$ $\sigma_{\mu\rho}$	$V^{B\rho}$ $A_1^{B\rho}, A_2^{B\rho}$ $T_1^{B\rho}$
$\bar{B} \rightarrow K^*$	s	d, u	γ_ν	γ_μ $\gamma_\mu \gamma_5$ $\sigma_{\mu\rho}$	V^{BK^*} $A_1^{BK^*}, A_2^{BK^*}$ $T_1^{BK^*}$

Tabelle 5.1: Quarksorten und Diracmatrizen in der Korrelationsfunktion (5.1) zur Berechnung der verschiedenen Formfaktoren.

Formal ergibt sich so:

$$F_{ab}^{(B)}(p, q) = \tilde{F}_{ab}^{(B_v)}(p, \tilde{q}) + O\left(\frac{1}{m_b}\right), \quad (5.2)$$

mit der von m_b unabhängigen Korrelationsfunktion $\tilde{F}_{ab}^{(B_v)}$:

$$\tilde{F}_{ab}^{(B_v)}(p, \tilde{q}) = i \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle 0 | T \{ \bar{q}_2(x) \Gamma_a q_1(x), \bar{q}_1(0) \Gamma_b Q_v(0) \} | \bar{B}_v \rangle \quad (5.3)$$

Im Prinzip spiegelt diese die $\gamma^*(p) \gamma^*(\tilde{q}) \rightarrow \pi^0(p + \tilde{q})$ -Amplitude wieder. Zwei leichte Quarkströme, Q_v hängt nicht mehr von der Masse des b-Quarks ab, mit Virtualitäten p^2 respektive \tilde{q}^2 annihilieren einen hadronischen Zustand mit der Masse $\bar{\Lambda}$. Der Beweis der Lichtkegeldominanz folgt demnach denselben Argumenten wie z.B. in [146] und verläuft sehr ähnlich dem dort dargestellten. D.h. es werden raumartige und große Impulse angenommen:

$$p^2, \tilde{q}^2 < 0 \quad P^2, |\tilde{q}^2| \gg \Lambda_{QCD}^2, \bar{\Lambda}^2, \quad (5.4)$$

mit $P^2 = -p^2$ und einer gleichfalls großen Differenz der Virtualitäten, so daß

$$\xi = \frac{2p \cdot k}{P^2} \sim \frac{|\tilde{q}^2| - P^2}{P^2} \neq 0 \quad (5.5)$$

mindestens von der Größenordnung $O(1)$ ist.

Die Achsen lassen sich stets so legen, daß $p = (p_0, 0, 0, p_3)$ und somit lassen sich die Komponenten mit Hilfe von 5.5 in folgender Weise schreiben:

$$p_0 = \frac{P^2 \xi}{2\bar{\Lambda}} \quad p_3 = \frac{P^2 \xi}{2\bar{\Lambda}} \sqrt{1 + \frac{4\bar{\Lambda}^2}{P^2 \xi^2}} \approx \frac{P^2 \xi}{2\bar{\Lambda}} \left(1 + \frac{2\bar{\Lambda}^2}{P^2 \xi^2}\right). \quad (5.6)$$

Wie in [146] basiert der eigentliche Beweis nun auf der Feststellung, daß die Hauptbeiträge zum Integral vom Bereich verschwindender Oszillation des Integranden, d.h. verschwindendem bzw. kleinem Exponenten stammen. Dieser lautet mit 5.6:

$$p \cdot x = p_0 x_0 - p_3 x_3 \approx \frac{P^2 \xi}{2\bar{\Lambda}} (x_0 - x_3) - \frac{\bar{\Lambda}}{\xi} x_3, \quad (5.7)$$

woraus sich völlig analoge Bedingung zu den dort angegebenen ergeben:

$$\begin{aligned} x_0 - x_3 &\sim \frac{2\bar{\Lambda}}{P^2 \xi}, \\ x_3 &\sim \frac{\xi}{\bar{\Lambda}}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

und somit wiederum analog zu [146]

$$x^2 \sim \frac{4}{P^2}. \quad (5.9)$$

Für großes P^2 wird das Integral 5.3 demnach vom Bereich $x^2 \sim 0$ dominiert. Um den Gültigkeitsbereich dieser Summenregeln zu untersuchen, wird noch einmal der Impulsübertrag q betrachtet. Mit der angenommenen Konfiguration für p, \tilde{q} ergibt sich die Relation:

$$q^2 \simeq m_b^2 + 2m_b q_0 \sim m_b^2 - \frac{m_b P^2 \xi}{\bar{\Lambda}} \quad (5.10)$$

und daraus folgend die Einschränkung, ξ sollte mindestens $O(1)$ sein:

$$0 \leq q^2 < m_b^2 - \frac{m_b P^2}{\bar{\Lambda}}. \quad (5.11)$$

Es zeigt sich demnach ein ähnliches Bild wie bei den klassischen Lichtkegelsummenregeln, wo $q^2 \sim m_b^2 - m_b \chi$ mit $\chi = O(1\text{GeV})$ gilt und z.B. für den $B \rightarrow \pi$ -Formfaktor ein Bereich $0 \leq q^2 < 14 - 16\text{GeV}^2$ angenommen wird. Dieser Bereich wird hier kleiner sein, da im allgemeinen $\frac{P^2}{\bar{\Lambda}} \gg 1\text{GeV}$ sein und somit die obere Grenze für q^2 bei etwa 10 GeV liegen wird. Ein weiterer Punkt, der Erwähnung finden sollte: Die Lösung von 5.10 für $q^2 \approx 0$, d.h. $P^2 \xi \sim m_b \bar{\Lambda}$, impliziert, wenn P^2 als groß aber unabhängig von m_b angesehen wird, daß $|\tilde{q}^2| = P^2(1 + \xi) \sim m_b \xi$ ist, also \tilde{q}^2 eine weitere große Skala $m_b \bar{\Lambda}$ einführt.

5.1.3 Berechnung der Summenregeln

Die Summenregeln werden wie im klassischen Ansatz berechnet: Es wird das Ergebnis der OPE um den Lichtkegel mit der Summe über hadronische Zustände unter Benutzung der Quark-Hadron-Dualität gleichgesetzt. Eine Borel-Transformation wird auch hier verwandt, um den Einfluß höherer angeregter Zustände zu minimieren. Bevor jedoch die eigentliche Rechnung kurz dargelegt wird, werden noch einmal die in Kapitel zwei angegebenen Definitionen der benötigten Formfaktoren und Zerfallskonstanten zusammengetragen.

Die Zerfallskonstanten für pseudoskalare bzw. Vektormesonen:

$$\begin{aligned}\kappa \langle 0 | \bar{q}_2 \gamma_\nu \gamma_5 q_1 | P(p) \rangle &= i p_\nu f_P, \\ \kappa \langle 0 | \bar{q}_2 \gamma_\nu q_1 | V(p) \rangle &= \epsilon_\nu^V m_V f_V,\end{aligned}\quad (5.12)$$

die $B \rightarrow P$ -Formfaktoren:

$$\begin{aligned}\kappa \langle P(p) | \bar{q}_1 \gamma_\mu b | \bar{B}(p+q) \rangle &= 2p_\mu f_{BP}^+(q^2) + q_\mu [f_{BP}^+(q^2) + f_{BP}^-(q^2)], \\ \kappa \langle P(p) | \bar{q}_1 \sigma_{\mu\rho} q^\rho b | B(p+q) \rangle &= [q^2(2p_\mu + q_\mu) - (m_B^2 - m_P^2)q_\mu] \frac{i f_{BP}^T(q^2)}{m_B + m_P},\end{aligned}\quad (5.13)$$

die $B \rightarrow V$ -Formfaktoren des elektroschwachen Stroms:

$$\begin{aligned}\kappa \langle V(p) | \bar{q}_1 \gamma_\mu (1 - \gamma_5) b | \bar{B}(p+q) \rangle &= -i \epsilon_\mu^* (m_B + m_V) A_1^{BV}(q^2) \\ &+ i(2p + q)_\mu (\epsilon^* q) \frac{A_2^{BV}(q^2)}{m_B + m_V} + i q_\mu (\epsilon^* q) \frac{2m_V}{q^2} (A_3^{BV}(q^2) - A_0^{BV}(q^2)) \\ &+ \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{*\nu} q^\rho p^\sigma \frac{2V^{BV}(q^2)}{m_B + m_V},\end{aligned}\quad (5.14)$$

mit $A_0^{BV}(0) = A_3^{BV}(0)$ sowie $2m_V A_3^{BV}(q^2) = (m_B + m_V)A_1(q^2) - (m_B - m_V)A_2^{BV}(q^2)$ und die $B \rightarrow V$ -Formfaktoren des Tensorstroms:

$$\begin{aligned}\kappa \langle V(p) | \bar{q}_1 \sigma_{\mu\rho} q^\rho (1 + \gamma_5) b | \bar{B}(p+q) \rangle &= i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{*\nu} q^\rho p^\sigma 2 T_1^{BV}(q^2) \\ &+ \{ \epsilon_\mu^* (m_B^2 - m_V^2) - (\epsilon^* q) (2p + q)_\mu \} T_2^{BV}(q^2) \\ &+ (\epsilon^* q) \left\{ q_\mu - \frac{q^2}{m_B^2 - m_V^2} (2p + q)_\mu \right\} T_3^{BV}(q^2).\end{aligned}\quad (5.15)$$

In allen Definitionen gilt: $\kappa = \sqrt{2}$ ($\kappa = 1$) für π^0 , ρ^0 (für andere Mesonen). Ausgehend von 5.1 werden nun die Summenregeln berechnet. Um die Notation einfach zu halten, wird im Folgenden ein $B \rightarrow P$ -Übergang angenommen, d.h. der Strom $\bar{q}_2 \Gamma_a q_1$ interpoliert ein leichtes pseudoskalares Meson. Die Rechnung kann jedoch in völliger Analogie unter Austausch von $P \leftrightarrow V$ und Änderung der Diracstruktur im interpolierenden Strom auf $B \rightarrow V$ -Übergänge übertragen werden. Einsetzen eines vollständigen Satzes von pseudoskalaren Zuständen liefert, wie schon in Kapitel drei gezeigt, die hadronische Dispersionsrelation

$$F_{ab}^{(B)}(p, q) = \frac{\langle 0 | \bar{q}_2 \Gamma_a q_1 | P(p) \rangle \langle P(p) | \bar{q}_1 \Gamma_b b | \bar{B}(P_B) \rangle}{m_P^2 - p^2} + \int_{s_0^b}^{\infty} ds \frac{\rho_{ab}(s, q^2)}{s - p^2}, \quad (5.16)$$

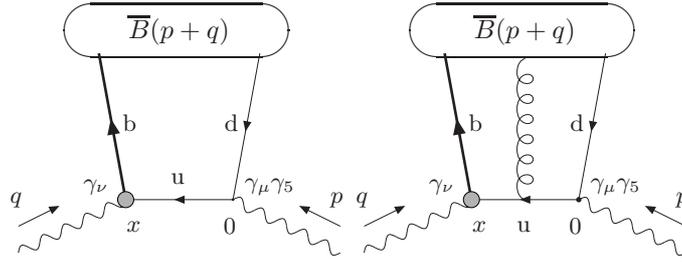


Abbildung 5.1: Führendes Diagramm und Softgluon-Korrektur

in der der niedrigste Zustand separiert und angeregte- bzw. Kontinuumszustände durch ein Dispersionsintegral dargestellt werden. Auf Seiten der OPE wird die HQET-Korrelationsfunktion 5.3, wobei $\frac{1}{m_b}$ -Korrekturen vernachlässigt werden,

$$F_{ab}^{(B),OPE}(p, q) \simeq \tilde{F}_{ab}^{(B_v),OPE} \quad (5.17)$$

entwickelt. Diese wird in die Form eines Dispersionsintegrals gebracht und nach Gleichsetzung via Quark-Hadron-Dualität im Kanal des leichten Mesons sowie einer Borel-Transformation ergibt sich die übliche Form:

$$f_P f_{BP}(q^2) e^{-m_p^2/M^2} \sim \int_{m_{q_1}^2 + m_{q_2}^2}^{s_0^P} ds e^{-s/M^2} \text{Im} F^{(OPE)}(s, q^2). \quad (5.18)$$

Auf die Berechnung der OPE wird nun noch ein genauere Blick geworfen. Um sowohl Zwei-, wie Dreiteilchenbeiträge, siehe Abbildung 5.1, miteinzubeziehen, wird für den Propagator des leichten Quarks q_1 , die Entwicklung im Gluonhintergrundfeld [156] eingesetzt:

$$\begin{aligned} S_{q_1}(x, 0, m_{q_1}) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \left\{ \frac{\not{k} + m_{q_1}}{k^2 - m_{q_1}^2} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 dv G_{\mu\nu}(vx) \left[\frac{-1}{k^2 - m_{q_1}^2} vx^\mu \gamma^\nu - \frac{(\not{k} + m_{q_1})}{2(k^2 - m_{q_1}^2)^2} \sigma^{\mu\nu} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Die führenden Terme ergeben sich aus der Fourier-Transformation der Definition 3.54

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{q}_2(x) [x, 0] \Gamma Q_v(0) | \bar{B}_v \rangle &= \\ &= -\frac{if_B m_B}{2} \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega v \cdot x} \text{Tr} \left[\gamma_5 \Gamma \frac{1 + \not{v}}{2} \left\{ \phi_+^B(\omega) - \frac{\phi_+^B(\omega) - \phi_-^B(\omega)}{2v \cdot x} \not{x} \right\} \right] \end{aligned} \quad (5.20)$$

wohingegen für die Dreiteilchenmatrixelemente die Zerlegung

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \bar{q}_2(x) G_{\lambda\rho}(ux) Q_v(0) | \bar{B}^0(v) \rangle &= \frac{f_B m_B}{2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi e^{-i(\omega+u\xi)v \cdot x} \\
 &\times \text{Tr} \left[\gamma_5 \Gamma \frac{1 + \not{v}}{2} \left\{ (v_\lambda \gamma_\rho - v_\rho \gamma_\lambda) (\Psi_A(\omega, \xi) - \Psi_V(\omega, \xi)) - i \sigma_{\lambda\rho} \Psi_V(\omega, \xi) \right. \right. \\
 &\left. \left. - \left(\frac{x_\lambda v_\rho - x_\rho v_\lambda}{v \cdot x} \right) X_A(\omega, \xi) + \left(\frac{x_\lambda \gamma_\rho - x_\rho \gamma_\lambda}{v \cdot x} \right) Y_A(\omega, \xi) \right\} \right], \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

verwendet wird. Letztere ist, wie [47] zeigt, nicht die allgemeinste Zerlegung dieses Matrixelementes. Es fehlen vier weitere unabhängige Strukturen. Die Konsequenzen hieraus sind noch nicht endgültig geklärt, einige werden jedoch in Anhang B kritisch beleuchtet. Der weitere Gang der Rechnung bleibt unverändert, daher wird an diesem Punkte dessen ungeachtet fortgefahren. Sowohl in 5.20, wie in 5.21 tauchen Terme $\sim \frac{1}{v \cdot x}$ auf, die vor der weiteren Verwendung partiell integriert werden müssen.

Im Zweiteilchenfall:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty d\omega e^{-i\omega v \cdot x} \frac{\phi_+^B(\omega) - \phi_-^B(\omega)}{v \cdot x} \\
 &= -i \int_0^\infty d\omega \left(\int_0^\omega d\rho e^{-i\rho v \cdot x} \right) (\phi_+^B(\omega) - \phi_-^B(\omega)) \\
 &= i \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega v \cdot x} \int_0^\omega d\rho (\phi_+^B(\rho) - \phi_-^B(\rho)) \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

Im Dreiteilchenfall:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi e^{-i(\omega+u\xi)v \cdot x} \frac{F_A(\omega, \xi)}{v \cdot x} \\
 &= \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi \left(-i \int_0^{\omega+u\xi} d\rho e^{-i\rho v \cdot x} \right) F_A(\omega, \xi) \\
 &= i \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi e^{-i(\omega+u\xi)v \cdot x} \int_0^\omega d\rho F_A(\rho, \xi) \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

Mit $(F_A(\omega, \xi) = X_A(\omega, \xi), Y_A(\omega, \xi))$. In beiden Fällen ist der erste Schritt aufgrund der Normierung der Verteilungssamplituden

$$\int_0^\infty d\omega (\phi_+^B(\omega) - \phi_-^B(\omega)) = \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi F_A(\omega, \xi) = 0 \quad (5.24)$$

erlaubt. Auftretende Ortsvektoren werden durch Ableitungen nach dem Impuls p ersetzt $x_\mu \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial p^\mu}$. So lautet die allgemeine Formel für die Zweiteilchenbeiträge

nach Integration über x und k :

$$\begin{aligned}
 F_{ab}^{OPE,2}(p, q) &= i \frac{f_B m_B}{4} \int_0^\infty \frac{d\omega}{(p - \omega v)^2 - m_{q_1}^2} \left\{ 2\phi_+^B(\omega) \right. \\
 &\times \left(\text{Tr} \left[\gamma_5 \Gamma_a \gamma_\lambda \Gamma_b \frac{1 + \not{p}}{2} \right] (p - \omega v)^\lambda + m_{q_1} \text{Tr} \left[\gamma_5 \Gamma_a \Gamma_b \frac{1 + \not{p}}{2} \right] \right) \\
 &+ \int_0^\omega \frac{\phi_+^B(\omega) - \phi_-^B(\omega)}{(p - \omega v)^2 - m_{q_1}^2} \left(\text{Tr} \left[[\gamma_5 \Gamma_a \Gamma_b \frac{1 + \not{p}}{2} \gamma_\beta] \right] 2m_{q_1} (p - \omega v)^\beta \right. \\
 &- \text{Tr} \left[\gamma_5 \Gamma_a \gamma_\lambda \Gamma_b \frac{1 + \not{p}}{2} \gamma_\beta \right] (g^{\lambda\beta} [(p - \omega v)^2 - m_{q_1}^2] \\
 &\left. \left. - 2(p - \omega v)^\lambda (p - \omega v)^\beta) \right) \right\}. \tag{5.25}
 \end{aligned}$$

Von diesem Punkt aus stellt die Berechnung der Zweiteilchenbeiträge keine Schwierigkeit mehr dar. Es werden den Formfaktoren entsprechend die Diracmatrizen gewählt, siehe Tabelle 5.1, die Spuren berechnet und die Lorentz-Strukturen gemäß den Definitionen 5.13, 5.14, 5.15 bestimmt. Die Dispersionsrelation wird durch eine Substitution $s = m_B \omega + \frac{m_B}{m_B - \omega} m_{q_1}^2 - \frac{\omega}{m_B - \omega} q^2$ und partielle Integration der Terme $\sim (s - p^2)^{-2}$ gewonnen. Nach der Kontinuumssubtraktion via Quark-Hadron-Dualität und Borel-Transformation ergeben sich die in Anhang D gegebenen Ausdrücke. Die Dreiteilchenbeiträge sind naturgemäß ein wenig komplizierter, daher sollen diese hier noch ein wenig näher betrachtet werden. Nachdem die Spuren berechnet und die Integration sowohl über x wie über k durchgeführt sind, ergibt sich schematisch ein Ausdruck der Form:

$$\begin{aligned}
 F_{ab}^{OPE,3} &= \frac{1}{2} m_B f_B \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi \int_0^1 du \left[\frac{1}{[(p - (\omega + u\xi)v)^2 - m_{q_1}^2]^2} \right. \\
 &\times \left\{ f_{ab}^{\Psi A}(p^2, u, \omega, \xi) \Psi_A(\omega, \xi) + f_{ab}^{\Psi V}(p^2, u, \omega, \xi) \Psi_V(\omega, \xi) \right\} \\
 &+ \frac{1}{[(p - (\omega + u\xi)v)^2 - m_{q_1}^2]^3} \\
 &\times \left\{ f_{ab}^{XA}(p^2, u, \omega, \xi) \bar{X}_A(\omega, \xi) + f_{ab}^{YA}(p^2, u, \omega, \xi) \bar{Y}_A(\omega, \xi) \right\} \left. \right]. \tag{5.26}
 \end{aligned}$$

\bar{X}_A, \bar{Y}_A sind die auch im Anhang verwendeten Abkürzungen für

$$\bar{F}_A(\omega, \xi) = \int_0^\omega d\rho F_A(\rho, \xi), \quad F_A = X_A, Y_A.$$

Um zu einem Dispersionsintegral zu kommen wird vollkommen analog zu früheren Rechnungen mit Verteilungsamplituden leichter Mesonen eine Integration

$$\int_0^\infty d\sigma \delta\left(\sigma - \frac{\omega - u\xi}{m_B}\right)$$

eingeführt und anschließend über u integriert. Mit $v = \frac{1}{m_B}(p + q)$ zeigt sich der Zweck dieser Manipulation:

$$\begin{aligned}
 F_{ab}^{OPE,3} &= \frac{1}{2} m_B f_B \int_0^\infty d\sigma \int_0^{m_B \sigma} d\omega \int_{m_B \sigma - \omega}^\infty d\xi \left[\frac{1}{[(p(1 - \sigma) - \sigma q)^2 - m_{q_1}^2]^2} \right. \\
 &\times \left. \left\{ f_{ab}^{\Psi_A}(p^2, \sigma, \omega, \xi) \Psi_A(\omega, \xi) + f_{ab}^{\Psi_V}(p^2, \sigma, \omega, \xi) \Psi_V(\omega, \xi) \right\} \right. \\
 &+ \frac{1}{[(p(1 - \sigma) - \sigma q)^2 - m_{q_1}^2]^3} \\
 &\times \left. \left\{ f_{ab}^{X_A}(p^2, \sigma, \omega, \xi) \bar{X}_A(\omega, \xi) + f_{ab}^{Y_A}(p^2, \sigma, \omega, \xi) \bar{Y}_A(\omega, \xi) \right\} \right]. \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

Die Substitution $s = m_B^2 \sigma + \frac{1}{1-\sigma} m_{q_1}^2 - \frac{\sigma}{1-\sigma} q^2$ bringt die Propagatorennennner auf die gewünschte Form und durch die Ersetzung

$$\begin{aligned}
 p^2 &= (p^2 - s) + s \\
 (p^2)^2 &= (p^2 - s)^2 + 2s(p^2 - s) + s^2
 \end{aligned}$$

in den Koeffizientenfunktionen lassen sich die Terme nach Potenzen von $(s - p^2)^{-1}$ ordnen

$$\begin{aligned}
 F_{ab}^{OPE,3} &= \frac{1}{2} m_B f_B \int_{m_{q_1}^2}^\infty d\sigma \int_0^{m_B \sigma(s)} d\omega \int_{m_B \sigma(s) - \omega}^\infty d\xi \\
 &\times \left[\sum_{i=1}^2 \frac{1}{((1 - \sigma(s))(s - p^2))^i} \left\{ \tilde{C}_{ab,i}^{\Psi_A} \Psi_A(\omega, \xi) + \tilde{C}_{ab,i}^{\Psi_V} \Psi_V(\omega, \xi) \right\} \right. \\
 &+ \left. \sum_{i=1}^3 \frac{1}{((1 - \sigma(s))(s - p^2))^i} \left\{ \tilde{C}_{ab,i}^{X_A} X_A(\omega, \xi) + \tilde{C}_{ab,i}^{Y_A} Y_A(\omega, \xi) \right\} \right], \quad (5.28)
 \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten Funktionen von s , ω und ξ sind. Hiernach können die üblichen Schritte durchgeführt werden. Zwei partielle Integrationen bringen 5.28 auf die Form eines Dispersionsintegrals. Nach Kontinuumssubtraktion und Boreltransformation, führen die Rücksubstitution $s \rightarrow \sigma$ sowie partielle Integrationen auf die im Anhang gegebene allgemeine Formel D.8. Um einen Eindruck von den resultierenden Formeln zu geben, wird hier eine der kürzeren Summenregeln, die für den Formfaktor $f_{BK}^+(q^2)$, mit allen berechneten Beiträgen angegeben. Dabei werden dieselben Abkürzungen $\bar{\sigma} = 1 - \sigma$, $m = m_{q_1}$

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}_\pm(\sigma m_B) &= \int_0^{\sigma m_B} d\rho (\phi_+^B(\rho) - \phi_-^B(\rho)), \quad s(\sigma, q^2) = \sigma m_B^2 + \frac{m^2 - \sigma q^2}{\bar{\sigma}}, \\
 \sigma_0(q^2, s_0) &= \frac{m_B^2 - q^2 + s_0 - \sqrt{4(m^2 - s_0)m_B^2 + (m_B^2 - q^2 + s_0)^2}}{2m_B^2}, \quad (5.29)
 \end{aligned}$$

wie im Anhang verwendet.

$$\begin{aligned}
 f_{BK}^+(q^2) = & \frac{f_B m_B}{f_P} \left\{ \int_0^{\sigma_0(q^2, s_0)} d\sigma \exp\left(\frac{-s(\sigma, q^2) + m_P^2}{M^2}\right) \right. \\
 & \times \left[\frac{\bar{\sigma}^2 m_B^2}{\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2} \phi_-^B(\sigma m_B) + \left(1 - \frac{\bar{\sigma}^2 m_B^2}{\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2}\right) \phi_+^B(\sigma m_B) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2\bar{\sigma}(m^2 - q^2)m_B}{(\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2)^2} \bar{\Phi}_\pm^B(\sigma m_B) \right. \\
 & + \frac{1}{M^2 \bar{\sigma}^2} \int_0^\sigma m_B d\omega \int_{\sigma m_B - \omega}^\infty \frac{d\xi}{\xi} \left[\left(-\frac{2m}{m_B} + \bar{\sigma} - 2\bar{\sigma} \frac{\sigma m_B - \omega}{\xi}\right) \Psi_A(\omega, \xi) \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{2m}{m_B} + \bar{\sigma}\right) \Psi_V(\omega, \xi) + \frac{\xi - \sigma m_B + \omega}{\xi m_B} \bar{X}_A(\omega, \xi) \right] \\
 & - \frac{1}{M^2 \bar{\sigma}} \left\{ \frac{(m^2 + q^2 - m_B^2 \bar{\sigma}^2)(2(\sigma m_B - \omega) - \xi)}{\xi m_B} \bar{X}_A(\omega, \xi) \right. \\
 & \quad \left. + 2 \frac{(2m\xi + m_B \bar{\sigma}(2(\sigma m_B - \omega) - \xi)) \bar{\sigma}}{\xi} \bar{Y}_A(\omega, \xi) \right\} \\
 & + \frac{e^{(-s_0 + m_k^2)/M^2}}{m_B^2 \bar{\sigma}_0^2 + m^2 - q^2} \left\{ \int_0^{m_B \sigma} d\omega \int_{m_B \sigma_0 - \omega}^\infty \frac{d\xi}{\xi} \right. \\
 & \quad \left[\left(-\frac{2m}{m_B} + \bar{\sigma}_0 - 2\bar{\sigma}_0 \frac{\sigma_0 m_B - \omega}{\xi}\right) \Psi_A(\omega, \xi) \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{2m}{m_B} + \bar{\sigma}_0\right) \Psi_V(\omega, \xi) + \frac{\xi - \sigma m_B + \omega}{\xi m_B} \bar{X}_A(\omega, \xi) \right. \\
 & - \frac{1}{2\bar{\sigma}_0} \left(\frac{1}{M^2} \frac{-2\bar{\sigma}_0(m^2 - q^2)}{(\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2)^2} \right) \left[\frac{(m^2 + q^2 - m_B^2 \bar{\sigma}_0^2)(2(\sigma_0 m_B - \omega) - \xi)}{\xi m_B} \bar{X}_A(\omega, \xi) \right. \\
 & \quad \left. + 2 \frac{(2m\xi + m_B \bar{\sigma}_0(2(\sigma_0 m_B - \omega) - \xi)) \bar{\sigma}_0}{\xi} \bar{Y}_A(\omega, \xi) \right] \\
 & - \frac{1}{2(m_B^2 \bar{\sigma}_0^2 + m^2 - q^2)} \left[\frac{6(2(m_B \sigma_0 - \omega) - \xi)(m^2 + q^2 - m_B^2 \bar{\sigma}_0^2)}{m_B \xi} \right. \\
 & + \frac{4\bar{\sigma}_0(m^2 + q^2 - m_B^2 \bar{\sigma}_0^2)}{\xi} + \frac{4m_B \bar{\sigma}_0^2(2(m_B \sigma_0 - \omega) - \xi)}{\xi} \left. \right] \bar{X}_A(\omega, \xi) \\
 & + \left\{ \frac{4m_B \bar{\sigma}_0^2(2m_B \bar{\sigma}_0 - (2(m_B \sigma_0 - \omega) - \xi))}{\xi} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{8\bar{\sigma}_0(2m\xi + m_B \bar{\sigma}_0(2(m_B \sigma_0 - \omega) - \xi))}{\xi} \right\} \bar{Y}_A(\omega, \xi) \left. \right\} \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

Über die Korrekturen durch Dreiteilchenzustände hinaus werden hier keine weiteren Beiträge betrachtet. α_s -Korrekturen benötigen zur konsistenten Behandlung die Re-

normierung der B -Meson-Verteilungsmplituden, die bisher nur für ϕ_{\pm}^B bekannt ist und deren weitere Behandlung nicht im Rahmen dieser Arbeit liegt. Generell wird jedoch für eventuell Skalenabhängige Größen die durchschnittliche Virtualität in der Korrelationsfunktion repräsentiert durch den Borel-Parameter zugrundegelegt.

5.1.4 Skalierung für $m_b \rightarrow \infty$

Nachdem im vorigen Abschnitt einige Punkte der Herleitung erläutert wurden, sollen nun einige Eigenschaften der neuen Summenregeln, insbesondere ihre Skalierung mit der Quarkmasse m_b für $q^2 \approx 0$, beleuchtet werden. In diesem Sinne scheint es zweckmäßig die Zweiteilchensummenregeln für $q^2 = 0$ sowie $m_{q_1} = 0$ anzugeben, um an diesen einige generelle Punkte festzumachen:

$$f_{B\pi}^+(0) = \frac{f_B}{f_{\pi} m_B} \int_0^{s_0^{\pi}} ds e^{-s/M^2} \phi_{-}^B(s/m_B), \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} f_{B\pi}^+(0) + f_{B\pi}^-(0) &= \frac{f_B}{f_{\pi} m_B} \int_0^{s_0^{\pi}} ds e^{-s/M^2} \left[\frac{m_B^2}{m_B^2 - s} \phi_{+}^B(s/m_B) \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{s}{m_B^2 - s} \phi_{-}^B(s/m_B) + 2 \frac{m_B^3}{(m_B^2 - s)^2} \Phi_{\pm}^B(s/m_B) \right], \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} f_{B\pi}^T(0) &= \frac{f_B}{f_{\pi} m_B} \int_0^{s_0^{\pi}} ds e^{-s/M^2} \left[\phi_{-}^B(s/m_B) \right. \\ &\quad \left. - \phi_{+}^B(s/m_B) - \frac{m_B}{m_B^2 - s} \Phi_{\pm}^B(s/m_B) \right], \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$V^{B\rho}(0) = \frac{f_B(m_B + m_{\rho})}{2 f_{\rho} m_{\rho} m_B} e^{m_{\rho}^2/M^2} \int_0^{s_0^{\rho}} ds e^{-s/M^2} \frac{m_B^2}{m_B^2 - s} \phi_{+}^B(s/m_B), \quad (5.34)$$

$$A_1^{B\rho}(0) = \frac{f_B m_B}{2 f_{\rho} m_{\rho} (m_B + m_{\rho})} e^{m_{\rho}^2/M^2} \int_0^{s_0^{\rho}} ds e^{-s/M^2} \phi_{+}^B(s/m_B), \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} A_2^{B\rho}(0) &= \frac{f_B}{2 f_{\rho} m_{\rho}} \frac{(m_B + m_{\rho})}{m_B} e^{m_{\rho}^2/M^2} \int_0^{s_0^{\rho}} ds e^{-s/M^2} \\ &\quad \left[\frac{m_B^2}{m_B^2 - s} \phi_{+}^B(s/m_B) - 2 \frac{s}{m_B^2 - s} \phi_{-}^B(s/m_B) + 2 \frac{m_B^3}{(m_B^2 - s)^2} \Phi_{\pm}^B(s/m_B) \right], \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$T_1^{B\rho}(0) = \frac{f_B}{2 f_{\rho} m_{\rho}} e^{m_{\rho}^2/M^2} \int_0^{s_0^{\rho}} ds e^{-s/M^2} \phi_{+}^B(s/m_B), \quad (5.37)$$

Die erste dieser Summenregel wird bereits in [168], bzw. [42] hergeleitet und untersucht. Auffällig ist, da die Dualität im Kanal des leichten Mesons genutzt wird

und somit $s_0^{P,V} \ll m_B$ gilt, daß die Verteilungsamplituden nur in einem sehr kleinen Intervall benötigt werden. Dies zeigt, daß es sich, wie für den weichen Anteil des Formfaktors zu erwarten, um einen Endpunktübergang handelt, in welchem das Zuschauerquark nur einen sehr kleinen Bruchteil des Impulses aufnimmt. Vom numerischen Standpunkt aus betrachtet heißt dies, daß die Ergebnisse sehr stark vom Endpunktverhalten der Verteilungsamplituden abhängig sein werden. Wie in 4.3 zu sehen, ist dieses für die betrachteten Modelle jedoch nahezu identisch, so daß zwar eine recht hohe Abhängigkeit von den Momenten, die in der hier betrachteten führenden Ordnung wohldefiniert sind, aber kaum eine von der Wahl eines der beiden Modelle zu beobachten sein wird. Einzig bei den $B \rightarrow V$ -Formfaktoren für $q^2 \gtrsim 5 \text{ GeV}^2$, siehe Abbildung 5.2, wird sich der Einfluß des konkreten Modells bemerkbar machen. Ehe nun auf die m_b -Skalierung eingegangen wird, seien noch einige

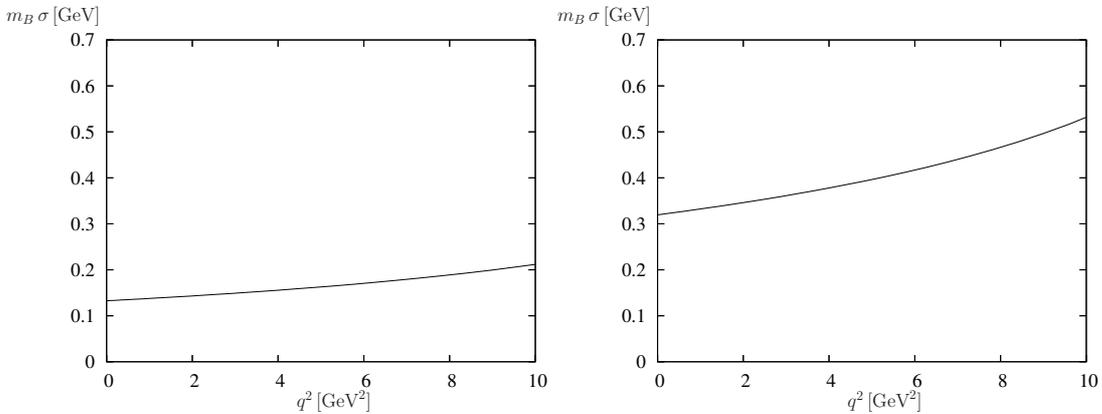


Abbildung 5.2: Höchster Wert für $m_B \sigma$ in Abhängigkeit vom Impulsübertrag q^2 . Links für den Fall $B \rightarrow \pi$ rechts für $B \rightarrow K^*$.

Anmerkungen genereller Natur zu der Korrelationsfunktion und der Entwicklung in B-Meson-Verteilungsamplituden angebracht. Zweierlei Punkte spielen hier eine Rolle. Zum Ersten wird den Verteilungsamplituden gemäß eine Korrelationsfunktion in HQET betrachtet. $\frac{1}{m_b}$ -Korrekturen, die aus der Entwicklung des entsprechenden Stromes oder des Mesonzustandes folgen, werden jedoch außer acht gelassen und bedürfen somit der Berücksichtigung in den systematischen Unsicherheiten der Methode. Zum Zweiten und vielleicht noch wichtiger, existiert für die Verteilungsamplituden des B-Mesons, wie schon in Kapitel drei erläutert, keine Twistentwicklung. Diese liefert im Standardansatz der Lichtkegelsummenregeln eine systematische Methode, Abweichungen vom Lichtkegel mit einzubeziehen. Terme höheren Twists sind so im Allgemeinen durch den Borelparameter $\frac{1}{M^2}$, wobei $M^2 \sim m_b \tau$ mit m_b -skaliert, unterdrückt. In diesem Falle ergibt sich ein deutlich anderes, weniger leicht durchschaubares Bild. Da bisher keine Verteilungsamplituden bekannt, die diesen Termen höheren Twists entsprechen, werden nur Terme berücksichtigt, die für $x^2 = 0$ beitragen. Unter diesen ergibt sich, wie zu erwarten, keine klare Hierarchie bezüglich des Borel-Parameters, hier erweist sich die Berechnung mittels Oberflächenterme, die eine solche nahelegt, als irreführend. Erst eine Einbeziehung von Termen, die vom Lichtkegel abweichen, sollte diese zu Tage fördern. Es liegt jedoch nahe anzunehmen, daß eventuelle Beiträge für $x^2 \neq 0$ hier formal und numerisch weniger stark

unterdrückt sein sollten. Begründet wird dies dadurch, daß der Borel-Parameter in den B-Meson-Summenregeln einer großen jedoch von m_b unabhängigen Skala entspricht, demnach keine formale $\frac{1}{m_b}$ -Unterdrückung erwartet werden kann. Ein Vergleich der Borel-Parameter zeigt dies auch rein numerisch: $M^2 \sim 1 \text{ GeV}^2$ gegenüber $M^2 \sim 10 \text{ GeV}^2$. Um hier jedoch konkrete Aussagen machen zu können, bedarf es zuerst allerdings einer Analyse der nächstführenden Verteilungssamplituden des B-Mesons. Eine weitere Besonderheit dieses Ansatzes zeigt sich bei der nun vorzunehmenden Entwicklung für $m_b \rightarrow \infty$. Für die berechneten Formfaktoren werden ohne Schwierigkeiten die Symmetrierelationen 2.43 reproduziert und die universellen Funktionen $\zeta_P(0)$ sowie $\zeta_\perp(0)$ extrahiert. Auf ζ_\parallel ist kein Zugriff möglich, da dieser nur zu A_2 und dort mit $\frac{1}{m_b}$ unterdrückt beiträgt, läßt er sich nicht eindeutig von den Korrekturen zu ζ_\perp trennen. Zu diesem Zwecke wäre noch eine Summenregel für A_0 vonnöten. Es ergeben sich nach Reskalierung der Zerfallskonstante $f_B = \frac{\hat{f}_B}{\sqrt{m_B}}$ die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\zeta_P(0) &= \frac{\hat{f}_B}{f_P m_B^{3/2}} e^{m_P^2/M^2} \phi_-^B(0) I_1(s_0^P, M^2), \\ \zeta_\perp(0) &= \frac{\hat{f}_B}{2f_V m_V m_B^{3/2}} e^{m_V^2/M^2} \left[\phi_+^B(0) I_2(s_V^0, M^2) + m_{q_1} \phi_-^B(0) I_1(s_V^0, M^2) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi} \{ \Psi_V(0, \xi) + \Psi_A(0, \xi) + X_A(0, \xi) \} I_1(s_V^0, M^2) \right].\end{aligned}\quad (5.38)$$

Dabei sind I_j analog zu 2.46 Integrale über die Summenregelparameter:

$$I_j(s_0^{P,V}) = \int_0^{s_0^{P,V}} ds s^j e^{-s/M^2}.\quad (5.39)$$

Die Besonderheit zeigt sich nun im Vergleich mit den Ergebnissen 2.45 des Standardansatzes, nachdem dort ebenfalls f_B reskaliert und $E \simeq \frac{m_B}{2}$ für $q^2 = 0$ gesetzt wurde:

$$\begin{aligned}\zeta_P(0) &= \frac{2}{\hat{f}_B m_B^{3/2}} \left[-f_P \phi'(1) I_2(\omega_0, \mu_0) + \frac{f_P m_P^2}{m_{q_1} + m_{q_2}} \phi_P(1) I_1(\omega_0, \mu_0) \right], \\ \zeta_\perp(E) &= \frac{2}{\hat{f}_B m_B^{3/2}} \left[-f_V^\perp \phi_\perp'(1) I_2(\omega_0, \mu_0) + f_V m_V g_\perp^{(v)}(1) I_1(\omega_0, \mu_0) \right].\end{aligned}\quad (5.40)$$

Ist die Form der Zweiteilchenbeiträge auch sehr ähnlich und zeigt sich die Gemeinsamkeit, daß das Endpunktverhalten der Verteilungssamplituden entscheidend für die $\frac{1}{m_b}$ -Skalierung mitverantwortlich ist, so tauchen Dreiteilchenbeiträge zu ζ_\perp , die von [188] implizit vorhergesagt werden, nur in den neuen Summenregeln auf. Wird eines, der in Kapitel vier hergeleiteten Modelle, zugrundegelegt, ergibt sich durch

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi} (\Psi_A(0, \xi) + X_A(0, \xi)) = \frac{1}{2} J(0) = 0,\quad (5.41)$$

noch eine Vereinfachung, so daß nur Ψ_V benötigt wird. Diese Feststellung hängt jedoch eng mit der in 5.21 gewählten Zerlegung des Dreiteilchenmatrixelementes

zusammen, so daß die von [47] gegebene allgemeinere Parametrisierung dieses Bild ändern könnte. Eine erste Diskussion zu diesem Punkt findet sich gemeinsam mit einer Bestätigung der in [47] angegebenen Zerlegung in Anhang B. Zum Abschluß dieses Abschnitts sei noch darauf hingewiesen, daß alle Formfaktoren, wie in Verbindung mit den Symmetrierelationen 2.43 aus 5.38 ersichtlich wird, die erwartete $\frac{1}{m_b^{3/2}}$ -Skalierung erfüllen. Alle bis auf einen. Für $f^+(0) + f^-(0)$ ergibt sich abweichend ein $\frac{1}{m_b^{5/2}}$ -Verhalten. Eine Erklärung konnte im Rahmen dieser Arbeit bedauerlicherweise nicht gefunden werden.

