

# **Beitrag zur Verformungsberechnung im Stahlbetonbau mit kritischer Bewertung bestehender Regelungen**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der Ingenieurwissenschaften  
(Dr.-Ing.)

vom Fachbereich  
Bauingenieurwesen  
der Universität Siegen

genehmigte  
**Dissertation**

von

**Dipl.-Ing. Jens Strohbusch**

Referent: Prof. Dr.-Ing. Alfons Goris  
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. Chuanzeng Zhang  
Tag der mündlichen Prüfung: 15. Juni 2010

Siegen 2010



## **Vorwort**

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Massivbau der Universität Siegen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Alfons Goris für die Unterstützung und Förderung meiner Arbeit sowie die vertrauensvolle und lehrreiche Zeit, die ich am Lehrstuhl für Massivbau verbringen durfte.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Chuanzeng Zhang möchte ich sehr herzlich für das Interesse an meiner Arbeit und für die Übernahme des Korreferates danken.

Wegen der Freundlichkeit und Hilfsbereitschaft der Kolleginnen und Kollegen des Fachbereichs Bauingenieurwesen wird mir die Zeit an der Universität Siegen stets in guter Erinnerung bleiben. Hier danke ich besonders Herrn Dipl.-Ing Oliver Carl für die anregenden Diskussionen.

Meinen Eltern danke ich für ihre liebevolle Unterstützung, die mir während meines Studiums des Bauingenieurwesens eine große Hilfe war.

Siegen, im Juni 2010

Jens Strohbusch

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden Verformungen von Stahlbetonbauteilen im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit untersucht. Da insbesondere bei Plattentragwerken eine ausreichende Verformungsbegrenzung häufig den maßgebenden Einfluss auf die Dimensionierung hat, ist eine ausreichend genaue Bestimmung der Durchbiegung notwendig, um wirtschaftliche und schadensfreie Konstruktionen zu erhalten. Wegen des nichtlinearen Verhaltens von Stahlbeton und den streuenden und zeitabhängigen Materialeigenschaften ist eine genauere Durchbiegungsberechnung mit einem großen Rechenaufwand verbunden ist, so dass in der Praxis gerne auf Konstruktionsregeln (Nachweis der „Biegeschlankheit“) zurückgegriffen wird.

Die derzeit bestehenden Regelungen werden in der Arbeit kritisch überprüft. Dabei ist zum einen festzustellen, dass die Ergebnisse der verschiedenen Nachweisverfahren zum Teil erhebliche Unterschiede liefern. Ursache dafür ist insbesondere, dass bei einigen Verfahren wichtige Eingangsgrößen wie bspw. Betonfestigkeit und Belastung unberücksichtigt bleiben.

Für eine differenziertere Betrachtung wird zunächst ein eigenes Berechnungsverfahren entwickelt, so dass wesentliche Einflussfaktoren herausgearbeitet werden können. Besondere Schwerpunkte sind dabei die Modellierung der Langzeiteinflüsse (Kriechen und Schwinden), das Erfassen der Rissbildung über die Zug- und Biegezugfestigkeit des Betons und das Zusammenwirken von Bewehrung und Beton über den Verbund.

Die Berechnung mit Nettoquerschnittswerten ist möglich. Durch Untersuchungen an verschiedenen Querschnitten aus Normalbeton kann nachgewiesen werden, dass der Einfluss von Nettoquerschnittswerten für übliche Betonfestigkeitsklassen vernachlässigbar klein ist.

Außerdem wird die Teilfertigung mit einer Ortbetoneergänzung berücksichtigt. Es werden für einige Varianten Berechnungsmethoden erstellt und in eine EDV-Anwendung implementiert. Es werden die zeitabhängigen Spannungsumlagerungen beim Kriechen und Schwinden sowohl zwischen Beton und Bewehrung als auch zwischen Fertigteil und Ortbetoneergänzung berücksichtigt.

Mit dem entwickelten Berechnungsverfahren können bereits bestehende Nachweisverfahren kritisch überprüft werden. Schwerpunkt liegt hier auf die sog. Biegeschlankheitsnachweise – insbes. auch in DIN 1045-1:2008 –, die sich in der Praxis wegen der einfachen Handhabbarkeit großer Beliebtheit erfreuen. Es kann gezeigt werden, dass die gängigen Verfahren nur bedingt geeignet sind, Anforderungen an eine Durchbiegungsbegrenzung zu erfüllen. Das gilt insbesondere für den in DIN 1045-1 enthaltene Nachweis, der sich trotz technischer Veränderungen in der Bemessung und der Konstruktion noch auf Untersuchungen aus den 60er Jahre bezieht.

Abschließend wird ein Näherungsverfahren vorgestellt, das auf der Basis des bekannten Biegeschlankheitsnachweises weiter entwickelt wird. Es können weitere maßgebende Parameter berücksichtigt werden und so die Qualität des bisherigen Verfahrens deutlich verbessert werden.

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Einleitung</b> .....	1
1.1	Motivation und Zielsetzung .....	1
1.2	Aufbau der Arbeit .....	2
<b>2</b>	<b>Allgemeines</b> .....	5
2.1	Verformungen und ihre Folgen .....	5
2.2	Richtlinien zur Begrenzung von Verformungen .....	7
<b>3</b>	<b>Stand der Technik</b> .....	11
3.1	Konstruktionsregeln nach DIN 1045-1 und EN 1992-1-1 .....	11
3.1.1	Biegeschlankheit nach DIN 1045-1 .....	11
3.1.2	Biegeschlankheit nach EN 1992-1-1 (Eurocode 2) .....	12
3.1.3	Vergleich der Schlankheitsnachweise .....	13
3.2	Berechnungsansätze nach EN 1992-1-1 .....	14
3.3	Bemessungsansätze nach internationalen Normen .....	15
3.4	Konstruktionsregeln aus weiterführender Literatur.....	17
3.5	Weitere rechnerische Nachweismöglichkeiten .....	18
3.6	Vergleichendes Beispiel .....	20
<b>4</b>	<b>Materialverhalten</b> .....	23
4.1	Beton .....	23
4.1.1	Kurzzeitverhalten .....	24
4.1.2	Langzeitverhalten .....	29
4.2	Betonstahl, Spannstahl .....	34
4.3	Verbund .....	35
<b>5</b>	<b>Grundlegendes Modell zur Verformungsberechnung</b> .....	39
5.1	Zusammenhang zwischen Moment, Krümmung und Verformung .....	39
5.2	Einfluss des Schwindens .....	40
5.2.1	Ermittlung der Krümmung mit Ansatz eines Ersatzkräftepaars ...	40
5.2.2	Berechnung der Krümmung mit dem Kraftgrößenverfahren .....	47
5.2.3	Schwinden nach EN 1992-1-1.....	50
5.2.4	Weitere Möglichkeiten und Vergleich der Ansätze .....	51
5.2.6	Schwinden im Zustand IIm .....	52
5.3	Einfluss des Kriechens .....	53
5.3.1	Krümmungsermittlung mit dem Kraftgrößenverfahren .....	53
5.3.2	Ansatz nach EN 1992-1-1 .....	56
5.3.3	Weitere Ansätze aus der Literatur .....	56

5.3.4 Einfluss von Nettoquerschnittswerten .....	57
5.4 Mittragen des Betons zwischen den Rissen; mittlere Stahldehnung .....	59
5.4.1 Allgemeines .....	60
5.4.2 Ansätze nach [König/Tue – 96] und [König/Tue – 08] .....	61
5.4.3 Model Code 90 ([CEB/FIP – 91]) .....	62
5.4.4 Ansatz in [DIN 1045-1 – 08] und [DAfStb-H525 – 03] .....	63
5.4.5 Verfahren nach [EN 1992-1-1 – 04] .....	64
5.4.6 Ermittlung nach [Krüger/Mertzsch – 06] .....	64
5.4.7 Ansatz nach [Noakowski – 88] .....	65
5.4.8 Vergleich und Anmerkung .....	65
5.5 Gesamtkrümmungen aus Schwind-, Kriech- und elastischen Dehnungen ..	66
5.5.1 Zustand I .....	66
5.5.2 Zustand II .....	70
<b>6 Ergänzte Querschnitte .....</b>	<b>73</b>
6.1 Allgemeines .....	73
6.1.1 Verschiedene Fertigteilssysteme .....	73
6.1.2 Besonderheiten bei der Berechnung .....	73
6.1.3 Vorgehensweise und Definitionen .....	74
6.2 Berechnungen im Zustand I .....	75
6.2.1 Vorverformung im Bauzustand ( $t = 0$ ) .....	75
6.2.2 Elastische Verformung nach Erhärten des Ortbetons ( $t = B$ ).....	76
6.2.3 Verformungen nach abgeschlossenem Kriechvorgang ( $t = \infty$ ) .....	78
6.2.4 Verformungen nach abgeschlossenem Schwindvorgang ( $t = \infty$ ) .....	79
6.3 Berechnungen im Zustand II .....	82
6.3.1 Verformung im Bauzustand ( $t = 0$ ) .....	82
6.3.2 Elastische Verformung nach Erhärten des Ortbetons ( $t = B$ ) .....	83
6.3.3 Verformungen nach Kriechen ( $t = \infty$ ) .....	85
6.3.4 Verformungen nach abgeschlossenem Schwindvorgang ( $t = \infty$ ) ....	87
6.4 Besondere Fertigteilvarianten .....	88
6.4.1 Gitterträger mit verstärktem Obergurt .....	88
6.4.2 Plattenbalken aus Fertigteil und Ortbetonergänzung .....	90
6.5 Vergleichendes Beispiel .....	92
6.5.1 Eingangsparameter .....	92
6.5.2 Hinweise zur Berechnung .....	93
6.5.3 Ausgewählte Ergebnisse .....	93
<b>7 Verformungsberechnung .....</b>	<b>95</b>
7.1 Allgemeines .....	95
7.1.1 Verformungsverlauf bei veränderlicher Biegesteifigkeit .....	95
7.1.2 Näherungslösung für Einfeldträger .....	99
7.1.3 Numerische Integration .....	100

---

7.2	Durchlaufträger .....	101
7.2.1	Vereinfachende Lösung .....	101
7.2.2	Berechnung der Schwindverformung .....	102
7.3	Berücksichtigung des Mittragens des Betons zwischen den Rissen .....	103
7.3.1	Momenten-Krümmungsbeziehung aus der Spannungs-Dehnungslinie .....	103
7.3.2	Zusammenfassung .....	105
<b>8</b>	<b>Auswertung</b> .....	<b>109</b>
8.1	Bewertung verschiedener Konstruktionsregeln .....	109
8.1.1	Erforderliche Nutzhöhe .....	109
8.2.2	Berechnung der Verformung .....	111
8.2	Zum Nachweis nach DIN 1045-1 .....	116
8.3	Ungünstige Veränderungen bzw. Einflüsse .....	116
8.3.1	Veränderung der Stahlfestigkeit .....	116
8.3.2	Einfluss veränderter Bemessungskonzepte .....	120
8.4	Günstige Veränderungen bzw. Einflüsse .....	120
8.4.1	Rechnerische und tatsächliche Betonfestigkeit .....	120
8.4.2	Unplanmäßige Randeinspannung .....	123
8.4.3	Weitere günstige Effekte .....	125
8.5	Vergleich und Fazit .....	126
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b> .....	<b>133</b>





# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation und Zielsetzung

Ein Tragwerk muss so bemessen werden, dass die Tragfähigkeit, Gebrauchstauglichkeit und Dauerhaftigkeit während der vorgesehenen Nutzungsdauer definierten Bedingungen genügt. Während der Errichtung und Nutzung müssen daher mögliche Einwirkungen mit angemessener Zuverlässigkeit aufgenommen werden können. Zur Sicherstellung dieser in DIN 1055-100, 4.1 formulierten grundlegenden Anforderung sind Stahlbetontragwerke in den Grenzzuständen der Tragfähigkeit und der Gebrauchstauglichkeit nachzuweisen und unter Beachtung der Sicherstellung der Dauerhaftigkeit und konstruktiver Regeln auszubilden (DIN 1045-1, 5.1).

Grenzzustände der Tragfähigkeit sind diejenigen Zustände, bei deren Überschreitung rechnerisch der Einsturz oder andere Formen des Tragwerksversagens eintreten (vgl. DIN 1045-1, 5.3.1). In der Bemessung muss daher nachgewiesen werden, dass der Bemessungswert der Einwirkungen  $E_d$  den Bemessungswert des Tragwerkswiderstands  $R_d$  nicht überschreitet. Einwirkungen und Widerstände sind mit Sicherheitsbeiwerten belegt, so dass eine ausreichende Zuverlässigkeit gewährleistet ist und eine Gefährdung von Personen ausgeschlossen werden kann. Bei der Bemessung spielen Verformungen nur dann eine Rolle, wenn sie die Schnittgrößen nennenswert beeinflussen bzw. erhöhen (beispielsweise beim Nachweis von Druckgliedern).

In den Grenzzuständen der Gebrauchstauglichkeit sind Anforderungen, die das Wohlbefinden von Personen, die Funktion des Tragwerks und das Erscheinungsbild betreffen, sicherzustellen. Gemäß DIN 1045-1 sind Nachweise zur Begrenzung von Spannungen, Rissbreiten und Verformungen zu führen. Die Nachweise erfolgen in der Regel mit repräsentativen Werten der Einwirkungen (d. h.  $\gamma_F = 1$ ), als Einwirkungskombination ist je nach Nachweis die seltene, häufige oder quasi-ständige Kombination zu berücksichtigen.

Die Verformungsbegrenzung gehört zu den Nachweisen im Gebrauchszustand. Hierbei soll sichergestellt werden, dass die Funktionalität (Maschinen, Installation) und das Erscheinungsbild nicht beeinträchtigt werden sowie Schäden an Ausbauelementen vermieden werden. Der Nachweis erfolgt im Allgemeinen für die quasi-ständige Einwirkungskombination. Der Bauteilwiderstand muss so ausgelegt sein, dass das Bauwerk dauerhaft mit angemessenem Instandhaltungsaufwand seinen Zweck erfüllt.

Bei den Bauteilverformungen ist das zeitabhängige Verhalten von großer Bedeutung. Die Verformungen sind daher stets unter Berücksichtigung von Schwinden und Kriechen nachzuweisen, da diese zeitabhängigen Effekte die anfänglichen Verformungen bedeutend vergrößern können. Außerdem spielt der Übergang in den Zustand II (gerissener Beton) eine nennenswerte Rolle, da dabei die Steifigkeit bzw. der Widerstand des Bauteils erheblich reduziert wird. Die genannten Parameter sind streuende Größen; eine genauere Voraussage von Verformungen ist daher nur mit größerem Aufwand und bei sensibler Wahl der Eingangsparameter – häufig durch Eingrenzung zwischen oberen und unteren Grenzen – möglich.

Falsch berechnete bzw. abgeschätzte Verformungen können zu einer erheblichen Nutzungseinschränkung und zu größeren (Folge-)Schäden führen, die nur mit unverhältnismäßig großem Aufwand behoben werden können. Die richtige Dimensionierung einer Konstruktion auch mit Blick auf Verformungen ist daher von großer wirtschaftlicher Bedeutung. Das gilt insbesondere für Bauteile wie Deckenplatten, bei denen häufig aufgrund der geringen Beanspruchung nicht der Grenzzustand der Tragfähigkeit, sondern der Verformungswiderstand für die Wahl der Konstruktionshöhe maßgebend ist.

In DIN 1045-1 wird der grundsätzliche Hinweis gegeben, dass definierte Grenzwerte der Verformung einzuhalten sind, ein geeignetes Rechenverfahren fehlt jedoch. Lediglich für Plattentragwerke des üblichen Hochbaus werden Konstruktionsregeln genannt – es wird in Abhängigkeit von der Stützweite und dem statischen System eine erforderliche Bauteildicke bestimmt –, mit denen „im Allgemeinen“ (DIN 1045-1, 11.3.2(2)) die einzuhaltenden Grenzwerte der Verformungen sichergestellt werden. Das heißt, dass insbesondere bei vom üblichen Hochbau abweichenden Situationen (hoch belastete Platten, spezielle Grenzwerte von Verformungen) und generell bei Balken weitergehende Untersuchungen erforderlich sind.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt daher darauf, bestehende Regelungen und Rechenansätze zu vergleichen und auf ihre Unterschiede und Anwendbarkeit hin zu überprüfen. Es wird ein Rechenmodell entwickelt, mit dem Einzelparameter und -einflussgrößen separat dargestellt und berücksichtigt werden können; dies betrifft verschiedene Materialgesetze für den Beton, das Verbundverhalten, Langzeiteinflüsse aus Kriechen und Schwinden u. a. So wird es ermöglicht, Auswirkungen von Vereinfachungen und Näherungen zu erfassen und mit Blick auf die Gesamtverformung zu beurteilen. Parameterstudien einzelner Größen beleuchten den Einfluss größerer Streuungen, die insbesondere für die Materialkennwerte des Betons gelten; das Ergebnis einer Verformungsberechnung ist letztendlich nur unter Berücksichtigung der erwarteten Streuungen verwertbar.

Das zunächst für den monolithisch hergestellten Querschnitt entwickelte Rechenmodell wird auf den Fertigteilbau erweitert. Diese mittlerweile weit verbreitete Bauweise wird in den Normen und in der Fachliteratur hinsichtlich der Verformungsnachweise allenfalls am Rande behandelt. Wie gezeigt wird, können zwischen nachträglich ergänzten Bauteilen und solchen aus Ortbeton größere Unterschiede bestehen. In einem Rechenmodell werden verschiedene Belastungszeitpunkte und unterschiedliche Materialkennwerte der Teilquerschnitte erfasst und deren Auswirkungen erläutert. Dabei wird die Spannungsumlagerung berücksichtigt, die sich zeitabhängig infolge Kriechen und Schwinden in den Teilquerschnitten des Betons und der Bewehrung einstellt.

Die Konstruktionsregeln in DIN 1045-1 beziehen sich auf Untersuchungen aus den sechziger Jahren. Zwischenzeitlich haben sich mit DIN 1045, Ausg. 1972 und dann mit DIN 1045-1, Ausg. 2001 Berechnungsgrundlagen und Sicherheitskonzepte grundlegend geändert. Außerdem werden heute andere Materialien eingesetzt, angefangen vom Betonstahl, der im Gegensatz zu den sechziger Jahren heute ausschließlich als BSt 500 zum Einsatz kommt, bis hin zum Beton, der i.d.R. mit höherer Festigkeit hergestellt und ausgeführt wird. Es stellt sich daher die Frage, ob und inwieweit die „alten“ Konstruktionsregeln weiterhin genutzt werden könnten bzw. wie sie ggf. angepasst werden müssten.

## **1.2 Aufbau der Arbeit**

Die Arbeit gliedert sich neben dieser Einleitung in acht Kapitel, die im Folgenden kurz vorgestellt werden sollen.

In *Kapitel 2* werden allgemeine Definitionen zu Verformungen eingeführt. Es werden einige typische Schadensfälle und -arten erläutert. Außerdem werden Grenzwerte aus Normen und technischen Richtlinien vorgestellt.

In *Kapitel 3* werden die bisher bekannten Möglichkeiten gezeigt, wie man entweder die zuvor erwähnten Grenzwerte rechnerisch nachweist oder deren Einhaltung über konstruktive Regelungen gewährleistet. Hierzu werden sowohl Regelungen aus Normen als auch Hinweise aus der Literatur vorgestellt und erläutert. Im Beispiel werden die Unterschiede zwischen den einzelnen Verfahren aufgezeigt.

*Kapitel 4* behandelt die Werkstoffe Beton und Betonstahl sowie ihr Zusammenwirken im Verbund. Dabei wird hauptsächlich der Beton besprochen und zwar insbesondere seine Zugfestigkeit sowie sein zeitabhängiges Verhalten (Kriechen, Schwinden); der Betonstahl als homogener, elastischer Werkstoff wird nur kurz behandelt. Der Verbund bzw. die Verbundeigenschaften werden mit Blick auf die Rissbildung und die zwischen den Rissen übertragbare Kraft untersucht.

Im *Kapitel 5* wird eine Momenten-Krümmungs-Beziehung aufgestellt, die als Basis für die Berechnung von Durchbiegungen benötigt wird. Dabei wird zunächst das mechanische Modell vorgestellt und der Zusammenhang zwischen einer Momentenbeanspruchung und der Querschnittskrümmung für linear-elastisches Verhalten erläutert. Anschließend werden die Besonderheiten des Materials Stahlbeton erfasst. Es werden das Betonschwinden, welches schon in unbelasteten Querschnitten eine Krümmung hervorruft, und das Kriechen bzw. die dadurch bedingte Vergrößerung der Krümmung untersucht. Im letzten Teil wird die Zugversteifung bzw. das Mittragen des Betons zwischen den Rissen behandelt, das durch einen Ansatz einer mittleren Stahldehnung berücksichtigt werden kann.

Die entwickelten Krümmungsberechnungen werden im *Kapitel 6* auf nachträglich ergänzte Querschnitte erweitert. Dabei werden neben einem allgemeinen, einfachen Modell mit zwei Betonschichten und zwei Bewehrungslagen einige gängige Varianten aus dem Fertigteilbau untersucht. Die Berechnung erfolgt jeweils über zwei verschiedene Methoden. Zum einen wird ein Verfahren aus Kapitel 5 aufgegriffen, das eine Berechnung mit gängiger Software ermöglicht. Zusätzlich wird zu jedem Berechnungsschritt eine Alternative in Form einer geschlossenen Lösung angeboten.

In *Kapitel 7* wird über die Querschnittskrümmungen die Verformung des gesamten Bauteils ermittelt, unterschiedliche statische Systeme werden dabei berücksichtigt. Die mittlere Stahldehnung wird mit den in Kapitel 5 vorgestellten Ansätzen aufgegriffen und in die Verformungsberechnung integriert.

*Kapitel 8* setzt sich kritisch mit den Nachweisen der Biegeschlankheit und speziell mit den Regelungen von DIN 1045-1 auseinander. Dabei werden die ungünstigen Einflüsse aufgezeigt, die sich durch Änderungen der Bemessungsverfahren und der Baumaterialien ergeben. Zusätzlich werden aber auch Reserven aufgezeigt, die sich auf Seiten des Materials und aus dem statischen System (konstruktive Randeinspannungen) ergeben können. Der positive Einfluss auf die Verformung wird mit den ungünstigen Einflüssen abgeglichen, um eine Aussage über die Qualität der Konstruktionsregeln nach DIN 1045-1 machen zu können. Zusätzlich wird ein eigener Biegeschlankheitsnachweis erarbeitet, der einige zusätzliche wichtige Parameter erfasst, ohne die einfache Handhabung z.B. zur Vorbemessung nennenswert einzuschränken.

*Kapitel 9* bietet einen zusammenfassenden Überblick über diese Arbeit und stellt die wichtigsten Ergebnisse heraus. Außerdem wird ein Ausblick auf künftigen Forschungsbedarf gegeben.



## 2 Allgemeines

### 2.1 Verformungen und ihre Folgen

Übermäßige Verformungen können das Tragverhalten der Bauteile negativ beeinflussen und im Grenzzustand der Tragfähigkeit zu einem Stabilitätsversagen führen. Die in dieser Arbeit betrachteten Verformungen betreffen jedoch den Gebrauchszustand.

Verformungen sind so zu begrenzen, dass die Nutzungsmöglichkeit des Bauteils selbst nicht beeinträchtigt und die Schadensfreiheit angrenzender Einrichtungen gewährleistet ist. Durch zu große Verformungen kann die Gebrauchstauglichkeit eingeschränkt werden; hierbei sind insbesondere zu nennen:

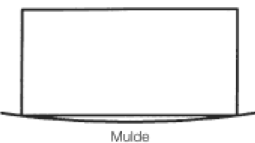
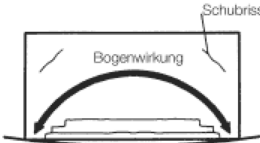
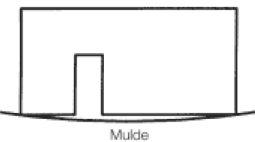
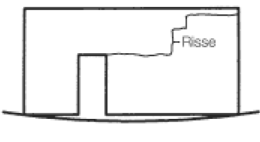
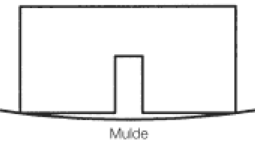
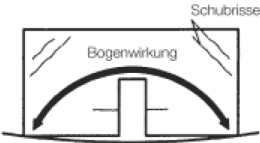
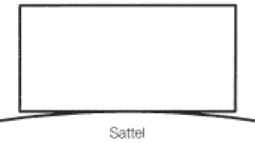

- Erscheinungsbild:  
Optisch als störend empfundene Verformungen hängen vom subjektiven Empfinden des Nutzers ab; sie können außerdem durch den Innenausbau (abgehängte Decken o.ä.) kaschiert werden.
- Funktionale Grenzen des Bauteils:  
Die zu erwartende Durchbiegung muss mit Blick auf die Funktionalität begrenzt werden, beispielsweise bei einem Gefälle, das zwecks Entwässerung eingeplant wird, oder bei einem Träger für verformungsempfindliche Einrichtungen (Kranbahnen, Aufzüge, Präzisionsmaschinen).
- Schäden an benachbarten Bauteilen:  
Nichttragende Bauteile (Trennwände, Glasscheiben) können bei großer Durchbiegung der Deckenplatten unplanmäßig beansprucht werden (siehe Abb. 2.1 links und 2.2); dieses kann zu erheblichen Schäden der Ausbauten bis hin zum Bruch führen.
- Schäden im Auflagerbereich:  
Bei zu großen Auflagerverdrehungen kann es zu Schäden im Lasteinleitungsbereich kommen (Lagerschäden, Abplatzungen an tragenden Wänden, Risse im Putz). Außerdem muss ein Abheben der Ecken bei allseitig gelagerten Platten verhindert werden.
- Schwingungen:  
Sie können bei Menschen Unbehagen hervorrufen oder auch zu Schäden führen.



**Abb. 2.1:** Typische Schadensbilder nach [Brand/Glatz – 05].  
Links: Risse in einer leichten Trennwand infolge Durchbiegung der Deckenplatte.  
Mitte: Horizontalriss in der Wandscheibe durch Muldenbildung der unteren Deckenplatte.  
Rechts: Horizontalriss in der Außenwand infolge Auflagerverdrehung

Verformungen in Tragwerken sind u. a. von Belastung, Steifigkeit und Materialeigenschaften abhängig. Sie entstehen im Allgemeinen aus den direkten Einwirkungen (z. B. Eigenlast, Nutzlast), den indirekten Einwirkungen (Zwang aus Auflagersenkung, Temperatur) und dem zeitabhängigen Verhalten des Betons (Kriechen, Schwinden). Die Größe der Verformungen ist von den Werkstoffen (insbesondere dem Beton und seiner Zugfestigkeit), der Umgebung mit ihrem Einfluss auf das Schwinden und Kriechen und den Belastungsparametern abhängig. Letztere beinhalten die Größe der Belastung im riss- und im verformungs-erzeugenden Bemessungsfall, die Belastungsdauer und den Zeitpunkt der Erstbelastung. Die Verformungen im Stahlbetonbau sind im Zustand I aufgrund der hohen Steifigkeiten der einzelnen Bauteile (verglichen mit dem Stahl- oder Holzbau) meist nur sehr gering. Allerdings wachsen sie bei Einsetzen der Rissbildung und dem damit verbundenen Steifigkeitsverlust überproportional an.

Ausbauten wie beispielsweise nichttragende Trennwände oder Schaufensterscheibe sind zur Vermeidung von Schäden erst nach dem Ausschalen einzubauen, damit sich die Anfangsverformung (z. B. aus der Eigenlast) schon eingestellt hat. Erst die Verformungsvergrößerung infolge der weiteren Belastungen, der Steifigkeitsänderung und der zeitabhängigen Einflüsse beeinflusst dann die Gebrauchstauglichkeit.

Wandart	Rissbild	Anmerkung
geschlossene Wand  Mulde	 Schubrisse Bogenwirkung	Bogenwirkung möglich Schubrisse über Bogen Risse zur Wandmitte hin steigend
Wand mit außermittiger Öffnung  Mulde	 Risse	Risse gehen von den Ecken der Öffnung aus
Wand mit mittiger Öffnung  Mulde	 Schubrisse Bogenwirkung	Bogenwirkung möglich Schubrisse über Bogen Horizontalrisse von Öffnung ausgehend
geschlossene Wand  Sattel		Risse zur Wandmitte hin fallend

**Abb. 2.2:** Typische Schadensbilder in Trennwänden bei übermäßiger Verformung der darunter liegenden Deckenplatte

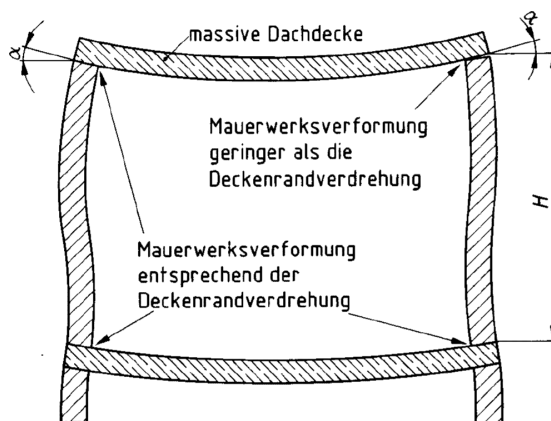
Schwingungen und periodische Einwirkungen können die Verformung vergrößern. Rechnerisch lässt sich dieses über die statische Verformung und einen Vergrößerungsfaktor erfassen, der vom Verhältnis der Eigenfrequenz des Bauteiles zur Erregerfrequenz sowie von der Bauteildämpfung abhängig ist; Hinweise dazu finden sich beispielsweise in [Eibl/Häußler – 97]. Schwingungen wirken aber auch direkt auf den Menschen ein und können Unbehagen hervorrufen oder werden in Form von Klappern von Türen und Fenstern u. ä. wahrgenommen. In [DIN 4150-2 – 99] werden Nachweismöglichkeiten vorgeschlagen, die das Wohlbefinden des Gebäudenutzers sicherstellen sollen. Dazu werden die Größe bzw. Stärke der auftretenden Erschütterung, die Frequenz und die Dauer zu einer Einwirkungsgröße zusammengefasst und mit einem Grenzwert verglichen. Der Nachweis bezieht sich allerdings nur auf gemessene und nicht auf berechnete Werte.

Schwingungen stellen einen Sonderbereich dar und werden in dieser Arbeit nicht näher betrachtet.

## 2.2 Richtlinien zur Begrenzung von Verformungen

Verformungen können horizontale oder vertikale Verschiebungen (z. B. Durchbiegungen) oder Verdrehungen von Knotenpunkten sein. Horizontalverschiebungen z. B. von Rahmen-tragwerken unter Windlasten müssen in Absprache mit dem Bauherrn und den beteiligten Fachplanern sinnvoll begrenzt werden (weiterführende Hinweise bspw. bei [Fingerloos/Litzner – 05]).

Verdrehungen resultieren aus der Durchbiegung der zugehörigen Deckenplatte. Eine Begrenzung der Verdrehung erfolgt über eine Verformungsbegrenzung des betreffenden Bauteils oder über konstruktive Maßnahmen. Beispielsweise wird nach [DIN 18530 – 87] eine Trennschicht (Bitumen-, Kunststoffbahn o. Ä.) zwischen Deckenplatte und tragenden Mauerwerkswänden angeordnet. Alternativ kann die Verdrehung durch eine Erhöhung der Deckensteifigkeit verkleinert werden; dann ist nachzuweisen, dass die Biegeschlankheit der Deckenplatte den Grenzwert nach [DIN 1045-1 – 08] um 1/3 bei bindemittelgebundenen Steinen und um 1/2 bei gebrannten Steinen (Ziegel) unterschreitet.



**Abb. 2.3:** Auswirkungen der Deckenverformung auf die angeschlossenen Mauerwerkswände nach [DIN 18530 – 87]

Die vertikale Verformung kann in Durchhang und Durchbiegung unterschieden werden. Die Durchbiegung bezeichnet die Differenz zwischen der Ausgangslage eines Bauteiles und der verformten Lage. Der Durchhang hingegen bezieht sich auf die Verbindungslinie zwischen zwei Auflagerpunkten. Zur Verringerung des Durchhanges ist eine Überhöhung des Bauteils zulässig, sie ist in [DIN 1045-1 – 08] auf  $L / 250$  begrenzt. Allerdings ist die Ausführbarkeit dieser Maßnahme stark von der Bauausführung abhängig und im Einzelfall kritisch zu hinterfragen.

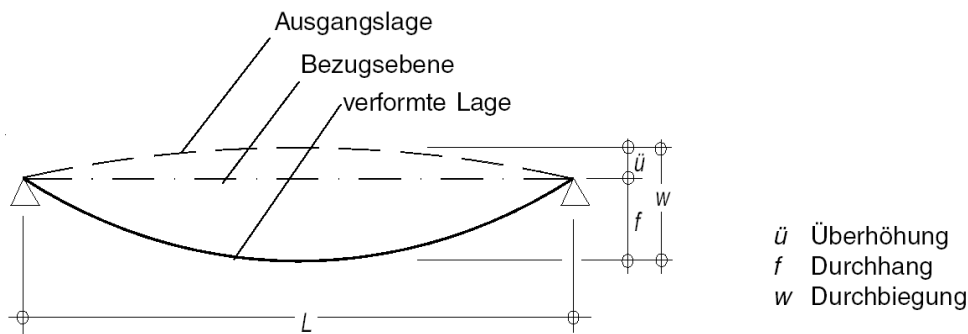


Abb. 2.4: Zusammenhang zwischen Überhöhung, Durchhang und Durchbiegung

Über die zulässigen Grenzen von Verformung im Stahlbetonbau findet man unterschiedliche Angaben. Allerdings gibt es hierzu nur wenige umfassende Untersuchungen. Grundlage für die Begrenzung der Durchbiegungen in den deutschen Normen sind die von [Mayer/Rüsch – 67] veröffentlichten Untersuchungen. Darin sind Schadensfälle an 181 Deckenplatten infolge zu großer Verformungen gesammelt, von denen 115 ausreichend beurteilt werden konnten; die anderen Fälle mussten wegen mangelnder Informationen zur Berechnung und Ausführung ausgeschlossen werden.

Zur besseren Vergleichbarkeit wurden die Schäden bzw. die Ursachen für die übermäßige Verformung in verschiedene Gruppen aufgeteilt. Am häufigsten wurden Trennwandschäden genannt, weitere Folgen zu großer Durchbiegungen waren Horizontalrisse im Bereich von Deckenauflagern, Nutzungseinschränkungen z. B. infolge Schiefstellung von Möbeln oder Muldenbildung von Dächern u.a.m.

Eine Auswertung der Schäden erfolgte über die vorhandene Biegeschlankheit. In Abbildung 2.5 ist dies in Abhängigkeit von der Stützweite dargestellt, wobei hier nur Verformungen berücksichtigt sind, die ein Schaden an einer Trennwand verursacht hatten.

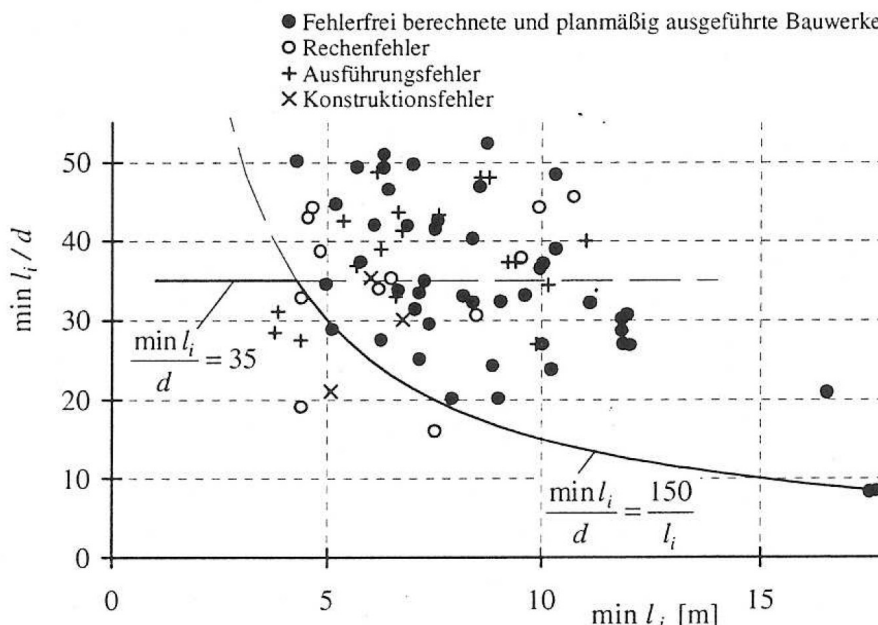


Abb. 2.5: Grenزشlankheiten von Stahlbetonträgern zur Vermeidung von Trennwandschäden nach [Mayer/Rüsch – 67]

Die aktuellen Normen greifen sowohl diese Untersuchung als auch die in [ISO 4356] angegebenen Grenzwerte auf. So sind die Verformungen nach [DIN 1045-1 – 08] wie folgt zu begrenzen (in ähnlicher Form auch nach [EN 1992-1-1 – 04] oder der britischen Norm [BS 8110 – 97]):



- $f \leq L / 250$  für den Durchhang, falls die Gebrauchstauglichkeit und das Erscheinungsbild durch eine zu große Verformung beeinträchtigt werden. Der Durchhang  $f$  bezieht sich dabei auf die Bezugsebene (vgl. Abb. 2.4).
- $w \leq L / 500$  für die Durchbiegung, falls Schäden an anderen Bauteilen wie zum Beispiel nichttragenden Trennwänden oder Verglasungen zu erwarten sind. Die Durchbiegung  $w$  bezieht sich dabei auf die beim Einbau der Ausbauten vorhandene Ausgangslage (s. Abb. 2.4).

Dabei ist  $L$  die Spannweite. Bei Flachdecken sollte die maximal zulässige Verformung sowohl an den direkten Verbindungslinien der Stützen als auch in den Diagonalen überprüft werden.

Die Verformungen sind im Allgemeinen für die quasi-ständige Lastfallkombination zu bestimmen. Der Anteil aus leichten Trennwänden, der i. d. R. als „verschmierte“ veränderliche Last berücksichtigt wird, sollte jedoch voll der Eigenlast zugerechnet werden. In Sonderfällen, wenn es infolge von Verformungen zu irreversiblen Schäden kommen kann (z. B. bei spröden Schaufensterscheiben), wird jedoch empfohlen, die Durchbiegung unter der häufigen oder sogar der seltenen Kombination zu begrenzen.

Nach der Schweizer Norm [SIA 260 – 03] ist die Durchbiegung aus optischen Gründen unter der quasi-ständigen Last auf  $w \leq L / 300$  zu begrenzen. Ist die Funktionstüchtigkeit beeinträchtigt, so ist die Durchbiegung auf  $w \leq L / 350$  unter häufiger Last bei reversiblen und auf  $w \leq L / 500$  unter seltener Last bei irreversiblen Auswirkungen zu beschränken.

Darüber hinaus finden sich weitere Hinweise bei speziellen Bauwerken. Die für Betonfertiggaragen geltende [DIN EN 13978 – 05] beziffert den Grenzwert für den Durchhang mit  $f \leq L / 150$ .

Für Deckenplatten aus Betonfertigteilen mit Ortbetoneergänzung sind laut Anhang F4 von [DIN EN 13747 – 07] die folgende Richtwerte einzuhalten:

- $L / 500$  bei Mauerwerkstrennwänden und/oder spröden Oberbelägen.
- $L / 350$  für sonstige Trennwände und/oder für als nicht spröde geltende Oberbeläge.
- $L / 250$  für Dachbauteile.



### 3 Stand der Technik

#### 3.1 Konstruktionsregeln nach DIN 1045-1 und EN 1992-1-1

Prinzipiell werden in den einschlägigen Normen und in der Literatur zwei unterschiedliche Wege gezeigt, Verformungen angemessen zu begrenzen:

- Rechnerische Ermittlungen der Verformungen und direkter Vergleich mit zulässigen Grenzwerten (z. B.  $L/250$  oder  $L/500$ ).
- Einhaltung von Konstruktionsregeln durch Wahl einer geeigneten Biegeschlankheit  $L/d$  in Abhängigkeit von maßgebenden Parametern.

Da eine rechnerische Ermittlung von Verformungen im Stahlbetonbau relativ aufwendig ist, wird in der Praxis häufig der letztgenannte Weg gewählt, und die Abmessungen der Konstruktion werden nach dem sog. Biegeschlankheitskriterium festgelegt. Zu beachten ist dabei jedoch insbesondere, dass diese Nachweisform Einschränkungen unterworfen und nur in bestimmten Fällen zulässig ist.

Im Folgenden werden die Schlankheitsnachweise nach DIN 1045-1 und EN 1992-1-1 kurz vorgestellt und miteinander verglichen.

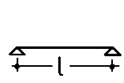

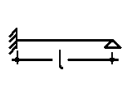
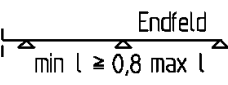
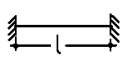
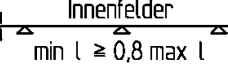
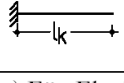

##### 3.1.1 Biegeschlankheit nach DIN 1045-1

Die neue [DIN 1045-1 – 08] enthält nur konstruktive Hinweise zur Verformungsbegrenzung. Das dort angegebene Verfahren ermöglicht es, für Deckenplatten des üblichen Hochbaus (d. h. gleichmäßig verteilte Last, Nutzlast  $q \leq 5 \text{ kN/m}^2$ ) das Einhalten der zulässigen Durchbiegung indirekt über die Bestimmung der zulässigen Biegeschlankheit nachzuweisen. Es war in der gleichen Form auch schon in der 1972er Ausgabe der DIN 1045 enthalten und basiert auf empirischen Untersuchungen von [Mayer/Rüsch – 67]. Die einzigen Eingangsgrößen zur Berechnung der erforderlichen statischen Nutzhöhe stellen die Stützweite und die Art der Lagerung dar. Folgende Begrenzungen sind einzuhalten:

$$- d \geq L_i / 35 \quad \text{allgemein.} \quad (3.1a)$$

$$- d \geq L_i^2 / 150 \quad \text{wenn Schäden an angrenzenden Bauteilen zu erwarten sind.} \quad (3.1b)$$

Die Länge  $L_i$  wird über den Beiwert  $\alpha$  bestimmt und gibt in etwa den Abstand der Wendepunkte der Biegelinie an. Bei einem Einfeldträger ist demnach  $L_i = L$ , die Durchlaufwirkung bei Mehrfeldträgern wird über  $L_i = \alpha \cdot L$  bestimmt (s. Tafel 3.1).

Statisches System		$\alpha = l_i / l$
		1,00
		0,80 <sup>a)</sup>
		0,60 <sup>a)</sup>
		2,40
a) Für Flachdecken bis zu einer Betonfestigkeitsklasse C30/37 sind die Werte um 0,1 zu erhöhen.		

Tafel 3.1: Beiwerte  $\alpha$  zur Bestimmung der Ersatzstützweite  $L_i$  nach [DIN 1045-1]

Hierbei gilt die Voraussetzung, dass bei Durchlaufsystemen die Felder in etwa gleich lang sind und Unterschiede in den Stützweiten max. 80 Prozent bezogen auf die größere Stützweite betragen. Für unregelmäßige Systeme kann mit DAfStb-Heft 240 [Grasser/Thielen – 91] der Beiwert  $\alpha$  über die bezogenen Stützmomente an den Enden des betrachteten Feldes ermittelt werden:

$$\alpha = \frac{1 + 4,8(m_1 + m_2)}{1 + 4(m_1 + m_2)} \quad (3.2)$$

mit  $m_i = M_i / (f \cdot L^2)$ ;  $M_1$  und  $M_2$  sind dabei die Stabendmomente,  $f$  ist die maßgebliche Gleichlast des untersuchten Feldes und  $L$  die betrachtete Feldlänge.

Es ist zu beachten, dass die in der [DIN 1045-1 – 08] vorgeschlagenen Richtwerte nur für Platten des üblichen Hochbaus gelten und keinesfalls ein Einhalten der erforderlichen Grenzen von  $L / 250$  bzw.  $L / 500$  garantieren. In DIN 1045-1 heißt es lediglich, dass die Begrenzung der Biegeschlankheit „... im Allgemeinen ...“ ausreichend ist und keine über die Grenzen hinaus auftretenden Verformungen zu erwarten sind.

Kritisch ist anzumerken, dass die aus empirischen Studien der sechziger Jahre entnommenen Ergebnisse nicht bedingungslos auf die heutigen Verhältnisse übertragbar sind. Zum einen wurden seinerzeit die Querschnitte weniger hoch ausgenutzt, zum anderen kam meistens Bewehrungsstahl mit einer niedrigeren Streckgrenze ( $f_{yk} = 420 \text{ N/mm}^2$ ) zur Anwendung. Dadurch bedingt kam es insgesamt zu höheren Bewehrungsgraden als in vergleichbaren, nach aktueller Norm bemessenen Bauteilen; dieses führte früher dann automatisch zu einer größeren Steifigkeit (insbesondere im Zustand II). Zusätzlich haben sich seit den sechziger Jahren die Bemessungs- und Sicherheitskonzepte grundlegend geändert, wodurch eine Übertragbarkeit auf die heutige Situation nur bedingt gegeben ist (s. hierzu Kap. 8).

### 3.1.2 Biegeschlankheit nach EN 1992-1-1 (Eurocode 2)

Der Eurocode 2 stellt deutlich differenziertere Anforderungen an die Biegeschlankheit. Sie basieren auf einer rechnerischen Parameterstudie und berücksichtigt nicht nur die Länge und Lagerung des Bauteils, sondern auch den Beanspruchungsgrad (indirekt über den Bewehrungsgrad) und die Betonfestigkeit. Es wird zwischen gering (Gleichung 3.3a) und hoch beanspruchten Bauteilen (Gl. 3.3b) unterschieden. Die maximal zulässige Biegeschlankheit zur Begrenzung auf  $L / 250$  ist:

$$\frac{L}{d} = K \left[ 11 + 1,5 \sqrt{f_{ck}} \frac{\rho_0}{\rho} + 3,2 \sqrt{f_{ck}} \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right)^{3/2} \right] \quad \text{wenn } \rho \leq \rho_0 \quad (3.3a)$$

$$\frac{L}{d} = K \left[ 11 + 1,5 \sqrt{f_{ck}} \frac{\rho_0}{\rho - \rho'} + \frac{1}{12} \sqrt{f_{ck}} \sqrt{\frac{\rho'}{\rho_0}} \right] \quad \text{wenn } \rho > \rho_0 \quad (3.3b)$$

mit	$L / d$	Grenzwert der Biegeschlankheit
	$K$	Beiwert zur Berücksichtigung der verschiedenen statischen Systeme; es gilt $K = 1$ beim Einfeldträger, $K = 1,3$ beim Randfeld und $K = 1,5$ beim Innenfeld eines Mehrfeldträgers, $K = 1,2$ bei einer Flachdecke und $K = 0,4$ bei einem Kragarm
	$\rho_0$	Referenzbewehrungsgrad $\sqrt{f_{ck}} \cdot 10^{-3}$
	$\rho$	erforderlicher Zugbewehrungsgrad in Feldmitte, um das Bemessungsmoment aufzunehmen (bei Kragträgern an der Einspannstelle)
	$\rho'$	erforderlicher Druckbewehrungsgrad in Feldmitte (Kragträger wie vorher).

Ist die Verformung auf  $L / 500$  zu begrenzen, so muss die statische Nutzhöhe ab einer Spannweite von 7 Metern um den Faktor  $L_{eff} / 7$  erhöht werden.

Zusätzlich muss beachtet werden, dass in Gl. (3.3a) und (3.3b) eine Stahlspannung von  $\sigma_s = 310 \text{ N/mm}^2$  angenommen wurde. Weicht die tatsächlich in Feldmitte (bzw. an der Einspannstelle bei einem Kragarm) vorhandene, unter maßgebender Last ermittelte Spannung von diesem Wert ab, so ist die Biegeschlankheit mit dem Faktor  $310 / \sigma_s$  zu korrigieren. Alternativ kann diese Korrektur auch über folgende Beziehung erfolgen:

$$\frac{310}{\sigma_s} \approx \frac{500}{f_{yk}} \cdot \frac{A_{s,prov}}{A_{s,req}} \quad (3.4)$$

Aus den Gln. (3.3) lassen sich einfache Konstruktionsregeln herleiten. Für niedrig beanspruchte Deckenplatten gilt beispielsweise mit Gl. (3.3a) und  $\rho = 0,5 \%$  für  $\sigma_s = 310 \text{ N/mm}^2$ :

$$- d \geq L_i / 20 \quad \text{allgemein} \quad (3.5a)$$

$$- d \geq L_i / 20 \cdot L_{eff} / 7 \quad \text{bei erhöhten Anforderung und } L_{eff} > 7 \text{ m} \quad (3.5b)$$

Für hoch beanspruchte Bauteile (im Allg. Balken) lässt sich analog für  $\rho = 1,5 \%$  herleiten

$$- d \geq L_i / 14 \quad \text{allgemein} \quad (3.5c)$$

$$- d \geq L_i / 14 \cdot L_{eff} / 7 \quad \text{bei erhöhten Anforderung und } L_{eff} > 7 \text{ m} \quad (3.5d)$$

Das statische System wird mit der Ersatzstützweite  $L_i = L/K$  berücksichtigt ( $K$  s. Erläuterungen zu Gl. (3.3)).

### 3.1.3 Vergleich der Schlankheitsnachweise

Die Konstruktionsregeln nach [EN 1992-1-1 – 04] berücksichtigen deutlich mehr Eingangsparameter als nach [DIN 1045-1 – 08], außerdem wird der Anwendungsbereich erweitert. Während in [DIN 1045-1 – 08] nur Platten des üblichen Hochbaus (also gering beanspruchte Deckenplatten mit einem Bewehrungsgrad  $\leq 0,5 \%$ ) behandelt werden, können mit Eurocode 2 auch Durchbiegungsnachweise für Balken bzw. hoch beanspruchte Tragwerke indirekt mit Hilfe von Konstruktionsregeln geführt werden.

Es wird jedoch auch deutlich, dass die Formulierung nach [EN 1992-1-1 – 04] häufig konservativer ist als nach [DIN 1045-1 – 08]. In Abb. 3.1 sind exemplarisch die erforderlichen Nutzhöhen einer einfeldrigen Deckenplatte dargestellt. Der Nachweis nach [EN 1992-1-1 – 04] wird für die Spannungen  $\sigma_s = 200 \text{ N/mm}^2$  und  $\sigma_s = 300 \text{ N/mm}^2$  geführt, der Grenzwert der Verformung wird auf  $L / 250$  und auf  $L / 500$  festgelegt. Es ist zu sehen, dass für übliche Ausnutzungsgrade der Bewehrung im Gebrauchszustand (d. h.  $\sigma_s \geq 250 \text{ N/mm}^2$ ) bei  $\rho = 0,5 \%$  in EN 1992-1-1 deutlich größere Deckenstärke gefordert werden als in DIN 1045-1. (Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass sich bei  $\rho < 0,5 \%$  die Ergebnisse annähern und nach EC 2 sogar günstiger als nach DIN 1045-1 werden können.)

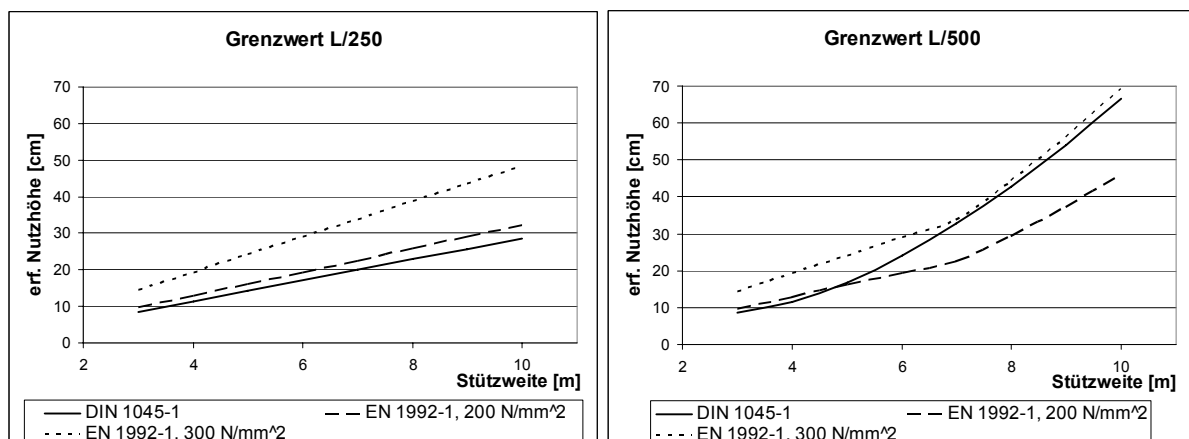


Abb. 3.1: Vergleich der erforderlichen statischen Nutzhöhe für Deckenplatten ( $\rho = 0,5 \%$ )

### 3.2 Berechnungsansätze nach EN 1992-1-1

Abweichend von [DIN 1045-1 – 08] wird in [EN 1992-1-1 – 04] neben den Konstruktionsregeln zur Begrenzung der Biegeschlankheit noch ein Verfahren zur direkten Berechnung der Durchbiegung vorgestellt. Es ermöglicht dem Anwender, über eine zum Momentenverlauf affine Krümmung und einen Verteilungsfaktor, der das Verhältnis der Einflüsse aus Zustand I und II definiert, die Verformungen eines Bauteils rechnerisch genauer abschätzen zu können. Zusätzlich werden die zeitabhängigen Einflüsse aus Schwinden und Kriechen berücksichtigt.