5.1.5 Numerik

Nachdem in den vorigen Abschnitten die Herleitung sowie einige generelle Eigenschaften der neuen Summenregeln dargestellt wurden, sollen diese nun numerisch ausgewertet werden. Für die Verteilungsamplituden wird im Allgemeinen das exponentielle Modell der Dreiteilchenverteilungsamplituden

$$\begin{aligned}\Psi_A(\omega, \xi) &= \Psi_V(\omega, \xi) = \frac{\lambda_E^2}{6\omega_0^4} \xi^2 e^{-(\omega+\xi)/\omega_0}, \\ X_A(\omega, \xi) &= \frac{\lambda_E^2}{6\omega_0^4} \xi(2\omega - \xi) e^{-(\omega+\xi)/\omega_0}, \\ Y_A(\omega, \xi) &= -\frac{\lambda_E^2}{24\omega_0^4} \xi(7\omega_0 - 13\omega + 3\xi) e^{-(\omega+\xi)/\omega_0}\end{aligned}\quad (5.42)$$

sowie die resultierende Lösung der Bewegungsgleichungen für die Zweiteilchenverteilungsamplituden verwendet. Das erste inverse Moment von ϕ_+^B wird aus den $\mathcal{O}(\alpha_s)$ Summenregeln [166] übernommen

$$\lambda_B(1 \text{ GeV}) = 460 \pm 110 \text{ MeV}.\quad (5.43)$$

Die Renormierungsskala ist konsistent zur durchschnittlichen Virtualität in der Korrelationsfunktion, die durch den Borel-Parameter M^2 repräsentiert wird, der in Anlehnung an Zweipunktsummenregeln im Pion-Kanal [169, 146] und Lichtkegelsummenregeln für den Pionformfaktor [196, 197, 198] zu

$$M^2 = 1.0 \pm 0.5 \text{ GeV}^2\quad (5.44)$$

gewählt wird. Die Zentralwerte für die Parameter $\lambda_E^2 = \lambda_H^2$ und ω_0 werden aus den Bedingungen für Grozin/Neuberts Modell

$$\omega_0 = \frac{2}{3}\bar{\Lambda}, \quad \lambda_E^2 = \lambda_H^2 = \frac{3}{2}\omega_0^2 = \frac{2}{3}\bar{\Lambda}^2.\quad (5.45)$$

gewonnen, was etwas größere Werte als in 4.49 ergibt. Diese werden, um der Unsicherheit durch das angenommene Modell gerecht zu werden, für festes λ_B , so um $\pm 50\%$ variiert, daß die aus den Bewegungsgleichungen folgende Relation für das gewählte Modell

$$\lambda_B^{(exp)} = \frac{1}{\bar{\Lambda}} \left(1 + \frac{\lambda_E^2}{3\omega_0^2} \right)\quad (5.46)$$

erfüllt bleibt und demnach Zwei- und Dreiteilchenverteilungsamplituden stets konsistent bleiben. Dies heißt, daß für festes λ_B , λ_E^2 , ω_0 und $\bar{\Lambda}$ stets korreliert sind. Die Zerfallskonstante f_B wird konsistent mit λ_B aus Summenregeln zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s)$ übernommen

$$f_B = 180 \pm 30 \text{ MeV}, \quad (5.47)$$

wobei stets bedacht werden muß, daß für eine vollständige Rechnung auf α_s -Niveau noch der Hauptteil, die Korrekturen zu den Lichtkegelsummenregeln, fehlen. In Tabelle 5.2 werden die Zerfallskonstanten der leichten Mesonen sowie die entsprechenden Dualitätsparameter aufgelistet. Letztere werden aus den Zweipunktsummenre-

Meson	Zerfallskonstante [27]	Dualitätsparameter
π	$f_\pi = 130.7 \pm 0.1 \text{ MeV}$	$s_0^\pi = 0.7 \text{ GeV}^2$ [169, 146]
K	$f_K = 159.8 \pm 1.4 \pm 0.44 \text{ MeV}$	$s_0^K = 1.05 \text{ GeV}^2$ [199, 116]
ρ	$f_\rho = 209 \pm 2 \text{ MeV}$	$s_0^\rho = 1.6 \text{ GeV}^2$ [169, 146]
K^*	$f_{K^*} = 217 \pm 5 \text{ MeV}$	$s_0^{K^*} = 1.7 \text{ GeV}^2$ [200]

Tabelle 5.2: Zerfallskonstanten der leichten Mesonen und die entsprechenden aus Zweipunktsummenregeln gewonnenen Dualitätsparameter .

geln mit $\mathcal{O}(\alpha_s)$ Genauigkeit für die Zerfallskonstanten gewonnen unter der Voraussetzung, daß diese die experimentell bestimmten Werte reproduzieren. Für die K , K^* Kanäle wird die Masse des Strange-Quarks

$$m_s(1 \text{ GeV}) = 130 \pm 10 \text{ MeV} \quad (5.48)$$

in Übereinstimmung mit der Summenregelbestimmung [201] gewählt. Zur Bestimmung der Resultate wird abweichend von der Standardmethode, die als Zentralwert das Ergebnis der Zentralwerte aller Eingabeparameter nimmt und die Unsicherheit bestimmt, indem die resultierenden Abweichungen aus der Variation jedes einzelnen Parameters quadratisch addiert werden, vorgegangen. Eine solche unabhängige Variation der Parameter und quadratische Addition der Fehler, die von Gauß-verteiltern unkorrelierten Fehlern ausginge, führte aufgrund der Einschränkung 5.46 hier zu falschen Ergebnissen, daher werden alle Eingabeparameter (λ_B , λ_E^2 , ω_0 , $\bar{\Lambda}$, f_B , M^2 , $f_{P,V}$, m_s) gleichzeitig in den gegebenen Intervallen und mit oben genannten Einschränkungen variiert. Daraus wird ein Mittelwert gewonnen, der mitsamt der bestimmten 1σ -Standardabweichung in Tabelle 5.3 angegeben wird. Ehe diese weiter diskutiert werden, ist in Anlehnung an die Erfahrung für f_B im dritten Kapitel ein Wort der Vorsicht angebracht. Die Fehler für die B-Meson-Summenregeln beziehen die Unsicherheiten in allen Eingabe- sowie Summenregelparametern mit ein, lassen jedoch α_s -Korrekturen sowie höhere Terme in der Lichtkegentwicklung außer acht, die zum Beispiel im klassischen Ansatz miteinbezogen werden. Eine erste allerdings noch unvollständige Analyse der α_s -Beiträge zu $f_{B\pi}^+(0)$ in [67] liefert

Formfaktor	B-Meson-Summenregeln	klassischer Ansatz
$f_{B\pi}^+(0)$	0.25 ± 0.05	0.258 ± 0.031
$f_{BK}^+(0)$	0.31 ± 0.04	$0.301 \pm 0.041 \pm 0.008$
$f_{B\pi}^T(0)$	0.21 ± 0.04	0.253 ± 0.028
$f_{BK}^T(0)$	0.27 ± 0.04	$0.321 \pm 0.037 \pm 0.009$
$V^{B\rho}(0)$	0.32 ± 0.10	0.323 ± 0.029
$V^{BK^*}(0)$	0.39 ± 0.11	$0.411 \pm 0.033 \pm 0.031$
$A_1^{B\rho}(0)$	0.24 ± 0.08	0.242 ± 0.024
$A_1^{BK^*}(0)$	0.30 ± 0.08	$0.292 \pm 0.028 \pm 0.023$
$A_2^{B\rho}(0)$	0.21 ± 0.09	0.221 ± 0.023
$A_2^{BK^*}(0)$	0.26 ± 0.08	$0.259 \pm 0.027 \pm 0.022$
$T_1^{B\rho}(0)$	0.28 ± 0.09	0.267 ± 0.021
$T_1^{BK^*}(0)$	0.33 ± 0.10	$0.333 \pm 0.028 \pm 0.024$

Tabelle 5.3: $B \rightarrow \pi, K$ - und $B \rightarrow \rho, K^*$ -Formfaktoren aus dieser Arbeit, im Vergleich mit den Vorhersagen aus dem Standardansatz der Lichtkegelsummenregeln in [44] bzw. [202]. Die zweite Unsicherheit für $B \rightarrow K(K^*)$ -Formfaktoren bei letzteren hat seinen Ursprung im ersten Gegenbauer-Moment der Kaon- bzw. K^* -Verteilungsamplitude, wobei die Werte $a_1^K(1 \text{ GeV}) = 0.05 \pm 0.03$ sowie $a_1^{K^*}(1 \text{ GeV}) = 0.10 \pm 0.07$ verwendet werden.

numerische Werte der Größenordnung 15%, die noch in den Unsicherheiten berücksichtigt werden müßten. Auf der anderen Seite deutet im Gegensatz zum genannten Beispiel in Kapitel drei die gute Übereinstimmung der Ergebnisse darauf hin, daß eventuelle weitere Korrekturen zu den B -Meson-Summenregeln möglicherweise nicht sehr groß sind. Eine weiterführende Analyse sollte hier Klarheit schaffen. Zurück zu den vorliegenden Ergebnissen, fallen die sehr viel größeren Fehler in den $B \rightarrow V$ -Formfaktoren auf. Dies wird mit einem Blick auf 5.38 und 5.43 verständlich. λ_B und f_B liefern die größten Beiträge zum resultierenden Fehler. Die $B \rightarrow P$ -Formfaktoren hängen jedoch in führender Ordnung von $\phi_-^B(0) = \lambda_B^{-1}$, die $B \rightarrow V$ -Formfaktoren von $\phi_+^B(0) \sim \lambda_B^{-2}$ ab. Daraus resultiert in etwa eine Verdoppelung der mit λ_B assoziierten Unsicherheit für die $B \rightarrow V$ -Formfaktoren. Desweiteren spielen Unsicherheiten verbunden mit den Parametern der Dreiteilchenverteilungssamplituden für $B \rightarrow V$ -Übergänge eine größere Rolle, da Dreiteilchenbeiträge bereits in führender Ordnung auftreten. Diese Feststellung wird durch die Diagramme 5.3, die ein zufriedenstellendes Bild für die Stabilität der Summenregeln bezüglich des Borel-Parameters sowohl für $B \rightarrow P$ -, wie auch für $B \rightarrow V$ -Formfaktoren zeigen, bestätigt. Die Dreiteilchenbeiträge zu $V^{B\rho}(0)$ sind in Übereinstimmung mit der fehlenden $\frac{1}{m_b}$ -

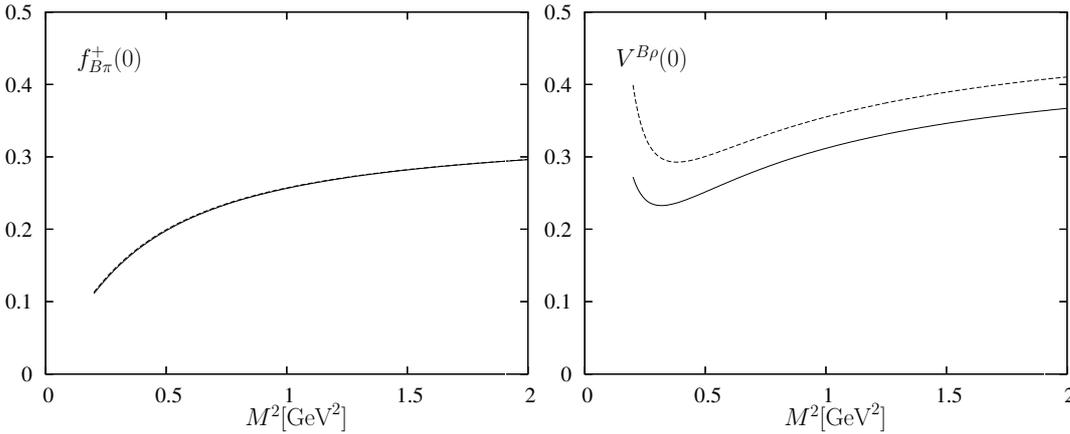


Abbildung 5.3: Abhängigkeit der Formfaktoren $f_{B\pi}^+(0)$ (links) und $V^{B\rho}(0)$ (rechts) vom Borel-Parameter. Die durchgezogenen Kurven geben die Summenregeln unter Einbeziehung der Dreiteilchenbeiträge, die gestrichelten ohne diese an. Für den Formfaktor $f_{B\pi}^+(0)$ fallen diese beinahe zusammen.

Unterdrückung erheblich größer als für $f_{B\pi}^+(0)$. Oben bereits beschriebene Sensitivität auf λ_B , die in [168, 42] genutzt wird, um unter Kenntnis des Formfaktors $f_{B\pi}^+(0)$ einen Wert für dieses zu extrahieren, wird in Diagramm 5.4 noch einmal veranschaulicht. Vorsichtig kann hier angedeutet werden, daß die Möglichkeit von sowohl niedrigen λ_B , wie auch $f_{B\pi}^+(0)$, die von QCD-Faktorisierung zur Beschreibung der Daten in $B \rightarrow \pi\pi$ benötigt scheint [203], nicht unterstützt wird. Um einen Vergleich der q^2 -Abhängigkeit der Formfaktoren zwischen dem traditionellen und dem neuen Ansatz zu ermöglichen sind in den Diagrammen 5.5, 5.6 die B -Mesonsummenregel-Ergebnisse sowie die in [44, 202] angegebenen besten Parametrisierungen für die Formfaktoren bis zu einem Impulsübertrag von $q^2 = 10 \text{ GeV}^2$, der angenommenen Gültigkeitsgrenze der neuen Summenregeln, dargestellt. Der Formfaktor $f_{B\pi}^0(q^2)$

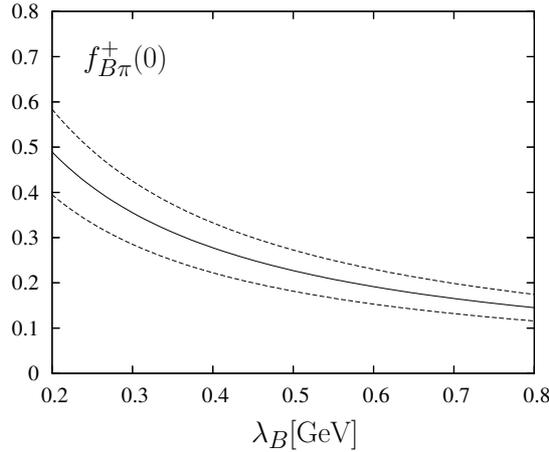


Abbildung 5.4: *Abhängigkeit des Formfaktors $f_{B\pi}^+(0)$ vom ersten inversen Moment λ_B . Die durchgezogene Kurve ergibt sich aus dem Mittelwert der im Text beschriebenen Variation aller Parameter für festes λ_B . Die gestrichelten Kurven geben die 1σ -Abweichung an.*

wird hier durch die Kombination der Ergebnisse für $f_{B\pi}^+(q^2)$ sowie für $f_{B\pi}^-(q^2)$ erhalten. Es sind leichte Abweichungen bei $q^2 = 0$ zu den Resultaten in Tabelle 5.3 zu erkennen. Diese folgen aus der einfachen Tatsache, daß es für die Darstellung der q^2 -Abhängigkeit genügt die Zentralwerte zu berechnen, anstatt oben beschriebenes rechenzeitaufwendiges Verfahren zu verwenden. Außer für $A_2^{B\rho}(q^2)$ ist, so die Unsicherheiten mit in Betracht gezogen werden, eine durchaus zufriedenstellende Übereinstimmung festzustellen. Auffällig einzig die außer für $A_1^{B\rho}(q^2)$ und $A_2^{B\rho}(q^2)$ systematisch größere Steigung zu höheren Impulsen. In einem Versuch, diesen Effekt zu quantifizieren, wird die in [44, 202] verwendete Parametrisierung

$$f_{B\pi}^+(q^2)(V^{B\rho}(q^2)) = \frac{r_1}{1 - \frac{q^2}{m_{B^*}^2}} + \frac{r_2}{1 - \frac{q^2}{m_{fit}^2}} \quad (5.49)$$

an die Ergebnisse für die Formfaktoren $f_{B\pi}^+(q^2)$, $V^{B\rho}(q^2)$ angepaßt. Hier ergeben sich Schwierigkeiten aufgrund des relativ kleinen q^2 -Bereiches und der recht großen theoretischen Unsicherheiten. Die besten Ergebnisse werden mit einer unphysikalisch niedrigen Masse m_{fit} für den effektiven Pol erzielt. Daher wird m_{fit} auf die in [44, 202] erhaltenen Werte festgelegt und nur die Residuen r_1 , r_2 bestimmt. Die Ergebnisse, Tabelle 5.4, zeigen die erwarteten Eigenschaften, daß die Summe $r_1 + r_2 = f(0)$ in etwa gleich, wohingegen r_1 verantwortlich für den stärkeren Anstieg, für die B-Mesonsummenregeln größer ist. Hier soll nur ein erster Eindruck gegeben werden. Eine weiterführende Analyse sollte nicht nur alle Formfaktoren, sondern auch die Anwendung auf die experimentellen Spektren von semileptonischen und radiativen B-Zerfällen miteinbeziehen. Die numerischen Möglichkeiten sind damit noch nicht ausgeschöpft. Unter dem Gesichtspunkt, daß die $B \rightarrow K(K^*)$ - und $B \rightarrow \pi(\rho)$ -Formfaktoren ähnliche Abhängigkeit von λ_B und identische von f_B haben sollten, lohnt es sich, statt der Summenregeln für die einzelnen Formfaktoren, welche für deren Relationen zu betrachten, um so ein Maß für die $SU(3)$ -Brechung zu

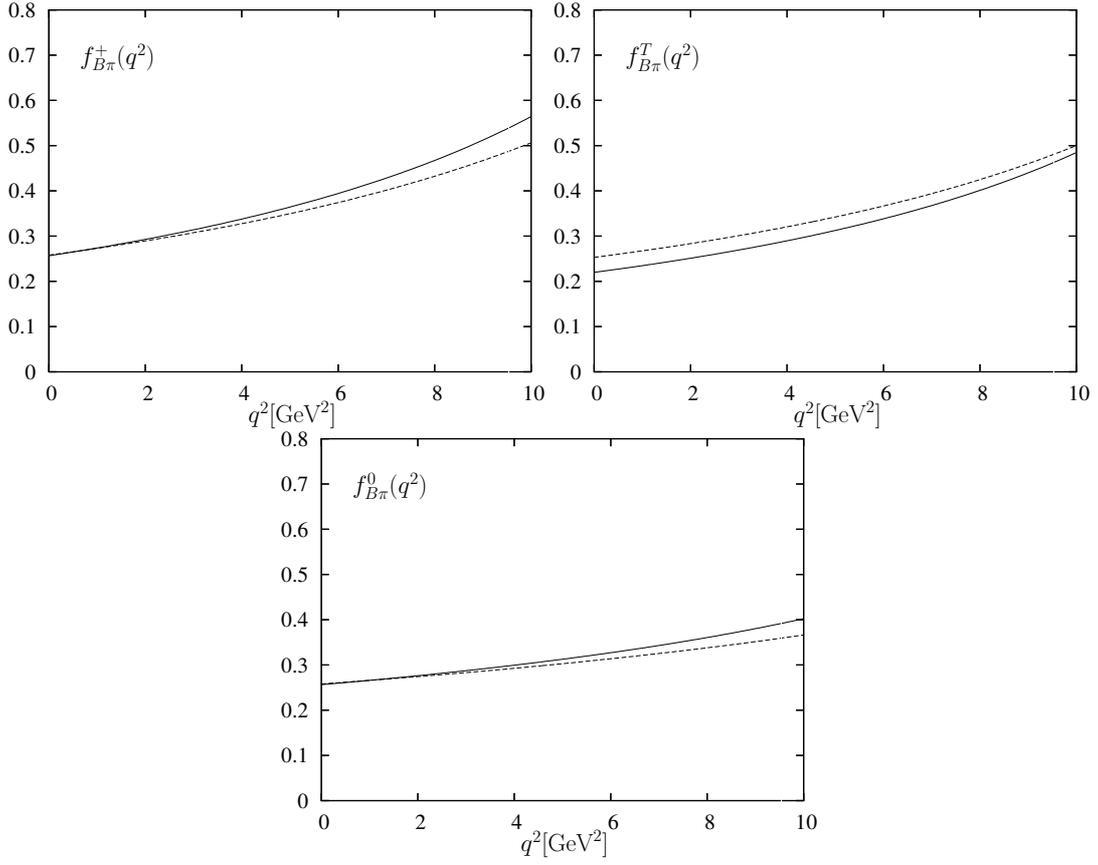


Abbildung 5.5: *Abhängigkeit der $B \rightarrow \pi$ -Formfaktoren vom Impulsübertrag q^2 . Die durchgezogene Linie gibt die Resultate der B -Mesonsummenregeln wieder, die gestrichelte Linie die beste Parametrisierung an die Ergebnisse von [44]. Es sind keine theoretischen Unsicherheiten eingezeichnet.*

erhalten. Zur Erinnerung: In den Lichtkegelsummenregeln mit Verteilungsamplituden leichter Mesonen wird die $SU(3)$ -Brechung durch die unterschiedlichen Zerfallskonstanten, Mesonmassen und insbesondere durch das erste Gegenbauer-Moment der entsprechenden Verteilungsamplitude implementiert. Hier spielen ebenfalls sowohl Mesonmassen, wie Zerfallskonstanten mit hinein, aber darüber hinaus kommen statt des Gegenbauer-Moments, die Masse des Strange-Quarks und die verschiedenen Dualitätsparameter zum Tragen. Somit kann hier ein unabhängiger Test durchgeführt und weiteres Licht auf die noch nicht endgültig geklärte Situation des ersten Gegenbauer-Momentes [199, 200] geworfen werden. Darüber hinaus wird das Verhältnis $\frac{T_1^{BK^*}(0)}{T_1^{B\rho}(0)}$ in 2.71 zur Bestimmung von $|V_{td}|$ benötigt, so daß hier noch eine weitergehende phänomenologische Motivation besteht. Die berechneten Relationen

$$\frac{f_{BK^*}^+(0)}{f_{B\pi}^+(0)} = 1.27 \pm 0.07, \quad (5.50)$$

$$\frac{T_1^{BK^*}(0)}{T_1^{B\rho}(0)} = 1.22 \pm 0.13, \quad (5.51)$$

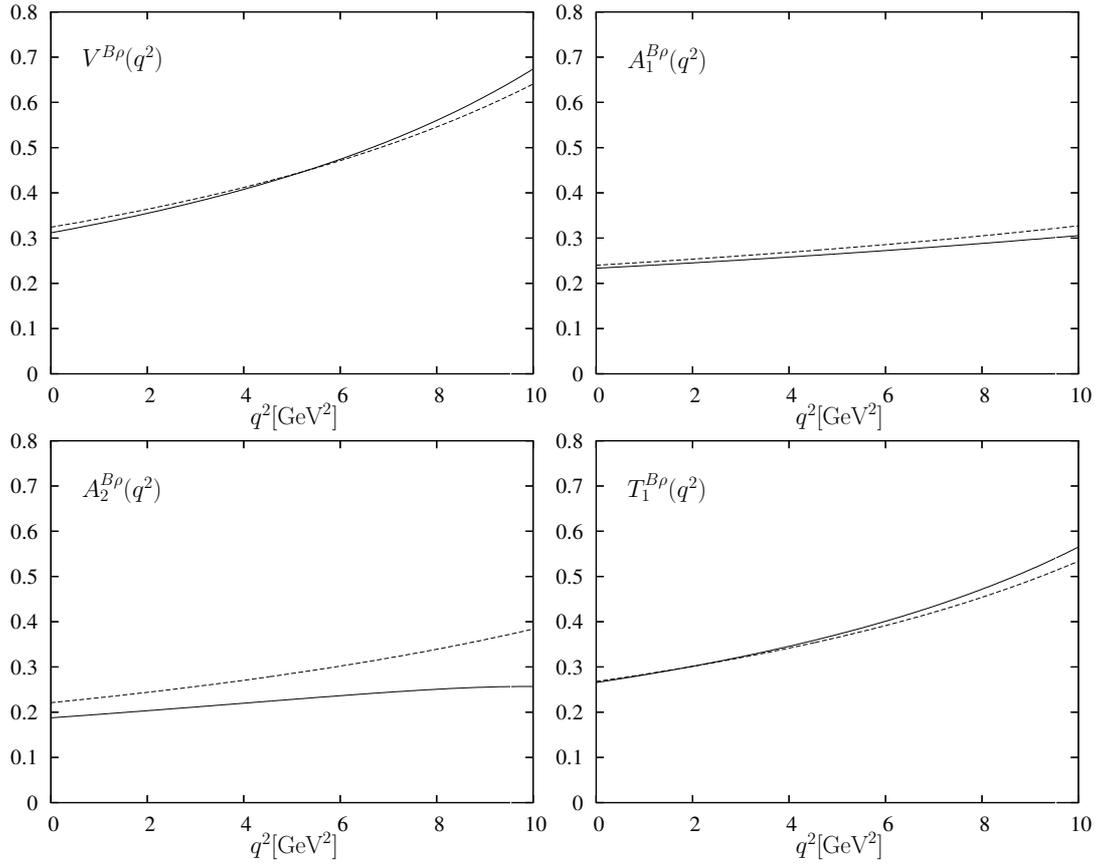


Abbildung 5.6: Wie in Figur. 5.5 aber für die $B \rightarrow \rho$ -Formfaktoren. Die Ergebnisse für die Summenregeln mit ρ -Verteilungsamplituden stammen aus [202].

zeigen erwartungsgemäß eine viel geringere Abhängigkeit von den Parametern des B-Mesons, jedoch ist hier wieder ein Wort der Vorsicht angebracht, da wie zuvor keine α_s -Korrekturen berechnet oder in den Unsicherheiten berücksichtigt sind. Erfahrungsgemäß werden diese nur einen geringen Einfluß auf das Verhältnis der Formfaktoren haben, doch ist die Bestätigung der Ergebnisse aus dem traditionellen Ansatz

$$\frac{f_{BK}^+(0)}{f_{B\pi}^+(0)} = 1.36 \begin{array}{l} +0.12 \\ -0.09 \end{array} \quad [199], \quad (5.52)$$

$$\frac{T_1^{BK^*}(0)}{T_1^{B\rho}(0)} = 1.17 \pm 0.09 \quad [200], \quad (5.53)$$

unter diesem Vorbehalt zu sehen. Eine letzte Größe von phänomenologischem Interesse kann aus den Summenregeln bestimmt werden. Der Koeffizient der harten Streubeiträge in QCD-Faktorisierung für $B \rightarrow \pi\pi$ -Zerfälle wird durch

$$r_{sp} = \frac{9f_\pi f_B}{m_b f_{B\pi}^+(0) \lambda_B} \quad (5.54)$$

gegeben, siehe zum Beispiel [203]. Gleichung 5.31 multipliziert mit $\frac{\lambda_B}{f_B}$ liefert aufgrund von $\phi_-^B(0) = \lambda_B^{-1}$ eine Möglichkeit $\frac{\lambda_B f_{B\pi}^+(0)}{f_B}$ fast unabhängig von den oben-

Formfaktor	Diese Arbeit	Ball/Zwicky	effektive Polmasse
$f_{B\pi}^+(q^2)$	$r_1 = 0.93$ $r_2 = -0.68$	$r_1 = 0.744$ $r_2 = -0.486$	$m_{fit} = 6.38 \text{ GeV}$
$V^{B\rho}(q^2)$	$r_1 = 1.10$ $r_2 = -0.80$	$r_1 = 1.045$ $r_2 = -0.721$	$m_{fit} = 6.19 \text{ GeV}$

Tabelle 5.4: Werte der Parameter in 5.49 für die zwei Ansätze mit identischer Masse m_{fit} des effektiven Pols

genannten Hauptunsicherheiten der B-Meson-Summenregeln zu bestimmen. Dreiteilchenbeiträge liefern nur Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{1}{m_b}\right)$, so daß obige Feststellung gültig bleiben und daß Verhältnis fast ausschließlich von Parametern des Pion-Kanals abhängen sollte. Die numerische Auswertung bestätigt diese Vermutung und es wird der Wert

$$\frac{f_B}{f_{B\pi}^+(0) \lambda_B} = 1.56 \pm 0.17 \quad (5.55)$$

vorhergesagt. Wie schon bei der λ_B -Abhängigkeit von $f_{B\pi}^+(0)$ vorsichtig angedeutet, wäre dieser Wert zu klein, um die experimentellen Daten zu erklären [203]. Auch hier bedarf es sicher noch weiterer Untersuchungen. So kann abschließend gesagt werden, daß der hier verwendete Ansatz in den Lichtkegelsummenregeln weitere Beachtung verdient, um dessen Potential ausschöpfen zu können. Unter einfachem Austausch verschiedener Dirac-Matrizen ist ein eindrucksvolles Portfolio phänomenologisch interessanter Größen zugänglich geworden. Zwei Punkte scheinen im Weiteren von vorrangiger Wichtigkeit. Zum Ersten bedarf es der Berechnung von α_s -Korrekturen, wozu insbesondere die Renormierung der Verteilungssamplitude $\phi_-^B(\omega)$ benötigt wird. Zum Zweiten muß die Rolle weiterer Dreiteilchenverteilungssamplituden, siehe Anhang B sowie nächstführender Terme der Lichtkegelenwicklung geklärt werden, um ein klares Bild der $\frac{1}{M^2}$ -, bzw. $\frac{1}{m_b}$ -Hierarchie zu erhalten.

5.2 Lichtkegelsummenregeln mit Verteilungssamplituden des Pions

Nachdem in den vorigen Abschnitten die B-Meson-Summenregeln mit ersten Korrekturtermen vorgestellt wurden, rückt nun der Standardansatz ins Zentrum des Interesses. Zur Berechnung des $B \rightarrow \pi$ -Formfaktors erstmals 1990 [185] verwendet, wurde die Methode über die Jahre stetig verbessert. Terme höheren Twists [204, 205], α_s -Korrekturen zur Twist zwei [147, 148] und zur Twist drei [45, 44] Streuamplitude sind inzwischen bekannt. All diese Terme werden berücksichtigt und neu hergeleitet. Besonderes Augenmerk gilt den α_s -Korrekturen zur Twist drei Streuamplitude, für die bisher keine unabhängige Bestätigung vorlag. Im Unterschied zur Originalrechnung wird hier allerdings die \overline{MS} -Masse $m_b(\mu)$ anstelle der Einschleifen-Polmasse verwendet. Neben dem Vorteil der konsistenten Definition bei kurzen Distanzen, liegt dies vorwiegend darin begründet, daß die für die Extraktion des Formfaktors

benötigte Summenregel für die Zerfallskonstante f_B inzwischen ebenfalls unter Verwendung der \overline{MS} -Masse vorliegt [175]. Im nächsten Abschnitt wird die betrachtete Korrelationsfunktion eingeführt und die Entwicklung in führender Ordnung kurz dargestellt, ehe der Hauptteil, die Berechnung der α_s -Korrekturen, behandelt wird. Die Aufstellung der Summenregeln und eine vorläufige numerische Auswertung bilden den Abschluß.

5.2.1 Korrelationsfunktion

Ausgangspunkt bildet eine Vakuum-Pion-Korrelationsfunktion, in der das B-Meson via eines pseudoskalaren Stromes interpoliert wird, wobei entsprechend den Formfaktoren zwei verschiedene $b \rightarrow u$ -Übergangsströme eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}
 F_\mu(p, q) &= i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle \pi^+(p) | T \{ \bar{u}(x) \Gamma_\mu b(x), m_b \bar{b}(0) i \gamma_5 d(0) \} | 0 \rangle \\
 &= \begin{cases} F(q^2, (p+q)^2) p_\mu + \tilde{F}(q^2, (p+q)^2) q_\mu, & \Gamma_\mu = \gamma_\mu \\ F^T(q^2, (p+q)^2) [p_\mu q^2 - q_\mu (q \cdot p)], & \Gamma_\mu = -i \sigma_{\mu\nu} q^\nu \end{cases} \quad (5.56)
 \end{aligned}$$

Es wird Isospin-Symmetrie angenommen und im chiralen Grenzwert $m_u = m_d = 0$ sowie $p^2 = m_\pi^2 = 0$ unter Ausnahme der Relation $\mu_\pi = \frac{m_\pi^2}{m_u + m_d}$ gearbeitet. In diesem Sinne wird der $\overline{B}_d \rightarrow \pi^+$ -Übergang betrachtet und im Pinguin-Strom das u - statt des d -Quarks verwendet. Die Lichtkegeldominanz kann in ähnlicher Weise wie für die B-Meson-Summenregeln bewiesen werden, indem die b -Quark-Felder in HQET-Felder transformiert und die externen Momente q , bzw. $p+q$ entsprechend reskaliert werden. Hiernach entspricht die Impulsconfiguration der der $\gamma^* \gamma^* \rightarrow \pi^0$ -Amplitude, für die der Beweis zum Beispiel in [146] geführt wird. Zur Berechnung der Zwei-, wie Dreiteilchenbeiträge, siehe Abbildung 5.7, werden die Entwicklung des b -Propagators im Gluonhintergrundfeld 5.19 sowie die Zerlegungen E.1, E.2 verwendet. Vier- und Mehrteilchenzustände werden ebenso vernachlässigt, wie Terme von Twist größer als vier. Dieser zunächst willkürlich erscheinende, aber naturgemäß notwendige Abbruch wird durch den bereits geringen numerischen Einfluß der Twist vier und Dreiteilchenbeiträge, die jeweils bei etwa $\sim 1\%$ liegen, nachträglich gerechtfertigt. Um im

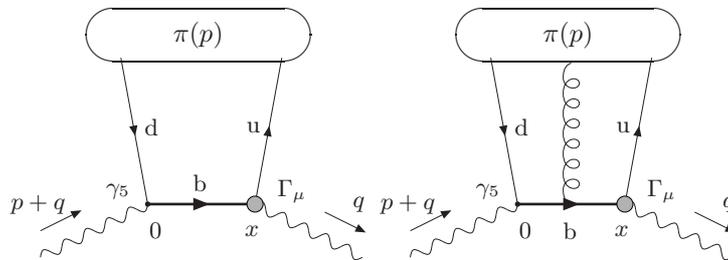


Abbildung 5.7: Führende Zwei- und Dreiteilchenbeiträge zur Korrelationsfunktion 5.56

Hinblick auf die Übersichtlichkeit der weiteren Rechnung führende und nächstführende Terme in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ zu trennen, werden die Amplituden F , \tilde{F} und F^T als Summe

dieser dargestellt:

$$F(q^2, (p+q)^2) = F_0(q^2, (p+q)^2) + \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} F_1(q^2, (p+q)^2). \quad (5.57)$$

Die Amplituden führender Ordnung F_0 , \tilde{F}_0 sowie F_0^T mit Beiträgen bis Twist vier sind bereits seit einigen Jahren bekannt, [206, 207, 204, 205], wurden erneut berechnet und werden hier in der in Anhang E benutzten neuen Schreibweise der Twist drei und vier Verteilungsamplituden von [154] sowie mit der üblichen Definition $\mathcal{D}\alpha = d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)$, angegeben:

$$\begin{aligned} F_0(q^2, (p+q)^2) &= m_b^2 f_\pi \int_0^1 \frac{du}{m_b^2 - (q+up)^2} \left\{ \varphi_\pi(u) + \frac{\mu_\pi}{m_b} u \phi_{3\pi}^p(u) \right. \\ &+ \frac{\mu_\pi}{6m_b} \left[2 + \frac{m_b^2 + q^2}{m_b^2 - (q+up)^2} \right] \phi_{3\pi}^\sigma(u) - \frac{m_b^2 \phi_{4\pi}(u)}{2(m_b^2 - (q+up)^2)^2} \\ &- \left. \frac{u}{m_b^2 - (q+up)^2} \int_0^u dv \psi_{4\pi}(v) \right\} \\ &+ \int_0^1 dv \int \frac{\mathcal{D}\alpha}{[m_b^2 - (q + (\alpha_1 + \alpha_3 v)p)^2]^2} \left\{ 4m_b f_{3\pi} v(q \cdot p) \Phi_{3\pi}(\alpha_i) \right. \\ &+ \left. m_b^2 f_\pi \left(2\Psi_{4\pi}(\alpha_i) - \Phi_{4\pi}(\alpha_i) + 2\tilde{\Psi}_{4\pi}(\alpha_i) - \tilde{\Phi}_{4\pi}(\alpha_i) \right) \right\}, \quad (5.58) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0(q^2, (p+q)^2) &= m_b f_\pi \int_0^1 \frac{du}{m_b^2 - (q+up)^2} \left\{ \mu_\pi \phi_{3\pi}^p(u) \right. \\ &+ \left. \frac{\mu_\pi}{6} \left[1 - \frac{m_b^2 - q^2}{m_b^2 - (q+up)^2} \right] \frac{\phi_{3\pi}^\sigma(u)}{u} - \frac{m_b}{m_b^2 - (q+up)^2} \int_0^u dv \psi_{4\pi}(v) \right\}, \quad (5.59) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_0^T(q^2, (p+q)^2) &= m_b f_\pi \int_0^1 \frac{du}{m_b^2 - (q+up)^2} \left\{ \varphi_\pi(u) + \frac{m_b \mu_\pi}{3(m_b^2 - (q+up)^2)} \phi_{3\pi}^\sigma(u) \right. \\ &- \left. \frac{1}{2(m_b^2 - (q+up)^2)} \left(\frac{1}{2} + \frac{m_b^2}{m_b^2 - (q+up)^2} \right) \phi_{4\pi}(u) \right\} \\ &+ m_b f_\pi \int_0^1 dv \int \frac{\mathcal{D}\alpha}{[m_b^2 - (q + (\alpha_1 + \alpha_3 v)p)^2]^2} \left\{ 2\Psi_{4\pi}(\alpha_i) \right. \\ &- \left. (1 - 2v)\Phi_{4\pi}(\alpha_i) + 2(1 - 2v)\tilde{\Psi}_{4\pi}(\alpha_i) - \tilde{\Phi}_{4\pi}(\alpha_i) \right\}. \quad (5.60) \end{aligned}$$

Zwei Punkte fallen ins Auge: Zum Einen ist $\tilde{F}_0(q^2, (p+q)^2)$ frei von Twist zwei und Dreiteilchenbeiträgen. Zum Zweiten sind Twist vier Terme, wie die heuristische Diskussion in Kapitel drei vermuten ließ stets mit einem zusätzlichen Propagatorenner $\frac{1}{m_b^2 - (q+up)^2}$ unterdrückt. Von der Dimension wird dies durch den Normierungsparameter $\delta_\pi^2 \sim \Lambda_{QCD}^2$ kompensiert. Es liegt demnach nahe, diese als kleine Korrektur aufzufassen. Sehr viel größeren Einfluß haben auf den ersten Blick, die im nächsten Abschnitt beschriebenen $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Beiträge.

5.2.2 α_s -Korrekturen

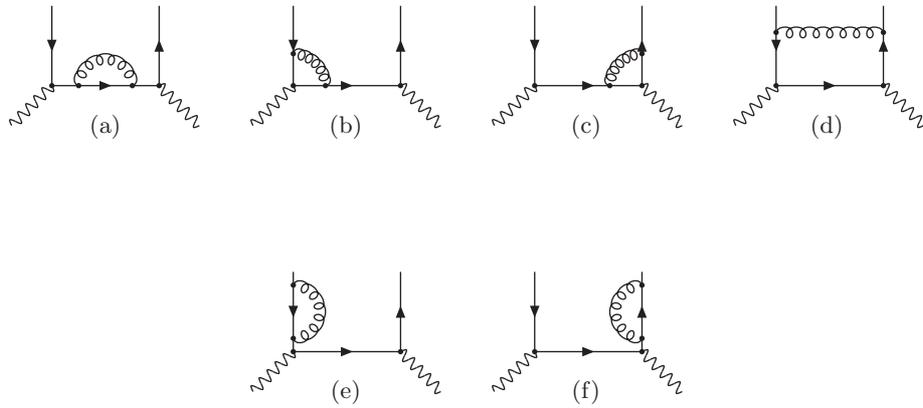


Abbildung 5.8: α_s -Korrekturen zur Streuamplitude. Diagramm (e) und (f) verschwinden für $m_u = m_d = 0$

Wird 3.106 als gültig angenommen, lassen sich $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Terme zum Twist t berücksichtigen, indem die in Diagramm 5.8 dargestellten Korrekturen zur Streuamplitude T^t mit externen Quarks auf der Massenschale sowie Impulsen up , bzw. $(1-u)p$ berechnet und mit der jeweiligen Verteilungsamplitude gefaltet werden. Unter diesen Voraussetzungen kann die in 5.57 eingeführte Amplitude $F_1(q^2, (p+q)^2)$ in folgender Art geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 F_1(q^2, (p+q)^2) &= f_\pi \int_0^1 du \left\{ T_1(q^2, (p+q)^2, u) \varphi_\pi(u) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\mu_\pi}{m_b} [T_1^p(q^2, (p+q)^2, u) \phi_{3\pi}^p(u) + T_1^\sigma(q^2, (p+q)^2, u) \phi_{3\pi}^\sigma(u)] \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{5.61}$$

Analog unter Austausch $T_1^i \rightarrow \tilde{T}_1^i$ oder $T_1^i \rightarrow T_1^{Ti}$ für die Amplituden $\tilde{F}_1(q^2, (p+q)^2)$ und $F_1^T(q^2, (p+q)^2)$. Wie bereits in Kapitel drei dargelegt, existiert kein Beweis für die in 3.106 allgemein und in 5.61 konkret angegebene Faktorisierung. Dies bedeutet nichts anderes, als daß im jeweiligen Kontext gezeigt werden muß, daß sich nach Renormierung die Skalenabhängigkeit von Streu- und Verteilungsamplitude gegenseitig aufheben. Vorausgreifend kann gesagt werden, daß im Twist zwei Fall die

bekannte Renormierungsgruppengleichung 3.27, 3.28 von $\varphi_\pi(u, \mu)$ den Beweis der Faktorisierung zur Ordnung α_s in allen Ordnungen der konformen Entwicklung erlaubt, während im Twist drei Fall durch die fehlende Kenntnis eines Äquivalents zu 3.28 der Beweis auf die führende Ordnung in der konformen Entwicklung beschränkt bleibt. Ehe einige Punkte der konkreten Rechnung dargelegt werden, noch ein Wort zum Verfahren: Es wird grundsätzlich in dimensionaler Regularisierung unter Verwendung des \overline{MS} -Schemas sowie der Feynman-Eichung gearbeitet. Die Masse des b -Quarks m_b wird dementsprechend mit der \overline{MS} -Masse identifiziert. Als Beispiel sei das Diagramm (d) näher betrachtet.