Die Berechnung einer Verformungsgröße  $\alpha$  erfolgt für ein Bauteil, das gerissene und ungerissene Bereiche aufweist, über eine anteilmäßige Berücksichtigung der Werte für den ungerissenen Zustand I ( $\alpha_I$ ) und den reinen Zustand II ( $\alpha_{II}$ ).

$$\alpha = \zeta \cdot \alpha_{II} + (1 - \zeta) \cdot \alpha_I \quad (3.6)$$

Dabei ist  $\zeta$  ein Verteilungsbeiwert, der im ungerissenen Zustand zu Null gesetzt und im gerissenen Zustand über folgende Formel ermittelt wird:

$$\zeta = 1 - \beta \cdot (\sigma_{sr} / \sigma_s)^2 \quad (3.7)$$

mit  $\beta$  Lastbeiwert: 1,00 für Kurzzeitbelastung  
0,50 für Dauerlasten  
 $\sigma_{sr}$  Spannung in der Zugbewehrung im Zustand II unter der rissverursachenden Last  
 $\sigma_s$  Spannung in der Zugbewehrung im Zustand II unter der maßgebenden Bemessungslast

Das Verhältnis ( $\sigma_{sr} / \sigma_s$ ) darf auch durch den Quotienten ( $M_{cr} / M$ ) bzw. ( $N_{cr} / N$ ) ersetzt werden. Dabei ist  $M_{cr}$  das Rissmoment und  $M$  das Biegemoment aus der äußeren Last. Bei reinem Zug ist  $N_{cr}$  die Zugkraft, die zum Riss führt, und  $N$  die Kraft aus der äußeren Last. Kombinierte Einwirkungen aus Moment und Normalkraft werden im EC 2 nicht behandelt. Der Verteilungsbeiwert kann für solche Fälle nach den in [CEB – 85] vorgeschlagenen Methoden bestimmt werden.

Das Betonkriechen wird berücksichtigt, in dem die elastische Verformung um die Kriechzahl erhöht wird, die Gesamtverformung wird also mit Hilfe des Faktors ( $1 + \phi(\infty, t_0)$ ) ermittelt. Alternativ dazu darf nach [EN 1992-1-1 – 04] die Verformung mit Hilfe eines modifizierten Elastizitätsmoduls bestimmen werden:

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \phi(\infty, t_0)} \quad (3.8)$$

Das Schwinden des Betons wird nach [EN 1992-1-1 – 04] über die Querschnittskrümmung nach Gl. (3.9) bestimmt:

$$\frac{1}{r_{cs}} = \varepsilon_{cs} \cdot \alpha_e \cdot \frac{S}{I} \quad (3.9)$$

Dabei ist  $\varepsilon_{cs}$  die freie Schwinddehnung  
 $S$  das Flächenmoment 1. Ordnung der Querschnittsfläche der Bewehrung bezogen auf den Schwerpunkt des Querschnittes  
 $I$  das Flächenträgheitsmoment des Querschnittes  
 $\alpha_e = E_s / E_{c,eff}$ , Verhältnis der E-Moduln von Betonstahl und Beton

Die geometrischen Größen  $S$  und  $I$  sind für den ideellen Querschnitt in Zustand I und II zu bestimmen, weitere Hinweise hierzu befinden sich im Kapitel 5.

### 3.3 Bemessungsansätze nach internationalen Normen

Die **Schweizer Stahlbetonnorm** [SIA 262 – 04] behandelt den Nachweis der zulässigen Durchbiegung über eine direkte Berechnung im ungerissenen Zustand I und im Zustand II. Die dort vorgestellte Methode ist identisch mit dem Vorschlag des Model Code 90 [CEB/FIP – 91]. Über einen zu erwartenden wahrscheinlichen Wert gibt es keine Angaben. Ein vereinfachter Nachweis der Verformungen über eine zulässige Biegeschlankheiten ist in der Norm nicht enthalten.

Die Verformung im Zustand I setzt sich aus der elastischen Durchbiegung  $w_{el}$  und dem Kriechanteil zusammen:

$$w_I = w_{el} \cdot (1 + \varphi) \quad (3.10)$$

Im gerissenen Zustand kann die Gesamtverformung über den elastischen Anteil  $w_{el}$ , die Kriechzahl  $\varphi$ , das Verhältnis von Gesamthöhe  $h$  zur Nutzhöhe  $d$  und die Druck- bzw. Zugbewehrungsgrade  $\rho'$  und  $\rho$  bestimmt werden:

$$w_{II} = \frac{1 - 20 \cdot \rho'}{10 \cdot \rho^{0,7}} \cdot (0,75 + 0,1 \cdot \varphi) \cdot \left(\frac{h}{d}\right)^3 \cdot w_{el} \quad (3.11)$$

In der bis 2008 gültigen **österreichischen Norm** [ÖNORM B 4700 – 00] werden Grenzschlankheiten zum Nachweis der Durchbiegung angegeben. Sind diese eingehalten, so ist eine genaue Berechnung in den meisten Fällen nicht erforderlich. Es wird zwischen hoch beanspruchten ( $\rho_s = 1,5 \%$ ) und gering beanspruchten ( $\rho_s = 0,5 \%$ ) Querschnitten unterschieden, Zwischenwerte können linear interpoliert werden. Die in Tafel 3.2 angegebenen Werte gelten für eine Stahlspannung von  $\sigma_s = 250 \text{ N/mm}^2$ . Sie sind bei Stützweiten  $L_{eff} > 7 \text{ m}$  mit  $7 / L_{eff}$  zu verkleinern, wenn Schäden an benachbarten Bauteilen zu erwarten sind.

Der Nachweis ist identisch mit dem des Eurocode 2 in der Fassung von 1992. Bezieht man die Grenzschlankheiten auf eine Stahlspannung von  $\sigma_s = 310 \text{ N/mm}^2$ , so erhält man die entsprechenden, in Abschnitt 3.1.2 dargestellten Werte aus dem Eurocode 2, die so auch wieder in der neuen österreichischen Fassung des Eurocode 2 übernommen wurden.

Bauteile	$\rho = 1,5 \%$	$\rho = 0,5 \%$
Frei drehbar gelagerte Balken und ein- oder zweiachsig gespannte, einfeldrige Platten	18	25
Durchlaufende Balken und ein- oder zweiachsig gespannte Platten im Endfeld	23	32
Durchlaufende Balken und ein- oder zweiachsig gespannte Platten im Innenfeld	25	35
Flachdecken	21	30
Kragbalken und Kragplatten	7	10

**Tafel 3.2:** Grenzschlankheit  $L/d$  nach [ÖNORM B 4700 – 00]

Für eine rechnerische Ermittlung der Durchbiegung gibt [ÖNORM B 4700 – 00] ein Näherungsverfahren an. Ausgehend von der Verformung im Zustand I und II wird über eine Momenten-Krümmungsbeziehung ein zu erwartender Wert der Verformung bestimmt.

Im Zustand I beträgt die Krümmung:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{B_I} \cdot (1 + k_{\varphi 1} \cdot \varphi) \quad (3.12)$$

$$\text{mit } k_{\varphi 1} = \frac{1}{1 + 25\rho \cdot (1 + A_{s2}/A_{s1})} \quad (3.13)$$

$A_{s1}, A_{s2}$  Querschnittsfläche der Zug- bzw. Druckbewehrung

$\rho$  Bewehrungsgrad;  $\rho = A_{s1} / (b \cdot d)$

$\varphi$  Kriechzahl

$B_I$  Biegesteifigkeit im Zustand I als Produkt des ideellen Flächenträgheitsmomentes 2. Grades und des mittleren Elastizitätsmodul als Tangentenmodul

$M$  Biegemoment unter Gebrauchslast

Im Zustand II erfolgt die Ermittlung analog; das maßgebende Moment wird dann durch die Biegesteifigkeit des gerissenen Querschnittes dividiert. Der Einfluss des Kriechens wird über den Faktor  $k_{\varphi 2}$  bestimmt. Er ist kleiner als im ungerissenen Zustand, da im gerissenen Zustand nur noch die Druckzone kriecht. Das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen wird über den Faktor  $k_M$  berücksichtigt.

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{B_{II}} \cdot k_M \cdot (1 + k_{\varphi 2} \cdot \varphi) \quad (3.14)$$

$$\text{mit } k_M = 1 - \left(1 - \frac{B_{II}}{B_I} \cdot k_{\varphi 3}\right) \cdot k_D \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^2 \quad (3.15)$$

$$k_{\varphi 2} = \frac{1,15}{\left(1 + \frac{A_{s2}}{A_{s1}}\right) \cdot \left(2 - \frac{x_{II}}{d}\right)} \cdot \frac{x_{II}}{d} \leq k_{\varphi 1} \quad (3.16)$$

$$k_{\varphi 3} = \frac{1 + k_{\varphi 1} \cdot \varphi}{1 + k_{\varphi 2} \cdot \varphi} \quad (3.17)$$

$x_{II}$  Druckzonenhöhe im gerissenen Zustand

$z_{II}$  Hebelarm der inneren Kräfte im gerissenen Zustand

$k_D$  Beiwert zur Berücksichtigung der Einwirkungsdauer;

$k_D = 0,5$  bei Dauerlast und  $k_D = 1$  bei kurzzeitiger Einwirkung

$B_{II}$  Biegesteifigkeit des gerissenen Querschnittes;  $B_{II} = E_s \cdot A_s \cdot (d - x_{II}) \cdot z_{II}$

$M_{cr}$  Biegemoment, welches zum Erstriss führt

Prinzipiell ähnelt das Verfahren der in Abschnitt 3.2 vorgestellten Berechnung nach [EN 1992-1-1 – 04], die berechneten Krümmungen sind für übliche Bemessungsfälle nahezu identisch. Allerdings gibt die [ÖNORM B 4700 – 00] keinen Hinweis auf den Einfluss des Betonschwindens auf die Verformung.

In der **britischen Norm** [BS 8110 – 97] gibt es sowohl Angaben über ein geeignetes Rechenverfahren als auch Grenzwerte der Biegeschlankheit. Diese ist bei Einfeldträgern mit einem Rechteckquerschnitt auf  $L / d = 20$  zu begrenzen, Durchlaufträger erfordern eine Biegeschlankheit von maximal  $L / d = 26$ . Diese Werte sind bei Spannweiten  $L > 10$  Meter um den Faktor  $10 / L$  zu modifizieren. Weitere Änderungen der Biegeschlankheit können bei hohen Belastungen und Ausnutzungsgraden oder aufgrund einer vorhandenen Druckbewehrung erfolgen. Letztere kann die zulässige Biegeschlankheit um bis zu 50 Prozent erhöhen.



### 3.4 Konstruktionsregeln aus weiterführender Literatur

Besondere Bedeutung haben die Arbeiten von Krüger/Mertzsch ([Krüger/ Mertzsch – 03], [Krüger/Mertzsch – 06]). Dort ist sowohl ein vereinfachter Berechnungsansatz aufgestellt (siehe Abschnitt 3.5), als auch ein eigener Nachweis der Biegeschlankheit entwickelt. Er ist das Ergebnis einer Reihe von Vergleichsrechnungen und kann auf Platten und auf Balken angewendet werden.

Der Nachweis der Biegeschlankheit gilt für *Platten* mit einer Nutzlast von  $q \leq 5 \text{ kN/m}^2$ , einer Kriechzahl  $\varphi \leq 2,5$  und einer Betonfestigkeit von  $f_{ck} = 20 \text{ N/mm}^2$ , wobei letztere durch einen Korrekturwert auf andere Festigkeiten umgerechnet werden kann. Verglichen mit der [DIN 1045-1 – 08] fordert dieser Nachweis deutlich größere Nutzhöhen. Letztere werden wie folgt ermittelt:

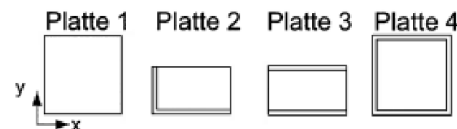
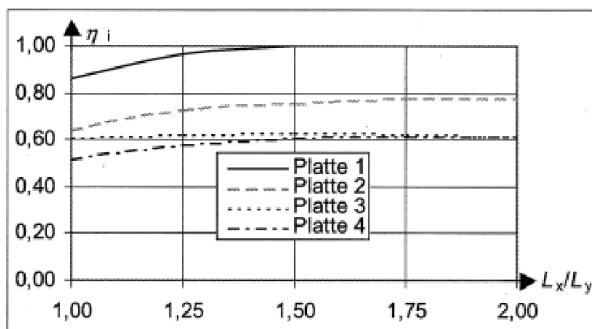
$$d \leq k_c \cdot L_i / \lambda_i \tag{3.18}$$

mit  $L_i = \eta_1 \cdot L_{eff}$

Ersatzstützweite,  $L_{eff} = L_{min}$  und  $\eta_1$  nach Tafel 3.3 (näherungsweise und insbesondere bei einachsig gespannten Platten darf auch der Beiwert  $\alpha$  aus [DIN 1045-1] verwendet werden, siehe Tafel 3.1) mit  $k_2 = 42,5$  für eine Begrenzung auf  $L / 250$   
 $k_2 = 35,2$  für eine Begrenzung auf  $L / 500$   
 siehe auch Tafel 3.4  
 mit  $f_{ck}$  in  $\text{MN/m}^2$

$$\lambda_i = k_2 - 3,65L_i + 0,15L_i^2$$

$$k_c = (20 / f_{ck})^{1/6}$$



Platte 1:  $\eta_1 = 0,168 + 0,979 \cdot k_L - 0,283 \cdot k_L^2 \leq 1$   
 Platte 2:  $\eta_2 = 0,148 + 0,689 \cdot k_L - 0,188 \cdot k_L^2$   
 Platte 3:  $\eta_3 = 0,473 + 0,200 \cdot k_L - 0,065 \cdot k_L^2$   
 Platte 4:  $\eta_4 = 0,103 + 0,578 \cdot k_L - 0,162 \cdot k_L^2$   
 mit  $k_L = L_x / L_y$  und  $L_x \geq L_y$

Tafel 3.3: Beiwerte  $\eta_1$  zur Bestimmung von  $L_i$  bei Platten

zul. Durchbiegung	L / 250				L / 500			
$L_i$ (in m)	$\leq 4,0$	6,0	8,0	10	$\leq 4,0$	6,0	8,0	10
$\lambda_i$	29	26	23	21	23	19	16	14

Tafel 3.4: Grenزشlankheit  $\lambda_i$  bei Platten

Analog dazu kann auch bei *Balken* der Nachweis der Durchbiegung über eine zulässige Biegeschlankheit geführt werden. Voraussetzung hierfür ist ein Bewehrungsgrad  $\rho \leq 2 \%$ , das Verhältnis von quasi-ständiger zur seltenen Last darf den Wert 0,7 nicht überschreiten. Die erforderliche Nutzhöhe wird gemäß Gleichung (3.18) bestimmt. Der Wert von  $\lambda_i$  wird bei Balken über die Gleichung

$$\lambda_i = k_1 \cdot (36,30 - 2,46L_i + 0,12L_i^2) \quad \text{mit} \quad k_1 = 1,00 \text{ bei } L / 250 \text{ bzw. } k_1 = 0,56 \text{ bei } L / 500$$

berechnet oder aus Tafel 3.5 abgelesen.

Statisches System	$\alpha_i$	zul. Durchbiegung	$L_i$	$\lambda_j$
Frei drehbar gelagerter Einfeldträger	1,00	L / 250	≤ 4,0 m	28
Endfeld eines Durchlaufträgers	0,80		6,0 m	26
Mittelfeld eines Balkens	0,70		8,0 m	23
Kragträger	2,50		10,0 m	21
			12,0 m	19
		L / 500	≤ 4,0 m	16
			6,0 m	15
			8,0 m	14
			10,0 m	13
			12,0 m	13

Tafel 3.5 Beiwerte  $\alpha_i$  und  $\lambda_j$ 

Ein weiterer Vorschlag für ein Biegeschlankheitskriterium kann der Veröffentlichung von [Zilch/Donaubauer – 06] entnommen werden. Basis hierfür ist eine Reihe von Finite-Elemente-Berechnungen an ein- und zweiachsig gespannten Deckenplatten unter Berücksichtigung von Rissbildung und Langzeitverhalten. Das Ergebnis wird anschließend in Konstruktionsregeln überführt. Wegen einiger Vereinfachungen und Annahmen, die die große Anzahl von möglichen Einflüssen und Eingangsparametern reduzieren sollen, gelten die Regeln für Platten als Innenbauteile ( $RH = 50\%$ ) für eine Verformungsbegrenzung auf  $L / 250$ . Belastungsbeginn ist bei  $t_0 = 28$  Tage, die Nutzlast  $q_k$  selbst ist vorwiegend ruhend und liegt in den Grenzen von 1,50 bis 2,75 kN/m<sup>2</sup>. Die Durchlaufwirkung wird ähnlich wie bei [Krüger/Mertzsch – 06] über einen Faktor  $\alpha_i$  bei einachsig und  $\eta_{za}$  bei zweiachsig gespannten Platten berücksichtigt (s. Tafel 3.6).

Die zulässige Biegeschlankheit beträgt:

$$\frac{L}{d} = \lambda_0 \cdot \left( \frac{L_0}{L_i} \right)^{1/2} \cdot \left( \frac{f_{ck}}{f_{ck0}} \right)^{2/3} \quad (3.19)$$

mit  $\lambda_0 = 25$  Grundwert der Biegeschlankheit  
 $L_0 = 5,0$  m Bezugswert der Spannweite  
 $f_{ck0} = 25$  N/mm<sup>2</sup> Bezugswert der Betongüte  
 $L_i$  Ersatzstützweite mit  $L_i = \alpha_i \cdot L_{eff}$  bei einachsig und  $L_i = \eta_{za} \cdot L_{eff}$  bei zweiachsig gespannten Platten

Bei Stützweiten über sieben Meter ist diese Grenزشlankheit um den Faktor  $7 / L$  zu reduzieren.

Statisches System	$\alpha_i$
Frei drehbar gelagerter Einfeldträger	1,00
Endfeld eines Durchlaufträgers	0,80
Innenfeld eines Durchlaufträgers	0,70
Kragträger	2,50

Tafel 3.6: Beiwert  $\alpha_i$  zur Berücksichtigung der Durchlaufwirkung bei einachsig gespannten Stahlbetonplatten

### 3.5 Weitere rechnerische Nachweismöglichkeiten

Parallel zu den Untersuchungen an mangelbehafteten Deckenplatten hat Mayer [Mayer – 67] ein Berechnungsverfahren zur Ermittlung von Verformungen aufgestellt. Aus den bekannten Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen werden unter Berücksichtigung von Kriechen und Schwinden zwei Differentialgleichungen erster Ordnung aufgestellt. Die

Auswertung des Gleichungssystems erfolgt für eine Reihe von ausgewählten Randbedingungen. Zu diesen Werten werden Korrekturfaktoren entwickelt, die es dem Anwender ermöglichen, für die jeweiligen konkreten Verhältnisse eine genügend genaue Näherung an die zu erwartende Verformung zu erhalten. Diese Faktoren können aus Diagrammen für den Einfluss des Kriechens, des Schwindens und einer Druckbewehrung abgelesen werden. Hierbei wird jeweils zwischen Zustand I und II unterschieden.

Hierauf aufbauend entwickelten *Grasser* und *Thielen* 1975 ein Näherungsverfahren [Grasser/Thielen – 91], die Grundlagen werden beispielsweise in [Grasser/Thielen – 75] erläutert. Diese Berechnungsverfahren sind eine Reaktion auf die neuen Bemessungsansätze der DIN 1045 aus dem Jahr 1972. Durch die nun mögliche höhere Ausnutzung der Betondruckzone konnte im Allgemeinen die Bewehrungsmenge reduziert werden, die Vergleichbarkeit mit den in [Mayer/Rüsch – 67] untersuchten Platten war damit nur noch bedingt gegeben. Durch das Nachrechnen von Versuchen sichern *Grasser/Thielen* unter Berücksichtigung der Streuungen der Materialwerte ihre Berechnungsansätze ab.

Es wird ein wahrscheinlicher Wert einer Durchbiegung zwischen einem unteren und oberen Wert ermittelt. Die untere Grenze wird im Zustand I bestimmt, die obere im reinen Zustand II. Diese Werte stellen die 5 % bzw. 95 % Fraktile der Durchbiegung dar, einen zu erwartenden Wert erhält man über die Wichtung dieser Grenzwerte mittels eines Quotienten aus dem Rissmoment und dem maximalen Feldmoment. Letzteres muss unter der Eigenlast zzgl. dem „Dauerlastanteil“ der Nutzlast bestimmt werden, was prinzipiell der quasi-ständigen Last der aktuellen Normengeneration entspricht.

Die Verformung selbst wird zunächst unter der Voraussetzung eines linearen Spannungs-Dehnungs-Gesetzes für den reinen, ungerissenen Betonquerschnitt ermittelt. Anschließend gibt [Grasser/Thielen – 91] eine Reihe von Korrekturwerten an, um die Anordnung der Bewehrung (im Druck- und Zugbereich mit den dazugehörigen Randabständen), des Betonkriechens und -schwindens zu erfassen. Der Übergang von Zustand I in den Zustand II wird mit einer bilinearen Momenten-Krümmungslinie näherungsweise erfasst. Diese stellt die Verbindung zwischen Ursprung und der Krümmung bei Rissbildung sowie der Krümmung bei Rissbildung und der Krümmung unter Maximallast ohne Mitwirkung des Betons auf Zug dar. Somit wird gerade der Übergang vom ersten Riss zum abgeschlossenen Rissbild sehr konservativ behandelt. Bei [Leonhardt – 78] ist hierzu der Hinweis zu finden, dass das Verfahren nach *Grasser/Thielen* besonders bei Bauteilen mit einem niedrigen Bewehrungsgrad und einer hohen Betonfestigkeit recht ungenau ist.

In [Krüger/Mertzsch – 03] bzw. [Krüger/Mertzsch – 06] wird eine weitere Methode vorgestellt, mit dem man die Verformungen eines Bauteils näherungsweise ermitteln kann. Hierbei wird die Verformung im Zustand I berechnet und mit einem Vergrößerungsfaktor, der den Einfluss der Rissbildung im Beton berücksichtigt, multipliziert. Folgende Annahmen liegen dem Verfahren zugrunde:

- Spannungen und Dehnungen verhalten sich im Zustand I und II linear
- als Endkriechzahl wird  $\varphi_{\infty} = 2,5$  angenommen, Belastungszeitpunkt  $t_0 = 28$  Tage
- Schwinden wird nicht berücksichtigt, die Verformung sowie die Rissbildung werden jedoch unter der seltenen Lastkombination berechnet
- als Beton wird ein C20/25 unterstellt; als Betonzugfestigkeit wird die Biegezugfestigkeit  $f_{ct,fl}$  angenommen, die sich aus der zentrischen Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  ergibt zu  $f_{ct,fl} = f_{ctm} \cdot [1 + 1,5 \cdot (h / 100)^{0,7}] / [1,5 \cdot (h / 100)^{0,7}]$
- eine Druckbewehrung wird nicht berücksichtigt

Die Verformungen im Zustand II lassen sich wie folgt bestimmen:

$$a_k'' = k_a \cdot a_0' \quad (3.20)$$

mit  $a_0^I$  Bauteilverformung im Zustand I zum Belastungszeitpunkt  $t_0$   
 $k_a$  Beiwert zur Berücksichtigung der Verformungsvergrößerung  
 $k_a = \psi \cdot \rho_s^{\omega} + 0,2$   
 mit  $\rho_s = A_s / (b \cdot h)$  Bewehrungsgrad der Zugbewehrung (in %)  
 $\psi, \omega$  Beiwerte nach Tafel 3.7 (abhängig vom Quotienten aus Maximalmoment  $M_{rare}$  unter seltener Last und dem Erstrissmoment  $M_{cr}$ )

$M_{rare}/M_{cr}$	$\psi$	$\omega$
$\leq 1,0$	3,4	-0,02
1,2	4,0	-0,24
1,5	4,3	-0,35
2,4	4,7	-0,40

Tafel 3.7: Beiwerte  $\psi$  und  $\omega$ 

### 3.6 Vergleichendes Beispiel

Die Unterschiede der in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellten Nachweisverfahren werden an einem einfachen Beispiel veranschaulicht. Es soll die statische Nutzhöhe  $d$  ermittelt werden, die erforderlich ist, um eine Durchbiegung kleiner als  $L / 250$  bzw.  $L / 500$  nachzuweisen.

Als statisches System wird ein Einfeldträger gewählt (unterschiedliche Definitionen der Ersatzlängen  $L_i$  haben damit keinen Einfluss mehr auf das Ergebnis), der als einachsige gespannte Platte mit einer Stützweite von  $L = 6,00$  m und einer Nutzlast von  $q_k = 3,2$  kN/m<sup>2</sup> ausgeführt werden soll. Die Eigenlast  $g_{k1}$  ist abhängig von der Bauteildicke, die vereinfachend aus der statischen Nutzhöhe in der Form  $h = d + 2,5$  [cm] bestimmt wird, außerdem soll eine Ausbaulast von  $g_{k2} = 1,00$  kN/m<sup>2</sup> berücksichtigt werden. Der quasi-ständige Lastanteil der Nutzlast soll 30 % betragen. Bei den Verfahren, die direkt eine Durchbiegung ermitteln, ist noch der Einfluss aus Kriechen und Schwinden zu bestimmen. Unter der Annahme eines Innenbauteils wird das Schwindmaß zu  $\varepsilon_{cs} = -0,6$  Promille, die Kriechzahl zu  $\varphi = 2,5$  gewählt. Der Beton entspricht einem C20/25 mit  $f_{ck} = 20$  N/mm<sup>2</sup>.

Die Bewehrung ist zunächst unbekannt, da sie von der Bauteildicke und der statischen Nutzhöhe abhängt. Bei den Verfahren, die einen Bewehrungsgrad als Eingangsgröße benötigen, wird dieser in Abhängigkeit zur Nutzhöhe iterativ bestimmt. Das Ergebnis ist in Tafel 3.8 dargestellt.

In Tafel 3.9 wird der Bewehrungsgrad konstant auf 0,5 % festgesetzt. Bei den rechnerischen Nachweisverfahren geht der Bewehrungsgrad auf der Widerstandsseite mit ein, seine Erhöhung bewirkt also eine Verringerung der Durchbiegung. Bei den Schlankheitsnachweisen nach [EN 1992-1-1 – 04] wird der Bewehrungsgrad ebenfalls berücksichtigt (Ausnutzungsgrad); ein hoher Bewehrungsgrad lässt also auf eine hohe Einwirkung und damit auch große Verformung schließen. Daher muss bei diesem Verfahren die ermittelte Nutzhöhe um den Quotienten aus der eigentlich erforderlichen Bewehrung zu dem gewählten Bewehrungsgrad herabgesetzt werden (vgl. Gl. (3.4)). Da sich Nutzhöhe und erforderlicher Bewehrungsgrad jedoch gegenseitig beeinflussen, muss diese Rechnung wiederum iterativ durchgeführt werden.

Eine Besonderheit ist die Durchbiegungsberechnung nach [SIA 262 – 04]. Es werden die Verformung im Zustand I und im reinen Zustand II berechnet; ein „wahrscheinlicher“ Wert ist nicht definiert. Da die tatsächliche Durchbiegung aber zwischen den beiden Werten aus Zustand I und II liegt, ist letztendlich eine statische Nutzhöhe erforderlich, die – in Abhängigkeit vom Rissbildungsgrad – zwischen den in der Tabelle dargestellten Grenzen liegt.

gewähltes Verfahren \ zulässige Durchbiegung	L / 250	L / 500		
	DIN 1045-1	17		24
EN 1992-1 vereinfacht nach Gl. (3.5) und $310/\sigma_s$	26	26		
EN 1992-1 Biegeschlankheit Gl. (3.3) und $310/\sigma_s$	21	21		
Krüger/Mertzsch Nachweis der Biegeschlankheit Gl. (3.18)	23	32		
Donaubauer (nur für L / 250)	30	n.a.		
ÖNORM B 4700 Nachweis der Biegeschlankheit	26	26		
SIA 262      Zustand I Zustand II	18	25	Berechnung	
	27	40		
	Krüger/Mertzsch vereinfachte Berechnung Gl. (3.20)	25		30
	Heft 240 erwarteter Mittelwert	21		30

**Tafel 3.8:** Erforderliche Nutzhöhe (in cm) bei einer aus den Tragfähigkeitsnachweisen ermittelten Bewehrungsmenge (Annahmen s. Text)

gewähltes Verfahren \ zulässige Durchbiegung	L / 250	L / 500	
	DIN 1045-1	17	
EN 1991-1 vereinfacht nach Gl. (3.5) und $310/\sigma_s$	20	20	
EN 1991-1 Biegeschlankheit Gl. (3.3) und $310/\sigma_s$	22	22	
Krüger/Mertzsch Nachweis der Biegeschlankheit Gl. (3.18)	23	32	
Donaubauer (nur für L / 250)	30	n.a.	
ÖNORM B 4700 Nachweis der Biegeschlankheit	20	20	
SIA 262      Zustand I Zustand II	18	25	Berechnung
	23	31	
Krüger/Mertzsch vereinfachte Berechnung Gl. (3.20)	24	28	
Heft 240 erwarteter Mittelwert	19	26	

**Tafel 3.9:** Erforderliche Nutzhöhe (in cm) bei konstantem Bewehrungsgrad von 0,5 Prozent (Annahmen s. Text)

Wie zu sehen ist, sind die Abweichungen teilweise erheblich. Ursache für diese Unterschiede sind insbesondere der dem jeweiligen Ansatz zugrunde liegende Vereinfachungsgrad bzw. die Anzahl der zu berücksichtigenden Parameter.

Es ist weiter zu erkennen, dass in den betrachteten Fällen DIN 1045-1 im unteren Bereich liegt, d. h. die geringsten Anforderungen an die erforderliche Deckenstärke stellt.

## 4 Materialverhalten

### 4.1 Beton

Beim Beton als heterogener Werkstoff wird das Verhalten durch die beiden Bestandteile, die Zementmatrix und den Zuschlag, und deren Interaktion untereinander bestimmt. Die maximal aufnehmbaren Lasten werden bei normalfesten Betonen größtenteils durch den Zementstein begrenzt, da dieser oft weicher als der Zuschlag und zusätzlich durch Poren und Mikrorisse vorgeschädigt ist. Der Zuschlag hingegen ist durch seine Steifigkeit für die Verformbarkeit bzw. den Elastizitätsmodul maßgebend.

Die Verformungen können sowohl lastabhängig als auch eine Folge von äußerem Zwang (Temperatur, Austrocknen, Durchfeuchten) und innerem Zwang (Hydratation, Sedimentation, Kristallisation) sein. Im Stahlbetonbau werden die auf Mikro- und Mesoebene unterschiedlichen Eigenschaften zu einem auf Makroebene homogenen Werkstoffgesetz „verschmiert“.

Ein weiteres wichtiges Merkmal des Betons ist sein zeitabhängiges Dehnungsverhalten. So verkürzt sich ein Beton lastunabhängig durch das Betonschwinden ( $\varepsilon_{cs}$ ). Unter kurzzeitiger Belastung erfährt er eine reversible, vom Elastizitätsmodul abhängige Dehnung ( $\varepsilon_{el}$ ). Diese vergrößert sich zeitabhängig um die Kriechdehnung ( $\varepsilon_{cc}$ ), wenn die Belastung eine längere Zeit aufrecht gehalten wird. Bei Entlastung zum Zeitpunkt  $t_e$  (s. Abb. 4.1) verringert sich auch die Dehnung, ohne jedoch den Ausgangswert vor Belastungsbeginn zu erreichen; d. h., dass ein Teil der Kriechdehnung plastisch und damit irreversibel ist. Es verbleibt eine um das Rückkriechen ( $\varepsilon_{cv}$ ) reduzierte Dehnung.

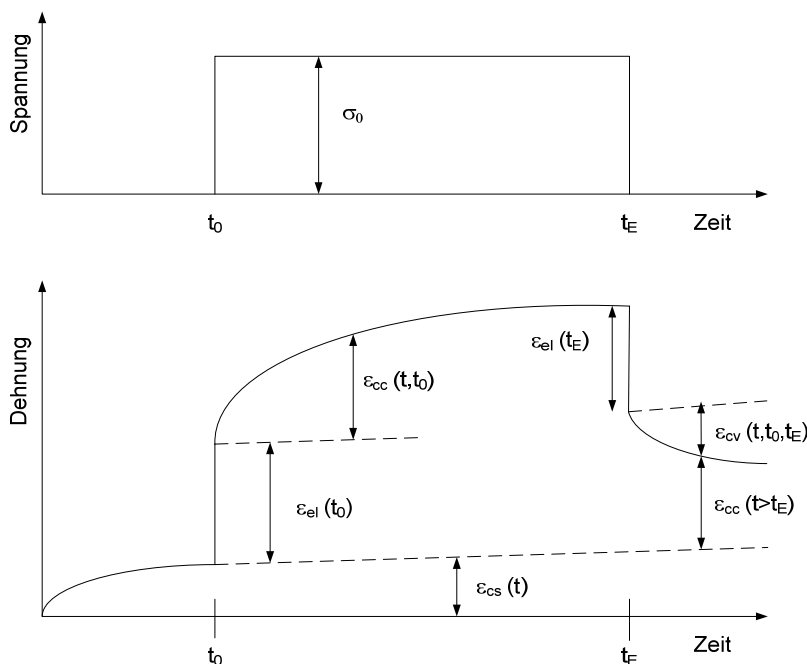


Abb. 4.1: Dehnungsanteile in Abhängigkeit von Last und Zeit

Zeitgleich verändert sich auch die Festigkeit des Betons, da die Hydratation je nach Wasser-Zementgehalt erst nach einigen Jahren abgeschlossen ist. Der Festigkeitszuwachs gegenüber der 28-Tage-Festigkeit kann bis zu 20 % betragen.

Zusammenfassungen über die Dehnungs- und Festigkeitseigenschaften findet man beispielsweise bei [Reinhardt – 05] oder [Schmidt – 08].

### 4.1.1 Kurzzeitverhalten

#### Druckfestigkeit

Die wichtigste Kenngröße eines Betons ist seine Druckfestigkeit. Aus ihr können die meisten anderen Eigenschaften abgeleitet werden. Die Druckfestigkeit wird in Versuchen ermittelt und ist von der Geometrie des Versuchskörpers abhängig. Die aktuellen Normen gehen von zylinder- oder würfelförmigen Versuchskörpern aus, für die Tragwerksbemessung ist die Zylinderdruckfestigkeit maßgebend. Soweit aus älterer Literatur nur die auf Würfel bezogene Festigkeit bekannt ist, muss entsprechend umgerechnet werden.

Zur Bemessung im Stahlbetonbau wird der 5 %-Fraktilwert der Druckfestigkeit benötigt. Er lässt sich aus dem Mittelwert  $f_{cm}$  und der Standardabweichung  $\sigma$  einer Versuchsreihe ermitteln:

$$f_{ck} = f_{cm} - 1,64 \cdot \sigma \quad (4.1a)$$

Unter der Voraussetzung, dass bei Normalbetonen die Standardabweichung unabhängig von der Festigkeitsklasse bei ca. 5 N/mm<sup>2</sup> liegt, kann man auch vereinfachend schreiben:

$$f_{ck} = f_{cm} - 8 \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad (4.1b)$$

Die Festigkeitsentwicklung ist zeitabhängig und wird nach 28 Tagen bestimmt. Festigkeiten zu anderen Zeitpunkten können nach [CEB/FIP – 91] wie folgt bestimmt werden:

$$f_{cm}(t) = \beta_{cc}(t) \cdot f_{cm}(28) \quad (4.2)$$

mit  $f_{cm}(28)$  mittlere Festigkeit nach 28 Tagen

$\beta_{cc}(t)$  Faktor zur Berücksichtigung der fortschreitenden Hydratation;

$$\beta_{cc}(t) = \exp \left[ s \left( 1 - \sqrt{\frac{28}{t_T}} \right) \right]$$

mit  $t_T$  wirksames Betonalter

$s$  Konstante je nach Zementart, siehe Tafel 4.1

Festigkeitsklasse des Zementes	32,5	32,5 R 42,5	42,5 R 52,5
$s$	0,38	0,25	0,20

**Tafel 4.1:** Beiwert  $s$  zur Berücksichtigung der Zementfestigkeitsklasse

Wird der Beton belastet, so steigt seine Dehnung zunächst annähernd linear an. Die Kräfte werden von dem festeren Zuschlag über die Zementmatrix weitergeleitet. Wenn der Beton ca. 40 Prozent seiner Druckfestigkeit erreicht hat, kommt es aufgrund von Querkraften zu ersten Rissen im Gefüge (vgl. Abb. 4.2). Die Steigung der Last-Dehnungskurve nimmt nun kontinuierlich ab, bis sie an der Stelle der größten Druckfestigkeit den Wert Null erreicht. Die Spannungsabnahme im Nachbruchbereich ist von der Betonfestigkeit abhängig. Normalfeste Betone weisen eine größere Duktilität als hochfeste Betone auf, deren Bruchverhalten sehr spröde ist.

Zur Ermittlung der Verformung eines Bauteiles im Gebrauchszustand sind aufgrund des niedrigen Lastniveaus jedoch nur Spannungen < 40 % der Druckfestigkeit  $f_c$  zu erwarten, so dass es im Allgemeinen ausreichend ist, ein linear-elastisches Materialverhalten zu unterstellen. Erreicht man – beispielsweise durch eine Vorspannung – größere Spannungen, so kann der parabelförmige Spannungs-Dehnungsverlauf wie folgt approximiert werden (DIN 1045-1. Gl. (62)):



$$\sigma_c = \frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta} \cdot f_c \quad (4.3)$$

Dabei ist  $\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$  das Verhältnis der aktuellen Dehnung zur Bruchdehnung,  $k = -1,1 \cdot E_{c0} \cdot \varepsilon_{c1} / f_c$  ein Beiwert, der das Verhältnis der Elastizitätsmodule berücksichtigt, und  $f_c$  die maximal aufnehmbare Druckspannung.

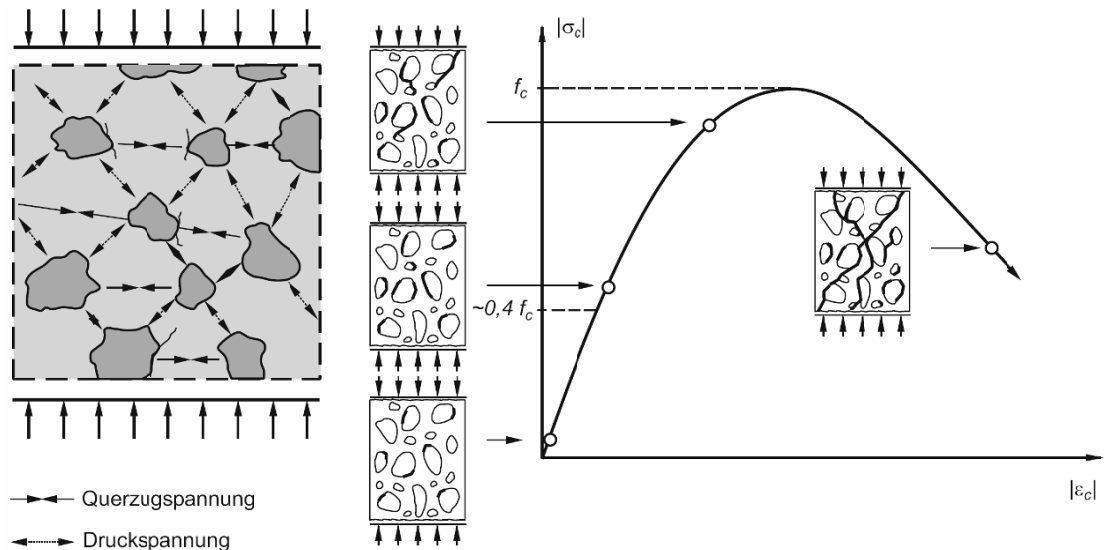


Abb. 4.2: Last-Dehnungsbeziehung [Zilch/Zehetmaier – 06]

### Elastizitätsmodul

Das Spannungs-Dehnungsverhalten lässt sich über den Elastizitätsmodul ausdrücken. Wie im vorangegangenen Abschnitt schon erwähnt, kann bei Spannungen unter 40 Prozent der Druckfestigkeit von einem linear-elastischen Tragverhalten und somit einem konstanten E-Modul ausgegangen werden. Üblicherweise wird der Sekantenmodul gewählt, der die Spannungs-Dehnungskurve im Ursprung und bei  $\sigma_c = 0,4 \cdot f_c$  schneidet (s. auch Abb. 4.3). Er kann gemäß [DIN 1045-1 – 08] aus dem Tangentenmodul  $E_{c0m}$  im Ursprung der Spannungs-Dehnungslinie berechnet werden.

$$E_{cm} = \alpha_j \cdot E_{c0m} \quad \text{mit} \quad \alpha_j = 0,8 + 0,2 \cdot (f_{ck} + 8) / 88 \leq 1 \quad (4.4)$$

Die Ermittlung des Tangentenmoduls, welcher beispielsweise der Bestimmung der Kriechzahl nach [DIN 1045-1 – 08] zugrunde liegt, erfolgt direkt aus der Druckfestigkeit:

$$E_{c0m} = 9500 \cdot (f_{ck} + 8)^{1/3} \quad (4.5)$$

Der Elastizitätsmodul ist stark vom verwendeten Zuschlag abhängig. Die Gl. (4.5) ist für quarzitisches Zuschlag anwendbar, andere können gemäß [DAfStb-H525 – 03] über Multiplikation mit dem Faktor  $\alpha_E$  berücksichtigt werden.

Art der Gesteinskörnung	$\alpha_E$
Basalt, dichter Kalkstein	1,05 – 1,45 (1,20)
Quarz, Quarzite	0,80 – 1,20 (1,00)
Kalkstein	0,70 – 1,10 (0,90)
Sandstein	0,55 – 0,85 (0,70)

Tafel 4.2: Faktor  $\alpha_E$  in Abhängigkeit von der Gesteinskörnung nach [DAfStb -03], Werte in Klammern sind Mittelwerte

Der Elastizitätsmodul bezieht sich i. d. R. auf die Festigkeit nach 28 Tagen. Wird ein zeitabhängiger Wert benötigt, so kann der Faktor  $\beta_{cc}(t)$  aus Gl. (4.2) verwendet werden.

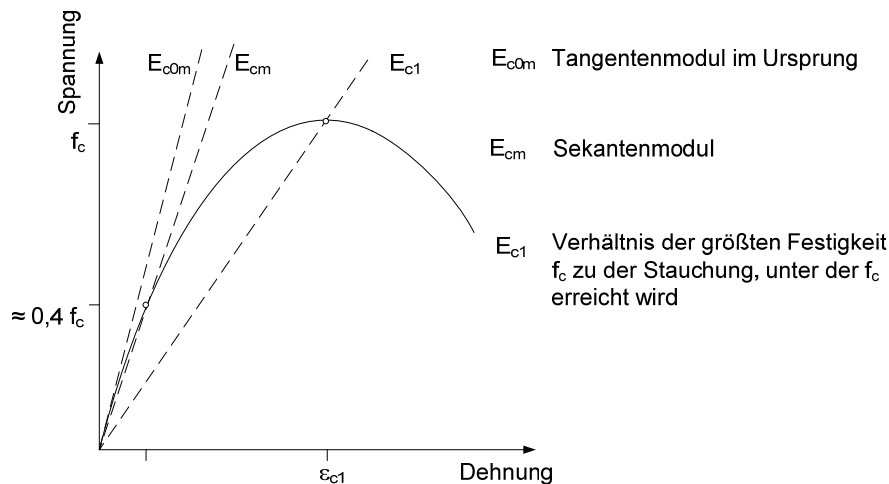


Abb. 4.3: Definition der unterschiedlichen Elastizitätsmodule

### Zugfestigkeit

Die Zugfestigkeit des Betons hat einen erheblichen Einfluss auf das Verformungsverhalten eines Tragwerks. Sie gibt an, bei welcher Belastung das Bauteil vom Zustand I in den Zustand II (gerissener Beton) übergeht. Außerdem beeinflusst sie – zusammen mit der Bewehrung – das Rissbild (Rissabstand, Rissbreite).

In einer groben Näherung kann man davon ausgehen, dass die Zugfestigkeit eines Betons in etwa zehn Prozent seiner Druckfestigkeit erreicht. Allerdings ist sie sehr großen Streuungen unterworfen ([JCSS – 01] gibt einen Variationskoeffizienten von 30 Prozent an, gegenüber nur 6 Prozent bei der Druckfestigkeit). Sie ist in großem Maße vom Verbund zwischen Zementmatrix und Zuschlag abhängig. In diesem Gefüge entstehen meist schon im jungen Betonalter Mikrorisse aus Frühschwinden oder dem Abfließen der Hydratationswärme. Ab einer Belastung von ca. 70 Prozent der Zugfestigkeit erweitern sich die Mikrorisse zu Makrorissen; bis zu dieser Laststufe ist das Verformungsverhalten annähernd linear-elastisch. Nach Überschreiten der maximalen Zugfestigkeit bestimmt die Kornverzahnung das Nachbruchverhalten.

Die Zugfestigkeit wird in den meisten Fällen aus der 28-Tage Druckfestigkeit  $f_{ck}$  bestimmt. Sie steigt im Laufe der Zeit noch auf den 1,1-fachen bzw. den 1,25-fachen Wert an (nach 100 Tagen bzw.  $t \rightarrow \infty$ ). Andererseits nimmt die Zugfestigkeit bei Dauerbelastung ab und erreicht bei zentrischem Zug ca. 60 %, bei Biegung ca. 83 % des Kurzzeitwertes. In einer groben Näherung kann man sagen, dass sich diese beiden Effekte in etwa ausgleichen.

Sowohl [DIN 1045-1 – 08] als auch [EN 1992-1-1 – 04] geben die mittlere Zugfestigkeit an mit:

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (4.6)$$

Diese Gleichung basiert auf den Angaben nach Model Code 90 ([CEB/FIP – 91]). Hier wird die mittlere Zugfestigkeit wie folgt berechnet:

$$f_{ctm} = 1,4 \cdot (f_{ck} / 10)^{2/3} \quad (4.7)$$

Die 5 %- bzw. 95 %-Fraktilewerte erhält man durch die Multiplikation mit dem Faktor 0,7 bzw. 1,3. Zusätzlich gibt es einige Modifikationen, die beispielsweise den zeitlichen Verlauf der Zugfestigkeit beschreiben (Faktor  $[\beta_{cc}]^\alpha$  in [EN 1992-1-1 – 04] bzw. Faktor  $k_{z,t}$  bei [DAfStb-H400 – 89]) oder zusätzliche Einflüsse wie Vorschädigung oder Lastausmitteln (s. [Noakowski – 88]) berücksichtigen.

Bei Lastausmitten bzw. Biegebeanspruchungen wird die Biegezugfestigkeit maßgebend. Da die meisten Stahlbetonbauteile auf Biegung beansprucht werden, ist das Verhalten der Zugzone unter diesen Bedingungen von großer Wichtigkeit für die Berechnung von Verformungen. Es gibt verschiedene Ansätze zur Bestimmung der Biegezugfestigkeit. In den hier vorgestellten Fällen wird das Plastizieren der Rissprozesszone durch eine Vergrößerung der Zugfestigkeit berücksichtigt, eine Alternative dazu besteht in bruchmechanischen Ansätzen bei einer nichtlinearen FEM-Berechnung.

Den meisten Ansätzen ist gemeinsam, dass sie die Bauteilhöhe als wichtigsten Einfluss auf die Biegezugfestigkeit nennen. Bei kleinen Bauteilhöhen sind die größten Unterschiede zwischen Zug- und Biegezugfestigkeit zu erwarten. Es gilt nach [CEB/FIP – 91] die Beziehung

$$f_{ct,fl} = f_{ctm} \cdot \frac{1 + 1,5 \cdot (h/100)^{0,7}}{1,5 \cdot (h/100)^{0,7}} \quad (h \text{ in mm}) \quad (4.8)$$

In der [EN 1992-1-1] findet man die Gleichung

$$f_{ctm,fl} = \max\{(1,6 - h/1000) \cdot f_{ctm}; f_{ctm}\} \quad (4.9)$$

Weitere Ansätze befinden sich beispielsweise bei [Noakowski – 88], [Leonhardt – 78] oder [Mal'cov – 68]; eine Zusammenstellung kann Tafel 4.3 entnommen werden (vgl. [Krüger/Mertzsch – 06].)

Quelle	Zugfestigkeit	Biegezugfestigkeit
[Mal'cov – 68]	$\beta_z = 0,275 \cdot \sqrt[3]{\beta_w^2}$	$\beta_{bz} = (1 + a/h_z) \cdot \beta_z$
[Leonhardt – 78]	$\beta_z = 0,23 \cdot \sqrt[3]{\beta_w^2}$	$\beta_{bz} = 0,46 \cdot \sqrt[3]{\beta_w^2}$
[Noakowski – 88]	$\beta_z = C_v \cdot C_\eta \cdot C_\beta \cdot \sqrt[3]{\beta_w^2}$	$\beta_z = C_v \cdot C_\eta \cdot C_\beta \cdot \sqrt[3]{\beta_w^2}$
[Kreller – 90]	$\beta_z = 0,24 \cdot \sqrt[3]{\beta_w^2}$	$\beta_{bz} = 0,48 \cdot \sqrt[3]{\beta_w^2}$
[CEB/FIP – 91]	$f_{ctm} = 1,4 \cdot (f_{ck}/10)^{2/3}$	$f_{ct,fl} = f_{ctm} \cdot \frac{1 + 1,5 \cdot (h/100)^{0,7}}{1,5 \cdot (h/100)^{0,7}}$
[EN 1992-1-1 – 04]	$f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}$	$f_{ctm,fl} = \max\{(1,6 - h/1000) \cdot f_{ctm}; f_{ctm}\}$
[DIN 1045-1 – 08]	$f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}$	–
<p>Anmerkung: a Materialkennwert (0,05 m bis 0,07 m)  <math>C_v</math> Faktor zur Berücksichtigung einer Vorschädigung,  <math>C_v = 0,85 - 0,2 \cdot h</math>, <math>h</math> in [m]  <math>C_\eta</math> Faktor zur Berücksichtigung einer ausmittigen Belastung  <math>C_\eta = (0,6 + 6 \cdot C_h \cdot \eta)/(1,0 + 6 \cdot \eta)</math>  mit <math>C_h = (2,6 + 24 \cdot h)/(1,0 + 40 \cdot h)</math>; <math>\eta = M/(N \cdot h)</math>  <math>C_\beta = 0,46</math></p>		

**Tafel 4.3:** Zusammenfassung ausgewählter Ansätze zur Bestimmung von Zug- und Biegezugfestigkeit

Das Ergebnis der unterschiedlichen Ansätze ist in den Abb. 4.4 bis 4.6 dargestellt. Der dabei benötigte Zusammenhang zwischen Zugfestigkeit  $\beta_{bz}$ , Mittelwert der Würfelfestigkeit  $\beta_w$ , 5%-Quantilwert der Würfelfestigkeit  $\beta_{WN}$  und Zylinderfestigkeit  $f_{ck}$  kann wie folgt angegeben werden:

$$\beta_{bz} = 0,275 \cdot \sqrt[3]{\beta_w^2} \approx 0,3 \cdot \sqrt[3]{\beta_{WN}^2} \approx 0,35 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2}$$

Es ist klar zu erkennen, dass sich die verschiedenen Ansätze signifikant auf das Rissmoment auswirken können und teilweise zu deutlichen Abweichungen führen; das gilt insbesondere bei Ansatz der Biegezugfestigkeit. Die Abweichungen der Zugfestigkeit, die in den

verschiedenen Rechenansätzen wieder zu finden sind, werden im Kapitel 7 mit ihren Auswirkungen auf die Durchbiegungsberechnung weiter erläutert.

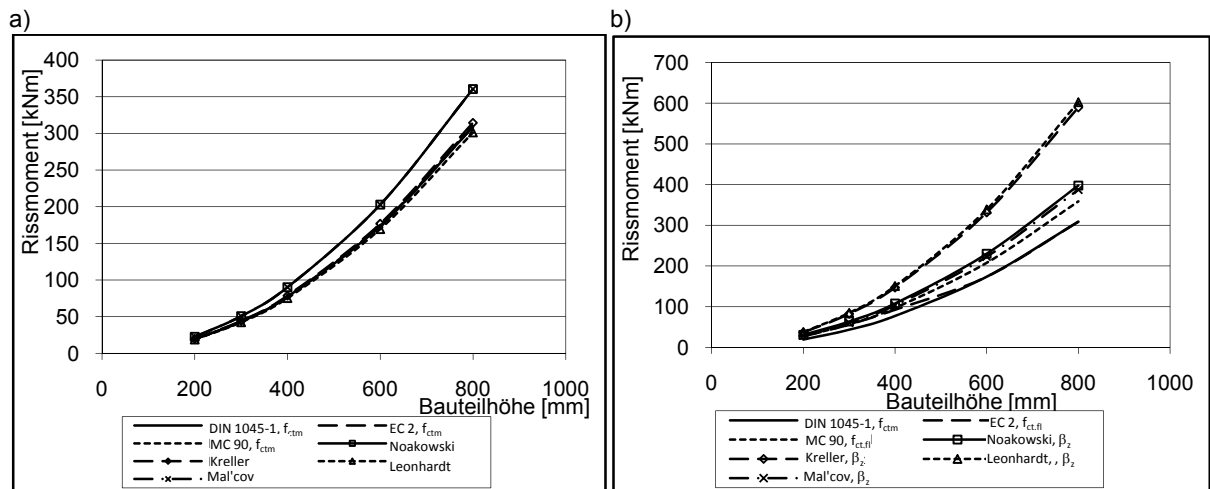


Abb. 4.4: Vergleich des Rissmomentes eines 1 Meter breiten Plattenstreifens bei konstantem Beton C30/37 und variabler Bauteilhöhe unter Ansatz der Zugfestigkeit (a) und Biegezugfestigkeit (b)

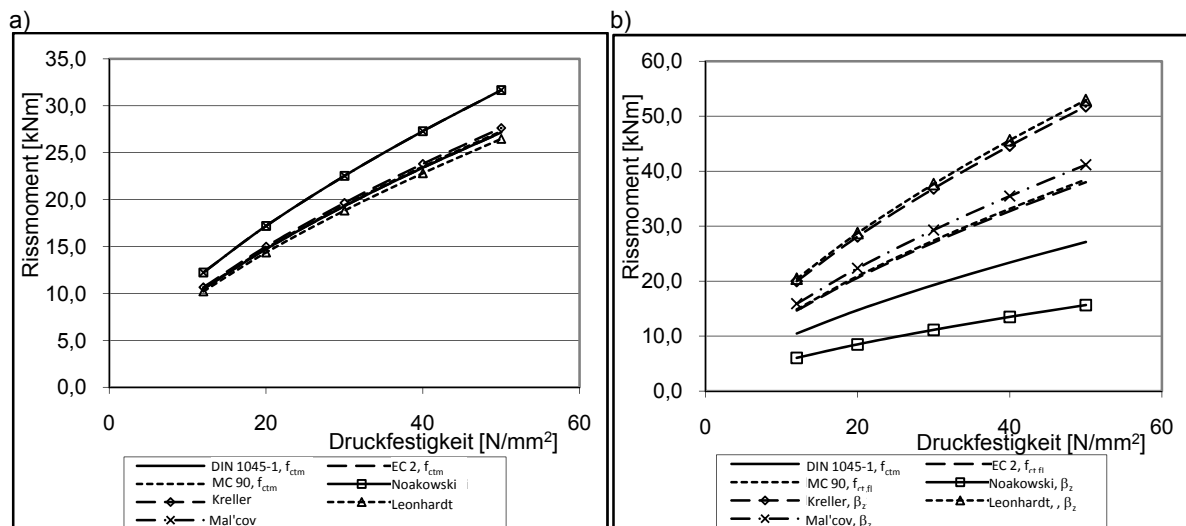


Abb. 4.5: Vergleich des Rissmomentes bei konstanter Bauteilhöhe (Platte, b/h = 100/20 cm) und variabler Betonfestigkeit unter Ansatz der Zugfestigkeit (a) und Biegezugfestigkeit (b)

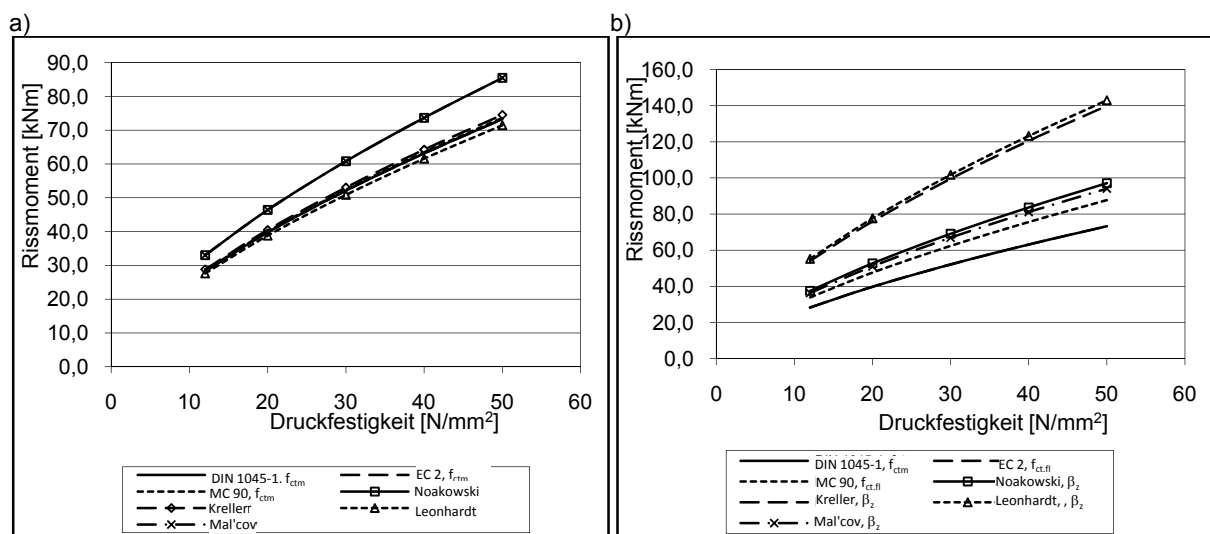


Abb. 4.6: Vergleich des Rissmomentes bei konstanter Bauteilhöhe (Balken, b/h = 30/60 cm) und variabler Betonfestigkeit unter Ansatz der Zugfestigkeit (a) und Biegezugfestigkeit (b)

### 4.1.2 Langzeitverhalten

#### Kriechen

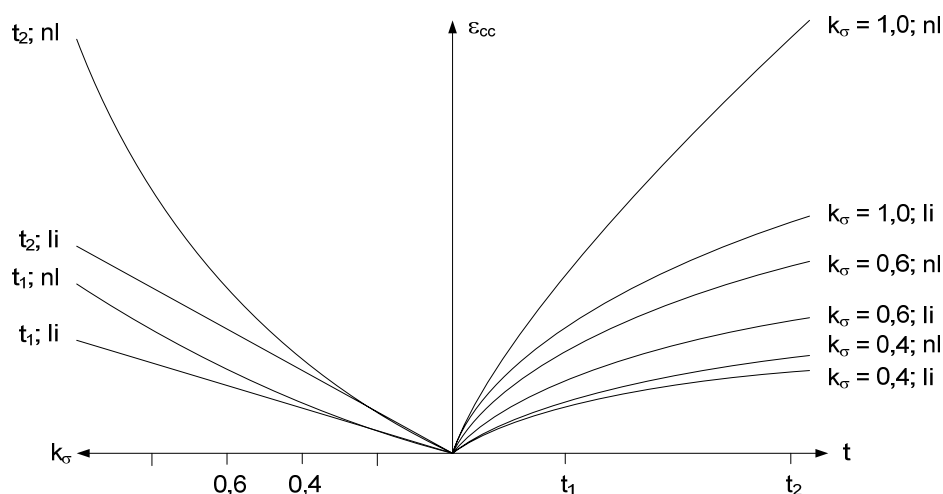
Als Kriechen wird eine zeitabhängige Vergrößerung der elastischen Dehnungen des Betons unter Dauerlast (konstanter Spannungszustand) bezeichnet; die Kriechdehnungen sind nach Entlastung überwiegend irreversibel, teilweise jedoch auch reversibel („verzögert elastisch“).

Das Betonkriechen ist ein komplexer Vorgang, der auch heute noch nicht vollständig erforscht ist. Relativ sicher ist die Erkenntnis, dass es hauptsächlich in der Zementmatrix zu Verschiebungen kommt, welche auch nach einer Entlastung bestehen bleiben (irreversibler Anteil). Sie resultieren aus der Verdichtung der Gelpartikel und auch aus der Umlagerung von Wasser im Zementstein. Der Zuschlag ist am Kriechvorgang weitestgehend unbeteiligt. Kriechen kann man unterteilen in das Grundkriechen, das ohne Feuchteausaustausch mit der Umgebung stattfindet, und das Trockenkriechen bei gleichzeitiger Belastung und Austrocknung. Hierbei ist auch immer das Schwinden zu berücksichtigen, die beiden Vorgänge werden jedoch getrennt voneinander betrachtet (s. nachfolgend).

Den größten Einfluss auf das Kriechen haben auf Seiten der Betontechnologie der Wasser-Zementwert, die Zementart und die Betonzusammensetzung. Als maßgebende äußere Bedingung kann die Größe der Spannungen und ihre Einwirkungsdauer, das Belastungsalter, die Abmessungen des Bauteils und die Umgebungsbedingung (insb. die Luftfeuchtigkeit) angesehen werden.

Die Beziehung zwischen Belastung und Kriechen ist bei einem niedrigen Lastniveau weitestgehend linear. Bis zu einem Grenzwert von ca.  $0,4 \cdot f_{cm}$  kann das nichtlineare Kriechen vernachlässigt werden. In [DIN 1045-1 – 08] ist dieser Wert mit  $0,45 \cdot f_{ck}$  in den Nachweis der Gebrauchstauglichkeit eingegangen (Spannungsnachweis). Ab einem Belastungsniveau von über 85 % der Druckfestigkeit steigt der Kriecheinfluss so stark an, dass es zum Kriech- oder Dauerstandsversagen kommen kann. In Bauteilen, die nach [DIN 1045-1 – 08] bemessen wurden, kann man diese Versagensart wegen der Reduktion der Druckfestigkeit auf  $f_{cd} = 0,85 \cdot f_{ck} / \gamma_c$  im Grenzzustand der Tragfähigkeit ausschließen. Bei Durchbiegungsberechnungen tritt wegen der genannten Spannungsbegrenzung unter Gebrauchslast auf  $0,45 \cdot f_{ck}$  im Allgemeinen nur lineares Kriechen auf.

In Abb. 4.7 ist die Entwicklung der linearen und nichtlinearen Kriechverformung exemplarisch für drei Laststufen  $k_\sigma$  – mit  $k_\sigma$  als Verhältnis der aktuellen Spannung zur Betonfestigkeit – dargestellt. Die Zeit  $t$  drückt die Belastungsdauer aus (vgl. [Mertzsch – 03], [Bockhold – 05]).



**Abb. 4.7:** Schematische Darstellung der Kriechverformung unter linearem (li) und nichtlinearem (nl) Kriechansatz bei verschiedenen Spannungsniveaus und Belastungsdauern

Wie Untersuchungen gezeigt haben (z. B. [Kordina – 00]) verläuft das Kriechen unter Zugbeanspruchung bis 60 Prozent von  $f_{ctm}$  etwa linear; die Kriechzahl kann aus der Druckbeanspruchung übernommen werden.

Die Kriechverformungen können mit einem Summationsansatz ermittelt werden, bei dem die Anteile aus dem plastischen (irreversiblen) und dem verzögert elastischem (bedingt reversiblen) Kriechen addiert werden. Bei relativ geringen Spannungsschwankungen kann auch ein Produktansatz verwendet werden, bei dem das Kriechen als das  $\varphi$ -fache der elastischen Verformung beschrieben wird. Er kann bei Stahlbetonbauteilen mit einem hohen Eigenlastanteil angewendet werden und lässt sich wie folgt beschreiben:

$$\varepsilon(t, t_0) = \varepsilon_{el}(t) + \varepsilon_{cc}(t, t_0) = \varepsilon_{el}(t_0) \cdot (1 + \varphi(t, t_0)) \quad (4.10)$$

mit  $\varepsilon_{el}$  elastische Dehnung  
 $\varepsilon_{cc}$  Kriechdehnung  
 $\varphi$  Kriechzahl

Die Kriechzahl kann beispielsweise nach [DIN 1045-1 – 08] oder [DAfStb-H525 – 03] ermittelt werden. Sie besteht aus der Grundkriechzahl  $\varphi_0$  und dem Beiwert für die zeitliche Entwicklung  $\beta_c(t-t_0)$  und wird über das Produkt

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t, t_0) \quad (4.11)$$

berechnet. Die Grundkriechzahl wird durch die Umgebungsfeuchtigkeit, die Betonfestigkeit und Zementsorte, die Bauteildicke und den Zeitpunkt der Erstbelastung beeinflusst:

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \quad (4.12)$$

$$\text{mit } \varphi_{RH} = \left( 1 + \frac{1 - RH / 100}{\sqrt[3]{0,1 \cdot h_0 / h_1}} \cdot \alpha_1 \right) \cdot \alpha_2 \quad (4.13)$$

$$\beta(f_{cm}) = 16,8 / \sqrt{f_{cm}} \quad (4.14)$$

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0,1 + (t_{0,eff} / t_1)^{0,2}} \quad (4.15)$$

Der Beiwert  $\beta_c(t, t_0)$  für die zeitliche Entwicklung der Kriechzahl ist von der wirksamen Bauteildicke, Luftfeuchtigkeit und vor allem der Differenz zwischen Betrachtungszeitpunkt und Erstbelastung abhängig. Er geht bei großer Zeitdauer gegen eins.

$$\beta_c(t, t_0) = \left( \frac{(t - t_0) / t_1}{\beta_H + (t - t_0) / t_1} \right)^{0,3} \quad (4.16)$$

$$\text{mit } \beta_H = 150 \cdot \left[ 1 + \left( 1,2 \cdot \frac{RH}{100} \right)^{18} \right] \cdot \frac{h_0}{h_1} + 250 \cdot \alpha_3 \leq 1500 \cdot \alpha_3 \quad (4.17)$$

Dabei sind

- $t$  Betonalter zum betrachteten Zeitpunkt [Tage]
- $t_0$  tatsächliches Betonalter bei Belastungsbeginn [Tage]
- $t_1$  Bezugsgröße,  $t_1 = 1$  [Tag]
- $t_{0,eff}$  wirksames Betonalter bei Belastungsbeginn [Tage]

$$t_{0,eff} = t_0 \cdot \left( \frac{9}{2 + (t_0 / t_1)^{1,2}} + 1 \right)^\alpha \geq 0,5 \text{ Tage}$$

$RH$  relative Luftfeuchte der Umgebung [%]

$h_0 = 2 A_c / u$  wirksame Bauteildicke [mm]

mit  $A_c$  Querschnittsfläche [mm<sup>2</sup>]

$u$  Umfang des Querschnittes [mm], der der Trocknung ausgesetzt ist

- $h_1$  Bezugsgröße,  $h_1 = 100$  [mm]  
 $f_{cm}$  mittlere Zylinderdruckfestigkeit des Betons [N/mm<sup>2</sup>]  
 $\alpha_i$  Beiwerte zur Berücksichtigung des Einflusses der Betondruckfestigkeit;  
 $\alpha_1 = (35/f_{cm})^{0,7}$ ;  $\alpha_2 = (35/f_{cm})^{0,2}$ ;  $\alpha_3 = (35/f_{cm})^{0,5}$ ;  $f_{cm}$  in N/mm<sup>2</sup>

Die Kriechzahl bezieht sich auf den Tangentenmodul  $E_{c0m}$ . Für die Verformungsberechnung wird jedoch der Sekantenmodul benötigt, die Kriechzahl muss also angepasst werden:

$$\varphi(t_0, t) = \frac{\varepsilon_{c,cr}(t_0, t)}{\varepsilon_{c,el}(t)} \cdot \frac{E_c(t)}{E_c(t_0)} \quad (4.18)$$

Dabei ist  $E_c(t) = E_{cm}$  und  $E_c(t_0) = E_{c0m}$ . Die Gesamtverformung zum Zeitpunkt  $t$  beträgt:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{c,el}(t_0) + \varepsilon_{c,cr}(t_0, t) = \varepsilon_{c,el}(t_0) \cdot \left( 1 + \varphi(t) \cdot \frac{E_{cm}}{E_{c0m}} \right) \quad (4.19)$$

Der Korrekturfaktor  $E_{cm} / E_{c0m}$  ist von der Betonfestigkeit abhängig. Die Beziehung zwischen Sekanten- und Tangentenmodul ist in Gleichung (4.4) dargestellt. Für übliche Betone erhält man Werte zwischen 0,85 (C16/20) und 0,93 (C50/60). Vereinfachend wird der Faktor in der Literatur daher oft zu 0,9 gesetzt (s. [Fischer – 03]).

In Gleichung (4.10) wird von einer konstanten Spannung ausgegangen. Für einen beliebigen Spannungsverlauf lässt sich die Gleichung erweitern auf:

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_0}{E_c} \cdot (1 + \varphi_t) + \frac{\sigma_t - \sigma_0}{E_c} + \frac{1}{E_c} \cdot \int_{\tau=\tau_0}^t \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} \varphi(t, \tau) \cdot d\tau \quad (4.20)$$

Die Integration über den genauen Spannungsverlauf erfordert einen hohen Rechenaufwand. Durch Einführung eines Völligkeitsbeiwertes  $\rho$  (auch Alterungsbeiwert oder Relaxationskoeffizient genannt) lässt sich die Gleichung jedoch überführen in

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_0}{E_c} \cdot (1 + \varphi_t) + \frac{\sigma_t - \sigma_0}{E_c} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_t) \quad (4.21)$$

Diese Methode folgt dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (vgl. [König/Gerhardt – 86]). In kleinen Zeitintervallen kann man näherungsweise eine lineare Spannungsveränderung unterstellen und  $\rho = 0,5$  setzen. Über längere Zeitabschnitte nimmt  $\rho$  wegen des überproportionalen Kriechverlaufes Werte zwischen 0,5 und 1,0 an. Auf baupraktisch sinnvolle Anwendungen bezogen verkleinert sich der Bereich nach [Blessenohl – 90] auf 0,7 bis 0,95. Der Relaxationswert nimmt zu, wenn die Bauteildicke größer wird und wenn die Erstbelastung deutlich nach dem Aushärten des Betons erfolgt (ab 60 Tage). Er verkleinert sich hingegen bei großen Kriechzahlen.

Bei stetig veränderlichen Spannungen kann der Alterungsbeiwert mit dem Mittelwert  $\rho = 0,8$  genügend genau abgeschätzt werden (s. z. B. [Troost – 87], [Lücken – 85]). Die Annahme eines Mittelwertes ist auch durch die Tatsache gerechtfertigt, dass selbst bei genauer Kenntnis der einzelnen Parameter die Kriechzahl einem Variationskoeffizienten von ca. 20 % unterliegt.

Bei allmählichem Zwang kann man denselben Wert wie unter Lastbeanspruchung verwenden, wenn der Verlauf affin zum Kriechverlauf ist. Läuft der Zwang deutlich schneller ab, so ist auch mit Werten größer als 1,0 zu rechnen.

Genauere Berechnungsmöglichkeiten findet man beispielsweise in [CEB-H215 – 93] oder bei [Krüger/Mertzsch – 06].

### **Schwinden**

Unter dem Oberbegriff „Schwinden“ werden die lastunabhängigen, physikalisch und chemisch hervorgerufenen Verkürzungen des Betons zusammengefasst. Es können folgende Teilaspekte unterschieden werden:

- Frühschwinden (auch: Kapillarschwinden, plastisches Schwinden)  
Das Frühschwinden tritt ausschließlich bei Frischbeton in der plastischen Phase (also in den ersten 2 bis 8 Stunden) auf und ist von dem Wasser-Zementgehalt abhängig. Im Beton befindet sich stets ein über den Bedarf zum Abbinden des Zements hinausgehender Wasseranteil (zur besseren Verarbeitungsmöglichkeit). Durch Verdunstung u. ä. kommt es zu einem Volumenverlust des Betons. Ohne eine vernünftige Nachbehandlung oder Zugabe von Quellmitteln kann dieser Verlust bis zu 4 ‰ betragen [Grube – 03].
- Hydratation bzw. autogenes Schwinden  
Bei der Hydratation wird der verfügbare Wasseranteil durch das Abbinden des Zements verringert. Da das gebundene Wasser ein geringeres Volumen einnimmt als das „freie“ Wasser, kommt es zum Schwinden ohne Feuchteausgleich mit der Umgebung. Diese Form des Schwindens tritt demzufolge auch nur verstärkt in der Anfangsphase der Nutzungsdauer eines Bauteils auf und verliert mit zunehmendem Alter an Bedeutung.
- Trocknungsschwinden  
Der bei der Verformungsberechnung maßgebende Teil des Schwindens ist das sog. Trocknungsschwinden. Es beginnt mit Ende der Nachbehandlungsphase und wirkt während der kompletten Nutzungsdauer des Bauteils. Es wird durch das Austrocknen des überschüssigen Anmachwassers aus den Kapillarporen verursacht.
- Carbonatisierung  
Das in das Betongefüge eindringende  $\text{CO}_2$  verursacht einen als Carbonatisierung bezeichneten Effekt, welcher die Betonfestigkeit erhöht und durch eine Verdichtung des Gefüges bei gleichzeitiger Freisetzung von Wasser zu einer leichten Volumenreduzierung führt. Dieser Effekt tritt aber ausschließlich in der Randzone eines Bauteils auf und hat somit keinen nennenswerten Einfluss auf die Gesamtdehnung.

Das Schwinden kann nicht verhindert werden. Allerdings kann man sowohl durch die Biontechnologie (Zusammensetzung des Betons, Zuschlag, Wasser-Zement-Gehalt) als auch durch die Bauausführung (Nachbehandlung) die Dehnung und auch die Rissbildung reduzieren. So kann man durch geeignete Maßnahmen nach dem Betonieren das Frühschwinden fast vollständig kompensieren. Außerdem beeinflusst die Schwindfähigkeit des Zuschlags das Schwinden des Betons. Während Betonbrechsand bzw. Betonsplitt das Schwindmaß gegenüber einem Beton mit Normalgesteinskörnung verdoppeln können, kann ein sehr steifes Gestein wie bspw. Basaltsplitt die Dehnungen deutlich reduzieren (vgl. [Kerckhoff/Siebel – 01] bzw. [Eickschen/Siebel – 98]).

Weitere Faktoren, die das Schwinden beeinflussen und bei der Berechnung des Schwindmaßes  $\epsilon_{cs}$  berücksichtigt werden müssen, sind:

- die Umgebungsfeuchte: Innenbauteile weisen wegen der geringeren Luftfeuchtigkeit größere Schwindverformungen auf. In der Anfangsphase muss eine übermäßige Austrocknung durch eine geeignete Nachbehandlung vermieden werden.
- die Bauteilgeometrie: „Dicke“ Bauteile trocknen langsamer aus.
- Wasser-Zementwert des Frischbetons: Überschüssiges Wasser verdunstet während der Nutzungsdauer.
- Zuschlag: Ein großer Zuschlaganteil verringert die Schwindverformungen, da er weit weniger vom Austrocknen betroffen ist als der Zementstein.



Bei der Berechnung des Schwindmaßes muss mit einem Variationskoeffizienten von bis zu 30 % gerechnet werden. Wahrscheinliche Schwindmaße können beispielsweise [Goris – 08a] entnommen werden. Die hier angegebenen Werte beziehen sich auf einen Zeitraum von  $t = 70$  Jahre.

Betonfestigkeitsklasse	Wirksame Bauteildicke $h_0 = 2A_c / u$ (in cm)							
	10	50	100	200	10	50	100	200
	innen (RH = 50%)				außen (RH = 80%)			
C20/25	-0,68	-0,59	-0,46	-0,29	-0,39	-0,35	-0,27	-0,18
C30/37	-0,63	-0,56	-0,43	-0,29	-0,38	-0,34	-0,27	-0,19
C40/50	-0,59	-0,53	-0,42	-0,29	-0,37	-0,33	-0,27	-0,20

**Tafel 4.4:** Wahrscheinliche Schwindmaße in ‰ nach  $t = 70$  Jahren

In dem in [DIN 1045-1 – 08] eingegangenen Ansatz werden zur Berechnung des Schwindmaßes zwei Einflüsse aufaddiert:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \varepsilon_{cas}(t) + \varepsilon_{cds}(t, t_s) \quad (4.22)$$

Dabei ist  $\varepsilon_{cas}$  die Summe des chemischen und autogenen Schwindens (in [DIN 1045-1 – 08] als Schrumpfen bezeichnet); er wird bestimmt aus dem Produkt des Grundwertes (und gleichzeitig Endwertes) des Schrumpfens  $\varepsilon_{cas0}$  und der Zeitfunktion  $\beta_{as}(t)$ .

$$\varepsilon_{cas}(t) = \varepsilon_{cas0}(f_{cm}) \cdot \beta_{as}(t) \quad (4.23)$$

$$\text{mit} \quad \varepsilon_{cas0}(f_{cm}) = -\alpha_{as} \cdot \left( \frac{f_{cm} / f_{cm0}}{6 + f_{cm} / f_{cm0}} \right)^{2,5} \cdot 10^{-6}$$

$$\beta_{as}(t) = 1 - \exp(-0,2 \cdot (t / t_1)^{0,5})$$

Dabei sind  $f_{cm}$  mittlere Zylinderdruckfestigkeit des Betons im Alter von 28 Tagen  
 $f_{cm0}$  Bezugsgröße der Betonfestigkeit,  $f_{cm0} = 10 \text{ N/mm}^2$   
 $t_1$  Bezugsgröße der Zeit,  $t_1 = 1 \text{ Tag}$   
 $\alpha_{as}$  Beiwert nach Tafel 4.5

Der wesentliche Anteil am Gesamtschwinden resultiert für  $t = \infty$  aus dem Trocknungsschwinden (physikalisches Schwinden), das in dem Wert  $\varepsilon_{cds}$  zusammengefasst wird. Er setzt sich zusammen aus dem Grundwert des Trocknungsschwindens  $\varepsilon_{cds0}$ , einem Faktor für die Umgebungsfeuchte  $\beta_{RH}$  und einem Faktor  $\beta_{ds}(t-t_s)$ , der die zeitliche Entwicklung berücksichtigt. Dementsprechend erhält man den Endwert des Trocknungsschwindens, wenn  $\beta_{ds}(t-t_s)$  gegen eins geht.

$$\varepsilon_{cds}(t, t_s) = \varepsilon_{cds0}(f_{cm}) \cdot \beta_{RH} \cdot \beta_{ds}(t - t_s) \quad (4.24)$$

mit

$$\varepsilon_{cds0}(f_{cm}) = [(220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot \exp(-\alpha_{ds2} \cdot f_{cm} / f_{cm0})] \cdot 10^{-6} \quad (4.25)$$

$$\beta_{ds}(t - t_s) = \left( \frac{(t - t_s) / t_1}{350 \cdot (h_0 / h_1)^2 + (t - t_s) / t_1} \right)^{0,5} \quad (4.26)$$

$$\beta_{RH} = \begin{cases} -1,55 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{RH}{RH_0} \right)^3 \right] & \text{für } 40 \leq RH < 99\% \cdot \beta_{s1} \\ 0,25 & \text{für } RH \geq 99\% \cdot \beta_{s1} \end{cases} \quad (4.27)$$

Dabei sind

$$\beta_{s1} = (0,5 \cdot f_{cm0} / f_{cm})^{0,1} \leq 1,0$$

$\alpha_{ds1}$  Beiwert zur Berücksichtigung der Zementart, siehe Tafel 4.5

$\alpha_{ds2}$  Beiwert zur Berücksichtigung der Zementart, siehe Tafel 4.5

$RH$  Relative Luftfeuchtigkeit der Umgebung in %

$RH_0$  Referenzwert;  $RH_0 = 100$  %

$h_0$  Wirksame Bauteildicke in mm, wird über die Querschnittsfläche  $A_c$  (in  $\text{mm}^2$ ) und den Umfang  $u$ , welcher der Trocknung ausgesetzt ist, bestimmt.  $h_0 = 2 \cdot A_c / u$

$h_1$  Referenzwert,  $h_1 = 100$  mm

$f_{cm0}$  Referenzwert,  $f_{cm0} = 10$  N/mm<sup>2</sup>

Zementtyp	$\alpha_{as}$	$\alpha_{ds1}$	$\alpha_{ds2}$
SL	800	3	0,13
N, R	700	4	0,12
RS	600	6	0,12

Tafel 4.5: Beiwerte  $\alpha_{as}$ ,  $\alpha_{ds1}$  und  $\alpha_{ds2}$  in Abhängigkeit vom Zementtyp

Zementtyp	Merkmal	Festigkeitsklasse nach DIN EN 197-1
SL	langsam erhärtend	32,5 N
N, R	normal oder schnell erhärtend	32,5 R; 42,5 N
RS	schnell erhärtend und hochfest	42,5 R; 52,5 N; 52,5 R

Tafel 4.6: Definition der Zementtypen

Eine detaillierte Anleitung zur Berechnung des Schwindmaßes befindet sich in [DAfStb-H525 – 03], ein graphisches Verfahren ist direkt in [DIN 1045-1 – 08] dargestellt.

## 4.2 Betonstahl, Spannstahl

Im Stahlbetonbau gibt es warmgewalzten Stahl mit einem ausgeprägten Fließplateau und kaltverformten Stahl, der keinen deutlichen Übergang vom elastischen in den plastischen Bereich erkennen lässt. Bis zur Streckgrenze ist das Verhalten jedoch identisch, die unterschiedlichen Eigenschaften im plastischen Bereich sind bei den Verformungsberechnungen unter Gebrauchslast nicht von Bedeutung. Der Elastizitätsmodul beträgt bei üblichem Bewehrungsstahl 200 000 N/mm<sup>2</sup>, bei Spannstählen als Litzen 195 000 N/mm<sup>2</sup> und als Drähte 205 000 N/mm<sup>2</sup>. Weitere Eigenschaften wie die Zugfestigkeit  $f_t$ , die Streckgrenze  $f_y$  oder die daraus bestimmbare Duktilität werden in den gültigen Normen behandelt ([DIN 488 – 06], [DIN 1045-1 – 08], [EN 1992-1-1 – 04]).

Das Verhalten des Bewehrungsstahls unter einer Druckbeanspruchung ist gleichzusetzen mit dem Verhalten unter Zug. Zwar kann es bei wechselnder Zug- und Druckbelastung zu einer Verschiebung der Streckgrenze kommen (d. h. der Stahl fängt unter Druck schon bei Spannungen unter  $f_y$  an zu fließen, sog. Bauschinger-Effekt). Dieses hat jedoch höchstens auf den Grenzzustand der Tragfähigkeit einen Einfluss und kann unter Gebrauchslasten vernachlässigt werden.

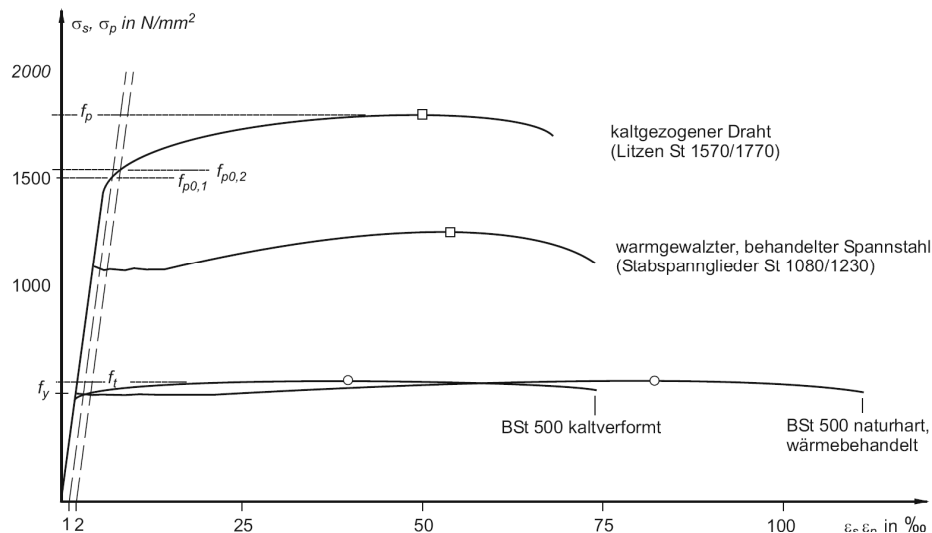


Abb. 4.8: Spannungs-Dehnungslinien üblicher Beton- und Spannstähle (aus [Zilch/Zehetmaier – 06])

### 4.3 Verbund

Ein elementarer Bestandteil des Stahlbetonbaus ist die Kraftübertragung zwischen Beton und Betonstahl. Dieses wird über den Verbund ermöglicht, der sich aus folgenden drei Anteilen zusammensetzt:

- Haftverbund (Adhäsion)
- Reibung
- mechanische Verzahnung

Während der Haftverbund nur geringe Kräfte überträgt und schon bei kleinen Relativbewegungen zwischen Beton und Stahl zerstört wird (nach [Kreller – 90] bei ca. 0,005 mm), übernehmen Reibung (bei Querpressungen) und vor allem die mechanische Verzahnung den größten Teil der Verbundspannungen. Die Verzahnung wird in erster Linie durch die Oberfläche der Bewehrungsstäbe beeinflusst; die heute ausschließlich in [DIN 1045-1 – 08] oder auch in [EN 1991-1-1 – 04] geregelten gerippten Stäbe weisen eine gute Verzahnung auf (weitere Hinweise s. bspw. [DIN 488 – 06]).

Der Verbund und die übertragbaren Kräfte haben bei der Verformungsberechnung einen großen Einfluss. Zum einen bestimmen sie das Rissbild und die Aktivierung des Betons zwischen den Rissen und wirken sich somit auf die Steifigkeit eines gerissenen Bauteils aus. Zum anderen beeinflussen sie die Behinderung von Schwind- und Kriechverformungen durch die Bewehrung.

Verbundspannungen werden über eine Relativverschiebung von Bewehrung und umgebenden Beton aktiviert. Nur durch diesen so genannten Schlupf bauen sich die auf die einzelnen Rippen des Bewehrungsstabes wirkende Kräfte auf. In der Vergangenheit wurden viele Versuche unternommen, die Beziehung zwischen Verbundspannung und Schlupf experimentell zu erfassen und in vereinfachte Werkstoffgesetze darzustellen. Im Folgenden sollen einige dieser Verbund-Schlupf-Gesetze vorgestellt werden.

Allgemein gilt, dass der Verbund im großen Maße von der Betonfestigkeitsklasse (und der aus ihr hergeleiteten Zugfestigkeit), der bezogenen Rippenfläche und dem Verbundbereich abhängig ist. Als weitere Einflüsse sind Querspannungen, Betondeckung, Stabdurchmesser, Dehnzustand und Belastungsgeschichte zu nennen.

[Krüger/Mertzsch – 06] und [König/Tue – 96] geben eine relativ einfache Beziehung zwischen Verbundspannung und Schlupf an:

$$\tau_s(x) = \tau_{s,max} \cdot s^\alpha(x) \quad (4.28)$$

mit  $\tau_{s,max}$  maximal erreichbare Verbundspannung  
 $s(x)$  Schlupf  
 $\alpha$  von Betonfestigkeit und Umschnürung abhängige Konstante

Bei lang anhaltenden oder sich ständig wiederholenden Lasten verschlechtern sich die Verbundbedingungen. Ursache hierfür ist das Verbundkriechen, also das Kriechen des unter hohen Druckspannungen stehenden Betons zwischen den Betonstahlrippen. Mit dem Faktor  $\varphi_v$ , der im Allgemeinen bei sich wiederholenden Lasten etwas größer ist als bei Dauerlast, lässt sich die Verbundspannung unter Berücksichtigung des Kriechens wie folgt angeben:

$$\tau_s(x,t) = \frac{\tau_{s,max}}{(1 + \varphi_v)^\alpha} \cdot s^\alpha(x,t) \quad (4.29)$$

Dabei kann die Verbundkriechzahl  $\varphi_v$  Werte annehmen von beispielsweise 1,5 für  $t = 1$  Jahr oder 2,3 für  $t = 30$  Jahre (nach [Eligehausen – 83] und [Rehm – 61], ähnliche Ergebnisse bei [Rohling – 87]).

Die maximale Verbundspannung  $\tau_{s,max}$  kann aus der Betonfestigkeit ermittelt werden. Es wird unterschieden, ob ein Sprengversagen (zu große Querspannungen im Beton) oder ein Ausziehversagen (Zerstörung des Betons zwischen den Rippen) maßgebend ist. Allerdings werden die Maximalspannungen erst bei einem größeren Schlupf erreicht; so geht beispielsweise [Jaccoud – 97] von 1 mm aus. Diese Werte werden im Gebrauchszustand nicht erreicht. In diesem Zustand beträgt die mittlere Rissbreite  $w_k = 0,2 - 0,4$  mm und somit der mittlere anzunehmende Schlupf nur  $s = w_k/2 = 0,1 - 0,2$  mm.

Der Model Code 90 ([CEB/FIP – 91]) gibt in Anlehnung an [Eligehausen – 83] ein in vier Bereiche unterteiltes Verbundspannung-Schlupf-Gesetz an (vgl. Abb. 4.9):

- Im ersten Bereich ( $0 < s < 1$  mm) steigt die Verbundspannung auf die maximale Spannung  $\tau_{b,max}$  an. Als Parabelgleichung wird angegeben:

$$\tau_b = \tau_{b,max} \cdot (s/s_1)^\alpha \quad (4.30)$$

Dabei ist  $\alpha = 0,4$

$$s_1 = 1 \text{ mm (s.o.)}$$

$$\tau_{b,max} = 2,5 \cdot f_{ck}^{1/2} \text{ bei gutem Verbund bzw.}$$

$$\tau_{b,max} = 1,25 \cdot f_{ck}^{1/2} \text{ bei mäßigem Verbund}$$

- Im Bereich 2 ( $1 \text{ mm} < s < 3 \text{ mm}$ ) verläuft  $\tau_b$  konstant mit  $\tau_b = \tau_{b,max}$ .
- Im dritten Bereich ( $3 \text{ mm} < s < c_r =$  lichter Rippenabstand) setzt die Zerstörung des Betons zwischen den Bewehrungsrippen ein. Die Verbundspannung sinkt kontinuierlich auf den reinen Reibungsverbund herab.
- Im vierten Bereich ist nur noch der Reibungsverbund vorhanden. Er beträgt

$$\tau_f = 1,0 \cdot f_{ck}^{1/2} \text{ bzw. } \tau_f = 0,5 \cdot f_{ck}^{1/2} \text{ bei mäßigem Verbund} \quad (4.31)$$

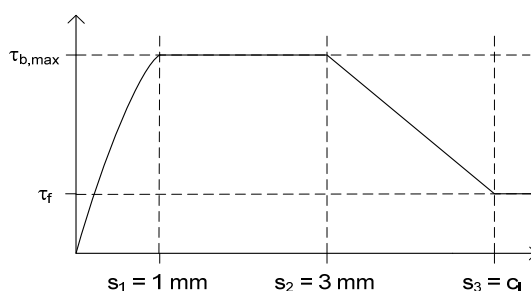


Abb. 4.9: Verbund-Schlupfgesetz

Wenn das Sprenggrissversagen maßgebend wird (z. B. bei kleinem Abstand der Rippe zu Querrissen), entfällt das lang gezogene Plateau mit der maximalen Verbundspannung (Bereich 3); die Verbundspannung erreicht dann nur noch den Wert  $\tau_{b,max} = 2,0 \cdot f_{ck}^{1/2}$  (bzw.  $\tau_{b,max} = 1,0 \cdot f_{ck}^{1/2}$  bei mäßigem Verbund) und wird schon bei  $s_1 = 0,6$  mm erreicht.

Eine ähnliche Unterteilung nimmt auch [Kreller – 90] vor, der sich - wie auch der Model Code 90 - auf Untersuchungen von [Eligehausen – 83] stützt. Er betont ebenfalls, dass sich das Verbund-Schlupf-Gesetz nur in Abhängigkeit vom Abstand zu einem Querriss aufstellen lässt, da bei Abständen zwischen einfachen und fünffachen Stabdurchmesser der Übergang vom Sprenggrissversagen zum Ausziehversagen stattfindet. Allerdings fügt er zusätzlich noch die Bedeutung von Querbewehrung und Betondeckung auf die maximale Verbundspannung sowie der Betonfestigkeit auf den Exponenten  $\alpha$  an. Außerdem wird die maximale Verbundspannung schon bei deutlich geringerem Schlupf erreicht. Seine Unterteilung sieht wie folgt aus (bei ausreichendem Abstand zum Querriss und guten Verbundbedingungen):

- Im Bereich 1 ( $0 < s < 0,25$  mm) steigt die Verbundspannung auf die maximale Spannung  $\tau_{b,max}$  an. Als Parabelgleichung wird hier angegeben:

$$\tau = \tau_{max} \cdot (s / s_1)^\alpha \quad (4.32)$$

Dabei ist  $\alpha = 0,003 \cdot \beta_c + 0,1625$ ,  $\beta_c$  Betonfestigkeit in  $\text{N/mm}^2$

$s_1 = 0,25$  mm (s.o.)

$$\tau_{max} = a \cdot f_{ck}^{1/2} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} a = 0,36 \cdot \ddot{u}_b / d_s + 1,28 \text{ bei normaler und} \\ a = 0,36 \cdot \ddot{u}_b / d_s + 2,0 \text{ bei enger Verbügelung} \end{array}$$

$\ddot{u}_b$  Betondeckung  
 $d_s$  Stabdurchmesser

- Im zweiten Bereich ( $0,25 \text{ mm} < s < 0,35 \text{ mm}$ ) verläuft  $\tau$  konstant mit  $\tau = \tau_{max}$
- Im Bereich 3 ( $0,35 \text{ mm} < s < 1 \text{ mm}$ ) sinkt die Verbundspannung kontinuierlich auf den reinen Reibungsverbund herab
- Im vierten Bereich ist der Reibungsverbund konstant vorhanden ist. Er beträgt  $\tau_R = 0,15 \cdot \tau_{max}$  (4.33)

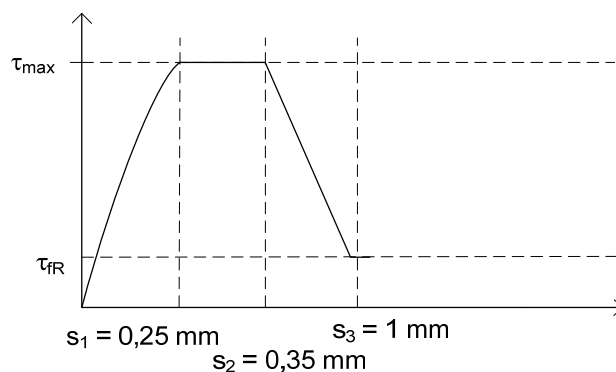


Abb. 4.10: Verbund-Schlupfgesetz nach [Kreller – 90]

[König/Tue – 96] weisen darauf hin, dass die im Model Code 90 angegebenen Beziehungen die Verbundtragfähigkeit bei geringem Schlupf (also gerade im Gebrauchszustand) unterschätzen und geben für den Bereich 1 folgende Gleichung an:

$$\tau_s(x) = C \cdot s^\alpha(x) \quad (4.34)$$

Dabei ist  $C = 0,31 \cdot \beta_{Wm} \approx 0,31 \cdot 1,2 \cdot f_{cm} = 0,37 \cdot f_{cm}$  und  $\alpha = 0,3$ .

Bei kleinen Stabdurchmessern (Mattenbewehrung) und großer Betondeckung können auch  $C = 0,32 \cdot \beta_{Wm}$  und  $\alpha = 0,22$  angesetzt werden.

Bei [Noakowski – 88] wird die Verbundspannung über den Schlupf  $\delta$ , einen Exponenten  $N$  und einen Materialkennwert  $A \cdot \beta_N^{2/3}$  ermittelt. Es wird auf den Einfluss der Rippenfläche des

Stahls, der Verbundbedingungen (guter oder mäßiger Verbund) und ganz besonders der bezogenen Betondeckung (Verhältnis der Betondeckung zum Stabdurchmesser) hingewiesen. Im Folgenden ist das Verbundgesetz im Bereich 1 für eine bezogene Betondeckung  $c/d_s = 1,75$  dargestellt (übliches Innenbauteil mit Stabbewehrung, Mattenbewehrung liefert deutlich günstigere Werte):

$$\tau_b = 0,95 \cdot s^{0,12} \cdot f_{cm}^{2/3} \quad (4.35)$$

Aus diesen Werten leitet [Noakowski – 88] eine mittlere Verbundspannung ab. Sie beträgt:

$$\tau_{bm} = (0,13 \cdot f_{cm}^{2/3} \cdot d_s^{0,12} \cdot \sigma_s^{0,24})^{0,89} \quad (4.36)$$

## 5 Grundlegendes Modell zur Verformungsberechnung

### 5.1 Zusammenhang zwischen Moment, Krümmung und Verformung

Zunächst wird das Verformungsverhalten eines linear-elastischen Querschnittes ohne zeitliche Einflüsse behandelt. Die Verformung  $w$  bzw. ihre Änderung auf einem beliebigen Teilabschnitt  $dx$  lässt sich aus dem Drehwinkel der Stabachse  $\varphi$  und der Schubverzerrung  $\gamma$  ermitteln. Für kleine Winkel  $\varphi$  kann man  $\tan\varphi = \varphi$  setzen. Weiterhin kann die Schubverzerrung gemäß der Normalenhypothese von Bernoulli zu Null gesetzt werden. Somit erhält man

$$-\frac{dw}{dx} = \varphi \quad (5.1)$$

Die Änderung des Drehwinkels  $\varphi$  innerhalb eines Abschnittes  $dx$  wird als Krümmung  $\kappa$  bzw.  $1/r$  bezeichnet:

$$\kappa = \frac{d\varphi}{dx} \quad \text{und somit} \quad \kappa = \frac{d^2w}{dx^2} \quad (5.2)$$

Die Durchbiegung erhält man aus der zweifachen Integration der Krümmung.

Die „inneren“ Kraft- und Weggrößen lassen sich über Elastizitätsgesetze verknüpfen. Am verformten Element nach Abbildung 5.1 wirkt in jedem beliebig kleinen Abschnitt der Querschnittsfläche  $A$  eine Spannung  $\sigma_{xx}(z)$ . Durch Integration über die Gesamtfläche und unter Berücksichtigung des Schwerpunktabstandes  $z$  erhält man das Gesamtmoment  $M$ :

$$M = \int_A \sigma_{xx}(z) \cdot z \, dA \quad (5.3)$$

Bei linear-elastischem Verhalten kann die Spannung nach dem Hook'schen Gesetz als Produkt der Dehnung  $\varepsilon_{xx}(z)$  und des Elastizitätsmoduls  $E$  ausgedrückt werden. Die Dehnung  $\varepsilon_{xx}(z)$  erhält man als Produkt des Schwerpunktabstandes  $z$  und der Krümmung  $\kappa$ . Voraussetzung hierfür sind das Ebenbleiben des Querschnittes (Hypothese von Bernoulli) und sehr kleine Verformungen bzw. Verdrehungen (vgl. Gl. (5.2)). Somit ist das Moment

$$M = \int_A \sigma_{xx}(z) \cdot z \, dA = \int_A E \cdot \varepsilon_{xx}(z) \cdot z \, dA = \int_A E \cdot \kappa \cdot z^2 \, dA = E \cdot \kappa \int_A z^2 \, dA = EI\kappa \quad (5.4)$$

mit  $I = \int_A z^2 \, dA$  als Flächenmoment 2. Grades.

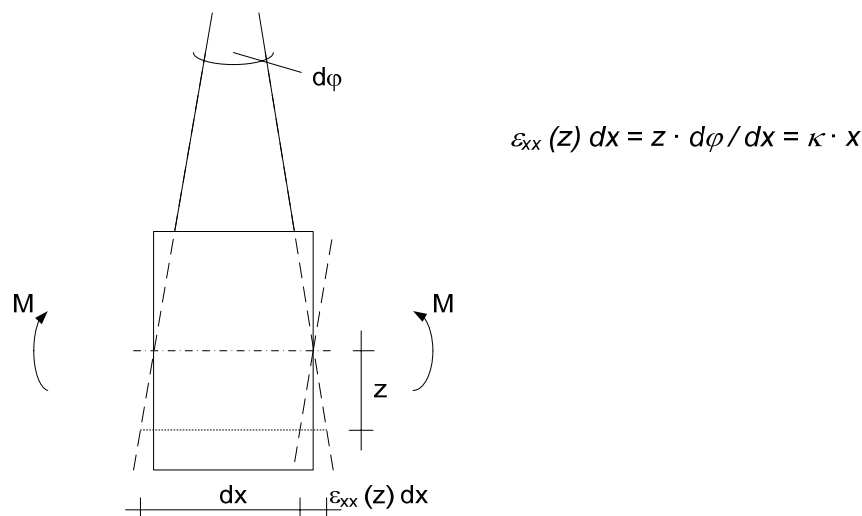


Abb. 5.1: Elastizitätsgesetz bei reiner Biegung

Die Ermittlung der Last-Verformungsbeziehungen für eine Normal- bzw. Querkraft erfolgt analog, so dass man zusammenfassend schreiben kann:

$$\begin{bmatrix} N \\ V \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA_V & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Gleichung (5.5) gilt für elastisches Verhalten. Bei einem kriechfähigen Werkstoff wie Beton muss zu den elastischen Dehnungen ein um die Kriechzahl  $\varphi$  erhöhter Anteil addiert werden (vgl. Gl. (4.10)). Mit Gleichung (5.5) lassen sich die Kriechdehnungen wie folgt bestimmen:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{bmatrix}_c = \varphi \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{bmatrix}_{el} \quad (5.6)$$

Das Betonschwinden bewirkt bei einem reinen Betonquerschnitt nur eine Dehnung entlang der Bauteilachse und ist zu der elastischen und kriechbedingten Dehnung zu addieren. Bei bewehrten Querschnitten wird die Schwinddehnung  $\varepsilon_{cs}$  um den Anteil der Kraft, die die Bewehrung aufnimmt, reduziert, da die freie Verformung durch den im Verbund liegenden Stahl behindert wird.

Für mittige bzw. symmetrische Bewehrung gelten die Beziehungen:

$$\text{– Beton:} \quad \varepsilon_{cs} \cdot E_{cm} = \sigma_{cs}; \quad \sigma_{cs} \cdot A_c = F_{cs} \quad (5.7a)$$

$$\text{– Kräftegleichgewicht:} \quad F_{cs} = F_s \quad (5.7b)$$

$$\text{– Stahl:} \quad \sigma_s \cdot A_s = F_s; \quad \varepsilon_s \cdot E_s = \sigma_s \quad (5.7c)$$

Ist die Bewehrung exzentrisch angeordnet, entstehen zusätzliche Krümmungen bzw. „innere“ Momente. Ansätze zu ihrer Ermittlung werden im nachfolgenden Abschnitt dargestellt.

## 5.2 Einfluss des Schwindens

### 5.2.1 Ermittlung der Krümmung mit Ansatz eines Ersatzkräftepaars

#### 5.2.1.1 Grundsätzliches

Die Querschnittskrümmung wird im Allgemeinen bestimmt, indem die Kräfte, die aus der Behinderung der freien Schwinddehnung entstehen, als äußere Kräfte auf den Beton- und den Bewehrungsquerschnitt angesetzt werden (vgl. [König/Tue – 08], [Krüger/Mertzsch – 06]). Sie ergibt sich aus der Dehnungsdifferenz im Schwerpunkt des Betons und der Bewehrung (Zug- und Druckbewehrung). Es ist zwischen Zustand I und Zustand II zu unterscheiden:

$$\text{Zustand I:} \quad \kappa_s^I = \frac{\varepsilon_{c,c}^I - \varepsilon_{s,s}^I}{z_I} \quad (5.8)$$

$$\text{Zustand II:} \quad \kappa_s^{II} = \frac{\varepsilon_{c,c}^{II} - \varepsilon_{s,s}^{II}}{z_{II}} \quad (5.9)$$

Dabei gibt  $z$  den Abstand zwischen dem Schwerpunkt des Betonquerschnittes  $z_c$  und dem Schwerpunkt der beiden Bewehrungslagen  $z_s$  an (s. Abb. 5.2). Mit  $\varepsilon_{c,c}$  und  $\varepsilon_{s,s}$  werden die durch das Schwinden des Betons hervorgerufenen Dehnungen in eben diesen Punkten bezeichnet.