Die in Abbildung 5.8 dargestellten Streuamplituden mit externen Quarks auf der

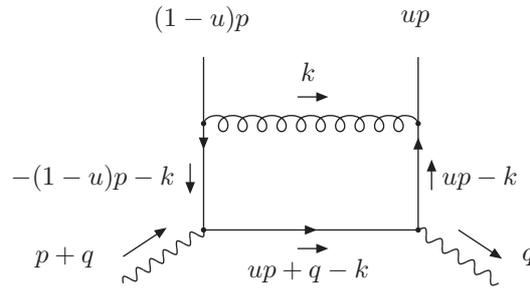


Abbildung 5.9: Diagramm (d) aus Abbildung 5.8 mit eingezeichneten Impulsen

Massenschale werden via der Vollständigkeit der Dirac-Matrizen

$$\begin{aligned} \bar{u}_\alpha d_\beta &= \frac{1}{4}(\mathbf{1})_{\beta\alpha}(\bar{u}d) - \frac{1}{4}(i\gamma_5)_{\beta\alpha}(\bar{u}i\gamma_5 d) + \frac{1}{4}(\gamma_\mu)_{\beta\alpha}(\bar{u}\gamma^\mu d) \\ &- \frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_5)_{\beta\alpha}(\bar{u}\gamma^\mu\gamma_5 d) - \frac{1}{8}(\sigma_{\mu\nu}i\gamma_5)_{\beta\alpha}(\bar{u}\sigma^{\mu\nu}i\gamma_5 d) \end{aligned} \quad (5.62)$$

auf die jeweiligen Verteilungssamplituden projiziert. Für Diagramm (d) ergeben sich mit den in Abbildung 5.9 angegebenen Konventionen keine Probleme, die entsprechende Streuamplitude vor $\phi_{3\pi}^p(u)$ zu bestimmen, wobei die Spur über die Generatoren der $SU(3)$ bereits durch den Vorfaktor C_F berücksichtigt wird:

$$\begin{aligned} T_1^p(q^2, (p+q)^2, u) &= -i4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{(4-D)} m_b^2 \\ &\times \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{Tr} \{ \gamma_5 \gamma_\rho (u\not{p} - \not{k}) \gamma_\mu (u\not{p} + \not{q} - \not{k} + m) \gamma_5 (\not{k} + (1-u)\not{p}) \gamma^\rho \}}{k^2 (up - k)^2 (k + (1-u)p)^2 [(up + q - k)^2 - m_b^2]}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

In analoger Weise geschieht dies für $\varphi_\pi(u)$ nach Ersetzen der ersten γ_5 -Matrix durch $\not{p}\gamma_5$. Da stets zwei γ_5 auftreten, werden diese allgemein antikommutierend angenommen und miteinander kontrahiert. Die weitere Berechnung geschieht größtenteils via Computer-Algebra-Programmen. In dieser Arbeit wird *Mathematica* zur Berechnung der Spuren und der anschließenden Reduktion auf skalare Integrale verwendet. Letzteres ist trotz der teils recht kompliziert anmutenden Ausdrücke möglich, da

nur zwei unabhängige Impulse in den Propagatoren auftauchen und nur ein Propagator massebehaftet ist. Die so erhaltenen skalaren Integrale wurden explizit berechnet und die benutzten Ausdrücke sind im Anhang A angegeben. Für $\phi_{3\pi}^\sigma(u)$ ergibt sich noch eine Modifikation auf die kurz eingegangen werden soll. Die auftauchenden Ortsvektoren, siehe zum Beispiel E.1, bei $\phi_{3\pi}^\sigma(u)$ werden üblicherweise durch $x_\tau \rightarrow -i\frac{d}{d(up^\tau)}$ ersetzt. Danach ergibt sich für das schon für $\phi_{3\pi}^p$ betrachtete Diagramm (d) folgender Ausdruck:

$$T_1^\sigma(q^2, (p+q)^2, u) = -i4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{(4-D)} \frac{m_b^2}{6} \times \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} p_\alpha \frac{d}{d(up^\beta)} \frac{\text{Tr} \left\{ \sigma^{\alpha\beta} \gamma_5 \gamma_\rho (u\not{p} - \not{k}) \gamma_\mu (u\not{p} + \not{q} - \not{k} + m) \gamma_5 (\not{k} + (1-u)\not{p}) \gamma^\rho \right\}}{k^2 (up - k)^2 (k + (1-u)p)^2 [(up + q - k)^2 - m_b^2]}.$$
(5.64)

Mittels der in dimensionaler Regularisierung erhalten bleibenden Translationsinvarianz, die dafür sorgt, daß Integrale der Art

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d}{dk^\mu} f(k, p_1, \dots)$$
(5.65)

verschwinden und der Beobachtung, daß stets Kombinationen der Art $up - k$ auftauchen, lassen sich via partieller Integration die Anzahl der zu berechnenden Terme reduzieren:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} p_\alpha \frac{d}{d(up^\beta)} \frac{\text{Tr} \left\{ \sigma^{\alpha\beta} \gamma_\rho (u\not{p} - \not{k}) \gamma_\mu (u\not{p} + \not{q} - \not{k} + m) (\not{k} + (1-u)\not{p}) \gamma^\rho \right\}}{k^2 (up - k)^2 (k + (1-u)p)^2 [(up + q - k)^2 - m_b^2]} \\ &= - \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{p_\alpha}{k^2} \frac{d}{dk^\beta} \frac{\text{Tr} \left\{ \sigma^{\alpha\beta} \gamma_\rho (u\not{p} - \not{k}) \gamma_\mu (u\not{p} + \not{q} - \not{k} + m) (\not{k} + (1-u)\not{p}) \gamma^\rho \right\}}{(up - k)^2 (k + (1-u)p)^2 [(up + q - k)^2 - m_b^2]} \\ &= -2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} p_\alpha k_\beta \frac{\text{Tr} \left\{ \sigma^{\alpha\beta} \gamma_\rho (u\not{p} - \not{k}) \gamma_\mu (u\not{p} + \not{q} - \not{k} + m) (\not{k} + (1-u)\not{p}) \gamma^\rho \right\}}{(k^2)^2 (up - k)^2 (k + (1-u)p)^2 [(up + q - k)^2 - m_b^2]}. \end{aligned}$$
(5.66)

In ähnlicher Weise wird diese Modifikation auch in den Diagrammen (b) und (c) vorgenommen, doch wird dort nur eine Reduktion von drei auf zwei Ableitungen erzielt. Sind die Tensorintegrale auf skalare Integrale reduziert und diese schließlich berechnet, gilt es die Faktorisierung 5.61 soweit möglich zu beweisen. Für die Twist zwei Amplitude F_1 geschah dies bereits in [147]. Ein Blick auf die in der Korrelationsfunktion verwendeten Größen sowie deren Renormierungskonstanten

$$\begin{aligned} J_5 &\rightarrow Z_5 J_5, & J_\mu &\rightarrow Z_V J_\mu, & m_b &\rightarrow Z_m \hat{m}_b, & \mu_\pi &\rightarrow Z_m^{-1} \mu_\pi \\ Z_5 &= 1 + 3\Delta \frac{\alpha_s C_F}{4\pi}, & Z_V &= 1, & Z_m &= 1 - 3\Delta \frac{\alpha_s C_F}{4\pi}, \end{aligned}$$
(5.67)

zeigt, daß für F_1 , bzw. \tilde{F}_1 keine allgemeine Renormierung benötigt wird:

$$Z_5 Z_V Z_m = 1.$$
(5.68)

Anders liegt der Fall für F^T bei der die anomale Dimension des Tensorstromes $\gamma_T = \frac{\alpha_s C_F}{4\pi}$, siehe zum Beispiel [208, 209], benötigt wird. Da dies am weiteren Vorgehen nichts ändert, wird hier der Einfachheit halber der Fall F_1 betrachtet. In der Streuamplitude auftretende Ultraviolett(UV)- und Infrarot(IR)-Divergenzen müssen demnach wegen 5.68 allein durch Ersetzen der nackten via der renormierten Masse, respektive durch Renormierung der Verteilungsamplitude kompensiert werden. Im Twist zwei Fall zeigt sich dies sehr elegant. Mit den auch im Anhang verwendeten Bezeichnungen $r_1 = \frac{q^2}{m_b^2}$, $r_2 = \frac{(p+q)^2}{m_b^2}$, $\rho = r_1 + u(r_2 - r_1)$ sowie der üblichen Abkürzung $\Delta = \frac{2}{4-D} - \gamma_E + \ln(4\pi)$ ergeben sich die UV-bzw. IR-Divergenzen zu:

$$T_1^{UV}(r_2, r_1, u) = \frac{6\rho}{(1-\rho)^2} \Delta \quad (5.69)$$

$$T_1^{IR}(r_2, r_1, u) = -\Delta \frac{1}{2} \int_0^1 dw V(w, u) T_0(r_1, r_2, u). \quad (5.70)$$

Die IR-Divergenzen wurden bereits in die benötigte Form mit $V(w, u)$ dem in 3.28 angegebenen Evolutionskern gebracht. Diese werden folglich durch die Renormierung der Verteilungsamplitude kompensiert. Wird nun in der führenden Streuamplitude, 5.61 läßt sich in gleicher Weise für F_0 schreiben,

$$T_0(r_2, r_1, u) = \frac{1}{1-\rho}, \quad (5.71)$$

die nackte Masse durch die renormierte Masse ersetzt, ergibt sich genau $-T_1^{UV}$ als Korrektur, womit die Faktorisierung für die Twist zwei Amplitude zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s)$ gezeigt wäre. Ein nicht ganz so ansprechendes Bild ergibt sich im Twist drei Fall. Es ist keine zu 3.27 analoge Evolutionsgleichung bekannt, so daß keine Aussage zu allen Ordnungen der konformen Entwicklung getroffen werden kann. Stattdessen wird die Faktorisierung explizit nur für die skalenunabhängigen asymptotischen Verteilungsamplituden gezeigt. IR-Divergenzen müssen bei dieser Wahl vollständig durch die Renormierung von μ_π kompensiert werden. Das heißt, daß nach Renormierung von μ_π und m_b die verbleibenden divergenten Terme in der Faltung

$$\int_0^1 du \left(T_1^{p(DIV)}(r_2, r_1, u) \phi_{3\pi}^{p(as)}(u) + T_1^{\sigma(DIV)}(r_2, r_1, u) \phi_{3\pi}^{\sigma(as)}(u) \right) = 0 \quad (5.72)$$

null ergeben sollten. Trotz der höchst komplizierten Ausdrücke, die hier nur für F_1 angegeben werden, ist dies genau was geschieht und ist ein schwerwiegendes Indiz für die Richtigkeit der berechneten Ausdrücke. Ehe jedoch auf die divergenten Anteile eingegangen wird, sind noch einige Worte der Vorsicht angebracht. In 5.58 wird die Streuamplitude

$$T_0^\sigma((p+q)^2, q^2, u) = \frac{1}{m_b^2 - (up+q)^2} \left[2 + \frac{m_b^2 + q^2}{m_b^2 - (up+q)^2} \right] \quad (5.73)$$

angegeben. Es ist jedoch zu beachten, daß der erste Summand, vor dem Übergang $D \rightarrow 4$, $D-2$ lautet und daß demnach durch die Renormierung von m_b sowie μ_π ein

zusätzlicher endlicher Term hinzukommt, der in der Amplitude T_1^σ beachtet werden muß. Dies sei kurz demonstriert. Der Vorfaktor $f_\pi m_b \frac{\mu_\pi}{6}$ erfährt aufgrund von 5.67 keine Renormierung und wird daher weggelassen. Wird nun Z_m in 5.73 eingesetzt und bis zur ersten Ordnung in α_s entwickelt ergibt sich folgendes Bild:

$$\begin{aligned}
 T_0^{\sigma,R}((p+q)^2, q^2, u) &= T_0^\sigma((p+q)^2, q^2, u) + \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \frac{6\Delta m_b^2}{(m_b^2 - (up+q)^2)^2} \\
 &\times \left\{ (D-4) + 1 + 2 \frac{m_b^2 + q^2}{m_b^2 - (up+q)^2} \right\} \\
 &= T_0^\sigma((p+q)^2, q^2, u) + \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \frac{6}{(m_b^2 - (up+q)^2)^2} \\
 &\times \left\{ -2 + \Delta \left[1 + 2 \frac{m_b^2 + q^2}{m_b^2 - (up+q)^2} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.74}$$

Dabei ist deutlich der endliche Term in Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s)$ zu sehen, der zu T_1^σ beiträgt. Wie bereits erwähnt, werden die divergenten Anteile der Streuamplituden zu Twist drei für den Formfaktor $f_{B\pi}^+$ angegeben:

Für T_1^p :

$$\begin{aligned}
 T_1^{p,DIV}(r_2, r_1, \rho) &= -2\Delta \frac{(r_1 - \rho)(2\rho + 1)}{(r_1 - r_2)(\rho - 1)^2} \\
 &+ \frac{\Delta}{(r_1 - r_2)(r_1 - \rho)(r_2 - \rho)(\rho - 1)} \left[(r_1 - 5\rho + 4)(r_1 - \rho)(r_2 - \rho) \right. \\
 &+ 2(-2\rho + r_1(4\rho - 3) + 1)(r_2 - \rho) \log(1 - r_1) \\
 &- 2\{r_1(r_2 - 1) + (r_2 + 1)(\rho - 1)\}(r_1 - \rho) \log(1 - r_2) \\
 &+ 2\{(r_2 - 1)r_1^2 - (-4\rho^2 + \rho + r_2(4\rho - 2) + 1)r_1 \\
 &\left. + (2 - 3\rho)\rho - r_2(\rho^2 - 3\rho + 1)\} \log(1 - \rho) \right]
 \end{aligned} \tag{5.75}$$

Für T_1^σ :

$$\begin{aligned}
 T_1^{\sigma,DIV}(r_2, r_1, \rho) &= \frac{-\Delta}{6(\rho - r_1)(r_2 - \rho)(\rho - 1)^3 \rho} \\
 &\left\{ (r_1 - \rho)(-r_2 + r_1(-3\rho + (\rho + 1)(-5\rho^2 + 5r_2\rho + r_2) + 1) \right. \\
 &+ \rho(r_2((7 - 5\rho)\rho + 11) + \rho(\rho(5\rho - 8) - 9))) \left. \right\} \\
 &- \frac{\Delta}{6(\rho - 1)^2 \rho} \left[\frac{1}{(r_2 - \rho)^2} \left\{ 2(r_2 - 1)(r_1(r_2 - 2\rho + 1) \right. \right. \\
 &- (2r_2 - \rho + 1)(\rho - 1))\rho(\log(1 - r_2) - \log(1 - \rho)) \\
 &\left. \left. - (r_2 - \rho)(\rho - 1)[r_1(r_2 - 3\rho + 1) + \rho(-5r_2 + 3\rho - 3)] \right\} \right. \\
 &+ \frac{1}{(r_1 - \rho)^2} \left\{ (r_1 - \rho)(\rho r_1^2 + (7\rho^2 - 8\rho - 1)r_1 + (3 - 2\rho)\rho) \right. \\
 &\left. \left. - 2(r_1 - 1)\rho(r_1(4\rho - 5) + 1)(\log(1 - r_1) - \log(1 - \rho)) \right\} \right]
 \end{aligned} \tag{5.76}$$

Zu diesen werden die divergenten Anteile der Renormierung von m_b und μ_π , die in folgenden Termen resultieren,

$$\begin{aligned}\Delta T_1^{p,m\mu}(r_2, r_1, \rho) &= 6\Delta \frac{\rho - r_1}{(r_2 - r_1)(1 - \rho)} \\ \Delta T_1^{\sigma,m\mu}(r_2, r_1, \rho) &= \Delta \frac{1}{(1 - \rho)^2} \left[1 + 2 \frac{1 + r_1}{1 - \rho} \right]\end{aligned}\tag{5.77}$$

addiert. Das Integral in 5.72 mit den asymptotischen Verteilungsamplituden

$$\begin{aligned}\phi_{3\pi}^{p,as}(u) &= 1 \\ \phi_{3\pi}^{\sigma,as}(u) &= 6u(1 - u)\end{aligned}\tag{5.78}$$

verschwindet, wie oben bereits postuliert. Selbiger Test fällt für die Streuamplitude \tilde{T}_1 sowie für T_1^T nach zusätzlicher Renormierung des Tensorstromes ebenfalls positiv aus. Somit zeigt sich folgendes Bild für die Faktorisierung 5.61: Zu Twist zwei ist diese in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ sowie allen Ordnungen der konformen Entwicklung 3.49 etabliert. Zu Twist drei konnte sie nur zur führenden Ordnung der konformen Entwicklung auf Einschleifenniveau gezeigt werden. In der Erwartung, daß ein weiterführender Beweis möglich sein sollte, werden analog zu [44] in der numerischen Auswertung die ersten Terme in der Entwicklung der Twist drei Verteilungsamplituden beibehalten. Eine weitere in [44, 45] festgestellte Eigenschaft das Endpunktverhalten der Verteilungsamplituden betreffend konnte hier bestätigt werden. Nach Renormierung sind die erhaltenen Streuamplituden T_1 , \tilde{T}_1 , T_1^T , in Anhang F vollständig angegeben, endlich und wohldefiniert an den Endpunkten, unabhängig vom Verhalten der Verteilungsamplituden. Mit den so erhaltenen Termen der OPE, Zwei- und Dreiteilchenbeiträge bis Twist vier in Ordnung α_s^0 sowie Zweiteilchenbeiträge bis Twist drei in Ordnung α_s , werden im nächsten Abschnitt die Summenregeln für die Formfaktoren aufgestellt.

5.2.3 Summenregeln

Die Herleitung folgt den in Kapitel drei dargelegten und bereits im Abschnitt über B-Meson-Summenregeln angewendeten Bahnen. In der Korrelationsfunktion 5.56 wird ein Satz B-Meson-Zustände zwischen den Strömen eingesetzt und aus dem resultierenden Dispersionsintegral für alle drei angegebenen Amplituden mit den Definitionen 2.17, 2.19 der niedrigste Zustand separiert:

$$\begin{aligned}F(q^2, (p+q)^2) &= \frac{2m_B^2 f_B f_{B\pi}^+(q^2)}{m_B^2 - (p+q)^2} + \int_{s_0^h}^{\infty} ds \frac{\rho(s)}{s - (p+q)^2} \\ \tilde{F}(q^2, (p+q)^2) &= \frac{m_B^2 f_B [f_{B\pi}^+(q^2) + f_{B\pi}^-(q^2)]}{m_B^2 - (p+q)^2} + \int_{s_0^h}^{\infty} ds \frac{\tilde{\rho}(s)}{s - (p+q)^2} \\ F^T(q^2, (p+q)^2) &= \frac{2f_{B\pi}^T(q^2)}{(m_B + m_\pi)(m_B^2 - (p+q)^2)} + \int_{s_0^h}^{\infty} ds \frac{\rho^T(s)}{s - (p+q)^2}\end{aligned}\tag{5.79}$$

Der weitere Weg ist wohlbekannt. Die Dispersionsintegrale in 5.79 werden via Quark-Hadron-Dualität über das Ergebnis der OPE, welches zu physikalischen Impulsen analytisch fortgesetzt wird, angenähert und es wird eine Borel-Transformation in der Variable $(p+q)^2$ durchgeführt, auf diese Weise wieder zwei Parameter, s_0^B , respektive M^2 einführend. Die Lichtkegelsummenregeln für die Formfaktoren können dann mit $f_{B\pi}^\pm(q^2) = f_{B\pi}^+(q^2) + f_{B\pi}^-(q^2)$ auf die folgende Form gebracht werden:

$$f_{B\pi}^+(q^2) = \frac{e^{m_B^2/M^2}}{2m_B^2 f_B} \left[F_0(q^2, M^2, s_0^B) + \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} F_1(q^2, M^2, s_0^B) \right], \quad (5.80)$$

$$f_{B\pi}^\pm(q^2) = \frac{e^{m_B^2/M^2}}{m_B^2 f_B} \left[\tilde{F}_0(q^2, M^2, s_0^B) + \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \tilde{F}_1(q^2, M^2, s_0^B) \right], \quad (5.81)$$

$$f_{B\pi}^T(q^2) = \frac{(m_B + m_\pi) e^{m_B^2/M^2}}{2m_B^2 f_B} \left[F_0^T(q^2, M^2, s_0^B) + \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} F_1^T(q^2, M^2, s_0^B) \right], \quad (5.82)$$

Die Terme führender Ordnung werden aus 5.58, 5.59 und 5.60 gewonnen. Im Zweiteilchenfall genügt eine Substitution $u \rightarrow \frac{m_b^2 - q^2}{s - q^2}$ und so zwei Potenzen des Propagatorennenners vorkommen eine partielle Integration, um auf die benötigte Form des Dispersionsintegrals 3.87 zu kommen. Im Dreiteilchenfall wird erst noch ein schon bei den B-Mesonsummenregeln dargelegter Schritt benötigt. Es wird eine eins in der Form

$$\int_0^1 du \delta(u - \alpha_1 - \alpha_3 v) = 1$$

eingeführt, ehe nach einer Integration über α_3 dieselbe Substitution wie im Zweiteilchenfall durchgeführt werden kann. Mit derselben Nomenklatur wie in [46] nehmen die führenden Amplituden folgende Gestalt an:

$f_{B\pi}^+(q^2)$:

$$\begin{aligned} F_0(q^2, M^2, s_0^B) = m_b^2 f_\pi \int_{u_0}^1 du e^{-\frac{m_b^2 - q^2 u}{u M^2}} & \left\{ \frac{\varphi_\pi(u)}{u} \right. \\ & + \frac{\mu_\pi}{m_b} \left(\phi_{3\pi}^p(u) + \frac{1}{6} \left[\frac{2\phi_{3\pi}^\sigma(u)}{u} - \left(\frac{m_b^2 + q^2}{m_b^2 - q^2} \right) \frac{d\phi_{3\pi}^\sigma(u)}{du} \right] \right) - 2 \left(\frac{f_{3\pi}}{m_b f_\pi} \right) \frac{I_{3\pi}(u)}{u} \\ & \left. + \frac{1}{m_b^2 - q^2} \left(-\frac{m_b^2 u}{4(m_b^2 - q^2)} \frac{d^2 \phi_{4\pi}(u)}{du^2} + u \psi_{4\pi}(u) + \int_0^u dv \psi_{4\pi}(v) - I_{4\pi}(u) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.83)$$

$f_{B\pi}^+(q^2) + f_{B\pi}^-(q^2)$:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0(q^2, M^2, s_0^B) = m_b^2 f_\pi \int_{u_0}^1 du e^{-\frac{m_b^2 - q^2 u}{u M^2}} & \left\{ \frac{\mu_\pi}{m_b} \left(\frac{\phi_{3\pi}^p(u)}{u} + \frac{1}{6u} \frac{d\phi_{3\pi}^\sigma(u)}{du} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{m_b^2 - q^2} \psi_{4\pi}(u) \right\}, \end{aligned} \quad (5.84)$$

$f_{B\pi}^T(q^2)$:

$$F_0^T(q^2, M^2, s_0^B) = m_b f_\pi \int_{u_0}^1 du e^{-\frac{m_b^2 - q^2 \bar{u}}{u M^2}} \left\{ \frac{\varphi_\pi(u)}{u} - \frac{m_b \mu_\pi}{3(m_b^2 - q^2)} \frac{d\phi_{3\pi}^\sigma(u)}{du} \right. \\ \left. + \frac{1}{m_b^2 - q^2} \left(\frac{1}{4} \frac{d\phi_{4\pi}(u)}{du} - \frac{m_b^2 u}{2(m_b^2 - q^2)} \frac{d^2\phi_{4\pi}(u)}{du^2} - I_{4\pi}^T(u) \right) \right\}. \quad (5.85)$$

Mit den Abkürzungen $\bar{u} = 1 - u$, $u_0 = \frac{m_b^2 - q^2}{s_0^B - q^2}$ sowie den Dreiteilchenbeiträgen für $f_{B\pi}^+(q^2)$

$$I_{3\pi}(u) = \frac{d}{du} \left(\int_0^u d\alpha_1 \int_{(u-\alpha_1)/(1-\alpha_1)}^1 dv \Phi_{3\pi}(\alpha_i) \right) \Bigg|_{\substack{\alpha_2 = 1 - \alpha_1 - \alpha_3, \\ \alpha_3 = (u - \alpha_1)/v}}, \\ I_{4\pi}(u) = \frac{d}{du} \left(\int_0^u d\alpha_1 \int_{(u-\alpha_1)/(1-\alpha_1)}^1 \frac{dv}{v} \left[2\Psi_{4\pi}(\alpha_i) - \Phi_{4\pi}(\alpha_i) \right. \right. \\ \left. \left. + 2\tilde{\Psi}_{4\pi}(\alpha_i) - \tilde{\Phi}_{4\pi}(\alpha_i) \right] \right) \Bigg|_{\substack{\alpha_2 = 1 - \alpha_1 - \alpha_3, \\ \alpha_3 = (u - \alpha_1)/v}}, \quad (5.86)$$

und $f_{B\pi}^T(q^2)$

$$I_{4\pi}^T(u) = \frac{d}{du} \left(\int_0^u d\alpha_1 \int_{(u-\alpha_1)/(1-\alpha_1)}^1 \frac{dv}{v} \left[2\Psi_{4\pi}(\alpha_i) - (1 - 2v)\Phi_{4\pi}(\alpha_i) \right. \right. \\ \left. \left. + 2(1 - 2v)\tilde{\Psi}_{4\pi}(\alpha_i) - \tilde{\Phi}_{4\pi}(\alpha_i) \right] \right) \Bigg|_{\substack{\alpha_2 = 1 - \alpha_1 - \alpha_3, \\ \alpha_3 = (u - \alpha_1)/v}}. \quad (5.87)$$

Im Gegensatz zur Berechnung der B-Mesonsummenregeln wird hier die Darstellungsform mit Ableitungen der Verteilungssamplituden statt der dort verwendeten Oberflächenterme genutzt. Mit Hilfe einer bzw. zwei partiellen Integrationen lassen sich diese jedoch problemlos ineinander überführen. Für die α_s -Korrekturen gestaltet sich das weitere Vorgehen als schwieriger, da die Möglichkeit einer einfachen Substitution wie bei den führenden Beiträgen nicht gegeben ist. Stattdessen müssen die Imaginärteile der OPE-Ergebnisse zur Erlangung der Dispersionsrelation 3.87 explizit berechnet werden. Im Unterschied zu [44], wo die u -Integration durchgeführt, ehe der Imaginärteil bestimmt wurde, wird hier in Analogie zu [147] vorgegangen. Da die Verteilungssamplituden reell sind und die Streuamplituden wohldefiniert über

den Integrationsbereich, genügt es deren Imaginärteil, d. h. einen Ausdruck der Art

$$\begin{aligned}
 F_1(q^2, M^2, s_0^B) &= \frac{1}{\pi} \int_{m_b^2}^{s_0} ds e^{-s/M^2} \operatorname{Im}_s F_1(q^2, s) \\
 &= \frac{f_\pi}{\pi} \int_{m_b^2}^{s_0} ds e^{-s/M^2} \int_0^1 du \left\{ \operatorname{Im}_s T_1 \left(\frac{s}{m_b^2}, r_1, u \right) \varphi_\pi(u) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\mu_\pi}{m_b} \left[\operatorname{Im}_s T_1^p \left(\frac{s}{m_b^2}, r_1, u \right) \phi_{3\pi}^p(u) + \operatorname{Im}_s T_1^\sigma \left(\frac{s}{m_b^2}, r_1, u \right) \phi_{3\pi}^\sigma(u) \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{5.88}$$

zu bestimmen. In Anhang F finden sich sowohl die Streuamplituden wie die aus diesen berechneten Imaginärteile. In Anhang A 4 sämtliche zu diesem Zwecke hergeleitete Formeln mit besonderer Behandlung der schwierigen Fälle. Der Imaginärteil der Twist zwei Streuamplitude T_1 stimmt mit dem in [147] gefundenen überein. Auch die numerische Äquivalenz zu [148] konnte bestätigt werden. Als schwierig erwies sich der Vergleich mit den Ergebnissen in [44], da dort, wie bereits erwähnt, die Imaginärteile auf andere Art und Weise bestimmt wurden. Um dennoch mehr Vertrauen in die Korrektheit der Imaginärteile zu bekommen, wurde explizit die numerische Äquivalenz zwischen der Faltung von Streu- und Verteilungsamplitude sowie der entsprechenden Dispersionsrelation

$$\int_0^1 du T_1^{p,\sigma}(r_2, r_1, u) \phi_{3\pi}^{p,\sigma}(u) = \int_{m_b^2}^\infty \frac{ds}{s - m_b^2 r_2} \int_0^1 du \operatorname{Im}_s T_1^{p,\sigma} \left(\frac{s}{m_b^2}, r_1, u \right) \phi_{3\pi}^{p,\sigma}(u), \tag{5.89}$$

für $r_2 < 0$ geprüft. Wobei, da das Dispersionsintegral divergent ist, beide Seiten nach r_2 abgeleitet wurden. Zu beachten ist ferner, daß die Imaginärteile im Anhang mit der Substitution $u \rightarrow \frac{\rho - r_1}{r_2 - r_1}$ angegeben sind, was jedoch keine weiteren Schwierigkeiten ergeben sollte. Ein weiterer numerischer Test der Imaginärteile wurde durchgeführt. Anstelle die α_s -Korrekturen via 5.88 zu bestimmen, besteht eine Möglichkeit, die Methode in [44] noch einen Schritt weiter zu führen. Dort wurde die Faltung zwischen Streu- und Verteilungsamplitude berechnet und anschließend die analytische Fortsetzung durch Bestimmung des Imaginärteils vorgenommen. Dieser Zwischenschritt kann durch Beachtung der analytischen Eigenschaften der Streuamplitude eingespart werden. Zunächst kann, da sowohl ρ , s , wie auch oben bereits erwähnt die Verteilungsamplituden reell sind 5.88 auch folgendermaßen berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 &\int_{m_b^2}^{s_0^B} ds e^{-s/M^2} \int_0^1 du \operatorname{Im}_s T_1^{p,\sigma} \left(\frac{s}{m_b^2}, r_1, u \right) \phi_{3\pi}^{p,\sigma}(u) \\
 &= m_b^2 \operatorname{Im}_s \int_1^{s_0^B/m_b^2} dr_2 e^{-m_b^2 r_2/M^2} \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} d\rho T_1^{p,\sigma}(r_2, r_1, \rho) \phi_{3\pi}^{p,\sigma}(\rho)
 \end{aligned} \tag{5.90}$$

Die Feynman-Vorschrift, $1 - \rho \rightarrow 1 - \rho - i\epsilon$, die im Anhang nicht explizit angegeben ist, sorgt dafür, daß die Streuamplitude und somit auch das Produkt aus dieser und Verteilungsamplitude, eine analytische Funktion in der oberen Hälfte der komplexen ρ -Ebene ist. Somit kann der Integrationsweg, wie in Abbildung 5.10 dargestellt, verändert werden, um das ρ -Integral zu berechnen, ohne daß eine Singularität auf oder nahe des Integrationsweges läge. Die numerische Integration über s , bzw. r_2 liefert so einen Imaginärteil, der dem gesuchten Ergebnis entspricht. In

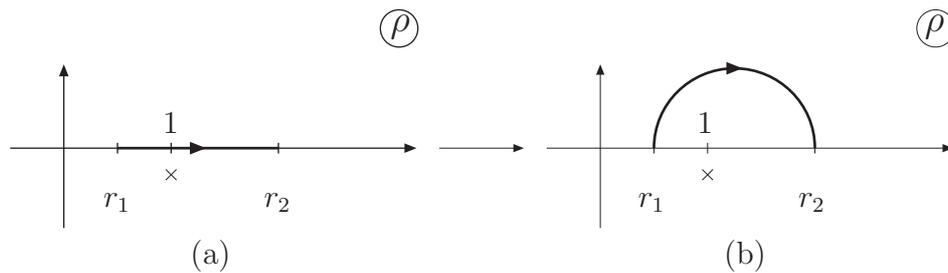


Abbildung 5.10: Veränderung der Integrationskontur für die ρ -Integration. Das Kreuz gibt den Pol für $\rho = 1 - i\epsilon$ an.

der numerischen Integration wird allerdings $\epsilon \rightarrow 0$ gesetzt, so daß die Integrationskontur für $s = m_b^2$ an dem kritischen Punkt $\rho = 1$ endet. Für logarithmische Divergenzen resultieren daraus keine Schwierigkeiten, da deren Imaginärteil, siehe A.58 bei $\rho = 1$, $r_2 = 1$ stetig ist. Bei einfachen Polen sorgt der Sprung um π dafür, daß zum Einen die numerische Integration schlecht konvergiert und daß zum Anderen der Imaginärteil wenn auch nur schwach davon abhängt, ob die untere Integrationsgrenze $s = m_b^2$ oder $s < m_b^2$ ist, was aufgrund der Analytizität von T_1 für $r_2 < 1$ an sich nicht sein sollte. Zwei Ausdrücke bereiten jedoch darüber hinaus Probleme: Für $T_1^p \sim \frac{1}{(1-\rho)^2}$ und für $T_1^\sigma \sim \frac{1}{(1-\rho)^3}$. Ein Blick auf A.66 zeigt, daß die Terme, die bei der herkömmlichen Bestimmung der Imaginärteile die Oberflächen-terme liefern, hier die numerische Integration verhindern. Mit einer eleganten Idee von Dr. Goran Duplanić lassen sich diese Probleme jedoch lösen. Für $r_2 < 1$ sind die Streuamplituden reell und analytisch, d.h. formal macht es bei der Bestimmung des Imaginärteils keinen Unterschied, ob von $s = m_b^2$ oder $s < m_b^2$ an integriert wird. Oben erwähnter Effekt hängt nur mit der numerischen Methode zusammen. Demnach kann $t < m_b^2$ als untere Integrationsgrenze gewählt werden und dann wie in Abbildung 5.11 gezeigt, der Integrationsweg der s -Integration ebenfalls in die obere komplexe Halbebene gelegt werden. Auf diese Weise wird die Nähe zu jeder Singularität vermieden und die numerische Integration wird vollkommen stabil. Beide Verfahren, die explizite Bestimmung der Imaginärteile der Streuamplituden mit anschließender Berechnung der Integrale 5.88 sowie die Konturintegration 5.90 liefern numerisch identische Ergebnisse. Ein starkes Indiz für die Korrektheit der im Anhang angegebenen Imaginärteile. Der nächste Abschnitt stellt die so erhaltenen numerischen Ergebnisse vor.

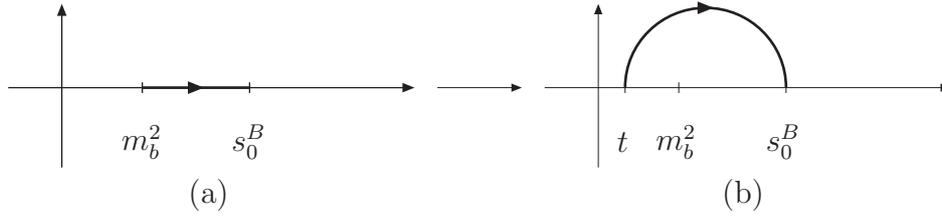


Abbildung 5.11: *Zusätzliche Veränderung des Integrationsweges der s -Integration. Siehe Text*

5.2.4 Numerik

In diesem Abschnitt werden die benötigten Eingabeparameter aufgelistet sowie die Methode zur numerischen Bestimmung der Formfaktoren vorgestellt. Dabei folgen die Ausführungen denen in [46], da der Author, wie Anfangs erwähnt, an der numerischen Auswertung nur am Rande beteiligt war. Ein erster wichtiger Punkt betrifft die Zerfallskonstante f_B . Für diese wird die entsprechende Summenregel in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Genauigkeit, siehe Anhang F, eingesetzt. Hintergrund ist hier nicht, daß dies eine besonders gute Näherung für f_B liefern sollte, sondern die begründete und im nachhinein bestätigte Annahme, daß sich im Verhältnis der Summenregeln ein Teil der Unsicherheiten in den α_s -Korrekturen gegenseitig aufhebe. Andererseits werden auf diesem Wege neben den Summenregelnparametern \overline{M} sowie \overline{s}_0^B zusätzlich Quark-Kondensate aus der lokalen OPE eingeführt, die festgelegt werden müssen.

Der weitere Abschnitt teilt sich grob in drei Teile. Im Ersten werden externe, von den konkreten Summenregeln unabhängige, Eingabegrößen besprochen, im Zweiten werden summenregelinhärente Parameter thematisiert, während im Dritten schließlich die eigentliche Auswertung der Summenregeln mitsamt Ergebnissen vorgestellt wird. Wie schon mehrfach erwähnt, ist einer der Unterschiede zur vorangegangenen Rechnung [44] die Verwendung der \overline{MS} -Masse, die in Einschleifennäherung in folgendem Zusammenhang zur Polmasse steht:

$$\overline{m}_b(\mu_m) = m_b \left[1 + \frac{C_F \alpha_s(\mu_m)}{4\pi} \left(3 \ln \frac{m_b^2}{\mu_m^2} - 4 \right) \right]. \quad (5.91)$$

Die \overline{MS} -Masse kann aus jüngster Summenregelrechnung in Vierschleifennäherung [210] übernommen werden. Der dort angegebene Wert lautet

$$\overline{m}_b(\overline{m}_b) = 4.164 \pm 0.025 \text{ GeV} \quad (5.92)$$

und zeigt eine deutlich geringere Unsicherheit als das in [27] veröffentlichte Resultat:

$$\overline{m}_b(\overline{m}_b) = 4.20 \pm 0.07 \text{ GeV}. \quad (5.93)$$

Die Skalenabhängigkeit von $\overline{m}_b(\mu_m)$ wird in Übereinstimmung mit der $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Genauigkeit der Korrelationsfunktion in Einschleifennäherung in die Rechnung miteinbezogen. Mit selbiger Genauigkeit wird $\alpha_s(\mu_r)$ mittels 1.59 aus $\alpha_s(m_Z) = 0.1176$

von m_Z zur Renormierungsskala μ_r evolviert. Sowohl Massen-, wie auch Renormierungsskala werden auf den Wert der Faktorisierungsskala μ_f in 3.106 festgelegt, so daß nur eine universelle Skala, die später noch besprochen wird, auftaucht:

$$\mu = \mu_f = \mu_r = \mu_m. \quad (5.94)$$

Die konforme Entwicklung der Verteilungssamplituden wird nach der nächstzunächstführenden Ordnung abgebrochen, da zunehmend größere anomale Dimensionen der entsprechenden lokalen Operatoren Terme höherer Ordnung für $\mu \geq 1$ GeV unterdrücken. Dies führt bei Berücksichtigung von Termen bis Twist vier zu sieben weiteren Eingabeparametern, die in Tabelle E.1 angegeben werden. Größten numerischen Einfluß haben die ersten zwei Gegenbauer-Momente $a_2^\pi(\mu)$, $a_4^\pi(\mu)$ sowie die Normierung der Twist drei Verteilungssamplituden $\mu_\pi(\mu)$, welche noch noch gesondert behandelt werden. Alle anderen Parameter werden aus [154] übernommen, wo sie über Zweipunktsummenregeln zu entsprechenden Matrixelementen berechnet werden. Deren große relative Unsicherheiten müssen mit ihrem kleinen absoluten Beitrag kontrastiert werden. Der numerisch kleine Wert von $f_{3\pi}(\mu)$ unterdrückt effektiv alle nichtasymptotischen- und Dreiteilchbeiträge zu Twist drei, so daß kaum ein Einfluß der jeweiligen Fehler zu erwarten ist. Bei den Twist vier Termen wurde bereits in der Berechnung der Korrelationsfunktion festgestellt, daß diese stets mit einem zusätzlichen Propagatorenner auftreten und somit nur eine kleine Korrektur darstellen.

Der Wert für die Normierung

$$\mu_\pi(\mu) = \frac{m_\pi^2}{m_u(\mu) + m_d(\mu)} \quad (5.95)$$

in Tabelle E.1 wird aus den in [27] angegebenen Mittelwerten für die leichten Quarkmassen $m_u(2 \text{ GeV}) = 3.0 \pm 1.0 \text{ MeV}$, $m_d(2 \text{ GeV}) = 6.0 \pm 1.5 \text{ MeV}$, deren Skalenverhalten sowie der Pionmasse $m_\pi = 139.57018 \pm 0.00035 \text{ MeV}$ gewonnen. Auf diesem Wege wird zudem über die Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation [211], siehe auch [212],

$$\langle \bar{q}q \rangle(1 \text{ GeV}) = -\frac{1}{2} f_\pi^2 \mu_\pi(1 \text{ GeV}) = -(246_{-19}^{+28} \text{ MeV})^3 \quad (5.96)$$

das in der Zweipunktsummenregel F.42 für f_B verwendete Intervall der Quarkkondensatdichte erhalten. Dieses impliziert eine größere Unsicherheit als jenes in vorhergehenden Analysen verwendete $\langle \bar{q}q \rangle(1 \text{ GeV}) = -(240 \pm 10 \text{ MeV})^3$ und liefert tatsächlich gemeinsam mit μ_π den Hauptanteil am schlußendlichen Fehler. Ein Vergleich mit anderen Ansätzen zeigt, daß dieses Intervall sowohl mit dem in [213] angegebenen Resultat $\langle \bar{q}q \rangle(1 \text{ GeV}) = -(254 \pm 8 \text{ MeV})^3$ wie auch mit der neuesten Summenregelberechnung der Massen der leichten Quarks zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$, $m_u(2 \text{ GeV}) = 2.7 \pm 0.4 \text{ MeV}$, $m_d(2 \text{ GeV}) = 4.8 \pm 0.5 \text{ MeV}$ [214] konsistent ist. Ebenfalls in F.42 werden die Gluonkondensatdichte $\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle = 0.012_{-0.012}^{+0.006} \text{ GeV}^4$ sowie das Verhältnis von Quark-Gluon- und Quarkkondensatdichte $m_0^2 = 0.8 \pm 0.2 \text{ GeV}^2$ benötigt. Mit dieser Auflistung sind sämtliche externen Größen, die in der Auswertung benötigt werden, und ihre Unsicherheiten festgelegt. Das Skalenverhalten aller

mit den Verteilungsamplituden verbundenen Größen wird in führender Ordnung mit-
einbezogen. Die teils sehr großen Fehler ließen die Betrachtung der nächstführenden
Ordnung in der Renormierung nicht opportun erscheinen.

Wie erwähnt werden die numerisch wichtigsten Gegenbauer-Momente a_2^π und a_4^π
noch weiter behandelt. Dies geschieht im Rahmen der Analyse der summenre-
gelinhärenten Parameter, welche die allgemeine Skala μ , die Borelparameter der
Lichtkegel- und Zweipunktsummenregel M , bzw. \bar{M} sowie die entsprechenden Dua-
litätsparameter s_0^B und \bar{s}_0^B umfassen. Zu diesem Zwecke werden im Folgenden alle
bisher gelisteten externen Größen mit Ausnahme der genannten Gegenbauer-
Momente auf ihre Zentralwerte gesetzt. Die ersten Einschränkungen werden aus der
numerischen Berechnung der kompletten Borel-transformierten Korrelationsfunktio-
n, d.h. aus dem Grenzwert $s_0^B \rightarrow \infty$ in den Gleichungen 5.83 und 5.88, gewon-
nen. In dieser sollen zum Ersten Terme von Twist vier nicht größer als 10% der
führenden Twist zwei Beiträge werden, um so die resultierende Unsicherheit aus der
Vernachlässigung höherer Twists zu reduzieren, und zum Zweiten soll die Entwick-
lung in α_s in dem Maße funktionieren, daß die Beiträge nächstführender Ordnung
sowohl in Twist zwei, wie in Twist drei kleiner als 30% der entsprechenden Ter-
me führender Ordnung bleiben. Aus der geforderten Unterdrückung der Twist vier
Terme folgt so $M^2 \geq M_{min}^2 = 7 \text{ GeV}^2$, wohingegen die α_s -Entwicklung eine untere
Schranke an die allgemeine Skala $\mu \geq \mu_{min} = 2.5 \text{ GeV}$ legt. Im Weiteren werden die
Parameter der Lichtkegelsummenregel eingeschränkt, indem 5.80 zu physikalischen
Meßgrößen in Verbindung gesetzt wird. Erster Schritt ist die Nutzung der Ergebnisse
aus [107, 109], um die berechnete q^2 -Abhängigkeit des Formfaktors gegen Bedingun-
gen für die Gegenbauer-Momente und den Dualitätsparameter einzutauschen. Wie
in Abbildung 2.8 gezeigt und im entsprechenden Kapitel erläutert, wurden in [109]
fünf verschiedene Parametrisierungen des Formfaktors an das experimentelle Spek-
trum aus [107] angepaßt. Aufgrund der hohen Qualität aller resultierender Fits wird
hier die einfachste Becirevic-Kaidalov-Zerlegung 2.56 genutzt, um via

$$\frac{f_{B\pi}^+(q^2)}{f_{B\pi}^+(0)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{q^2}{m_{B^*}^2}\right)\left(1 - \alpha_{BK} \frac{q^2}{m_{B^*}^2}\right)}, \quad (5.97)$$

mit $\alpha_{BK} = 0.53 \pm 0.06$, die experimentell bestimmte q^2 -Abhängigkeit des Form-
faktors mit der, der entsprechenden Summenregeln, in Verbindung zu bringen. Das
Verhältnis $\frac{f_{B\pi}^+(q^2)}{f_{B\pi}^+(0)}$ wird abweichend vom normalerweise akzeptierten Gültigkeitsbe-
reich $0 \leq q^2 \leq 15 \text{ GeV}^2$, nur bis $q^2 = 12 \text{ GeV}^2$ berechnet, um keinerlei Probleme
mit Abweichungen in der Nähe von $q^2 \sim q_{max}^2$ zu bekommen. Für jeden Wert der
Parameter $\mu \geq \mu_{min}$ und $M^2 \geq M_{min}^2$ werden die Werte für s_0^B , a_2^π sowie a_4^π be-
stimmt, die optimale Übereinstimmung zwischen theoretisch berechneter und aus
den Daten extrahierter q^2 -Abhängigkeit von $f_{B\pi}^+(q^2)$ gewähren. Im zweiten Schritt
wird aus dem einfachen Zusammenhang

$$\begin{aligned} m_B^2 &= \frac{d}{d\left(-\frac{1}{M^2}\right)} \ln \left[2m_B^2 f_B f_{B\pi}^+(q^2) e^{-\frac{m_B^2}{M^2}} \right] \\ &= \frac{d}{d\left(-\frac{1}{M^2}\right)} \ln \left[F_0(q^2, M^2, s_0^B) + \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} F_1(q^2, M^2, s_0^B) \right] \end{aligned} \quad (5.98)$$

eine Summenregel für die Masse des B-Mesons m_B gewonnen. Es wird gefordert, daß diese für oben gefundene Werte um weniger als 1% vom experimentellen Wert $m_B = 5.279$ GeV abweicht. Im letzten Schritt wird noch einmal die Korrelationsfunktion betrachtet. In dieser sollen die Kontinuumszustände, daß heißt das Integral von s_0^B bis ∞ , weniger als 30% des Wertes des Grundzustands beitragen. So wird eine obere Grenze für $M^2 \leq M_{max}^2 = 21$ GeV² erhalten. Eine generelle Auswertung der bisher genannten Bedingungen liefert dann einen recht eingeschränkten Parameterbereich. Lösungen lassen sich für Skala und Borel-Parameter im Bereich $\mu = 2.5 - 3.5$ GeV, bzw. $M^2 = 15 - 21$ GeV² mit entsprechenden Intervallen für Dualitätsparameter $s_0^B = 36.0 - 35.5$ GeV² sowie Gegenbauer-Momenten $a_2^\pi(1 \text{ GeV}) = 0.16 - 0.17$, $a_4^\pi(1 \text{ GeV}) = 0.04 - 0.03$ finden. In Abbildung 5.12 wird ein Eindruck von den resultierenden Ergebnissen vermittelt. Nun verbleiben noch die

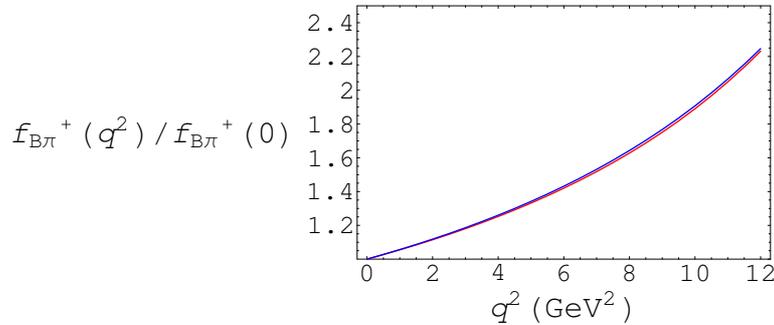


Abbildung 5.12: Dargestellt sind die Bečirević-Kaidalov-Parametrisierung der experimentellen Daten für $\alpha_{BK} = 0.53$ sowie die von dieser nicht zu unterscheidende Kurve für die besten Ergebnisse aus der im Text beschriebenen Prozedur.