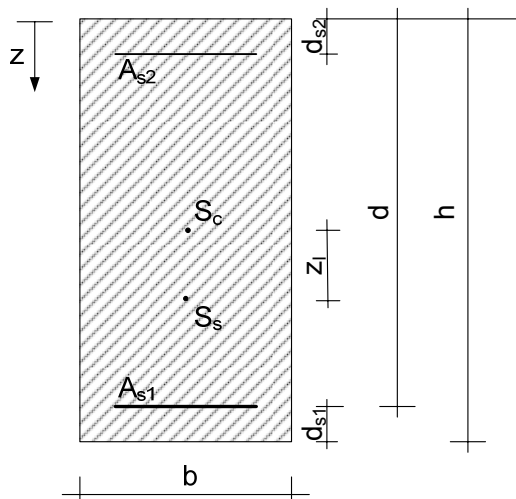
Die Schwerpunktkordinaten  $z_{ss}$  der Bewehrung und  $z_{sc}$  des Betons ergeben sich jeweils aus der gewichteten Summe der Teilflächenschwerpunkte als (bezogen auf OK Träger):

$$z_{ss} = \left| \frac{d_{s2} \cdot A_{s2} + (h - d_{s1}) \cdot A_{s1}}{A_{s2} + A_{s1}} \right| \quad (\text{bei Druck- und Zugbewehrung}) \quad (5.10a)$$

$$z_{sc} = \frac{1}{A_c} \cdot \sum_1^j A_{c,i} \cdot z_{s,i} \quad (\text{bei } j \text{ Teilquerschnitten}) \quad (5.10b)$$



Zustand I:



Zustand II:

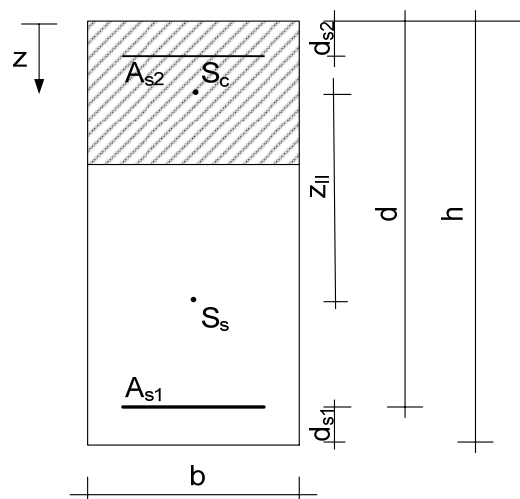


Abb. 5.2: Schwerpunkte von Beton und Stahl im Zustand I und II

Der Abstand zwischen den beiden Schwerpunkten  $S_s$  und  $S_c$  wird, ausgehend von der Mittelachse des Querschnittes, wie folgt berechnet:

$$z_I = \left| \frac{\rho_{s1} \cdot (h - 2 \cdot d_{s1}) - \rho_{s2} \cdot (h - 2 \cdot d_{s2})}{2 \cdot \rho_s} \right| \quad (5.11)$$

$$z_{II} = \left| \frac{\rho_{s1} \cdot (2 - \xi) - \rho_{s2} \cdot (\xi - 2 \cdot d_{s2} / d)}{2 \cdot \rho_s} \right| \cdot d \quad \text{mit } \xi = x / d \quad (5.12a)$$

bzw.

$$z_{II} = \frac{\rho_{s1} \cdot (h - 2 \cdot d_{s1}) - \rho_{s2} \cdot (h - 2 \cdot d_{s2})}{2 \cdot \rho_s} + (1 - \xi_h) \cdot \frac{h}{2} \quad \text{mit } \xi_h = x / h \quad (5.12b)$$

mit  $\rho_{s1}$  als Bewehrungsgrad der Zugbewehrung,  $\rho_{s2}$  der Druckbewehrung und  $\rho_s$  der Gesamtbewehrung. Er wird im Zustand I auf die Bauteilhöhe ( $A_c = h \cdot b$ ) und im Zustand II auf die statische Nutzhöhe ( $A_c = d \cdot b$ ) bezogen.

Die Dehnungen werden zunächst im Zustand I und für den Rechteckquerschnitt bestimmt. Für profilierte Bauteile ist das Trägheitsmoment  $I$  und die Fläche  $A$  entsprechend zu bestimmen, ansonsten kann die Herleitung wegen des Ebenbleibens der Querschnitte unverändert übernommen werden.

Die Spannungsumlagerung zwischen Beton und Bewehrung wird vom Kriechen beeinflusst. So wird die Kraft, die der schwindende Beton auf die Bewehrung ausübt, durch das Kriechen reduziert. Dadurch verkleinert sich die Stahldehnung, und die Dehnungsdifferenz sowie die Krümmung wird größer (Ausnahme: Symmetrisch bewehrte Querschnitte). Im Folgenden wird dieser Umstand durch den Faktor  $(1 + \rho \cdot \varphi)$  berücksichtigt, wobei  $\rho$  einen Alterungsbeiwert zur Berücksichtigung der die Kriechspannung reduzierenden Relaxation angibt. In Anlehnung an [König/Gerhardt – 86] wird er analog zum Wert für die Lastbeanspruchung zu 0,8 gesetzt (s. auch Abschnitt 4.1.2 - Kriechen).

Die Dehnung im Schwerpunkt der Bewehrung beträgt:

$$\varepsilon_{s,s}^I = \frac{\varepsilon_{cs}}{1 + \alpha_e \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \left( \rho_s + z_I^2 \cdot \frac{A_s}{I_c + I_s \cdot \alpha_e \cdot [1 + \rho \cdot \varphi]} \right)} \quad (5.13)$$

Im Schwerpunkt des Betons erhält man die Dehnung:

$$\varepsilon_{s,c}^I = \varepsilon_{cs} - \frac{\varepsilon_{cs} \cdot \rho_s \cdot \alpha_e \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)}{1 + \alpha_e \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \left( \rho_s + z_I^2 \cdot \frac{A_s}{I_c + I_s \cdot \alpha_e \cdot [1 + \rho \cdot \varphi]} \right)} \quad (5.14)$$

mit

$$I_c = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad I_s = \frac{\rho_{s1} \cdot \rho_{s2}}{\rho_s} \cdot b \cdot h \cdot (d - d_{s2})^2; \quad \rho_s = \frac{A_{s1} + A_{s2}}{b \cdot h}.$$

Im Zustand II sind die Gleichungen dahingehend zu modifizieren, dass statt der Bauteilhöhe  $h$  die Druckzonenhöhe  $x$  bzw. in bezogener Form  $\xi = x / d$  verwendet wird. Sie kann beispielsweise mit den in [Goris – 08b] angegebenen Gleichungen ermittelt werden. Für die Dehnung der Stahl- und Betonschwerpunkte gilt:

$$\varepsilon_{s,s}^{II} = \frac{\varepsilon_{cs}}{1 + \alpha_e \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \left( \rho_s I \xi + z_{II}^2 \cdot \frac{A_s}{I_c \cdot \xi^3 + I_s \cdot \alpha_e \cdot [1 + \rho \cdot \varphi]} \right)} \quad (5.15)$$

$$\varepsilon_{s,c}^{II} = \varepsilon_{cs} - \frac{\varepsilon_{cs} \cdot \rho_s I \xi \cdot \alpha_e \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)}{1 + \alpha_e \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \left( \rho_s I \xi + z_{II}^2 \cdot \frac{A_s}{I_c \cdot \xi^3 + I_s \cdot \alpha_e \cdot [1 + \rho \cdot \varphi]} \right)} \quad (5.16)$$

Dabei sind:

$$I_c = \frac{b \cdot d^3}{12}; \quad I_s = \frac{\rho_{s1} \cdot \rho_{s2}}{\rho_s} \cdot (b \cdot d) \cdot (d - d_{s2})^2; \quad \rho_s = \frac{A_{s1} + A_{s2}}{b \cdot d}.$$

Hierbei ist jedoch zu beachten, dass die Dehnungen für den *reinen* Zustand II gelten. Das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen wird bei [König/Tue – 08] grundsätzlich über einen modifizierten E-Modul berücksichtigt.

### 5.2.1.2 Erweiterung auf den Nettoquerschnitt

Aufbauend auf den zuvor dargestellten Gleichungen (vgl. auch [König/Tue – 08]) soll der Einfluss des Schwindens auf die Nettoquerschnittswerte bezogen werden. Dieses kann gerade bei höherfesten Betonen und im Zustand II von Bedeutung sein. Die Herleitung erfolgt für den ungerissenen und den gerissenen Querschnitt.

*Zustand I:*

Die Krümmung ergibt sich aus der Differenz der Dehnung im Schwerpunkt des Betonquerschnittes und im Schwerpunkt der Bewehrung (vgl. Abb. 5.2).

– Schwerpunkt der Bewehrung:

$$\begin{aligned} z_{Ss} &= \frac{(-h/2 + d_{s2}) \cdot A_{s2} + (d - h/2) \cdot A_{s1}}{A_{s1} + A_{s2}} \\ &= \frac{\rho_{s2} \cdot (-h/2 + d_{s2}) + \rho_{s1} \cdot (d - h/2)}{\rho_s} \end{aligned} \quad (5.17)$$

– Schwerpunkt des Betons (Nettoquerschnitt):

$$\begin{aligned} z_{Sc} &= \frac{-h/2 \cdot h/2 \cdot b + (h/2 - d_{s2}) \cdot A_{s2} + h/2 \cdot h/2 \cdot b - (d - h/2) \cdot A_{s1}}{h/2 \cdot b - A_{s2} + h/2 \cdot b - A_{s1}} \\ &= \frac{-\rho_{s2} \cdot (-h/2 + d_{s2}) - \rho_{s1} \cdot (d - h/2)}{1 - \rho_s} \end{aligned} \quad (5.18)$$

- Abstand von Beton- und Bewehrungsschwerpunkt:

$$\begin{aligned}
 z_{Ss} - z_{Sc} &= \frac{\rho_{s2} \cdot (-h/2 + d_{s2}) + \rho_{s1} \cdot (d - h/2)}{\rho_s} - \frac{\rho_{s2} \cdot (-h/2 + d_{s2}) - \rho_{s1} \cdot (d - h/2)}{1 - \rho_s} \\
 &= [\rho_{s2} \cdot (-h/2 + d_{s2}) + \rho_{s1} \cdot (-h/2 + d)] \cdot \left[ \frac{1}{\rho_s} + \frac{1}{\rho_s \cdot (1/\rho_s - 1)} \right] \\
 &= \frac{\rho_{s2} / \rho_s \cdot (-h/2 + d_{s2}) + \rho_{s1} / \rho_s \cdot (-h/2 + d)}{1 - \rho_s}
 \end{aligned} \quad (5.19)$$

mit  $\rho_s = \frac{A_{s1} + A_{s2}}{b \cdot h}$ ;  $\rho_{s1} = \frac{A_{s1}}{b \cdot h}$ ;  $\rho_{s2} = \frac{A_{s2}}{b \cdot h}$ .

**Zustand II:**

- Schwerpunkt Bewehrung:

$$z_{Ss} = \frac{\rho_{s2} \cdot (-h/2 + d_{s2}) + \rho_{s1} \cdot (-h/2 + d)}{\rho_s} \quad (5.20)$$

- Schwerpunkt Betonquerschnitt:

$$\begin{aligned}
 z_{Sc} &= \frac{-(h/2 - x/2) \cdot x \cdot b + (h/2 - d_{s2}) \cdot A_{s2}}{x \cdot b - A_{s2}} \\
 &= \frac{(-h/2 + x/2) \cdot x - (-h/2 + d_{s2}) \cdot \rho_{s2} \cdot d}{x - \rho_{s2} \cdot d}
 \end{aligned} \quad (5.21)$$

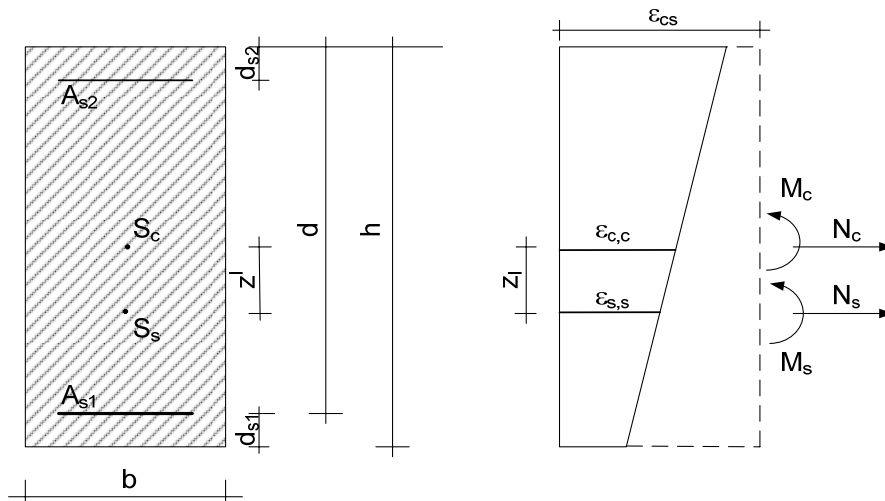
- Abstand von Beton- und Bewehrungsschwerpunkt:

$$\begin{aligned}
 z_{Ss} - z_{Sc} &= \frac{\rho_{s2} \cdot (-h/2 + d_{s2}) + \rho_{s1} \cdot (-h/2 + d)}{\rho_s} - \frac{(-h/2 + x/2) \cdot x - (-h/2 + d_{s2}) \cdot \rho_{s2} \cdot d}{x - \rho_{s2} \cdot d} \\
 &= \frac{(\xi + \rho_{s1}) \cdot \rho_{s2} \cdot (-h/2 + d_{s2}) + (\xi - \rho_{s2}) \cdot \rho_{s1} \cdot (-h/2 + d) - \xi \cdot \rho_s \cdot (-h/2 + x/2)}{\rho_s \cdot (\xi - \rho_{s2})}
 \end{aligned} \quad (5.22)$$

mit  $\rho_s = \frac{A_{s1} + A_{s2}}{b \cdot d}$ ;  $\rho_{s1} = \frac{A_{s1}}{b \cdot d}$ ;  $\rho_{s2} = \frac{A_{s2}}{b \cdot d}$ ;  $\xi = \frac{x}{d}$ .

### Berechnung der Dehnungen:

Betrachtet man die Bereiche Beton und Bewehrung (Druck- und Zugbewehrung) getrennt, kann man für jeden in seinem Schwerpunkt eine Dehnung und eine Krümmung berechnen und daraus die Schnittgrößen  $N_c$  und  $M_c$  bzw.  $N_s$  und  $M_s$  der Teilquerschnitte berechnen.



**Abb. 5.3:** Ersatzkräfte und -momente aus der Behinderung der freien Schwinddehnung

Im Querschnitt muss Kräftegleichgewicht vorhanden sein, zusätzlich gilt als Verträglichkeitsbedingung das Ebenbleiben des Querschnittes. Dadurch lassen sich folgende 4 Beziehungen herleiten:

$$\sum N = 0 \quad \rightarrow N_c = -N_s \quad (5.23a)$$

$$\sum M = 0 \quad \rightarrow M_c = -M_s - N_s \cdot z_l \quad (5.23b)$$

$$\kappa_c = \kappa_s \quad \rightarrow \frac{M_c}{E_c \cdot I_c} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) = \frac{M_s}{E_s \cdot I_s}$$

$$\varepsilon_{c,c} = \varepsilon_{s,c} \quad (5.23c)$$

$$\rightarrow \varepsilon_{c,c} = \varepsilon_{s,s} - \kappa_s \cdot z_l$$

$$\rightarrow \varepsilon_{cs} + \frac{N_c}{E_c \cdot A_c} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) = \frac{N_s}{E_s \cdot A_s} - \frac{M_s}{E_s \cdot I_s} \cdot z_l \quad (5.23d)$$

Mit Gleichungen (5.23b) und (5.23c) gilt:

$$\frac{(1 + \rho \cdot \varphi)}{E_c \cdot I_c} \cdot (-M_s - N_s \cdot z_l) = \frac{M_s}{E_s \cdot I_s}$$

$$\rightarrow -\alpha_e \cdot \frac{I_s}{I_c} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot N_s \cdot z_l = M_s + \alpha_e \cdot \frac{I_s}{I_c} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot M_s$$

$$\rightarrow M_s = -\frac{N_s \cdot z_l}{1 + \frac{1}{\alpha_e \cdot I_s / I_c \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)}}$$

und mit (5.23a), (5.23c) und (5.23d):

$$\varepsilon_{cs} - \frac{N_s}{E_c \cdot A_c} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) = \frac{N_s}{E_s \cdot A_s} + \frac{z_l}{E_s \cdot I_s} \cdot \frac{N_s \cdot z_l}{1 + \frac{1}{\alpha_e \cdot I_s / I_c \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)}}$$

$$\rightarrow \varepsilon_{cs} = N_s \cdot \frac{(1 + \rho \cdot \varphi)}{E_c \cdot A_c} + N_s \cdot \frac{1}{E_s \cdot A_s} + N_s \cdot \frac{z_l^2}{E_s \cdot I_s + \frac{E_c \cdot I_c}{(1 + \rho \cdot \varphi)}}$$

$$\rightarrow N_s = \frac{\varepsilon_{cs}}{\frac{(1 + \rho \cdot \varphi)}{E_c \cdot A_c} + \frac{1}{E_s \cdot A_s} + \frac{z_l^2}{E_s \cdot I_s + \frac{E_c \cdot I_c}{(1 + \rho \cdot \varphi)}}} \quad (5.24)$$

Damit ergeben sich die Dehnungen in den Schwerpunkten des Betons und der Bewehrung:

$$\varepsilon_{s,s} = \frac{N_s}{E_s \cdot A_s} = \frac{\varepsilon_{cs}}{\alpha_e \cdot \rho_s \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) + 1 + \frac{E_s \cdot A_s \cdot z_l^2}{E_s \cdot I_s + E_c \cdot I_c / (1 + \rho \cdot \varphi)}} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{c,c} &= \varepsilon_{cs} + \frac{N_c}{E_c \cdot A_c} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) = \varepsilon_{cs} - \frac{E_s \cdot A_s}{E_s \cdot A_s} \cdot \frac{N_c}{E_c \cdot A_c} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \\ &= \varepsilon_{cs} - \alpha_e \cdot \rho_s \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \varepsilon_{s,s} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Dabei ist  $\alpha_e = E_s / E_{cm}$ . Die Berechnung der Betonquerschnittsgrößen  $A_c$  und  $I_c$  (und somit auch des Bewehrungsgrades  $\rho_s$ ) erfolgt mit den Nettowerten.

Im *reinen* Zustand II gelten die oben ermittelten Gleichungen mit folgenden Änderungen:

$$A_c'' = (b \cdot x)$$

$$I_c'' = x^3 \cdot b / 12$$

$$\rho_s = A_s / A_c''$$

Zusätzlich wird der Abstand der Beton- und Bewehrungsschwerpunkte  $z_I$  durch den entsprechenden Wert im Zustand II (also  $z_{II}$ ) ersetzt.

Die Krümmung berechnet sich analog zu [König/Tue – 08] bzw. Abschnitt 5.2.1.1 wie folgt:

$$\text{Zustand I: } \kappa_s^I = \frac{\varepsilon_{c,c}^I - \varepsilon_{s,s}^I}{z_I} \quad (5.27)$$

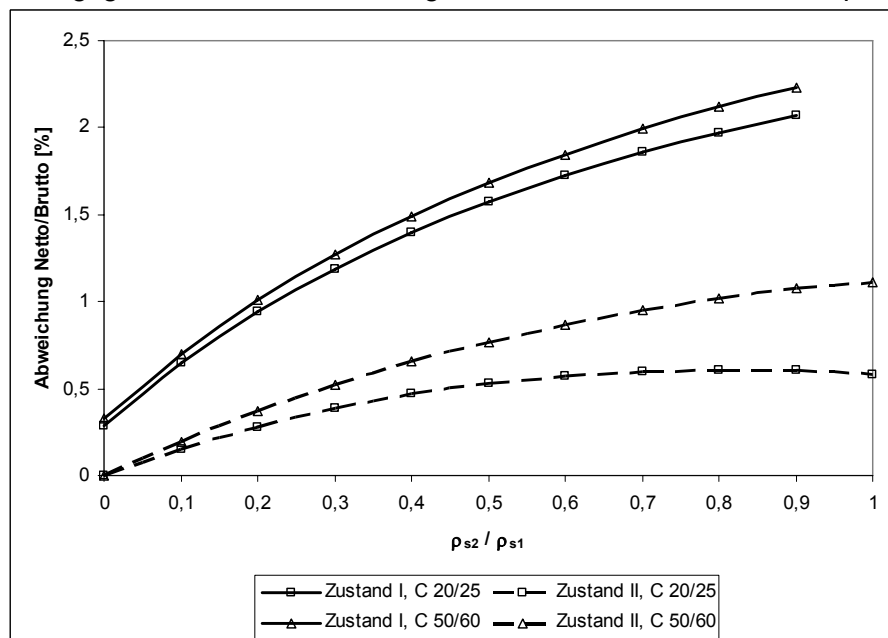
$$\text{Zustand II: } \kappa_s^{II} = \frac{\varepsilon_{c,c}^{II} - \varepsilon_{s,s}^{II}}{z_{II}} \quad (5.28)$$

### 5.2.1.3 Auswirkungen des Ansatzes von Nettoquerschnittswerten

Wie aus Gleichung (5.7) ersichtlich, ist die Kraft, die beim Schwinden vom Beton auf den Stahl übertragen wird, vom Verhältnis der Flächen abhängig. Um den Einfluss der Nettoquerschnittswerte zu erfassen, werden Parameterstudien an Platten- und Balkenquerschnitten durchgeführt.

#### Platten

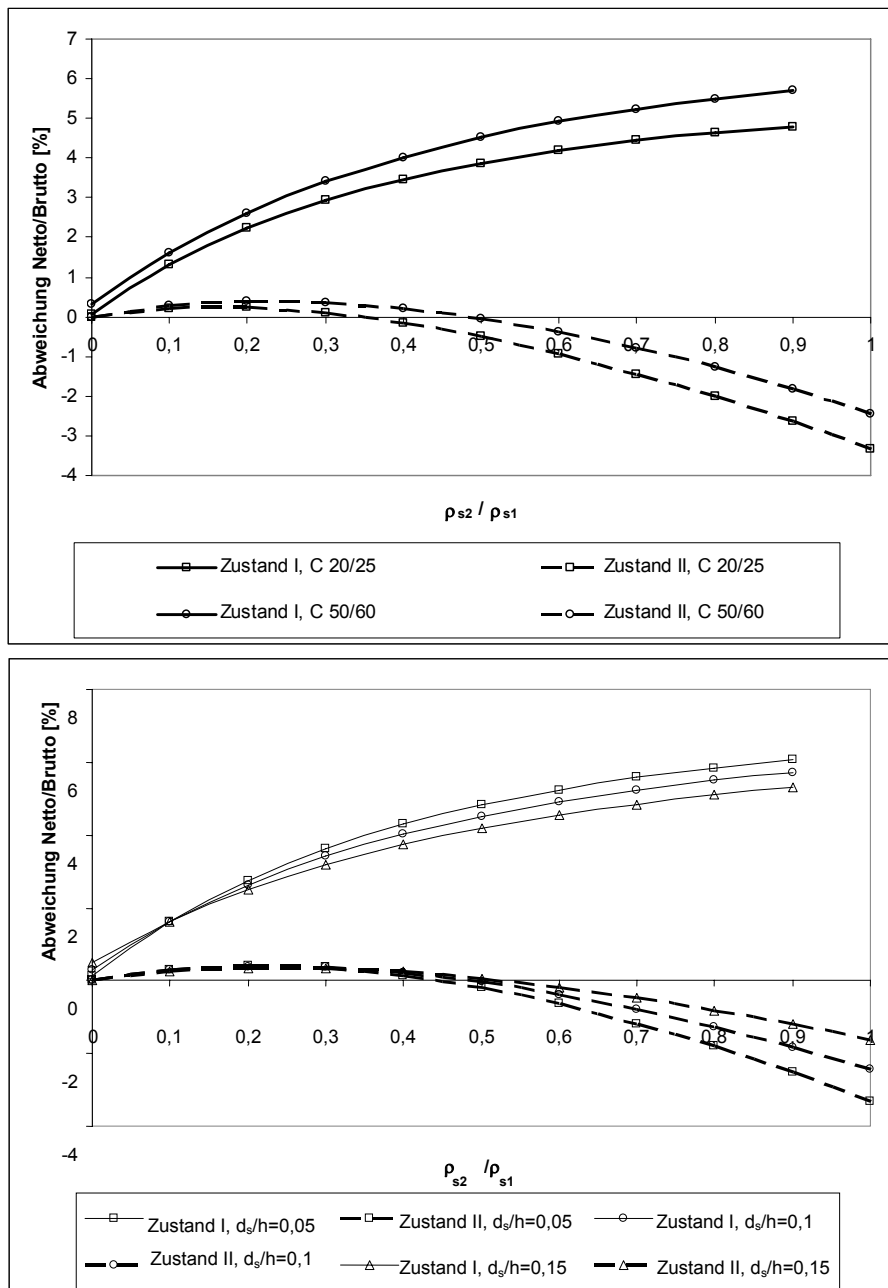
Aufgrund des niedrigen Bewehrungsgrades üblicher Plattenkonstruktionen ist der Einfluss von Nettoquerschnittswerten erwartungsgemäß gering. In Abbildung 5.4 sind die Abweichungen von Netto- und Bruttowerten für einen Zugbewehrungsgrad von 0,5 % und einem variablen Druckbewehrungsgrad dargestellt. Der Randabstand der beiden Bewehrungslagen ist gleich groß, er beträgt  $d_{s1} / h = d_{s2} / h = 0,1$ . Die Querschnittskrümmungen erhöhen sich unter Annahme eines C 20/25 bei Ansatz des Nettoquerschnitts um maximal 2 Prozent, bei einem C 50/60 um etwa 2,2 Prozent. Im Zustand II ist der Einfluss der Betonfestigkeit deutlicher erkennbar, allerdings beträgt der Unterschied selbst bei einer für Platten eher untypischen Festigkeit von  $f_{ck} = 50 \text{ N/mm}^2$  und einer Druckbewehrung von 100 % der Zugbewehrung weniger als ein Prozent. Da sich der Beton nur in der Druckzone am Verformungswiderstand beteiligt, liefert die Berechnung ohne Druckbewehrung erwartungsgemäß keine Abweichungen zwischen Netto- und Bruttoquerschnitt.



**Abb. 5.4:** Prozentuale Erhöhung der Krümmung inf. Schwindens bei Ansatz des Nettoquerschnitts in Abhängigkeit vom Druckbewehrungsanteil ( $\rho_{s2}/\rho_{s1}$ ); gering beanspruchtes Bauteil ( $\rho_{s1} = 0,5\%$ ,  $d_{s1} / h = d_{s2} / h = 0,1$ )

**Balken**

Bei hochbeanspruchten Bauteilen können sich im Zustand I die Krümmungen – berechnet mit Brutto- bzw. Nettoquerschnittswerten – um bis zu sechs Prozent unterscheiden, wenn die Druckbewehrung annähernd die Größe der Zugbewehrung erreicht und wenn eine große Betonfestigkeit vorliegt (vgl. Abb. 5.5, Betonklasse C50/60, Zugbewehrungsgrad 2 Prozent, Randabstände  $d_{s1} / h = d_{s2} / h = 0,1$ ). Diese Abweichungen haben jedoch keine größere praktische Bedeutung, da die Schwindkrümmung für annähernd symmetrisch bewehrte Querschnitte ohnehin sehr gering ist (Schwerpunkt der Bewehrung und Schwerpunkt des Betons stimmen fast überein). Im Zustand II ist der Einfluss geringer, bei größerer Druckbewehrung wird die Krümmung sogar günstig beeinflusst (d. h. sie wird kleiner, s. Abb. 5.5).



**Abb. 5.5:** Prozentuale Erhöhung der Krümmung inf. Schwindens bei Ansatz des Nettoquerschnitts in Abhängigkeit vom Druckbewehrungsanteil ( $\rho_{s2}/\rho_{s1}$ ); hoch beanspruchtes Bauteil ( $\rho_{s1} = 2,0\%$ ,  $d_{s1} / h = d_{s2} / h = 0,1$ )  
 Oben: Konstanter Randabstand, variable Betonfestigkeit  
 Unten: Konstante Betonfestigkeit C 50/60, variabler Randabstand

## 5.2.2 Berechnung der Krümmung mit dem Kraftgrößenverfahren

### 5.2.2.1 Querschnitte ohne Druckbewehrung

Basierend auf den Arbeiten von Trost wird über das Lösen des Verbundes zwischen Bewehrung und Beton die unbekannte Kraftgröße  $X_1$  bestimmt (vgl. a. [Fischer – 03]). Diese führt über das Kräftegleichgewicht zu den Beton- und Stahlkräften und somit auch zu den Dehnungen an den entsprechenden Stellen. Aus den Dehnungen  $\varepsilon_{cs}$  (Schwindmaß),  $\varepsilon_c^*$  (Betondehnung in der Schwereachse) und  $\varepsilon_{s1}$  (Stahldehnung der Zugbewehrung) sowie dem Abstand  $z_{s1}$  der Bewehrungslage von der Schwereachse kann man die Krümmung im Zustand I wie folgt bestimmen:

$$\kappa_{cs}^I = \frac{-\varepsilon_{cs} - \varepsilon_c^* + \varepsilon_{s1}}{z_{s1}} \quad (5.29)$$

Im Zustand II kann man davon ausgehen, dass die mittlere Stahldehnung zwischen zwei Rissen deutlich kleiner ist als im Zustand I. Als Richtwert kann sie nach [Fischer – 03] als ca. 40% der Dehnung im Zustand I angenommen werden. Die Krümmung berechnet sich dann wie folgt:

$$\kappa_{cs}^{II} = 0,4 \cdot \kappa_{cs}^I + \frac{-0,6 \cdot \varepsilon_{cs}}{d} \quad (5.30)$$

Im statisch bestimmten „0“-Zustand ergibt sich folgende Verformung:

$$\delta_{10} = -\varepsilon_{cs} \cdot L \quad (5.31)$$

Das Aufbringen einer Kraftgröße „1“ an der Stelle der gelösten Verbindung ergibt folgende Verformung:

$$\delta_{11} = \left( \frac{1}{E_s \cdot A_{s1}} + \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot A_c} + \frac{(1 + \rho \cdot \varphi) \cdot z_{s1}}{E_{cm} \cdot I_c} \cdot z_{s1} \right) \cdot L \quad (5.32)$$

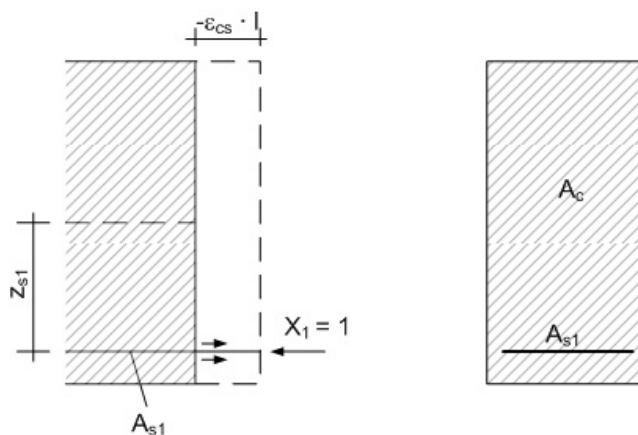


Abb. 5.6: Kraftübertragung bei Betonschwinden und einlagiger Bewehrung

Setzt man vollständigen Verbund voraus, so dürfen in der Bewehrung und in der Betonfaser in Höhe der Bewehrung keine Verschiebungsdifferenzen auftreten. Die unbekannte Verbundkraft kann also über folgende Beziehung ermittelt werden:

$$\delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0$$

$$\rightarrow X_1 = \frac{\varepsilon_{cs} \cdot E_s \cdot A_{s1}}{1 + \frac{E_s \cdot A_{s1}}{E_{cm} \cdot A_c} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) + \frac{E_s \cdot A_{s1} \cdot z_{s1}^2}{E_{cm} \cdot I_c} \cdot \frac{A_c}{A_c} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)} \quad (5.33)$$

Mit  $\alpha_e = E_s / E_{cm}$  und  $\rho_s = A_{s1} / A_c$  erhält man:

$$X_1 = F_{s1} = -F_c = \frac{\varepsilon_{cs} \cdot E_s \cdot A_{s1}}{1 + \alpha_e \cdot \rho_{s1} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \left( 1 + \frac{A_c \cdot z_{s1}^2}{I_c} \right)} \quad (5.34)$$

Somit ergibt sich die Stahldehnung zu

$$\varepsilon_{s1} = \frac{F_{s1}}{E_s \cdot A_{s1}} = \frac{\varepsilon_{cs}}{1 + \alpha_e \cdot \rho_{s1} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \left(1 + \frac{A_c \cdot z_{s1}^2}{I_c}\right)} \quad (5.35)$$

und die Betondehnung in der Schwereachse zu

$$\varepsilon_c^* = \frac{F_c}{E_c \cdot A_c} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) = \frac{-F_s}{E_s \cdot A_{s1}} \cdot \frac{E_s \cdot A_{s1}}{E_c \cdot A_c} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) = -\alpha_e \cdot \rho_{s1} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \varepsilon_{s1} \quad (5.36)$$

### 5.2.2.2 Erweiterung auf Querschnitte mit Druckbewehrung

Bei Querschnitten mit Druckbewehrung ist das System zweifach statisch unbestimmt. Folgende Zustände und Verformungsgrößen treten auf:

*Statische Systeme:*

- „0“-Zustand freies Schwinden des Betons
- „1“-Zustand Lösen des Verbundes der Zugbewehrung
- „2“-Zustand Lösen des Verbundes der Druckbewehrung

*Verformungsgrößen:*

- $\delta_{10}$  Unbehinderte Schwindverformung des Betons an der Stelle der Zugbewehrung
- $\delta_{20}$  Unbehinderte Schwindverformung des Betons an der Stelle der Druckbewehrung
- $\delta_{11}$  Verformung in Höhe der Zugbewehrung aufgrund einer Verbundkraft der Größe „1“
- $\delta_{22}$  Verformung in Höhe der Druckbewehrung aufgrund einer Verbundkraft der Größe „1“
- $\delta_{12}$  Verformung in Höhe der Zugbewehrung aufgrund einer Verbundkraft der Größe „1“, die zwischen Beton und der Druckbewehrung wirkt
- $\delta_{21}$  Verformung in Höhe der Druckbewehrung aufgrund einer Verbundkraft der Größe „1“, die zwischen Beton und der Zugbewehrung wirkt

Nach dem Gesetz von Maxwell ist  $\delta_{12} = \delta_{21}$ .

*Kraftgrößen:*

- $X_1$  Kraftgröße, die die über den Verbund von Zugbewehrung und Beton übertragene Kraft beschreibt
- $X_2$  Kraftgröße, die die über den Verbund von Druckbewehrung und Beton übertragene Kraft beschreibt

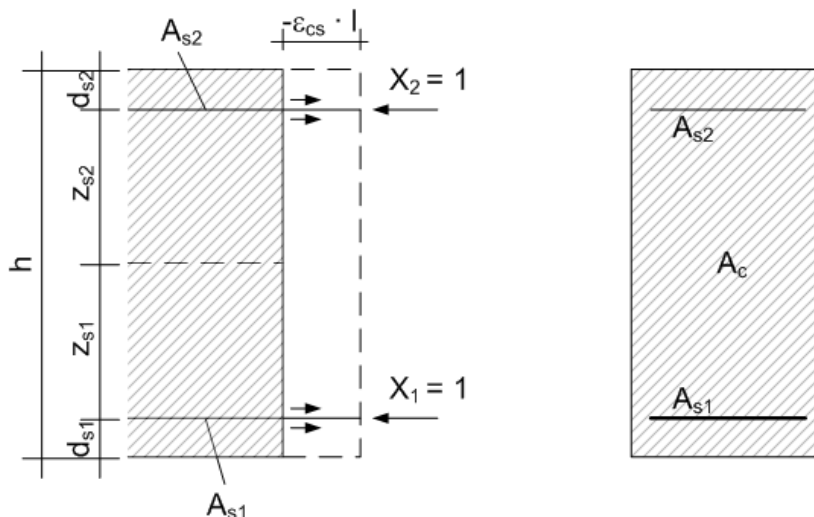


Abb. 5.7: Kraftgrößen bei Zug- und Druckbewehrung

Zunächst werden die Verformungen für eine Kraftgröße „1“ bestimmt. Die tatsächliche Verformung beträgt das  $X_1$ - bzw.  $X_2$ -fache der Verformung unter der „1“-Last. Wegen des vollständigen Verbundes sind Dehnungen in den Bewehrungslagen und der sie direkt umgebenden Betonfaser gleich:



$$\begin{aligned}\delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} &= 0 \\ \delta_{20} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} &= 0\end{aligned}\quad (5.37)$$

Im Einzelnen werden die Verformungsgrößen wie folgt berechnet:

$$\delta_{10} = -\varepsilon_{cs} \cdot L \quad (5.38)$$

$$\delta_{20} = -\varepsilon_{cs} \cdot L \quad (5.39)$$

$$\delta_{11} = \left( \frac{1}{E_s \cdot A_{s1}} + \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot A_c} + \frac{(1 + \rho \cdot \varphi) \cdot z_{s1} \cdot z_{s1}}{E_{cm} \cdot I_c} \right) \cdot L \quad (5.40)$$

$$\delta_{22} = \left( \frac{1}{E_s \cdot A_{s2}} + \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot A_c} + \frac{(1 + \rho \cdot \varphi) \cdot z_{s2} \cdot z_{s2}}{E_{cm} \cdot I_c} \right) \cdot L \quad (5.41)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \left( \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot A_c} + \frac{(1 + \rho \cdot \varphi) \cdot z_{s1} \cdot z_{s2}}{E_{cm} \cdot I_c} \right) \cdot L \quad (5.42)$$

mit  $z_{s1} = d - h/2$  und  $z_{s2} = d_{s2} - h/2$

Die Bauteillänge  $L$  ist für alle Verformungsbeziehungen gleich und kann somit aus allen Gleichungen herausgekürzt werden. Zur besseren Übersicht werden außerdem in den weiteren Berechnungen gesetzt:

$$a = \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot A_c}; \quad b = \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot I_c}; \quad c_1 = \frac{1}{E_s \cdot A_{s1}}; \quad c_2 = \frac{1}{E_s \cdot A_{s2}}$$

Somit können die Verformungsgleichungen wie folgt umgeschrieben werden:

$$\delta_{10} = -\varepsilon_{cs}; \quad \delta_{20} = -\varepsilon_{cs}$$

$$\delta_{11} = c_1 + a + b \cdot z_{s1}^2; \quad \delta_{22} = c_2 + a + b \cdot z_{s2}^2; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = a + b \cdot z_{s1} \cdot z_{s2}$$

Mit den Verformungen bzw. Dehnungen und den oben beschriebenen Verbundbedingungen lassen sich nun die unbekanntene Kraftgrößen bestimmen:

$$(1) \quad \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} = 0$$

$$(2) \quad \delta_{20} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} = 0$$

$$\rightarrow X_1 = \frac{\delta_{10} \cdot (\delta_{12} - \delta_{22})}{\delta_{12} \cdot \delta_{12} - \delta_{11} \cdot \delta_{22}} = \frac{\varepsilon_{cs} \cdot (\delta_{12} - \delta_{22})}{\delta_{12} \cdot \delta_{12} - \delta_{11} \cdot \delta_{22}}$$

$$\rightarrow X_2 = \frac{1}{\delta_{22}} \cdot (\varepsilon_{cs} - X_1 \cdot \delta_{12})$$

Durch Einsetzen der oben dargestellten Verformungsgrößen erhält man:

$$X_1 = \frac{\varepsilon_{cs} \cdot (b \cdot z_{s2} \cdot (z_{s1} - z_{s2}) - c_2)}{-a \cdot b \cdot (z_{s1} - z_{s2})^2 - a \cdot (c_1 + c_2) - b \cdot (c_1 \cdot z_{s2}^2 + c_2 \cdot z_{s1}^2) - c_1 \cdot c_2} \quad (5.43)$$

$$X_2 = \frac{1}{c_2 + a + b \cdot z_{s2}^2} \cdot (\varepsilon_{cs} - X_1 \cdot (a + b \cdot z_{s1} \cdot z_{s2})) \quad (5.44)$$

Mit diesen Kraftgrößen können an jeder Stelle des Querschnittes die durch das Schwinden hervorgerufenen Dehnungen bestimmt werden. Bei den folgenden Berechnungen werden die Dehnungen am oberen und unteren Bauteilrand ermittelt (s. Abb. 5.8). Die Krümmung ergibt sich aus ihrer auf die Bauteilhöhe bezogenen Differenz. Alternativ (und zur Kontrolle) können beispielsweise auch die Stahldehnungen in eine Querschnittsverkrümmung überführt werden.

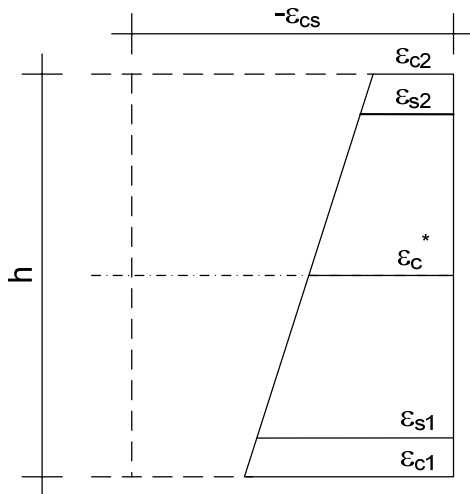


Abb. 5.8: Querschnittskrümmung durch behinderte Schwindverformung: Definition der Dehnungen

Mit Abb. 5.8 ist die Krümmung 
$$\kappa = \frac{\varepsilon_{c2} - \varepsilon_{c1}}{h}$$

mit:

$$\varepsilon_{c2} = -\varepsilon_{cs} + X_1 \cdot \left( \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot A_c} + \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot I_c} \cdot z_{s1} \cdot (-h/2) \right) + X_2 \cdot \left( \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot A_c} + \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot I_c} \cdot z_{s2} \cdot (-h/2) \right) \quad (5.45)$$

$$\varepsilon_{c1} = -\varepsilon_{cs} + X_1 \cdot \left( \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot A_c} + \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot I_c} \cdot z_{s1} \cdot (h/2) \right) + X_2 \cdot \left( \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot A_c} + \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot I_c} \cdot z_{s2} \cdot (h/2) \right) \quad (5.46)$$

Die Berechnung der Krümmung im reinen Zustand II wird ähnlich wie bei [König/Tue – 08] durchgeführt, indem man die Querschnittswerte  $A_c$  und  $I_c$  durch die entsprechenden Werte im gerissenen Zustand ersetzt, d.h. statt der Bauteilhöhe  $h$  nur noch die Druckzonenhöhe  $x$  ansetzt. Die Ermittlung einer Krümmung unter Berücksichtigung des tatsächlichen Rissbildes (also Verbund von Stahl und Beton zwischen den Rissen) wird im Abschnitt 5.2.5 separat betrachtet.

### 5.2.3 Schwinden nach EN 1992-1-1

In [EN 1992-1-1 – 04] wird ein vereinfachtes Verfahren angegeben, mit dem die Krümmungen im Zustand I und II bestimmt werden können. Es gehen neben dem Schwindmaß  $\varepsilon_{cs}$  und dem Verhältnis der Elastizitätsmodule  $\alpha_e = E_s / E_{cm}$  noch die Flächenmomente ersten Grades der Bewehrung  $S$  und das Flächenmoment zweiten Grades  $I$  des ideellen Querschnittes in die Berechnung ein. Kriecheffekte können über einen effektiven E-Modul erfasst werden. Hierfür wird der Elastizitätsmodul des Betons durch  $(1 + \rho \cdot \varphi)$  dividiert.

$$\text{Zustand I:} \quad \kappa_{cs}^I = \varepsilon_{cs} \cdot \alpha_e \cdot \frac{S^I}{I^I} \quad (5.47)$$

$$\text{Zustand II:} \quad \kappa_{cs}^{II} = \varepsilon_{cs} \cdot \alpha_e \cdot \frac{S^{II}}{I^{II}} \quad (5.48)$$

Die Herleitung dieser Beziehungen erfolgt über ein fiktives Moment, das aus dem Schwinden bzw. der Schwindbehinderung der Bewehrung entsteht und als äußere Belastung auf den reinen Betonquerschnitt angesetzt wird. Zunächst soll zur Anschauung ein Querschnitt im Zustand I ohne Druckbewehrung betrachtet werden. Das fiktive Moment kann aus der Stahlkraft  $F_{s1}$  und dem Hebelarm  $z_{s1}$  gebildet werden. Die Krümmung beträgt dann

$$\kappa_{cs}^I = \frac{F_{s1} \cdot z_{s1}}{E_{cm,eff} \cdot I_c}$$

bzw. nach Bestimmen der Stahlkraft  $F_{s1}$

$$\kappa_{cs}^I = \frac{-\varepsilon_{cs} \cdot \alpha_{e,eff} \cdot (A_{s1} \cdot z_{s1}) / I_c}{1 + \alpha_e \cdot \rho_{s1} \cdot \left(1 + A_c \cdot z_{s1}^2 / I_c\right) \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)} \quad (5.49)$$

Die auf den reinen Betonquerschnitt bezogenen Werte  $I_c = b \cdot h^3 / 12$  und  $z_{s1} = h/2 - d_{s1}$  werden durch die ideellen  $I^I = \kappa^I \cdot b \cdot h^3 / 12$  und  $z_{s1} = (d - x) = (d - \xi^I \cdot h)$  ersetzt. Dabei sind:

$$\xi^I = \frac{0,5 + \alpha_{e,eff} \cdot \rho_{s1} \cdot d / h}{1 + \alpha_{e,eff} \cdot \rho_{s1}}; \quad (5.50a)$$

$$\kappa^I = 1 + 12 \cdot (0,5 - \xi^I)^2 + 12 \cdot \alpha_{e,eff} \cdot \rho_{s1} \cdot (d / h - \xi^I)^2 \quad (5.50b)$$

Der Term  $A_{s1} \cdot z_{s1}$  entspricht dem Flächenmoment erster Ordnung der Bewehrung  $S^I$ . Mit diesen Ergänzungen können auch die in 5.2.1 vorgestellten Modelle in den Gleichungen des [EN 1992-1-1 – 04] berücksichtigt werden, die Ansätze sind also gleichwertig.

Die hier dargestellte Herleitung kann problemlos auf den reinen Zustand II überführt werden, indem man die Druckzonenhöhe  $x$  für den gerissenen Querschnitt bestimmt und hiermit sowohl das statische Moment der Bewehrung als auch das Trägheitsmoment des ideellen Querschnitts neu bestimmt.

Gleiches gilt auch für einen Querschnitt mit Druckbewehrung. Es sind  $S^I/I^I$  bzw.  $S^{II}/I^{II}$  jeweils als ideale Werte zu bestimmen, Angaben hierzu finden sich bspw. bei [Goris – 08b].

#### 5.2.4 Weitere Möglichkeiten und Vergleich der Ansätze

Die Berechnung der Durchbiegung einer einachsig gespannten Platte erfolgt nach [Mayer – 67] über die Krümmung  $\kappa$  als Verhältnis des Schwindmaßes zur Nutzhöhe, über die Spannweite  $L$  und über zwei Faktoren  $k_s$  und  $s_I$  bzw.  $s_{II}$ , welche das statische System sowie Betonklasse, Bewehrungsgrad und Kriechzahl berücksichtigen. Der Krümmungsverlauf wird analog zur Berechnung unter Last und Kriechen berücksichtigt (unter Gleichlast parabelförmiger Verlauf). Mayer stellt zunächst zwei Differentialgleichungen erster Ordnung auf, die die Verformung unter Berücksichtigung der Belastung und der Langzeiteinflüsse beschreiben. Diese Gleichungen werden für ausgewählte Fälle (z. B.  $\varepsilon_{cs} = -0,4$  ‰ und  $\varphi = 4,0$ ) iterativ gelöst. Bei von Mayer abweichenden Eingangsparametern erfolgt im Zustand I die Berechnung über Korrekturfaktoren. Für den Zustand II ist zusätzlich eine Näherungsformel gegeben:

$$f_{cs}^{II} = s_{II} \cdot k_s \cdot \frac{\varepsilon_{cs}}{d} \cdot L^2 \quad (5.51)$$

mit  $L$  Stützweite  
 $d$  statische Nutzhöhe  
 $\varepsilon_{cs}$  Schwindmaß  
 $k_s$  Faktor zur Berücksichtigung des statischen Systems, der Belastung, des Trägheitsmomentenverlaufs und des Ortes der Durchbiegung. Bei einem Einfeldträger unter Gleichstreckenlast gilt beispielsweise zur Bestimmung der Verformung in Feldmitte:  $k_s = 5 / 48$

$$s_{II} \quad s_{II} = 1,3 \cdot \frac{2 + \varphi}{6} \cdot (1 - \sqrt{\alpha_E \cdot \rho_{s2}}) \quad (\text{vgl. auch [Beck/Schack – 72]})$$

In [Grasser/Thielen – 91] erfolgt die Berechnung prinzipiell wie in [Mayer – 67], jedoch mit Unterschieden in der Bestimmung der Korrekturwerte  $s_{II}$  bzw.  $\kappa_s^{II}$  (Bezeichnung nach Grasser/Thielen). Sie dienen der Umrechnung der maximalen Krümmung bei einer dehnstarrten Zugbewehrung zum erwarteten Wert unter Berücksichtigung der Materialeigenschaften, Querschnittsgrößen und eventuell vorhandener Druckbewehrung und werden in Abhängigkeit vom Verhältnis der Elastizitätsmodule, des Druck- und Zugbewehrungsgrades sowie den Randabständen der Bewehrungen bestimmt.

Im Vergleich zu den Verfahren nach Abschnitten 5.2.1 – 5.2.3, die alle zum selben Wert führen, erhält man mit diesen beiden älteren Berechnungshilfen teilweise deutlich abweichende Ergebnisse, wie nachfolgend an 3 Beispielen exemplarisch gezeigt wird. Es wird jeweils ein Beton C30/37, ein Schwindmaß von  $-0,6 \cdot 10^{-3}$  und eine Kriechzahl 2,5 angenommen.

#### Beispiel 1

Für eine Deckenplatte mit  $h / d = 24 / 21,5$  cm und einem Zugbewehrungsgrad von 0,5 % (ohne Druckbewehrung) erhält man folgende Krümmungen:

[Mayer – 67]	im Zustand I: $0,474 \cdot 10^{-3}$ im Zustand II: $2,419 \cdot 10^{-3}$
[Grasser/Thielen – 91],	im Zustand I: $0,713 \cdot 10^{-3}$ im Zustand II: $3,084 \cdot 10^{-3}$
Ansätze nach Abschnitt 5.2.1 – 5.2.3	im Zustand I: $0,964 \cdot 10^{-3}$ im Zustand II: $3,198 \cdot 10^{-3}$

#### Beispiel 2

Es wird ein Balken mit  $b/h/d = 30/60/56$  cm und einem Zugbewehrungsgrad von 1,2 % (ohne Druckbewehrung) berechnet.

[Mayer – 67]	im Zustand I: $0,471 \cdot 10^{-3}$ im Zustand II: $0,929 \cdot 10^{-3}$
[Grasser/Thielen – 91],	im Zustand I: $0,550 \cdot 10^{-3}$ im Zustand II: $1,232 \cdot 10^{-3}$
Ansätze nach Abschnitt 5.2.1 – 5.2.3	im Zustand I: $0,724 \cdot 10^{-3}$ im Zustand II: $1,293 \cdot 10^{-3}$

#### Beispiel 3

Balken nach Beispiel 2, jedoch mit einem Druckbewehrungsgrad von 0,6 % ( $\rho_{s2} / \rho_{s1} = 0,5$ ):

[Mayer – 67]	im Zustand I: $0,180 \cdot 10^{-3}$ im Zustand II: $0,737 \cdot 10^{-3}$
[Grasser/Thielen – 91],	im Zustand I: $0,220 \cdot 10^{-3}$ im Zustand II: $0,882 \cdot 10^{-3}$
Ansätze nach Abschnitt 5.2.1 – 5.2.3	im Zustand I: $0,261 \cdot 10^{-3}$ im Zustand II: $0,807 \cdot 10^{-3}$

Wie zu sehen ist, sind die Abweichungen im Zustand I (insb. im Beispiel 1) relativ groß. Im Zustand II nähern sich die Ergebnisse an (insb. im Bsp. 3, d.h. bei Anordnung von Druckbewehrung).

### 5.2.5 Schwinden im Zustand II

Die Herleitung für den reinen Zustand II wurde im Abschnitt 5.2.1 dargestellt. Analog lässt sich mit dem in Abschnitt 5.2.2 hergeleiteten Modell die Krümmung bestimmen, wenn man die Querschnittswerte des Zustandes I durch die entsprechenden, auf die Druckzone  $x$  bezogenen Werte ersetzt. Die Ergebnisse stimmen dann exakt überein. Ebenso lässt sich mit [König/Tue – 08] und mit der vereinfachten Berechnungsmethode in [EN 1992-1-1 – 04] die Querschnittskrümmung infolge Schwinden im reinen Zustand II berechnen.

Auf den Gesamtquerschnitt bezogen ist eine Berechnung der Krümmung im reinen Zustand II jedoch nur wenig sinnvoll, da im Riss das Schwinden der Betondruckzone nur einen geringen Anteil am gesamten Verformungsverhalten hat, während zwischen den Rissen größere Werte auftreten. Ähnlich wie bei der Lastbeanspruchung muss also die mittlere Querschnitts-

krümmung unter Berücksichtigung des Betonquerschnittes zwischen zwei Rissen bestimmt werden. In [EN 1992-1-1 – 04] wird hierzu der Verteilungsbeiwert  $\zeta$  aus der Lastbeanspruchung verwendet (s. hierzu Abschn. 7.3).

Das Schwinden verursacht eine Verformungsgröße; in einem unbewehrten und zwängungsfrei gelagerten Bauteil ist diese spannungsfrei, wenn man von Eigenspannungen aus dem unterschiedlichen Schwinden von Betonrandzonen und dem Kernbereich absieht (der Einfluss kann i. d. R. vernachlässigt werden, da hierdurch im Symmetriefall keine Krümmung verursacht wird). Bei bewehrten Querschnitten entstehen – bedingt durch die Dehnungsbehinderung infolge der Bewehrung – Zugspannungen im Beton und Druckspannungen in der Bewehrung. Ist nur wenig Bewehrung vorhanden, ist auch die Behinderung gering, dementsprechend klein fällt die Querschnittsverkrümmung aus. Bei großen, einseitig angeordneten Bewehrungsmengen ist die Dehnungsdifferenz zwischen der sich frei verkürzenden Betondruckzone und der verformungsbehinderten Zugzone größer, die Krümmung steigt somit.

Bei einer Rissbildung, die meistens aus einer Lastbeanspruchung resultiert, werden Betonzugspannungen abgebaut, so dass, wenn man ausschließlich das Schwinden betrachtet, auch die Stahlstauchungen zurückgehen und die Dehnungsdifferenz zwischen den Bauteilkanten vergrößert wird. Der Ansatz eines aus der Belastung ermittelten Verteilungsbeiwertes ist in diesem Fall problematisch, da sich dieser eigentlich auf ein anderes Tragmodell bezieht (Zugspannungen und -dehnungen im Stahl).

In [Fischer – 03] wird die Abnahme der Stahlstauchung durch die Rissbildung abgeschätzt. Die mittlere Dehnung des Stahls nach Rissbildung wird mit 40 Prozent der Dehnung im Zustand I angegeben. Damit ergibt sich die Querschnittskrümmung zu

$$\kappa_{cs}^{II} = 0,4 \cdot \kappa_{cs}^I + \frac{-0,6 \cdot \varepsilon_{cs}}{d} \quad (5.52)$$

## 5.3 Einfluss des Kriechens

### 5.3.1 Krümmungsermittlung mit dem Kraftgrößenverfahren

#### 5.3.1.1 Krümmung im Zustand I

Bei Verformungsberechnungen ist das Kriechen des Betons zu beachten, d. h. dass sich die Dehnungen im Beton bei konstanter Spannung zeitabhängig erhöhen. Diesen Vorgang kann man sowohl in der Druckzone als auch im Zugbereich beobachten, die Kriechzahlen können jedoch näherungsweise gleichgesetzt werden (vgl. Abschnitt 4.1.2; s. a. [Kordina – 00]). Durch Bewehrung kann die Kriechverformung vermindert werden, da sich die Kräfte vom Beton, der sich ja der Belastung durch Kriechen „entzieht“, teilweise in den Stahl umlagern. Nachfolgend wird von vollkommenem Verbund zwischen Beton und Bewehrung ausgegangen.

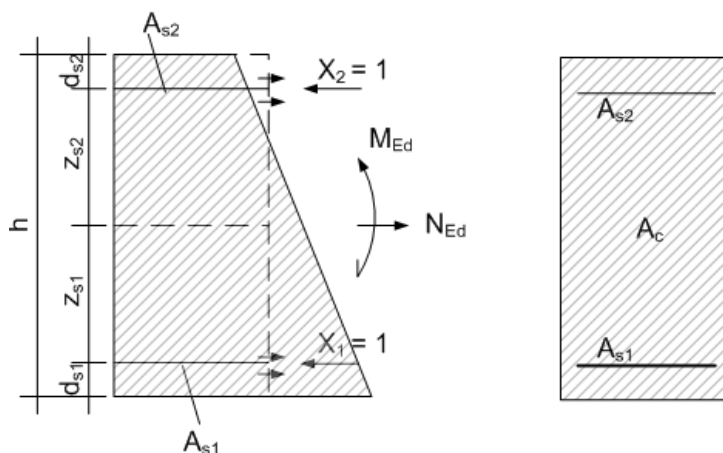


Abb. 5.9: Momenten-Krümmungsbeziehung und der Einfluss der Bewehrung im Zustand I

Das System ist zweifach statisch unbestimmt. Zustände und Verformungsgrößen sind:

- „0“-Zustand freies Verformen des Betonquerschnittes
- „1“-Zustand Lösen des Verbundes der Zugbewehrung
- „2“-Zustand Lösen des Verbundes der Druckbewehrung

**Verformungsgrößen:**

- $\delta_{10}$  Unbehinderte Lastverformung des Betons an der Stelle der Zugbewehrung
- $\delta_{20}$  Unbehinderte Lastverformung des Betons an der Stelle der Druckbewehrung
- $\delta_{11}$  Verformung in Höhe der Zugbewehrung aufgrund einer Verbundkraft der Größe „1“
- $\delta_{22}$  Verformung in Höhe der Druckbewehrung aufgrund einer Verbundkraft der Größe „1“
- $\delta_{12}$  Verformung in Höhe der Zugbewehrung aufgrund einer Verbundkraft der Größe „1“, die zwischen dem Beton und der Druckbewehrung wirkt
- $\delta_{21}$  Verformung in Höhe der Druckbewehrung aufgrund einer Verbundkraft der Größe „1“, die zwischen dem Beton und der Zugbewehrung wirkt

**Kraftgrößen:**

- $X_1$  Größe der über den Verbund von Zugbewehrung und Beton übertragenen Kraft
- $X_2$  Größe der über den Verbund von Druckbewehrung und Beton übertragenen Kraft

Die Verformungen im statisch bestimmten Zustand (d. h. im unbewehrten Betonquerschnitt) lassen sich über das Produkt der Dehnung  $\varepsilon$  und der Länge  $L$  beschreiben:

$$\delta_{10} = \varepsilon \cdot L = (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \frac{\sigma_1}{E_{cm}} \cdot L = \frac{(1 + \rho \cdot \varphi)}{E_{cm}} \cdot \left( \frac{N}{A_c} + \frac{M}{I_c} \cdot z_{s1} \right) \cdot L \quad (5.53)$$

$$\delta_{20} = \varepsilon \cdot L = (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \frac{\sigma_2}{E_{cm}} \cdot L = \frac{(1 + \rho \cdot \varphi)}{E_{cm}} \cdot \left( \frac{N}{A_c} + \frac{M}{I_c} \cdot z_{s2} \right) \cdot L \quad (5.54)$$

Die Verformungsgrößen infolge der virtuellen Verbundkräfte ergeben sich zu:

$$\delta_{11} = \left( \frac{1}{E_s \cdot A_{s1}} + \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot A_c} + \frac{(1 + \rho \cdot \varphi) \cdot z_{s1}}{E_{cm} \cdot I_c} \cdot z_{s1} \right) \cdot L \quad (5.55)$$

$$\delta_{22} = \left( \frac{1}{E_s \cdot A_{s2}} + \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot A_c} + \frac{(1 + \rho \cdot \varphi) \cdot z_{s2}}{E_{cm} \cdot I_c} \cdot z_{s2} \right) \cdot L \quad (5.56)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \left( \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot A_c} + \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot I_c} \cdot z_{s1} \cdot z_{s2} \right) \cdot L \quad (5.57)$$

mit  $z_{s1} = d - h/2$  und  $z_{s2} = d_{s2} - h/2$

Mit den Konstanten  $a = \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot A_c}$ ,  $b = \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot I_c}$  sowie  $c_1 = \frac{1}{E_s \cdot A_{s1}}$ ,  $c_2 = \frac{1}{E_s \cdot A_{s2}}$  erhält man:

$$\delta_{10} = N \cdot a + M \cdot b \cdot z_{s1}; \quad \delta_{20} = N \cdot a + M \cdot b \cdot z_{s2}$$

$$\delta_{11} = c_1 + a + b \cdot z_{s1}^2; \quad \delta_{22} = c_2 + a + b \cdot z_{s2}^2; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = a + b \cdot z_{s1} \cdot z_{s2}$$

Damit lassen sich – vollkommener Verbund vorausgesetzt – die Kraftgrößen  $X_1$  und  $X_2$  bestimmen:

$$\delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} = 0$$

$$\delta_{20} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} = 0$$

$$X_1 = \frac{a \cdot b \cdot (z_{s2} - z_{s1}) \cdot (N \cdot z_{s2} - M) + a \cdot c_2 \cdot N + b \cdot c_2 \cdot M \cdot z_{s1}}{-a \cdot b \cdot (z_{s1} - z_{s2})^2 - a \cdot (c_1 + c_2) - b \cdot (c_1 \cdot z_{s2}^2 + c_2 \cdot z_{s1}^2) - c_1 \cdot c_2} \quad (5.58)$$

$$X_2 = -\frac{\delta_{20}}{\delta_{22}} - X_1 \cdot \frac{\delta_{21}}{\delta_{22}} \quad (5.59)$$

Bei gleichen Randabständen von Druck- und Zugbewehrung vereinfacht sich die Gl. (5.58) zu:

$$X_1 = \frac{c_2 \cdot (a \cdot N + b \cdot M \cdot z_{s1})}{(-a - b \cdot z_{s2}^2) \cdot (c_1 + c_2) - c_1 \cdot c_2}$$

Die Krümmung wird über die Differenz der Dehnungen am oberen und unteren Bauteilrand bestimmt:

$$\kappa = \frac{\varepsilon_{c2} - \varepsilon_{c1}}{h}$$

mit:

$$\varepsilon_{c2} = N \cdot a + M \cdot b \cdot (-h/2) + X_1 \cdot (a + b \cdot z_{s1} \cdot (-h/2)) + X_2 \cdot (a + b \cdot z_{s2} \cdot (-h/2)) \quad (5.60)$$

$$\varepsilon_{c1} = N \cdot a + M \cdot b \cdot (h/2) + X_1 \cdot (a + b \cdot z_{s1} \cdot (h/2)) + X_2 \cdot (a + b \cdot z_{s2} \cdot (h/2)) \quad (5.61)$$

### 5.3.1.2 Krümmungen im Zustand II

Der Anteil des Betons an der Biegesteifigkeit beschränkt sich im reinen Zustand II nur auf den Bereich der Druckzonenhöhe  $x$ . Der Beton weist außerdem ein zeit- und lastabhängiges Materialverhalten auf, da er unter den gegebenen Spannungen kriecht. Dadurch ändert sich die Krümmung des Querschnittes. Eine ggf. vorhandene Druckbewehrung vermindert das Kriechen der Druckzone und damit die Krümmung.

Im Folgenden wird eine Möglichkeit aufgezeigt, diese Vorgänge in Anlehnung an das im Abschnitt 5.2.2 vorgestellte Verfahren zu erfassen. Dazu wird wieder der Verbund zwischen Bewehrung und Beton gelöst und an seiner Stelle die beiden Kraftgrößen  $X_1$  und  $X_2$  gesetzt. Es ist zu beachten, dass der Beton in der Zugzone gerissen ist und nicht direkt bei der Krümmungsberechnung mit angesetzt werden darf. Stattdessen wird die Zugbewehrung über einen unendlich biegesteifen Stab an die Druckzone gekoppelt, sodass das Ebenbleiben der Querschnitte auch weiterhin gewährleistet ist.

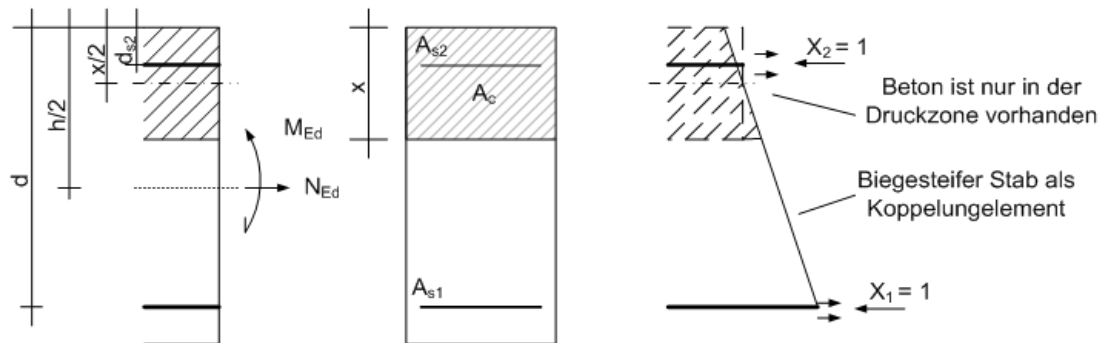


Abb. 5.10: Momenten-Krümmungsbeziehung und der Einfluss der Bewehrung im Zustand II

Bei der Berechnung der Krümmung werden alle angreifenden Kräfte und Momente auf die Schwerachse der Druckzone bezogen. Die Gleichungen (5.53) bis (5.57) werden wie folgt umgeschrieben:

$$\delta_{10} = \left( \frac{N \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)}{E_{cm} \cdot A_c} + \frac{(M + N \cdot (h/2 - x/2)) \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)}{E_{cm} \cdot I_c} \cdot (d - x/2) \right) \cdot L \quad (5.62)$$

$$\delta_{20} = \left( \frac{N \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)}{E_{cm} \cdot A_c} + \frac{(M + N \cdot (h/2 - x/2)) \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)}{E_{cm} \cdot I_c} \cdot (x/2 - d_{s2}) \right) \cdot L \quad (5.63)$$

$$\delta_{11} = \left( \frac{1}{E_s \cdot A_{s1}} + \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot A_c} + \frac{(1 + \rho \cdot \varphi) \cdot (d - x/2)^2}{E_{cm} \cdot I_c} \right) \cdot L \quad (5.64)$$

$$\delta_{22} = \left( \frac{1}{E_s \cdot A_{s2}} + \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot A_c} + \frac{(1 + \rho \cdot \varphi) \cdot (x/2 - d_{s2})^2}{E_{cm} \cdot I_c} \right) \cdot L \quad (5.65)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \left( \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot A_c} + \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_{cm} \cdot I_c} \cdot (d - x/2) \cdot (x/2 - d_{s2}) \right) \cdot L \quad (5.66)$$

Die weitere Berechnung erfolgt gemäß den Gleichungen (5.58) bis (5.61). Dabei ist zu beachten, dass sich die Betondruckzone und somit auch die Steifigkeit während des Kriechvorganges vergrößert. Es muss daher nach der Bestimmung der Stahl- und Betondehnungen eine Kontrolle über das Momenten- bzw. Kräftegleichgewicht erfolgen und die Druckzone iterativ korrigiert werden. Dieses gelingt meistens bei einem Startwert von  $x = h/2$  nach etwa 5 Iterationen ausreichend genau. Die aus Gleichgewichtsbedingungen erforderliche Druckzonenhöhe beträgt:

$$\text{erf } x = 3 \cdot \frac{|F_{s2}| \cdot d_{s2} + M_{Ed} + N_{Ed} \cdot h/2 - |F_{s1}| \cdot d}{|F_{s2}| - |F_{s1}| + N_{Ed}} \quad (5.67)$$

$$\text{mit } F_{s1} = E_s \cdot A_{s1} \cdot \varepsilon_{s1}$$

$$F_{s2} = E_s \cdot A_{s2} \cdot \varepsilon_{s2}$$

### 5.3.2 Ansatz nach EN 1992-1-1

Die Betondehnung  $\varepsilon_c$  ergibt sich als Summe aus der elastischen  $\varepsilon_{el}$  und kriechbedingten  $\varepsilon_{cc}$  zu  $\varepsilon_c = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{cc}$ . Mit der Kriechzahl  $\varphi$  als Verhältnis der Kriechverformung zur elastischen Verformung erhält man  $\varepsilon_{cc} = \varphi(\infty, t_0) \cdot \varepsilon_{el}$  und damit

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{el} + \varphi(\infty, t_0) \cdot \varepsilon_{el} = \varepsilon_{el} \cdot (1 + \varphi(\infty, t_0)) \quad (5.68)$$

Die Querschnittskrümmung wird aus der Dehnungsdifferenz der oberen und unteren Bauteilkante bestimmt. Wenn man nun unterstellt, dass sich das Betonkriechen für Zug- und Druckspannungen ähnlich verhält, so erhält man:

$$\kappa = \frac{\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{c2}}{h} \quad \text{mit } \varepsilon_{ci} = (1 + \varphi(\infty, t_0)) \cdot \varepsilon_{el,i} \quad \text{und } \varepsilon_{el,i} = \sigma_i / E_{cm}$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{c2}}{h} = \frac{M \cdot (1 + \varphi(\infty, t_0))}{E_{cm} \cdot I_c} \quad (5.69)$$

Mit dem effektiven E-Modul  $E_{c,eff} = E_{cm} / (1 + \varphi(\infty, t_0))$  erhält man die in der [EN 1992-1-1 – 04] angegebene Gleichung (7.20).

### 5.3.3 Weitere Ansätze aus der Literatur

[König/Tue – 08] berücksichtigt den Einfluss des Kriechens analog zur [EN 1992-1-1 – 04] durch eine Modifizierung des Elastizitätsmoduls mit dem Faktor  $1/(1+\varphi)$ .

Auch bei [Krüger/Mertzsch – 06] wird eine Möglichkeit genannt, das Betonkriechen über einen effektiven Elastizitätsmodul zu berücksichtigen:

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{\psi_0 + k_\varphi \cdot \varphi_0} \quad (5.70)$$

Dabei ist  $E_{cm}$  der Sekantenmodul nach [DIN 1045-1 – 08],  $\psi_0$  der Beiwert zur Berücksichtigung der zeitlichen Veränderung des Elastizitätsmoduls,  $k_\varphi$  der auf den effektiven Elastizitätsmodul bezogene Alterungsbeiwert bzw. Relaxationswert (vgl. Abschnitt 4.1.2), und  $\varphi_0$  die Grundkriechzahl.

Zusätzlich wird ein Verfahren vorgestellt, nach dem man den Alterungsbeiwert getrennt für Zustand I und II bestimmen kann. Im Zustand II wird als Näherungslösung  $k_{\varphi,II} = 0,95$  angegeben.



In [Grasser/Thielen – 91] wird der Zuwachs der Verformung wie folgt bestimmt:

$$\Delta f_k^{I,II} = \frac{q_k}{q} \cdot f_0^{I,II} \cdot \chi_k^{I,II} \cdot \varphi_t \quad (5.71)$$

mit  $f_0$  Durchbiegung (elastisch) unter Kurzzeitbeanspruchung  $q$   
 $q_k / q$  Korrekturfaktor, falls Langzeitbelastung  $q_k$  von  $q$  abweicht  
 $\varphi_t$  Kriechzahl  
 $\chi_k$  Korrekturbeiwert

Im Zustand I werden die zusätzlichen Kriechverformungen (bedingt durch den Faktor  $\chi_k^I$ ) umso kleiner, je

- größer der Anteil der Druckbewehrung an der Gesamtbewehrung ist,
- je höher die Betondruckfestigkeit ist (d. h. kleine Differenz aus Stahl- und Betonfestigkeit),
- größer der Zugbewehrungsgrad ist,
- kleiner der Randabstand der Bewehrung ist.

Bei üblichen Deckenplatten ohne Druckbewehrung beträgt  $\chi_k^I$  ca. 0,95.

Im Zustand II werden die zusätzlichen Kriechverformungen umso kleiner, je

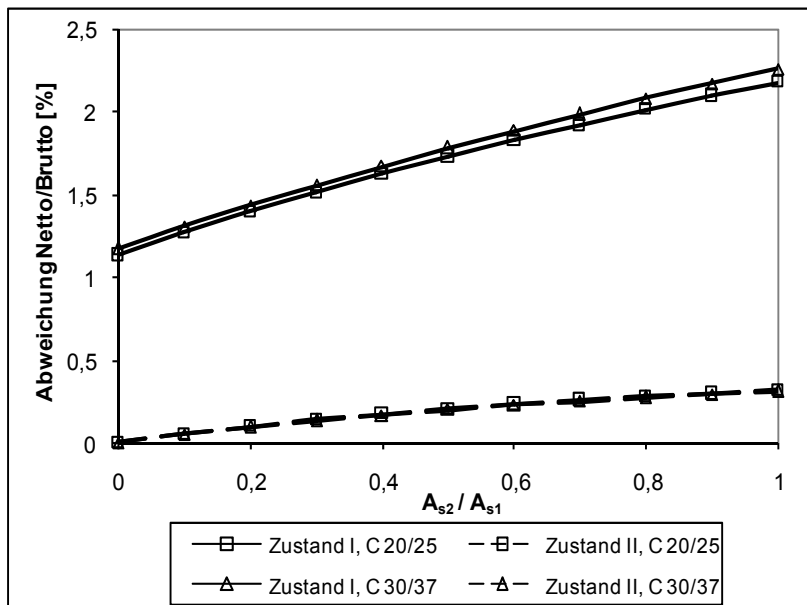
- größer der Anteil der Druckbewehrung an der Gesamtbewehrung ist (bei großem Randabstand der Druckbewehrung wird dieser Einfluss jedoch geringer und kann sogar zu einer Vergrößerung führen),
- kleiner der Zugbewehrungsgrad ist,
- kleiner die Differenz aus Stahl- und Betonfestigkeit ist.

#### 5.3.4 Einfluss von Nettoquerschnittswerten

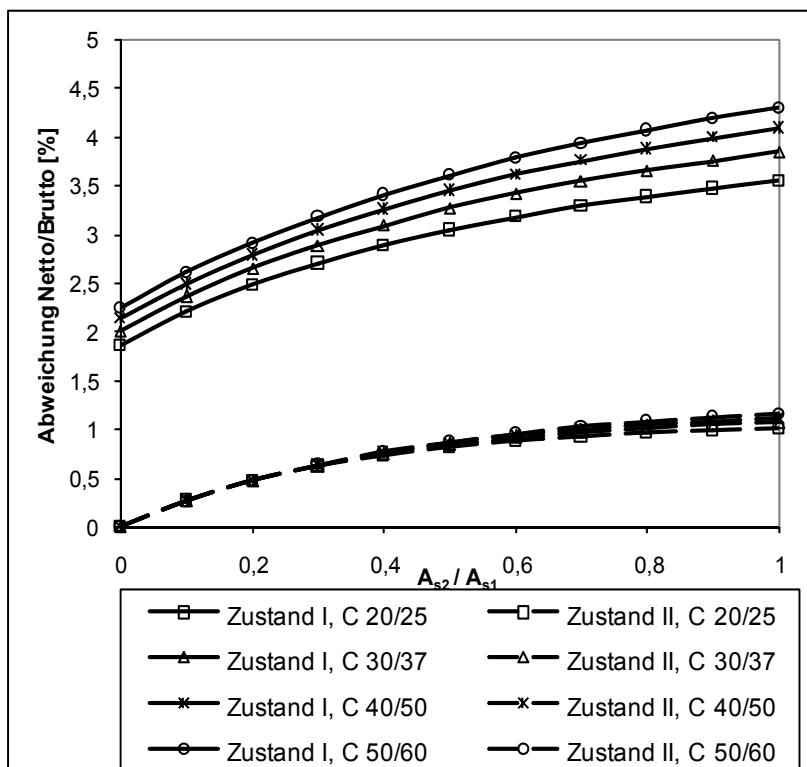
Üblicherweise wird die Krümmung mit den Bruttoquerschnittswerten durchgeführt. Man setzt den Beton also auch dort an, wo sich Bewehrung befindet, und überschätzt den Verformungswiderstand. Dieses hat im ungerissenen Zustand eine größere Auswirkung als im gerissenen Zustand, da dann der Beton in der Zugzone nicht mehr angesetzt wird. Da sich außerdem die Druckzone beim Ansatz von Nettoquerschnittswerten wieder etwas vergrößert, ist der Fehler bei der Durchbiegungsberechnung relativ gering.

Im Folgenden sind einige Vergleichsrechnungen dargestellt, der Unterschied der Querschnittskrümmung bei Brutto- und Nettoquerschnittswerten liegt dabei bei der untersuchten Platte ( $h/d = 24/21,5$  cm; Kriechzahl  $\varphi = 2,5$ ; s. Abb. 5.11) nur bei 2 % und bei den betrachteten Balken ( $h/b/d = 60/30/56$  cm; Kriechzahl  $\varphi = 2,5$ ; s. Abb. 5.12 und 5.13) unter 5%. Als Beanspruchung im Gebrauchszustand wurden 50 % des von den jeweiligen Querschnitten maximal aufnehmbaren Momentes angesetzt (näherungsweise Umrechnung der Belastung im Grenzzustand der Tragfähigkeit in die quasi-ständige Gebrauchslast).

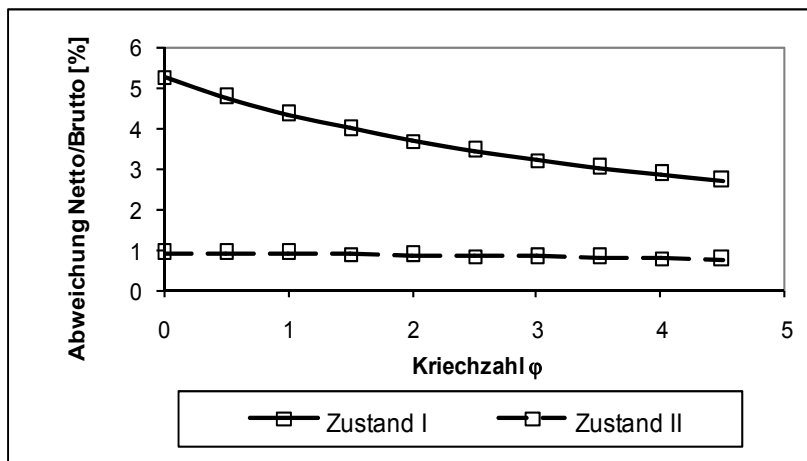
**Abb. 5.11:** Prozentuale Veränderung der Querschnittskrümmung inf. Kriechen in Abhängigkeit vom Verhältnis  $A_{s2}/A_{s1}$  bei einer Platte mit  $h = 24$  cm und  $\rho_{s1} = 0,5$  %



**Abb. 5.12:** Prozentuale Veränderung der Querschnittskrümmung inf. Kriechen in Abhängigkeit vom Verhältnis  $A_{s2}/A_{s1}$  für verschiedene Betonfestigkeitsklassen bei einem Balken mit  $h/b = 60/30$ ,  $\rho_{s1} = 1,5$  %



**Abb. 5.13:** Prozentuale Veränderung der Querschnittskrümmung infolge Kriechen in Abhängigkeit von der Kriechzahl bei einem Balken mit  $h/b = 60/30$ , C40/50,  $\rho_{s1} = 1,5$  %,  $\rho_{s2} = 0,75$  %



## 5.4 Mittragen des Betons zwischen den Rissen; mittlere Stahldehnung

Das Verformungsverhalten eines Stahlbetonteils unter Lastbeanspruchung hängt im Wesentlichen von Rissbildung (Zustand I – Zustand II) und von der Stahldehnung ab. Letztere ist im Riss und zwischen den Rissen unterschiedlich, es muss daher eine Näherung gefunden werden, um die mittlere Stahldehnung im gesamten Bauteil unter der Berücksichtigung der Tragwirkung des Betons zwischen den Rissen zu ermitteln.

Im Zustand I haben Stahl und Beton in einer Faser die gleiche Dehnung. Der erste Riss entsteht, wenn die vorhandene Zugkraft die aufnehmbare Zugkraft des Betons übersteigt (Übergang Zustand I in den Zustand II). Die freiwerdende Kraft muss von ausreichender Bewehrung aufgenommen werden und wird über die Einleitungslänge  $L_{es}$  wieder in den Beton eingeleitet. Steigt die Zugkraft weiter an, so entstehen weitere Risse. Ein abgeschlossenes Rissbild ist erreicht, wenn der Abstand zwischen zwei Rissen nicht mehr ausreicht, um über den Verbund eine Kraft in den Beton zu leiten, die erneut die Zugfestigkeit überschreitet. Eine weitere Laststeigerung führt also nicht zu neuen Rissen, sondern zu einer Verbreiterung der bereits vorhandenen.

Bei einem abgeschlossenen Rissbild entspricht damit der Rissabstand mindestens dem einfachen, höchstens aber dem doppelten Wert der Einleitungslänge  $L_{es}$ . Man muss zusätzlich unterscheiden, ob sich Risse bis zur Dehnungsnulllinie ausbreiten (Primärrisse) oder nur in dem Wirkungsbereich der Bewehrung verbleiben (Sekundärrisse) bzw. in Primärrisse münden. Ersteres ist bei dünnen Bauteilen der Fall, letzteres tritt bei dicken Bauteilen ab  $h > 50$  cm auf (s. a. Abb. 5.15).

Der Unterschied zwischen Einzelrissen und einem abgeschlossenen Rissbild ist in den nachfolgenden Abbildungen 5.14 und 5.15 für eine Biegebeanspruchung dargestellt. Bei Einzelrissbildung weisen Beton und Bewehrung außerhalb der Einleitungslänge  $L_{es}$  die gleiche Dehnung auf. Bei der abgeschlossenen Rissbildung ist die Betondehnung stets kleiner als die Stahldehnung.

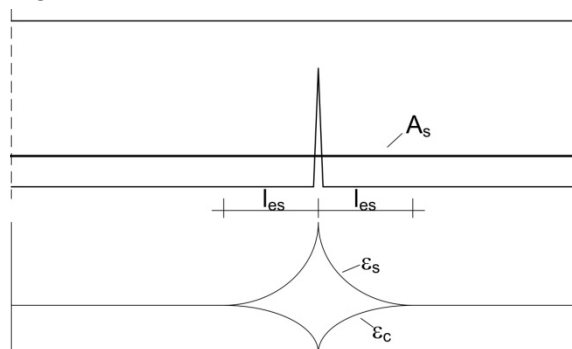


Abb. 5.14: Dehnungsverlauf von Stahl und Beton bei einem Einzelriss

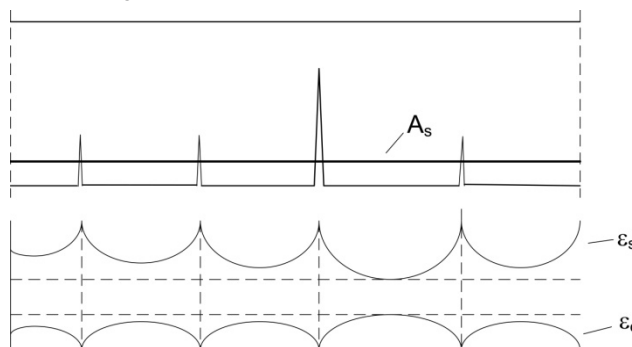


Abb. 5.15: Dehnungsverlauf von Stahl und Beton bei abgeschlossener Rissbildung

In Abb. 5.15 ist der Fall dargestellt, dass nur wenige Risse die Dehnungsnulllinie erreichen. Dieses Rissbild ist bei hohen Trägern ab etwa  $h = 50$  cm zu beobachten. In dem Fall ergibt

sich nur im Wirkungsbereich der Bewehrung ein gut verteiltes Rissbild, wie es beispielsweise bei einem Zugstab mit der Fläche  $A_{c,eff}$  unter zentrischer Last entsteht (s. Abb. 5.16).

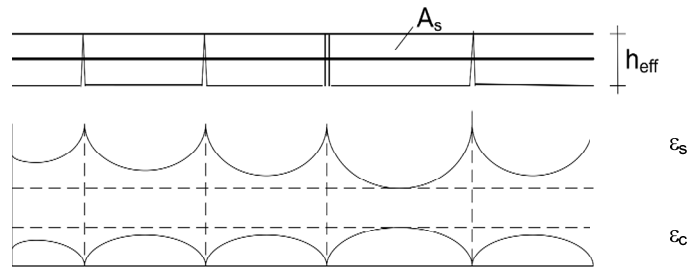


Abb. 5.16: Effektive Zugzone mit Rissbildung

Zu Ermittlung der Gesamtverformung wird die mittlere Stahldehnung  $\varepsilon_{sm}$  benötigt. Im Folgenden werden einige Ansätze vorgestellt.

#### 5.4.1 Allgemeines

Im Riss tritt die maximale Spannung  $\sigma_s$  auf, da hier der Stahl allein die Zugkräfte aufnehmen muss. Zwischen den Rissen kommt es aufgrund der mittragenden Wirkung des Betons zu einer Spannungsreduzierung um  $\Delta\sigma_s$ . Für einen linearen Spannungsverlauf ergäbe sich die mittlere Spannung zu:

$$\sigma_{sm} = \sigma_s - 0,5 \cdot \Delta\sigma_s \quad (5.72)$$

Bei einem parabelförmigen Spannungsverlauf wird  $\Delta\sigma_s$  mit einem Faktor  $\alpha_s$  korrigiert:

$$\sigma_{sm} = \sigma_s - \alpha_s \cdot \Delta\sigma_s$$

mit  $\alpha_s = \frac{\Delta\sigma_s - \Delta\sigma_{sm}}{\Delta\sigma_s}$  (s. Abb. 5.17)

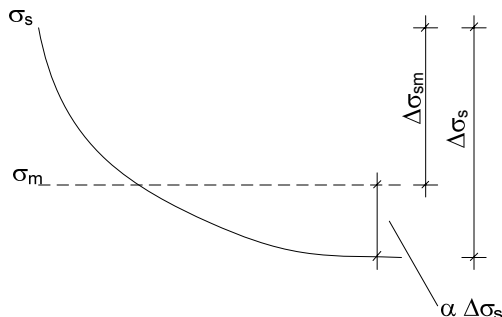


Abb. 5.17: Ermittlung des Mittelwertes der Stahldehnung

Mit einem geeigneten Völligkeitsbeiwert  $\alpha_s$  lassen sich auch die mittleren Stahldehnungen in folgender Form darstellen:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_s - \alpha_s \cdot \Delta\varepsilon_s \quad (5.73)$$

Der Völligkeitsbeiwert wird in Abhängigkeit von der Belastungsdauer und dem Rissabstand festgelegt. Im Vergleich zur Kurzzeitbelastung verschlechtert sich bei Langzeitbelastung der Verbund durch das Verbundkriechen. Nachfolgend wird dieser Effekt über einen konstanten Abminderungsfaktor berücksichtigt. Bei einem abgeschlossenen Rissbild beträgt der Abstand zwischen zwei benachbarten Rissen mindestens die einfache und maximal die doppelte Einleitungslänge. Während der maximale Abstand zur Bestimmung der Rissbreite relevant ist, ist bei der Verformungsberechnung ein mittlerer Rissabstand anzusetzen. In einigen der nachfolgend aufgeführten Modellen ist dies in der Festlegung des Völligkeitsbeiwertes implementiert.

### 5.4.2 Ansätze nach [König/Tue – 96] und [König/Tue – 08]

König geht von vier Phasen der Rissbildung aus. In der ersten Phase ist der Beton ungerissen, der Stahl beteiligt sich aufgrund der geringen Dehnungen nur zu einem kleinen Teil am Lastabtrag. Bei Bewehrungsgraden unter 2 % kann die Bewehrung i.d.R. vernachlässigt werden, bei höheren Graden sind ideale Querschnittswerte zu berücksichtigen. Die zweite Phase tritt mit dem Überschreiten der Betonzugfestigkeit ein und endet mit dem abgeschlossenen Rissbild. In der dritten Phase ist das endgültige Rissbild erreicht. Die Rissabstände sind in der Regel so gering, dass in der Biegelinie keine nennenswerten Knicke entstehen und man im Mittel vom Ebenbleiben des Querschnittes ausgehen kann. Die vierte Phase beginnt mit dem Fließen der Bewehrung und ist beim Grenzzustand der Tragfähigkeit von statisch unbestimmten Tragwerken von Bedeutung, nicht jedoch beim Nachweis der Verformung im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit.

Bei der Bestimmung der mittleren Stahldehnung setzt König einen parabelförmigen Spannungsverlauf zwischen zwei Rissen an (vgl. auch Abb. 5.18). Ausgehend von

$$\sigma_{sm} = \sigma_s - \alpha_s \cdot \Delta\sigma_s \quad \text{mit} \quad \alpha_s = \frac{\Delta\sigma_s - \Delta\sigma_{sm}}{\Delta\sigma_s}$$

wird der Faktor  $\alpha_s$  ermittelt über das Verbundgesetz

$$\tau_b(x) = C \cdot s^\alpha(x)$$

und die beiden Spannungssprünge

$$\Delta\sigma_s(x) = \frac{4}{d_s} \int_0^x \tau_b(x) dx \quad \text{und} \quad \Delta\sigma_{sm}(x) = \frac{1}{l_{es}} \int_0^{l_{es}} \Delta\sigma_s(x) dx$$

Als Beschreibung des Verbundverlaufes zwischen zwei Rissen erhält man für den Beiwert  $\alpha_s$ :

$$\alpha_s = \frac{1 + \lambda \cdot \alpha}{2 + \lambda \cdot \alpha} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \cdot \left( \frac{F_{cr}}{F_s} \right)^{1,5} + 1 \quad (5.74)$$

Nach [König/Tue – 96] bewegen sich die Werte für  $\alpha_s$  zwischen 0,57 und 0,65, so dass ein Mittelwert von 0,6 für eine ausreichend genaue Berechnung gerechtfertigt zu sein scheint. Dieser Wert ist in den Model Code 90 ([CEB/FIP – 91]) eingegangen.

Aufbauend auf diesen Beziehungen kann man die mittlere Stahldehnung berechnen, wenn der Wert des mittleren Dehnungsabfalls  $\Delta\varepsilon_s$  (analog zu  $\Delta\sigma_s$ ) bekannt ist. Zu Beginn der Rissbildung nimmt er die Größe der Differenz der Stahldehnungen im Zustand I und II an. Somit ist die mittlere Stahldehnung bei Einzelrissen:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_s - \alpha_s \cdot (\varepsilon_s - \varepsilon_s^I) \quad (5.75)$$

Da bei fortschreitender Rissbildung Stahl und Beton in keinem Punkt dieselbe Dehnung erreichen, wird die Dehnungsdifferenz unter Berücksichtigung der effektiven Betonzugzone  $A_{c,eff}$  (enthalten im effektiven Bewehrungsgrad  $\rho_{s,eff}$ ) wie folgt ausgedrückt:

$$\Delta\varepsilon_s = f_{ctm} / (\rho_{s,eff} \cdot E_s) \quad (5.76)$$

Somit beträgt die mittlere Stahldehnung

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_s - \alpha_s \cdot f_{ctm} / (\rho_{s,eff} \cdot E_s) \quad (5.77)$$

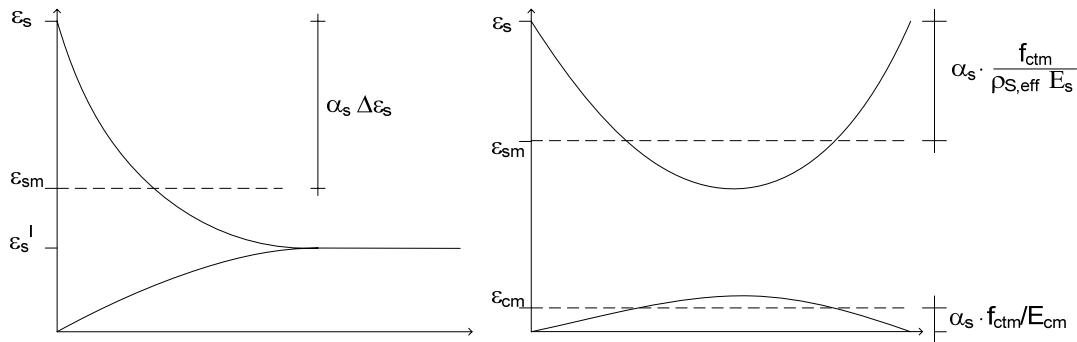


Abb. 5.18: Mittlere Stahldehnung nach [König/Tue - 96]

Die Dehnungsdifferenz  $\Delta\epsilon_s$  kann auch über die mittlere Verbundkraft  $T_{um}$  bestimmt werden, die zwischen zwei Rissen im Beton wieder aufgebaut wird und im Riss vom Stahl alleine getragen werden muss:

$$\Delta\epsilon_s = \frac{T_{um}}{E_s \cdot A_s} \quad (5.78)$$

Nach [Tue – 93] kann diese Verbundkraft wie folgt bestimmt werden:

$$T_{um} = A_{c,eff} \cdot f_{ct}(t) \cdot \left[ r \cdot \frac{k - 0,33 \cdot (3r - r^2)}{k - 0,67} \right]^{0,3} \cdot r \quad (5.79)$$

mit:

$$r = 1 - 0,5 \cdot \sqrt{1 - (F_{cr}/F_s)^t} \quad \text{Faktor zur Berücksichtigung des mittleren Rissabstandes}$$

$$t = 2,5 / \rho_s \quad \text{Faktor zur Berücksichtigung des Bewehrungsgrades (\rho in \%)}$$

$$k = F_s / F_{cr} \quad \text{Verhältnis der aktuellen Last zur Risslast}$$

Unter Berücksichtigung der Verschlechterung des Verbundes unter wiederholter Last mit

$$r_n = \log(10L_w) + L_w / 20000 \quad (5.80)$$

wird die Verbundkraft bei wiederholter Belastung zu

$$T_{um,Lw} = T_{um} \cdot \left( \frac{F_s}{F_{s,max}} \right) \cdot \frac{1}{(1 + r_n)^{0,07}} \quad (5.81)$$

Als Völligkeitsbeiwert  $\alpha_s$  wird 0,6 angenommen. Somit ist die mittlere Stahldehnung:

$$\epsilon_{sm} = \epsilon_s - 0,6 \cdot \frac{T_{um}}{E_s \cdot A_s} \quad (5.82)$$

### 5.4.3 Model Code 90 ([CEB/FIP – 91])

Im Model Code 90 wird zwischen ungerissenem Zustand, Erstrissbildung und abgeschlossener Rissbildung unterschieden. Mithilfe der Spannungen  $\sigma_s^II$  (Spannung im Zustand II unter aktueller Belastung),  $\sigma_{sr}^I$  (Stahlspannung unmittelbar vor Rissbildung) und  $\sigma_{sr}^II$  (Stahlspannung im gerissenen Zustand unter Risschnittgrößen) sowie den Dehnungen  $\epsilon_{sr}^I$  und  $\epsilon_{sr}^II$  kann die mittlere Stahldehnung an einem Zugstab wie folgt ermittelt werden:

- Bereich 1: Ungerissen ( $0 \leq \sigma_s \leq \sigma_{sr}^I$ )

$$\epsilon_{sm} = \epsilon_s^I \quad (5.83a)$$

- Bereich 2: Erstriss ( $\sigma_{sr} \leq \sigma_s \leq 1,3 \sigma_{sr}$ )

$$\epsilon_{sm} = \epsilon_s^II - \frac{\beta_t \cdot (\sigma_s^II - \sigma_{sr}^II) + 1,3 \cdot \sigma_{sr}^II - \sigma_s^II}{0,3 \cdot \sigma_{sr}^II} \cdot (\epsilon_{sr}^II - \epsilon_{sr}^I) \quad (5.83b)$$

- Bereich 3: Abgeschlossene Rissbildung ( $1,3 \sigma_{sr} \leq \sigma_s \leq f_{yk}$ )

$$\epsilon_{sm} = \epsilon_s^II - \beta_t \cdot (\epsilon_{sr}^II - \epsilon_{sr}^I) \quad (5.83c)$$

Dabei hat  $\beta_t$  die Funktion des aus dem vorigen Abschnitt bekannten Völligkeitsbeiwerts  $\alpha_s$ , mögliche Werte für  $\beta_t$  sind im nächsten Abschnitt beschrieben.

Alternativ kann die mittlere Stahldehnung auch über die Stahldehnung im Zustand II, die mit dem Verteilungswert  $\zeta$  korrigiert wird, ausgedrückt werden:

$$\varepsilon_{sm} = \zeta \cdot \varepsilon_s'' \quad \text{mit} \quad (5.84a)$$

$$\zeta_s = 1 - \frac{\beta_t \cdot (\sigma_s'' - \sigma_{sr}'') + 1,3 \cdot \sigma_{sr}'' - \sigma_s''}{0,3 \cdot \sigma_{sr}'' \cdot \varepsilon_s''} \cdot (\varepsilon_{sr}'' - \varepsilon_{sr}') \leq 1 \quad (\text{Erstriss}) \quad (5.84b)$$

$$\zeta_s = 1 - \beta_t \cdot \frac{(\varepsilon_{sr}'' - \varepsilon_{sr}')}{\varepsilon_s''} \leq 1 \quad (\text{abg. Rissbildung}) \quad (5.84c)$$

#### 5.4.4 Ansatz in [DIN 1045-1 – 08] und [DAfStb-H525 – 03]

[DIN 1045-1 – 08] nennt kein Verfahren zur rechnerischen Ermittlung von Verformungen. Allerdings wird die Berechnung der mittleren Stahldehnung im Zusammenhang mit der Rissbreitenbegrenzung aufgeführt. Mit DIN 1045-1, Gl. (136) ergibt sich:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_s - 0,4 \cdot f_{ctm} / (\rho_{s,eff} \cdot E_s) \quad (5.85)$$

Der Völligkeitsbeiwert wird hier zu  $\alpha_s = 0,4$  gesetzt. Dieser Unterschied beruht darauf, dass  $\alpha_s = 0,6$  für eine kurzzeitige Belastung gilt. Berücksichtigt man bei der Verbund-Schlupf-Beziehung das Verbundkriechen, so wird die mittragende Wirkung des Betons über einen verminderten Völligkeitsbeiwert auf  $\alpha_s = 0,7 \cdot 0,6 \approx 0,4$  reduziert und die mittlere Stahldehnung somit erhöht.

In [DAfStb-H525 – 03] werden zusätzlich Hilfsmittel zur Berechnung einer auf ein Bauteil bezogene Spannungs-Dehnungsbeziehung gegeben. Abweichend von der Rissbreitenberechnung, die unter Annahme des ungünstigen maximalen Rissabstandes erfolgt, wird für ein Bauteil ein Durchschnittswert mit einem mittleren Abstand von  $s_m = 2/3 \cdot s_{max}$  angenommen. Der Völligkeitswert beträgt dann  $\alpha_s = 2/3 \cdot 0,6 \approx 0,4$ . Wird zusätzlich das Verbundkriechen mit einem Faktor  $2/3$  berücksichtigt, so erhält man  $\alpha_s \approx 0,25$  für eine lang anhaltende oder sich stets wiederholende Last. (Hinweis:  $\alpha_s$  wird in [DIN 1045-1 – 08] und in [DAfStb-H525 – 03] analog zum Model Code 90 mit  $\beta_t$  bezeichnet).

Der Dehnungsunterschied wird allgemein mit  $\Delta\varepsilon_s = (\varepsilon_{sr}'' - \varepsilon_{sr}')$  angegeben. Neben der im Model Code 90 aufgeführten Einteilung in ungerissen, Erstriss und abgeschlossenes Rissbild (siehe Abb. 5.19 links) wird auch eine vereinfachte Möglichkeit angegeben, bei der nur in einen ungerissenen Bereich und den Bereich der abgeschlossenen Rissbildung unterschieden wird (Abb. 5.19 rechts):

- Bereich 1: Ungerissen ( $0 \leq \sigma_s \leq \beta_t \cdot \sigma_{sr}'$ )

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_s' \quad (5.86)$$

- Bereich 2: Gerissen ( $\beta_t \cdot \sigma_{sr}' \leq \sigma_s \leq f_{yk}$ )

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_s'' - \beta_t \cdot (\varepsilon_{sr}'' - \varepsilon_{sr}') \quad (5.87)$$

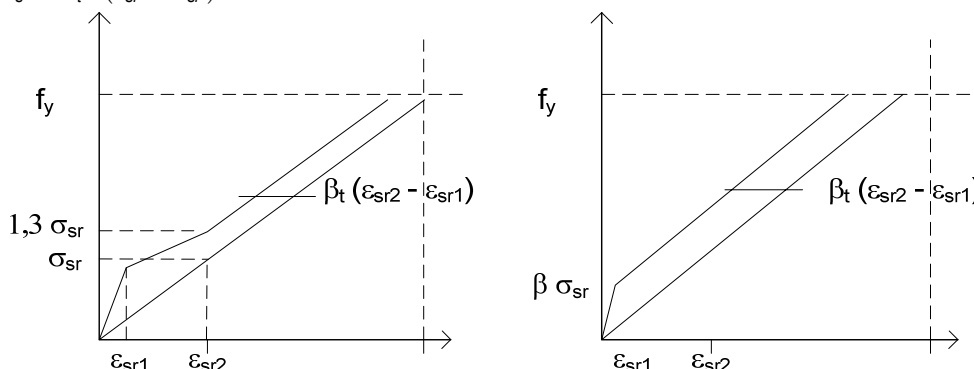


Abb. 5.19: Spannungs-Dehnungsbeziehung eines Stahlbetonbauteils unter Berücksichtigung der Rissbildung

### 5.4.5 Verfahren nach [EN 1992-1-1 – 04]

Prinzipiell geht [EN 1992-1-1 – 04] von denselben Voraussetzungen wie Model Code 90 oder [DIN 1045-1 – 08] aus (Bezeichnung für  $\alpha_s$  bzw.  $\beta_t$  hier  $k_t$ ).

Zur Berechnung der Verformungen wird ein lastabhängiger Völligkeitsbeiwert in Anlehnung an [Rao – 66] gewählt, wonach der Völligkeitsbeiwert bei zunehmender Stahlspannung hyperbolisch abnimmt:

$$\beta_t = \beta \cdot \frac{\sigma_{sr}^{II}}{\sigma_s^{II}} \quad (5.88)$$

mit  $\beta = 1,0$  bei kurzzeitigen Belastungen und  $\beta = 0,5$  bei lang andauernden oder sich wiederholenden Belastungen.

Der Dehnungsunterschied  $\Delta \varepsilon_s$  wird bei der Rissbreitenbegrenzung analog zur [DIN 1045-1 – 08] angegeben zu:

$$\Delta \varepsilon_s = (\varepsilon_{sr}^{II} - \varepsilon_{sr}^I) = f_{ctm} / (\rho_{s,eff} \cdot E_s) \quad (5.89)$$

Gleichung (5.89) gilt unter Rissschnittgrößen. Zur Verformungsberechnung muss die Differenz der unter der maßgebenden Lastbeanspruchung auftretenden Dehnungen im Zustand I und im „reinen“ Zustand II (also direkt im Riss) ermittelt werden. Diese lassen sich, auf den oben angegebenen Dehnungsunterschied  $\Delta \varepsilon_s$  bezogen, wie folgt berechnen:

$$\varepsilon_{sr}^I = \varepsilon_s^I \cdot \frac{\sigma_{sr}^{II}}{\sigma_s^{II}} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{sr}^{II} = \varepsilon_s^{II} \cdot \frac{\sigma_{sr}^{II}}{\sigma_s^{II}} \quad (5.90)$$

Somit beträgt die mittlere Stahldehnung

$$\begin{aligned} \varepsilon_{sm} &= \varepsilon_s^{II} - \beta_t \cdot (\varepsilon_{sr}^{II} - \varepsilon_{sr}^I) \\ &= \varepsilon_s^{II} - \left( \beta \cdot \frac{\sigma_{sr}^{II}}{\sigma_s^{II}} \right) \cdot \left( \varepsilon_s^{II} \cdot \frac{\sigma_{sr}^{II}}{\sigma_s^{II}} - \varepsilon_s^I \cdot \frac{\sigma_{sr}^{II}}{\sigma_s^{II}} \right) = \varepsilon_s^{II} - \beta \cdot \left( \frac{\sigma_{sr}^{II}}{\sigma_s^{II}} \right)^2 \cdot (\varepsilon_s^{II} - \varepsilon_s^I) \end{aligned} \quad (5.91)$$

### 5.4.6 Ermittlung nach [Krüger/Mertzsch – 06]

Ausgehend von den Beziehungen aus [EN 1992-1-1 – 04] (dort: Gleichung (7.18) – (7.20)) bzw. den Untersuchungen von [Rao – 66] liefern Krüger/Mertzsch einen weiteren Ansatz zur Bestimmung des Völligkeitsbeiwerts, in dem sie den bisher konstanten Beiwert für  $\beta$  von 0,5 für Dauerbelastungen in einen von der Spannung  $\sigma$  abhängigen Beiwert  $\beta_\sigma$  überführen.