Parameter der Zweipunktsummenregel für f_B . Es wird ähnlich wie bereits geschildert vorgegangen. Mit dem Intervall $2.5 \leq \mu \leq 3.5$ wird zuerst aus der Bedingung, daß höhere Terme in der OPE ausreichend unterdrückt werden, eine untere Grenze für den Borel-Parameter $\overline{M}^2 \geq 4$ GeV² aufgestellt. Dann wird der Dualitätsparameter wiederum mit einer Summenregel für m_B^2 , in dem Intervall $\overline{s}_0^B = 35.6_{+2.1}^{-0.9}$ GeV² fixiert und die obere Grenze des Borel-Parameters wie für die Lichtkegelsummenregeln über die Bedingung, daß Kontinuumszustände gegenüber dem Grundzustand unterdrückt sind, festgelegt. Es folgt ein Bereich $\overline{M}^2 = 5.0 \pm 1.0$ GeV². Die Zentralwerte geben trotz der vernachlässigten $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ -Terme ein realistisches Ergebnis für f_B

$$f_B = 214_{+5}^{-7} \text{ MeV}, \quad \mu = 3 \text{ GeV}, \quad \overline{M}^2 = 5.0 \text{ GeV}^2, \quad \overline{s}_0^B = 35.6 \text{ GeV}^2, \quad (5.99)$$

welches zum Beispiel mit den in Kapitel drei angegebenen Resultaten verglichen werden kann. Die eigentliche Begründung für die Verwendung der Zweipunktsummenregel zur Bestimmung von f_B ist jedoch, wie schon zu Beginn dargelegt, mit der

Annahme verbunden, daß sich α_s -Korrekturen in den beiden Summenregeln zumindest zum Teil aufheben. Diese Annahme findet sich in der numerischen Auswertung bestätigt. Es wird sowohl eine größere Stabilität bezüglich der Renormierungsskala μ , wie auch eine Verringerung der resultierenden α_s -Beiträge beobachtet und somit eine Rechtfertigung für den erhöhten Aufwand gegeben.

Eine vollständige Analyse unter Berücksichtigung aller genannter Bedingungen liefert dann die Vorhersage für den Formfaktor bei $q^2 = 0$:

$$f_{B\pi}^+(0) = 0.263 + \left[\begin{smallmatrix} +0.004 \\ -0.005 \end{smallmatrix} \right]_M + \left[\begin{smallmatrix} +0.009 \\ -0.004 \end{smallmatrix} \right]_\mu \pm [0.02]_{BK} + \left[\begin{smallmatrix} +0.03 \\ -0.02 \end{smallmatrix} \right]_{\mu\pi} \pm [0.001]_{m_b}. \quad (5.100)$$

Der Zentralwert ergibt sich aus den Zentralwerten der entsprechenden Eingabeparameter: $\mu = 3.0 \text{ GeV}$, $M^2 = 18.0 \text{ GeV}^2$, $s_0^B = 35.75 \text{ GeV}^2$, $a_2^\pi(1 \text{ GeV}) = 0.16$, $a_4^\pi(1 \text{ GeV}) = 0.04$, $\overline{M}^2 = 5.0 \text{ GeV}^2$ und $\overline{s}_0^B = 35.6 \text{ GeV}^2$. Die angegebenen Unsicherheiten schlüsseln sich wie folgt in oben angegebener Reihenfolge auf: Variation der Borel-Parameter $M^2 = 18.0 \pm 3.0 \text{ GeV}^2$ und $\overline{M}^2 = 5.0 \pm 1.0 \text{ GeV}^2$, der Skala $\mu = 3.0 \pm 0.5 \text{ GeV}$, des Parameters $\alpha_{BK} = 0.53 \pm 0.06$ aus 5.97, der Normierung der Twist drei Verteilungsamplituden $\mu_\pi = 1.74_{-0.38}^{+0.67} \text{ GeV}$ sowie der Masse des schweren Quarks $m_b = 4.164 \pm 0.025 \text{ GeV}$. Unsicherheiten aus den Parametern der nichtasymptotischen Twist drei, bzw. der Twist vier Verteilungsamplituden sowie aus der Bestimmung von α_s sind vernachlässigbar klein und werden daher nicht angeführt. Interessant ist jedoch, daß neben der experimentellen q^2 -Abhängigkeit die größte Unsicherheit aus der mangelnden Kenntnis der Massen der leichten Quarks eingehend durch μ_π folgt. Wohingegen der Fehler in der Masse des schweren Quarks praktisch keine Rolle spielt. Der Fehler in 5.100 wird in dieser Weise sicher nicht völlig korrekt wiedergegeben, da die Variation jedes einzelnen Parameters bei gleichzeitigem Festhalten aller anderen von unkorrelierten Unsicherheiten ausgeht. Der Aufwand, der zum Beispiel in Kapitel 5.1 betrieben wurde, um diesen Umstand zu berücksichtigen ist jedoch beträchtlich und erhöht sich noch durch die größere Komplexität der Summenregeln. In der Erwartung, daß sich die Unsicherheit durch eine aufwendigere Analyse unter Berücksichtigung eventueller Korrelationen noch reduzieren ließe, wird dies für eine zukünftige Auswertung zurückgestellt. Im Geiste oben vorgenommener Untersuchung liefert eine einfache quadratische Addition aller Unsicherheiten das endgültige Resultat:

$$f_{B\pi}^+(0) = 0.26_{-0.03}^{+0.04}. \quad (5.101)$$

Die numerische Stabilität der Summenregeln wird in Abbildung 5.13 für die Parameter M^2 und μ dargestellt. Es zeigt sich auch über die verwendeten Intervalle hinaus eine nur leichte Abhängigkeit, die den Summenregeln ausreichende Robustheit und Vertrauenswürdigkeit bescheinigen. Desweiteren wird in Abbildung 5.14 die Größe der α_s -Korrekturen visualisiert. Auch hier zeigt sich ein sehr vertrauensenerweckendes Bild, in welchem die nächstführenden Terme, wie ein Vergleich mit Abbildung 5.15 zeigt, über den gesamten betrachteten kinematischen Bereich in der Größenordnung von 10% bleiben. Vor diesem Hintergrund können die anderen Formfaktoren ohne weitere Eingabeparameter berechnet werden. Während wie schon nach Gleichung 2.6 erwähnt, $f_{B\pi}^0(0) = f_{B\pi}^+(0)$ ist, ergibt sich für den Pinguinformfaktor mit der

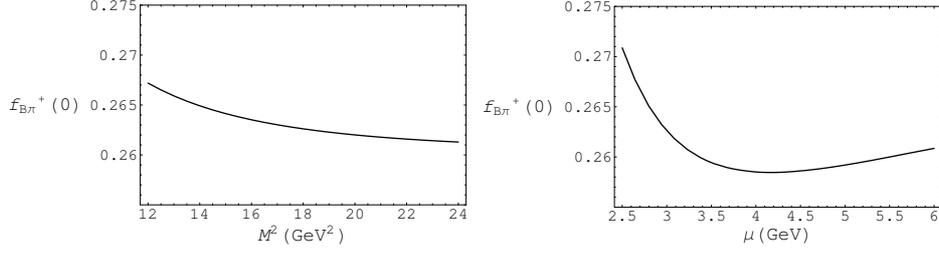


Abbildung 5.13: Abhängigkeit des Resultates 5.101 für $f_{B\pi}^+(0)$ vom Borel-Parameter (links) und der Renormierungsskala (rechts).

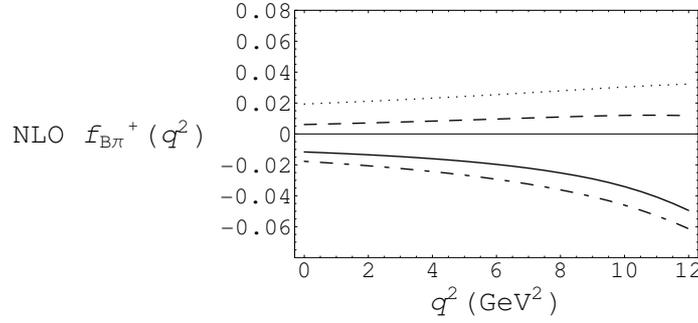


Abbildung 5.14: α_s -Korrekturen zur Lichtkegelsummenregel für $f_{B\pi}^+(q^2)$. Die gepunktete Kurve zeigt Twist zwei, die durchgezogene Twist drei Beiträge. Separat werden die Anteile von $\phi_{3\pi}^p$, gestrichelt sowie $\phi_{3\pi}^s$, punkt-strich, gezeigt.

Renormierungsskala μ des Tensorstromes das Resultat:

$$f_{B\pi}^T(0) = 0.255 \pm 0.035. \quad (5.102)$$

Vorhersagen für die q^2 -Abhängigkeit der Formfaktoren im betrachteten q^2 -Bereich finden sich in Abbildung 5.15.

Mit dem Resultat 2.68

$$|V_{ub}| f_{B\pi}^+(0) = (0.91 \pm [0.06]_{shape} \pm [0.03]_{BR}) \times 10^{-3},$$

aus [109] genügt die Bestimmung des Formfaktors $f_{B\pi}^+$ für verschwindenden Impulsübertrag $q^2 = 0$, um schlußendlich noch eine Vorhersage für das CKM-Matrixelement $|V_{ub}|$ zu treffen:

$$|V_{ub}| = (3.5 \pm [0.4]_{th} \pm [0.2]_{shape} \pm [0.1]_{BR}) \times 10^{-3}. \quad (5.103)$$

Die Unsicherheiten stammen wie in 2.69 aus der theoretischen Bestimmung des Formfaktors, aus der q^2 -Abhängigkeit des experimentellen Spektrums sowie aus dem

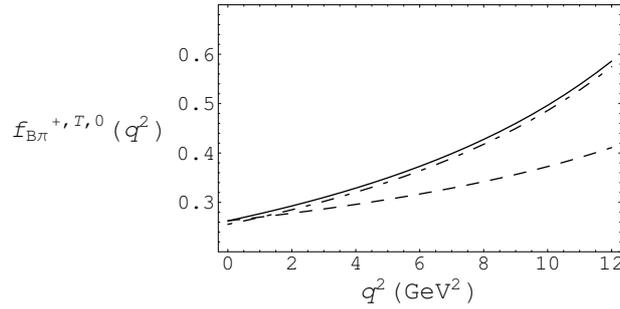


Abbildung 5.15: Die Vorhersagen für die Formfaktoren $f_{B\pi}^+(q^2)$, $f_{B\pi}^0(q^2)$ und $f_{B\pi}^T(q^2)$ aus Lichtkegelsummenregeln im Bereich $0 \leq q^2 \leq 12 \text{ GeV}^2$ für die Zentralwerte aller Eingabeparameter. Durchgezogene Kurve, $f_{B\pi}^+(q^2)$, gestrichelte Kurve, $f_{B\pi}^0(q^2)$, punkt-gestrichelte Kurve, $f_{B\pi}^T(q^2)$

gesamten Verzweigungsverhältnis [215], wobei letztere hier getrennt angeführt werden. Durch das Verfahren, die ersten Gegenbauer-Momente sowie den Dualitätsparameter der Lichtkegelsummenregeln für den Formfaktor $f_{B\pi}^+(0)$ über die experimentellen Daten festzulegen, folgt eine nicht berücksichtigte Korrelation zwischen den ersten beiden Unsicherheiten, die vermutlich zu einer Überschätzung des Gesamtfehlers führt. Wie jedoch bereits weiter oben erwähnt geht eine genauere numerische Analyse über den Rahmen dieser Arbeit hinaus und wird Teil einer zukünftigen Veröffentlichung werden. Ein Vergleich mit den in Kapitel zwei angegebenen Werten zeigt, daß bisherige Bestimmungen aus exklusiven Zerfällen nicht nur untereinander, sondern auch mit dem Wert, der aus einem Fit an das Unitaritätsdreieck folgt, konsistent sind. Mit den zu erwartenden Fortschritten auf experimenteller und insbesondere auf theoretischer Seite, wobei hier nur beispielhaft die bewegende nichtrelativistische Gitter-QCD genannt sei, die es in Zukunft ermöglichen sollte, den Formfaktor über den gesamten kinematischen Bereich zu bestimmen, wird die Hoffnung genährt, daß sich durch eine weitere Reduktion der Unsicherheiten in der exklusiven Bestimmung die Situation in Bezug auf $|V_{ub}|$ klären sollte. Abgerundet wird dieser Abschnitt durch eine Gegenüberstellung mit der vormaligen Berechnung der Twist drei α_s -Korrekturen, wobei kein direkter Vergleich der resultierenden Formeln möglich ist, da die Imaginärteile in 5.88 auf verschiedene Weisen bestimmt wurden. Die erste Berechnung ist bereits in [45] veröffentlicht. In [44] werden die Imaginärteile für $f_{B\pi}^+(q^2)$ angegeben, wobei kleinere Druckfehler deren Verwendung erschweren, und es wird eine gründliche numerische Auswertung für verschiedene Formfaktoren vorgenommen. Beide Berechnungen werden jedoch noch mit der Polmasse durchgeführt, welche weniger geeignet sein sollte, als die hier gewählte \overline{MS} -Masse. Um letzteren Punkt zu quantifizieren und um den Vergleich der hier gewonnenen Resultate mit denen in [44] zu ermöglichen, werden über den Zusammenhang 5.91 die Terme F.14 sowie F.17 berechnet, die es erlauben, von der \overline{MS} -Masse zur Polmasse überzugehen. Tabelle 5.5 zeigt einen Vergleich der Resultate in den verschiedenen

Schemen mit den jeweilig favorisierten Eingabeparametern sowie eine Aufschlüsselung der verschiedenen Beiträge. Als wichtige Bestätigung der beiden unabhängigen

	\overline{MS} -Masse, diese Arbeit	Polmasse, Parameterset II aus [44]
$f_{B\pi}^+(0)$	0.263	0.258
tw2 LO	50.5%	39.7%
tw2 NLO	7.4%	17.2 %
tw3 LO	46.7%	41.5 %
tw3 NLO	-4.4%	2.4 %
tw4 LO	-0.2%	-0.9%

Tabelle 5.5: Der Formfaktor $f_{B\pi}^+$ für verschwindenden Impulsübertrag, berechnet über Lichtkegelsummenregeln in verschiedenen Quarkmassenschemen. Aufgelistet sind die Terme verschiedenen Twists und ihre Beiträge in %.

gen Rechnungen ist zu sehen, daß mit den in [44] verwendeten Werten $m_b = 4.8$, $s_0^B = 33.9 \text{ GeV}^2$, $M^2 = 10.7 \text{ GeV}^2$, $\bar{s}_0^B = 34.2 \text{ GeV}^2$ sowie $\overline{M}^2 = 4.1 \text{ GeV}^2$ exakt der dort angegebene Wert $f_{B\pi}^+(0) = 0.258$ reproduziert wird. Deutlich tritt jedoch auch der Vorteil der in dieser Arbeit verwendeten \overline{MS} -Masse in Augenschein: Die α_s -Korrekturen insgesamt, insbesondere aber zum Twist zwei Beitrag sind erheblich geringer. Es tritt eine Art Umverteilung zugunsten der Terme führender Ordnung auf, die für ein signifikant günstigeres Verhalten der Störungsreihe spricht, ein Umstand auf den im Zusammenhang der Berechnung von f_B schon in [175] hingewiesen wurde.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Diskussion

Die in dieser Arbeit betrachteten B-Zerfallsformfaktoren spielen eine prominente Rolle bei der Extraktion von CKM-Matrixelementen aus experimentellen Daten. So genügt die Kenntnis des Formfaktors $f_{B\pi}^+(q^2)$, um $|V_{ub}|$ aus dem Zerfall $B \rightarrow \pi e \nu_e$ zu gewinnen oder die Kenntnis des Verhältnisses $\xi = \frac{T_1^{B \rightarrow K^*}(0)}{T_1^{B \rightarrow \rho}(0)}$, um aus den Verzweigungsverhältnissen $\frac{\mathcal{B}(B \rightarrow \rho \gamma)}{\mathcal{B}(B \rightarrow K^* \gamma)}$ das Verhältnis der CKM-Elemente $\left| \frac{V_{ts}}{V_{td}} \right|$ zu erhalten. $f_{B\pi}^+(q^2)$ kommt dabei eine besondere Rolle zu, da die Spannungen zwischen inklusiver und exklusiver Bestimmung von $|V_{ub}|$ bisher nicht vollständig bereinigt werden konnten. Jüngere Analysen des inklusiven Zerfalls [92, 98] brachten zwar eine Annäherung, siehe hierfür auch Kapitel 2.2, aber die Unterschiede in den Werten sind noch immer beträchtlich. Inklusive Zentralwerte streuen im Bereich $V_{ub}^{ink} = (3.7 - 4.8) \times 10^{-3}$ mit jeweiligen Unsicherheiten von 10 – 14%, wohingegen exklusive Resultate im Intervall $V_{ub}^{exk} = (3.2 - 3.8) \times 10^{-3}$ mit Fehlern von etwa $\sim 15\%$ liegen. Ein Fit an das Unitaritätsdreieck unter Annahme der Gültigkeit des Standardmodells favorisiert mit $V_{ub} = (3.55 \pm 0.15) \times 10^{-3}$ die exklusiven Werte. Um in diesem Feld einen Beitrag zu liefern, werden in dieser Arbeit zwei verschiedene Ansätze mit verschiedenen Intentionen verfolgt. Kapitel 5.1 führt die erstmals in [168] und [67] aufgebrachten Lichtkegelsummenregeln mit B-Meson-Verteilungsamplituden weiter. Neben dem Beweis der Lichtkegeldominanz sowie der vollständigen Berechnung der führenden Zweiteilchenbeiträge mit endlicher Masse des leichten Quarks für sieben verschiedene Formfaktoren, bildet die Berücksichtigung von höheren Fock-Zuständen eine wichtige Komponente. Zu diesem Zwecke wird im vierten Kapitel die in [42] veröffentlichte erste Analyse des asymptotischen Verhaltens der Dreiteilchenverteilungsamplituden des B-Mesons sowie, den Ergebnissen aus [43] folgend, deren Einfluß auf die entsprechenden Verteilungsamplituden mit zwei Valenzquarks vorgestellt. Die ersten Modelle werden erhalten und mit diesen eine gründliche numerische Auswertung durchgeführt. Schon auf diesem noch recht rudimentären Niveau zeigt sich eine sehr ermutigende Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus traditionellen Lichtkegelsummenregeln. Eindeutige Vorteile dieses neuen Ansatzes liegen in dem einfachen Zugriff auf viele verschiedene phänomenologisch relevante Größen durch simples verändern der Quantenzahlen der entsprechenden Ströme, wohingegen die Nachteile aus dem bereits

erwähnten verhältnismäßig gering entwickeltem Formalismus sowie dem unklaren theoretischen Status der B-Meson-Verteilungsamplituden folgen. Weitere Entwicklungen in diese Richtung sind wünschenswert und kürzlich wurde zum Einen die erste vollständige Analyse der α_s -Korrekturen zu den Zweiteilchenbeiträgen in Soft-Collinear-Effective-Theory(SCET) [216] sowie zum Anderen das lange unbekannte Renormierungsverhalten der Verteilungsamplitude $\phi_{\pm}^B(\omega)$ berechnet [217]. Eine Diskussion von $\phi_{\pm}^B(\omega)$ im Rahmen des Bakamjian-Thomas-Quark-Modells unter Berücksichtigung der dynamischen Masse des leichten Quarks findet sich in [218]. Um den Ansatz weiterzuführen, würde eine Möglichkeit ähnlich der traditionellen Herangehensweise benötigt, um die Abweichungen vom Lichtkegel zu parametrisieren. Ein Äquivalent zur Twist-Entwicklung, bzw. der Abschluß, der hier angefangenen Analyse der Dreiteilchenverteilungsamplituden sind notwendige Ingredienzien, um die noch schwer abschätzbaren Unsicherheiten unter Kontrolle zu bekommen und konkurrenzfähige Resultate zu erhalten.

Stellen die in Kapitel vier sowie 5.1 vorgestellten Ergebnisse erste Schritte für das Verständnis eines neuen Ansatzes dar, so wird in Kapitel 5.2 die bisherige Referenzrechnung [44, 45] zur Bestimmung der Formfaktoren $f_{B\pi}^+$, $f_{B\pi}^0$ sowie $f_{B\pi}^T$ im \overline{MS} -statt Polmassenschema erneut durchgeführt und überarbeitet. Besonderes Augenmerk galt hierbei der Berechnung der α_s -Korrekturen. Die bereits in [147] gezeigte Faktorisierung des Twist zwei Termes zur Ordnung α_s und allen Ordnungen in der konformen Entwicklung konnte ebenso bestätigt werden, wie die Faktorisierung zur Ordnung α_s und führenden Ordnung der konformen Entwicklung in den Twist drei Termen. Sowohl in den Streuamplituden, wie auch in den Imaginärteilen, die für die Twist drei Beiträge zu $f_{B\pi}^0$ sowie $f_{B\pi}^T$ erstmals in [46] veröffentlicht wurden, tauchen keinerlei Endpunktdivergenzen auf, unabhängig von der Form der Verteilungsamplituden. Obwohl die Imaginärteile aufgrund verschiedener Berechnungsmethoden und vermutlich einiger Druckfehler nicht direkt mit [44] verglichen werden konnten, wurde das numerische Ergebnis für $f_{B\pi}^+(0)$ mit den dort verwendeten Eingabeparametern bestätigt. Eine Aufschlüsselung der verschiedenen Beiträge zeigt auch den Vorteil der hier verwendeten \overline{MS} -Masse: Es findet eine Umverteilung zugunsten der Terme führender Ordnung statt, wodurch ein günstigeres Verhalten der α_s -Entwicklung erreicht wird. Die numerische Auswertung, durchgeführt von Dr. Goran Duplančić, Dr Alexander Khodjamirian sowie Dr. Blazenka Melić, liefert die zwei Hauptergebnisse dieses Abschnittes:

1. Den $B \rightarrow \pi$ -Vektorformfaktor $f_{B\pi}^+(0)$:

$$f_{B\pi}^+(0) = 0.26_{-0.03}^{+0.04}$$

2. Das CKM-Matrixelement $|V_{ub}|$:

$$|V_{ub}| = (3.5 \pm [0.4]_{th} \pm [0.2]_{shape} \pm [0.1]_{BR}) \times 10^{-3}$$

Beide in hervorragender Übereinstimmung sowohl mit älteren Berechnungen aus dem exklusiven semileptonischen $B \rightarrow \pi e \nu_e$ -Zerfall wie auch mit dem aus dem Unitaritätsdreieck gewonnenen Wert für $|V_{ub}|$. Durch eine gründliche Analyse der in Abschnitt 5.2.4 besprochenen Korrelationen ließen sich die Fehler noch weiter reduzieren, doch bleibt eine der Methode inhärente, irreduzible Unsicherheit. Auch

eine Berechnung der α_s -Korrekturen zu Twist vier- oder Dreiteilchenbeiträgen oder eine Berücksichtigung der Mischung zwischen Zwei- und Dreiteilchenverteilungsamplituden wird trotz des damit verbundenen erheblichen Aufwandes kaum eine Verbesserung des hier angegebenen Ergebnisses erbringen, da jeweils die führenden Terme schon sehr kleine Korrekturterme sind. Eine eventuell erfolgsversprechendere Möglichkeit bestünde darin, Terme von Twist fünf oder sechs in der Lichtkegelentwicklung mitzuberechnen, wobei hier Vierteilchenverteilungsamplituden mit ins Spiel kämen. Diese könnten mittels Faktorisierung angenähert werden, wodurch ein Quark-Antiquark-Paar durch das entsprechende Kondensat ersetzt würde. Zu erwarten ist jedoch, daß die nächsten Fortschritte aus einer Kombination von verbesserter Statistik, Zweischleifenanpassung sowie Erweiterung des zugänglichen q^2 -Bereiches in Gitter-QCD erzielt werden. Eine fortwährende Datennahme der B-Fabriken sowie einer eventuellen Super-B-Fabrik sollte gewährleisten, daß in den kommenden Jahren die exklusive Bestimmung von $|V_{ub}|$ zunächst die Genauigkeit der inklusiven übertreffen und schließlich den Hochpräzisionsbereich erreichen müßte.

Anhang A

Formelsammlung

In diesem Kapitel werden Formeln und Sätze gesammelt, die für die vorangehenden Berechnungen benötigt werden und die entweder in der Literatur nur schwer zu finden sind oder im Laufe der Arbeit hergeleitet wurden. Die Zweipunktintegrale passen in diesem Sinne nicht hierher, werden jedoch der Vollständigkeit wegen angegeben. Eine hervorragende Herleitung findet sich z.B. in [219]. In den darauffolgenden Abschnitten werden die infrarotdivergenten Drei- und Vierpunktintegrale behandelt. Für erstere wird die ϵ -Entwicklung explizit hergeleitet während letztere, genauer letzteres, da nur ein Vierpunktintegral in den hier durchgeführten Rechnungen auftaucht, mittels Partialbruchzerlegung reduziert wird. Im Abschnitt über komplexe Analysis werden Theoreme der Funktionentheorie, die über den Residuensatz und die Cauchysche Integralformel hinausgehen, wie z.B. das Schwarzsche Reflektionsprinzip und die Bestimmung von Diskontinuitäten mittels diesem angeführt. Einige Formeln bezüglich der $|_+$ -Distribution und schlußendlich eine Liste aller in Kapitel fünf benötigten Imaginärteile, inklusive der Herleitung eines nichttrivialen Falles, bilden den Abschluß und sollen dazu dienen diese Arbeit in sich konsistent zu machen. Dem Charakter des Kompendiums wird dabei der Vorzug vor der mathematischen Strenge gegeben. Für diese sei auf die entsprechende Fachliteratur verwiesen.

A.1 Einschleifenintegrale

Schleifenintegrale sind die Grundlage jedweder störungstheoretischen Berechnung von Quantenkorrekturen. Während Einschleifen-Zwei- und Dreipunktintegrale noch relativ einfach zu berechnen sind, siehe z.B. [219], wird es bei Vier- und Mehrpunktintegralen zunehmend kompliziert. Hier gab es in den letzten etwa 25 Jahren enorme Fortschritte. Angetrieben unter anderem durch die zunehmende Nutzung des Computers insbesondere bei der Entwicklung von Algorithmen zur Reduktion von skalaren- und Tensor-Mehrpunktintegralen [220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228], aber auch bei der Berechnung von asymptotischen bzw. divergenten Ausdrücken [229, 230]. Für detaillierte Diskussionen der Probleme sei auf die Literatur verwiesen, jedoch bereiteten verschwindende kinematische Determinanten, wie zum Beispiel die Gram-Determinante, die zu Divisionen durch null führten, lange Zeit Probleme in den Algorithmen[226, 227, 228]. Geschlossene Ausdrücke für Vierpunkt-

funktionen, die hier leider nicht verwendet werden konnten, wurden für infrarotendliche in [221, 231, 232], bzw. für infrarotdivergente mit masselosen internen Linien in [233] berechnet.

In diesem Kapitel werden die für die Rechnung in Kapitel 5.2 benötigten Schleifenintegrale angegeben, bzw. hergeleitet. Die Zweipunktintegrale werden nur aufgelistet, während die durchweg infrarotdivergenten Dreipunktintegrale mit zwei Sonderfällen im darauffolgenden Abschnitt hergeleitet werden. In der hier durchgeführten Arbeit taucht nur ein Vierpunktintegral auf und es zeigt sich, daß hier ein genauere Blick lohnt. Die Beispielrechnung demonstriert nicht nur das Funktionieren des Algorithmus [227], sondern auch, daß in diesem speziellen Fall die Rechnung erheblich vereinfacht werden kann.

A.1.1 Zweipunktintegrale

Alle hier angegebenen Zweipunktintegrale sind in $D = 4 - \epsilon$ -Dimensionen berechnet worden. In allgemeiner Form ist das Zweipunktintegral durch

$$B_0(p_1^2, m_0, m_1) = \frac{(2\pi\mu)^{(4-D)}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(k^2 - m_0^2 + i\epsilon)[(k + p_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon]}, \quad (\text{A.1})$$

gegeben. Die verschiedenen Sonderfälle lauten:

$$\begin{aligned} B_0(p_1^2, m_0, m_1) &= \Delta_{UV} - \int_0^1 dx \log \left[\frac{x^2 p_1^2 - x(p_1^2 - m_1^2 + m_0^2) + m_0^2 - i\epsilon}{\mu^2} \right], \\ B_0(p^2, 0, m) &= \Delta_{UV} - \log \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) + 2 + \frac{m^2 - p^2}{p^2} \log \left(\frac{m^2 - p^2 - i\epsilon}{m^2} \right), \\ B_0(p^2, 0, 0) &= \Delta_{UV} - \log \left(\frac{-p^2 - i\epsilon}{\mu^2} \right) + 2, \\ B_0(m^2, 0, m) &= \Delta_{UV} - \log \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) + 2 \\ B_0(0, m, m) &= \Delta_{UV} - \log \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right), \\ B_0(0, 0, m) &= \Delta_{UV} - \log \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) + 1. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

In allen Fällen steht Δ_{UV} für die Kombination $\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi$, mit γ_E der Euler-Mascheroni-Konstante und in allen Fällen sind Terme der Ordnung $O(\epsilon)$ weggelassen worden. Die Nomenklatur wurde aus [219] übernommen.

A.1.2 Dreipunktintegrale

Wurden im vorgehenden Abschnitt die Zweipunktintegrale nur aufgelistet, werden hier die benötigten Dreipunktintegrale auch hergeleitet. Dies ist im Einzelnen recht länglich, stellt jedoch im Gegensatz zu den im nächsten Abschnitt behandelten Vierpunktintegralen kein prinzipielles Problem dar. Mit zwei Ausnahmen lassen sich alle

benötigten Integrale auf eine allgemeine Form zurückführen:

$$T(p_1^2, p_2^2, m) = \frac{(2\pi\mu)^{(4-D)}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{k^2[(k-p_1)^2 - m^2](k-p_2)^2}. \quad (\text{A.3})$$

Die $-i\epsilon$ -Vorschrift wurde hier und wird im Weiteren der Übersichtlichkeit halber weggelassen. Allgemein gilt bei den betrachteten Integralen $p_2^2 = 0$. Dies führt zu Infrarotdivergenzen und demnach werden die Integrale wie im vorigen Abschnitt in dimensionaler Regularisierung behandelt. Im Unterschied zu dort jedoch in $D = 4 + \epsilon$ -Dimensionen. Ausgehend von A.3 wird das Integral mittels Feynman-Parametrisierung

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz [a(1-x-y) + bx + cy]^{-3} \quad (\text{A.4})$$

auf die Form

$$T(p_1^2, p_2^2, m) = C \int d^D k \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [k^2 - A]^{-3} \quad (\text{A.5})$$

mit $C = -2 \frac{(2\pi\mu)^{(4-D)}}{i\pi^2}$ und $A = x^2 p_1^2 + 2xyp_1 \cdot p_2 + x(m^2 - p_1^2)$ gebracht, so daß die k -Integration durch eine Wick-Rotation und den damit verbundenen Übergang zu Euklidischen Koordinaten, siehe z.B. [219], durchgeführt werden kann.

$$T(p_1^2, p_2^2, m) = -\frac{(2\pi\mu)^{(4-D)}}{\pi^2} \pi^{D/2} \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [x^2 p_1^2 + 2xyp_1 \cdot p_2 + (m^2 - p_1^2)]^{D/2-3} \quad (\text{A.6})$$

Nach der Integration über y und dem Übergang $D \rightarrow 4 + \epsilon$ wird eine Potenz von x aus den Klammern gezogen, so daß dort nur noch lineare Terme in x stehen:

$$T(p_1^2, p_2^2, m) = -\frac{(2\pi\mu)^{(-\epsilon)}}{2p_1 \cdot p_2} \frac{\pi^{\epsilon/2}}{\epsilon/2} \Gamma\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx x^{\epsilon/2-1} \left\{ [(m^2 - (1-x)(p_1 - p_2)^2)]^{\epsilon/2} - [(m^2 - (1-x)p_1^2)]^{\epsilon/2} \right\}. \quad (\text{A.7})$$

Nach einer partiellen Integration und Entwicklung in ϵ bis zur Ordnung $O(\epsilon^0)$ ergibt sich ein recht länglicher Ausdruck

$$\begin{aligned}
 T(p_1^2, p_2^2, m) = & -\frac{1}{2p_1 \cdot p_2} \left\{ [-\Delta_{IR} - \log(\mu^2)] \right. \\
 & \int_0^1 dx \left[\frac{(p_1 - p_2)^2}{m^2 - x(p_1 - p_2)^2} - \frac{p_1^2}{m^2 - xp_1^2} \right] \\
 & + \left[\int_0^1 dx \log(1 - x) \left\{ \frac{(p_1 - p_2)^2}{m^2 - x(p_1 - p_2)^2} - \frac{p_1^2}{m^2 - xp_1^2} \right\} \right. \\
 & + \int_0^1 dx \left\{ \frac{(p_1 - p_2)^2}{m^2 - x(p_1 - p_2)^2} \log(m^2 - x(p_1 - p_2)^2) \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{p_1^2}{m^2 - xp_1^2} \log(m^2 - p_1^2) \right\} \right] \right\}, \quad (\text{A.8})
 \end{aligned}$$

der nach Ausführung der Integrale durch die Funktionalgleichungen des Dilogarithmus und des Logarithmus sehr verkürzt werden kann:

$$\begin{aligned}
 T(p_1^2, p_2^2, m) = & \frac{1}{2p_1 \cdot p_2} \left\{ \left(\Delta_{IR} - \log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \right) \log\left(\frac{m^2 - p_1^2}{m^2 - (p_1 - p_2)^2}\right) \right. \\
 & + \log^2\left(\frac{m^2 - p_1^2}{m^2}\right) - \log^2\left(\frac{m^2 - (p_1 - p_2)^2}{m^2}\right) \\
 & \left. + \text{Li}_2\left(\frac{p_1^2}{m^2}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{(p_1 - p_2)^2}{m^2}\right) \right\} \quad (\text{A.9})
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck mit $\text{Li}_2(x) = -\int_0^x dt \frac{\log(1-t)}{t}$ der Spence-Funktion, bzw. dem Dilogarithmus, eignet sich für die hier verfolgten Zwecke gut zur Implementation in z.B. *Mathematica*, da durch die dimensionslosen Argumente der Logarithmen und Dilogarithmen und durch die vorgenommene Aufteilung bereits die vereinfachenden Substitutionen in Anhang C nahegelegt werden. Beachtet werden sollte jedoch, daß Δ_{IR} sich von Δ_{UV} im Vorzeichen des $\frac{2}{\epsilon}$ -Termes unterscheidet.

Zwei weitere Integrale werden in diesem Abschnitt behandelt, die obgleich sie drei Propagatorennenner besitzen, keine Dreipunktintegrale im eigentlichen Sinne sind. Der Grund hierfür ist der einfache, daß entweder ein massiver oder ein masseloser Propagator zur zweiten Potenz vorkommt. Diese beiden werden in folgender Weise klassifiziert:

$$\begin{aligned}
 T_i(p_1^2, m) &= \frac{(2\pi\mu)^{(4-D)}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{[(k - p_1)^2 - m^2]k^4}, \\
 T_m(p_1^2, m) &= \frac{(2\pi\mu)^{(4-D)}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{[(k - p_1)^2 - m^2]^2 k^2} \quad (\text{A.10})
 \end{aligned}$$

und lassen sich als Ableitungen von Zweipunktintegralen darstellen.

$$\begin{aligned}
 T_i(p_1^2, m) &= \frac{(2\pi\mu)^{(4-D)}}{i\pi^2} \frac{d}{d\lambda} \int \frac{d^D k}{[(k - p_1)^2 - m^2][k^2 - \lambda]} \Big|_{\lambda=0}, \\
 T_m(p_1^2, m) &= \frac{(2\pi\mu)^{(4-D)}}{i\pi^2} \frac{d}{dm^2} \int \frac{d^D k}{[(k - p_1)^2 - m^2]k^2}. \quad (\text{A.11})
 \end{aligned}$$

Bei letzterem kann, da es sowohl Infrarot- wie Ultraviolettendlich ist, demnach keine Entwicklung in ϵ nötig ist und somit auch die Reihenfolge von Entwicklung und Ableitung keine Rolle spielt, z.B. der Ausdruck in A.2 abgeleitet werden. Bei ersterem muß, da dieses Infrarotdivergent ist, die Ableitung vor der Entwicklung geschehen. Ebenso läßt es sich, wie oben für den allgemeineren Fall gezeigt, berechnen. Die Ergebnisse lauten:

$$\begin{aligned} T_l(p_1^2, m) &= \frac{1}{m^2 - p_1^2} \left[\Delta_{IR} - \log \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right] - \frac{m^2 + p_1^2}{p_1^2(m^2 - p_1^2)} \log \left(\frac{m^2 - p_1^2}{m^2} \right), \\ T_m(p_1^2, m) &= \frac{1}{p_1^2} \log \left(\frac{m^2 - p_1^2}{m^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

A.1.3 Vierpunktintegrale

Nach der kurzen Vorstellung eines Algorithmus zur Reduktion allgemeiner N-Punkt-Integrale [227] auf Masterintegrale wird in einer beispielhaften Anwendung auf einen konkret vorliegenden Fall dargelegt, daß dort der erste Schritt der Reduktion äquivalent einer einfachen Partialbruchzerlegung ist.

Ausgangspunkt ist ein allgemeines masseloses N -Punkt-Integral,

$$I_0^N(D; \{\nu_i\}) = (\nu^2)^{2-D/2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{A_1^{\nu_1} A_2^{\nu_2} \cdots A_N^{\nu_N}}, \quad (\text{A.13})$$

mit A_i den Propagatornennern $A_i = (k + r_i)^2 - i\epsilon$. Eine Verallgemeinerung auf den massiven Fall ist, wie auch in [233] angegeben, ohne Schwierigkeiten möglich und es werden an den Stellen, an denen Modifikationen notwendig sind, diese angegeben. Der Algorithmus basiert nun auf zwei schon früher hergeleiteten Relationen. Zum Einen wird die Translationsinvarianz dimensional regularisierter Integrale ausgenutzt, die bereits in [234] zur Methode der partiellen Integration von Feynman-Integralen genutzt wurde und besagt, daß das Integral über eine Ableitung nach dem Schleifenimpuls verschwindet:

$$0 = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left(\frac{z_0 k^\mu + \sum_{i=1}^N z_i r_i^\mu}{A_1^{\nu_1} A_2^{\nu_2} \cdots A_N^{\nu_N}} \right). \quad (\text{A.14})$$

z_i sind eingeführte Konstanten, deren Bedeutung im Weiteren Verlauf noch deutlich wird. Wird die Ableitung ausgeführt und werden die dadurch auftretenden Skalarprodukte als Linearkombination von Propagatornennern dargestellt, ergibt sich so eine erste Relation:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N [(r_j - r_i)^2 + 2i\epsilon] z_i \right) \nu_j I_0^N(D; \{\nu_k + \delta_{kj}\}) \\ &= \sum_{i,j=1}^N z_i \nu_j I_0^N(D; \{\nu_k + \delta_{kj} - \delta_{ki}\}) - (D - \sum_{j=1}^N \nu_j) z_0 I_0^N(D; \{\nu_k\}) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Zum Anderen wurde in [222] aus der Feynman-Parameterdarstellung von A.13

$$I_0^N(D; \{\nu_i\}) = \frac{i}{(4\pi)^2} (4\pi\mu^2)^{2-D/2} \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^N \nu_i - \frac{D}{2}\right)}{\prod_{i=1}^N \Gamma(\nu_i)} (-1)^{\sum_{i=1}^N \nu_i} \int_0^1 \left(\prod_{i=1}^N dy_i y_i^{\nu_i-1} \right) \delta\left(\sum_{i=1}^N y_i - 1\right) \left[-\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N y_i y_j (r_i - r_j)^2 - i\epsilon \right]^{D/2 - \sum_{i=1}^N \nu_i} \quad (\text{A.16})$$

eine Verbindung zwischen Feynman-Integralen verschiedener Raum-Zeit-Dimension hergeleitet:

$$-\sum_{j=1}^N \nu_j I_0^N(D; \{\nu_k + \delta_{kj}\}) = (4\pi\mu^2)^{-1} I_0^N(D-2; \{\nu_k\}). \quad (\text{A.17})$$

Um weiter fortzufahren wird verlangt, daß die Konstanten z_i ein lineares Gleichungssystem erfüllen

$$\sum_{i=1}^N (r_i - r_j)^2 z_i = C \quad \text{für } j = 1, \dots, N, \quad (\text{A.18})$$

welches sich ebenso in Matrixform, mit $r_{ij} = (r_i - r_j)^2$, darstellen läßt:

$$\begin{pmatrix} 0 & r_{12} & \cdots & r_{1N} \\ r_{12} & 0 & \cdots & r_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1N} & r_{2N} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ C \\ \vdots \\ C \end{pmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

Um die folgenden Schritte ebenso für den massiven Fall durchführen zu können, bedarf es nur einer kleinen Modifikation: In A.18 wie auch in A.15 muß r_{ij} durch $r_{ij} - m_i^2 - m_j^2$ ersetzt werden. Alle Relationen können dann ohne Probleme übernommen werden.

Mittels A.18 kann A.15 auf folgende Form gebracht, die $i\epsilon$ Vorchrift wird von hier an weggelassen,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N C \nu_j I_0^N(D; \{\nu_k + \delta_{kj}\}) \\ &= \sum_{i,j=1}^N z_i \nu_j I_0^N(D; \{\nu_k + \delta_{kj} - \delta_{ki}\}) - (D - \sum_{j=1}^N \nu_j) z_0 I_0^N(D; \{\nu_k\}) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

und mit A.17 zur grundlegenden Rekursionsrelation umgeformt werden:

$$\begin{aligned} C I_0^N(D-2; \{\nu_k\}) &= \sum_{i=1}^N z_i I_0^N(D-2; \{\nu_k - \delta_{ki}\}) \\ &+ (4\pi\mu^2)(D-1 - \sum_{j=1}^N \nu_j) z_0 I_0^N(D; \{\nu_k\}). \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Die weitere Vorgehensweise wird durch zwei Determinanten bestimmt. Die des Systems A.19 und die des um $\sum_{i=1}^N z_i = z_0$ erweiterten:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & r_{12} & \cdots & r_{1N} \\ 1 & r_{12} & 0 & \cdots & r_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & r_{1N} & r_{2N} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.22})$$

Im Folgenden werden diese analog zu [233] mit $\det(R_N)$ für A.19 und $\det(S_N)$ für A.22 bezeichnet. Es entstehen vier Fälle, je nachdem ob die Determinanten gleich oder ungleich null sind und für jeden der vier Fälle wird die Rekursion modifiziert. Insbesondere gilt für $\det(S_N) \neq 0$

$$C = -z_0 \frac{\det(R_N)}{\det(S_N)} \quad (\text{A.23})$$

Dieses Einbinden der kinematischen Determinanten hat den Vorteil, daß dieser Algorithmus nicht durch spezielle Impulsconfigurationen zum Zusammenbrechen gebracht wird. Die vier Fälle mit den entsprechenden Rekursionsformlen werden angeführt, wobei für eine vergleichende Diskussion mit anderen Algorithmen auf [233] verwiesen wird.