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_s^{II} - \beta_t \cdot (\varepsilon_{sr}^{II} - \varepsilon_{sr}^I)$$

$$\text{mit} \quad \beta_t = \beta_\sigma \cdot \frac{\sigma_{sr}^{II}}{\sigma_s^{II}} \quad \text{und}$$

$$\beta_\sigma = 1 + \left( \frac{\sigma_s^{II}}{\sigma_{sr}^{II}} - 1 \right) \cdot \left( 1 - \frac{\sigma_s^{II}}{f_{yd}} \right) \geq 1,0$$

Daraus erhält man:

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s^{II}}{E_s} \cdot \left[ 1 - \bar{\beta} \cdot \left( \frac{\sigma_{sr}^{II}}{\sigma_s^{II}} \right)^2 \right] \quad (5.92)$$

mit

$$\bar{\beta} = \beta_\sigma \cdot \left( 1 - \frac{\sigma_{sr}^I}{\sigma_{sr}^{II}} \right)$$

Für überwiegend auf Biegung beanspruchte Bauteile nimmt  $\bar{\beta}$  folgende Werte an:

$$\bar{\beta} = \beta_\sigma \cdot (1 - 3,84 \cdot \alpha_E \cdot \rho_s) \geq 0,45 \quad \text{bei kurzzeitiger Beanspruchung} \quad (5.93a)$$

$$\bar{\beta} = \beta_\sigma \cdot (1 - 3,84 \cdot \alpha_{eff} \cdot \rho_s) \geq 0,45 \quad \text{bei Dauerlast} \quad (5.93b)$$



### 5.4.7 Ansatz nach [Noakowski – 88]

[Noakowski – 88] ermittelt aus seinem Verbundgesetz eine über die Einleitungslänge  $L_e$  verschmierte mittlere Stahldehnung.

$$\varepsilon_{sm} \cdot L_e = \frac{U_s}{E_s \cdot A_s} \cdot \iint \tau_b(x) dx dx \quad (5.94)$$

Dadurch erhält man eine von der Stahldehnung im Riss und dem aus dem Verbundgesetz bekannten Exponenten  $N$  abhängige Gleichung:

$$\varepsilon_{sm} = \frac{1-N}{2} \cdot \varepsilon_s'' \quad (5.95)$$

Bei gutem Verbund schlägt *Noakowski* vor, den Beiwert  $N$  zu 0,12 zu setzen (vgl. Gl. (4.35)). Damit beträgt die mittlere Dehnung  $\varepsilon_{sm} = 0,44 \cdot \varepsilon_s''$  bzw. das Mitwirkungsmaß

$$\Delta \varepsilon_s = \varepsilon_s'' - \varepsilon_{sm} = 0,56 \cdot \varepsilon_s'' \quad (5.96)$$

Bei abgeschlossener Rissbildung reduziert sich nach *Noakowski* die Mitwirkung, da die Risse nicht alle im Abstand der zweifachen Einleitungslänge voneinander entfernt liegen und sich ihre Wirkungsbereiche daher überschneiden können. Es gilt für die abgeschlossene Rissbildung:

$$\Delta \varepsilon_s = 0,75 \cdot 0,56 \cdot \varepsilon_s'' = 0,42 \cdot \varepsilon_s'' \quad (5.97)$$

$$\varepsilon_{sm} = 0,58 \cdot \varepsilon_s'' \quad (5.98)$$

### 5.4.8 Vergleich und Anmerkung

Bei den vorgestellten Modellen zur Bestimmung der mittleren Stahlspannungen muss beachtet werden, unter welcher Zielsetzung die Beziehung erstellt wurden. Untersuchungen für eine Rissbreitenberechnung eignen sich prinzipiell auch zur Bestimmung der Verformung, da Rissbreiten ebenfalls im Gebrauchszustand berechnet werden. Allerdings wird der Rissabstand so gewählt, dass – ungünstig – die Risse eine maximale Breite erreichen, während bei der Verformungsberechnung ein gemittelttes Bauteilverhalten mit einem mittleren Rissabstand benötigt wird.

Für die Bestimmung der mittleren Stahldehnung gibt es verschiedene Ansätze. Die meisten Untersuchungen berücksichtigen die Mitwirkung des Betons zwischen zwei Rissen, indem von der Stahldehnung im „nackten“ Zustand II eine aus der Zugversteifung resultierende Dehnung abgezogen wird. Letztere wird aus dem Produkt der Differenz der Dehnungen in Zustand I und II unter den zum Riss führenden Schnittgrößen und eines Völligkeitsbeiwertes bestimmt. In anderen Ansätzen wird die Stahldehnung im reinen Zustand II direkt über einen Mitwirkungsfaktor abgemindert (s. bspw. [Noakowski – 88]).

Die Abweichungen der verschiedenen Methoden untereinander liegen in einem überschaubaren Rahmen. Exemplarisch hierfür sind die in Abbildung 5.20 dargestellten Spannungs-Dehnungsbeziehungen, die für einen mit einem einzelnen Stab ( $d_s = 16$  mm) mittig bewehrten Querschnitt mit den Maßen 8 x 8 cm unter zentrischem Zug ermittelt wurden. Die Betonfestigkeit entspricht einem C 30/37. Für DIN 1045-1 existieren zwei Spannungs-Dehnungsbeziehungen. Beide werden in Abb. 5.20 berücksichtigt: „DIN 1045-1 A“ stellt die bilinearen Beziehungen nach Gleichung (5.86) dar, „DIN 1045-1 B“ den trilinearen Verlauf gemäß Gleichung (5.83).

Eine Zusammenstellung der unterschiedlichen Ansätze in einheitlicher Schreibweise kann Abschnitt 7.3 (Tafel 7.2) entnommen werden. Aus Tafel 7.2 wird auch deutlich, dass der Ansatz in [EN 1992-1-1 – 04], über einen Verteilungsbeiwert  $\zeta$  direkt eine mittlere Verformungsgröße aus den entsprechenden Größen in Zustand I und II zu bestimmen, aus den oben dargestellten Zusammenhängen abgeleitet werden kann.

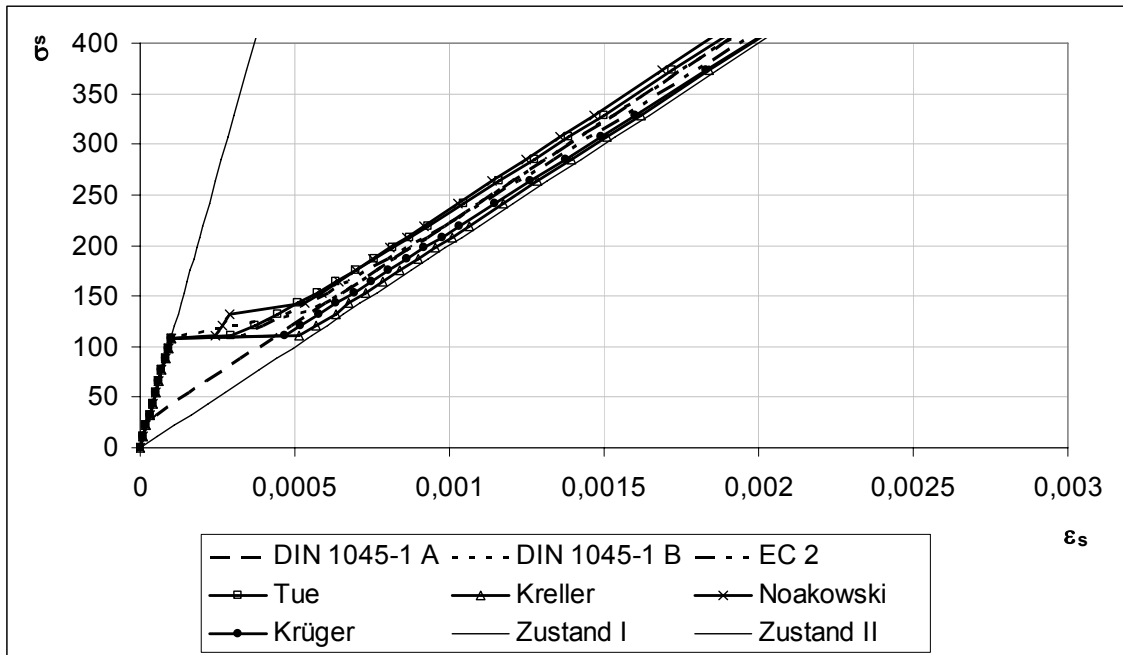


Abb. 5.20: Spannungs-Dehnungsbeziehungen ausgewählter Ansätze

## 5.5 Gesamtkrümmungen aus Schwind-, Kriech- und elastischen Dehnungen

### 5.5.1 Zustand I

Die Einflüsse aus Schwinden und Kriechen (s. Abschnitte 5.2 und 5.3) sind zu überlagern, das Gleichgewicht der inneren Kräfte ist zu beachten. Die zugehörigen Berechnungsansätze werden zunächst zusammenfassend separat dargestellt.

#### Elastisch

Aus den elastischen Dehnungen können vier innere Kräfte bestimmt werden: die Stahlkräfte  $F_{s1}$  und  $F_{s2}$  der Zug- und Druckbewehrung sowie die Betonkräfte  $F_{c1,el}$  und  $F_{c2,el}$  der Zug- und Druckzone. Im Gebrauchszustand wird dabei näherungsweise von einer dreieckförmigen Spannungsverteilung ausgegangen.

$$F_{s1,el} = \varepsilon_{s1,el} \cdot E_s \cdot A_{s1} \quad (5.99a)$$

$$F_{s2,el} = \varepsilon_{s2,el} \cdot E_s \cdot A_{s2} \quad (5.99b)$$

$$F_{c1,el} = 0,5 \cdot \varepsilon_{cu,el} \cdot E_{cm} \cdot b \cdot (h - x_{el}) \quad (5.99c)$$

$$F_{c2,el} = 0,5 \cdot \varepsilon_{co,el} \cdot E_{cm} \cdot b \cdot x_{el} \quad (5.99d)$$

#### Kriechen

Die Kriechdehnungen eines unbewehrten Betons erzeugen keine inneren Spannungen. Die Gesamtdehnung  $\varepsilon_c$  kann in den spannungserzeugenden elastischen Anteil  $\varepsilon_{c,el}$  und den spannungsfreien Kriechanteil  $\varepsilon_{c,c}$  zerlegt werden. Es gilt

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{c,el} + \varepsilon_{c,c} = \varepsilon_{c,el} + \rho \cdot \varphi \cdot \varepsilon_{c,el}$$

In einem bewehrten Betonquerschnitt hingegen kommt es zu Spannungsumlagerungen. Dadurch entstehen in der Bewehrung zusätzliche Dehnungen. Sie lassen sich aus der Differenz der unter Abschnitt 5.3 vorgestellten Gesamtdehnung und der elastischen Dehnung bestimmen. Die Stahlkräfte sind:

$$F_{s1,c} = \varepsilon_{s1,c} \cdot E_s \cdot A_{s1} \quad (5.100a)$$

$$F_{s2,c} = \varepsilon_{s2,c} \cdot E_s \cdot A_{s2} \quad (5.100b)$$

Zur Bestimmung der spannungserzeugenden Dehnung im Beton wird von folgender Überlegung ausgegangen:

- Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird die Belastung auf den bewehrten Querschnitt aufgebracht. Es stellt sich die elastische Dehnungs- und Spannungsverteilung ein.
- Die freie Kriechdehnung entsteht, wenn die elastischen Betonspannungen auf den unbewehrten Betonquerschnitt wirken. Zum Zeitpunkt des abgeschlossenen Kriechvorganges ist die Dehnung einer beliebigen Betonfaser gegeben durch

$$\varepsilon_{ci} = \varepsilon_{ci,el} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \quad (5.101)$$

- Die tatsächliche Betondehnung wird gemäß Abschnitt 5.3 berechnet. Die Dehnung, die aus Spannungsumlagerungen zwischen Beton und Bewehrung entsteht, beträgt somit

$$\varepsilon_{ci,um} = -(\varepsilon_{ci,el} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) - \varepsilon_{ci,el+c}) \quad (5.102)$$

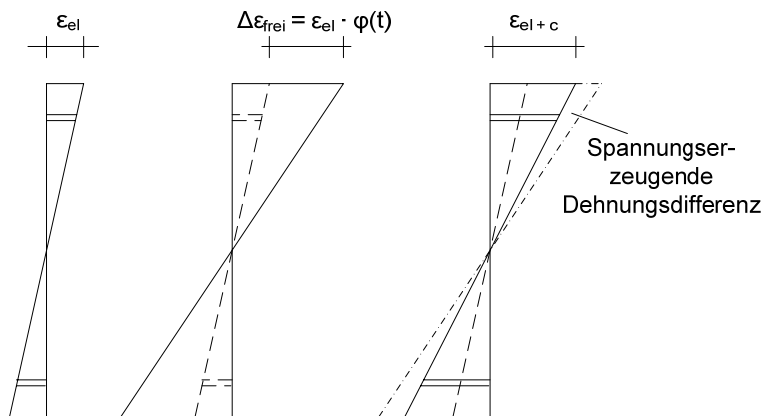


Abb. 5.21: Dehnungsverlauf und spannungserzeugende Dehnung

Aus dieser Dehnung kann nun die innere Kraft des Betons wie folgt bestimmt werden:

$$F_{c,c} = \frac{(\varepsilon_{co,um} + \varepsilon_{cu,um})}{2} \cdot \frac{E_{cm} \cdot A_{cm}}{(1 + \rho \cdot \varphi)} \quad (5.103)$$

### Schwinden

Die Schwinddehnungen werden gemäß Abschnitt 5.2 berechnet. Die Stahlkräfte lassen sich aus der Dehnung, dem Elastizitätsmodul und der Bewehrungsfläche bestimmen:

$$F_{s1,s} = \varepsilon_{s1,s} \cdot E_s \cdot A_{s1} \quad (5.104a)$$

$$F_{s2,s} = \varepsilon_{s2,s} \cdot E_s \cdot A_{s2} \quad (5.104b)$$

Das Schwinden eines unbewehrten Betonquerschnittes erfolgt spannungsfrei. Wird es durch die Bewehrung behindert, so entstehen Zwangskräfte. Sie können aus der Differenz des freien Schwindens ( $\varepsilon_{cs}$ ) und der tatsächlichen Betondehnung bestimmt werden:

$$F_{c,s} = \left( |\varepsilon_{cs}| - \frac{|\varepsilon_{cu,s}| + |\varepsilon_{co,s}|}{2} \right) \cdot \frac{E_{cm} \cdot A_c}{(1 + \rho \cdot \varphi)} \quad (5.105)$$

Es ist zu beachten, dass die Betondehnung negativ ist (Stauchung bzw. Verkürzung), die Spannungen jedoch positiv (Zugspannung).

### Beispiele

Nachfolgend werden zur Erläuterung in zwei Beispielen (Platte und Balken) die jeweiligen Dehnungen, Spannungen und Kräfte dargestellt. Als Momentenbelastung werden für die Platte  $M = 23,3$  kNm/m und für den Balken  $M = 170$  kNm angenommen. Es wird nur der Zustand I betrachtet und eine Rissbildung wird nicht berücksichtigt.

**Deckenplatte:**  $h/d = 24/21,5$  cm; Beton C30/37; Kriechzahl  $\varphi = 2,5$ ; Schwindmaß  $\varepsilon = -0,5 \text{ ‰}$ ,  
 $a_{s1} = 5,13 \text{ cm}^2/\text{m}$ ;  $a_{s2} = 0 \text{ cm}^2/\text{m}$  (Fall a) bzw.  $a_{s2} = 3,77 \text{ cm}^2/\text{m}$  (Fall b)

Fall a): Gesamtkrümmung  $\kappa = 0,002378$

Fall b): Gesamtkrümmung  $\kappa = 0,001962$

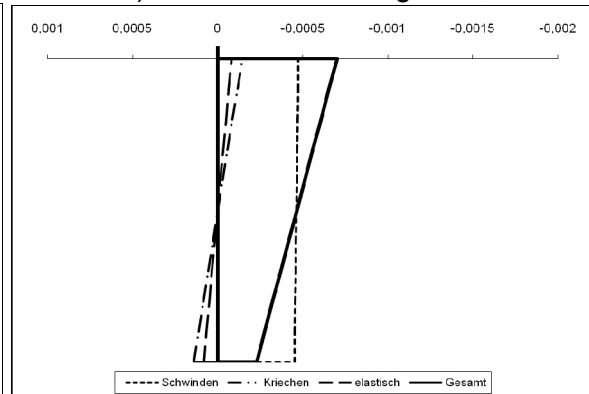
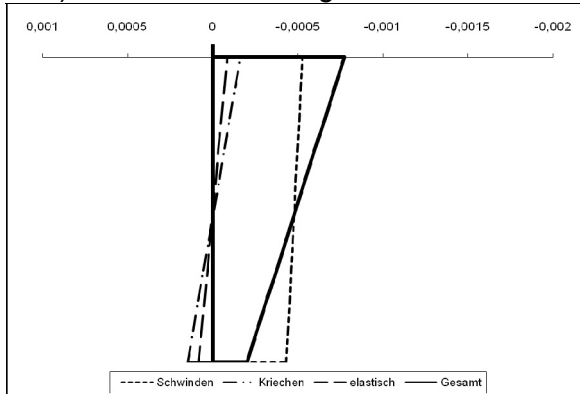


Abb. 5.22a: Deckenplatte, Dehnungen in [‰]

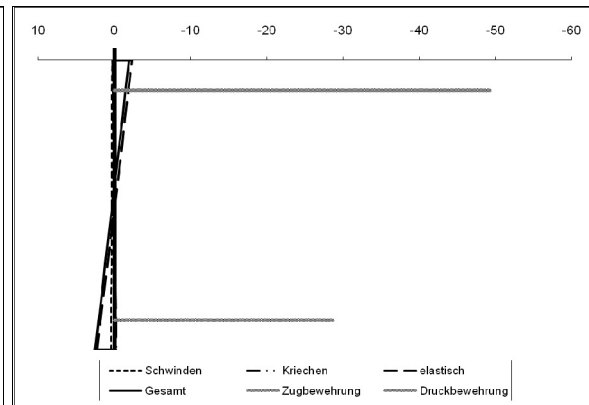
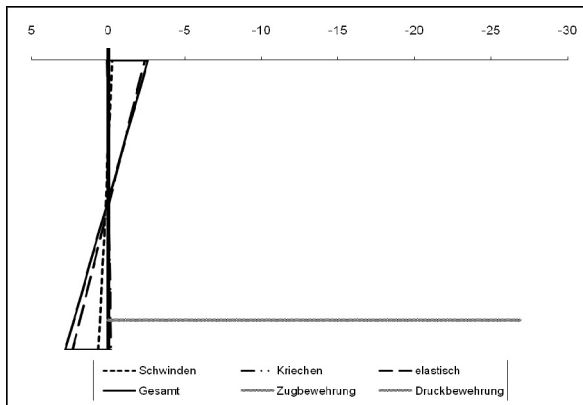


Abb. 5.22b: Deckenplatte, Spannungsverläufe in [N/mm<sup>2</sup>] (s. a. Abb. 5.22c)

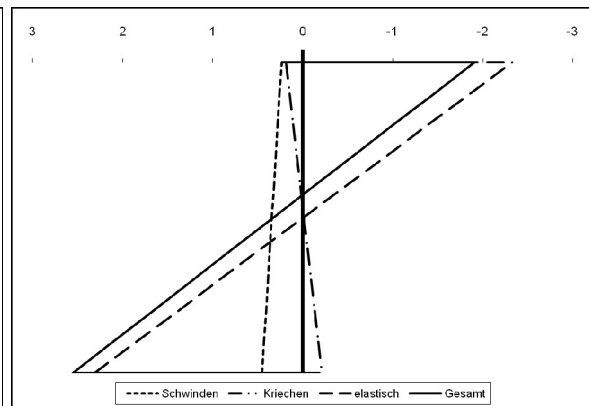
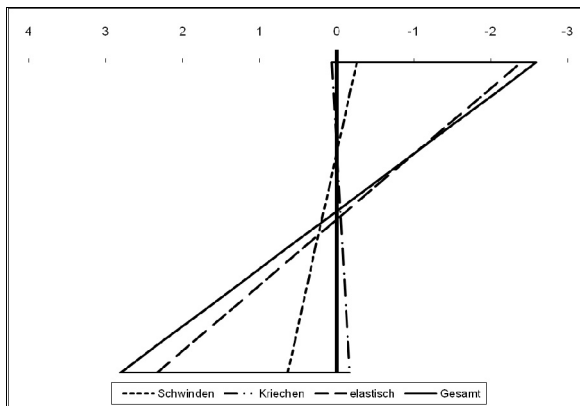


Abb. 5.22c: Deckenplatte, Betonspannungen in [N/mm<sup>2</sup>]

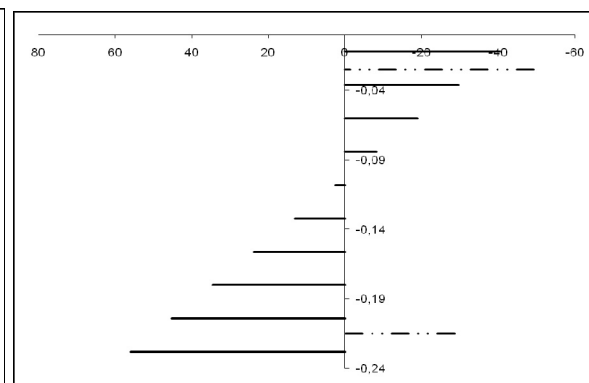
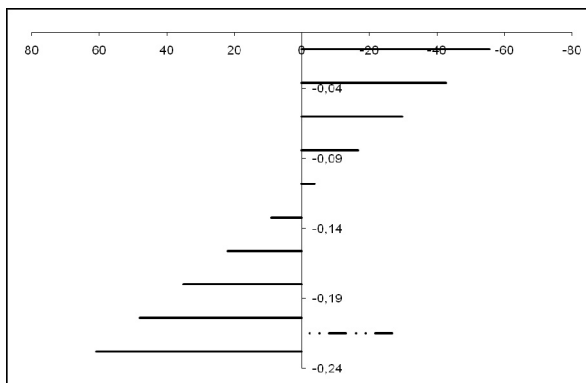


Abb. 5.22d: Deckenplatte, Kräfte im Schwerpunkt von einzelnen Lamellen ( $h/10$ ) und der Bewehrung

Im Zustand I sind die Dehnungen aus der Momentenbelastung relativ gering, die Bewehrung wird unter Gebrauchslast kaum aktiviert. Die elastische Dehnung in Höhe der Bewehrung beträgt 0,065 ‰, die zugehörige Stahlspannung nur 13 N/mm<sup>2</sup>; sie steigt durch Kriechumlagerungen auf 36 N/mm<sup>2</sup> an. Der Schwindvorgang wird durch die Bewehrung behindert, es entstehen Druckspannungen in der Bewehrung. Die freie Schwinddehnung von -0,5 ‰ wird auf -0,44 ‰ in Höhe der Bewehrung reduziert. Dadurch erhält der Stahl eine Druckspannung von -88,5 N/mm<sup>2</sup>, sodass die Gesamtspannung zu -52,5 N/mm<sup>2</sup> aufaddiert werden kann. Somit erhält die Bewehrung unter diesen Bedingungen (Zustand I) Druckspannungen. Die Zugspannung im Beton liegt mit 2,8 N/mm<sup>2</sup> relativ nah an der maximal aufnehmbaren Spannung  $f_{ctm}$ . Sobald der Querschnitt in den Zustand II übergeht, wird die Bewehrung über die nun auftretenden größeren Dehnungen so aktiviert, dass der Spannungsanteil aus der äußeren Belastung deutlich größer als derjenige aus den Schwind- und Kriechvorgängen wird (die Gesamtspannung in der Bewehrung beträgt dann 228 N/mm<sup>2</sup> (Zugspannung)).

**Balken:**  $h/d/b = 60/56/30$  cm; Beton C30/37; Kriechzahl  $\varphi = 2,5$ ; Schwindmaß  $\varepsilon = -0,5$  ‰,  $A_{s1} = 16$  cm<sup>2</sup>;  $A_{s2} = 0$  cm<sup>2</sup> (Fall a) bzw.  $A_{s2} = 16$  cm<sup>2</sup> (Fall b)

Fall a): Gesamtkrümmung  $\kappa = 0,002985$

Fall b): Gesamtkrümmung  $\kappa = 0,001754$

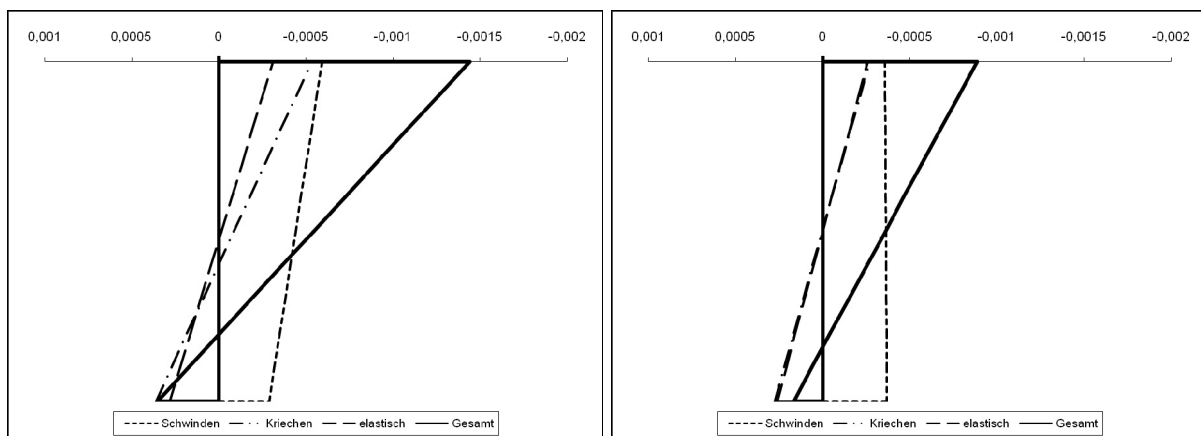


Abb. 5.23a: Balken, Dehnungen

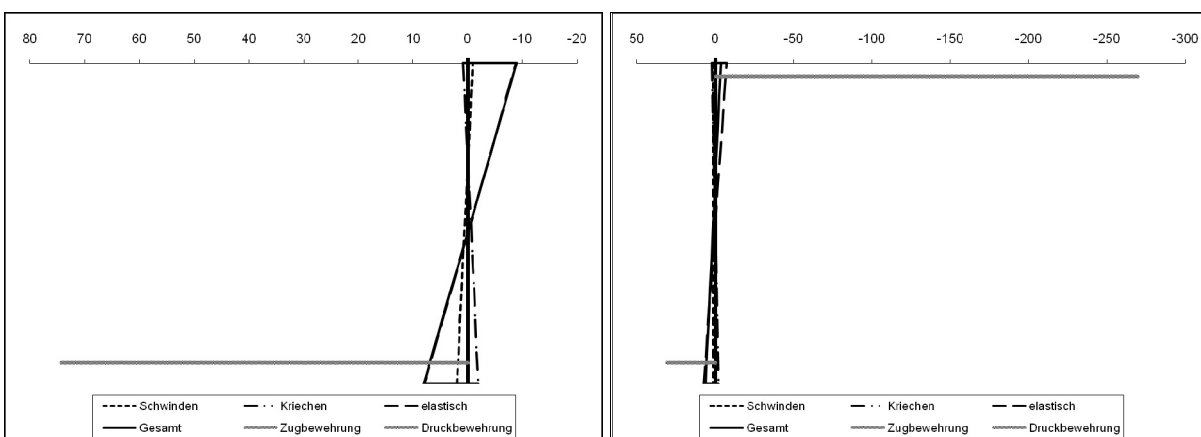


Abb. 5.23b: Balken, Spannungsverläufe (s. a. Abb. 5.23c)

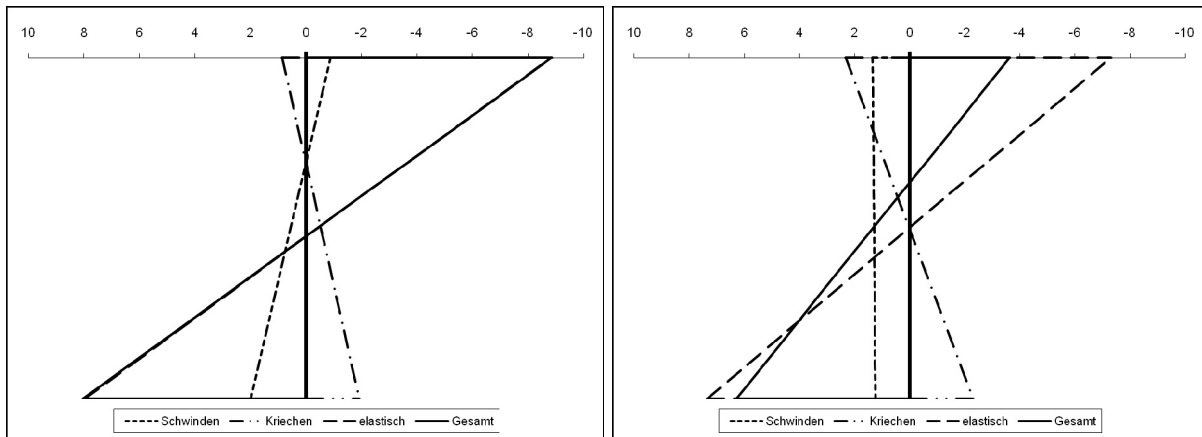


Abb. 5.23c: Balken, Betonspannungen

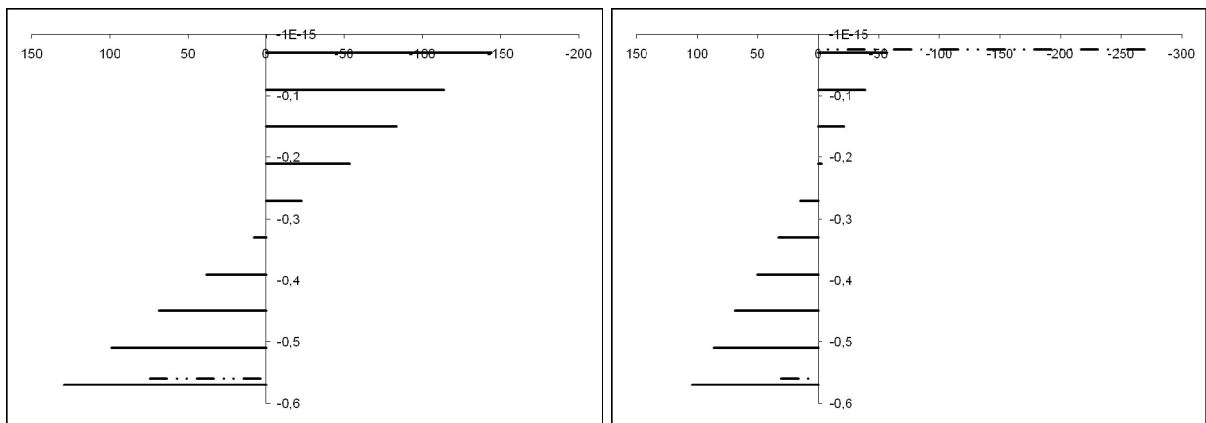


Abb. 5.23d: Balken, Kräfte im Schwerpunkt von einzelnen Lamellen (h/10) und der Bewehrung

## 5.5.2 Zustand II

### Elastisch

Es wird angenommen, dass der Riss bis zur Dehnungsnulllinie geht und der Beton somit nur im Druckbereich Spannungen aufnimmt. Die Druckzonenhöhe  $x_{el}$  kann iterativ bestimmt werden (s. Abschnitt 5.3). Aus den elastischen Stahldehnungen  $\varepsilon_{s1}$  und  $\varepsilon_{s2}$  sowie der Betondehnung am gedrückten Querschnittsrand  $\varepsilon_{c2}$  werden die resultierenden Kräfte wie folgt bestimmt:

$$F_{s1,el} = \varepsilon_{s1,el} \cdot E_s \cdot A_{s1} \quad (5.106a)$$

$$F_{s2,el} = \varepsilon_{s2,el} \cdot E_s \cdot A_{s2} \quad (5.106b)$$

$$F_{c2,el} = 0,5 \cdot \varepsilon_{co,el} \cdot E_{cm} \cdot b \cdot x_{el} \quad (5.106c)$$

### Kriechen

Durch die Spannungsumlagerungen während des Kriechvorganges vergrößert sich die Druckzonenhöhe auf  $x_{el+c}$ . Die spannungserzeugenden Dehnungen lassen sich analog zur Vorgehensweise im Zustand I ermitteln. Dabei ist jedoch zu beachten, dass der Nulldurchgang von Kriechdehnung und Kriechspannung nicht an der gleichen Stelle liegt (s. Abb. 5.24). Er kann aus den Dehnungen am oberen Querschnittsrand und den Krümmungen bestimmt werden:

$$x_0 = \frac{\varepsilon_{el,o} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) - \varepsilon_{el+c,o}}{\kappa_{el} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) - \kappa_{el+c}} \quad (5.107)$$

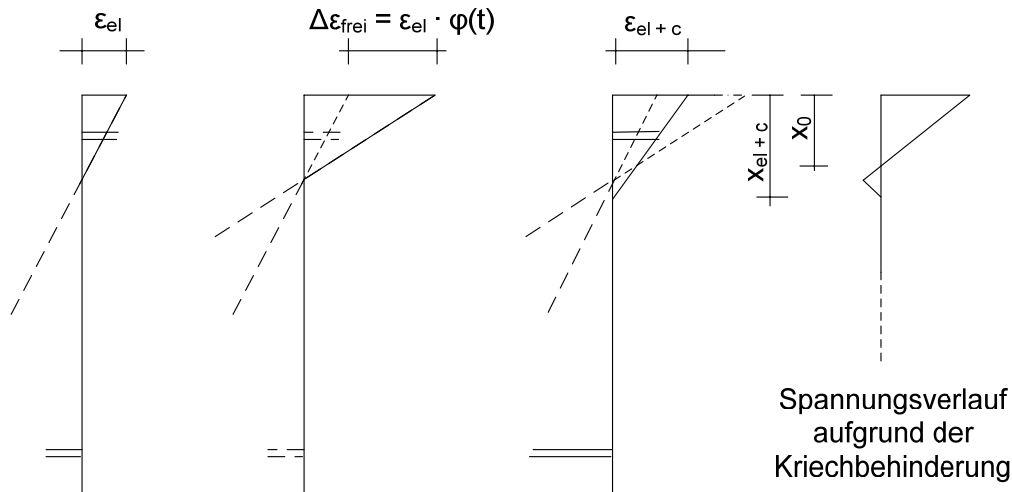


Abb. 5.24: Dehnungsverläufe und spannungserzeugende Dehnungen im Zustand II

In dem Bereich, in dem die – theoretisch – unbehinderte Betondehnung größer ist als die tatsächliche Dehnung aus Last und Kriechen, entstehen Zugspannungen. Der größte Wert liegt am Querschnittsrand:

$$\sigma_{ct,c} = -(\varepsilon_{el,o} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) - \varepsilon_{el+c,o}) \cdot \frac{E_{cm}}{1 + \rho \cdot \varphi} \quad (5.108)$$

Der Beton dagegen steht zwischen  $x_0$  und  $x_{el+c}$  unter Druckspannungen mit dem Maximum

$$\sigma_{cp,c} = -\varepsilon_{el+c}(x_{el}) \cdot \frac{E_{cm}}{1 + \rho \cdot \varphi} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{el+c}(x_{el}) = (x_{el+c} - x_{el}) \cdot \kappa_{el+c} \quad (5.109)$$

Somit entstehen im Beton zwei resultierende Kräfte (Druck und Zug):

$$F_{ct,c} = 0,5 \cdot x_0 \cdot b \cdot \sigma_{ct,c} \quad (5.110a)$$

$$F_{cp,c} = 0,5 \cdot (x_{el+c} - x_0) \cdot b \cdot \sigma_{cp,c} \quad (5.110b)$$

Die Betonstahlkräfte werden aus dem Kriechanteil der Gesamtdehnung bestimmt:

$$F_{s1,c} = (\varepsilon_{s1,el+c} - \varepsilon_{s1,el}) \cdot E_s \cdot A_{s1} \quad (5.111a)$$

$$F_{s2,c} = (\varepsilon_{s2,el+c} - \varepsilon_{s2,el}) \cdot E_s \cdot A_{s2} \quad (5.111b)$$

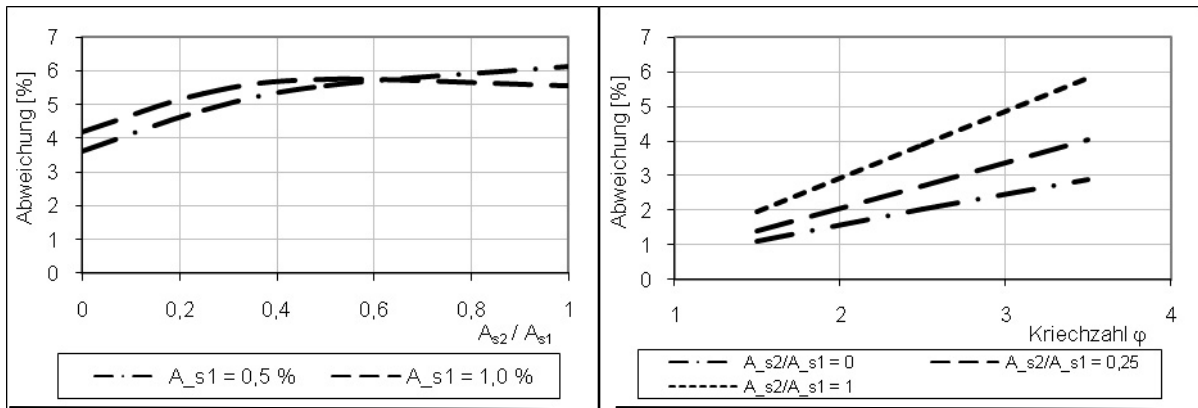
$$F_{s1,c} = \varepsilon_{s1,c} \cdot E_s \cdot A_{s1} \quad (5.111c)$$

$$F_{s2,c} = \varepsilon_{s2,c} \cdot E_s \cdot A_{s2} \quad (5.111d)$$

### Schwinden

Im Zustand II wird der Verformungswiderstand durch die Druckzonenhöhe beeinflusst. Wie zuvor dargestellt, vergrößert sich diese durch das Betonkriechen von  $x_{el}$  auf  $x_{el+c}$ . Somit ergibt sich für jeden beliebigen Abschnitt des zeitlich veränderlichen Schwindens eine andere Druckzonenhöhe. Die Berechnung der Krümmung ist also mit größerem rechnerischem Aufwand verbunden. Zusätzlich muss der Verlauf der zeitabhängigen Änderung der Druckzonenhöhe bekannt sein. Die Berechnung mit der elastischen Druckzonenhöhe  $x_{el}$  und der Druckzonenhöhe nach abgeschlossenem Kriechvorgang  $x_{el+c}$  liefert den unteren und oberen Grenzwert der Schwindverformung im Zustand II.

In Abbildung 5.25 sind die Abweichungen zwischen dem oberen und unteren Grenzwert für ausgewählte Randbedingungen dargestellt.



**Abb. 5.25:** Prozentuale Abweichung zwischen den Berechnungen mit  $x_{el}$  und  $x_{el+c}$  bei variablem Druckbewehrungsanteil (links) und variabler Kriechzahl (rechts)

Trotz größerer Abweichungen der Druckzonenhöhen bei Belastungsbeginn und nach abgeschlossenem Kriechen sind die Auswirkungen auf die Schwindkrümmung relativ gering. Sie liegen deutlich unter 10 % und erreichen nur in ungünstigen Fällen (große Kriechzahl, großer Zug- und Druckbewehrungsgrad) Werte zwischen 5 bis 6 %; in üblichen Fällen sind es ca. 2 %. Dabei ist der Einfluss der Betonfestigkeit gering (größere Festigkeiten führen zu etwas kleineren Abweichungen). Die Größe des Schwindmaßes selbst hat keine Auswirkung. Auch die Bauteilhöhe hat – bei konstantem Bewehrungsgrad – keinen nennenswerten Einfluss. Zusätzlich ist festzustellen, dass in den genannten ungünstigen Fällen der Bewehrungsgrad und damit auch die Belastung (bei wirtschaftlicher Bemessung) sehr groß ist, so dass dann der Anteil des Schwindens an der Gesamtverformung gering sein dürfte.

Auf der sicheren Seite liegend können die Schwindverformungen im Zustand II mit der elastischen Druckzonenhöhe  $x_{el}$  durchgeführt werden. Dadurch berücksichtigt man zusätzlich, dass die Schwindbehinderung der Bewehrung zu Zugspannungen im Beton führen, welche die Druckzone verkleinern können.

Die Berechnung der resultierenden Spannungen erfolgt nach dem unter 5.5.1 dargestellten Prinzip der spannungserzeugenden und spannungsfreien Dehnungen. Als Betonfläche wird jedoch nur  $A_{cx} = x_{el} \cdot b$  angesetzt.



## 6 Ergänzte Querschnitte

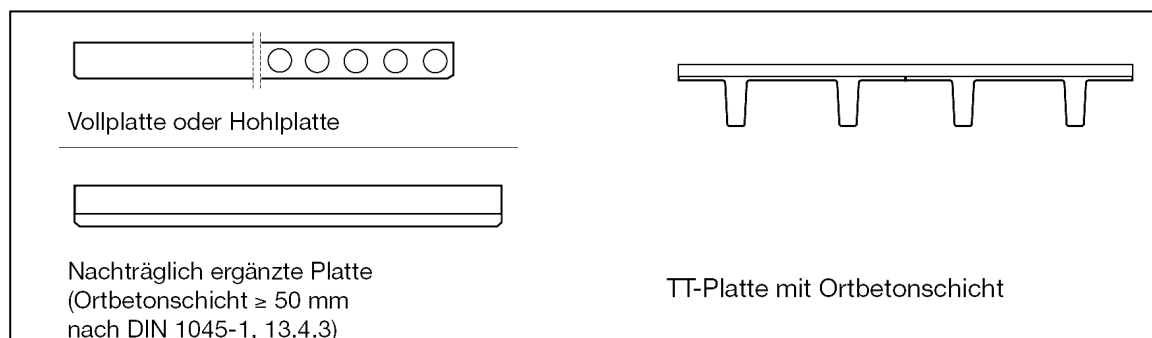
### 6.1 Allgemeines

In den letzten Jahren wird verstärkt auf Fertigteilösungen zurückgegriffen, bei denen Fertigteile auf der Baustelle mit Ortbeton ergänzt werden. Im folgenden Abschnitt soll das Verformungsverhalten von ergänzten Querschnitten untersucht werden.

#### 6.1.1 Verschiedene Fertigteilssysteme

Die Vorteile der Fertigteilherstellung liegen in der Qualitätsverbesserung (Arbeitsbedingungen, Betonqualität, Kontrolle), der Verringerung der Herstellungskosten (Schalungs- und Gerüstkosten, Massenproduktion) und der Verkürzung der Bauzeit (gleichzeitige Produktion verschiedener Elemente, Wetterunabhängigkeit). Ein großer Nachteil hingegen sind die gewichtsbedingten Anforderungen bei Transport und Montage. Daher werden Vollmontageplatten und -balken (Fertigteilquerschnitt entspricht endgültigem Querschnitt) seltener ausgeführt, ggf. alternativ mit Hohlkörper versehen (z. B. als Hohlkörperplatten).

Fertigteilplatten werden häufig mit einer geringen Dicke (4 - 6 cm) ausgeführt, die erst nach Montage durch eine Ortbetonschicht auf die geplante Höhe ergänzt werden. Allerdings beträgt die zulässige Stützweite im Montagezustand wegen der geringen Steifigkeit nur maximal zwei Meter. Um eine größere Steifigkeit (ggf. auch größere Stützweite) und einen besseren Verbund mit der Ortbetonerfüllung zu erzielen, werden i. d. R. Gitterträger mit in das Fertigteil einbetoniert. Wird der Stab des Gitterträgerobergurtes durch ein Trapezblech ersetzt, so lassen sich Montagestützweiten über 5 Metern realisieren. Noch größere Stützweiten (bis zu 16 Metern bei Steghöhen von 60 - 70 cm) werden durch Doppelstegplatten oder TT-Platten erzielt.



**Abb. 6.1:** Anwendung von Fertigteilen als Deckenelemente (nach [FDB – 09])

#### 6.1.2 Besonderheiten bei der Berechnung

Fertigteile in Vollmontagebauweise sind bei der Ermittlung der Verformungen prinzipiell wie Ortbetonkonstruktionen zu behandeln. Allerdings muss beachtet werden, dass Fertigteile i.d.R. als Einfeldträger ausgeführt werden; aus der fehlenden Durchlaufwirkung ergeben sich größere Konstruktionshöhen zur Erfüllung der Verformungsbegrenzung. Außerdem kann die Verformung von der Nachbehandlung und Ausschallfrist im Fertigteilwerk beeinflusst werden.

Komplexer ist das Trag- und Verformungsverhalten von nachträglich ergänzten Querschnitten: hier muss ggf. zunächst das Fertigteil alleine die Eigenlast der Ortbetonerfüllung aufnehmen (alternativ: Hilfsabstützungen). Die Querschnittsergänzung wirkt nach der Erhärtung erst bei Laststeigerung oder zeitabhängig durch Schwinden und Kriechen mit. Die anfängliche Durchbiegung ist damit nur von der Biegesteifigkeit des Fertigteils abhängig. Ggf. kann eine obere Bewehrung, die durch Gitterträger mit dem Fertigteil verbunden ist, berücksichtigt werden.

Darüber hinaus können die Betone vom Fertigteil und von der Ergänzung unterschiedliche Eigenschaften wie Festigkeit, Elastizitätsmodul, Schwindmaß und Kriechzahl aufweisen.

### 6.1.3 Vorgehensweise und Definitionen

Es soll ein aus zwei Teilquerschnitten (TQS) bestehendes Bauteil betrachtet werden. Die obere Schicht erhält den Index „1“ und stellt die Ortbetonergänzung dar. Die untere Schicht (Fertigteil) wird mit „2“ gekennzeichnet. Die Betone der einzelnen Teilquerschnitte können sich in den Eigenschaften Betonfestigkeit ( $f_{ck1}$ ,  $f_{ctm1}$ ), Elastizitätsmodul ( $E_{cm1}$ ), Schwindmaß ( $\varepsilon_{cs1}$ ) und Kriechzahl ( $\varphi$ ) unterscheiden. Zusätzlich wird die Bauteilgeometrie (Höhe  $h_i$ , Breite  $b_i$ ) variabel gehalten. Die Belastung wird je nach Bauablauf schrittweise auf die einzelnen Teilquerschnitte aufgebracht.

Die Bewehrung ist sowohl im TQS1 als Druckbewehrung ( $A_{s2}$ ) als auch im TQS2 als Zugbewehrung ( $A_{s1}$ ) vorhanden.

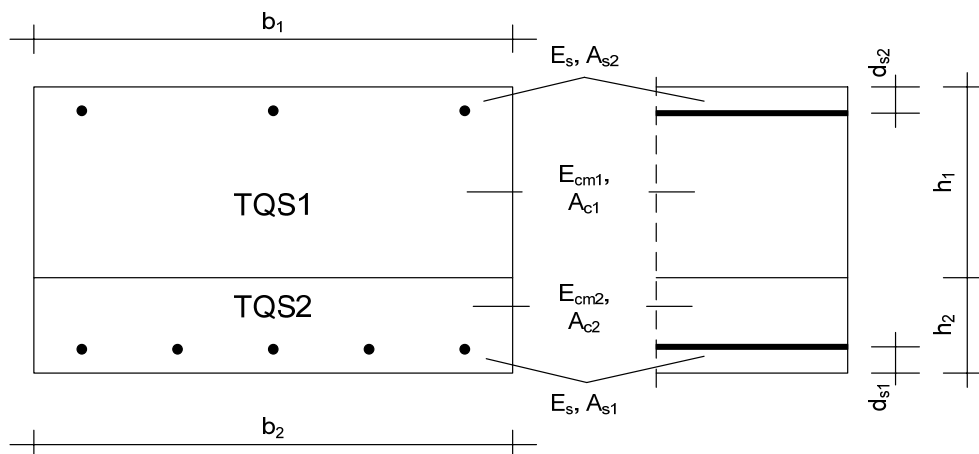


Abb. 6.2: Definition und Bezeichnung der Querschnittsteile

Die Berechnung erfolgt in mehreren Schritten. Es wird davon ausgegangen, dass Montagestützweite und endgültige Stützweite identisch sind. Andere Situationen mit Hilfsunterstützungen können daraus abgeleitet werden, es ist dann der nachfolgend beschriebene Schritt  $t = 0$  anzupassen.

Zunächst wird zum Zeitpunkt  $t = 0$  das Fertigteil (TQS2) inkl. Zugbewehrung durch sein Eigengewicht  $g_{k2}$  und das Eigengewicht der Ortbetonergänzung  $g_{k1}$  belastet. Es muss überprüft werden, ob zu diesem Zeitpunkt die Zugfestigkeit des Fertigteilbetons überschritten wird. Gerissene Bereiche können keine Zugspannungen mehr aufnehmen. Druckspannungen können jedoch auch im Riss übertragen werden, wenn sich aus langfristigen Spannungsumlagerungen die Druckzone vergrößert.

Die Ortbetonergänzung ist nur als zusätzliche Auflast zu sehen und beteiligt sich nicht am Lastabtrag. Es entstehen Dehnungen und Spannungen, die jeweils an Ober- und Unterkante des TQS2 und in der Bewehrungslage bestimmt werden ( $\varepsilon_{c2o}$ ,  $\varepsilon_{c2u}$ ,  $\varepsilon_{s1}$ ,  $\sigma_{c2o}$ ,  $\sigma_{c2u}$ ,  $\sigma_{s1}$ ), so dass die Krümmung  $\kappa_0$  berechnet werden kann. Aus dieser lässt sich eine gedachte virtuelle Verformung des TQS1 ( $\varepsilon_{c1o}$ ,  $\varepsilon_{c1u}$ ) und der Bewehrung  $A_{s2}$  ( $\varepsilon_{s2}$ ) ermitteln. Diese Dehnungen sind spannungsfrei und erfüllen die Verträglichkeitsbedingungen (Ebenbleiben des Querschnittes).

Zum Zeitpunkt  $t = B$  wird die weitere Belastung aufgebracht (Eigenlast übergeordneter Konstruktionen  $g_{k3}$ , Ausbaulast  $g_{k4}$ , veränderliche Last  $q_k$ ). Der Beton im TQS1 ist ausgehärtet und mit dem Fertigteil schubfest verbunden. Somit entstehen in beiden Teilquerschnitten und den Bewehrungslagen Dehnungen und Spannungen, die zu den bereits vorhandenen zu addieren sind.

Ab diesem Zeitpunkt sollen keine weiteren Belastungen aufgebracht werden, allerdings entstehen Spannungsumlagerungen infolge Kriechen und Schwinden. Näherungsweise soll der Beginn der zeitabhängigen Verformungen für beide Teilquerschnitte gleich sein und

Verformungen, die vor dem Einbau auftreten, unberücksichtigt bleiben; unterschiedliche Schwind- und Kriechzahlen der Teilquerschnitte werden jedoch beachtet. Die endgültigen Verformungen zum Zeitpunkt  $t = \infty$  setzen sich aus dem elastischen Anteil ( $\varepsilon_{ci,B}$ ), dem Kriechen ( $\varepsilon_{ci,\infty,c}$ ) und Schwinden ( $\varepsilon_{ci,\infty,s}$ ) zusammen.

Ergänzend zu dem in Abb. 6.2 dargestellten Querschnitt werden zwei weitere Varianten betrachtet. Zum einen wird ein Fertigteil betrachtet, das zusätzlich durch einen Obergurt (z. B. eines Gitterträgers) ausgesteift ist; es ist also schon zum Zeitpunkt  $t = 0$  eine obere Druckbewehrung  $A_{OG}$  vorhanden. Zum anderen wird die Verformungsberechnung auf Doppelstegplatte erweitert mit unterschiedlichen Breiten im Fertigteil und in der Ortbetonergänzung.