Fall 1: $\det(R_N) \neq 0$ und $\det(S_N) \neq 0$

Für diesen Fall ist $z_0 = 1$ die günstigste Wahl. Wie unschwer aus A.23 zu erkennen ist, ist $C \neq 0$ und aus A.21 folgt so:

$$I_0^N(D; \{\nu_i\}) = \frac{1}{4\pi\mu^2(D-1-\sum_{i=1}^N \nu_j)} \left[C I_0^N(D-2; \{\nu_k\}) - \sum_{i=1}^N z_i I_0^N(D-2; \{\nu_k - \delta_{ki}\}) \right] \quad (\text{A.24})$$

Dies ist jedoch nicht die einzige Möglichkeit. Werden in A.15 $z_i = \delta_{ik}$, mit $k = 1, \dots, N$ gewählt, wird ein lineares Gleichungssystem für $I_0^N(D; \{\nu_i + \delta_{ij}\})$ erhalten, welches dieselbe Determinante wie A.19 hat:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (r_k - r_j)^2 \nu_j I_0^N(D; \{\nu_i + \delta_{ij}\}) &= \sum_{j=1}^N \nu_j I_0^N(D; \{\nu_i + \delta_{ij} - \delta_{ik}\}) \\ &- (D - \sum_{j=1}^N \nu_j) I_0^N(D; \{\nu_i\}), \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Durch geschicktes Addieren und Subtrahieren von $\delta_{jk} I_0^N(D; \{\nu_i + \delta_{ij} - \delta_{ik}\})$ wird dies auf eine Form gebracht

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (r_k - r_j)^2 \nu_j I_0^N(D; \{\nu_i + \delta_{ij}\}) &= \sum_{j=1}^N (\nu_j - \delta_{jk}) I_0^N(D; \{\nu_i + \delta_{ij} - \delta_{ik}\}) \\ &- (D - 1 - \sum_{j=1}^N \nu_j) I_0^N(D; \{\nu_i\}), \quad k = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

in die A.17 eingesetzt werden kann:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (r_k - r_j)^2 \nu_j I_0^N(D; \{\nu_i + \delta_{ij}\}) &= -(4\pi\mu^2)^{-1} I_0^N(D - 2; \{\nu_i - \delta_{ik}\}) \\ &- (D - 1 - \sum_{j=1}^N \nu_j) I_0^N(D; \{\nu_i\}), \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Zur weiteren Steigerung der Effizienz des Verfahrens werden A.27 und A.24 kombiniert. Der letzte Term in A.27 wird durch die rechte Seite von A.24 ersetzt. So wird ein Gleichungssystem erhalten, in welchem sowohl die Dimension der Integrale wie auch die Potenzen der Propagatoren reduziert werden:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (r_k - r_j)^2 \nu_j I_0^N(D; \{\nu_i + \delta_{ij}\}) &= -(4\pi\mu^2)^{-1} \left[\sum_{j=1}^N (z_j - \delta_{jk}) I_0^N(D - 2; \{\nu_i - \delta_{ij}\}) \right. \\ &\left. - C I_0^N(D - 2; \{\nu_i\}) \right], \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

C und z_i sind hier Lösungen von A.22.

Fall 2: $\det(S_N) \neq 0, \det(R_N) = 0$

Dieser Fall ist ebenso wie der Nächste schnell behandelt. Aus A.23 folgt $C = 0$ und mit $z_0 = 1$ ergibt sich aus A.21:

$$I_0^N(D; \{\nu_k\}) = \frac{1}{4\pi\nu^2(D - 1 - \sum_{j=1}^N \nu_j)} \left[- \sum_{i=1}^N z_i I_0^N(D - 2; \{\nu_k - \delta_{ki}\}) \right]. \quad (\text{A.29})$$

Fall 3: $\det(S_N) = 0, \det(R_N) \neq 0$

Fall 3 tritt auf, wenn die erste Zeile von A.22 eine Linearkombination der übrigen Zeilen ist. Eine Lösung des resultierenden Systems ist nur dann möglich, wenn $z_0 = 0$ ist. C kann in diesem Falle frei gewählt werden und legt über A.19 die übrigen z_i fest. Mit $C = 1$ wird A.21 zu:

$$I_0^N(D; \{\nu_k\}) = \sum_{i=1}^N z_i I_0^N(D; \{\nu_k - \delta_{ki}\}). \quad (\text{A.30})$$

Für die Fälle 2 und 3 kann demnach bilanziert werden, daß sich das ursprüngliche skalare Integral als Linearkombination von Integralen mit geringerer Anzahl von Propagatoren und in Fall 2 mit geringerer Raum-Zeit-Dimension darstellen läßt. D.h. das Verschwinden der kinematischen Determinanten $\det(R_N)$, $\det(S_N)$ vereinfacht die Rekursion im Vergleich zum ersten Falle, in welchem kein solch einfacher Zusammenhang hergeleitet werden konnte.

Fall 4: $\det(S_N) = 0$, $\det(R_N) = 0$

Dieser Fall ist wieder ein wenig anspruchsvoller. Es ergeben sich je nach Kinematik zwei verschiedene Relationen. Um diese herzuleiten wird zuvorderst in A.22 die letzte, d.h. die $N + 1$ te, Zeile der Matrix von den Zeilen 2 bis N abgezogen. Das resultierende Gleichungssystem hat folgende Form:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -r_{1N} & r_{12} - r_{2N} & \cdots & r_{1N} \\ 0 & r_{12} - r_{1N} & -r_{2N} & \cdots & r_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & r_{1,N-1} - r_{1N} & r_{2,N-1} - r_{2N} & \cdots & r_{N-1,N} \\ 1 & r_{1N} & r_{2N} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N-1} \\ z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

Die ersten N Gleichungen bilden ein System in welchem C nicht vorkommt. Dieses kann nach den Konstanten z_i aufgelöst werden, wobei zu beachten ist, daß es aufgrund der verschwindenden Determinante nur für $z_0 = 0$ lösbar ist. Zudem wird aus demselben Grunde mindestens ein freier Parameter in der Lösung erscheinen. Diese in die $N + 1$ -Zeile eingesetzt,

$$\sum_{i=1}^N r_{iN} z_i = C, \quad (\text{A.32})$$

läßt sich ein freier Parameter durch Wahl von C fixieren. Aus kinematischen Gründen, z.B. durch lichtartige Impulse, kann die linke Seite explizit verschwinden, wodurch die Wahl $C = 0$ erzwungen wird. Aus den bisherigen Überlegungen ergeben sich nun zwei Möglichkeiten aus A.21. Zum Einen für $z_0 = 0$ und $C = 1$

$$I_0^N(D; \{\nu_k\}) = \sum_{i=1}^N z_i I_0^N(D; \{\nu_k - \delta_{ki}\}), \quad (\text{A.33})$$

und zum Anderen für $z_0 = 0$ und $C = 0$

$$0 = \sum_{i=1}^N z_i I_0^N(D; \{\nu_k - \delta_{ki}\}). \quad (\text{A.34})$$

Die erste Relation ist der im Fall 3 identisch, während es für die zweite noch eines Schrittes bedarf, um zu einer brauchbaren Rekursionsformel zu kommen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $z_1 \neq 0$ angenommen werden und damit folgende

Relation, die einer einfachen Partialbruchzerlegung sehr ähnlich sieht, erhalten werden:

$$z_1 I_0^N(D; \{\nu_k\}) = - \sum_{i=2}^N z_i I_0^N(D; \{\nu_k + \delta_{k1} - \delta_{ki}\}) \quad (\text{A.35})$$

Auch im vierten Fall wird durch das Verschwinden von $\det(R_N)$ und $\det(S_N)$ die Rekursion gegenüber Fall 1 vereinfacht. Aus A.33 folgt direkt, daß sich das N -Punkt-Integral als Linearkombination von $(N-1)$ -Punkt-Integralen darstellen läßt, während in A.35 zwar nicht die Anzahl der Propagatoren insgesamt, wohl aber die Anzahl der verschiedenen Propagatoren verringert wird und demnach ebenfalls eine Reduktion vom N - zum $(N-1)$ -Punkt-Integral stattfindet.

Beispielrechnung

Beispielhaft für das Funktionieren des Algorithmus wird in diesem Abschnitt ein Vierpunktintegral, welches in der Berechnung des Diagramms 5.9 auftaucht, auf Zweipunktintegrale reduziert und explizit angegeben. Der hier vorgestellte Fall gehört nicht zu den schwierigsten, stellt aber aufgrund des Verschwindens beider kinematischer Determinanten einige ältere Algorithmen vor Probleme. Ausgangspunkt der Rechnung ist ein Integral der Art:

$$I_0^4(D; 1, 1, 1, 1) = \frac{(2\pi\mu)^{(4-D)}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{k^2[(k-p_1)^2 - m^2](k-p_2)^2(k-p_3)^2}. \quad (\text{A.36})$$

Im hier betrachteten Fall sind $p_1 = up + q$, $p_2 = up$ und $p_3 = -(1-u)p$, wobei u eine reelle Zahl zwischen null und eins ist und alle Rechnungen im chiralen Grenzwert $p^2 = 0$ durchgeführt werden. Streng dem Algorithmus folgend entspräche dies Fall 4 und dort speziell der Möglichkeit $C = 0$, womit Relation A.35 Verwendung fände. Durch einen genaueren Blick auf das Integral läßt sich dieser Schritt jedoch noch weiter erhellen und die schon erwähnte Ähnlichkeit zur Partialbruchzerlegung am konkreten Falle belegen. Durch die besondere kinematische Situation, insbesondere $p^2 = 0$, gilt folgende Identität:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k-up)^2(k+(1-u)p)^2} &= \frac{A}{(k-up)^2} + \frac{B}{(k+(1-u)p)^2} \\ &= \frac{u}{k^2(k-up)^2} + \frac{1-u}{k^2(k+(1-u)p)^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Und diese einfache Zerlegung führt das Integral A.36 bereits auf zwei Dreipunktintegrale der Art

$$I_0^3(D; 2, 1, 1) = \frac{(2\pi\mu)^{(4-D)}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{k^2 k^2 [(k-p_1)^2 - m^2](k-p_2)^2} \quad (\text{A.38})$$

mit $p_2^2 = 0$ zurück. Eine Auflistung der Impulsdifferenzen

$$r_{12} = p_1^2 - m^2 \quad r_{13} = 0 \quad r_{23} = (p_1 - p_2)^2 - m^2$$

zeigt, daß Fall 2 $\det(R_N) = 0$, $\det(S_N) \neq 0$ entsprechend weiter vorgegangen werden muß. Die Lösung des Gleichungssystems A.22 mit $z_0 = 1$ und $C = 0$ liefert

$$z_1 = -\frac{(p_1 - p_2)^2 - m^2}{-2p_1 \cdot p_2} \quad z_2 = 0 \quad z_3 = \frac{p_1^2 - m^2}{-2p_1 \cdot p_2}$$

und führt mit A.29 auf

$$I_0^3(D; 2, 1, 1) = \frac{1}{4\pi\mu^2(D-1-4)} \left[-z_1 I_0^3(D-2; 1, 1, 1) - z_3 I_0^2(D-2; 2, 1, 0) \right]. \quad (\text{A.39})$$

Der erste Term führt nochmals auf dieselben Determinanten und demnach auf dieselben Gleichungssysteme. Daher kann nochmals A.39 mit offensichtlicher Modifikation verwendet werden. Beim zweiten Term handelt es sich aufgrund von $I_0^3(D-2; 2, 1, 0) = I_0^2(D-2; 2, 1, 0)$ bereits um ein Zweipunktintegral, welches nicht weiter reduziert werden kann. Nach der weiteren Behandlung des ersten Terms lautet das Ergebnis:

$$I_0^3(D; 2, 1, 1) = \frac{1}{4\pi\mu^2(D-5)} \left[-z_1 \frac{1}{4\pi\mu^2(D-6)} \left\{ -z_1 I_0^2(D-4; 0, 1, 1) - z_3 I_0^2(D-4; 1, 1, 0) \right\} - z_3 I_0^2(D-2; 2, 1, 0) \right]. \quad (\text{A.40})$$

Die Berechnung des ursprünglichen Vierpunktintegrals ist somit auf die Berechnung zweier Typen von Zweipunktintegralen zurückgeführt worden.

$$I_0^2(D-2; 2, 1) = \frac{(2\pi\mu)^{(6-D)}}{i\pi^2} \int \frac{d^{D-2}k}{k^2 k^2 ((k-p)^2 - m^2)},$$

$$I_0^2(D-4; 1, 1) = \frac{(2\pi\mu)^{(8-D)}}{i\pi^2} \int \frac{d^{D-4}k}{k^2 ((k-p)^2 - m^2)}. \quad (\text{A.41})$$

Mit $p = p_1$, $p_1 - p_2$. Beide bereiten keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, doch soll der aufwendigere Fall in $D-4$ -Dimensionen kurz beleuchtet werden. Nach dem Übergang $D \rightarrow 4 + \epsilon$ und Ausführung der k -Integration bleibt folgender Ausdruck:

$$I_0^2(D-4, 1, 1) = (2\pi\mu)^{(4-\epsilon)} \pi^{\frac{\epsilon}{2}-2} \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx x^{\frac{\epsilon}{2}-2} [m^2 - (1-x)p^2]^{\frac{\epsilon}{2}-2}. \quad (\text{A.42})$$

Hier läßt sich aufgrund der Divergenz für $x \rightarrow 0$ weder die Integration noch die Entwicklung für $\epsilon \rightarrow 0$ ausführen. Mittels Addition und Subtraktion des eingeklammerten Terms und seiner ersten Ableitung am Punkt $x = 0$ kann jedoch eine Aufteilung in ein endliches Integral und zwei Beta-Funktionen erreicht werden:

$$I_0^2(D-4, 1, 1) = (2\pi\mu)^{(4-\epsilon)} \pi^{\frac{\epsilon}{2}-2} \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \left[\int_0^1 dx x^{\frac{\epsilon}{2}-2} \left\{ [m^2 - (1-x)p^2]^{\frac{\epsilon}{2}-2} - [m^2 - p^2]^{\frac{\epsilon}{2}-2} - \left(\frac{\epsilon}{2} - 2\right) p^2 x [m^2 - p^2]^{\frac{\epsilon}{2}-3} \right\} + [m^2 - p^2]^{\frac{\epsilon}{2}-2} \left\{ B\left(\frac{\epsilon}{2} - 1, 1\right) + \left(\frac{\epsilon}{2} - 2\right) p^2 [m^2 - p^2] B\left(\frac{\epsilon}{2}, 1\right) \right\} \right]. \quad (\text{A.43})$$

Hernach stellt die Entwicklung in ϵ kein Problem mehr dar. Erleichtert wird die Rechnung zusätzlich dadurch, daß im Integral wegen des Vorfaktors nur die Ordnung $O(\epsilon^0)$ benötigt wird. Die Lösung kann dann in recht kompakter Form angegeben werden:

$$I_0^2(D-4, 1, 1) = 16\pi^2\mu^4 \frac{2p^2}{(m^2 - p^2)^3} \left[-\Delta_{IR} + \log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + 2\log\left(\frac{m^2 - p^2}{m^2}\right) - 2 + \frac{m^4 - p^4}{2m^2p^2} \right]. \quad (\text{A.44})$$

Mit dem Resultat des zweiten Zweipunktintegrals

$$I_0^2(D-2, 1, 1) = \frac{4\pi\mu^2}{(m^2 - p^2)^2} \left[\Delta_{IR} - \log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) - 2\log\left(\frac{m^2 - p^2}{m^2}\right) + 1 + \frac{p^2}{m^2} \right], \quad (\text{A.45})$$

welches sich beim Zusammenführen der beiden Dreipunktintegrale wieder heraushebt, und nach einigen algebraischen Vereinfachungen wird folgender überraschend kurzer Ausdruck für $p_2^2 = p_3^2 = p_2 \cdot p_3 = 0$ erhalten:

$$\begin{aligned} & \frac{(2\pi\mu)^{(4-D)}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{k^2[(k-p_1)^2 - m^2](k-p_2)^2(k-p_3)^2} \\ &= \frac{m^2}{[m^2 - p_1^2][m^2 - (p_1 - p_2)^2][m^2 - (p_1 - p_3)^2]} \left(-\Delta_{IR} + \log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + 1 \right) \\ &+ \frac{p_1^2}{2(p_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot p_3)[m^2 - p_1^2]} \log\left(\frac{m^2 - p_1^2}{m^2}\right) \\ &+ \frac{(p_1 - p_2)^2}{2(p_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot (p_2 - p_3))[m^2 - (p_1 - p_2)^2]} \log\left(\frac{m^2 - (p_1 - p_2)^2}{m^2}\right) \\ &- \frac{(p_1 - p_3)^2}{2(p_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot (p_2 - p_3))[m^2 - (p_1 - p_3)^2]} \log\left(\frac{m^2 - (p_1 - p_3)^2}{m^2}\right). \quad (\text{A.46}) \end{aligned}$$

A.2 Komplexe Analysis

Über die grundlegenden Sätze der Funktionentheorie hinaus werden in dieser Arbeit nur wenige Theoreme dieses vielfältigen Teilgebiets der Mathematik benötigt. Zu den Grundlagen der QCD-Summenregeln gehören jedoch sowohl das Konzept der analytischen Fortsetzung wie das Schwarzsche Reflektionsprinzip, so daß es sinnvoll erscheint diese hier anzuführen.

A.2.1 Analytische Fortsetzung

Die folgende kompakte Definition findet sich in ähnlicher Weise in [235] und wurde für diese Arbeit übernommen. Gegeben seien zwei holomorphe Funktionen $f : U \subseteq \mathbb{C}$ und $g : V \subseteq \mathbb{C}$ auf den Gebieten U, V mit $U \subset V$. Gilt

$$f = g \quad \text{auf } U, \quad (\text{A.47})$$

dann ist g durch f eindeutig bestimmt und heißt analytische Fortsetzung von f .

Beispiel:

Sei

$$f(z) := 1 + z + z^2 + \dots \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \quad \text{mit } |z| < 1$$

und

$$g(z) := \frac{1}{1-z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \quad \text{mit } z \neq 1,$$

dann ist g die analytische Fortsetzung von f auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

A.2.2 Schwarzsches Reflektionsprinzip

Sei I das offene Intervall $I =]-\infty, 0[$ sowie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige, differenzierbare Funktion. Für $G = \mathbb{C} \setminus [0, \infty]$, die komplexe Ebene ohne die positive reelle Achse und $g : G \rightarrow \mathbb{C}$, die analytische Fortsetzung von f auf G gilt:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im } g(s + i\epsilon) = \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{g(s + i\epsilon) - g(s - i\epsilon)\}. \quad (\text{A.48})$$

A.3 Lichtkegelvektoren

Die in dieser Arbeit desöfteren vorgenommene Lichtkegelentwicklung läßt es sinnvoll erscheinen, entsprechende Vektoren einzuführen, um den Umständen Rechnung zu tragen. Hierzu werden zwei lichtartige Vektoren n, \bar{n} eingeführt:

$$n^2 = \bar{n}^2 = 0, \quad n \cdot \bar{n} = 2. \quad (\text{A.49})$$

Auf diese Weise lassen sich Vektoren in Komponenten parallel und senkrecht zum Lichtkegel aufteilen:

$$A^\mu = \frac{1}{2} [(A \cdot \bar{n}) n^\mu + (A \cdot n) \bar{n}^\mu] + A_\perp^\mu. \quad (\text{A.50})$$

Produkte bzw. Quadrate von Vektoren ergeben sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \frac{1}{2} [(A \cdot \bar{n})(B \cdot n) + (A \cdot n)(B \cdot \bar{n})] - \vec{A}_\perp \cdot \vec{B}_\perp \\ A^2 &= (A \cdot n)(A \cdot \bar{n}) - \vec{A}_\perp^2 \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Zum Abschluß sei noch angemerkt, daß in einigen Veröffentlichungen, z.B in [49], ein zusätzlicher Normierungsfaktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ in die Definition von n, \bar{n} eingebracht wird, so daß diese auf eins normiert sind. Hier wird darauf verzichtet. Eventuelle Unterschiede sollten offenkundig sein.

A.4 Imaginärteile

Dieses Kapitel liefert eine vollständige Liste aller Imaginärteile, die für die Kalkulation in Kapitel 5 berechnet wurden. Die Imaginärteile werden für $r_2 > 1$ bzw. $\rho > 1$ mit $\rho = u(r_2 - r_1) + r_1$ angegeben. Zuvorderst werden die Anteile aufgelistet, für

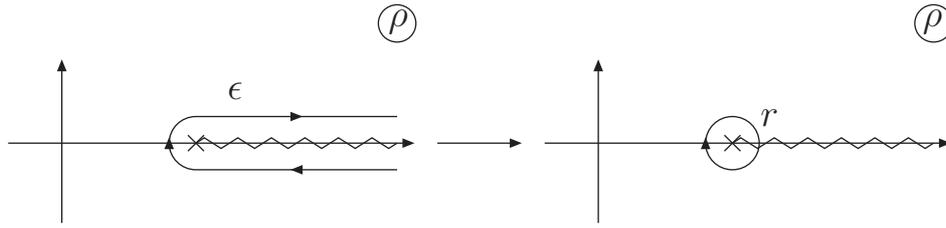


Abbildung A.1: Demonstration des negativen Umlaufsinn für die Berechnung des Residuums von $\frac{\log^2(1-\rho)}{1-\rho}$

die keine partielle Integration in den Amplituden vonnöten ist. Im darauffolgenden Abschnitt diejenigen, bei denen partiell integriert werden muß. Hier werden auch die resultierenden Oberflächenterme diskutiert. Allgemein gilt, mit einer Ausnahme, daß die Imaginärteile mit Hilfe folgender Definitionen berechnet wurden:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im}_x f(x) &= \frac{1}{2i} (f(x + i\epsilon) - f(x - i\epsilon)) \\
 \operatorname{Re}_x f(x) &= \frac{1}{2} (f(x + i\epsilon) + f(x - i\epsilon)) \\
 \operatorname{Im}_x [f(x) g(x)] &= \operatorname{Im}_x f(x) \operatorname{Re}_x g(x) + \operatorname{Im}_x g(x) \operatorname{Re}_x f(x) \\
 \operatorname{Re}_x [f(x) g(x)] &= \operatorname{Re}_x f(x) \operatorname{Re}_x g(x) - \operatorname{Im}_x g(x) \operatorname{Im}_x f(x)
 \end{aligned} \tag{A.52}$$

A.4.1 Imaginärteile ohne partielle Integration

In diesem Abschnitt wird eine weitere Aufteilung vorgenommen. Es werden erst die Teile angegeben, in denen nur ρ oder nur r_2 eine Rolle spielt, dann die, in denen beide Variablen vorkommen.

Nur ρ :

$$\operatorname{Im} \frac{1}{1-\rho} = \pi \delta(\rho - 1) \tag{A.53}$$

$$\operatorname{Im} \log(1-\rho) = -\pi \Theta(\rho - 1) \tag{A.54}$$

$$\operatorname{Im} \operatorname{Li}_2(\rho) = \pi \log(\rho) \Theta(\rho - 1) \tag{A.55}$$

$$\operatorname{Im} \frac{\log(1-\rho)}{1-\rho} = -\pi \left(\frac{\Theta(\rho - 1)}{1-\rho} \Big|_+ - \delta(\rho - 1) \log(r_2 - 1) \right) \tag{A.56}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im} \frac{\operatorname{Li}_2(\rho)}{1-\rho} &= \pi \left(\log(\rho) \frac{\Theta(\rho - 1)}{1-\rho} \Big|_+ \right. \\
 &\quad \left. + \delta(\rho - 1) \left[\frac{\pi^2}{6} + \log(r_2 - 1) \right] \right)
 \end{aligned} \tag{A.57}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im} \frac{\log^2(1-\rho)}{1-\rho} &= \pi \left(-2 \frac{\log(\rho - 1) \Theta(\rho - 1)}{1-\rho} \Big|_+ \right. \\
 &\quad \left. + \delta(\rho - 1) \left[\log^2(r_2 - 1) - \frac{\pi^2}{3} \right] \right)
 \end{aligned} \tag{A.58}$$

ρ und r_2 :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \frac{\log(1 - r_2)}{1 - \rho} &= -\pi \left(\frac{\Theta(1 - \rho)}{1 - \rho} \Big|_+ - \frac{\Theta(\rho - 1)}{1 - \rho} \Big|_+ \right) \\ &+ \pi \delta(\rho - 1) (2 \log(r_2 - 1) - \log(1 - r_1)) \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \frac{\operatorname{Li}_2(r_2)}{1 - \rho} &= \pi \left(\frac{\Theta(1 - \rho)}{1 - \rho} + \frac{\Theta(\rho - 1)}{1 - \rho} \right) \\ &+ \pi \delta(\rho - 1) \left(\frac{\pi^2}{6} - \operatorname{Li}_2(1 - r_2) \right. \\ &\left. - \log(r_2) (2 \log(r_2 - 1) - \log(1 - r_1)) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \frac{\log^2(1 - r_2)}{1 - \rho} &= -2\pi \log(r_2 - 1) \left(\frac{\Theta(1 - \rho)}{1 - \rho} + \frac{\Theta(\rho - 1)}{1 - \rho} \right) \\ &+ \pi \delta(\rho - 1) (\log(r_2 - 1) (3 \log(r_2 - 1) - 2 \log(1 - r_1)) \\ &- \pi^2) \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Die Berechnung des Imaginärteiles von $\frac{\log^2(1 - \rho)}{1 - \rho}$ bedarf einer gesonderten Betrachtung. Die naive Berechnung via A.52 führt zu einem falschen Faktor vor π^2 , da in dieser der Grenzwert für $\rho \rightarrow 1$ nicht richtig behandelt wird.

Dieser Grenzwert erfordert die Berechnung des Residuums bei $\rho = 1$, d.h. die Berechnung eines Integrals über einen geschlossenen Kreis um diesen Punkt. Der Radius r des Kreises wird gegen null geschickt, um nur den Beitrag des Residuums zu erhalten. Dabei ist zu beachten, daß der Weg in Abbildung 3.12 und Abbildung A.1 im mathematisch negativen Sinne durchlaufen wird und somit streng genommen nicht das Residuum, sondern dessen Negatives benötigt wird. Zur leichteren Berechnung wird zuerst ρ um eins verschoben (siehe Abbildung A.2), so daß der Kreis um $\rho = 0$ gezogen wird:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint d\rho \frac{\log^2(1 - \rho)}{1 - \rho} = -\frac{1}{2\pi i} \oint d\rho \frac{\log^2(-\rho)}{\rho}. \quad (\text{A.62})$$

Die Standardsubstitution $\rho = r e^{-i\phi}$ erlaubt es das Konturintegral in ein Integral über den Winkel ϕ umzuwandeln:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \log(-r e^{-i\phi}) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi (\log(r) - i(\phi - \pi))^2. \quad (\text{A.63})$$

Das Residuum, das dem negativen Imaginärteil der Funktion (geteilt durch π) bei $\rho = 1$ entspricht, ergibt nun für $r \rightarrow 0$ den gesuchten Anteil:

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{\log^2(1 - \rho)}{1 - \rho} \Big|_{\rho=1} = \lim_{r \rightarrow 0} \log^2(r) - \frac{\pi^2}{3}. \quad (\text{A.64})$$

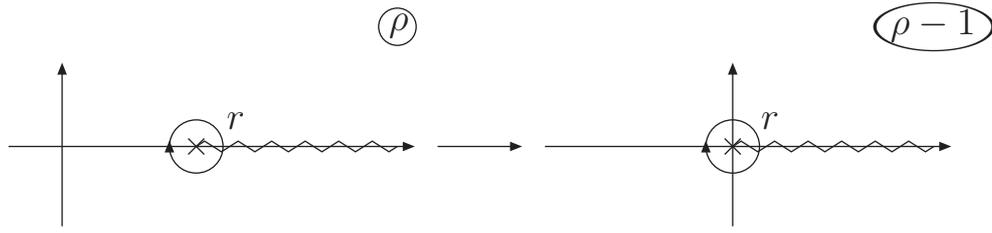


Abbildung A.2: Verschiebung der Integrationskontur zur Berechnung des Residuums um $\rho = 1$.

Mit dem Ergebnis für $\rho > 1$,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{\log^2(1-\rho)}{1-\rho} \Big|_{\rho>1} &= -2 \frac{\log(\rho-1)}{1-\rho} \Theta(\rho-1) \\
 &\stackrel{\text{A.67}}{=} -2 \frac{\log(\rho-1) \Theta(\rho-1)}{1-\rho} \Big|_+ \\
 &\quad - \delta(\rho-1) \left(\lim_{r \rightarrow 0} \log^2(r) - \log^2(r_2-1) \right), \text{(A.65)}
 \end{aligned}$$

wird dies zu dem in A.58 angegebenen Resultat:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im} \frac{\log^2(1-\rho)}{1-\rho} &= \pi \left(-2 \frac{\log(\rho-1) \Theta(\rho-1)}{1-\rho} \Big|_+ \right. \\
 &\quad \left. + \delta(\rho-1) \left[\log^2(r_2-1) - \frac{\pi^2}{3} \right] \right).
 \end{aligned}$$

A.4.2 Imaginärteile mit partieller Integration

Hier werden Imaginärteile durch partielle Integration, die entsprechende Verteilungsamplitude wird immer dabeistehend angenommen, auf die des vorigen Abschnitts zurückgeführt. Vorsicht ist bei den Oberflächentermen geboten. Während die Oberflächenterme einer partiellen Integration bei $\phi_{3\pi}^\sigma$ verschwinden, ist dies bei $\phi_{3\pi}^p$ sowie bei zwei partiellen Integrationen bei $\phi_{3\pi}^\sigma$ nicht der Fall. Dies sind jedoch stets Terme derselben Struktur, die beim Übergang von der MS-Masse zur Polmasse verschwinden:

$$\begin{aligned}
 \phi_{3\pi}^p &: \sim \left(4 - 3 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu} \right) \right) \frac{1}{(1-\rho)^2}, \\
 \phi_{3\pi}^\sigma &: \sim \left(4 - 3 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu} \right) \right) \frac{1}{(1-\rho)^3}.
 \end{aligned}$$

Bei $\phi_{3\pi}^p$ taucht nur der erste Term dieser Liste auf, während die Anderen nur bei $\phi_{3\pi}^\sigma$ benötigt werden.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \frac{1}{(1-\rho)^2} &= -\operatorname{Im} \frac{1}{1-\rho} \frac{d}{d\rho} + \left(\delta(r_2 - 1) \operatorname{Im} \frac{1}{1-\rho} \right)^{(*)} \\
\operatorname{Im} \frac{1}{(1-\rho)^3} &= \operatorname{Im} \frac{1}{1-\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} - \left(\delta(r_2 - 1) \operatorname{Im} \frac{1}{1-\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^{(**)} \\
\operatorname{Im} \frac{\log(1-\rho)}{(1-\rho)^2} &= -\operatorname{Im} \frac{\log(1-\rho) + 1}{1-\rho} \frac{d}{d\rho} \\
\operatorname{Im} \frac{\operatorname{Li}_2(\rho)}{(1-\rho)^2} &= \operatorname{Im} \frac{\log(1-\rho)}{\rho(1-\rho)} - \operatorname{Im} \frac{\operatorname{Li}_2(\rho)}{1-\rho} \frac{d}{d\rho} \\
\operatorname{Im} \frac{\log^2(1-\rho)}{(1-\rho)^2} &= -\operatorname{Im} \frac{\log^2(1-\rho) + 2(\log(1-\rho) + 1)}{1-\rho} \frac{d}{d\rho} \quad (\text{A.66})
\end{aligned}$$

(*), (**): Oberflächenterme, die nur bei $\phi_{3\pi}^p$ respektive $\phi_{3\pi}^\sigma$ auftauchen.

A.5 Distributionen

Neben der klassischen δ -Distribution, deren Definition zum Beispiel in [235] nachgelesen werden kann, wird in dieser Arbeit vorwiegend die nachfolgend beschriebene $|_+$ -Distribution verwendet.

A.5.1 $|_+$ -Distribution

Bei der Berechnung einiger Imaginärteile, z.B.

$$\operatorname{Im}_\rho \frac{\log(1-\rho)}{1-\rho} = -\pi \left(\frac{\Theta(\rho-1)}{1-\rho} - \delta(\rho-1) \log(\rho-1) \right)$$

tauchen unechte Divergenzen für $\rho \rightarrow 1$ auf, die für den weiteren Verlauf behandelt werden müssen. Dies geschieht via $|_+$ -Distribution, deren Definition

$$\int_{r_1}^{r_2} d\rho \frac{f(\rho)}{1-\rho} \Big|_+ g(\rho) = \int_{r_1}^{r_2} d\rho \frac{f(\rho)}{1-\rho} (g(\rho) - g(1)) \quad r_1 < 1 < r_2 \quad (\text{A.67})$$

es erlaubt, diese zu entfernen. Obiger Fall, die Imaginärteile werden stets mit einer Verteilungsamplitude gefaltet, würde z.B. in folgender Weise bearbeitet:

$$\begin{aligned}
\int_{r_1}^{r_2} d\rho \frac{\Theta(\rho-1)}{1-\rho} \phi(\rho) &= \int_{r_1}^{r_2} d\rho \frac{\Theta(\rho-1)}{1-\rho} \Big|_+ \phi(\rho) \\
&+ \phi(1) \int_{r_1}^{r_2} d\rho \frac{\Theta(\rho-1)}{1-\rho} \\
&= \int_{r_1}^{r_2} d\rho \frac{\Theta(\rho-1)}{1-\rho} \Big|_+ \phi(\rho) \\
&- \phi(1) \left(\log(r_2 - 1) - \lim_{\rho \rightarrow 1} \log(\rho - 1) \right). \quad (\text{A.68})
\end{aligned}$$

Auf Ebene der Imaginärteile gebe sich somit ein Zusammenhang,

$$\begin{aligned} \frac{\Theta(\rho - 1)}{1 - \rho} &\rightarrow \frac{\Theta(\rho - 1)}{1 - \rho} \Big|_+ \\ &- \delta(\rho - 1) \left(\log(r_2 - 1) - \lim_{\rho \rightarrow 1} \log(\rho - 1) \right), \end{aligned}$$

der dafür sorgte, daß sich die beiden divergenten Logarithmen gegeneinander weghöben und nur noch endliche Terme übrig blieben. Zwei weitere Formeln dieser Art, die benötigt werden, lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\Theta(1 - \rho)}{1 - \rho} &\rightarrow \frac{\Theta(1 - \rho)}{1 - \rho} \Big|_+ \\ &- \delta(\rho - 1) \left(\lim_{\rho \rightarrow 1} \log(1 - \rho) - \log(1 - r_1) \right), \\ \frac{1}{1 - \rho} &\rightarrow \frac{\Theta(1 - \rho)}{1 - \rho} \Big|_+ + \frac{\Theta(\rho - 1)}{1 - \rho} \Big|_+ \\ &- \delta(\rho - 1) (\log(r_2 - 1) - \log(1 - r_1)). \end{aligned}$$

A.6 Borel-Transformation

Hier werden die mathematische Definition und einige wichtige Anwendungsformeln die Borel-Transformation betreffend gesammelt. Diese wird in QCD-Summenregeln als Hilfsmittel verwendet, um Subtraktionsterme in den Dispersionsrelationen zu entfernen und um den Einfluß von höheren angeregten- oder Kontinuumszuständen zu reduzieren. Der eingeführte Borelparameter, siehe A.69, wird im Allgemeinen verwendet, um die Stabilität der Summenregel und die Abhängigkeit vom Kontinuum zu überprüfen. Die Definition lautet:

$$B_{M^2} F(q^2) = \lim_{\substack{-q^2, n \rightarrow \infty \\ -q^2/n = M^2}} \frac{(-q^2)^{(n+1)}}{n!} \left(\frac{d}{dq^2} \right)^n F(q^2). \quad (\text{A.69})$$

Für die hier betrachteten Rechnungen sind folgende Anwendungen wichtig:

$$\begin{aligned} B_{M^2} \left(\frac{1}{s - q^2} \right)^k &= \frac{1}{(k - 1)!} \left(\frac{1}{M^2} \right)^{k-1} e^{-s/M^2} \\ B_{M^2} (-q^2)^k &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

Zweitere zeigt deutlich, daß Subtraktionsterme wie in 3.84 entfernt werden und daher in Summenregelrechnungen für gewöhnlich nicht weiter betrachtet werden.

Anhang B

Anmerkungen zur Zerlegung des nichtlokalen $\bar{q}qG$ -Matrixelementes

In diesem Anhang wird die allgemeine Zerlegung des bilokaln Quark-Antiquark-Gluon Matrixelementes angegeben und hergeleitet. Die Konsequenzen aus den Unterschieden mit jener in Kapitel 5.1 benutzten werden diskutiert und erste weiterführende Analysen präsentiert.

Der erste Teil wird sich stark an der Nomenklatur von [47] orientieren. Dort werden zweierlei Abkürzungen für die nachfolgenden Betrachtungen eingeführt:

$$\langle 0 | \bar{q}(x) G_{\mu\nu}(ux) \gamma_5 \gamma_\rho i\sigma_{\alpha\beta} Q_v(0) | B(v) \rangle = (if_{BM_B}) \langle G_{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\rho i\sigma_{\alpha\beta} \rangle, \quad (\text{B.1})$$

mit offensichtlicher Anwendung für allgemeine Diracmatrizen und

$$a_{[\alpha} b_{\beta]} = a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha. \quad (\text{B.2})$$

Ausgangspunkt ist die allgemeine Zerlegung des Matrixelementes eines Tensors von Rang 5 mit zwei Paaren asymmetrischer Indizes:

$$\begin{aligned} \langle G_{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\rho i\sigma_{\alpha\beta} \rangle &= g_{\alpha[\mu} g_{\nu]\beta} g_{\rho\sigma} Z_1^\sigma + g_{\sigma[\mu} g_{\nu][\alpha} g_{\beta]\rho} Z_2^\sigma + g_{\sigma[\alpha} g_{\beta][\mu} g_{\nu]\rho} Z_3^\sigma \\ &+ \frac{v_{[\mu} x_{\nu]}}{v \cdot x} g_{\rho[\alpha} g_{\beta]\sigma} Z_4^\sigma + \frac{v_{[\alpha} x_{\beta]}}{v \cdot x} g_{\rho[\mu} g_{\nu]\sigma} Z_5^\sigma \\ &+ \frac{v_{[\mu} x_{\nu]} v_{[\alpha} x_{\beta]}}{(v \cdot x)^2} g_{\rho\sigma} Z_{10}^\sigma + g_{\kappa[\mu} g_{\nu]\tau} g_{\lambda[\alpha} g_{\beta]\tau} g_{\rho\sigma} \\ &\times \left(\frac{v^\kappa v^\lambda}{v^2} Z_6^\sigma + \frac{v^\kappa x^\lambda}{v \cdot x} Z_7^\sigma + \frac{x^\kappa v^\lambda}{v \cdot x} Z_8^\sigma + \frac{v^2 x^\kappa x^\lambda}{(v \cdot x)^2} Z_9^\sigma \right) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Die Z_i^σ , $i = 1, \dots, 10$ sind Kombinationen von Dreiteilchenverteilungsamplituden $X_i = X_i(v \cdot x, v^2, x^2; u)$, $Y_i = Y_i(v \cdot x, v^2, x^2; u)$ in folgender Art:

$$Z_i^\sigma = v^\sigma X_i + \frac{x^\sigma}{v \cdot x} Y_i.$$

Mittels der on-shell Bedingung, $\not{v}Q_v = Q_v$ und der Chisholm-Identität

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha = (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) \gamma_\beta + i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_5 \gamma_\beta, \quad (\text{B.4})$$

lassen sich aus B.3 die Matrixelemente mit anderen Dirac-Strukturen gewinnen:

$$\begin{aligned}
 \langle G_{\mu\nu} \gamma_\rho i\sigma_{\alpha\beta} \rangle &= \frac{i}{2} \epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} \langle G_{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\rho i\sigma^{\sigma\tau} \rangle, \\
 \langle G_{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\alpha \rangle &= \frac{i}{6} \epsilon_{\alpha\rho\sigma\tau} \langle G_{\mu\nu} \gamma^\rho i\sigma^{\sigma\tau} \rangle, \\
 \langle G_{\mu\nu} \gamma_5 \rangle &= v^\alpha \langle G_{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\alpha \rangle, \\
 \langle G_{\mu\nu} \gamma_5 i\sigma_{\alpha\beta} \rangle &= v^\rho \langle G_{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\rho i\sigma_{\alpha\beta} \rangle + 2(v_\alpha \langle G_{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\beta \rangle - v_\beta \langle G_{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\alpha \rangle), \\
 \langle G_{\mu\nu} \gamma_\alpha \rangle &= \frac{i}{6} \epsilon_{\alpha\rho\sigma\tau} \langle G_{\mu\nu} \gamma_5 \gamma^\rho i\sigma^{\sigma\tau} \rangle, \\
 \langle G_{\mu\nu} \rangle &= v^\alpha \langle G_{\mu\nu} \gamma_\alpha \rangle, \\
 \langle G_{\mu\nu} i\sigma_{\alpha\beta} \rangle &= v^\rho \langle G_{\mu\nu} \gamma_\rho i\sigma_{\alpha\beta} \rangle + 2(v_\alpha \langle G_{\mu\nu} \gamma_\beta \rangle - v_\beta \langle G_{\mu\nu} \gamma_\alpha \rangle). \tag{B.5}
 \end{aligned}$$

Nun können relativ einfach Relationen unter den Verteilungsamplituden gefunden werden, die im Endeffekt deren Anzahl reduzieren. Wird die Chisholm-Identität für die linke Seite von Gleichung B.3 verwendet

$$\langle G_{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\rho i\sigma_{\alpha\beta} \rangle = g_{\beta\rho} \langle G_{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\alpha \rangle - g_{\alpha\rho} \langle G_{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\beta \rangle - i\epsilon_{\rho\alpha\beta\sigma} \langle G_{\mu\nu} \gamma^\sigma \rangle \tag{B.6}$$

und werden die entsprechenden Ausdrücke aus B.5 eingesetzt, so ergibt sich ein Gleichungssystem, welches zeigt, daß nicht alle Verteilungsamplituden unabhängig sind und welches in folgender Weise gelöst werden kann:

$$\begin{aligned}
 X_3 &= X_1; \quad Y_3 = Y_1; \quad Y_6 = -v^2 X_7 = v^2 X_5; \quad Y_8 = -v^2 X_9 = Y_5; \\
 X_6 &= Y_7 = X_8 = Y_9 = X_{10} = Y_{10}. \tag{B.7}
 \end{aligned}$$

Diese Lösungen lassen sich ohne weitere Voraussetzungen nur aus den Identitäten der Dirac-Matrizen gewinnen. In [47] wird die Lösung mit $v^2 = 1$ angegeben, doch schien es angebracht, da die Ausgangsformel B.3 vollkommen allgemein gehalten wurde, dies in der Lösung ebenso zu handhaben. Es bleiben demnach acht unabhängige Verteilungsamplituden, verglichen mit vier bei Kawamura et al. [43] und ebenso vier in der in Kapitel 5.1 sowie in [42] verwendeten Zerlegung. Mittels B.5 können wieder die Matrixelemente anderer Dirac-Strukturen gewonnen werden und es zeigt sich, daß nach Kontraktion mit x^ν , bzw. x^μ nur vier unabhängige Strukturen übrig bleiben. Mit den Zuordnungen

$$\Psi_V = X_1 - X_5 - \Omega Y_5, \quad \Psi_A = X_2 - \Omega Y_4, \quad X_A = -X_4, \quad Y_A = Y_2 + Y_4, \tag{B.8}$$

$\Omega = \frac{v^2 x^2}{(v \cdot x)^2}$, ergibt sich die Zerlegung aus [43]. Da die Zerlegung aus 5.1

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \bar{q}_{2\alpha}(x) G_{\lambda\rho}(ux) h_{v\beta}(0) | \bar{B}^0(v) \rangle &= \frac{f_B m_B}{4} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi e^{-i(\omega+u\xi)v \cdot x} \\
 &\times \left[(1 + \psi) \left\{ (v_\lambda \gamma_\rho - v_\rho \gamma_\lambda) \left(\Psi_A(\omega, \xi) - \Psi_V(\omega, \xi) \right) - i\sigma_{\lambda\rho} \Psi_V(\omega, \xi) \right. \right. \\
 &\left. \left. - \left(\frac{x_\lambda v_\rho - x_\rho v_\lambda}{v \cdot x} \right) X_A(\omega, \xi) + \left(\frac{x_\lambda \gamma_\rho - x_\rho \gamma_\lambda}{v \cdot x} \right) Y_A(\omega, \xi) \right\} \gamma_5 \right]_{\beta\alpha}, \tag{B.9}
 \end{aligned}$$

nach Kontraktion mit x^ν , bzw. x^μ ebenfalls Kawamuras Ergebnisse reproduziert, ergeben sich Korrekturen zu den Summenregeln in 5.1 dann, wenn diese Kontraktion nicht durchgeführt wird. Dafür bedarf es einer genaueren Betrachtung des Quark-Propagators im Hintergrundfeld, der für die Berechnung der Softgluon-Korrekturen benötigt wird. Im massiven Falle

$$S_{q_1}(x, 0, m_{q_1}) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \int_0^1 dv G_{\mu\nu}(vx) \left[\frac{v x^\mu \gamma^\nu}{p^2 - m_{q_1}^2} - \frac{(\not{p} + m_{q_1})\sigma^{\mu\nu}}{2(p^2 - m_{q_1}^2)^2} \right], \quad (\text{B.10})$$

ergeben sich natürlich Korrekturen proportional zur Masse des Quarks, die in den hier durchgeführten Rechnungen aufgrund der geringen Masse des Strange-Quarks klein sein sollten, aber für Berechnungen von $B \rightarrow D l \nu$ -Formfaktoren relevant werden könnten. Diese sind jedoch nicht die einzigen Korrekturen. Auch für masselose Quarks ergeben sich bereits Korrekturen, wie ein Blick auf den entsprechenden Propagator zeigt:

$$iS_{q_1}(x, 0, 0) = \frac{-\not{x}}{2\pi^2 x^4} + \int_0^1 \frac{du}{16\pi^2 x^2} \{(1-u)\not{x}\sigma^{\mu\nu} G_{\mu\nu}(ux) + u\sigma^{\mu\nu} G_{\mu\nu}(ux)\not{x}\}. \quad (\text{B.11})$$

Der Gluon-Term kann mit Hilfe der Chisholm-Identität B.4 in folgende für diese Zwecke nützliche Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} & \{(1-u)\not{x}\sigma^{\mu\nu} G_{\mu\nu}(ux) + u\sigma^{\mu\nu} G_{\mu\nu}(ux)\not{x}\} \\ &= 2(1-2u)x^\mu \gamma^\nu G_{\mu\nu}(ux) - \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\rho x_\sigma G_{\mu\nu}(ux). \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Offenkundig ergeben sich beim ersten Term keine Unterschiede zwischen der in [42] sowie Kapitel 5.1 verwendeten und der hier angeführten allgemeineren Zerlegung. Der zweite Term wird jedoch im Allgemeinen zu unterschiedlichen Ergebnissen führen. So lege eine erste Analyse für die Vektorformfaktoren nahe, daß sich die Dreiteilchenbeiträge zum universellen Formfaktor ξ_\perp ändern könnten. Der vollständige Formfaktor lautete nun

$$\begin{aligned} \zeta_\perp &= \frac{\hat{f}_B}{2f_V m_V m_B^{3/2}} e^{m_V^2/M^2} \int_0^{s_0^V} ds e^{-s/M^2} \left\{ s \frac{d\phi_+^B(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=0} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi} \{X_1(0, \xi) + X_2(0, \xi) - X_4(0, \xi)\} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

anstatt

$$\begin{aligned} \zeta_\perp &= \frac{\hat{f}_B}{2f_V m_V m_B^{3/2}} e^{m_V^2/M^2} \int_0^{s_0^V} ds e^{-s/M^2} \left\{ s \frac{d\phi_+^B(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=0} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi} \{\Psi_V(0, \xi) + \Psi_A(0, \xi) + X_A(0, \xi)\} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Mit B.7 ist leicht zu sehen, daß der einzige Unterschied in $\Psi_V = X_1 - X_5$ zu X_1 besteht. Die Kombination $X_A + \Psi_A$, bzw. $X_2 - X_4$ kann in unserem Modell wie schon

in Kapitel 5.1 erwähnt weggelassen werden, da die folgende Relation

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi} (\Psi_A(0, \xi) + X_A(0, \xi)) = -\frac{1}{2} J(0) = 0 \quad (\text{B.15})$$

gilt. Welchen Einfluß hat dieser Unterschied jedoch auf den Formfaktor. Dazu bedarf es erst einmal der Kenntnis der zusätzlichen Verteilungsamplituden. Eine Analyse analog zu Kapitel 4.1, die aufgrund der vielen Lorentzstrukturen sehr aufwendig ist, ergab übereinstimmende Ergebnisse für $\Psi_A = X_2$, $\Psi_V = X_1 - X_5$, $X_A = -X_4$, und folgende Ergebnisse für X_1 , bzw. X_5

$$\begin{aligned} C e^{-\frac{\Lambda}{M}} X_1(\omega, \xi) &= \omega \xi \int_{\frac{\omega+\xi}{2}}^{s^0} ds e^{-\frac{s}{M}} (2s - \omega - \xi)^2 \Theta(2s^0 - \omega - \xi) \\ C e^{-\frac{\Lambda}{M}} X_5(\omega, \xi) &= \left(\omega \xi - \frac{1}{2} \xi^2 \right) \int_{\frac{\omega+\xi}{2}}^{s^0} ds e^{-\frac{s}{M}} (2s - \omega - \xi)^2 \Theta(2s^0 - \omega - \xi). \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Dies führte dazu, daß der Dreiteilchenbeitrag zu ζ_\perp verschwände, was eine Neubewertung dieser Beiträge nötig machte. Dieses weite und interessante Feld bedarf noch ausgiebiger Analysen, sowohl unter eher theoretischen Aspekten, ob es weitere Relationen und Mischung zwischen Zwei- und Dreiteilchverteilungsamplituden gibt, als auch von eher pragmatischer Seite, bezüglich der asymptotischen Form und des numerischen Einflusses auf die Summenregeln in 5.1. Diese gehen jedoch bedauerlicherweise über den Rahmen dieser Arbeit hinaus und hier sollten nur die bereits durchgeführten Arbeiten dargelegt werden.