## 6.2 Berechnungen im Zustand I

### 6.2.1 Vorverformung im Bauzustand ( $t = 0$ )

Zunächst trägt nur der Betonquerschnitt  $A_{c2} = h_2 \cdot b_2$  mit der Bewehrung  $A_{s1}$  des Fertigteils. Die Krümmung und die Dehnungen können analog zu dem in Kapitel 5 vorgestellten Kraftgrößenverfahren ermittelt werden:

$$\kappa_0 = \frac{\varepsilon_{c2u,0} - \varepsilon_{c2o,0}}{h_2} \quad (6.1)$$

$$\text{mit } \varepsilon_{c2o,0} = -\frac{M_0}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} \cdot \frac{h_2}{2} + X_1 \cdot \left( \frac{1}{E_{cm2} \cdot A_{c2}} - \frac{1 \cdot z_{s1}}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} \cdot \frac{h_2}{2} \right) \quad (6.2)$$

$$\varepsilon_{c2u,0} = \frac{M_0}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} \cdot \frac{h_2}{2} + X_1 \cdot \left( \frac{1}{E_{cm2} \cdot A_{c2}} + \frac{1 \cdot z_{s1}}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} \cdot \frac{h_2}{2} \right) \quad (6.3)$$

$$(I_{c2} = b_2 \cdot h_2^3 / 12; z_{s1} = h_2 / 2 - d_{s1}; M_0 \text{ Moment unter der maßg. Belastung})$$

Die in Gl. (6.2) und (6.3) genannte Verbundkraft  $X_1$  beträgt:

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{M_0 / (E_{cm2} \cdot I_{c2})}{1 / (E_s \cdot A_{s1}) + 1 / (E_{cm2} \cdot A_{c2}) + z_{s1}^2 / (E_{cm2} \cdot I_{c2})} \quad (6.4)$$

Daraus ergeben sich die Spannungen

- Beton:  $\sigma_{c2u,0} = \varepsilon_{c2u,0} \cdot E_{cm2}$ ;  $\sigma_{c2o,0} = \varepsilon_{c2o,0} \cdot E_{cm2}$
- Stahl:  $\sigma_{s1,0} = \varepsilon_{s1,0} \cdot E_s$  mit  $\varepsilon_{s1,0} = \varepsilon_{c2o,0} + \kappa_0 \cdot (h_2 - d_{s1})$ .

Der Ortbetonergänzung und der Druckbewehrung, die in diesem Stadium noch nicht mitwirken, wird eine virtuelle Dehnung zugeordnet, um das Ebenbleiben des Gesamtquerschnittes einzuhalten, die Querschnitte bleiben jedoch spannungsfrei.

$$\varepsilon_{c1o,0} = \varepsilon_{c2o,0} - \kappa_0 \cdot h_1 \quad (6.5a)$$

$$\varepsilon_{c1u,0} = \varepsilon_{c2o,0} \quad (6.5b)$$

$$\varepsilon_{s2,0} = \varepsilon_{c2o,0} - \kappa_0 \cdot (h_1 - d_{s2}) \quad (6.5c)$$

Alternativ kann die Berechnung auch über ideale Querschnittswerte erfolgen. Die Krümmung wird wie folgt bestimmt:

$$\kappa_0 = \frac{M_0}{E_{cm2} \cdot I_{c2} \cdot \beta_0^I} \quad (6.6)$$

mit  $I_{c2}$  als Flächenmoment 2. Grades des reinen Betonquerschnittes

$$\beta_0^I = \frac{1}{1 - \frac{z_{s1}^2}{h_2^2 / 12 \cdot (1 / (\alpha_{E2} \cdot \rho_{s1,2}) + 1) + z_{s1}^2}} \quad \text{mit } \alpha_{E2} = E_s / E_{cm2} \text{ und } \rho_{s1,2} = A_{s1} / A_{c2} \quad (6.7)$$

Die Druckzonenhöhe  $x_0$  beträgt

$$x_0 = \frac{h_2 / 2 + \alpha_{E2} \cdot \rho_{s1,2} \cdot (h_2 - d_{s1})}{1 + \alpha_{E2} \cdot \rho_{s1,2}} \quad (6.8)$$

Aus der Krümmung und dem Dehnungsnulldurchgang kann an jeder beliebigen Querschnittsstelle  $z$  die Dehnung  $\varepsilon(z)$  in folgender Form bestimmt werden:

$$\varepsilon(z) = \kappa_0 \cdot (z - x_0)$$

### 6.2.2 Elastische Verformung nach Erhärten des Ortbetons ( $t = B$ )

Nach dem Erhärten der Ortbetonergänzung wird der Gesamtquerschnitt – bestehend aus vier Teilquerschnitten (zwei Betonquerschnitten und zwei Bewehrungen) – wirksam, zunächst allerdings nur für die zusätzlich aufgebrachten Lasten. Das aus den Zusatzlasten resultierende Moment sei  $M_z$ , das Gesamtmoment  $M_{Ed} = M_0 + M_z$ .

Mit Abb. 6.3 sind in der Berechnung folgende Verbundkräfte  $X_i$  zu berücksichtigen

- $X_1$  die zwischen TQS1 und TQS2 übertragene Kraft,
- $X_2$  das entsprechende Moment,
- $X_3$  die Verbundkraft zwischen Zugbewehrung und TQS2 sowie
- $X_4$  die Verbundkraft zwischen Druckbewehrung und TQS1.

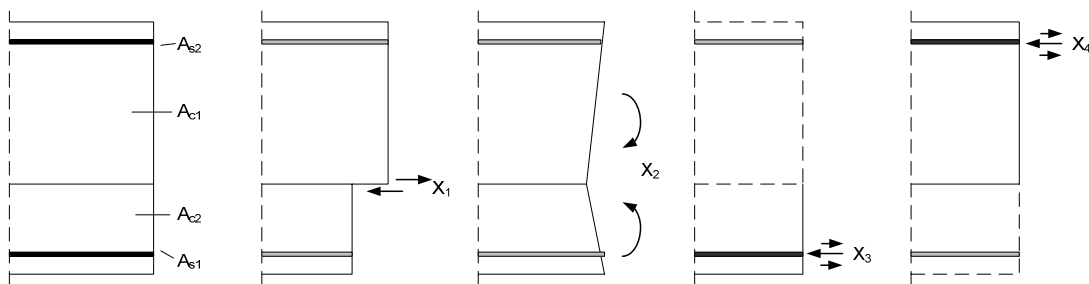


Abb. 6.3: Definition der vier Kraftgrößen

Zunächst einmal werden die Verformungsgrößen  $\delta_{i0}$  an den jeweiligen Stellen bestimmt. Das Zusatzmoment  $M_z$  wird am TQS1 angesetzt (prinzipiell könnte es auch auf TQS2 bezogen werden). Man erhält:

$$\delta_{10} = \frac{M_z}{E_{cm1} \cdot I_{c1}} \cdot \frac{h_1}{2} \cdot L \quad (6.9)$$

$$\delta_{20} = -\frac{M_z}{E_{cm1} \cdot I_{c1}} \cdot L \quad (6.10)$$

$$\delta_{30} = 0 \quad (6.11)$$

$$\delta_{40} = -\frac{M_z}{E_{cm1} \cdot I_{c1}} \cdot z_{s2} \cdot L \quad (6.12)$$

Die Verformungsgrößen  $\delta_{ij}$  an den Stellen  $i$  aufgrund der Kraftgröße  $j$  betragen

$$\delta_{11} = \left( \frac{1}{E_{cm1} \cdot A_{c1}} + \frac{1 \cdot h_1 / 2}{E_{cm1} \cdot I_{c1}} \cdot h_1 / 2 + \frac{1}{E_{cm2} \cdot A_{c2}} + \frac{1 \cdot h_2 / 2}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} \cdot h_2 / 2 \right) \cdot L \quad (6.13)$$

$$\delta_{22} = \left( \frac{1}{E_{cm1} \cdot I_{c1}} + \frac{1}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} \right) \cdot L \quad (6.14)$$

$$\delta_{33} = \left( \frac{1}{E_s \cdot A_{s1}} + \frac{1}{E_{cm2} \cdot A_{c2}} + \frac{1 \cdot z_{s1}}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} \cdot z_{s1} \right) \cdot L \quad (6.15)$$

$$\delta_{44} = \left( \frac{1}{E_s \cdot A_{s2}} + \frac{1}{E_{cm1} \cdot A_{c1}} + \frac{1 \cdot z_{s2}}{E_{cm1} \cdot I_{c1}} \cdot z_{s2} \right) \cdot L \quad (6.16)$$

$$\delta_{12} = \left( -\frac{1 \cdot h_1 / 2}{E_{cm1} \cdot I_{c1}} + \frac{1 \cdot h_2 / 2}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} \right) \cdot L = \delta_{21} \quad (6.17)$$

$$\delta_{13} = \left( -\frac{1}{E_{cm2} \cdot A_{c2}} + \frac{1 \cdot h_2 / 2}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} \cdot z_{s1} \right) \cdot L = \delta_{31} \quad (6.18)$$

$$\delta_{14} = \left( \frac{1}{E_{cm1} \cdot A_{c1}} - \frac{1 \cdot h_1 / 2}{E_{cm1} \cdot I_{c1}} \cdot z_{s2} \right) \cdot L = \delta_{41} \quad (6.19)$$

$$\delta_{23} = \frac{1 \cdot z_{s1}}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} \cdot L = \delta_{32} \quad (6.20)$$

$$\delta_{24} = \frac{1 \cdot z_{s2}}{E_{cm1} \cdot I_{c1}} \cdot L = \delta_{42} \quad (6.21)$$

$$\delta_{34} = 0 = \delta_{43} \quad (6.22)$$

Aufgrund von Verträglichkeitsbedingungen müssen die Verformungsgrößen gleich Null sein. Somit erhält man folgende vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} + X_4 \cdot \delta_{14} &= 0 \\ \delta_{20} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + X_4 \cdot \delta_{24} &= 0 \\ \delta_{30} + X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + X_4 \cdot \delta_{34} &= 0 \\ \delta_{40} + X_1 \cdot \delta_{41} + X_2 \cdot \delta_{42} + X_3 \cdot \delta_{43} + X_4 \cdot \delta_{44} &= 0 \end{aligned} \quad (6.23)$$

bzw. in Vektorschreibweise und aufgelöst nach dem Vektor mit den unbekanntem  $X_i$ :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} \\ \delta_{41} & \delta_{42} & \delta_{43} & \delta_{44} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{30} \\ \delta_{40} \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

Die Lösung erfolgt beispielsweise nach der Cramer'schen Regel. Hierzu werden die Determinanten  $D_i$  der Koeffizientenmatrix bestimmt, dessen  $i$ -te Spalte jeweils durch den Zielvektor ersetzt wird. Zusätzlich wird die Determinante  $D_0$  der unveränderten Koeffizientenmatrix berechnet. Die Lösung des Gleichungssystems kann dann wie folgt angegeben werden:

$$X_i = D_i / D_0 \quad (6.25)$$

Damit können die Dehnungen an jedem beliebigen Punkt des Querschnitts bestimmt werden. Wie schon im Abschnitt 6.2.1 werden sie jeweils an der Ober- und Unterkante der jeweiligen Teilquerschnitte und in den beiden Bewehrungslagen berechnet. Mit den Konstanten

$$k_{A1} = \frac{1}{E_{cm1} \cdot A_{c1}}; k_{A2} = \frac{1}{E_{cm2} \cdot A_{c2}}; k_{I1} = \frac{1}{E_{cm1} \cdot I_{c1}}; k_{I2} = \frac{1}{E_{cm2} \cdot I_{c2}}; k_{S1} = \frac{1}{E_s \cdot A_{s1}}; k_{S2} = \frac{1}{E_s \cdot A_{s2}}$$

erhält man folgende Dehnungen:

$$\varepsilon_{c10,z} = -M_z \cdot k_{I1} \cdot \frac{h_1}{2} + X_1 \cdot \left( k_{A1} - \frac{h_1}{2} \cdot k_{I1} \cdot \frac{h_1}{2} \right) + X_2 \cdot \left( k_{I1} \cdot \frac{h_1}{2} \right) + X_3 \cdot 0 + X_4 \cdot \left( k_{A1} + z_{s2} \cdot k_{I1} \cdot \frac{h_1}{2} \right) \quad (6.26)$$

$$\varepsilon_{c1u,z} = M_z \cdot k_{I1} \cdot \frac{h_1}{2} + X_1 \cdot \left( k_{A1} + \frac{h_1}{2} \cdot k_{I1} \cdot \frac{h_1}{2} \right) + X_2 \cdot \left( -k_{I1} \cdot \frac{h_1}{2} \right) + X_3 \cdot 0 + X_4 \cdot \left( k_{A1} - z_{s2} \cdot k_{I1} \cdot \frac{h_1}{2} \right) \quad (6.27)$$

$$\varepsilon_{c20,z} = X_1 \cdot \left( -k_{A2} - \frac{h_2}{2} \cdot k_{I2} \cdot \frac{h_2}{2} \right) + X_2 \cdot \left( -k_{I2} \cdot \frac{h_2}{2} \right) + X_3 \cdot \left( k_{A2} - z_{s1} \cdot k_{I2} \cdot \frac{h_2}{2} \right) + X_4 \cdot 0 \quad (6.28)$$

$$\varepsilon_{c2u,z} = X_1 \cdot \left( -k_{A2} + \frac{h_2}{2} \cdot k_{I2} \cdot \frac{h_2}{2} \right) + X_2 \cdot \left( k_{I2} \cdot \frac{h_2}{2} \right) + X_3 \cdot \left( k_{A2} + z_{s1} \cdot k_{I2} \cdot \frac{h_2}{2} \right) + X_4 \cdot 0 \quad (6.29)$$

$$\varepsilon_{s1,z} = -X_3 \cdot k_{S1} \quad (6.30)$$

$$\varepsilon_{s2,z} = -X_4 \cdot k_{S2} \quad (6.31)$$

Zur Kontrolle kann die Krümmung in beiden Teilquerschnitten bestimmt werden. Es darf kein Knick im Dehnungsverlauf auftreten, ebenso kein Sprung am Verbindungspunkt. Dieses kann durch die Bedingung  $\varepsilon_{c1u,z} = \varepsilon_{c2o,z}$  überprüft werden.

Auch hier kann die Krümmung alternativ über den Ansatz

$$\kappa_z = \frac{M_z}{E_{cm2} \cdot I_{c2} \cdot \beta_B^I} \quad (6.32)$$

bestimmt werden, wobei  $\beta_B^I$  die Vergrößerung der Biegesteifigkeit infolge der Ortbetonergänzung und der beiden Bewehrungslagen darstellt:

$$\beta_B^I = 12 \cdot \alpha_{Ec} \cdot \frac{A_{c1}}{A_{c2}} \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^2 - \frac{h_1}{h_2} \cdot \xi_{s2} + \xi_{s2}^2 \right] + 12 \cdot \left[ \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^2 + \frac{h_1}{h_2} + \xi_{s2}^2 - 2 \cdot \xi_{s2} \cdot \left( \frac{h_1}{h_2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \right] \quad (6.33)$$

$$+ 12 \cdot \alpha_{E2} \cdot \rho_{s1,2} \cdot \frac{(d - x_z)^2}{h_2^2} + 12 \cdot \alpha_{E2} \cdot \rho_{s2,2} \cdot \frac{(x_z - d_{s2})^2}{h_2^2}$$

mit  $\alpha_{Ec} = E_{cm1} / E_{cm2}$ ,  $\alpha_{E2} = E_s / E_{cm2}$ ,  $\rho_{s1,2} = A_{s1} / A_{c2}$ ,  $\rho_{s2,2} = A_{s2} / A_{c2}$  und  $\xi_{s2} = x_z / h_2$

Die Druckzonenhöhe  $x_z$  wird bestimmt:

$$x_z = \frac{h_1 / 2 \cdot \alpha_{Ec} \cdot A_{c1} / A_{c2} + (h_1 + h_2 / 2) + \alpha_{E2} \cdot (\rho_{s1,2} \cdot d + \rho_{s2,2} \cdot d_{s2})}{\alpha_{Ec} \cdot A_{c1} / A_{c2} + \alpha_{E2} \cdot (\rho_{s1,2} + \rho_{s2,2}) + 1} \quad (6.34)$$

Somit kann jede Dehnung in Abhängigkeit von  $\kappa_z$  und  $x_z$  angegeben werden:

$$\varepsilon(z) = \kappa_z \cdot (z - x_z) \quad (6.35)$$

Die Gesamtdehnungen und ebenso die Krümmung zum Zeitpunkt  $t = B$  erhält man durch Addition der Anteile  $\varepsilon_0$  und  $\varepsilon_z$  bzw.  $\kappa_0$  und  $\kappa_z$ .

### 6.2.3 Verformungen nach abgeschlossenem Kriechvorgang ( $t = \infty$ )

Zwischen den beiden Betonschichten tritt zu Beginn des Kriechvorganges ein Spannungssprung auf. Der Beton des Fertigteils ist dabei wesentlich höher ausgelastet, da er neben der Eigenlast auch die Last der Betonergänzung bis zum Erhärten mittragen muss. Der Ortbeton erhält seine Spannung nach dem Erhärten zum Zeitpunkt  $t = B$  zunächst nur aus einem Anteil der zusätzlichen Last, die auf den Verbundquerschnitt aufgebracht wird. Da die Teilquerschnitte kraftschlüssig miteinander verbunden sind, wird zeitabhängig durch Kriechen ein Teil der Spannung aus dem TQS2 in den TQS1 als Ortbetonergänzung umgelagert.

Das Ebenbleiben des Verbundquerschnittes muss eingehalten werden, ebenso darf zwischen den Teilquerschnitten kein Dehnungssprung vorhanden sein. Die Berechnung erfolgt unter der Annahme, dass die gedachte Dehnung des TQS1 zum Zeitpunkt  $t = 0$  keinem Kriechen ausgesetzt ist; für  $t > 0$  vergrößern sich im TQS1 die Dehnungen aus der Zusatzlast und im TQS2 aus der Gesamtlast um den Faktor  $\rho \cdot \varphi_1$  bzw.  $\rho \cdot \varphi_2$ .

Es ergeben sich als freie Verformungen:

$$\delta_{10} = (\varepsilon_{c1u,z} \cdot \rho \cdot \varphi_1 - (\varepsilon_{c2o,0} + \varepsilon_{c2o,0}) \cdot \rho \cdot \varphi_2) \cdot L \quad (6.36)$$

$$\delta_{20} = (-\kappa_z \cdot \rho \cdot \varphi_1 + (\kappa_0 + \kappa_z) \cdot \rho \cdot \varphi_2) \cdot L \quad (6.37)$$

$$\delta_{30} = \varepsilon_{s1,B} \cdot \rho \cdot \varphi_2 \cdot L \quad (6.38)$$

$$\delta_{40} = \varepsilon_{s2,B} \cdot \rho \cdot \varphi_1 \cdot L \quad (6.39)$$

Die unbekanntenen Kraftgrößen  $X_i$  werden analog zu Abschnitt 6.2.2 berechnet. Mit den zusätzlichen Faktoren  $k_{Ai}$  und  $k_{fi}$  (Betonkriechen)

$$k_{Ai,\varphi} = \frac{\rho \cdot \varphi_i}{E_{cmi} \cdot A_{ci}}; k_{fi,\varphi} = \frac{\rho \cdot \varphi_i}{E_{cmi} \cdot I_{ci}} \quad (6.40)$$

erhält man als Dehnungen:

$$\varepsilon_{c10,c} = \varepsilon_{c10,z} \cdot \rho \cdot \varphi_1 + X_1 \cdot \left( k_{A1,\varphi} - \frac{h_1}{2} \cdot k_{I1,\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) + X_2 \cdot \left( k_{I1,\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) + X_3 \cdot 0 + X_4 \cdot \left( k_{A1,\varphi} + z_{s2} \cdot k_{I1,\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) \quad (6.41)$$

$$\varepsilon_{c1u,c} = \varepsilon_{c1u,z} \cdot \rho \cdot \varphi_1 + X_1 \cdot \left( k_{A1,\varphi} + \frac{h_1}{2} \cdot k_{I1,\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) + X_2 \cdot \left( -k_{I1,\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) + X_3 \cdot 0 + X_4 \cdot \left( k_{A1,\varphi} - z_{s2} \cdot k_{I1,\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) \quad (6.42)$$

$$\varepsilon_{c20,c} = \varepsilon_{c20,B} \cdot \rho \cdot \varphi_2 + X_1 \cdot \left( -k_{A2,\varphi} - \frac{h_2}{2} \cdot k_{I2,\varphi} \cdot \frac{h_2}{2} \right) + X_2 \cdot \left( -k_{I2,\varphi} \cdot \frac{h_2}{2} \right) + X_3 \cdot \left( k_{A2,\varphi} - z_{s1} \cdot k_{I2,\varphi} \cdot \frac{h_2}{2} \right) + X_4 \cdot 0 \quad (6.43)$$

$$\varepsilon_{c2u,c} = \varepsilon_{c2u,B} \cdot \rho \cdot \varphi_2 + X_1 \cdot \left( -k_{A2,\varphi} + \frac{h_2}{2} \cdot k_{I2,\varphi} \cdot \frac{h_2}{2} \right) + X_2 \cdot \left( k_{I2,\varphi} \cdot \frac{h_2}{2} \right) + X_3 \cdot \left( k_{A2,\varphi} + z_{s1} \cdot k_{I2,\varphi} \cdot \frac{h_2}{2} \right) + X_4 \cdot 0 \quad (6.44)$$

$$\varepsilon_{s1,c} = -X_3 \cdot k_{S1} \quad (6.45)$$

$$\varepsilon_{s2,c} = -X_4 \cdot k_{S2} \quad (6.46)$$

Die Krümmung wird dann aus der Dehnungsdifferenz an Ober- und Unterkante bestimmt:

$$K_c = \frac{\varepsilon_{c2u,cc} - \varepsilon_{c10,cc}}{h_1 + h_2} \quad (6.47)$$

### 6.2.4 Verformungen nach abgeschlossenem Schwindvorgang ( $t = \infty$ )

Vereinfachend wird angenommen, dass das Schwinden in beiden Teilquerschnitten zeitgleich einsetzt. Der unbewehrte Beton würde sich in TQS1 um  $\varepsilon_{cs1}$  und im TQS 2 um  $\varepsilon_{cs2}$  verkürzen. Dieses wird sowohl durch die Bewehrung als auch durch die kraftschlüssige Verbindung der beiden Querschnitte behindert. Analog zu dem in Abschnitt 6.2.2 dargestellten Verfahren können die freien Verformungsgrößen wie folgt dargestellt werden:

$$\delta_{10} = (-\varepsilon_{cs1} + \varepsilon_{cs2}) \cdot L \quad (6.48)$$

$$\delta_{20} = 0 \quad (6.49)$$

$$\delta_{30} = -\varepsilon_{cs2} \cdot L \quad (6.50)$$

$$\delta_{40} = -\varepsilon_{cs1} \cdot L \quad (6.51)$$

Die Kraftgrößen  $X_i$  werden wie zuvor definiert, so dass die Verformungsgrößen  $\delta_{ij}$  übernommen werden können. Zur Berücksichtigung des Kriechens werden alle Betonverformungen mit dem Faktor  $(1 + \rho \cdot \varphi_i)$  multipliziert.

Mit den Faktoren  $k_i$  und  $k_i$

$$k_{A_i,1+\varphi} = \frac{1 + \rho \cdot \varphi_i}{E_{cmi} \cdot A_{ci}}; k_{I_i,1+\varphi} = \frac{1 + \rho \cdot \varphi_i}{E_{cmi} \cdot I_{ci}}$$

betragen die Dehnungen am Rand der Teilquerschnitte und in den Bewehrungslagen:

$$\varepsilon_{c10,s} = \varepsilon_{cs1} - X_1 \cdot \left( k_{A1,1+\varphi} - \frac{h_1}{2} \cdot k_{I1,1+\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) - X_2 \cdot \left( k_{I1,1+\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) - X_3 \cdot 0 - X_4 \cdot \left( k_{A1,1+\varphi} + z_{s2} \cdot k_{I1,1+\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) \quad (6.52)$$

$$\varepsilon_{c1u,s} = \varepsilon_{cs1} - X_1 \cdot \left( k_{A1,1+\varphi} + \frac{h_1}{2} \cdot k_{I1,1+\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) - X_2 \cdot \left( -k_{I1,1+\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) - X_3 \cdot 0 - X_4 \cdot \left( k_{A1,1+\varphi} - z_{s2} \cdot k_{I1,1+\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) \quad (6.53)$$

$$\varepsilon_{c20,s} = \varepsilon_{cs2} - X_1 \cdot \left( -k_{A2,1+\varphi} - \frac{h_2}{2} \cdot k_{I2,1+\varphi} \cdot \frac{h_2}{2} \right) - X_2 \cdot \left( -k_{I2,1+\varphi} \cdot \frac{h_2}{2} \right) - X_3 \cdot \left( k_{A2,1+\varphi} - z_{s1} \cdot k_{I2,1+\varphi} \cdot \frac{h_2}{2} \right) - X_4 \cdot 0 \quad (6.54)$$

$$\varepsilon_{c2u,s} = \varepsilon_{cs2} - X_1 \cdot \left( -k_{A2,1+\varphi} + \frac{h_2}{2} \cdot k_{I2,1+\varphi} \cdot \frac{h_2}{2} \right) - X_2 \cdot \left( k_{I2,1+\varphi} \cdot \frac{h_2}{2} \right) - X_3 \cdot \left( k_{A2,1+\varphi} + z_{s1} \cdot k_{I2,1+\varphi} \cdot \frac{h_2}{2} \right) - X_4 \cdot 0 \quad (6.55)$$

$$\varepsilon_{s1,s} = X_3 \cdot k_{S1} \quad (6.56)$$

$$\varepsilon_{s2,s} = X_4 \cdot k_{S2} \quad (6.57)$$

Die Krümmung wird über die bezogene Dehnungsdifferenz zweier Punkte bestimmt:

$$K_s = \frac{\varepsilon_{c2u,cs} - \varepsilon_{c10,cs}}{h_1 + h_2} \quad (6.58)$$

Zur Kontrolle kann auch die Krümmung in den einzelnen Teilquerschnitten berechnet und verglichen werden. Es muss  $\kappa_{1,s} = \kappa_{2,s}$  ebenso gelten wie  $\varepsilon_{c1u,s} = \varepsilon_{c2o,s}$ .

Alternativ wird zur Berechnung der Querschnittskrümmung das in Abschnitt 5.2 dargestellte Verfahren auf zwei verschiedene Betonquerschnitte erweitert, so dass die aufwendige Auflösung des oben genannten Gleichungssystems entfällt.

Der Gesamtquerschnitt wird in Teilquerschnitte unterschiedlicher Materialeigenschaften unterteilt, den beiden Betonquerschnitten (Ortbetoneergänzung, Fertigteil) und dem Bewehrungsquerschnitt. Zunächst werden die Schwerpunkte der einzelnen Teilquerschnitte bestimmt:

$$\text{– Bewehrung: } z_{Ss} = \frac{d_{s2} \cdot A_{s2} + (h_1 + h_2 - d_{s1}) \cdot A_{s1}}{A_{s2} + A_{s1}} \quad (6.59)$$

$$\text{– TQS1: } z_{Sc1} = h_1 / 2$$

$$\text{– TQS2: } z_{Sc2} = h_1 + h_2 / 2$$

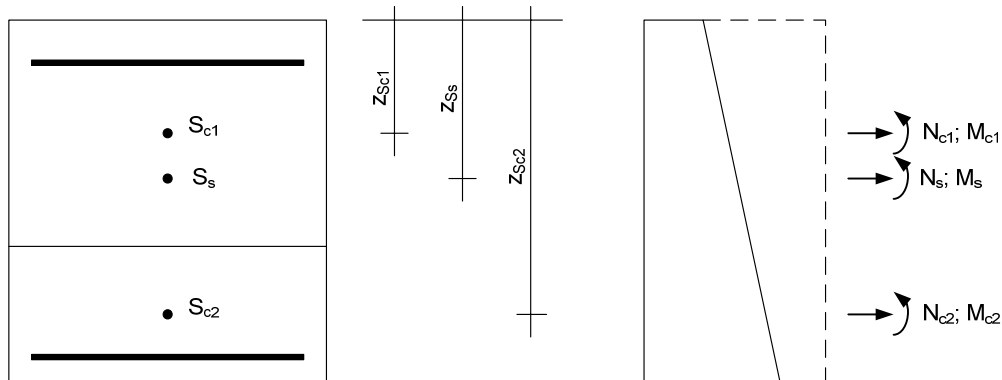


Abb. 6.4: Schwerpunkte, Kräfte und Momente beim Betonschwinden

In diesen Schwerpunkten wirken jeweils die Längskräfte  $N_s$ ,  $N_{c1}$ ,  $N_{c2}$  sowie die Momente  $M_s$ ,  $M_{c1}$  und  $M_{c2}$ . Sie sind zunächst unbekannt und werden über Gleichgewichts- und Verformungsbedingungen ermittelt. Dazu werden folgende geometrische Parameter benötigt:

$$\begin{aligned} \text{– Flächen:} & \quad A_s = A_{s1} + A_{s2}; \quad A_{c1} = h_1 \cdot b_1; \quad A_{c2} = h_2 \cdot b_2 \\ \text{– Flächenträgheitsmomente:} & \quad I_s = A_{s1} \cdot (h_1 + h_2 - z_{Ss} - d_{s1})^2 + A_{s2} \cdot (z_{Ss} - d_{s2})^2; \\ & \quad I_{c1} = 1/12 \cdot b_1 \cdot h_1^3; \quad I_{c2} = 1/12 \cdot b_2 \cdot h_2^3 \end{aligned}$$

Die Dehnungen und Krümmungen in den Schwerpunkten sind:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{N_s}{E_s A_s}; & \kappa_s &= \frac{M_s}{E_s I_s} \\ \varepsilon_{c1} &= \varepsilon_{cs1} + \frac{N_{c1}}{E_{cm1} A_{c1}} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_1); & \kappa_{c1} &= \frac{M_{c1}}{E_{cm1} I_{c1}} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_1) \\ \varepsilon_{c2} &= \varepsilon_{cs2} + \frac{N_{c2}}{E_{cm2} A_{c2}} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_2); & \kappa_{c2} &= \frac{M_{c2}}{E_{cm2} I_{c2}} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_2) \end{aligned}$$

Zusätzlich kann die Querschnittskrümmung aus den Dehnungsdifferenzen bestimmt werden. Über die Bedingung, dass der Querschnitt eben bleibt, erhält man:

$$\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{c1}}{z_{Ss} - z_{Sc1}} = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{c2}}{z_{Ss} - z_{Sc2}} = \frac{\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{c2}}{z_{Sc1} - z_{Sc2}}$$

Um die Querschnittskrümmung infolge des Betonschwindens berechnen zu können, wird zunächst  $M_{c1}$  und  $M_{c2}$  sowie  $N_{c1}$  und  $N_{c2}$  bestimmt. Aus der Krümmung lassen sich die Momente wie folgt bestimmen:

$$\frac{M_s}{E_s \cdot I_s} = \frac{M_{c1}}{E_{cm1} \cdot I_{c1}} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_1) = \frac{M_{c2}}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_2) \rightarrow$$



$$M_{c1} = M_s \frac{E_{cm1} \cdot I_{c1}}{E_s \cdot I_s \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_1)}; \quad M_{c2} = M_s \frac{E_{cm2} \cdot I_{c2}}{E_s \cdot I_s \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_2)}$$

Das Moment  $M_s$  kann über die Dehnungsdifferenz der Betonschwerpunkte bestimmt werden:

$$\frac{M_s}{E_s \cdot I_s} = \frac{\varepsilon_{c2} - \varepsilon_{c1}}{z_{Sc2} - z_{Sc1}} \rightarrow$$

$$M_s = \frac{E_s \cdot I_s}{z_{Sc2} - z_{Sc1}} \cdot (\varepsilon_{c2} - \varepsilon_{c1}) = \frac{E_s \cdot I_s}{z_{Sc2} - z_{Sc1}} \cdot \left( -\varepsilon_{cs1} + \varepsilon_{cs2} - \frac{N_{c1} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_1)}{E_{cm1} \cdot A_{c1}} + \frac{N_{c2} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_2)}{E_{cm2} \cdot A_{c2}} \right)$$

Als Momentengleichgewicht bezogen auf den Schwerpunkt der Bewehrung erhält man:

$$M_{c1} + M_{c2} + M_s + N_{c1} \cdot (z_{Sc1} - z_{Ss}) + N_{c2} \cdot (z_{Sc2} - z_{Ss}) = 0$$

und aufgelöst nach  $N_{c2}$ :

$$N_{c2} = N_{c1} \cdot \frac{F_{Nc1}}{F_{Nc2}} + \frac{F_k}{F_{Nc2}}$$

$$\text{mit} \quad F_{Nc1} = (z_{Ss} - z_{Sc1}) - \frac{1 + \rho \cdot \varphi_1}{E_{cm1} \cdot A_{c1} \cdot (z_{Sc2} - z_{Sc1})} \cdot \left( -\frac{E_{cm1} \cdot I_{c1}}{1 + \rho \cdot \varphi_1} - \frac{E_{cm2} \cdot I_{c2}}{1 + \rho \cdot \varphi_2} - E_s I_s \right) \quad (6.60a)$$

$$F_{Nc2} = (z_{Sc2} - z_{Ss}) - \frac{1 + \rho \cdot \varphi_2}{E_{cm2} \cdot A_{c2} \cdot (z_{Sc2} - z_{Sc1})} \cdot \left( -\frac{E_{cm1} \cdot I_{c1}}{1 + \rho \cdot \varphi_1} - \frac{E_{cm2} \cdot I_{c2}}{1 + \rho \cdot \varphi_2} - E_s I_s \right) \quad (6.60b)$$

$$F_k = \frac{\varepsilon_{cs2} - \varepsilon_{cs1}}{z_{Sc2} - z_{Sc1}} \cdot \left( -\frac{E_{cm1} \cdot I_{c1}}{1 + \rho \cdot \varphi_1} - \frac{E_{cm2} \cdot I_{c2}}{1 + \rho \cdot \varphi_2} - E_s I_s \right) \quad (6.60c)$$

Das Moment  $M_{c2}$  kann aus  $M_{c1}$  bestimmt werden (s. vorher):

$$M_{c2} = M_{c1} \frac{E_{cm2} \cdot I_{c2} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_1)}{E_{cm1} \cdot I_{c1} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_2)}$$

Es verbleiben die vier Unbekannten  $N_{c1}$ ,  $M_{c1}$ ,  $N_s$  und  $M_s$ . Zur Lösung stehen folgende vier Bedingungen zur Verfügung:

$$(1) \quad \sum N = 0:$$

$$N_{c1} + N_{c1} \cdot \frac{F_{Nc1}}{F_{Nc2}} + \frac{F_k}{F_{Nc2}} + N_s = 0 \rightarrow$$

$$N_{c1} = \frac{1}{1 + F_{Nc1}/F_{Nc2}} \cdot (-N_s - F_k / F_{Nc2})$$

$$(2) \quad \sum M = 0 \quad (\text{hier: Moment um Schwerpunkt } S_{c2})$$

$$M_s + M_{c1} + M_{c1} \cdot \frac{E_{cm2} \cdot I_{c2} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_1)}{E_{cm1} \cdot I_{c1} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_2)} + N_s \cdot (z_{Ss} - z_{Sc2}) + N_{c1} \cdot (z_{Sc1} - z_{Sc2}) \rightarrow$$

$$M_{c1} = \frac{1}{1 + \frac{E_{cm2} \cdot I_{c2} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_1)}{E_{cm1} \cdot I_{c1} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_2)}} \cdot \left[ -M_s - N_s \cdot \left( z_{Ss} - z_{Sc2} \right) - \frac{z_{c1} - z_{c2}}{1 + F_{Nc1}/F_{Nc2}} \right] + \frac{F_k / F_{Nc2}}{1 + F_{Nc1}/F_{Nc2}} \cdot (z_{Sc1} - z_{Sc2})$$

(3) In jedem Punkt muss dieselbe Krümmung vorliegen:

$$\frac{M_{c1}}{E_{cm1} \cdot I_{c1}} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_1) = \frac{M_s}{E_s \cdot I_s}$$

(4) Die Dehnung im Punkt  $S_{c1}$  kann über die Dehnung im Punkt  $S_s$  und die Krümmung bestimmt werden:

$$\varepsilon_{c1} = \varepsilon_s - \kappa \cdot (z_{Ss} - z_{Sc1})$$

$$\rightarrow \varepsilon_{cs1} + \frac{N_{c1}}{E_{cm1} \cdot A_{c1}} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_1) = \frac{N_s}{E_s \cdot A_s} - \frac{M_s}{E_s \cdot I_s} \cdot (z_{Ss} - z_{Sc1})$$

Durch Einsetzen von (2) in (3) erhält man das Moment  $M_s$  in Abhängigkeit von der Kraft  $N_s$ :

$$M_s = F_{Ms} \cdot (-N_s \cdot F_{Ns} + F_c)$$

mit

$$F_{Ms} = \left[ \frac{1}{E_s \cdot I_s} + \frac{1}{\frac{E_{cm1} \cdot I_{c1}}{1 + \rho \cdot \varphi_1} + \frac{E_{cm2} \cdot I_{c2}}{1 + \rho \cdot \varphi_2}} \right]^{-1} \quad (6.61a)$$

$$F_{Ns} = \frac{(z_{Ss} - z_{Sc2}) - \frac{z_{Sc1} - z_{Sc2}}{1 + F_{Nc1}/F_{Nc2}}}{\frac{E_{cm1} \cdot I_{c1}}{1 + \rho \cdot \varphi_1} + \frac{E_{cm2} \cdot I_{c2}}{1 + \rho \cdot \varphi_2}} \quad (6.61b)$$

$$F_c = \frac{(z_{Sc1} - z_{Sc2}) \cdot \frac{F_k / F_{Nc2}}{1 + F_{Nc1}/F_{Nc2}}}{\frac{E_{cm1} \cdot I_{c1}}{1 + \rho \cdot \varphi_1} + \frac{E_{cm2} \cdot I_{c2}}{1 + \rho \cdot \varphi_2}} \quad (6.61c)$$

Setzt man das Moment  $M_s$  unter Berücksichtigung des Kräftegleichgewichts aus Gleichung (1) in Gleichung (4) ein, so verbleibt als einzige Unbekannte die Kraft  $N_s$ . Damit lässt sich die Dehnung im Schwerpunkt der Bewehrungslagen berechnen:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{E_s \cdot A_s} \cdot \frac{-\varepsilon_{cs1} + \frac{F_k / F_{Nc2}}{1 + F_{Nc1}/F_{Nc2}} \cdot \frac{1 + \rho \cdot \varphi_1}{E_{c1} \cdot A_{c1}} - \frac{z_{Ss} - z_{Sc1}}{E_s \cdot I_s} \cdot F_{Ms} \cdot F_c}{\frac{1}{1 + F_{Nc1}/F_{Nc2}} \cdot \frac{1 + \rho \cdot \varphi_1}{E_{c1} \cdot A_{c1}} - \frac{1}{E_s \cdot A_s} - \frac{z_{Ss} - z_{Sc1}}{E_s \cdot I_s} \cdot F_{Ms} \cdot F_{Ns}} \quad (6.62)$$

Zusätzlich kann die Dehnung  $\varepsilon_{c1}$  bestimmt werden:

$$\varepsilon_{c1} = \varepsilon_{cs1} + \frac{1 + \rho \cdot \varphi_1}{E_{cm1} \cdot A_{c1}} \cdot \frac{-F_k / F_{Nc2} - \varepsilon_s \cdot E_s \cdot A_s}{1 + F_{Nc1}/F_{Nc2}} \quad (6.63)$$

Aus diesen beiden Dehnungen wird die Querschnittskrümmung ermittelt:

$$\kappa_{cs} = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{c1}}{z_{Ss} - z_{Sc1}} \quad (6.64)$$

## 6.3 Berechnungen im Zustand II

### 6.3.1 Verformung im Bauzustand ( $t = 0$ )

Im Bauzustand sind die Bewehrungslage  $A_{s1}$  und die Betonfläche  $A_{c2}$  vorhanden. Für den Fall, dass es beim Aufbringen der Ortbetonschicht zu Rissen im Fertigteil kommt, ist die Fläche  $A_{c2} = b_2 \cdot x_0$  mit  $x_0$  als Druckzonenhöhe im TQS2; sie wird wie folgt bestimmt (s. vorher):

$$x_0 = \frac{1}{E_{cm2} \cdot b_2} \cdot \left[ -E_s \cdot A_{s1} + \sqrt{(E_s \cdot A_{s1})^2 + 2 \cdot E_{cm2} \cdot b_2 \cdot (h_2 - d_{s1}) \cdot E_s \cdot A_{s1}} \right] \quad (6.65)$$

Bezieht man  $x_0$  auf die Querschnittshöhe  $h_2$ , so erhält man:

$$\frac{x_0}{h_2} = -\alpha_{E2} \cdot \rho_{s1,2} + \sqrt{(\alpha_{E2} \cdot \rho_{s1,2})^2 + 2 \cdot \left(1 - \frac{d_{s1}}{h_2}\right) \cdot \alpha_{E2} \cdot \rho_{s1,2}} \quad (6.66)$$

( $\alpha_{E2}$ ;  $\rho_{s1,2}$  siehe Abschnitt 6.2.2).

Aus dem Momentengleichgewicht wird die Krümmung ermittelt zu:

$$\kappa_0 = \frac{M_0}{E_{cm2} \cdot I_{c2x} \cdot \beta_0''} \quad (6.67)$$

mit  $I_{c2x} = \frac{b_2 \cdot x_0^3}{12}$  und

$$\beta_0'' = 6 \cdot \frac{h_2}{x_0} - 6 \cdot \frac{d_{s1}}{x_0} - 2$$

### 6.3.2 Elastische Verformung nach Erhärten des Ortbetons ( $t = B$ )

Die zusätzliche Belastung zum Zeitpunkt  $t = B$  wird von beiden Teilquerschnitten aufgenommen. I. d. R. entstehen dabei im TQS1 Druckspannungen, je nach Größe der Belastung ggf. aber auch Zugspannungen am unteren Rand. Die nachfolgenden Ausführungen setzen jedoch voraus, dass diese die Betonzugfestigkeit nicht überschreiten, so dass der Teilquerschnitt 1 ungerissen bleibt. Dies ist im Einzelfall – insbes. bei dünnen TQS2 mit dicken Ortbetonergänzungen (TQS1) – kritisch zu überprüfen. Im TQS2 darf nur der durch die Druckzonenhöhe  $x_0$  definierte Bereich als ungerissen angesetzt werden. Bei Belastung durch das Moment  $M_z$  vergrößert sich jedoch die Rissbildung; dadurch bedingt lagern sich die Kräfte in den Restquerschnitt um. Die endgültige Dehnungsverteilung kann daher nur iterativ berechnet werden.

In Abb. 6.5 ist das Spannungsbild an der Übergangsstelle zwischen den beiden Teilquerschnitten dargestellt. Die Spannung  $\sigma_0$  aus der Belastung zum Zeitpunkt  $t = 0$  wirkt nur im TQS 2. Durch die Zusatzlast (Zeitpunkt  $t = B$ ) entstehen in beiden Querschnitten Spannungen, an der Übergangsstelle entsteht bei unterschiedlichen Elastizitätsmodulen ein Sprung. Es wird angenommen, dass Risse sich bis zum Spannungsnullpunkt im TQS2 entwickeln. Bezogen auf die Oberkante des TQS2 erhält man den Nullpunkt aus

$$\sigma_o(x_\sigma) = -\sigma_z(x_\sigma)$$

$$\text{mit } \sigma_o(x_\sigma) = \varepsilon_o(x_\sigma) \cdot E_{cm2} \quad (\text{Spannung aus } M_0)$$

$$\sigma_z(x_\sigma) = \varepsilon_z(x_\sigma) \cdot E_{cm2} \quad (\text{Spannung aus } M_z)$$

Die Dehnungen werden aus  $\varepsilon_o(x_\sigma) = -(x_0 - x_\sigma) \cdot \kappa_0$  und  $\varepsilon_z(x_\sigma) = -(x_z - x_\sigma) \cdot \kappa_z$  bestimmt und daraus die Stelle  $x_\sigma$ :

$$x_\sigma = \frac{x_0 \cdot \kappa_0 + x_z \cdot \kappa_z}{\kappa_0 + \kappa_z} \quad (6.68)$$

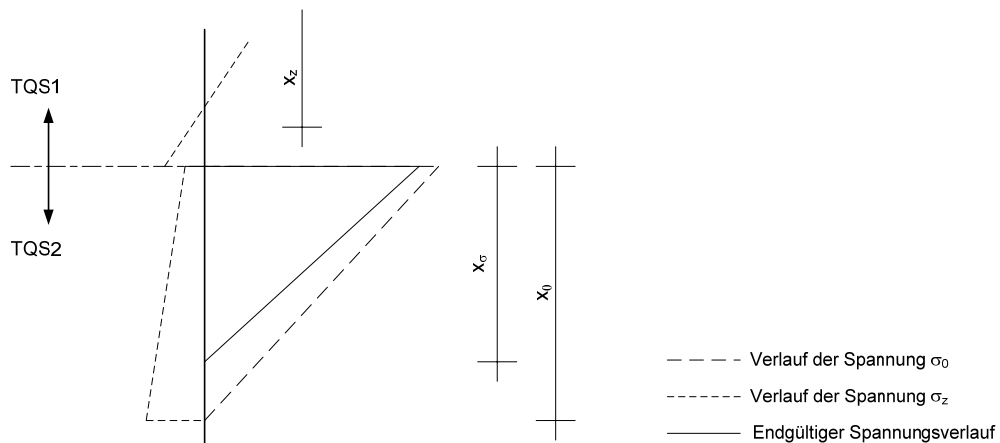


Abb. 6.5: Spannungsverläufe im Zustand II

Die Druckzonenhöhe  $x_z$  und die Krümmung  $\kappa_z$  werden unter der Annahme eines ungerissenen Querschnitts berechnet, der aus  $A_{c1} = h_1 \cdot b_1$  und  $A_{c2x} = x_0 \cdot b_2$  besteht. Es können also auch fiktive Zugspannungen vom Beton aufgenommen werden, solange diese kleiner sind als die Druckspannungen zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Aus dem Kräftegleichgewicht kann die Druckzonenhöhe  $x_z'$  (bezogen auf Oberkante des TQS1:  $x_z = x_z' - h_1$ ) berechnet werden:

$$x_z' = \frac{h_1 / 2 \cdot \alpha_{Ec} \cdot A_{c1} / A_{c2x} + (h_1 + x_0 / 2) + \alpha_{E2} \cdot (\rho_{s1,2x} \cdot d + \rho_{s2,2x} \cdot d_{s2})}{\alpha_{Ec} \cdot A_{c1} / A_{c2x} + \alpha_{E2} \cdot (\rho_{s1,2x} + \rho_{s2,2x}) + 1} \quad (6.69)$$

Die Krümmung infolge des Momentes  $M_z$  beträgt:

$$\kappa_z = \frac{M_z}{E_{cm2} \cdot I_{c2x} \cdot \beta_x''} \quad (6.70)$$

Es ist  $I_{c2x} = b_2 \cdot x_0^3 / 12$  die Biegesteifigkeit des auf die Druckzonenhöhe  $x_0$  reduzierten Fertigteilquerschnitts und  $\beta_x''$  ein wie folgt zu berechnender Vergrößerungsfaktor:

$$\beta_x'' = 12 \cdot \alpha_{Ec} \cdot \frac{A_{c1}}{A_{c2x}} \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot \xi_{1x}^2 - \xi_{1x} \cdot \xi_{xx} + \xi_{xx}^2 \right] + 12 \cdot \left[ \xi_{1x}^2 + \xi_{1x} + \xi_{xx}^2 - 2 \cdot \xi_{xx} \cdot \left( \xi_{1x} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \right] \quad (6.71)$$

$$+ 12 \cdot \alpha_{E2} \cdot \rho_{s1,2x} \frac{(d - x_z')^2}{x_0^2} + 12 \cdot \alpha_{E2} \cdot \rho_{s2,2x} \frac{(x_z' - d_{s2})^2}{x_0^2}$$

mit

$$\alpha_{Ec} = E_{cm1} / E_{cm2}, \quad \alpha_{E2} = E_s / E_{cm2}, \quad \rho_{s1,2x} = A_{s1} / A_{c2x}, \quad \rho_{s2,2x} = A_{s2} / A_{c2x}, \quad \xi_{1x} = h_1 / x_0, \quad \xi_{xx} = x_z' / x_0$$

Die durch die Verkleinerung des bei  $t = 0$  ungerissenen Bereiches freiwerdende Kraft muss zur Belastung aus  $M_z$  addiert werden. Die zusätzliche Kraft ist:

$$N_{c2,B-0} = 1/2 \cdot (x_0 - x_\sigma) \cdot b_2 \cdot (\varepsilon_{c2o,0} + \kappa_0 \cdot x_\sigma) \cdot E_{cm2} \quad (6.72)$$

Der Kraftangriffspunkt befindet sich bei (bezogen auf die Mittelachse des Rest-TQS2):

$$e_{c2,B-0} = \frac{x_\sigma}{2} + \frac{x_0 - x_\sigma}{3} \quad (6.73)$$

Das Zusatzmoment, das den TQS2 zusätzlich belastet, beträgt dann

$$M_{c2,B-0} = -N_{c2,B-0} \cdot e_{c2,B-0} \quad (6.74)$$

Damit können die Dehnungen mit dem zuvor dargestellten Kraftgrößenverfahren (s. Abschn. 6.2.2) bestimmt werden:

$$\delta_{10} = \frac{M_z}{E_{cm1} \cdot I_{c1}} \cdot \frac{h_1}{2} + \frac{M_{c2,B-0}}{E_{cm2} \cdot I_{c2x}} \cdot \frac{x_\sigma}{2} - \frac{N_{c2,B-0}}{E_{cm2} \cdot A_{c2x}} \quad (6.75)$$

$$\delta_{20} = -\frac{M_z}{E_{cm1} \cdot I_{c1}} + \frac{M_{c2,B-0}}{E_{cm2} \cdot I_{c2x}} \quad (6.76)$$

$$\delta_{30} = \frac{M_{c2,B-0}}{E_{cm2} \cdot I_{c2x}} \cdot z_{s1} + \frac{N_{c2,B-0}}{E_{cm2} \cdot A_{c2x}} \quad (6.77)$$

$$\delta_{40} = -\frac{M_z}{E_{cm1} \cdot I_{c1}} \cdot z_{s2} \quad (6.78)$$

Zu Berücksichtigung des Zustandes II werden  $I_{c2}$  und  $A_{c2}$  durch die auf die Nutzhöhe  $x_\sigma$  bezogenen Werte  $I_{c2x}$  und  $A_{c2x}$  sowie  $h_2/2$  durch  $x_\sigma/2$  ersetzt. Mit dem auf die Mittelachse des verbleibenden Querschnittes bezogenen Hebelarm  $z_{s1}$  (es gilt  $z_{s1} = h_2 - x_\sigma/2 - d_{s1}$ ) können die Dehnungen berechnet werden:

$$\varepsilon_{c10,z} = -M_z \cdot k_{y1} \cdot \frac{h_1}{2} + X_1 \cdot \left( k_{A1} - \frac{h_1}{2} \cdot k_{y1} \cdot \frac{h_1}{2} \right) + X_2 \cdot \left( k_{y1} \cdot \frac{h_1}{2} \right) + X_3 \cdot 0 + X_4 \cdot \left( k_{A1} + z_{s2} \cdot k_{y1} \cdot \frac{h_1}{2} \right) \quad (6.79)$$

$$\varepsilon_{c1u,z} = M_z \cdot k_{y1} \cdot \frac{h_1}{2} + X_1 \cdot \left( k_{A1} + \frac{h_1}{2} \cdot k_{y1} \cdot \frac{h_1}{2} \right) + X_2 \cdot \left( -k_{y1} \cdot \frac{h_1}{2} \right) + X_3 \cdot 0 + X_4 \cdot \left( k_{A1} - z_{s2} \cdot k_{y1} \cdot \frac{h_1}{2} \right) \quad (6.80)$$

$$\varepsilon_{c20,z} = N_{c2,B-0} \cdot k_{A2} - M_{c2,B-0} \cdot k_{y2} \cdot \frac{x_\sigma}{2} + X_1 \cdot \left( -k_{A2} - \frac{x_\sigma}{2} \cdot k_{y2} \cdot \frac{x_\sigma}{2} \right) + X_2 \cdot \left( -k_{y2} \cdot \frac{x_\sigma}{2} \right) + X_3 \cdot \left( k_{A2} - z_{s1} \cdot k_{y2} \cdot \frac{x_\sigma}{2} \right) + X_4 \cdot 0 \quad (6.81)$$

$$\varepsilon_{c2u,z} = N_{c2,B-0} \cdot k_{A2} + M_{c2,B-0} \cdot k_{y2} \cdot \left( h_2 - \frac{x_\sigma}{2} \right) + X_1 \cdot \left( -k_{A2} + \frac{x_\sigma}{2} \cdot k_{y2} \cdot \left( h_2 - \frac{x_\sigma}{2} \right) \right) + X_2 \cdot \left( k_{y2} \cdot \left( h_2 - \frac{x_\sigma}{2} \right) \right) \quad (6.82)$$

$$+ X_3 \cdot \left( k_{A2} + z_{s1} \cdot k_{y2} \cdot \left( h_2 - \frac{x_\sigma}{2} \right) \right) + X_4 \cdot 0$$

$$\varepsilon_{s1z} = -X_3 \cdot k_{s1} \quad (6.83)$$

$$\varepsilon_{s2z} = -X_4 \cdot k_{s2} \quad (6.84)$$

Durch die zusätzliche Belastung aus  $N_{c2,B-0}$  und  $M_{c2,B-0}$  verkleinert sich der ungerissene Bereich des TQS2 wiederum, so dass eine erneute Berechnung erforderlich ist. Allerdings sind, bedingt durch die geringen Unterschiede zwischen  $x_0$  und  $x_\sigma$  sowie der relativ kleinen Spannung in der Nähe des Nulldurchganges  $x_0$ , die Veränderungen so klein, dass i.d.R. eine einmalige Iteration (wie dargestellt) ausreichend genaue Ergebnisse liefert. Die zusätzliche Krümmung zum Zeitpunkt  $t = B$  beträgt somit:

$$\kappa_z = \frac{\varepsilon_{c2u,z} - \varepsilon_{c10,z}}{h_1 + h_2} \quad (6.85)$$

### 6.3.3 Verformungen nach Kriechen ( $t = \infty$ )

Durch das Kriechen verändern sich die Druckzonenhöhe und damit die Steifigkeit des TQS2 zusätzlich. Die Krümmung zum Zeitpunkt  $t = \infty$  wird ebenfalls iterativ bestimmt.