Anhang C

Kommentar zu Huang et al.

In [193] werden aus der Bewegungsgleichung des Gluons $D^\mu G_{\mu\nu} = 0$ unter Vernachlässigung höherer Fock-Zustände und der Zerlegung

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \bar{q}(z) g_s G_{\mu\nu}(uz) z^\nu \Gamma Q_v(0) | \bar{B}(p) \rangle \\ &= \frac{1}{2} f_B m_B \text{Tr} \left[\gamma_5 \Gamma \frac{1 + \not{p}}{2} \left\{ (v_\mu \not{z} - t \gamma_\mu) (\tilde{\Psi}_A^B(t, u, z^2) - \tilde{\Psi}_V^B(t, u, z^2)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - i \sigma_{\mu\nu} z^\nu \tilde{\Psi}_V^B(t, u, z^2) - \frac{z_\mu t - z^2 v_\mu}{t} \tilde{X}_A^B(t, u, z^2) + \frac{z_\mu \not{z} - z^2 \gamma_\mu}{t} \tilde{Y}_A^B(t, u) \right\} \right], \quad (\text{C.1}) \end{aligned}$$

die wie die unsrige in [42] nicht die allgemeinst mögliche ist, siehe Anhang B, Relationen für die Momente der Dreiteilchenverteilungsamplituden hergeleitet, die zu einer anderen Normierung als 3.64 führen:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi \Psi_A(\omega, \xi) &= \frac{2}{3} \lambda_E^2, \\ \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi \Psi_V(\omega, \xi) &= \frac{1}{3} (\lambda_H^2 + \lambda_E^2), \\ \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi X_A(\omega, \xi) &= \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi Y_A(\omega, \xi) = -\frac{2}{3} \lambda_E^2. \quad (\text{C.2}) \end{aligned}$$

Hier sollen zwei Einwände erhoben werden. Zum Ersten zeigt sich, daß, so diese Normierung übernommen wird, der lokale Grenzwert des Dreiteilchenmatrixelementes gegeben durch Grozin und Neuberts Definition 3.65 nicht reproduziert wird. Dafür wird $z \rightarrow tn$ mit n einem lichtartigen Vektor und t einer reellen Zahl gesetzt. Dies eingesetzt in C.1 liefert für $t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{q} \Gamma G^{\mu\nu} n^\nu Q_v | B \rangle &= \frac{1}{6} f_B m_B \text{Tr} \left[\gamma_5 \Gamma \frac{1 + \not{p}}{2} \right. \\ & \quad \left. \times \left\{ (\lambda_H^2 - \lambda_E^2) (\gamma^\mu - \not{p} v^\mu) - i (\lambda_H^2 + \lambda_E^2) \sigma^{\mu\nu} n_\nu + 2 \lambda_E^2 n^\mu (1 - \not{p}) \right\} \right]. \quad (\text{C.3}) \end{aligned}$$

Im deutlichen Unterschied zur 3.65 kontrahiert mit n_ν :

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{q} \Gamma G^{\mu\nu} n_\nu Q_v | B \rangle &= \frac{1}{3} f_B m_B \text{Tr} \left[\gamma_5 \Gamma \frac{1 + \not{p}}{2} \right. \\ & \quad \left. \times \left\{ (\lambda_H^2 - \lambda_E^2) (\gamma^\mu - \not{p} v^\mu) - i \lambda_H^2 \sigma^{\mu\nu} n_\nu \right\} \right]. \quad (\text{C.4}) \end{aligned}$$

Zum Zweiten konnten die in [193] hergeleiteten Relationen, Gleichungen (16) und (17), nicht reproduziert werden. Stattdessen ergaben sich im Lichtkegelgrenzwert $z^2 \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} t \frac{\partial}{\partial t} \left[\tilde{\Psi}_A(t, u) + \tilde{X}_A(t, u) \right] + 2\tilde{X}_A(t, u) &= 0, \\ t \frac{\partial}{\partial t} \left[\tilde{\Psi}_A(t, u) + \tilde{Y}_A(t, u) \right] + 2\tilde{Y}_A(t, u) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Diese ergeben für die Normierung der Verteilungsamplituden, d.h. im Grenzwert $t \rightarrow 0$, unter der Annahme $F(\omega, \xi)_{\omega \rightarrow \infty, \xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ ($F = \Psi_A, X_A, Y_A$) schlicht

$$\int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi X_A(\omega, \xi) = \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi Y_A(\omega, \xi) = 0, \quad (\text{C.6})$$

in Einklang mit den bereits in 3.64 angegebenen Normierungen.

Anhang D

Summenregeln mit B -Meson-Verteilungsamplituden

D.1 Ausdrücke für m_{q1} , $q^2 \neq 0$

- $B \rightarrow P$ -Formfaktoren des Vektorstroms

$$f_{BP}^+(q^2) = \frac{f_B m_B}{f_P} \left\{ \int_0^{\sigma_0(q^2, s_0)} d\sigma \exp\left(\frac{-s(\sigma, q^2) + m_P^2}{M^2}\right) \right. \\ \times \left[\frac{\bar{\sigma}^2 m_B^2}{\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2} \phi_-^B(\sigma m_B) + \left(1 - \frac{\bar{\sigma}^2 m_B^2}{\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2}\right) \phi_+^B(\sigma m_B) \right. \\ \left. \left. + \frac{2\bar{\sigma}(m^2 - q^2)m_B}{(\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2)^2} \bar{\Phi}_{\pm}^B(\sigma m_B) \right] + \Delta f_{BP}^+(q^2, s_0, M^2) \right\}, \quad (\text{D.1})$$

$$f_{BP}^+(q^2) + f_{BP}^-(q^2) = \frac{f_B m_B}{f_P} \left\{ \int_0^{\sigma_0(q^2, s_0)} d\sigma \exp\left(\frac{-s(\sigma, q^2) + m_P^2}{M^2}\right) \right. \\ \times \left[\frac{(m - 2\sigma\bar{\sigma}m_B)m_B}{\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2} \phi_-^B(\sigma m_B) + \left(1 - \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} - \frac{(m - 2\sigma\bar{\sigma}m_B)m_B}{\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2}\right) \phi_+^B(\sigma m_B) \right. \\ \left. - 2m_B \left(\frac{\bar{\sigma}(m - 2\sigma\bar{\sigma}m_B)m_B}{(\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2)^2} + \frac{(\sigma - \bar{\sigma})}{\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2} \right) \bar{\Phi}_{\pm}^B(\sigma m_B) \right] \\ \left. + \Delta f_{BP}^{\pm}(q^2, s_0, M^2) \right\}, \quad (\text{D.2})$$

- $B \rightarrow P$ -Formfaktor des Tensorstroms

$$\begin{aligned}
 f_{BP}^T(q^2) = & \frac{f_B(m_B + m_P)m_B^2}{f_P((m_B^2 - m_P^2) - q^2)} \left\{ \int_0^{\sigma_0(q^2, s_0)} d\sigma \exp\left(\frac{-s(\sigma, q^2) + m_P^2}{M^2}\right) \right. \\
 & \times \left[\frac{\bar{\sigma}^2 m_B^2 - m^2 + (\sigma - \bar{\sigma})q^2}{\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2} (\phi_-^B(\sigma m_B) - \phi_+^B(\sigma m_B)) \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{m_B} \left(2 \frac{m^2(2\bar{\sigma}m_B^2 - q^2) + q^2(q^2 - \bar{\sigma}(1 + \sigma)m_B^2)}{(\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2)^2} - \frac{1}{\bar{\sigma}} \right) \bar{\Phi}_\pm^B(\sigma m_B) \right] \right. \\
 & \left. + \Delta f_{BP}^T(q^2, s_0, M^2) \right\}, \quad (D.3)
 \end{aligned}$$

- $B \rightarrow V$ -Formfaktor des Vektorstroms

$$\begin{aligned}
 V^{BV}(q^2) = & \frac{f_B m_B^2}{2f_V m_V} (m_B + m_V) \left\{ \int_0^{\sigma_0(q^2, s_0)} d\sigma \exp\left(\frac{-s(\sigma, q^2) + m_V^2}{M^2}\right) \right. \\
 & \times \left[\frac{m}{\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2} \phi_-^B(\sigma m_B) + \left(\frac{1}{\bar{\sigma} m_B} - \frac{m}{\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2} \right) \phi_+^B(\sigma m_B) \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2\bar{\sigma} m m_B}{(\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2)^2} \bar{\Phi}_\pm^B(\sigma m_B) \right] + \Delta V^{BV}(q^2, s_0, M^2) \right\}, \quad (D.4)
 \end{aligned}$$

- $B \rightarrow V$ -Formfaktoren des Axialvektorstroms

$$\begin{aligned}
 A_1^{BV}(q^2) = & \frac{f_B m_B^3}{2f_V m_V (m_B + m_V)} \left\{ \int_0^{\sigma_0(q^2, s_0)} d\sigma \exp\left(\frac{-s(\sigma, q^2) + m_V^2}{M^2}\right) \right. \\
 & \times \left[\frac{(\bar{\sigma} m_B + m)^2 - q^2}{m_B^2 \bar{\sigma}^2} \left\{ \frac{\bar{\sigma} m m_B}{\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2} \phi_-^B(\sigma m_B) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(1 - \frac{\bar{\sigma} m m_B}{\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2} \right) \phi_+^B(\sigma m_B) \right\} \right. \\
 & \left. \left. - 4 \frac{\bar{\sigma} m^2 m_B}{(\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2)^2} \bar{\Phi}_\pm^B(\sigma m_B) \right] + \Delta A_1^{BV}(q^2, s_0, M^2) \right\}, \quad (D.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2^{BV}(q^2) = & \frac{f_B m_B}{2f_V m_V} (m_B + m_V) \left\{ \int_0^{\sigma_0(q^2, s_0)} d\sigma \exp\left(\frac{-s(\sigma, q^2) + m_V^2}{M^2}\right) \right. \\
 & \times \left[\frac{(m - 2\bar{\sigma}\sigma m_B)m_B}{\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2} \phi_-^B(\sigma m_B) \right. \\
 & + \left. \left(1 - \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} - \frac{(m - 2\bar{\sigma}\sigma m_B)m_B}{\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2}\right) \phi_+^B(\sigma m_B) \right. \\
 & \left. \left. - 2m_B \left(\frac{\bar{\sigma}(m - 2\bar{\sigma}\sigma m_B)m_B}{(\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2)^2} + \frac{(\sigma - \bar{\sigma})}{\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2} \right) \bar{\Phi}_\pm^B(\sigma m_B) \right] \right. \\
 & \left. + \Delta A_2^{BV}(q^2, s_0, M^2) \right\}, \quad (\text{D.6})
 \end{aligned}$$

- $B \rightarrow V$ -Formfaktoren des Tensorstroms

$$\begin{aligned}
 T_1^{BV}(q^2) = & \frac{f_B m_B^2}{2f_V m_V} \left\{ \int_0^{\sigma_0(q^2, s_0)} d\sigma \exp\left(\frac{-s(\sigma, q^2) + m_V^2}{M^2}\right) \right. \\
 & \left[\left(1 + \frac{m}{\bar{\sigma} m_B}\right) \left\{ \frac{\bar{\sigma} m m_B}{\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2} \phi_-^B(\sigma m_B) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(1 - \frac{\bar{\sigma} m m_B}{\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2}\right) \phi_+^B(\sigma m_B) \right\} \right. \\
 & \left. + \frac{m}{\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2} \left(1 - \frac{2\bar{\sigma} m_B (\bar{\sigma} m_B + m)}{\bar{\sigma}^2 m_B^2 + m^2 - q^2}\right) \bar{\Phi}_\pm^B(\sigma m_B) \right] \\
 & \left. + \Delta T_1^{BV}(q^2, s_0, M^2) \right\}, \quad (\text{D.7})
 \end{aligned}$$

D.2 Dreiteilchenkorrekturen

In den obigen Ausdrücken werden die Beiträge der Dreiteilchenzustände des B-Mesons mit Δf_{BP}^+ , Δf_{BP}^\pm , Δf_{BP}^T , ΔV^{BV} , ΔA_1^{BV} , ΔA_2^{BV} , und ΔT_1^{BV} bezeichnet. Für

diese wird, mit $\Delta F = \Delta f_{BP}^+, \Delta f_{BP}^\pm, \dots$, folgende allgemeine Form hergeleitet:

$$\begin{aligned} \Delta F(q^2, s_0, M^2) = & \int_0^{\sigma_0(q^2, s_0)} d\sigma \exp\left(\frac{-s(\sigma, q^2) + m_{P(V)}^2}{M^2}\right) \\ & \times \left(-I_1^{(F)}(\sigma) + \frac{I_2^{(F)}(\sigma)}{M^2} - \frac{I_3^{(F)}(\sigma)}{2M^4} \right) \\ & + \frac{e^{(-s_0 + m_{P(V)}^2)/M^2}}{m_B^2} \left\{ \eta(\sigma) \left[I_2^{(F)}(\sigma) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M^2} + \frac{1}{m_B^2} \frac{d\eta(\sigma)}{d\sigma} \right) I_3^{(F)}(\sigma) - \frac{\eta(\sigma)}{2m_B^2} \frac{dI_3^{(F)}(\sigma)}{d\sigma} \right] \right\} \Bigg|_{\sigma=\sigma_0}. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Dabei werden die Abkürzung

$$\eta(\sigma) = \left(1 + \frac{m^2 - q^2}{\sigma^2 m_B^2} \right)^{-1}, \quad (\text{D.9})$$

für $\frac{1}{m_B^2} \frac{d\sigma}{ds}$ und die Integrale über die Dreiteilchenverteilungssamplituden, die mit inversen Potenzen des Borelparameters $1/M^{2(n-1)}$ mit $n = 1, 2, 3$ multipliziert werden

$$\begin{aligned} I_n^{(F)}(\sigma) = & \frac{1}{\bar{\sigma}^n} \int_0^{\sigma m_B} d\omega \int_{\sigma m_B - \omega}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi} \left[C_n^{(F, \Psi A)}(\sigma, u, q^2) \Psi_A^B(\omega, \xi) \right. \\ & + C_n^{(F, \Psi V)}(\sigma, u, q^2) \Psi_V^B(\omega, \xi) \\ & \left. + C_n^{(F, X A)}(\sigma, u, q^2) \bar{X}_A^B(\omega, \xi) + C_n^{(F, Y A)}(\sigma, u, q^2) \bar{Y}_A^B(\omega, \xi) \right] \Bigg|_{u=(\sigma m_B - \omega)/\xi}, \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

genutzt. Desweiteren findet für die Verteilungssamplituden X_A und Y_A die abkürzende Schreibweise

$$\bar{X}_A^B(\omega, \xi) = \int_0^\omega d\tau X_A^B(\tau, \xi), \quad \bar{Y}_A^B(\omega, \xi) = \int_0^\omega d\tau Y_A^B(\tau, \xi).$$

Verwendung. Die nichtverschwindenden Koeffizienten in Gleichung (D.10) werden im Folgenden aufgelistet.

$B \rightarrow P$ -Formfaktoren:

$$\begin{aligned}
 C_2^{(f_{BP}^+, \Psi A)} &= \left(-\frac{2m}{m_B} + \bar{\sigma} - 2\bar{\sigma}u \right), & C_2^{(f_{BP}^+, \Psi V)} &= \left(\frac{2m}{m_B} + \bar{\sigma} \right), \\
 C_2^{(f_{BP}^+, XA)} &= \frac{1-2u}{m_B}, & C_3^{(f_{BP}^+, XA)} &= 2 \frac{(m^2 + q^2 - m_B^2 \bar{\sigma}^2)(2u-1)}{m_B}, \\
 C_3^{(f_{BP}^+, YA)} &= 4(2m + m_B \bar{\sigma}(2u-1))\bar{\sigma}, & & \tag{D.11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_2^{(f_{BP}^\pm, \Psi A)} &= 1 - \frac{4m}{m_B} + \bar{\sigma}(2-4u) + 2u, & C_2^{(f_{BP}^\pm, \Psi V)} &= 1 + \frac{4m}{m_B} + 2\bar{\sigma} - 4u, \\
 C_2^{(f_{BP}^\pm, XA)} &= -\frac{2(\bar{\sigma}-1)(2u-1)}{m_B \bar{\sigma}}, \\
 C_3^{(f_{BP}^\pm, XA)} &= -\frac{2}{m_B \bar{\sigma}} \left(-(2\bar{\sigma}+1)(2u-1)m^2 + 2mm_B \bar{\sigma} + \right. \\
 &\quad \left. (2\bar{\sigma}-1)(m_B^2 \bar{\sigma}^2 - q^2)(2u-1) \right) \\
 C_3^{(f_{BP}^\pm, YA)} &= 4 \left(m(4\bar{\sigma}-1) + 2m_B(\bar{\sigma}-1)\bar{\sigma}(2u-1) \right), & & \tag{D.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_1^{(f_{BP}^T, \Psi A)} &= \frac{2u}{m_B^2 \bar{\sigma}}, & C_2^{(f_{BP}^T, \Psi A)} &= -\frac{2(-m^2 + m_B^2 \bar{\sigma}^2 + q^2(1-2\bar{\sigma}))u}{m_B^2 \bar{\sigma}}, \\
 C_1^{(f_{BP}^T, \Psi V)} &= -\frac{2u}{m_B^2 \bar{\sigma}}, & C_2^{(f_{BP}^T, \Psi V)} &= -\frac{2(m^2 - m_B^2 \bar{\sigma}^2 + q^2(2\bar{\sigma}-1))u}{m_B^2 \bar{\sigma}}, \\
 C_2^{(f_{BP}^T, XA)} &= -\frac{4m}{m_B^2 \bar{\sigma}}, & C_3^{(f_{BP}^T, XA)} &= -\frac{4m(m^2 - m_B^2 \bar{\sigma}^2 + q^2(2\bar{\sigma}-1))}{m_B^2 \bar{\sigma}}, \\
 C_2^{(f_{BP}^T, YA)} &= -4 \frac{(2u-1)}{m_B}, \\
 C_3^{(f_{BP}^T, YA)} &= 4 \frac{(-m^2 + m_B^2 \bar{\sigma}^2 + q^2(1-2\bar{\sigma}))(2u-1)}{m_B}, & & \tag{D.13}
 \end{aligned}$$

$B \rightarrow V$ -Formfaktoren:

$$\begin{aligned}
 C_2^{(V^{BV}, \Psi A)} &= \frac{2u-1}{m_B}, & C_2^{(V^{BV}, \Psi V)} &= -\frac{1}{m_B}, & C_2^{(V^{BV}, XA)} &= -2 \frac{(2u-1)}{m_B^2 \bar{\sigma}}, \\
 C_3^{(V^{BV}, XA)} &= -\frac{2}{m_B^2 \bar{\sigma}} \left((2u-1)m^2 - 2m_B \bar{\sigma} m + (m_B^2 \bar{\sigma}^2 - q^2)(2u-1) \right), \\
 C_3^{(V^{BV}, YA)} &= -4 \frac{m}{m_B}, & & & & \tag{D.14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_1^{(A_1^{BV}, \Psi A)} &= \frac{2u - 1}{m_B^2 \bar{\sigma}}, \\
 C_2^{(A_1^{BV}, \Psi A)} &= \frac{m^2(2u - 1) + 2mm_B \bar{\sigma} - (q^2 - m_B^2 \bar{\sigma}^2)(2u - 1)}{m_B^2 \bar{\sigma}}, \\
 C_1^{(A_1^{BV}, \Psi V)} &= -\frac{1}{m_B^2 \bar{\sigma}}, \quad C_2^{(A_1^{BV}, \Psi V)} = -\frac{(m^2 + 2mm_B \bar{\sigma} - q^2 + m_B^2 \bar{\sigma}^2)}{m_B^2 \bar{\sigma}}, \\
 C_1^{(A_1^{BV}, XA)} &= -2\frac{(2u - 1)}{m_B^3 \bar{\sigma}^2}, \\
 C_2^{(A_1^{BV}, XA)} &= -\frac{2(2m^2 - 2q^2 + m_B^2 \bar{\sigma}^2)(2u - 1)}{m_B^3 \bar{\sigma}^2}, \\
 C_3^{(A_1^{BV}, XA)} &= -\frac{2\left(m^4 - 2m^2(q^2 + m_B^2 \bar{\sigma}^2) + (q^2 - m_B^2 \bar{\sigma}^2)^2\right)(2u - 1)}{m_B^3 \bar{\sigma}^2}, \\
 C_2^{(A_1^{BV}, YA)} &= -\frac{4(m + m_B \bar{\sigma}(1 - 2u))}{m_B^2 \bar{\sigma}}, \\
 C_3^{(A_1^{BV}, YA)} &= -\frac{4m(m^2 + 2m_B \bar{\sigma}(2u - 1)m - q^2 + m_B^2 \bar{\sigma}^2)}{m_B^2 \bar{\sigma}}, \tag{D.15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_2^{(A_2^{BV}, \Psi A)} &= -\left(3 - \frac{4m}{m_B} - 2u + \bar{\sigma}(4u - 2)\right), \\
 C_2^{(A_2^{BV}, \Psi V)} &= -\left(3 + \frac{4m}{m_B} - 2\bar{\sigma} - 4u\right), \\
 C_2^{(A_2^{BV}, XA)} &= -\frac{2(\bar{\sigma} - 1)(2u - 1)}{m_B \bar{\sigma}}, \\
 C_3^{(A_2^{BV}, XA)} &= -\frac{2}{m_B \bar{\sigma}}\left(- (2\bar{\sigma} + 1)(2u - 1)m^2 + 2mm_B \bar{\sigma} \right. \\
 &\quad \left. + (2\bar{\sigma} - 1)(m_B^2 \bar{\sigma}^2 - q^2)(2u - 1)\right), \\
 C_3^{(A_2^{BV}, YA)} &= 4\left(m(3 - 4\bar{\sigma}) + 2m_B(\bar{\sigma} - 1)\bar{\sigma}(2u - 1)\right), \tag{D.16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_2^{(T_1^{BV}, \Psi A)} &= \frac{(m + m_B \bar{\sigma}(2u - 1))}{m_B}, \quad C_2^{(T_1^{BV}, \Psi V)} = -\frac{(m + m_B \bar{\sigma})}{m_B}, \\
 C_2^{(T_1^{BV}, XA)} &= \frac{1 - 2u}{m_B} - \frac{2m}{m_B^2 \bar{\sigma}}, \\
 C_3^{(T_1^{BV}, XA)} &= -\frac{2}{m_B^2 \bar{\sigma}}\left(m^3 + m^2 m_B \bar{\sigma}(1 - 2u) - m(q^2 + m_B^2 \bar{\sigma}^2) \right. \\
 &\quad \left. + m_B \bar{\sigma}(m_B^2 \bar{\sigma}^2 - q^2)(2u - 1)\right), \\
 C_2^{(T_1^{BV}, YA)} &= 2\frac{(2u - 1)}{m_B}, \quad C_3^{(T_1^{BV}, YA)} = -4\frac{m(m_B \bar{\sigma} + m(2u - 1))}{m_B}. \tag{D.17}
 \end{aligned}$$

Anhang E

Liste der Pion-Verteilungsamplituden

Der Einfachheit halber werden in diesem Anhang die in Kapitel 5.2 benötigten Verteilungsamplituden und Parameter noch einmal gesammelt. Weitestgehend ist diese Sammlung mit der in [46] identisch und hält sich an die Notationen aus [154], in welchem die frühere Untersuchungen [157, 158] aktualisiert und erweitert wurden.

Für das Vakuum-Pion Matrixelement des bilokalen Quark-Antiquark-Operators wird folgende Zerlegung in Zweiteilchenverteilungsamplituden verwendet:

$$\begin{aligned} \langle \pi^+(p) | \bar{u}_\omega^i(x_1) d_\xi^j(x_2) | 0 \rangle_{x^2 \rightarrow 0} &= \frac{i\delta^{ij}}{12} f_\pi \int_0^1 du e^{iup \cdot x_1 + i\bar{u}p \cdot x_2} \left([\not{p}\gamma_5]_{\xi\omega} \varphi_\pi(u) \right. \\ &\quad - [\gamma_5]_{\xi\omega} \mu_\pi \phi_{3\pi}^p(u) + \frac{1}{6} [\sigma_{\beta\tau}\gamma_5]_{\xi\omega} p_\beta (x_1 - x_2)_\tau \mu_\pi \phi_{3\pi}^\sigma(u) \\ &\quad \left. + \frac{1}{16} [\not{p}\gamma_5]_{\xi\omega} (x_1 - x_2)^2 \phi_{4\pi}(u) - \frac{i}{2} [(\not{x}_1 - \not{x}_2)\gamma_5]_{\xi\omega} \int_0^u \psi_{4\pi}(v) dv \right) \quad (\text{E.1}) \end{aligned}$$

Die Quarkfelder werden um den Lichtkegel entwickelt, d.h. $x_i = \xi_i x$ mit reellen Zahlen ξ_i und $x^2 = 0$. $\bar{u} = 1 - u$ wird wie schon zuvor als Abkürzung verwendet. Die Wilson-Linie, die das Matrixelement eichinvariant machte, wird weggelassen, da von der Lichtkegeleichung $x^\mu A_\mu = 0$ ausgegangen wird. In der Entwicklung tauchen eine Twist 2, φ_π , zwei Twist 3, $\phi_{3\pi}^p$, $\phi_{3\pi}^\sigma$ sowie zwei Twist 4, $\phi_{4\pi}$ und $\psi_{4\pi}$ Verteilungsamplituden auf. Die in der Literatur üblichen Definitionen dieser Verteilungsamplituden ergeben sich durch Multiplikation beider Seiten mit entsprechenden Dirac-Matrizen und durch bilden der Spur über Dirac- und Farbindizes.

Twist	Parameter	Numerischer Wert für $\mu = 1 \text{ GeV}$	Quelle
2	a_2^π a_4^π $a_{>4}^\pi$	0.25 ± 0.15 $-a_2^\pi + (0.1 \pm 0.1)$ 0	Mittelwert aus [154] $\pi\gamma\gamma^*$ Form Faktor [236]
3	μ_π $f_{3\pi}$ $\omega_{3\pi}$	$1.743^{+0.67}_{-0.38} \text{ GeV}$ $0.0045 \pm 0.0015 \text{ GeV}^2$ -1.5 ± 0.7	GMOR Relation, $m_{u,d}$ aus [27] 2-Punkt QCD SR [154] 2-Punkt QCD SR [154]
4	δ_π^2 $\epsilon_{4\pi}$	$0.18 \pm 0.06 \text{ GeV}^2$ $\frac{21}{8}(0.2 \pm 0.1)$	2-Punkt QCD SR [154, 116] 2-Punkt QCD SR [154]

Tabelle E.1: Eingabeparameter der Pion-Verteilungssamplituden.

Die analoge Zerlegung des Quark-Antiquark-Gluon Matrixelementes lautet:

$$\begin{aligned}
 \langle \pi^+(p) | \bar{u}_\omega^i(x_1) g_s G_{\mu\nu}^a(x_3) d_\xi^j(x_2) | 0 \rangle_{x^2 \rightarrow 0} &= \frac{\lambda_{ji}^a}{32} \int \mathcal{D}\alpha_i e^{ip(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)} \\
 &\times \left[i f_{3\pi} (\sigma_{\lambda\rho} \gamma_5)_{\xi\omega} (p_\mu p_\lambda g_{\nu\rho} - p_\nu p_\lambda g_{\mu\rho}) \Phi_{3\pi}(\alpha_i) \right. \\
 &- f_\pi (\gamma_\lambda \gamma_5)_{\xi\omega} \left\{ (p_\nu g_{\mu\lambda} - p_\mu g_{\nu\lambda}) \Psi_{4\pi}(\alpha_i) + \frac{p_\lambda (p_\mu x_\nu - p_\nu x_\mu)}{(p \cdot x)} (\Phi_{4\pi}(\alpha_i) + \Psi_{4\pi}(\alpha_i)) \right\} \\
 &- \frac{i f_\pi}{2} \epsilon_{\mu\nu\delta\rho} (\gamma_\lambda)_{\xi\omega} \left\{ (p^\rho g^{\delta\lambda} - p^\delta g^{\rho\lambda}) \tilde{\Psi}_{4\pi}(\alpha_i) \right. \\
 &\left. \left. + \frac{p_\lambda (p^\delta x^\rho - p^\rho x^\delta)}{(p \cdot x)} (\tilde{\Phi}_{4\pi}(\alpha_i) + \tilde{\Psi}_{4\pi}(\alpha_i)) \right\} \right]. \tag{E.2}
 \end{aligned}$$

Hier werden eine Twist 3 $\Phi_{3\pi}$ sowie vier Twist 4, $\Phi_{4\pi}$, $\Psi_{4\pi}$, $\tilde{\Phi}_{4\pi}$ und $\tilde{\Psi}_{4\pi}$ benötigt. Es werden sortiert nach Twist folgende Ausdrücke für die Verteilungssamplituden in den Gleichungen E.1 und E.2 verwendet

- Twist-2:

$$\varphi_\pi(u) = 6u\bar{u} \left(1 + a_2 C_2^{3/2} (u - \bar{u}) + a_4 C_4^{3/2} (u - \bar{u}) \right) \tag{E.3}$$

wobei nur die, für die Berechnung in Kapitel 5.2 verwendeten ersten beiden Gegenbauerpolynome angegeben werden. Deren Koeffizienten haben in führender Ordnung folgende Skalenabhängigkeit:

$$a_2(\mu_2) = [L(\mu_2, \mu_1)]^{\frac{25C_F}{6\beta_0}} a_2(\mu_1), \quad a_4(\mu_2) = [L(\mu_2, \mu_1)]^{\frac{91C_F}{15\beta_0}} a_4(\mu_1), \tag{E.4}$$

mit $L(\mu_2, \mu_1) = \alpha_s(\mu_2)/\alpha_s(\mu_1)$, $\beta_0 = 11 - 2n_f/3$.

- Twist-3 : Die Dreiteilchenverteilungssamplitude

$$\Phi_{3\pi}(\alpha_i) = 360\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2 \left[1 + \frac{\omega_{3\pi}}{2} (7\alpha_3 - 3) \right], \tag{E.5}$$

mit nichtperturbativen Parameter $f_{3\pi}$ und $\omega_{3\pi}$, die durch Matrixelemente lokaler Operatoren

$$\langle \pi^+(p) | \bar{u} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 G_{\alpha\beta} d | 0 \rangle = i f_{3\pi} \left[(p_\alpha p_\mu g_{\beta\nu} - p_\beta p_\mu g_{\alpha\nu}) - (p_\alpha p_\nu g_{\beta\mu} - p_\beta p_\nu g_{\alpha\mu}) \right], \quad (\text{E.6})$$

und

$$\langle \pi^+(p) | \bar{u} \sigma_{\mu\lambda} \gamma_5 [D_\beta, G_{\alpha\lambda}] d - \frac{3}{7} \partial_\beta \bar{u} \sigma_{\mu\lambda} \gamma_5 G_{\alpha\lambda} d | 0 \rangle = -\frac{3}{14} f_{3\pi} \omega_{3\pi} p_\alpha p_\beta p_\mu, \quad (\text{E.7})$$

gegeben sind. Die Skalenabhängigkeit dieser und des Parameters μ_π , wieder in führender Ordnung, lautet:

$$\mu_\pi(\mu_2) = [L(\mu_2, \mu_1)]^{-\frac{4}{\beta_0}} \mu_\pi(\mu_1) \quad (\text{E.8})$$

$$f_{3\pi}(\mu_2) = [L(\mu_2, \mu_1)]^{\frac{1}{\beta_0} \left(\frac{7C_F}{3} + 3 \right)} f_{3\pi}(\mu_1), \quad (\text{E.9})$$

$$(f_{3\pi} \omega_{3\pi})(\mu_2) = [L(\mu_2, \mu_1)]^{\frac{1}{\beta_0} \left(\frac{7C_F}{6} + 10 \right)} (f_{3\pi} \omega_{3\pi})(\mu_1). \quad (\text{E.10})$$

Zur selben Ordnung in der konformen Entwicklung sind die Twist 3 Zweiteilchenverteilungsamplituden durch

$$\begin{aligned} \phi_{3\pi}^p(u) &= 1 + 30 \frac{f_{3\pi}}{\mu_\pi f_\pi} C_2^{1/2} (u - \bar{u}) - 3 \frac{f_{3\pi} \omega_{3\pi}}{\mu_\pi f_\pi} C_4^{1/2} (u - \bar{u}), \\ \phi_{3\pi}^\sigma(u) &= 6u(1-u) \left(1 + 5 \frac{f_{3\pi}}{\mu_\pi f_\pi} \left(1 - \frac{\omega_{3\pi}}{10} \right) C_2^{3/2} (u - \bar{u}) \right), \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

gegeben.

- Twist4: Die vier Dreiteilchenverteilungsamplituden:

$$\begin{aligned} \Phi_{4\pi}(\alpha_i) &= 120 \delta_\pi^2 \varepsilon_\pi (\alpha_1 - \alpha_2) \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \\ \Psi_{4\pi}(\alpha_i) &= 30 \delta_\pi^2 (\mu) (\alpha_1 - \alpha_2) \alpha_3^2 \left[\frac{1}{3} + 2\varepsilon_\pi (1 - 2\alpha_3) \right], \\ \tilde{\Phi}_{4\pi}(\alpha_i) &= -120 \delta_\pi^2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \left[\frac{1}{3} + \varepsilon_\pi (1 - 3\alpha_3) \right], \\ \tilde{\Psi}_{4\pi}(\alpha_i) &= 30 \delta_\pi^2 \alpha_3^2 (1 - \alpha_3) \left[\frac{1}{3} + 2\varepsilon_\pi (1 - 2\alpha_3) \right], \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

mit den wiederum als Matrixelemente lokaler Operatoren definierten nichtperturbativen Parametern δ_π^2 und ε_π .

$$\langle \pi^+(p) | \bar{u} \tilde{G}_{\alpha\mu} \gamma^\alpha d | 0 \rangle = i \delta_\pi^2 f_\pi p_\mu, \quad (\text{E.13})$$

sowie mit Korrekturen bis Twist 5

$$\langle \pi^+(p) | \bar{u} [D_\mu, \tilde{G}_{\nu\xi}] \gamma^\xi d - \frac{4}{9} \partial_\mu \bar{u} \tilde{G}_{\nu\xi} \gamma^\xi d | 0 \rangle = -\frac{8}{21} f_\pi \delta_\pi^2 \varepsilon_\pi p_\mu p_\nu, \quad (\text{E.14})$$

die in führender Ordnung folgende Skalenabhängigkeit haben:

$$\delta_\pi^2(\mu_2) = [L(\mu_2, \mu_1)]^{\frac{8C_F}{3\beta_0}} \delta_\pi^2(\mu_1), \quad (\delta_\pi^2 \epsilon_\pi)(\mu_2) = [L(\mu_2, \mu_1)]^{\frac{10}{\beta_0}} (\delta_\pi^2 \epsilon_\pi)(\mu_1). \quad (\text{E.15})$$

Es sei angemerkt, daß der Twist 4 Parameter $\omega_{4\pi}$ aus [154] durch $\epsilon_\pi = (21/8)\omega_{4\pi}$ ersetzt wird. Mit diesen Definitionen sind die entsprechenden Zweiteilchenverteilungsamplituden durch

$$\begin{aligned} \phi_{4\pi}(u) &= \frac{200}{3} \delta_\pi^2 u^2 \bar{u}^2 + 21 \delta_\pi^2 \omega_{4\pi} \left\{ u \bar{u} (2 + 13u \bar{u}) + 2u^3 (10 - 15u + 6u^2) \right. \\ &\quad \left. \times \ln u + 2\bar{u}^3 (10 - 15\bar{u} + 6\bar{u}^2) \ln \bar{u} \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

$$\psi_{4\pi}(u) = \frac{20}{3} \delta_\pi^2 C_2^{1/2} (2u - 1) \quad (\text{E.17})$$

gegeben.

Ein Vergleich mit der ursprünglichen Definition aus [157] ergibt die Relationen:

$$\phi_{4\pi}(u) = 16 \left(g_1(u) - \int_0^u g_2(v) dv \right), \quad \psi_{4\pi}(u) = -2 \frac{dg_2(u)}{du}. \quad (\text{E.18})$$

In Tabelle E.1 werden die verwendeten numerischen Werte der verschiedenen Eingabeparameter angegeben.

Anhang F

Summenregeln mit Pion-Verteilungsamplituden

F.1 α_s -Korrekturen

In diesem Abschnitt werden die Streuamplituden, die in die Faktorisierungsformel 5.61 eingehen sowie ihre jeweiligen Imaginärteile, die zur Berechnung der α_s -Korrekturen 5.88 zu den Lichtkegelsummenregeln 5.80, 5.81 und 5.82 benötigt werden, angegeben. Es werden dimensionslose Größen

$$r_1 = \frac{q^2}{m_b^2}, \quad r_2 = \frac{(p+q)^2}{m_b^2}, \quad (\text{F.1})$$

die Integrationsvariable

$$\rho = r_1 + u(r_2 - r_1) \quad \int_0^1 du = \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\rho}{r_2 - r_1}, \quad (\text{F.2})$$

sowie die Kombination

$$G(x) = \text{Li}_2(x) + \ln^2(1-x) + \ln(1-x) \left(\ln \frac{m_b^2}{\mu^2} - 1 \right), \quad (\text{F.3})$$

eingeführt. Dabei ist $\text{Li}_2(x) = -\int_0^x \frac{dt}{t} \ln(1-t)$ die Spence-Funktion, bzw. der Dilogarithmus und

$$L_1(x) = \log \left(\frac{(x-1)^2 m_b^2}{x \mu^2} \right) - 1, \quad L_2(x) = \log \left(\frac{(x-1)^2 m_b^2}{x \mu^2} \right) - \frac{1}{x}. \quad (\text{F.4})$$

Die Imaginärteile der Streuamplituden werden bei festem $q^2 < m_b^2$ oder äquivalent $r_1 < 1$ gebildet, indem die Amplituden für $s = (p+q)^2 = m_b^2 r_2$ analytisch zu $s > m_b^2$, bzw. $r_2 > 1$ fortgesetzt werden. Die hierfür benötigten Formeln und Hilfsmittel werden in A insbesondere Anhang A.4 und A. 4 vorgestellt. Auf diese Weise können sämtliche Imaginärteile nach den Distributionen $\Theta(1-\rho)$, $\Theta(\rho-1)$ und $\delta(1-\rho)$ aufgeteilt werden.

F.1.1 LCSR für $f_{B\pi}^+(q^2)$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}T_1 &= \left(\frac{1}{\rho-1} - \frac{r_2-1}{(r_2-r_1)^2u} \right) G(r_1) + \left(\frac{1}{\rho-1} + \frac{1-r_1}{(r_2-r_1)^2(1-u)} \right) G(r_2) \\
 &- \left(\frac{2}{\rho-1} - \frac{r_2-1}{(r_2-r_1)^2u} + \frac{1-r_1}{(r_2-r_1)^2(1-u)} \right) G(\rho) \\
 &+ \frac{1}{r_2} \left(\frac{r_2-1}{\rho-1} - \frac{r_2-1}{(r_2-r_1)(1-u)} \right) \log(1-r_2) \\
 &+ \frac{1}{r_2} \left(\frac{r_2-2}{2\rho} - \frac{r_2}{2\rho^2} + \frac{r_2-1}{(r_2-r_1)(1-u)} \right) \log(1-\rho) \\
 &+ \frac{\rho+1}{2(\rho-1)^2} \left(3 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) - \frac{3\rho+1}{\rho} \right), \tag{F.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2\pi} \text{Im}_s T_1 &= \\
 &\theta(1-\rho) \left[\frac{1-r_1}{(r_2-r_1)(r_2-\rho)} L_1(r_2) + \left(\frac{L_2(r_2)}{\rho-1} \right)_+ + \frac{1}{(r_2-\rho)} \left(\frac{1}{r_2} - 1 \right) \right] \\
 &+ \theta(\rho-1) \left[\frac{1-r_1}{(r_2-r_1)(r_2-\rho)} L_1(r_2) + \frac{1+\rho-r_1-r_2}{(r_1-\rho)(r_2-\rho)} L_1(\rho) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{L_2(r_2) - 2L_1(\rho)}{\rho-1} \right)_+ + \frac{1}{2\rho} \left(1 - \frac{1}{\rho} - \frac{2}{r_2} \right) \right] \\
 &+ \delta(\rho-1) \left[\left(\log \frac{r_2-1}{1-r_1} \right)^2 - \left(\frac{1}{r_2} - 1 + \log r_2 \right) \log \frac{(r_2-1)^2}{1-r_1} \right. \\
 &\quad \left. + \text{Li}_2(r_1) - 3 \text{Li}_2(1-r_2) + 1 - \frac{\pi^2}{2} - \left(4 - 3 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{d}{d\rho} \right) \right], \tag{F.6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{r_2-r_1}{2} T_1^p &= \left(\frac{1}{\rho-1} - \frac{4r_1-1}{(r_2-r_1)u} \right) G(r_1) - \left(\frac{r_1}{\rho-1} + \frac{1+r_1+r_2}{(r_2-r_1)(1-u)} \right) G(r_2) \\
 &+ \left(-\frac{1-r_1}{\rho-1} + \frac{1+r_1+r_2}{(r_2-r_1)(1-u)} + \frac{4r_1-1}{(r_2-r_1)u} \right) G(\rho) \\
 &- \left(\frac{r_1}{\rho-1} + \frac{2r_1}{(r_2-r_1)u} \right) \log(1-r_1) \\
 &+ \frac{1}{r_2} \left(\frac{r_1+r_2-r_1r_2}{\rho-1} + \frac{r_1-r_2-r_2(r_1+r_2)}{(r_2-r_1)(1-u)} \right) \log(1-r_2) \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{3(3-r_1)}{\rho-1} + \frac{6(1-r_1)}{(\rho-1)^2} - 1 \right) \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) \\
 &+ \left(\frac{1-r_1}{\rho-1} - \frac{1}{2} - \frac{r_1-r_2-r_2(r_1+r_2)}{r_2(r_2-r_1)(1-u)} + \frac{2r_1}{(r_2-r_1)u} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2r_1 + r_2 - 3r_1r_2}{2r_2\rho} - \frac{r_1}{2\rho^2} \Big) \log(1 - \rho) \\
 & + \frac{2(r_1 - 3)}{\rho - 1} + \frac{1}{2} - \frac{r_1}{2\rho} - \frac{4(1 - r_1)}{(\rho - 1)^2}, \tag{F.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{r_2 - r_1}{2\pi} \text{Im}_s T_1^p = & \\
 & \theta(1 - \rho) \left[\frac{1 + r_2}{r_2(r_2 - \rho)} + \frac{1 + r_1 + r_2}{r_2 - \rho} L_2(r_2) - (1 - r_1 L_2(r_2)) \left(\frac{1}{\rho - 1} \right)_+ \right] \\
 & + \theta(\rho - 1) \left[\frac{1 + r_1 + r_2}{r_2 - \rho} L_1(r_2) - \left(\frac{4r_1 - 1}{\rho - r_1} - \frac{1 + r_1 + r_2}{\rho - r_2} \right) L_1(\rho) \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{r_1 L_2(r_2) + (1 - r_1) L_1(\rho) + r_1 - 2}{\rho - 1} \right)_+ \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} + \frac{2r_1 + r_2 - 3r_1r_2}{2r_2\rho} + \frac{r_1}{2\rho^2} + \frac{2r_1}{r_1 - \rho} \right] \\
 & + \delta(\rho - 1) \left[- \left(\log \frac{r_2 - 1}{1 - r_1} \right)^2 + (r_1 + 1) \log \left(\frac{r_2 - 1}{1 - r_1} \right) L_1(r_2) \right. \\
 & \quad - \log(r_2 - 1) \left(2\frac{r_1}{r_2} + 3(1 - r_1) + (r_1 - 1) \log r_2 \right) \\
 & \quad + \log(1 - r_1) \left(\frac{r_1}{r_2} + 1 - \log r_2 \right) + \frac{1}{2}(r_1 - 3) \left(3 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) - 4 \right) \\
 & \quad - \frac{\pi^2}{6}(4r_1 + 1) - \text{Li}_2(r_1) + (1 - 2r_1)\text{Li}_2(1 - r_2) \\
 & \quad \left. + (1 - r_1) \left(4 - 3 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) \right) \left(\frac{d}{d\rho} - \delta(r_2 - 1) \right) \right]. \tag{F.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3T_1^\sigma = & \left(-\frac{1}{(\rho - 1)^2} + \frac{2(1 - 2r_1)}{(1 - r_1)(\rho - 1)} - \frac{1 - 4r_1}{(r_2 - r_1)^2 u^2} \right. \\
 & - \frac{2(1 - 2r_1)}{(1 - r_1)(r_2 - r_1)u} \Big) G(r_1) + \left(-\frac{r_1}{(\rho - 1)^2} + \frac{2r_2}{(r_2 - 1)(\rho - 1)} \right. \\
 & \left. + \frac{1 + r_1 + r_2}{(r_2 - r_1)^2(1 - u)^2} + \frac{2r_2}{(r_2 - r_1)(r_2 - 1)(1 - u)} \right) G(r_2) \\
 & + \left(\frac{1 + r_1}{(\rho - 1)^2} + \frac{2(1 - 2r_1 - 2r_2 + 3r_1r_2)}{(1 - r_1)(r_2 - 1)(\rho - 1)} - \frac{1 + r_1 + r_2}{(r_2 - r_1)^2(1 - u)^2} \right. \\
 & \left. + \frac{1 - 4r_1}{(r_2 - r_1)^2 u^2} - \frac{2r_2}{(r_2 - r_1)(r_2 - 1)(1 - u)} + \frac{2(1 - 2r_1)}{(1 - r_1)(r_2 - r_1)u} \right) G(\rho) \\
 & + \left(-\frac{r_1}{(\rho - 1)^2} + \frac{2r_1}{(r_2 - r_1)^2 u^2} \right) \log(1 - r_1) + \left(\frac{r_1 - r_2 - r_1r_2}{r_2(\rho - 1)^2} \right. \\
 & \left. + \frac{4}{\rho - 1} - \frac{r_1 - r_2 - r_2(r_1 + r_2)}{r_2(r_2 - r_1)^2(1 - u)^2} + \frac{4}{(r_2 - r_1)(1 - u)} \right) \log(1 - r_2) \tag{F.9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{3(1+r_1)}{(\rho-1)^2} + \frac{1+3r_2+8r_1-10r_1r_2-3r_1^2+r_1^2r_2}{(1-r_1)(r_2-1)(\rho-1)} + \frac{r_2^2+r_1r_2+r_2-r_1}{r_2(r_2-r_1)^2(1-u)^2} \right. \\
 & + \frac{2r_1}{(r_2-r_1)^2u^2} + \frac{5r_2^2+r_1r_2-2r_2+r_1+1}{r_2(r_2-r_1)(r_2-1)(1-u)} - \frac{1-3r_1-4r_1^2}{r_1(1-r_1)(r_2-r_1)u} \\
 & \left. + \frac{r_1}{\rho^3} + \frac{2r_1-r_2-3r_1r_2}{2r_2\rho^2} + \frac{r_2r_1^2-r_1^2-r_2r_1-r_1+r_2}{r_1r_2\rho} \right) \log(1-\rho) \\
 & - \left(\frac{6(1+r_1)}{(\rho-1)^3} + \frac{5r_1-3}{2(\rho-1)^2} + \frac{1+r_2+3r_1-4r_1r_2-r_1^2}{(1-r_1)(r_2-1)(\rho-1)} \right. \\
 & \left. + \frac{1+r_1+r_2}{(r_2-r_1)(r_2-1)(1-u)} - \frac{1-4r_1}{(1-r_1)(r_2-r_1)u} \right) \log\left(\frac{m_b^2}{\mu^2}\right) \\
 & - \frac{1-4r_1-r_2+3r_1r_2+2r_1^2-r_1^2r_2}{(1-r_1)(r_2-1)(\rho-1)} + \frac{r_1}{r_2(r_2-r_1)(r_2-1)(1-u)} - \frac{r_1}{\rho^2} \\
 & - \frac{1-2r_1}{(1-r_1)(r_2-r_1)u} + \frac{8(1+r_1)}{(\rho-1)^3} - \frac{2(1-2r_1)}{(\rho-1)^2} + \frac{2r_1(r_2-1)+r_2}{2r_2\rho}. \quad (\text{F.10})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{3}{\pi} \text{Im}_s T_1^\sigma \\
 = & \theta(1-\rho) \left[(1+r_1L_2(r_2)) \left(\frac{1}{\rho-1} \right)_+ \frac{d}{d\rho} - 2 \left(1 + \frac{r_2L_2(r_2)}{r_2-1} \right) \left(\frac{1}{\rho-1} \right)_+ \right. \\
 & \left. - \left(\frac{1+r_1+r_2}{(\rho-r_2)^2} - \frac{2r_2}{(r_2-1)(\rho-r_2)} \right) L_2(r_2) - \frac{1+r_2}{r_2(\rho-r_2)^2} + \frac{2}{\rho-r_2} \right] \\
 + & \theta(\rho-1) \left[\left((1+r_1) \left(\frac{1-L_1(\rho)}{\rho-1} \right)_+ + (1+r_1L_2(r_2)) \left(\frac{1}{\rho-1} \right)_+ \right) \frac{d}{d\rho} \right. \\
 & + 2 \left(3 + \frac{1}{r_2-1} - \frac{1}{1-r_1} \right) \left(\frac{L_1(\rho)}{\rho-1} \right)_+ \\
 & + \left(-\frac{2r_2}{r_2-1} L_2(r_2) + \frac{1+r_1}{\rho} + \frac{2(2+r_1)}{r_2-1} + \frac{1-8r_1+r_1^2}{1-r_1} \right) \left(\frac{1}{\rho-1} \right)_+ \\
 & - \left(\frac{1+r_1+r_2}{(\rho-r_2)^2} - \frac{2r_2}{(r_2-1)(\rho-r_2)} \right) L_2(r_2) \\
 & - \left(\frac{1-4r_1}{(r_1-\rho)^2} + 2 \frac{1-2r_1}{(r_1-1)(r_1-\rho)} + \frac{2r_2}{(r_2-1)(\rho-r_2)} - \frac{1+r_1+r_2}{(r_2-\rho)^2} \right) L_1(\rho) \\
 & + \frac{r_1}{\rho^3} + \frac{2r_1}{(r_1-\rho)^2} - \frac{3r_2^2+r_1r_2+r_1+1}{r_2(r_2-1)(\rho-r_2)} + \frac{(r_2-1)(1+r_1+r_2)}{r_2(r_2-\rho)^2} \\
 & \left. - \frac{r_2+r_1(3r_2-2)}{2r_2\rho^2} - \frac{r_1(-r_2r_1+r_1+r_2+1)-r_2}{r_1r_2\rho} + \frac{(1+r_1)(1-4r_1)}{r_1(1-r_1)(r_1-\rho)} \right] \\
 + & \delta(\rho-1) \left[\frac{\pi^2}{3} \left(\frac{1}{2}(1-4r_1) \frac{d}{d\rho} + \frac{3-2r_1}{1-r_1} + \frac{4}{r_2-1} \right) \right. \\
 & + \left[\log^2(1-r_1) - (1-2r_1) \log^2(r_2-1) + \text{Li}_2(r_1) - (1+2r_1) \text{Li}_2(1-r_2) \right. \\
 & \left. \left. - \left(2-r_1 - \frac{r_1}{r_2} + 2r_1 \log(r_2-1) - r_1 \log r_2 \right) \log(1-r_1) \right] \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +2 \left(2 + r_1 - \frac{r_1}{r_2} - r_1 \log r_2 \right) \log(r_2 - 1) + 2(2 - r_1) \\
 & + \left(-\frac{5 - 3r_1}{2} + (1 - r_1) \log \frac{1 - r_1}{r_2 - 1} \right) \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) \Big] \frac{d}{d\rho} \\
 & -2 \left(2 - \frac{1}{1 - r_1} \right) \log^2(1 - r_1) - 2 \left(\frac{1}{1 - r_1} + \frac{2}{r_2 - 1} \right) \log^2(r_2 - 1) \\
 & -2 \left(2 - \frac{1}{1 - r_1} \right) \text{Li}_2(r_1) + 2 \left(3 - \frac{1}{1 - r_1} + \frac{r_2 + 1}{r_2 - 1} \right) \text{Li}_2(1 - r_2) \\
 & -2 + r_1 \left(1 - \frac{1}{r_2 - 1} \right) + \frac{1}{1 - r_1} \\
 & -2 \left(-3 + \frac{1}{r_2 - 1} + \frac{1}{1 - r_1} + \frac{r_2}{r_2 - 1} \log r_2 - \frac{2r_2}{r_2 - 1} \log(r_2 - 1) \right) \log(1 - r_1) \\
 & -2 \left(\frac{2}{1 - r_1} - \frac{3 + r_1}{r_2 - 1} - \frac{2r_2}{r_2 - 1} \log r_2 \right) \log(r_2 - 1) \\
 & + \left(4 - \frac{3}{1 - r_1} + \frac{2 + r_1}{r_2 - 1} - 2 \left(2 - \frac{r_2}{r_2 - 1} - \frac{1}{1 - r_1} \right) \right) \log(1 - r_1) \\
 & -2 \left(\frac{1}{r_2 - 1} + \frac{r_1}{1 - r_1} \right) \log(r_2 - 1) \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) \\
 & - (1 + r_1) \left(4 - 3 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) \right) \left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \delta(r_2 - 1) \frac{d}{d\rho} \right) \Big] \tag{F.11}
 \end{aligned}$$

Wie bereits mehrfach erwähnt sind die Amplituden im \overline{MS} -Schema gewonnen worden. Um zur Einschleifen-Polmasse überzugehen müssen folgende Terme zu den jeweiligen Streuamplituden T_1 , T_1^p und T_1^σ addiert werden:

$$\Delta T_1 = -\frac{2\rho \left(3 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) - 4 \right)}{(\rho - 1)^2}, \tag{F.12}$$

$$\Delta T_1^p = \frac{(r_1 - \rho)(\rho + 1) \left(3 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) - 4 \right)}{(r_2 - r_1)(\rho - 1)^2}, \tag{F.13}$$

$$\Delta T_1^\sigma = \frac{((3 - 2\rho)\rho + r_1(\rho + 3) + 3) \left(3 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) - 4 \right)}{6(\rho - 1)^3}. \tag{F.14}$$

Analog geschieht dies durch Addition der folgenden Terme

$$\frac{1}{2\pi} \text{Im}_s \Delta T_1 = \delta(\rho - 1) \left(3 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) - 4 \right) \left(1 + \frac{d}{d\rho} \right) \tag{F.15}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{r_2 - r_1}{2\pi} \text{Im}_s \Delta T_1^p &= \delta(\rho - 1) \left(3 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) - 4 \right) \\
 &\times \left(\frac{3 - r_1}{2} + (1 - r_1) \left(\frac{d}{d\rho} - \delta(r_2 - 1) \right) \right) \tag{F.16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{\pi} \text{Im} \Delta_s T_1^\sigma &= \delta(\rho - 1) \left(3 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) - 4 \right) \\ &\times \left(1 + \frac{1 - r_1}{2} \frac{d}{d\rho} - (1 + r_1) \left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \delta(r_2 - 1) \frac{d}{d\rho} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{F.17})$$

in den Imaginärteilen.

F.1.2 LCSR für $(f_{B\pi}^+(q^2) + f_{B\pi}^-(q^2))$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 &= \frac{r_1^2 - r_1 r_2 - (1 - r_1)(r_2 - r_1) \log(1 - r_1)}{r_1^2(\rho - 1)} + \frac{(1 - r_1)(r_1 + r_2) \log(1 - r_1)}{r_1^2(r_2 - r_1)u} \\ &- \frac{2(r_2 - 1) \log(1 - r_2)}{r_2(1 - u)(r_2 - r_1)} + \frac{(\rho - 1)(r_2 + \rho) \log(1 - \rho)}{(r_2 - r_1)(1 - u)u\rho^2} + \frac{r_2 - r_1}{r_1\rho} \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \text{Im}_s \tilde{T}_1 &= \theta(1 - \rho) \left[\frac{2(r_2 - 1)}{r_2(r_2 - \rho)} \right] \\ &+ \theta(\rho - 1) \frac{1}{r_1 - \rho} \left[\frac{r_1 - r_2}{\rho^2} - \frac{(2 - r_2)(r_2 - r_1)}{r_2\rho} + \frac{2(r_2 - 1)}{r_2} \right] \\ &+ \delta(\rho - 1) \left[\frac{r_2}{r_1} + \frac{(r_1 - 1)(r_1 - r_2) \log(1 - r_1)}{r_1^2} - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1^p &= \frac{4G(r_1)}{(r_2 - r_1)u} + \frac{2(r_2 - 1)G(r_2)}{(r_2 - r_1)(1 - u)(\rho - 1)} \\ &- \left(\frac{4}{(r_2 - r_1)u} + \frac{2}{\rho - 1} + \frac{2}{(r_2 - r_1)(1 - u)} \right) G(\rho) \\ &+ \left(\frac{2(r_1 + 1)}{r_1(r_2 - r_1)u} - \frac{1 - 2r_1 - r_1^2}{r_1^2(\rho - 1)} \right) \log(1 - r_1) \\ &+ \left(\frac{2(r_2 - 1)}{r_2(\rho - 1)} + \frac{2(r_2 - 1)}{(r_2 - r_1)r_2(1 - u)} \right) \log(1 - r_2) + \frac{2(\rho + 2)}{(\rho - 1)^2} \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) \\ &+ \left(-\frac{2(r_1 + 1)}{r_1(r_2 - r_1)u} - \frac{2(r_2 - 1)}{(r_2 - r_1)r_2(1 - u)} + \frac{2}{\rho - 1} + \frac{r_2 r_1 + 2r_1 + 2r_2}{r_1 r_2 \rho} \right. \\ &\left. - \frac{4}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \right) \log(1 - \rho) + \frac{1}{\rho} - \frac{1 + 3r_1}{r_1(\rho - 1)} - \frac{8}{(\rho - 1)^2} \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi} \text{Im}_s \tilde{T}_1^p &= \theta(1-\rho) \left[2 \frac{r_2-1}{\rho-r_2} L_2(r_2) \left(\frac{1}{\rho-1} \right)_+ \right] \\
 &+ \theta(\rho-1) \left[-2 \left(1 + \frac{1-r_2}{\rho-r_2} L_2(r_2) \right) \left(\frac{1}{\rho-1} \right)_+ + 2 \left(\frac{L_1(\rho)}{\rho-1} \right)_+ \right. \\
 &\quad + \frac{2(-r_1+2r_2-\rho)}{(r_1-\rho)(\rho-r_2)} L_1(\rho) - \frac{2r_1+2r_2-3r_2r_1}{r_1r_2\rho} + 2 \frac{(r_1+1)}{r_1(\rho-r_1)} \\
 &\quad \left. - 2 \frac{r_2-1}{r_2(\rho-r_2)} - \frac{1}{\rho^2} \right] \\
 &+ \delta(\rho-1) \left[2 \left(\log(r_2) + \frac{2}{r_2} - 3 \right) \log(r_2-1) \right. \\
 &\quad + \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{r_1(2-r_1)}{r_1^2} - \frac{2}{r_2} \right) \log(1-r_1) + \frac{4}{3} \pi^2 \\
 &\quad - 2 \log \left(\frac{r_2-1}{1-r_1} \right) L_1(r_2) + 4 \text{Li}_2(1-r_2) + \frac{1}{r_1} + 3 - 2 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) \\
 &\quad \left. + 2 \left(4 - 3 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) \right) \left(\frac{d}{d\rho} - \delta(r_2-1) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{F.21}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}_1^\sigma &= \frac{2(r_1-1)G(r_1)}{3u^2(\rho-1)(r_1-r_2)} + \left(\frac{r_2-r_1}{3(\rho-1)^2} - \frac{1}{3(r_2-r_1)(1-u)^2} \right) G(r_2) \\
 &+ \left(\frac{2(r_2-r_1)}{3(r_1-1)(\rho-1)} + \frac{2}{3(1-r_1)u} - \frac{r_2-r_1}{3(\rho-1)^2} + \frac{1}{3(1-u)^2(r_2-r_1)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{3u^2(r_2-r_1)} \right) G(\rho) \\
 &+ \left(\frac{1+r_1}{3r_1(r_1-r_2)u^2} + \frac{1}{3r_1^2u} + \frac{r_2-r_1}{3r_1^2(1-\rho)} - \frac{r_1^3-r_2r_1^2+r_1-r_2}{6r_1^2(\rho-1)^2} \right) \log(1-r_1) \\
 &+ \left(\frac{r_2^2-r_1r_2-r_2+r_1}{3r_2(\rho-1)^2} - \frac{r_2-1}{3r_2(r_2-r_1)(1-u)^2} \right) \log(1-r_2) \\
 &+ \left(\frac{1-r_1}{3r_1(r_2-r_1)u^2} + \frac{1+r_2}{3(r_2-1)r_2(1-u)} + \frac{(r_2-r_1)((r_2-1)r_1^2-2r_2r_1+r_2)}{3r_1^2r_2\rho} \right. \\
 &\quad + \frac{1}{3(r_2-r_1)(1-u)^2} - \frac{1}{3r_2(r_2-r_1)(1-u)^2} + \frac{2}{3(r_2-r_1)u^2} + \frac{r_2-r_1}{(\rho-1)^2} \\
 &\quad + \frac{(r_2-r_1)(2-3r_2)}{6r_2\rho^2} + \frac{r_2-r_1}{3\rho^3} + \frac{3r_1-1}{3r_1^2u(1-r_1)} + \frac{2}{3u(1-r_1)} \\
 &\quad \left. + \frac{2(r_2-r_1)}{3(\rho-1)(r_1-1)} + \frac{(r_1(r_2-3)-3r_2+5)(r_2-r_1)}{3(r_2-1)(\rho-1)(1-r_1)} \right) \log(1-\rho) \\
 &+ \left(\frac{2(r_2-r_1)}{(\rho-1)^3} + \frac{1}{3(r_2-1)(1-u)} + \frac{2}{3(1-r_1)u} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{-r_1^2-r_2r_1+3r_1+2r_2^2-3r_2}{3(r_1-1)(r_2-1)(\rho-1)} + \frac{2(r_2-r_1)}{3(\rho-1)^2} \right) \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{3r_2(1-r_2)(1-u)} + \frac{1}{3r_1u} + \frac{-r_2r_1^2 + 2r_1^2 + r_2^2r_1 - r_2r_1 - r_1 - r_2^2 + r_2}{3r_1(r_2-1)(\rho-1)} \\
 & + \frac{-r_2^2 + r_1r_2 + r_2 - r_1}{3r_2\rho} - \frac{-7r_1^2 + 7r_2r_1 + r_1 - r_2}{6r_1(\rho-1)^2} + \frac{r_2 - r_1}{3\rho^2} + \frac{8(r_2 - r_1)}{3(1-\rho)^3}
 \end{aligned} \tag{F.22}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{r_2 - r_1} \frac{1}{\pi} \text{Im}_s \tilde{T}_1^\sigma & = \theta(1-\rho) \left[\frac{L_2(r_2)}{(r_2-\rho)^2} - L_2(r_2) \left(\frac{1}{\rho-1} \right)_+ \frac{d}{d\rho} \right] \\
 & + \theta(\rho-1) \left[\left(\frac{L_1(\rho) - L_2(r_2) - 1}{\rho-1} \right)_+ \frac{d}{d\rho} + \frac{L_2(r_2)}{(r_2-\rho)^2} \right. \\
 & + \left(-\frac{2}{(r_1-\rho)^2} - \frac{1}{(r_2-\rho)^2} + \frac{2}{(r_1-1)(\rho-r_1)} \right) L_1(\rho) \\
 & - 2 \left(\frac{3-r_1-2r_2}{(1-r_1)(r_2-1)} \right) \left(\frac{1}{\rho-1} \right)_+ + \frac{2}{1-r_1} \left(\frac{L_1(\rho)}{\rho-1} \right)_+ \\
 & + \frac{1+r_2}{r_2(r_2-1)(\rho-r_2)} + \frac{r_1^2 + 2r_1r_2 - r_2}{r_1^2r_2\rho} + \frac{r_1(2r_1+3) - 1}{(r_1-1)r_1^2(\rho-r_1)} \\
 & \left. + \frac{3r_2-2}{2r_2\rho^2} - \frac{1+r_1}{r_1(\rho-r_1)^2} + \frac{1-r_2}{r_2(\rho-r_2)^2} - \frac{1}{\rho^3} \right] \\
 & + \delta(\rho-1) \left[\frac{\pi^2}{3} \left(2\frac{d}{d\rho} - \frac{1}{1-r_1} \right) \right. \\
 & - \left(\log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) (1 - \log(r_2-1)) - 2\text{Li}_2(1-r_2) \right. \\
 & + 2\log(r_2-1)(1 - \log(r_2-1) + L_2(r_2)) \\
 & + \frac{1}{2} \log(1-r_1) \left(1 + \frac{1}{r_1^2} - 2L_2(r_2) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} - 3 \right) \left. \right) \frac{d}{d\rho} \\
 & + \frac{2\log(1-r_1)}{1-r_1} \left(1 + \frac{1-r_1}{2r_1^2} - \log(1-r_1) \right) \\
 & + \frac{2\log(r_2-1)}{1-r_1} \left(\log(r_2-1) + \frac{r_1+r_2-2}{r_2-1} \right) + \frac{2}{r_1-1} \\
 & \times \left(-\frac{r_1+2r_2-3}{2(r_2-1)} + \log(1-r_1) - \log(r_2-1) \right) \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) \\
 & + \frac{2}{r_1-1} (\text{Li}_2(r_1) - \text{Li}_2(1-r_2)) + \frac{1}{r_2-1} + \frac{1}{r_1} - 1 \\
 & \left. + \left(4 - 3\log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) \right) \left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \delta(r_2-1) \frac{d}{d\rho} \right) \right] \tag{F.23}
 \end{aligned}$$

Auch hier werden die Terme, die benötigt werden, um zum Polmassenschema zu

wechseln. Zum Ersten für die Amplituden:

$$\Delta\tilde{T}_1 = 0, \quad (\text{F.24})$$

$$\Delta\tilde{T}_1^p = -\frac{(\rho+1)\left(3\log\left(\frac{m_b^2}{\mu^2}\right)-4\right)}{(\rho-1)^2}, \quad (\text{F.25})$$

$$\Delta\tilde{T}_1^\sigma = -\frac{(r_2-r_1)(\rho+3)\left(3\log\left(\frac{m_b^2}{\mu^2}\right)-4\right)}{6(\rho-1)^3}, \quad (\text{F.26})$$

Zum Zweiten für die Imaginärteile:

$$\frac{1}{\pi}\text{Im}_s\Delta\tilde{T}_1 = 0, \quad (\text{F.27})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\text{Im}_s\Delta\tilde{T}_1^p &= \delta(\rho-1)\left(3\log\left(\frac{m_b^2}{\mu^2}\right)-4\right) \\ &\times \left(1+2\left(\frac{d}{d\rho}-\delta(r_2-1)\right)\right), \end{aligned} \quad (\text{F.28})$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{r_2-r_1}\frac{1}{\pi}\text{Im}_s\tilde{T}_1^\sigma &= \delta(\rho-1)\left(3\log\left(\frac{m_b^2}{\mu^2}\right)-4\right) \\ &\times \left(\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}+\frac{d^2}{d\rho^2}-\delta(r_2-1)\frac{d}{d\rho}\right). \end{aligned} \quad (\text{F.29})$$

F.1.3 LCSR für $f_{B\pi}^T(q^2)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}T_1^T &= \left(\frac{1-r_1}{(r_2-r_1)(\rho-1)}-\frac{r_2-1}{(r_2-r_1)^2u}+\frac{r_2-1}{(r_2-r_1)(\rho-1)}\right)G(r_1) \\ &+ \left(\frac{1-r_1}{(r_2-r_1)^2(1-u)}+\frac{1}{\rho-1}\right)G(r_2) \\ &+ \left(-\frac{1-r_1}{(r_2-r_1)^2(1-u)}+\frac{r_2-1}{(r_2-r_1)^2u}-\frac{2}{\rho-1}\right)G(\rho) \\ &+ \left(-\frac{1-r_1}{r_1(r_2-r_1)u}+\frac{1-r_1}{r_1(\rho-1)}\right)\log(1-r_1) \\ &+ \left(\frac{r_2-1}{(r_2-r_1)r_2(1-u)}+\frac{r_2-1}{r_2(\rho-1)}\right)\log(1-r_2) \\ &+ \left(-\frac{r_2-1}{(r_2-r_1)r_2(1-u)}+\frac{1}{2\rho^2}+\frac{1-r_1}{r_1(r_2-r_1)u}\right. \\ &\quad \left.-\frac{-2r_1+r_2r_1+2r_2}{2r_1r_2\rho}\right)\log(1-\rho)-\frac{4}{(\rho-1)^2} \\ &+ \left(-\frac{1}{2(\rho-1)}+\frac{3}{(\rho-1)^2}\right)\log\left(\frac{m_b^2}{\mu^2}\right)+\frac{1}{\rho-1}+\frac{1}{2\rho} \end{aligned} \quad (\text{F.30})$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \text{Im}_s T_1^T &= \theta(1-\rho) \left[\frac{1-r_1}{(r_2-r_1)(\rho-r_2)} L_1(r_2) - L_2(r_2) \left(\frac{1}{\rho-1} \right)_+ + \frac{r_2-1}{r_2(\rho-r_2)} \right] \\
 &+ \theta(\rho-1) \left[\frac{1-r_1}{(r_2-r_1)(\rho-r_2)} L_1(r_2) + \frac{r_1+r_2-\rho-1}{(r_1-\rho)(r_2-\rho)} L_1(\rho) \right. \\
 &\quad \left. - L_2(r_2) \left(\frac{1}{\rho-1} \right)_+ + 2 \left(\frac{L_1(\rho)}{\rho-1} \right)_+ \right. \\
 &\quad \left. + \frac{r_1-1}{r_1(\rho-r_1)} + \frac{2(r_2-r_1)+r_1r_2}{2r_1r_2\rho} - \frac{1}{2\rho^2} \right] \\
 &+ \delta(\rho-1) \left[- \left(\log \frac{r_2-1}{1-r_1} \right)^2 + \left(-\log(r_2) - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + 2 \right) \log(1-r_1) \right. \\
 &\quad \left. + 2 \log(r_2-1) \left(\log(r_2) + \frac{1}{r_2} - 1 \right) + \frac{1}{2} \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) - \text{Li}_2(r_1) \right. \\
 &\quad \left. + 3 \text{Li}_2(1-r_2) - 1 + \frac{\pi^2}{2} + \left(4 - 3 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) \right) \frac{d}{d\rho} \right] \quad (\text{F.31})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} T_1^{Tp} &= \left(-\frac{3}{(r_2-r_1)^2 u} + \frac{1}{(r_2-r_1)(\rho-1)} \right) G(r_1) \\
 &- \left(\frac{1}{(r_2-r_1)(\rho-1)} + \frac{3}{(r_2-r_1)^2(1-u)} \right) G(r_2) + \frac{3G(\rho)}{(r_1-r_2)^2 u(1-u)} \\
 &+ \left(\frac{1-2r_1}{r_1(r_2-r_1)(\rho-1)} - \frac{2}{(r_2-r_1)^2 u} \right) \log(1-r_1) \\
 &+ \left(\frac{1}{(r_2-r_1)r_2(\rho-1)} - \frac{2}{(r_2-r_1)^2(1-u)} \right) \log(1-r_2) \\
 &+ \left(\frac{2}{(r_2-r_1)\rho} + \frac{2}{(r_2-r_1)^2 u(1-u)} \right) \log(1-\rho) \quad (\text{F.32})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{r_2-r_1}{2\pi} \text{Im}_s T_1^{Tp} &= \theta(1-\rho) \left[\frac{3}{r_2-\rho} L_1(r_2) + (L_2(r_2)-1) \left(\frac{1}{\rho-1} \right)_+ + \frac{2}{r_2-\rho} \right] \\
 &+ \theta(\rho-1) \left[\frac{3}{r_2-\rho} L_1(r_2) + \frac{3(r_1-r_2)}{(r_2-\rho)(\rho-r_1)} L_1(\rho) \right. \\
 &\quad \left. + (L_2(r_2)-1) \left(\frac{1}{\rho-1} \right)_+ - \frac{2(r_1-2\rho)}{(r_1-\rho)\rho} \right] \\
 &- \delta(\rho-1) \left[\log^2(1-r_1) \right. \\
 &\quad \left. + \left(2 \log(r_2-1) - \log(r_2) + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - 4 \right) \log(1-r_1) \right. \\
 &\quad \left. - 3 \log^2(r_2-1) + 2 \log(r_2-1) \left(\log(r_2) + \frac{1}{r_2} + 1 + \frac{5\pi^2}{6} \right) \right. \\
 &\quad \left. - 2 \left(\log \frac{r_2-1}{1-r_1} \right) \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) + \text{Li}_2(r_1) + \text{Li}_2(1-r_2) \right] \quad (\text{F.33})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}T_1^{T\sigma} &= \left(\frac{-1}{3(1-r_1)(\rho-1)} - \frac{1}{6(\rho-1)^2} \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{3(1-r_1)(r_2-r_1)u} + \frac{1}{2(r_2-r_1)^2u^2} \right) G(r_1) \\
 &+ \left(\frac{1}{3(r_2-1)(\rho-1)} - \frac{1}{6(\rho-1)^2} + \frac{1}{3(r_2-r_1)(r_2-1)(1-u)} \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2(r_2-r_1)^2(1-u)^2} \right) G(r_2) + \left(\frac{r_1+r_2-2}{3(1-r_1)(r_2-1)(\rho-1)} \right. \\
 &- \left. \frac{1}{3(r_2-r_1)(r_2-1)(1-u)} - \frac{1}{3(1-r_1)(r_2-r_1)u} \right. \\
 &- \left. \frac{1}{2(r_2-r_1)^2(1-u)^2} - \frac{1}{2(r_2-r_1)^2u^2} + \frac{1}{3(\rho-1)^2} \right) G(\rho) + \log(1-r_1) \\
 &\times \left(\frac{1}{3(r_2-r_1)^2u^2} - \frac{1}{3(r_2-r_1)ur_1} + \frac{1}{3(\rho-1)r_1} - \frac{1}{6(\rho-1)^2r_1} \right) \\
 &+ \left(\frac{1-2r_2}{6r_2(\rho-1)^2} + \frac{1}{3(r_2-r_1)r_2(1-u)} + \frac{1}{3r_2(\rho-1)} \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{3(r_2-r_1)^2(1-u)^2} \right) \log(1-r_2) \\
 &+ \left(\frac{r_1+r_2-2}{2(1-r_1)(r_2-1)(\rho-1)} - \frac{1}{2(r_2-r_1)(r_2-1)(1-u)} \right. \\
 &- \left. \frac{1}{2(1-r_1)(r_2-r_1)u} - \frac{1}{(\rho-1)^2} - \frac{2}{(\rho-1)^3} \right) \log\left(\frac{m_b^2}{\mu^2}\right) \\
 &- \left(\frac{5r_1+1}{6(1-r_1)r_1(r_2-r_1)u} + \frac{5r_2+1}{6(r_2-1)r_2(r_2-r_1)(1-u)} \right. \\
 &+ \left. \frac{r_2r_1-4r_1-4r_2+7}{3(1-r_1)(r_2-1)(\rho-1)} - \frac{-2r_2r_1+r_1+r_2}{6r_1r_2\rho} \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{3(r_2-r_1)^2(1-u)^2} + \frac{1}{3(r_2-r_1)^2u^2} + \frac{1}{(\rho-1)^2} \right) \log(1-\rho) \\
 &+ \frac{2-r_1-r_2}{6(1-r_1)(r_2-1)(\rho-1)} + \frac{1}{6(r_2-r_1)(r_2-1)(1-u)} \\
 &+ \frac{1}{6(1-r_1)(r_2-r_1)u} + \frac{5}{3(\rho-1)^2} + \frac{8}{3(\rho-1)^3} \tag{F.34}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{2\pi}\text{Im}_s T_1^{T\sigma} &= \theta(1-\rho) \left[\frac{1}{\rho-r_2} \left[\left(-\frac{3}{2(\rho-r_2)} + \frac{1}{r_2-1} \right) L_2(r_2) + \frac{r_2-3}{2r_2(\rho-r_2)} \right] \right. \\
 &- \left. \left(\frac{L_2(r_2)}{r_2-1} - \frac{1+L_2(r_2)}{2} \frac{d}{d\rho} \right) \left(\frac{1}{\rho-1} \right)_+ \right] \\
 &+ \theta(\rho-1) \left[\left(\left(\frac{1-L_1(\rho)}{\rho-1} \right)_+ + \frac{1+L_2(r_2)}{2} \left(\frac{1}{\rho-1} \right)_+ \right) \frac{d}{d\rho} \right. \\
 &+ \left. \frac{r_1+r_2-2}{(r_1-1)(r_2-1)} \left(\frac{L_1(\rho)}{\rho-1} \right)_+ + \left(-\frac{3}{2(\rho-r_2)} + \frac{1}{r_2-1} \right) \frac{L_2(r_2)}{\rho-r_2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{1}{\rho - r_2} \left(\frac{3}{2(\rho - r_2)} - \frac{1}{r_2 - 1} \right) \right. \\
 & + \left. \frac{1}{\rho - r_1} \left(\frac{3}{2(\rho - r_1)} - \frac{1}{r_1 - 1} \right) \right) L_1(\rho) \\
 & + \left(-\frac{L_2(r_2)}{r_2 - 1} + \frac{4 - r_1}{r_1 - 1} + \frac{3}{r_2 - 1} + \frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{1}{\rho - 1} \right)_+ \\
 & - \frac{1}{2} \left(\frac{1 + 5r_1}{r_1(r_1 - 1)(\rho - r_1)} + \frac{1 + 5r_2}{r_2(r_2 - 1)(\rho - r_2)} - \frac{2}{(\rho - r_1)^2} \right. \\
 & \left. - \frac{3(r_2 - 1)}{r_2(\rho - r_2)^2} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - 2 \right) \right) \\
 & + \delta(\rho - 1) \left[\frac{\pi^2}{4} \left(-\frac{d}{d\rho} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1 - r_1} + \frac{4}{r_2 - 1} \right) \right) + \left[\frac{1}{2} \log^2(1 - r_1) \right. \right. \\
 & + \left(-\log(r_2 - 1) + \frac{1}{2} \log(r_2) + \frac{r_1 + r_2 - 2r_1r_2}{2r_1r_2} \right) \log(1 - r_1) \\
 & + \frac{1}{2} \log^2(r_2 - 1) - \left(\log r_2 + \frac{1 - 3r_2}{r_2} \right) \log(r_2 - 1) \\
 & \left. - 3 + 2 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) + \frac{1}{2} (\text{Li}_2(r_1) - 3 \text{Li}_2(1 - r_2)) \right] \frac{d}{d\rho} + \frac{\log^2(1 - r_1)}{1 - r_1} \\
 & - \left(-2 \frac{\log(r_2 - 1)}{r_2 - 1} + \frac{\log r_2}{r_2 - 1} + \frac{1}{r_1(1 - r_1)} + \frac{1}{r_2(r_2 - 1)} \right) \\
 & \times \log(1 - r_1) - \left(\frac{2}{r_2 - 1} + \frac{1}{1 - r_1} \right) \log^2(r_2 - 1) \\
 & - 2 \left(-\frac{2}{r_2 - 1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{1 - r_1} - \frac{\log r_2}{r_2 - 1} \right) \log(r_2 - 1) - \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) \\
 & \times \left(\frac{3(r_1 + r_2 - 2)}{2(1 - r_1)(r_2 - 1)} + \left(\frac{1}{r_2 - 1} + \frac{1}{1 - r_1} \right) \log \left(\frac{r_2 - 1}{1 - r_1} \right) \right) \\
 & + \frac{1}{1 - r_1} \left(\text{Li}_2(r_1) - \frac{2r_1 + r_2 - 3}{r_2 - 1} \text{Li}_2(1 - r_2) \right) + \frac{r_1 + r_2 - 2}{2(1 - r_1)(r_2 - 1)} \\
 & \left. - \left(4 - 3 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) \right) \left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \delta(r_2 - 1) \frac{d}{d\rho} \right) \right] \quad (\text{F.35})
 \end{aligned}$$

Zum Abschluß werden auch für den Tensorformfaktor die nötigen Angaben gemacht, um zum Polschema zu wechseln. Zum Ersten wieder die Additionsterme für die Amplituden:

$$\Delta T_1^T = -\frac{(\rho + 1) \left(3 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) - 4 \right)}{(\rho - 1)^2}, \quad (\text{F.36})$$

$$\Delta T_1^{Tp} = 0, \quad (\text{F.37})$$

$$\Delta T_1^{T\sigma} = \frac{2(\rho + 1) \left(3 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) - 4 \right)}{3(\rho - 1)^3}. \quad (\text{F.38})$$

Zum Zweiten für die Imaginärteile:

$$\frac{1}{2\pi}\text{Im}_s\Delta T_1^T = \delta(\rho - 1) \left(3 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) - 4 \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{d}{d\rho} \right), \quad (\text{F.39})$$

$$\frac{1}{\pi}\text{Im}_s\Delta T_1^{Tp} = 0, \quad (\text{F.40})$$

$$\frac{3}{2\pi}\text{Im}_s\Delta T_1^{T\sigma} = -\delta(\rho - 1) \left(3 \log \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) - 4 \right) \left(\frac{d}{d\rho} + \left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \delta(r_2 - 1) \frac{d}{d\rho} \right) \right). \quad (\text{F.41})$$

F.2 Zweipunktsummenregeln für f_B

Es wird die Summenregel mit $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Genauigkeit verwendet, wobei der perturbative Anteil im \overline{MS} -Massenschema für das b -Quark berechnet wird [175]:

$$\begin{aligned} f_B^2 &= \frac{e^{m_B^2/M^2}}{m_B^4} \left[\frac{3m_b^2}{8\pi^2} \int_{m_b^2}^{s_0^B} ds e^{-s/M^2} \left\{ \frac{(s - m_b^2)^2}{s} + \frac{\alpha_s C_F}{\pi} \rho_1(s, m_b^2) \right\} \right. \\ &\quad \left. + m_b^2 e^{-m_b^2/M^2} \left\{ -m_b \langle \bar{q}q \rangle \left(1 + \frac{\alpha_s C_F}{\pi} \delta_1(M^2, m_b^2) + \frac{m_0^2}{2M^2} \left(1 - \frac{m_b^2}{2M^2} \right) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{12} \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \rangle - \frac{16\pi}{27} \frac{\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2}{M^2} \left(1 - \frac{m_b^2}{4M^2} - \frac{m_b^4}{12M^4} \right) \right\} \right]. \quad (\text{F.42}) \end{aligned}$$

\overline{M} und \overline{s}_0^B sind der Borel- bzw. Dualitätsparameter. Die Funktionen, die die α_s -Korrekturen zum perturbativen Anteil sowie zum Quark-Kondensat bestimmen, sind

$$\begin{aligned} \rho_1(s, m_b^2) &= \frac{s}{2}(1-x) \left\{ (1-x) [4Li_2(x) + 2 \ln x \ln(1-x) - (5-2x) \ln(1-x)] \right. \\ &\quad \left. + (1-2x)(3-x) \ln x + 3(1-3x) \ln \frac{\mu^2}{m_b^2} + \frac{1}{2}(17-33x) \right\}, \quad x = \frac{m_b^2}{s}, \\ \delta_1(M^2, m_b^2) &= -\frac{3}{2} \left[\Gamma\left(0, \frac{m_b^2}{M^2}\right) e^{m_b^2/M^2} - 1 - \left(1 - \frac{m_b^2}{M^2}\right) \left(\ln \left(\frac{\mu^2}{m_b^2} \right) + \frac{4}{3} \right) \right] \quad (\text{F.43}) \end{aligned}$$

und $\Gamma(n, z)$ die unvollständige Gammafunktion

$$\Gamma(n, z) = \int_n^\infty dt e^{-t} t^{n-1} \quad (x > 0). \quad (\text{F.44})$$

Literaturverzeichnis

- [1] E. Noether. "Invariante Variationsprobleme", Gött. Nachr. 1918, 235-257 (1918).
- [2] A. Einstein. "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie", Annalen der Physik 49, 769 (1916).
- [3] S. Weinberg. "A Model of Leptons", Phys. Rev. Letters 19, 1967.
- [4] S. L. Glashow. "Partial Symmetries of Weak Interaction", in Nucl. Phys. 22, 1961.
- [5] A. Salam. "Weak and Electromagnetic Interactions", originally printed in "Svartholm: Particle Theory, Proceedings of the Nobel Symposium Held 1968 at Lerum, Sweden", Stockholm, 1968.
- [6] P. W. Higgs. "Broken symmetries, massless particles and gauge fields", Phys.Lett.12:132-133,1964.
- [7] P. W. Higgs. "Spontaneous Symmetry Breakdown Without Massless Bosons", Phys.Rev.145:1156-1163,1966.
- [8] P. W. Higgs. "Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons", Phys.Rev.Lett.13:508-509,1964.
- [9] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, T. W. B. Kibble. "Global Conservation Laws and Massless Particles", Phys.Rev.Lett.13:585-587,1964.
- [10] G. 't Hooft, M. J. G. Veltman. "Regularization and Renormalization of Gauge Fields", Nucl.Phys.B44:189-213,1972.
- [11] G. 't Hooft, M. J. G. Veltman. "Combinatorics of gauge fields", Nucl.Phys.B50:318-353,1972.
- [12] D. J. Gross, F. Wilczek. "Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories", Phys.Rev.Lett.30:1343-1346,1973.
- [13] H. D. Politzer. "Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?", Phys.Rev.Lett.30:1346-1349,1973.
- [14] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, H. Leutwyler. "Advantages of the Color Octet Gluon Picture", Phys.Lett.B47:365-368,1973.

- [15] M. E. Peskin, D. V. Schroeder. "An Introduction to Quantum Field Theory", Addison-Wesley, 1995.
- [16] M. Maggiore. "A Modern Introduction to Quantum Field Theory", Oxford University Press, 2005.
- [17] C. Itzykson, J.-B. Zuber. "Quantum Field Theory", McGraw-Hill, 1980.
- [18] A. Pich. "The Standard Model of Electroweak Interactions", Updated version of the lectures given at the 2006 European School of High Energy Physics (Aronsborg, Sweden, 18 June - 1 July 2006) and at the 4th CERN - CLAF School of High Energy Physics (Vina del Mar, Chile, 18 February - 3 March 2007),. arXiv:0705.4264.
- [19] J. L. Rosner. "Resource Letter: The Standard Model and Beyond", Am.J.Phys. 71 (2003) 302-318.
- [20] J. F. Donoghue, E. Golowich, B. R. Holstein. "Dynamics of the Standard Model", Cambridge University Press, 1992.
- [21] C. Quigg. "Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions", The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1983.
- [22] W. N. Cottingham, D. A. Greenwood. "*An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*". CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, zweite edition, 2007.
- [23] S. Abachi, et al. (D0 Collaboration). "Observation of the Top Quark", Phys.Rev.Lett. 74 (1995) 2632-2637.
- [24] F. Abe, et al. (CDF Collaboration). "Observation of Top Quark Production in Pbar-P Collisions", Phys.Rev.Lett. 74 (1995) 2626-2631.
- [25] C. Campagnari, M. Franklin. "The discovery of the top quark", Rev.Mod.Phys. 69 (1997) 137-212.
- [26] C.S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes, R. P. Hudson. "Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay", Phys. Rev. 105, 1957.
- [27] W. M. Yao et al. [Particle Data Group Collaboration], Journal of Physics G33, 1 (2006).
- [28] M. Kobayashi, T. Maskawa. "CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction", in Prog. Theor. Phys. 49, 1973.
- [29] L. Wolfenstein. "Parametrization of the Kobayashi-Maskawa Matrix", Phys.Rev.Lett.51:1945,1983.
- [30] N. Cabibbo. "Unitary Symmetry and Leptonic Decays", Phys.Rev.Lett.10:531-532,1963.

- [31] Y. Nir. "CP-Violation - A New Era", hep-ph/0109090, September 2001.
- [32] I. I. Bigi, A. I. Sanda. "CP - Violation", Cambridge University Press, 2000.
- [33] S. M. Bilenky. "CP-violation and unitarity triangle test of the Standard Model", 1 On the basis of the lectures given to the students of SISSA (Trieste) in 2006 arXiv: 0706.2678v1 [hep-ph].
- [34] I. I. Bigi. "Flavour Dynamics & CP Violation in the Standard Model: A Crucial Past – and an Essential Future", lectures given at the 2006 CERN Summer School of High Energy Physics; Aronsborg, Sweden arXiv:hep-ph/0701273.
- [35] H. Lacker. "CKM matrix fits including constraints on New Physics", Talk given at Flavor Physics & CP Violation Conference, Bled, 2007.
- [36] T. Muta. "Foundations of Quantum Chromodynamics", World Scientific, 1998.
- [37] A. Khodjamirian. "Quantum chromodynamics and hadrons: An Elementary introduction", SI-HEP-2004-03, hep-ph/0403145v1, 2004.
- [38] G. Ecker. "QUANTUM CHROMODYNAMICS", hep-ph/0604165v1, 2006.
- [39] A. Pich. "ASPECTS OF QUANTUM CHROMODYNAMICS", hep-ph/0001118v1, 2000.
- [40] G. Altarelli. "A QCD PRIMER", hep-ph/0204179v1, 2002.
- [41] S. Kluth. "Jet physics in e+e- annihilation from 14 to 209 GeV", Nucl.Phys.Proc.Suppl.133:36-46,2004.
- [42] T. Mannel, A. Khodjamirian, N. Offen. "Form-factors from light-cone sum rules with B-meson distribution amplitudes", Phys.Rev.D75:054013,2007.
- [43] H. Kawamura, J. Kodaira, C.-F. Qiao, K. Tanaka. "B meson light-cone distribution amplitudes in the heavy-quark limit", Phys.Lett.B523:111,2001, Erratum-ibid.B536:344,2002.
- [44] P. Ball, R. Zwicky. "New results on $B \rightarrow \pi, K, eta$ decay form factors from light-cone sum rules", Phys. Rev. D 71 (014015), Januar 2005.
- [45] P. Ball, R. Zwicky. "Improved analysis of $B \rightarrow \pi e \nu$ from QCD sum rules on the light cone", JHEP 0110:019,2001. .
- [46] G. Duplančić, A. Khodjamirian, Th. Mannel, B. Melić. "Light-cone sum rules for $B \rightarrow \pi$ form factors revisited", in preparation.
- [47] B. Geyer, O. Witzel. "B-meson distribution amplitudes of geometric twist vs. dynamical twist", Phys.Rev.D72:034023,2005.

- [48] T. Huang, X. G. Wu, M. Z. Zhou. "B-Meson Wavefunction in the Wandzura-Wilczek Approximation", Phys. Lett. B611, 260(2005).
- [49] M. Beneke, G. Buchalla, M. Neubert, C. T. Sachrajda. "QCD factorization for exclusive non-leptonic B-meson decays: General arguments and the case of heavy-light final states", hep-ph/0006124, Juni 2000.
- [50] J. Charles, A. Hocker, H. Lacker, S. Laplace, F.R. Le Diberder, J. Malcles, J. Ocariz, M. Pivk, L. Roos. "CP Violation and the CKM Matrix: Assessing the Impact of the Asymmetric B Factories", Eur.Phys.J. C41 (2005) 1-131, updated results and plots are available at: <http://ckmfitter.in2p3.fr>.
- [51] H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann. "On the formulation of quantized field theories" (In German), Nuovo Cim.1:205-225,1955.
- [52] M. B. Wise. "Heavy Quark Physics", hep-ph/9805468, Mai 1998.
- [53] T. Mannel. "Effective theory for heavy quarks", hep-ph/9606299, Juni 1996.
- [54] A. V. Manohar, M.B. Wise. "Heavy Quark Physics", Cambridge University Press, 2000.
- [55] A. Grozin. "Heavy Quark Effective Theory", Springer Tracts in Modern Physics, 2004.
- [56] N. Isgur, M. B. Wise. "Weak Decays of Heavy Mesons in the Static Quark Approximation", Phys.Lett.B232:113,1989.
- [57] N. Isgur, M. B. Wise. "Weak Transition Form-Factors Between Heavy Mesons", Phys.Lett.B237:527,1990, DPF Conf.1990:0459-464 (QCD161:A6:1990:V.1).
- [58] M. A. Shifman, M. B. Voloshin. "On Annihilation of Mesons Built from Heavy and Light Quark and anti-B0 \longleftrightarrow B0 Oscillations", Sov.J.Nucl.Phys.45:292,1987, Yad.Fiz.45:463-466,1987.
- [59] M. A. Shifman, M. B. Voloshin. "On Production of d and D* Mesons in B Meson Decays", Sov.J.Nucl.Phys.47:511,1988, Yad.Fiz.47:801-806,1988.
- [60] H. Georgi. "An Effective Field Theory for Heavy Quarks at Low Energies", HUTP-90/A007.
- [61] A. F. Falk, H. Georgi, B. Grinstein, M. B. Wise. "Heavy Meson Form Factors from QCD", Nucl.Phys.B343:1-13,1990.
- [62] A. F. Falk. "Hadrons of arbitrary spin in the heavy quark effective theory", Nucl.Phys.B378:79-94,1992.
- [63] J. D. Bjorken. "NEW SYMMETRIES IN HEAVY FLAVOR PHYSICS", Eingeladener Vortrag für Les Rencontre de la Valle d'Aoste, La Thuile, Italien, März 18-24, 1990, La Thuile Rencontres 1990:0583-596.

-
- [64] A. G. Grozin, M. Neubert. "Asymptotics of heavy-meson form factors", hep-ph/9607366, Juli 1996.
- [65] J. Charles, A. Le Yaouanc, L. Oliver, O. Pene, J. C. Raynal. "Heavy to light form-factors in the heavy mass to large energy limit of QCD", Phys.Rev.D60:014001,1999.
- [66] M. Beneke, Th. Feldmann. "Symmetry-breaking corrections to heavy-to-light B meson form factors at large recoil", hep-ph/0008255, November 2000.
- [67] Fulvia De Fazio, Thorsten Feldmann, Tobias Hurth. "Light-cone sum rules in soft-collinear effective theory", Nucl.Phys.B733:1-30,2006.
- [68] E. Gulez, A. Gray, M. Wingate, C. T. H. Davies, G. P. Lepage, J. Shigemitsu. "B Meson Semileptonic Form Factors from Unquenched Lattice QCD", Phys.Rev. D73 (2006) 074502 erratum ibid D75 119906(E)(2007).
- [69] N. Isgur, M. B. Wise. "Influence of the B* Resonance on anti-B \rightarrow pi e anti-electron-neutrino", Phys.Rev.D41:151,1990.
- [70] A. Khodjamirian, R. R ckl, C. W. Winhart. "Scalar B \rightarrow π and D \rightarrow π form factors in QCD", Phys. Rev. D 58, 054013(1998).
- [71] P. Ball, V. Braun. "Exclusive semileptonic and rare B meson decays in QCD", Phys.Rev.D58:094016,1998.
- [72] R. J. Hill. "Heavy-to-light meson form factors at large recoil", Phys.Rev. D73 (2006) 014012.
- [73] M. B. Voloshin. "ON B (e3) DECAY", Sov.J.Nucl.Phys.50:105,1989, Yad.Fiz.50:166-169,1989.
- [74] D. Becirevic, A. B. Kaidalov. "Comment on the heavy \rightarrow light form-factors", Phys.Lett.B478:417-423,2000.
- [75] UKQCD Collaboration (D.R. Burford et al.). "Form-factors for B \rightarrow pi lepton anti-lepton-neutrino and B \rightarrow K* gamma decays on the lattice", Nucl.Phys.B447:425-440,1995.
- [76] P. Ball, R. Zwicky. " $|V_{ub}|$ and Constraints on the Leading-Twist Pion Distribution Amplitude from B \rightarrow $\pi l \nu$ ", hep-ph/0507076v1, 2005.
- [77] C. Bourrely, B. Machet. "SEMILEPTONIC DECAYS OF PSEUDOSCALAR PARTICLES (M \rightarrow M-prime lepton lepton-neutrino) AND SHORT DISTANCE BEHAVIOR OF QUANTUM CHROMODYNAMICS", Nucl.Phys.B189:157,1981.
- [78] L. Lellouch. "Lattice constrained unitarity bounds for anti-B0 \rightarrow pi+ lepton-anti-lepton-neutrino decays", Nucl.Phys.B479:353-391,1996.
-

- [79] C. G. Boyd, B. Grinstein, R. F. Lebed. "Model independent extraction of $|V(cb)|$ using dispersion relations", Phys.Lett.B353:306-312,1995.
- [80] C. G. Boyd, B. Grinstein, R. F. Lebed. "Model independent determinations of anti-B \rightarrow D (lepton), D* (lepton) anti-neutrino form-factors", Nucl.Phys.B461:493-511,1996.
- [81] C. G. Boyd, M. J. Savage. "Analyticity, shapes of semileptonic form-factors, and anti-B \rightarrow pi lepton anti-neutrino", Phys.Rev.D56:303-311,1997.
- [82] C. G. Boyd, B. Grinstein, R. F. Lebed. "Precision corrections to dispersive bounds on form-factors", Phys.Rev.D56:6895-6911,1997.
- [83] Th. Mannel, B. Postler. "Improved unitarity bounds for anti-B0 \rightarrow pi+ lepton- anti-neutrino (lepton) decays", Nucl.Phys.B535:372-386,1998.
- [84] M. C. Arnesen, B. Grinstein, I. Z. Rothstein, I. W. Stewart. "A Precision Model Independent Determination of $|V_{ub}|$ from $B \rightarrow \pi l \nu$ ", Phys.Rev.Lett.95:071802,2005.
- [85] R. J. Hill. "The Modern Description of Semileptonic Meson Form Factors", hep-ph/0606023v2, 2006.
- [86] K. Ikado, et al., for the Belle Collaboration. "Evidence of the Purely Leptonic Decay B- \rightarrow tau- ν_{τ} ν_{μ} ν_{e} ", Phys.Rev.Lett. 97 (2006) 251802.
- [87] The BABAR Collaboration, B. Aubert, et al. "A Search for B+ \rightarrow tau+ ν ", submitted to Physical Review D, arXiv:0705.1820[hep-ex].
- [88] BABAR Collaboration (B. Aubert et al.). "A Search for B+ \rightarrow tau+ ν with Hadronic B tags", Phys.Rev.D76:052002,2007.
- [89] B. O. Lange, M. Neubert, G. Paz. "Theory of charmless inclusive B decays and the extraction of $V(ub)$ ", Phys.Rev.D72:073006,2005.
- [90] J. R. Andersen, E. Gardi. "Inclusive spectra in charmless semileptonic B decays by dressed gluon exponentiation", JHEP 0601:097,2006.
- [91] B. M. Dassinger, Th. Mannel, S. Turczyk. "Inclusive semi-leptonic B decays to order $1 / m(b)^4$ ", JHEP 0703:087,2007.
- [92] P. Gambino, P. Giordano, G. Ossola, N. Uraltsev. "Inclusive semileptonic B decays and the determination of $|V_{ub}|$ ", arXiv:0707.2493v2, 2007.
- [93] M. Neubert. "QCD Calculations of Decays of Heavy Flavor Hadrons", arXiv:0801.0675 [hep-ph].
- [94] A. K. Leibovich, I. Low, I. Z. Rothstein. "Extracting V_{ub} Without Recourse to Structure Functions", Phys.Rev. D61 (2000) 053006.

-
- [95] M. Neubert. "Note on the Extraction of $|V_{ub}|$ using Radiative B Decays", Phys.Lett. B513 (2001) 88-92.
- [96] B. O. Lange. "Shape-function independent relations of charmless inclusive B-decay spectra", JHEP 0601 (2006) 104.
- [97] B. O. Lange, M. Neubert, G. Paz. "A two-loop relation between inclusive radiative and semileptonic B-decay spectra", JHEP 0510 (2005) 084.
- [98] U. Aglietti, F. Di Lodovico, G. Ferrera, G. Ricciardi. "Inclusive Measur of $|V_{ub}|$ with the Analytic Coupling Model", arXiv:0711.0860v1, 2007.
- [99] U. Aglietti, G. Ferrera, G. Ricciardi. "Semi-Inclusive B Decays and a Model for Soft-Gluon Effects", hep-ph/0608047v1, 2006.
- [100] U. Aglietti, G. Ferrera, G. Ricciardi. "Modelling non-perturbative corrections to bottom-quark fragmentation", Nucl.Phys.B775:162-201,2007.
- [101] V. B. Golubev, V. G. Luth, Y. I. Skovpen. "Extraction of $|V_{ub}|$ with Reduced Dependence on Shape Functions", arXiv:hep-ph/0702072v2, 2007.
- [102] The BABAR Collaboration: B. Aubert, et al. "Measurement of the Inclusive Electron Spectrum in Charmless Semileptonic B Decays Near the Kinematic Endpoint and Determination of $|V_{ub}|$ ", Phys.Rev. D73 (2006) 012006.
- [103] The BABAR Collaboration: B. Aubert, et al. "Measurements of the $B \rightarrow X_s$ gamma Branching Fraction and Photon Spectrum from a Sum of Exclusive Final States" Phys.Rev. D72 (2005) 052004.
- [104] C. W. Bauer, Z. Ligeti, M. E. Luke. "Precision determination of $|V_{ub}|$ from inclusive decays", Phys. Rev. D64:113004 (2001).
- [105] The BABAR Collaboration, B. Aubert, et al. "Determinations of $|V_{ub}|$ from Inclusive Semileptonic B Decays with Reduced Model Dependence", Phys.Rev.Lett. 96 (2006) 221801.
- [106] M. Bona et al. [UTfit Collaboration]. "The Unitarity Triangle Fit in the Standard Model and Hadronic Parameters from Lattice QCD: A Reappraisal after the Measurements of Δm_s and $BR(B \rightarrow \tau\nu)$ ", JHEP 0610 (2006) 081.
- [107] BABAR Collaboration (B. Aubert et al.). "Measurement of the $B^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu$ form-factor shape and branching fraction, and determination of $|V(ub)|$ with a loose neutrino reconstruction technique", Phys.Rev.Lett.98:091801,2007.
- [108] BABAR Collaboration (B. Aubert et al.). "Study of $B \rightarrow \pi l \nu$ and $B \rightarrow \rho l \nu$ decays and determination of $|V(ub)|$ ", Phys.Rev.D72:051102,2005.
- [109] P. Ball. " $|V_{ub}|$ from UTangles and $B \rightarrow \pi l \nu$ ", Phys.Lett. B644 (2007) 38-44.
-

- [110] C. Albertus, J. M. Flynn, E. Hernandez, J. Nieves, J. M. Verde-Velasco. "Semileptonic $B \rightarrow \pi$ decays from an Omnes improved nonrelativistic constituent quark model", Phys.Rev.D72:033002,2005.
- [111] J. M. Flynn, J. Nieves. " $|V_{ub}|$ from Exclusive Semileptonic $B \rightarrow \pi$ Decays Revisited", hep-ph/0705.3553v2.
- [112] M. Okamoto et al. "Semileptonic $D \rightarrow \pi/K$ and $B \rightarrow \pi/D$ decays in 2+1 flavor lattice QCD", Nucl.Phys.Proc.Suppl.140:461-463,2005 und *Batavia 2004, Lattice field theory* 461-463.
- [113] A. Abada, D. Becirevic, P. Boucad, J. P. Leroy, V. Lubicz, F. Mescia. "Heavy \rightarrow light semileptonic decays of pseudoscalar mesons from lattice QCD", Nucl.Phys.B619:565-587,2001.
- [114] P. Ball, G. W. Jones, R. Zwicky. " $B \rightarrow V$ gamma beyond QCD factorisation", Phys.Rev.D75:054004,2007.
- [115] P. Ball, R. Zwicky. " $|V(td)/V(ts)|$ from $B \rightarrow V$ gamma", JHEP 0604:046,2006, Aktualisierung in hep-ph/0603232v3.
- [116] A. Khodjamirian, Th. Mannel, M. Melcher. "Kaon distribution amplitude from QCD sum rules", Phys.Rev.D70:094002,2004.
- [117] P. Ball, R. Zwicky. "Operator Relations for SU(3) Breaking Contributions to K and K^* Distribution Amplitudes", JHEP 0602 (2006) 034.
- [118] D. Mohapatra, et al. (Belle Collaboration). "Observation of $b \rightarrow d$ gamma and Determination of $|V_{td}/V_{ts}|$ ", Phys.Rev.Lett. 96 (2006) 221601.
- [119] B. Aubert et al. (BaBar Collaboration). "Measurement of the Branching Fractions for the Decays $B^+ \rightarrow \rho^+ \gamma$, $B^0 \rightarrow \rho^0 \gamma$, and $B^0 \rightarrow \omega \gamma$ ", 33rd International Conference on High-Energy Physics (ICHEP 06), Moscow, Russia, July 26 - August 2, 2006.
- [120] A. Khodjamirian. " $B \rightarrow \pi\pi$ Decay in QCD", Nucl.Phys. B605 (2001) 558-578.
- [121] S. W. Bosch, G. Buchalla. "Constraining the Unitarity Triangle with $B \rightarrow V$ gamma", JHEP 0501 (2005) 035.
- [122] A. L. Kagan, M. Neubert. "Isospin Breaking in $B \rightarrow K^* \gamma$ Decays", Phys.Lett. B539 (2002) 227-234.
- [123] P. Ball, E. Kou. " $B \rightarrow \gamma, e, \nu$ transitions from QCD sum rules on the light cone", JHEP 304 hep-ph/0301135, Januar 2003.
- [124] B. Aubert et al. (BaBar Collaboration). "Branching Fraction Measurements of $B^+ \rightarrow \rho^+ \gamma$, $B^0 \rightarrow \rho^0 \gamma$, and $B^0 \rightarrow \omega \gamma$ ", Phys. Rev. Lett. 98, 151802 (2007).

- [125] K. G. Wilson. "Nonlagrangian models of current algebra", Phys. Rev. 179:1499-1512, 1969.
- [126] K. G. Wilson, W. Zimmermann. "Operator product expansions and composite field operators in the general framework of quantum field theory", Commun.Math.Phys.24:87-106,1972.
- [127] W. Zimmermann. "Normal products and the short distance expansion in the perturbation theory of renormalizable interactions", Annals Phys.77:570-601,1973, Lect.Notes Phys.558:278-309,2000.
- [128] R. K. Ellis, H. Georgi, M. Machacek, H. D. Politzer, G. G. Ross. "Perturbation Theory and the Parton Model in QCD", Nucl.Phys.B152:285,1979.
- [129] R. K. Ellis, H. Georgi, M. Machacek, H. D. Politzer, G. G. Ross. "Factorization and the Parton Model in QCD", Phys.Lett.B78:281,1978.
- [130] K. G. Chetyrkin, F. V. Tkachov. "Operator Product Expansion In The Minimal Subtraction Scheme", Phys.Lett.B119:407-411,1982.
- [131] B. Humpert, W. L. van Neerven. "Diagrammatic Mass Factorization", Phys.Rev.D25:2593,1982.
- [132] N. N. Bogoliubov, O. S. Parasiuk. "On the Multiplication of the causal function in the quantum theory of fields", (In German), Acta Math.97:227-266,1957.
- [133] K. Hepp. "Proof of the Bogolyubov-Parasiuk theorem on renormalization", Commun.Math.Phys.2:301-326,1966.
- [134] M. C. Bergere, J. B. Zuber. "Renormalization of feynman amplitudes and parametric integral representation", Commun.Math.Phys.35:113-140,1974.
- [135] W. Zimmermann. "Convergence of Bogolyubov's method of renormalization in momentum space", Commun.Math.Phys.15:208-234,1969, Lect.Notes Phys.558:217-243,2000.
- [136] G. Buchalla, A. J. Buras, M. E. Lautenbacher. "WEAK DECAYS BEYOND LEADING LOGARITHMS", Rev.Mod.Phys.68:1125-1144,1996.
- [137] M. Melcher. "B-Zerfälle aus QCD Summenregeln", Dissertation, 2006.
- [138] V. L. Chernyak, A. R. Zhitnitsky, V. G. Serbo. "Asymptotic hadronic form-factors in quantum chromodynamics", JETP Lett.26:594-597,1977, Pisma Zh.Eksp.Teor.Fiz.26:760-763,1977.
- [139] V. L. Chernyak, A. R. Zhitnitsky. "Asymptotic Behavior of Hadron Form-Factors in Quark-Model", JETP Lett.25:510,1977, Pisma Zh.Eksp.Teor.Fiz.25:544-547,1977.
- [140] G. P. Lepage, S. J. Brodsky. "Exclusive Processes in Perturbative Quantum Chromodynamics", Phys.Rev.D22:2157,1980.

- [141] G. P. Lepage, S. J. Brodsky. "Exclusive Processes in Quantum Chromodynamics: Evolution Equations for Hadronic Wave Functions and the Form-Factors of Mesons", *Phys.Lett.B*87:359-365,1979.
- [142] A. V. Efremov, A. V. Radyushkin. "Asymptotical Behavior of Pion Electromagnetic Form-Factor in QCD", *Theor.Math.Phys.*42:97-110,1980, *Teor.Mat.Fiz.*42:147-166,1980.
- [143] A. V. Efremov, A. V. Radyushkin. "Factorization and Asymptotical Behavior of Pion Form-Factor in QCD", *Phys.Lett.B*94:245-250,1980.
- [144] M. Beneke, T. Feldmann. "Factorization of heavy to light form-factors in soft collinear effective theory", *Nucl.Phys.B*685:249-296,2004.
- [145] A. Khodjamirian, R. Rückl. "QCD Sum Rules for Exclusive Decays of Heavy Mesons" in *Heavy Flavours*, 2nd Edition, 1998.
- [146] A. Khodjamirian, P. Colangelo. "QCD Sum Rules, A Modern Perspective" in *At the Frontier of Particle Physics* ed. by M. Shifman, 2001.
- [147] A. Khodjamirian, R. Rückl, S. Weinzierl, O. Yakovlev. "Perturbative QCD correction to the $B \rightarrow \pi$ transition form factor, hep-ph/9706303, Juni 1997.
- [148] E. Bagan, P. Ball, V. M. Braun. "Radiative corrections to the decay $B \rightarrow \pi, e, \nu$ and the heavy quark limit", hep-ph/9709243, September 1997.
- [149] S. J. Brodsky, G. P. Lepage. "Exclusive Processes in Quantum Chromodynamics" in *Perturbative Quantum Chromodynamics* ed. by A.H. Mueller, 1989.
- [150] V. M. Braun, G. P. Korchemsky, D. Müller. "The Uses of Conformal Symmetry in QCD", hep-ph/0306057v1, 2003.
- [151] G. W. Jones. "Meson Distribution Amplitudes", PhD-thesis, arXiv:0710.4479v1.
- [152] P. Ball, G. W. Jones. "B \rightarrow eta-(prime) Form Factors in QCD", *JHEP* 0708:025,2007.
- [153] Th. Feldmann, P. Kroll. "Flavor symmetry breaking and mixing effects in the eta gamma and eta-prime gamma transition form-factors", *Eur.Phys.J.C*5:327-335,1998.
- [154] P. Ball, V. M. Braun, A. Lenz. "Higher-Twist Distribution Amplitudes of the K Meson in QCD", hep-ph/0603063v1, 2006.
- [155] V. M. Braun, M Göckeler, R. Horsley, H. Perlt, D. Pleiter, P. E. L. Rakow, G. Schierholz, A. Schiller, W. Schroers, H. Stüben, J. M. Zanotti. "Moments of pseudoscalar meson distribution amplitudes from the lattice", hep-lat/0606012v1, 2006.

- [156] I. I. Balitsky, V. M. Braun. "Evolution equations for QCD string operators", Nucl. Phys. B311, Januar 1988.
- [157] V. M. Braun, I. B. Filyanov. "Conformal invariance and pion wave functions of nonleading twist", Z. Phys. C 48, 1990.
- [158] P. Ball. "Theoretical Update of Pseudoscalar Meson Distribution Amplitudes of Higher Twist: The Nonsinglet Case", hep-ph/9812375v1, 1998.
- [159] P. Ball, V. M. Braun, Y. Koike, K. Tanaka. "Higher Twist Distribution Amplitudes of Vector Mesons in QCD: Formalism and Twist Three Distributions", hep-ph/9802299v2, 1998.
- [160] P. Ball, V. M. Braun. "Higher Twist Distribution Amplitudes of Vector Mesons in QCD: Twist-4 Distributions and Meson Mass Corrections", Nucl.Phys. B543 (1999) 201-238.
- [161] B. Geyer, O. Witzel. "Heavy Meson Distribution Amplitudes of Definite Geometric Twist with Contribution of 3-Particle Distribution Amplitudes", arXiv:0705.4357 [hep-ph], 2007.
- [162] J. Eilers. "Geometric twist decomposition off the light-cone for nonlocal QCD operators", hep-th/0608173v1, 2006.
- [163] V. L. Chernyak, A. R. Zhitnitsky. "Asymptotic Behaviour of Exclusive Processes in QCD", Phys. Rept. 112, 1984.
- [164] B. O. Lange, M. Neubert. "Renormalization-Group evolution of the B-meson light-cone distribution amplitude", hep-ph/0303082, März 2003.
- [165] A. G. Grozin. "B-meson distribution amplitudes", hep-ph/0506226v2, 2005.
- [166] V. M. Braun, D. Y. Ivanov, G. P. Korchemsky. "The B-meson distribution amplitude in QCD", hep-ph/0309330, September 2003.
- [167] S. J. Lee, M. Neubert. "Model-Independent Properties of the B-Meson-Distribution Amplitude", hep-ph/0509350v2, 2005.
- [168] T. Mannel, A. Khodjamirian, N. Offen. "B-meson distribution amplitude from the $B \rightarrow \pi$ form-factor", Phys. Lett. B620:52-60, 2005.
- [169] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov. "QCD and resonance physics. Theoretical foundations", Nuclear Physics B 147:385-447, 1979.
- [170] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov. "QCD and resonance physics. Applications", Nuclear Physics B 147:448-518, 1979.
- [171] E.C. Poggio, Helen R. Quinn, Steven Weinberg (Harvard U.). "Smearing the Quark Model", Phys.Rev.D13:1958,1976.

- [172] M. A. Shifman. "Quark-Hadron duality", in *At the frontier of Particle Physics* ed. by M. Shifman, 2001.
- [173] S. Jeschonnek, J. W. Van Orden. "Quark-Hadron duality", hep-ph/0209157, September 2002.
- [174] W. Melnitchouk, R. Ent, C. Keppel. "Quark-hadron duality in electron scattering", *Phys.Rept.* 406 (2005) 127-301.
- [175] M. Jamin, B. O. Lange. " f_B and f_{B_s} from QCD sum rules", hep-ph/0108135, November 2001.
- [176] A. A. Penin, M. Steinhauser. "Heavy light meson decay constant from QCD sum rules in three loop approximation", *Phys.Rev.D*65:054006,2002.
- [177] N. Offen. "Untersuchung der B-Meson-Wellenfunktion via Lichtkegelsummenregeln", Diplomarbeit 2005.
- [178] K. G. Chetyrkin, M. Steinhauser. "Three loop nondiagonal current correlators in QCD and NLO corrections to single top quark production", *Phys.Lett.B*502:104-114,2001.
- [179] K. G. Chetyrkin, M. Steinhauser. "Heavy - light current correlators at order α_s^2 in QCD and HQET", *Eur.Phys.J.C*21:319-338,2001.
- [180] R. F. Lebed, N. G. Uraltsev. "Precision studies of duality in the 't Hooft model", hep-ph/0006346, Juni 2000.
- [181] HPQCD Collaboration (Alan Gray et al.). "The B meson decay constant from unquenched lattice QCD", *Phys. Rev. Lett.* 95:212001, 2005.
- [182] S. Villa. "Review of B_u leptonic decays", Bled 2007.
- [183] I. I. Balitsky, V. M. Braun, A. V. Kolesnichenko. "Radiative Decay $\Sigma^+ \rightarrow p \gamma$ in Quantum Chromodynamics", *Nucl.Phys.B*312:509-550,1989.
- [184] V. M. Braun, I. E. Filyanov. "QCD Sum Rules in Exclusive Kinematics and Pion Wave Function", *Z.Phys.C*44:157,1989, *Sov.J.Nucl.Phys.* 50:511,1989, *Yad.Fiz.*50:818-830,1989.
- [185] V. L. Chernyak, I. R. Zhitnitsky. "B meson exclusive decays into baryons", *Nucl.Phys.B*345:137-172,1990.
- [186] P. Ball, V. M. Braun, H. G. Dosch. "Form-factors of semileptonic D decays from QCD sum rules", *Phys.Rev.D*44:3567-3581,1991.
- [187] P. Ball, V. M. Braun. "Use and misuse of QCD sum rules in heavy to light transitions: The Decay $B \rightarrow \rho e \nu$ reexamined", *Phys.Rev.D*55:5561-5576,1997.

- [188] B. O. Lange. "Nonvalence fock states in heavy to light form-factors at large recoil", *Eur.Phys.J.C*33:S324-326,2004, *Nucl.Phys.Proc.Suppl.*133:174-177,2004.
- [189] R. E. Cutkosky. "Singularities and discontinuities of Feynman amplitudes", *J.Math.Phys.*1:429-433,1960.
- [190] A. G. Grozin. "Methods of calculation of higher power corrections in QCD", *Int.J.Mod.Phys.A*10:3497-3529,1995.
- [191] V. M. Braun. "B-Meson DA's", talk given at DA 06: Workshop on Light-Cone Distribution Amplitudes, 28.-30.09.06.
- [192] H. Kawamura, J. Kodaira, C.-F. Qiao, K.Tanaka. "Transverse momentum distribution in the B-meson in the heavy-quark limit: The Wandzura-Wilczek Part", *Modern Physics Letters A* Vol. 18, Nr. 11, 2003.
- [193] T. Huang, C. F. Qiao, X. G. Wu. "B-Meson Wavefunction with Contributions from 3-particle Fock States", *Phys. Rev. D*73(2006).
- [194] E. V. Shuryak. "Hadrons Containing a Heavy Quark and QCD Sum-Rules", *Nucl. Phys. B*198:83, 1982.
- [195] E. Bagan, P. Ball, P. Gosdzinsky. "The Isgur-Wise function to $O(\alpha_s)$ from sum rules in the heavy quark effective theory", *Phys. Lett. B*301:249-256, 1993.
- [196] V. M. Braun, I. E. Halperin. "Soft contribution to the pion form-factor from light cone QCD sum rules", *Phys.Lett.B*328:457-465,1994.
- [197] J. Bijnens, A. Khodjamirian. "Exploring light cone sum rules for pion and kaon form-factors", *Eur.Phys.J.C*26:67-79,2002.
- [198] V. M. Braun, A. Khodjamirian, M. Maul. "Pion form-factor in QCD at intermediate momentum transfers" *Phys.Rev.D*61:073004,2000.
- [199] A. Khodjamirian, T. Mannel, M. Melcher. "Flavour SU(3) symmetry in charmless B-Decays", in *Phys. Rev. D* 68, September 2003.
- [200] P. Ball, R. Zwicky. "SU(3) breaking of leading-twist K and K* distribution amplitudes: A Reprise", *Phys.Lett.B*633:289-297,2006.
- [201] K. G. Chetyrkin, A. Khodjamirian. "Strange quark mass from pseudoscalar sum rule with $O(\alpha_s^4)$ accuracy", *Eur.Phys.J.C*46:721-728,2006.
- [202] P. Ball, R. Zwicky. "B(D,S) \rightarrow rho, omega, K*, phi decay form-factors from light-cone sum rules revisited", *Phys.Rev.D*71:014029,2005.
- [203] M. Beneke, S. Jäger. "Spectator scattering at NLO in non-leptonic b decays: Tree amplitudes", *Nucl.Phys.B*751:160-185,2006.

- [204] V. M. Belyaev, A. Khodjamirian, R. Rückl. "QCD calculation of the $B \rightarrow \pi$, K form-factors, *Z.Phys.C60*:349-356,1993.
- [205] V. M. Belyaev, V. M. Braun, A. Khodjamirian, R. Rückl. "D* D π and B* B π couplings in QCD", *Phys.Rev.D51*:6177-6195,1995.
- [206] T. M. Aliev, H. Koru, A. Ozpineci, M. Savci. "Light cone QCD sum rule analysis of $B \rightarrow K$ lepton+ lepton- decay", *Phys.Lett.B400*:194-205,1997.
- [207] P. Ball. "B $\rightarrow \pi$ and B $\rightarrow K$ transitions from QCD sum rules on the light cone", *JHEP* 9809:005,1998.
- [208] D. J. Broadhurst, A. G. Grozin. "Matching QCD and HQET heavy - light currents at two loops and beyond", *Phys. Rev. D52*:4082-4098,1995.
- [209] J. A. Gracey. "Three loop \overline{MS} tensor current anomalous dimension in QCD", *Phys.Lett.B488*:175-181,2000.
- [210] J. H. Kühn, M. Steinhauser, C. Sturm. "Heavy Quark Masses from Sum Rules in Four-Loop Approximation", *Nucl.Phys.B778*:192-215,2007.
- [211] M. Gell-Mann, R. J. Oakes, B. Renner. "Behavior of current divergences under $SU(3) \times SU(3)$ ", *Phys.Rev.*175:2195-2199,1968.
- [212] K. Langfeld, C. Kettner. "The quark condensate in the GMOR relation", *Mod.Phys.Lett. A11* (1996) 1331-1338.
- [213] B. L. Ioffe. "QCD at Low Energies", *Prog.Part.Nucl.Phys.* 56 (2006) 232-277.
- [214] M. Jamin, J. A. Oller, A. Pich. "Scalar K π form factor and light quark masses", *Phys.Rev.D74*:074009,2006.
- [215] E. Barberio, et al [Heavy Flavor Averaging Group (HFAG) Collaboration]. "Updates of Semileptonic Results for Lepton Photon 2007", Methode beschrieben in arXiv:0704.3575.
- [216] F. De Fazio, Th. Feldmann, T. Hurth. "SCET sum rules for $B \rightarrow P$ and $B \rightarrow V$ transition form factors", Temporary entry e-Print: arXiv:0711.3999 [hep-ph].
- [217] G. Bell, Th. Feldmann. "Modelling light-cone distribution amplitudes from non-relativistic bound states", SI-HEP-2007-20.
- [218] A. Le Yaouanc, L. Oliver, J.-C. Raynal. "Relation between Light Cone Distribution Amplitudes and Shape Function in B_c mesons", arXiv:0707.3027 [hep-ph], 2007.
- [219] M. Steinhauser. "Übungen zu Strahlungskorrekturen in Eichtheorien, Herbstschule Maria-Laach", September 2003.
- [220] G. Paasarino, M. Veltman. "One-loop corrections for $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ", *Nuclear Physics B160* (1979).

- [221] G. 't Hooft, M. Veltman. "Scalar one-loop integrals", Nuclear Physics B153 (1979).
- [222] A. I. Davydychev. "A simple formula for reducing Feynman diagrams to scalar integrals", Physics Letters B263 (1991).
- [223] O. V. Tarasov. "Connection between Feynman integrals having different values of the space-time dimension", hep-th/9606018v1, 1996.
- [224] J. Fleischer, F. Jegerlehner, O. V. Tarasov. "Algebraic reduction of one-loop Feynman graph amplitudes", hep-ph/9907327v2, 1999.
- [225] Z. Bern, L. Dixon, D. A. Kosover. "Dimensionally Regulated Pentagon Integrals", hep-ph/9306240v2, 1998.
- [226] G. Devaraj, R. G. Stuart. "Reduction of One-loop Tensor Form-Factors to Scalar Integrals: A General Scheme", hep-ph/9704308v3, 1998.
- [227] G. Duplančić, B Nžić. "Reduction method for dimensionally regulated one-loop N-point Feynman integrals", hep-ph/0303184v3, 2004.
- [228] A. Denner, S. Dittmaier. "Reduction schemes for one-loop tensor integrals", hep-ph/0509141v2, 2005.
- [229] A. Denner, M. Roth. "High-Energy Approximation of One-Loop Feynman Integrals", hep-ph/9605420v1, 1996.
- [230] S. Dittmaier. "Separation of soft and collinear singularities from one-loop N-point integrals", hep-ph/0308246v1, 2003.
- [231] A. Denner, U. Nierste, R. Scharf. "A compact expression for the scalar one-loop four-point function", Nuclear Physics B367(1991).
- [232] G. Duplančić, B Nžić. "IR finite one-loop box scalar integral with massless internal lines", hep-ph/0201306v1, 2002.
- [233] G. Duplančić, B Nžić. "Dimensionally regulated one-loop box scalar integrals with massless internal lines", hep-ph/0006249v2, 2001.
- [234] K. G. Chetyrkin, F. V. Tkachov. "Integration by parts: The algorithm to calculate β -functions in 4 loops", Nuclear Physics B192 (1981).
- [235] W. Hackbusch, H. R. Schwarz, E. Zeidler. "Teubner-Taschenbuch der Mathematik", B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1996.
- [236] A. P. Bakulev, K. Passek-Kumericki, W. Schroers, N. G. Stefanis. "Pion form-factor in QCD: From nonlocal condensates to NLO analytic perturbation theory", Phys.Rev.D70:033014,2004, Erratum-ibid.D70:079906,2004.

Danksagung

Zuvorderst danke ich Herrn Prof. Dr. Thomas Mannel. Nicht nur für die Möglichkeit in Siegen zu promovieren, sondern auch für das Engagement sowie die Hilfe, welche mir zu der neuen Stelle in Orsay verhalfen.

Herrn Dr. Alexander Khodjamirian danke ich für die investierte Zeit, die Hilfe bei physikalischen Fragestellungen, die Hinweise zu Vorträgen, diesem Manuskript, aber vor allem für die mehr als angenehme Zusammenarbeit, die hoffentlich ihre Fortsetzung finden wird.

Dr. Martin Melcher und Dr. Thorsten Feldmann waren beide stets eine Hilfe bei den nicht seltenen Verständnisschwierigkeiten meinerseits. Ersterer war darüber hinaus ein stets hilfsbereiter Ansprechpartner, wenn es um Probleme bezüglich *Mathematica* oder LaTeX ging, Letzterer hingegen eine unverzichtbare Hilfe bei manchem Vortrag, der gehalten werden mußte.

Sven Faller, Kai Grybel und Martin Jung danke ich für die gemeinsamen Kaffee- und Mittagspausen sowie das ein oder andere Bier nach Feierabend. Kai Grybel sorgte zudem gemeinsam mit Dr. Wolfgang Walkowiak und Sven Over für eine funktionierende Rechner-Infrastruktur.

Robert Feger sei für seine selbstlose Hilfsbereitschaft sowohl in Sachen LaTeX, wie auch in Bezug auf den Gastrechner gedankt.

Den weiteren Damen und Herren der Arbeitsgruppe danke ich für jede angenehm im Kaffeeraum oder auch bei einer der privaten Gesellschaften verbrachte Stunde. Meinen neuen Arbeitskollegen in Orsay danke ich für die freundliche Aufnahme. Hervorgehoben seien hier Dr. Sébastien Descotes-Genon sowie Benjamin Haas für ihre Unterstützung sowohl in physikalischen Fragen, wie auch in Problemen meine mangelnden Französischkenntnisse betreffend.

Für stilistische sowie orthographische Hinweise, sowie Unterstützung weit über den Rahmen dieser Arbeit hinaus danke ich Katharina Leppelmann und Ulrike Kaufmann.

Für Hilfe bei Computerproblemen sowie für das zur Verfügungstellen einer funktionierenden Plattform während meiner Heimataufenthalte danke ich meinen Brüdern Lars und Sönke Offen.

All den Freunden, bereits genannten wie nicht- genannten sei hier schlicht für ihre Freundschaft und Unterstützung gedankt ohne die dieses Werk nicht denkbar gewesen wäre.

Abschließend danke ich meinen Eltern nicht nur dafür, daß sie mich beständig unterstützten, sondern auch dafür, daß sie in viel stärkerem Maße als es mir möglich war, daran glaubten, daß diese Zeilen einmal von mir geschrieben würden.