Zunächst werden die Betondehnungen zum Zeitpunkt  $t = B$  in einen Spannungszustand umgewandelt. Über die Spannungen  $\sigma_{c1,B} = \varepsilon_{c1,z} \cdot E_{cm1}$  und  $\sigma_{c2,B} = (\varepsilon_{c2,0} + \varepsilon_{c2,z}) \cdot E_{cm2}$  können jeweils die resultierenden Kräfte eines Teilquerschnitts bestimmt werden:

$$F_{c1,B} = \frac{\sigma_{c10,B} + \sigma_{c1u,B}}{2} \cdot h_1 \cdot b_1 \quad (6.86)$$

$$F_{c2,B} = \frac{\sigma_{c20,B}}{2} \cdot x_\sigma \cdot b_2 \quad (6.87)$$

Mit den Kraftangriffspunkten (bezogen auf die Mittelachse des jeweiligen Teilquerschnitts)

$$e_{c1,B} = \left( \sigma_{c10,B} - \frac{F_{c1,B}}{A_{c1}} \right) \cdot \frac{-2 \cdot I_{c1}}{F_{c1,B} \cdot h_1} \quad (6.88)$$

$$e_{c2,B} = \left( \sigma_{c20,B} - \frac{F_{c2,B}}{A_{c2x}} \right) \cdot \frac{-2 \cdot I_{c2x}}{F_{c2,B} \cdot x_\sigma} \quad (6.89)$$

erhält man die beiden Momente  $M_{c1,B} = F_{c1,B} \cdot e_{c1,B}$  und  $M_{c2,B} = F_{c2,B} \cdot e_{c2,B}$ .

Im ersten Iterationsschritt werden diese Kräfte und Momente als „äußere“ Schnittgrößen auf die jeweiligen Teilquerschnitte aufgebracht und die daraus resultierenden Dehnungen berechnet. Der TQS2 ist dabei bis zur Stelle  $x_{c,1} = x_\sigma$  gerissen. Mit den bereits bekannten Hilfwerten  $k_{Ai,\varphi}$ ,  $k_{Ii,\varphi}$  und  $k_{Si}$  erhält man:

$$\delta_{10} = F_{c1,B} \cdot k_{A1,\varphi} - F_{c2,B} \cdot k_{A2,\varphi} + M_{c1,B} \cdot k_{I1,\varphi} \cdot h_1 / 2 + M_{c2,B} \cdot k_{I2,\varphi} \cdot x_{c,1} / 2 \quad (6.90)$$

$$\delta_{20} = -M_{c1,B} \cdot k_{I1,\varphi} + M_{c2,B} \cdot k_{I2,\varphi} \quad (6.91)$$

$$\delta_{30} = F_{c2,B} \cdot k_{A2,\varphi} + M_{c2,B} \cdot k_{I2,\varphi} \cdot z_{s1} \quad (6.92)$$

$$\delta_{40} = F_{c1,B} \cdot k_{A1,\varphi} - M_{c1,B} \cdot k_{I1,\varphi} \cdot z_{s2} \quad (6.93)$$

Die Aufstellung der Koeffizientenmatrix erfolgt wie in Abschnitt 6.2.3. Somit können die vier Unbekannten  $X_i$  berechnet werden. Aus diesen ergeben sich wiederum die Dehnungen:

$$\varepsilon_{c10,1} = N_{c1,B} \cdot k_{A1,\varphi} - M_{c1,B} \cdot k_{I1,\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} + X_1 \cdot \left( k_{A1,\varphi} - \frac{h_1}{2} \cdot k_{I1,\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) + X_2 \cdot \left( k_{I1,\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) + X_3 \cdot 0 + X_4 \cdot \left( k_{A1,\varphi} + z_{s2} \cdot k_{I1,\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) \quad (6.94)$$

$$\varepsilon_{c1u,1} = N_{c1,B} \cdot k_{A1,\varphi} + M_{c1,B} \cdot k_{I1,\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} + X_1 \cdot \left( k_{A1,\varphi} + \frac{h_1}{2} \cdot k_{I1,\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) + X_2 \cdot \left( -k_{I1,\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) + X_3 \cdot 0 + X_4 \cdot \left( k_{A1,\varphi} - z_{s2} \cdot k_{I1,\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) \quad (6.95)$$

$$\varepsilon_{c20,1} = N_{c2,B} \cdot k_{A2,\varphi} - M_{c2,B} \cdot k_{I2,\varphi} \cdot \frac{x_{c,1}}{2} + X_1 \cdot \left( -k_{A2,\varphi} - \frac{x_{c,1}}{2} \cdot k_{I2,\varphi} \cdot \frac{x_{c,1}}{2} \right) + X_2 \cdot \left( -k_{I2,\varphi} \cdot \frac{x_{c,1}}{2} \right) + X_3 \cdot \left( k_{A2,\varphi} - z_{s1} \cdot k_{I2,\varphi} \cdot \frac{x_{c,1}}{2} \right) + X_4 \cdot 0 \quad (6.96)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{c2u,1} = & N_{c2,B-0} \cdot k_{A2,\varphi} + M_{c2,B-0} \cdot k_{I2,\varphi} \cdot \left(h_2 - \frac{x_{c,1}}{2}\right) + X_1 \cdot \left(-k_{A2,\varphi} + \frac{x_{c,1}}{2} \cdot k_{I2,\varphi} \cdot \left(h_2 - \frac{x_{c,1}}{2}\right)\right) + X_2 \cdot \left(k_{I2,\varphi} \cdot \left(h_2 - \frac{x_{c,1}}{2}\right)\right) \\ & + X_3 \cdot \left(k_{A2,\varphi} + z_{s1} \cdot k_{I2,\varphi} \cdot \left(h_2 - \frac{x_{c,1}}{2}\right)\right) + X_4 \cdot 0 \end{aligned} \quad (6.97)$$

Aus den elastischen Dehnungen  $\varepsilon_{c2,B}$  und den im ersten Iterationsschritt ermittelten Kriechdehnungen  $\varepsilon_{c2,1}$  ergibt sich folgender Dehnungsnulldurchgang:

$$x_2 = \frac{\varepsilon_{c2o,B} + \varepsilon_{c2o,1}}{(\varepsilon_{c2o,B} + \varepsilon_{c2o,1}) - (\varepsilon_{c2u,B} + \varepsilon_{c2u,1})} \cdot h_2 \quad (6.98)$$

Allgemein formuliert kann der n-te Iterationsschritt beschrieben werden:

$$x_n = \frac{\varepsilon_{c2o,B} + \varepsilon_{c2o,n-1}}{(\varepsilon_{c2o,B} + \varepsilon_{c2o,n-1}) - (\varepsilon_{c2u,B} + \varepsilon_{c2u,n-1})} \cdot h_2 \quad (6.99)$$

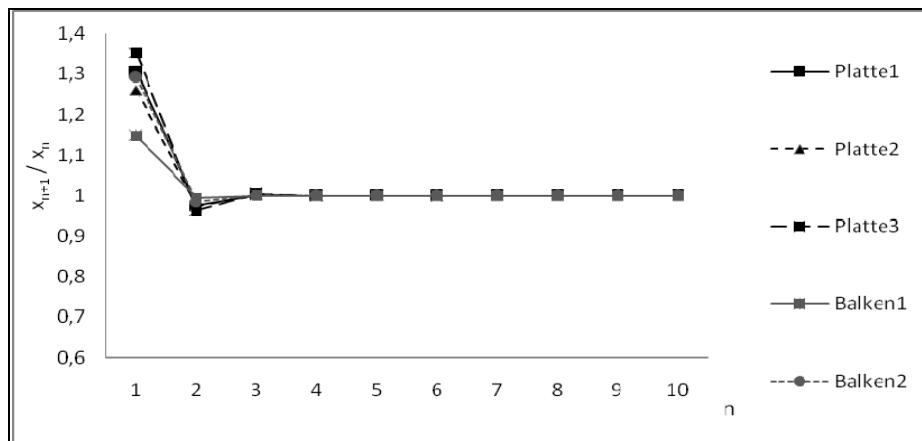
Mit diesem Nulldurchgang werden alle Steifigkeitsbeiwerte und der Abstand der Bewehrungslage von Nullpunkt neu bestimmt:

$$k_{A2,\varphi} = \frac{\rho \cdot \varphi_2}{E_{cm2} \cdot b_2 \cdot x_n}; k_{I2,\varphi} = \frac{\rho \cdot \varphi_2}{E_{cm2} \cdot b_2 \cdot x_n^3 / 12}; z_{s1} = h_2 - x_n / 2 - d_{s1}$$

Der Kraftangriffspunkt wird zu  $e_{c2,n} = e_{c2,B} + x_n/2 - x_n/2$  bestimmt. Mit der Normalkraft und dem neu berechneten Moment kann die Ermittlung der Dehnungen in der bereits gezeigten Form erfolgen.

Meistens stellt sich bereits nach der dritten bis vierten Iteration der gesuchte Wert ein (vgl. Abb. 6.6 mit einer Darstellung der Auswirkungen der Iterationsschritte auf die Druckzonenänderung einiger Platten und Balken). Ist der endgültige Dehnungsverlauf gefunden, so kann die Krümmung über die bereits bekannte Beziehung ermittelt werden:

$$K_c = \frac{\varepsilon_{c2u,n} - \varepsilon_{c1o,n}}{h_1 + h_2} \quad (6.100)$$



	L [m]	TQS 1			TQS 2		
		h [cm]	Beton	$\varphi$	h [cm]	Beton	$\varphi$
Platte 1	5	20	C 20/25	3	10	C 30/37	2,5
Platte 2	5	20	C 30/37	3,5	10	C 40/50	1,5
Platte 3	7	20	C 20/25	3	20	C 30/37	2,5
Balken 1	5	40	C 20/25	3	20	C 30/37	2,5
Balken 2	10	40	C 30/37	3	40	C 40/50	2,5

Abb. 6.6: Iterative Ermittlung des Dehnungsnulldurchganges

### 6.3.4 Verformungen nach abgeschlossenem Schwindvorgang ( $t = \infty$ )

Im Zustand II wirkt das Betonschwinden des TQS1 auf der gesamten Höhe  $h_1$ , im TQS2 nur auf dem ungerissenen Bereich; er wurde in den vorherigen Abschnitten bei Belastungsbeginn zu  $x_\sigma$  und nach abgeschlossenem Kriechen zu  $x_c$  bestimmt, d. h. er verändert sich während des Schwindvorganges. Setzt man diese beiden Werte konstant während der gesamten Schwinddauer an, so erhält man einen unteren (für  $x_c$ ) und einen oberen Grenzwert ( $x_\sigma$ ) der Krümmung infolge von Schwinden. Vergleichsrechnungen zeigen, dass sich die Abweichungen dieser Grenzwerte – auch bei größeren Unterschieden von  $x_\sigma$  und  $x_c$  – kleiner als fünf Prozent sind, so dass vereinfachend und auf der sicheren Seite liegend der Wert  $x_\sigma$  für die gesamte Berechnung angesetzt werden kann. Somit sind analog zu 6.2.4 die Verformungsgrößen:

$$\delta_{10} = -\varepsilon_{cs1} + \varepsilon_{cs2} \quad (6.101)$$

$$\delta_{20} = 0 \quad (6.102)$$

$$\delta_{30} = -\varepsilon_{cs2} \quad (6.103)$$

$$\delta_{40} = -\varepsilon_{cs1} \quad (6.104)$$

Die Faktoren  $k_{A2,1+\varphi}$  und  $k_{I2,1+\varphi}$  werden wie folgt angepasst:

$$k_{A2,1+\varphi} = \frac{1 + \rho \cdot \varphi_2}{E_{cm2} \cdot A_{c2x}} \quad \text{mit } A_{c2x} = b_2 \cdot x_\sigma; \quad k_{I2,1+\varphi} = \frac{1 + \rho \cdot \varphi_2}{E_{cm2} \cdot I_{c2x}} \quad \text{mit } I_{c2x} = \frac{b_2 \cdot x_\sigma^3}{12}$$

Auch hier erfolgt die Lösung des Gleichungssystems nach der bereits bekannten Methode. Die Dehnungen am Rand der Teilquerschnitte und in den Bewehrungslagen betragen:

$$\varepsilon_{c10,s} = \varepsilon_{cs1} - X_1 \cdot \left( k_{A1,1+\varphi} - \frac{h_1}{2} \cdot k_{I1,1+\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) - X_2 \cdot \left( k_{I1,1+\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) - X_3 \cdot 0 - X_4 \cdot \left( k_{A1,1+\varphi} + z_{s2} \cdot k_{I1,1+\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) \quad (6.105)$$

$$\varepsilon_{c1u,s} = \varepsilon_{cs1} - X_1 \cdot \left( k_{A1,1+\varphi} + \frac{h_1}{2} \cdot k_{I1,1+\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) - X_2 \cdot \left( -k_{I1,1+\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) - X_3 \cdot 0 - X_4 \cdot \left( k_{A1,1+\varphi} - z_{s2} \cdot k_{I1,1+\varphi} \cdot \frac{h_1}{2} \right) \quad (6.106)$$

$$\varepsilon_{c20,s} = \varepsilon_{cs2} - X_1 \cdot \left( -k_{A2,1+\varphi} - \frac{x_\sigma}{2} \cdot k_{I2,1+\varphi} \cdot \frac{x_\sigma}{2} \right) - X_2 \cdot \left( -k_{I2,1+\varphi} \cdot \frac{x_\sigma}{2} \right) - X_3 \cdot \left( k_{A2,1+\varphi} - z_{s1} \cdot k_{I2,1+\varphi} \cdot \frac{x_\sigma}{2} \right) - X_4 \cdot 0 \quad (6.107)$$

$$\varepsilon_{c2u,s} = \varepsilon_{cs2} - X_1 \cdot \left( -k_{A2,1+\varphi} + \frac{x_\sigma}{2} \cdot k_{I2,1+\varphi} \cdot \left( h_2 - \frac{x_\sigma}{2} \right) \right) - X_2 \cdot \left( k_{I2,1+\varphi} \cdot \left( h_2 - \frac{x_\sigma}{2} \right) \right) - X_3 \cdot \left( k_{A2,1+\varphi} + z_{s1} \cdot k_{I2,1+\varphi} \cdot \left( h_2 - \frac{x_\sigma}{2} \right) \right) - X_4 \cdot 0 \quad (6.108)$$

$$\varepsilon_{s1,s} = X_3 \cdot k_{s1} \quad (6.109)$$

$$\varepsilon_{s2,s} = X_4 \cdot k_{s2} \quad (6.110)$$

Die Krümmung wird über die Dehnungsdifferenz und deren Abstand bestimmt:

$$\kappa_s = \frac{\varepsilon_{c2u,cs} - \varepsilon_{c10,cs}}{h_1 + h_2} \quad (6.111)$$

Die alternative Lösung nach Gl. (6.61) – (6.64) kann auf den Zustand II angepasst werden, indem die Bauteilhöhe  $h_2$  durch die Höhe des ungerissenen Bereiches  $x_\sigma$  ersetzt wird.

Die Schwerpunkte der einzelnen Teilquerschnitte sind damit:

$$\text{- Bewehrung: } z_{Ss} = \frac{d_{s2} \cdot A_{s2} + (h_1 + h_2 - d_{s1}) \cdot A_{s1}}{A_{s2} + A_{s1}} \quad (6.112)$$

$$\text{- TQS1: } z_{Sc1} = h_1 / 2 \quad (6.113)$$

$$\text{- TQS2: } z_{Sc2} = h_1 + x_\sigma / 2 \quad (6.114)$$

Die dazugehörigen Querschnittsflächen und Trägheitsmomente betragen:

- Flächen:  $A_s = A_{s1} + A_{s2}; A_{c1} = h_1 \cdot b_1; A_{c2x} = h_2 \cdot x_\sigma$
- Flächenträgheitsmomente:  $I_s = A_{s1} \cdot (h_1 + h_2 - z_{Ss} - d_{s1})^2 + A_{s2} \cdot (z_{Ss} - d_{s2})^2;$   
 $I_{c1} = 1/12 \cdot b_1 \cdot h_1^3; I_{c2x} = 1/12 \cdot b_2 \cdot x_\sigma^3$

Tauscht man in den Gleichungen (6.60) bis (6.64) jeweils die Werte für  $A_{c2}$  und  $I_{c2}$  durch  $A_{c2x}$  und  $I_{c2x}$  aus, so erhält man die Krümmung durch Schwinden im Zustand II.

## 6.4 Besondere Fertigteilvarianten

### 6.4.1 Gitterträger mit verstärktem Obergurt

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  werden Fertigteil ( $A_{c2}$ ), Zugbewehrung im Fertigteil ( $A_{s1}$ ) und Obergurtbewehrung des Gitterträgers ( $A_{OG}$ ) belastet. Die Berechnung erfolgt über das Kraftgrößenverfahren mit den in Abb. 6.6 dargestellten Unbekannten  $X_i$ .

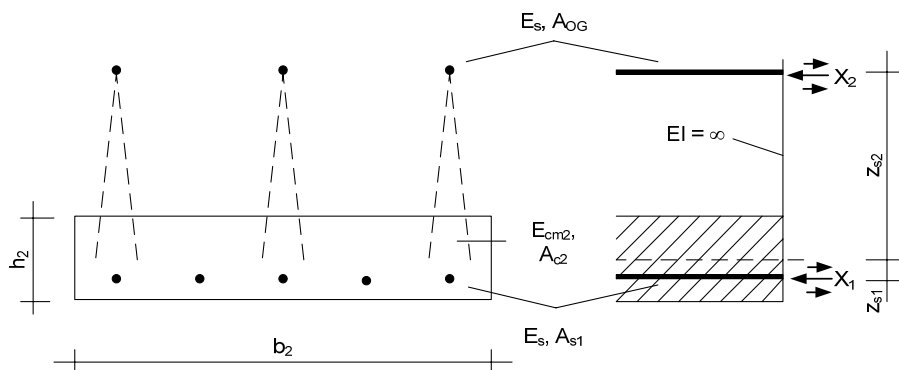


Abb. 6.7: Schematische Darstellung der Gitterträgerplatte

Es wird davon ausgegangen, dass die Gitterträger den Obergurt mit dem Fertigteil biegesteif verbinden. Die Abstände zwischen Zugbewehrung bzw. Obergurt und der Mittelachse des TQS2 betragen:

$$z_{s1} = h_2 / 2 - d_{s1}; \quad z_{s2} = h_2 / 2 + h_1 - d_{s2}$$

Die Verformungsgrößen  $\delta_{i0}$  aus der äußeren Belastung und  $\delta_{ij}$  aus den Kraftgrößen  $X_i$  ergeben sich zu:

$$\delta_{10} = \left( \frac{M_0}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} \cdot z_{s1} \right) \cdot L \quad (6.115)$$

$$\delta_{20} = \left( -\frac{M_0}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} \cdot z_{s2} \right) \cdot L \quad (6.116)$$

$$\delta_{11} = \left( \frac{1}{E_s \cdot A_{s1}} + \frac{1}{E_{cm2} \cdot A_{c2}} + \frac{1 \cdot z_{s1}}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} z_{s1} \right) \cdot L \quad (6.117)$$

$$\delta_{22} = \left( \frac{1}{E_s \cdot A_{OG}} + \frac{1}{E_{cm2} \cdot A_{c2}} + \frac{1 \cdot z_{s2}}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} z_{s2} \right) \cdot L \quad (6.118)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \left( \frac{1}{E_{cm2} \cdot A_{c2}} - \frac{1}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} z_{s1} \cdot z_{s2} \right) \cdot L \quad (6.119)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man die beiden unbekannt Kraftgrößen:

$$X_1 = \frac{\delta_{20} \cdot \delta_{12} - \delta_{10} \cdot \delta_{22}}{\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12} \cdot \delta_{12}} \quad (6.120)$$

$$X_2 = \frac{\delta_{20} \cdot \delta_{11} - \delta_{10} \cdot \delta_{12}}{\delta_{12} \cdot \delta_{12} - \delta_{22} \cdot \delta_{11}} \quad (6.121)$$



Somit betragen die Dehnungen in der Bewehrung und an Ober- und Unterkante des Fertigteils:

$$\varepsilon_{c2o,0} = -\frac{M_0}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} \cdot \frac{h_2}{2} + X_1 \cdot \left( \frac{1}{E_{cm2} \cdot A_{c2}} - \frac{z_{s1}}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} \cdot \frac{h_2}{2} \right) + X_2 \cdot \left( \frac{1}{E_{cm2} \cdot A_{c2}} + \frac{z_{s2}}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} \cdot \frac{h_2}{2} \right) \quad (6.122)$$

$$\varepsilon_{c2u,0} = \frac{M_0}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} \cdot \frac{h_2}{2} + X_1 \cdot \left( \frac{1}{E_{cm2} \cdot A_{c2}} + \frac{z_{s1}}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} \cdot \frac{h_2}{2} \right) + X_2 \cdot \left( \frac{1}{E_{cm2} \cdot A_{c2}} - \frac{z_{s2}}{E_{cm2} \cdot I_{c2}} \cdot \frac{h_2}{2} \right) \quad (6.123)$$

$$\varepsilon_{s1,0} = -\frac{X_1}{E_s \cdot A_{s1}} \quad (6.124)$$

$$\varepsilon_{OG,0} = -\frac{X_2}{E_s \cdot A_{OG}} \quad (6.125)$$

Die Krümmung kann wie folgt berechnet werden:

$$\kappa_0 = \frac{\varepsilon_{c2u,0} - \varepsilon_{c2o,0}}{h_2} \quad (6.126)$$

Alternativ kann letztere auch über die Druckzonenhöhe  $x_0$  und eine ideale, um den Faktor  $\beta_0'$  erhöhte Biegesteifigkeit berechnet werden.

$$x_0 = \frac{h_2/2 + \alpha_{E2} \cdot \rho_{s1,2} \cdot (h_2 - d_{s1}) + \alpha_{E2} \cdot \rho_{OG,2} \cdot (d_{s2} - h_1)}{\alpha_{E2} \cdot \rho_{s1,2} + \alpha_{E2} \cdot \rho_{OG,2} + 1} \quad (6.127)$$

$$\kappa_0 = \frac{M_0}{E_{cm2} \cdot I_{c2} \cdot \beta_0'} \quad (6.128)$$

mit

$$\beta_0' = 4 \cdot \alpha_{E2} \cdot \left[ \rho_{s1,2} \cdot \left( \xi_{x2}^2 - 4 \cdot \xi_{x2} + 4 \cdot \xi_{x2} \frac{d_{s1}}{h_2} + 3 + 3 \cdot \left( \frac{d_{s1}}{h_2} \right)^2 - 6 \cdot \frac{d_{s1}}{h_2} \right) + \rho_{OG2} \cdot \left( \xi_{x2}^2 + 4 \cdot \xi_{x2} \cdot \frac{h_1}{h_2} - 4 \cdot \xi_{x2} \frac{d_{s1}}{h_2} + 3 \cdot \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^2 + 3 \cdot \left( \frac{d_{s1}}{h_2} \right)^2 - 6 \cdot \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{d_{s1}}{h_2} \right) \right] + 4 \cdot \xi_{x2}^2 - 8 \cdot \xi_{x2} + 4 \quad (6.129)$$

Dabei sind  $\alpha_{E2} = E_s / E_{cm2}$ ,  $\rho_{s1,2} = A_{s1} / A_{c2}$ ,  $\rho_{OG,2} = A_{OG} / A_{c2}$  und  $\xi_{x2} = x_0 / h_2$

Im Zustand II muss die Querschnittshöhe  $h_2$  durch die Druckzonenhöhe  $x_0$  ersetzt werden. Die bezogene Druckzonenhöhe ergibt sich zu:

$$\frac{x}{h_2} = -\alpha_{E2} \cdot (\rho_{s1,2} + \rho_{OG,2}) + \sqrt{\alpha_{E2}^2 \cdot (\rho_{s1,2} + \rho_{OG,2})^2 + 2 \cdot \alpha_{E2} \cdot \left( \rho_{s1,2} \cdot \frac{h_2 - d_{s1}}{h_2} - \rho_{OG,2} \cdot \frac{h_1 - d_{s2}}{h_2} \right)} \quad (6.130)$$

Der Faktor  $\beta_0''$  wird um den in Gl. (6.129) vorhandenen Anteil der Betonzugzone reduziert auf:

$$\beta_0'' = 4 \cdot \alpha_{E2} \cdot \left[ \rho_{s1,2} \cdot \left( \xi_{x2}^2 - 4 \cdot \xi_{x2} + 4 \cdot \xi_{x2} \frac{d_{s1}}{h_2} + 3 + 3 \cdot \left( \frac{d_{s1}}{h_2} \right)^2 - 6 \cdot \frac{d_{s1}}{h_2} \right) + \rho_{OG2} \cdot \left( \xi_{x2}^2 + 4 \cdot \xi_{x2} \cdot \frac{h_1}{h_2} - 4 \cdot \xi_{x2} \frac{d_{s1}}{h_2} + 3 \cdot \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^2 + 3 \cdot \left( \frac{d_{s1}}{h_2} \right)^2 - 6 \cdot \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{d_{s1}}{h_2} \right) \right] \quad (6.131)$$

Nach Erhärtung der Ortbetonergänzung kann die Verformung mit den Verfahren nach den Abschnitten 6.2.2 bis 6.2.4 bzw. 6.3.2 bis 6.3.4 bestimmt werden. Die obere Bewehrung  $A_{s2}$  setzt sich aus der Bewehrung des Obergurtes und einer eventuell vorhandenen Zulagebewehrung zusammen, die sich etwa in derselben Höhenlage wie der Obergurt befinden muss.

### 6.4.2 Plattenbalken aus Fertigteil und Ortbetoneergänzung

Fertigteilbalken werden mittels einer kraftschlüssig verbundenen Ortbetoneergänzung zu einem Plattenbalkenquerschnitt ergänzt. Es kann die oben dargestellte Berechnungsmethode verwendet werden, da hier schon verschiedene Breiten für das Fertigteil ( $b_2$ ) und die Ortbetoneergänzung ( $b_1$ ) berücksichtigt werden.

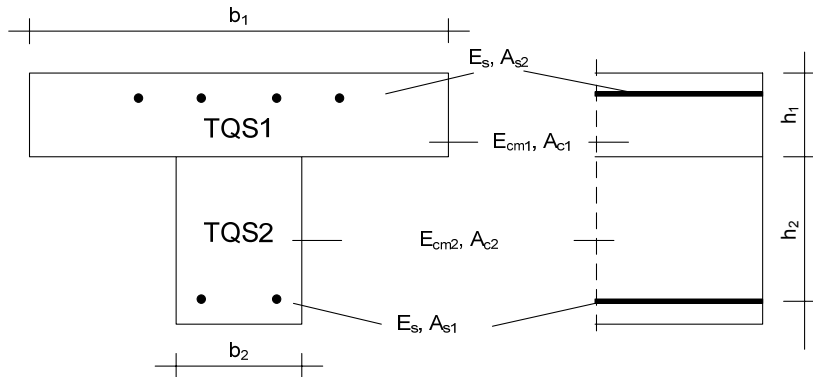


Abb. 6.8: Schematische Darstellung des Plattenbalkens

Alternativ wird der Steg des Fertigteils mit einer dünnen Platte ausgebildet (als sog. Doppelsteg- oder TT-Platten). Dadurch wird eine etwas größere Steifigkeit zum Zeitpunkt  $t = 0$  erzielt. Zur Berechnung werden vereinfachend beide Stege zu einem mit der Breite  $b_2$  zusammengefasst. Die Gesamthöhe des Fertigteils ist  $h_2$  und wird in den Steganteil  $h_s$  und Gurtanteil  $h_G$  aufgeteilt.

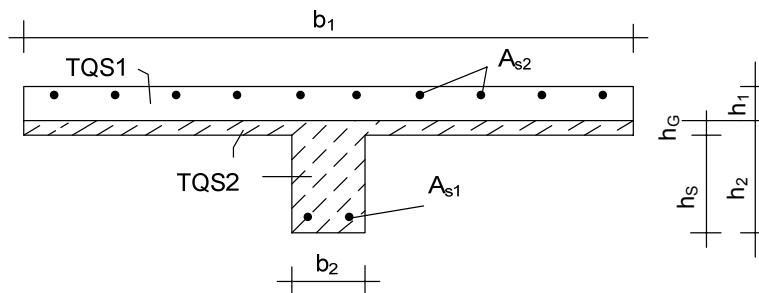


Abb. 6.9: Schematische Darstellung der Doppelsteg-Platte

Ausgehend von den Querschnittsflächen  $A_{c2,G} = h_G \cdot (b_1 - b_2)$  und  $A_{c2} = h_2 \cdot b_2$  sowie den Trägheitsmomenten  $I_{cG} = 1/12 \cdot b_1 \cdot h_G^3$  und  $I_{c2} = 1/12 \cdot b_2 \cdot h_2^3$  können die Druckzonenhöhen zum Zeitpunkt  $t = 0$  wie folgt berechnet werden:

- Zustand I:

$$x_0^I = \frac{E_{cm2} \cdot A_{c2,G} \cdot h_G / 2 + E_{cm2} \cdot A_{c2} \cdot h_2 / 2 + E_s \cdot A_{s1} \cdot (h_2 - d_{s1})}{E_{cm2} \cdot A_{c2,G} + E_{cm2} \cdot A_{c2} + E_s \cdot A_{s1}} \quad (6.132)$$

- Zustand II

$$x_0^{II} = -\frac{1}{b_2 \cdot E_{cm2}} \cdot \left[ E_{cm2} \cdot A_{c2,G} + E_s \cdot A_{s1} - \sqrt{\left( E_{cm2} \cdot A_{c2,G} + E_s \cdot A_{s1} \right)^2 + 2 \cdot b_2 \cdot E_{cm2} \cdot \left( A_{c2,G} \cdot E_{cm2} \cdot h_G / 2 + E_s \cdot A_{s1} \cdot (h_2 - d_{s1}) \right)} \right] \quad (6.133)$$

Die Krümmung ergibt sich aus dem Moment  $M_0$  und der Biegesteifigkeit des Fertigteils:

$$\kappa_0 = \frac{M_0}{E_{cm2} \cdot (I_{cG} \cdot \beta_{cG} + I_{c2} \cdot \beta_{c2})} \quad (6.134)$$

Hierbei sind:

$$\beta_{cG}^I = \beta_{cG}^{II} = 4 \cdot \left[ \frac{2 \cdot \xi_{xG}^3 - 5 \cdot \xi_{xG}^2 + 4 \cdot \xi_{xG} - 1}{2 \cdot \xi_{xG} - 1} \right] \quad (6.135)$$

$$\beta_{c2}^I = 4 \cdot \left[ \left( \xi_{x2}^2 - 2 \cdot \xi_{x2} + 1 \right) + \alpha_{E2} \cdot \rho_{s1,2} \cdot \left( \xi_{x2}^2 + \xi_{x2} \cdot \left( 4 \cdot \frac{d_{s1}}{h_2} - 4 \right) - 6 \cdot \frac{d_{s1}}{h_2} + 3 \cdot \left( \frac{d_{s1}}{h_2} \right)^2 + 3 \right) \right] \quad (6.136)$$

$$\beta_{c2}^{II} = 4 \cdot \alpha_{E2} \cdot \rho_{s1,2} \cdot \left( \xi_{x2}^2 + \xi_{x2} \cdot \left( 4 \cdot \frac{d_{s1}}{h_2} - 4 \right) - 6 \cdot \frac{d_{s1}}{h_2} + 3 \cdot \left( \frac{d_{s1}}{h_2} \right)^2 + 3 \right) \quad (6.137)$$

mit  $\alpha_{E2} = E_s / E_{cm2}$ ,  $\rho_{s1,2} = A_{s1} / A_{c2}$ ,  $\xi_{xG} = x_0 / h_G$  und  $\xi_{x2} = x_0 / h_2$ .

Zum Zeitpunkt  $t = B$  müssen die Gleichungen um den Anteil der Ortbetonschicht  $A_{c1}$  und der Zulagebewehrung  $A_{s2}$  ergänzt werden. Die Gleichungen ändern sich wie folgt:

$$x_z^I = \frac{-E_{cm1} \cdot A_{c1} \cdot h_1 / 2 + E_{cm2} \cdot A_{c2,G} \cdot h_G / 2 + E_{cm2} \cdot A_{c2} \cdot h_2 / 2 + E_s \cdot A_{s1} \cdot (h_2 - d_{s1})}{E_{cm1} \cdot A_{c1} \cdot h_1 / 2 + E_{cm2} \cdot A_{c2,G} + E_{cm2} \cdot A_{c2} + E_s \cdot A_{s1}} \quad (6.138)$$

$$x_z^{II} = -\frac{1}{b_2 \cdot E_{cm2}} \cdot \left[ E_{cm1} \cdot A_{c1} + E_{cm2} \cdot A_{c2,G} + E_s \cdot A_{s1} + E_s \cdot A_{s2} \right. \\ \left. - \sqrt{\left( E_{cm1} \cdot A_{c1} + E_{cm2} \cdot A_{c2,G} + E_s \cdot A_{s1} \right)^2 + 2 \cdot b_2 \cdot E_{cm2} \cdot \left( E_{cm1} \cdot A_{c1} \cdot h_1 / 2 + A_{c2,G} \cdot E_{cm2} \cdot h_G / 2 \right. \right. \\ \left. \left. + E_s \cdot A_{s1} \cdot (h_2 - d_{s1}) + E_s \cdot A_{s2} \cdot (h_1 - d_{s2}) \right)} \right] \quad (6.139)$$

$$\kappa_z = \frac{M_z}{E_{cm1} \cdot \beta_{c1} + E_{cm2} \cdot (I_{cG} \cdot \beta_{cG} + I_{c2} \cdot \beta_{c2})} \quad (6.140)$$

Dabei ist

$$\beta_{c1} = 4 \cdot \left( 2 \cdot \xi_{x1}^2 + 3 \cdot \xi_{x1} + 1 \right) + 4 \cdot \alpha_{E1} \cdot \rho_{s2,1} \cdot \left[ \xi_{x1}^2 + \xi_{x1} \cdot \left( 4 - \frac{d_{s2}}{h_1} \right) - 6 \cdot \frac{d_{s2}}{h_1} + 3 \cdot \left( \frac{d_{s2}}{h_1} \right)^2 + 3 \right] \quad (6.141)$$

mit  $\alpha_{E1} = E_s / E_{cm1}$ ,  $\rho_{s2,1} = A_{s2} / A_{c1}$  und  $\xi_{x1} = x_z / h_1$ .

Die Berechnung der zeitabhängigen Verformungen erfolgt über das zuvor dargestellte Kraftgrößenverfahren. Hier werden die geometrischen Größen des TQS2 durch folgende Werte ersetzt:

$$A_{c2} = h_G \cdot b_1 + (h_2 - h_G) \cdot b_2 \quad (6.142)$$

$$I_{c2} = \frac{2 \cdot (b_1 - b_2) / 2 \cdot h_G^3 + b_2 \cdot h_2^3}{3} - A_{c2} \cdot e_{c2}^2 \quad (6.143)$$

Hierbei bezeichnet  $e_{c2}$  den Schwerpunkt und somit den Kraftangriffspunkt des TQS2, auf den alle Momente bezogen werden müssen. Er wird wie folgt bestimmt (vgl. [Schneider – 08]):

$$e_{c2} = \frac{2 \cdot (b_1 - b_2) / 2 \cdot h_G^2 + b_2 \cdot h_2^2}{2 \cdot A_{c2}} \quad (6.144)$$

Im Zustand II muss unterschieden werden, ob sich der jeweilige Nulldurchgang in der Platte oder im Steg befindet. Es gilt:

$$A_{c2x} = \begin{cases} h_G \cdot b_1 + (x - h_G) \cdot b_2 & \text{für } x > h_G \\ x \cdot b_1 & \text{für } x \leq h_G \end{cases} \quad (6.145)$$

$$I_{c2x} = \begin{cases} \frac{2 \cdot (b_1 - b_2) / 2 \cdot h_G^3 + b_2 \cdot x^3}{3} - A_{c2x} \cdot e_{c2x}^2 & \text{für } x > h_G \\ x^3 \cdot b_1 / 12 & \text{für } x \leq h_G \end{cases} \quad (6.146)$$

$$e_{c2x} = \begin{cases} \frac{2 \cdot (b_1 - b_2) / 2 \cdot h_G^2 + b_2 \cdot x^2}{2 \cdot A_{c2x}} & \text{für } x > h_G \\ x / 2 & \text{für } x \leq h_G \end{cases} \quad (6.147)$$

## 6.5 Vergleichendes Beispiel

### 6.5.1 Eingangparameter

Eine Deckenplatte soll als Einfeldträger mit einer Stützweite von 10 Metern ausgeführt werden. Es wird eine Doppelstegplatte (mit  $b = 2,25$  m) gewählt.

Folgende Belastungen treten auf:

- Eigengewicht  $g_k = A_c \cdot 25$  [kN/m] ( $A_c$  Betonfläche des gesamten Querschnittes)
- Ausbaulast  $\Delta g = 1,5$  [kN/m<sup>2</sup>] bzw. 3,38 [kN/m]
- veränderliche Last  $q_k = 3,5$  [kN/m<sup>2</sup>] bzw. 7,88 [kN/m] mit  $\psi_2 = 0,3$  (quasi-ständig)

Als Bewehrung sind je 4  $d_s = 16$  in den Stegen vorgesehen (entspricht  $2 \cdot 8,04 = 16,08$  cm<sup>2</sup>). Als obere Bewehrung werden  $d_s = 6 - 250$  oben und unten (= 2,54 cm<sup>2</sup>) angeordnet.

Diese Aufgabenstellung wird in vier Varianten untersucht, die Rahmenbedingungen sollen für alle untersuchten Varianten gleich sein. Außerdem wird – mit Ausnahme der Variante 4 – davon ausgegangen, dass im Montagezustand aufgrund von Hilfsabstützung keine nennenswerten Verformungen auftreten. Die Belastung wirkt also gleichzeitig auf Fertigteil und Ortbeton. Um den Einfluss von Kriechumlagerungen zwischen den beiden Teilquerschnitten betrachten zu können, wird für das Fertigteil ein späterer Zeitpunkt der Erstbelastung angenommen als für die Ortbetonerfüllung. Dies führt zusammen mit weiteren Faktoren wie der Betonfestigkeit zu einer kleineren Kriechzahl. Im Einzelnen wird untersucht:

#### - Variante 1:

Doppelstegplatte nach Abb. 6.10 mit einer Plattenstärke von 5 cm. Das Fertigteil wird durch eine Ortbetonschicht von 13 cm auf eine Plattenhöhe von insgesamt 18 cm, die Platte ist insges.  $b_{\text{Platte}} = 225$  cm breit.

Stegabmessungen  $h_{\text{Steg}} = 60$  cm;  $b_{\text{Steg,u}} = 19$  cm;  $b_{\text{Steg,o}} = 25$  cm

Es wird von folgenden Materialwerten ausgegangen:

Fertigteil: **C35/45** mit Schwindmaß  $\epsilon_{cs} = -0,58$  ‰. Die Erstbelastung erfolgt bei einem Betonalter von 14 Tagen, die Kriechzahl ist  $\varphi = 2,2$

Ortbeton: **C20/25** mit Schwindmaß  $\epsilon_{cs} = -0,67$  ‰. Das wirksame Betonalter bei Belastungsbeginn ist 7 Tage, die Kriechzahl beträgt  $\varphi = 4,2$

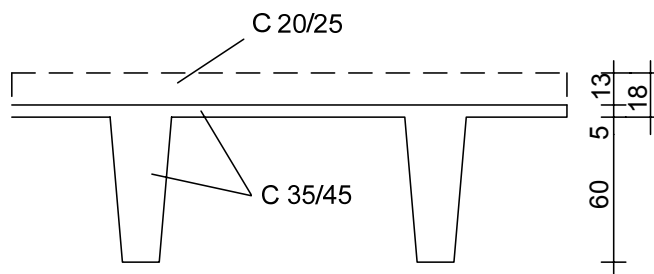


Abb. 6.10: Variante 1 (Plattenbalken mit Ortbetonerfüllung)

#### - Variante 2

Plattenbalken, bei dem der Balken als Fertigteil und die Platte komplett in Ortbeton ausgeführt wird. Der Balken hat eine Höhe von 60 cm, die Ortbetonplatte von 18 cm. Die Materialparameter sind wie in Variante 1 beschrieben.

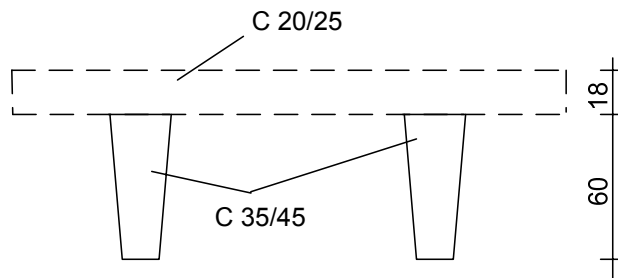


Abb. 6.11: Variante 2 (Fertigteilbalken mit Ortbetonplatte)

- **Variante 3a**  
Die komplette Doppelstegplatte wird als Ortbetonlösung ausgeführt, d.h. sie besteht aus zwei Stegen mit  $h = 60$  cm und einer Platte mit  $h = 18$  cm. Als Beton wird ein C 35/45 mit den Eigenschaften des Fertigteilbetons aus Variante 1 und 2 verwendet (Belastungsbeginn bei  $t = 14$  Tage). Die Variante 3a dient unter Beibehaltung der übrigen Bedingungen als untere Grenze dieser Verformungsberechnung.
- **Variante 3b**  
Abmessung wie 3a; als Beton wird der C 20/25 analog zur Ortbetonergänzung der Varianten 1 und 2 verwendet (Belastungsbeginn bei  $t = 7$  Tage). Somit erhält man die obere Grenze der Verformungen
- **Variante 4**  
Abmessungen, Ausführung und Materialeigenschaften wie Variante 1. Im Gegensatz zu den anderen Varianten soll die Montage ohne Hilfsunterstützung erfolgen, d.h. der Fertigteilquerschnitt muss zu Beginn seine Eigenlast und die Last der Ortbetonergänzung tragen.

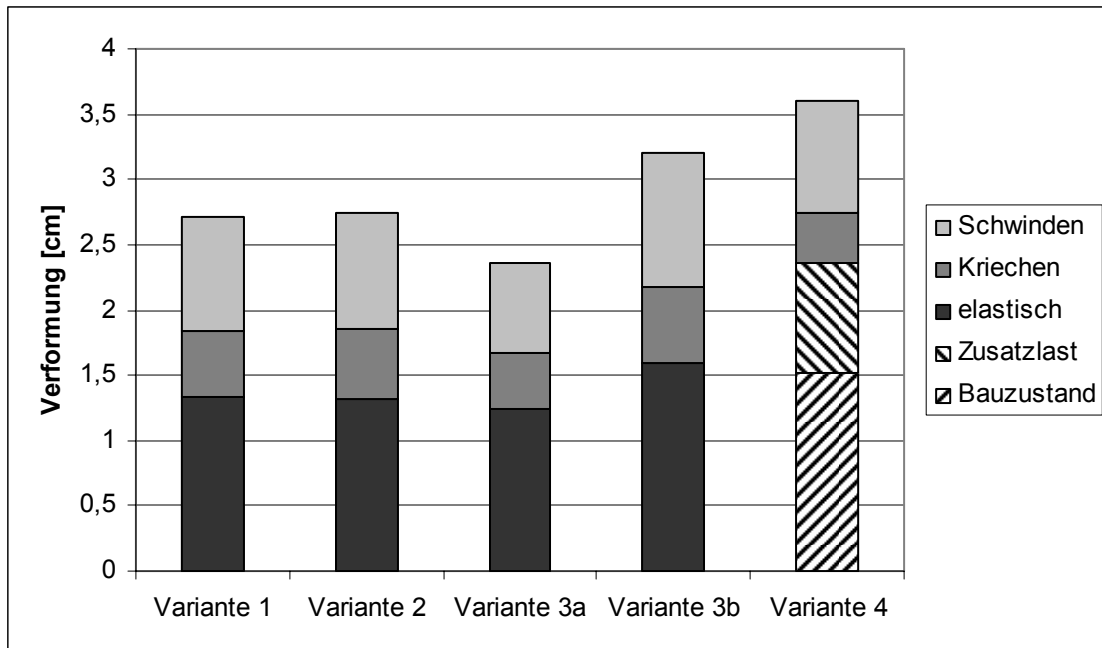
## 6.5.2 Hinweise zur Berechnung

Die beiden Stege werden vereinfachend als zu einem mit der gemittelten Breite von 44 cm zusammengefasst. Der Schwind- und Kriechprozess soll zeitgleich mit dem Erhärten der Ortbetonergänzung einsetzen. Die verschiedenen Betonalter von Fertigteil und Betonergänzung werden durch die separaten Kriechbeiwerte berücksichtigt.

Die Längen der gerissenen Bereiche wurden unter seltener Last bestimmt. Bei der Variante 4 wurde zusätzlich zwischen Rissbildung im Montagezustand und endgültiger Rissbildung unter seltener Last unterschieden. Weitere Angaben zur Berechnung einer Verformung aus den in diesem Kapitel beschriebenen Querschnittskrümmungen werden im Kapitel 7 gemacht.

## 6.5.3 Ausgewählte Ergebnisse

In Abbildung 6.12 sind die Verformungen der Varianten dargestellt. Sie sind jeweils aufgeteilt in die Einflüsse aus Kriechen und Schwinden und der elastischen Verformung zu Belastungsbeginn. Wie schon zuvor angesprochen, stellen die Varianten 3a und 3b die untere und obere Grenze dar. Die unterschiedlichen elastischen Verformungen resultieren aus den verschiedenen Rissmomenten, die die Lage des Erstrisses und somit Größe des gerissenen Bereiches festlegen. Die Unterschiede zwischen Variante 1 und 2 resultierenden zum größten Teil aus den Kriechverformungen. Allerdings sind sie recht gering, da sich die Druckzone zum größten Teil in der Ortbetonergänzung befindet.



**Abb. 6.12:** Durchbiegung (in cm) der vorgestellten Varianten in Feldmitte

Vergleicht man Variante 1 und 4, so ist der Einfluss der Montageunterstützung zu erkennen. Im Bauzustand wirkt die Belastung aus dem Eigengewicht vom Fertigteil und der Ortbetonerfüllung nur auf den Fertigteilquerschnitt, weshalb gleich zu Beginn eine größere elastische Durchbiegung (ca. 1,5 cm im Bauzustand) entsteht. Der Einfluss des Kriechens ist in Variante 4 kleiner, da sich die großen Spannungen aus dem Montagezustand mit der Zeit teilweise in die Ortbetonerfüllung umlagern können.

## 7 Verformungsberechnung

### 7.1 Allgemeines

In Kapitel 5 wurden verschiedene Möglichkeiten hergeleitet, die Querschnittskrümmung im ungerissenen und im gerissenen Zustand zu bestimmen. Als Einwirkungen wurden äußere Lasten und Langzeiteinflüsse aus Kriechen und Schwinden berücksichtigt. In Kapitel 6 wurde die Berechnung auf die Teilfertigung (Fertigteil mit Ortbetoneergänzung) erweitert. Aus diesen Krümmungen können die Verformungen bestimmt werden. Es wird zunächst ein Einfeldträger betrachtet, anschließend wird das Berechnungsverfahren auf Mehrfeldträger erweitert. Wie bereits in Gleichung (5.2) dargestellt, erhält man die Verformung aus der zweifachen Integration der Krümmung:

$$EI \cdot w = \int_0^L \int M(x) dx \quad (7.1)$$

$$\text{bzw } w = \int_0^L \int \frac{M(x)}{EI} dx = \int_0^L \int \kappa(x) dx$$

Für eine Gleichstreckenlast  $f$  mit dem Momentenverlauf (Einfeldträger)

$$M(x) = f \cdot L \cdot \frac{x}{2} - f \frac{x^2}{2} \quad (7.2)$$

erhält man für  $EI = \text{konstant}$  (Zustand I):

$$w'(x) = \frac{1}{EI} \cdot \int \left( f \cdot L \cdot \frac{x}{2} - f \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{f}{2} \cdot \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{L}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^3 + C_1 \right) \quad (7.3)$$

$$w(x) = \frac{f}{2} \cdot \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{L}{6} \cdot x^3 - \frac{1}{12} \cdot x^4 + C_1 \cdot x + C_2 \right) \quad (7.4)$$

Über die Randbedingungen, dass an der Stelle des Momentenmaximums die Verdrehung  $w' = 0$  und am Auflager die Durchbiegung  $w = 0$  ist, werden die Integrationskonstante  $C_1$  und  $C_2$  ermittelt:

$$w'(L/2) = 0 \rightarrow \frac{f}{2} \cdot \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{L^3}{8} - \frac{L^3}{24} + C_1 \right) = 0 \quad \rightarrow C_1 = -\frac{L^3}{12}$$

$$w(0) = 0 \quad \rightarrow C_2 = 0$$

Die Durchbiegung erhält man dann aus

$$w(x) = \frac{f}{2} \cdot \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{L}{6} \cdot x^3 - \frac{1}{12} \cdot x^4 - \frac{L^3}{12} \cdot x \right) \quad (7.5)$$

Die größte Durchbiegung befindet sich in Feldmitte. Sie beträgt:

$$w(L/2) = \frac{5}{384} \cdot \frac{f \cdot L^4}{EI} \quad (7.6)$$

#### 7.1.1 Verformungsverlauf bei veränderlicher Biegesteifigkeit

Nach Erreichen bzw. Überschreiten des Rissmomentes  $M_{cr}$  verringert sich die Biegesteifigkeit. Ein Träger kann dann in zwei Bereiche aufgeteilt werden: einem ungerissenen mit der Länge  $L_I = 2 \cdot x_{cr}$  und einem gerissenen mit  $L_{II} = L - 2 \cdot x_{cr}$ . Dabei ist  $x_{cr}$  die Koordinate, an der der erste Riss auftritt. Für eine Gleichstreckenlast  $f$  ergibt sie sich wie folgt:

$$x_{cr} = \frac{L}{2} \mp \sqrt{\frac{L^2}{4} - 2 \cdot \frac{M_{cr}}{f}} \quad (7.7)$$

Das Rissmoment  $M_{cr}$  ergibt sich mit dem elastischen Widerstandsmoment  $W_{el}$  und der Betonzugfestigkeit  $f_{ct,eff}$ :

$$M_{cr} = W_{el} \cdot \left( f_{ct,eff} - \frac{N}{A_c} \right) \quad (7.8)$$

Für die Zugfestigkeit  $f_{ct,eff}$  ist die zum Zeitpunkt der Rissbildung vorhandene Biegezugfestigkeit maßgebend. Im Kapitel 4.1.1 wurden hierzu verschiedene Ansätze vorgestellt. Nachfolgend wird hier jedoch die etwas geringere zentrische Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  angesetzt, um rechnerisch nicht erfasste Eigenspannungen abzudecken. In [Krüger/Mertzsch – 06] wird empfohlen, die Festigkeit zusätzlich um 15 Prozent zu reduzieren, um Langzeiteinflüsse und die Belastungsgeschichte – Rissbildung unter seltener Last, während die Verformungsberechnung für die quasi-ständige Last durchgeführt wird – zu berücksichtigen. In dieser Arbeit wird jedoch – theoretisch genauer – die seltene Kombination für die Bestimmung des gerissenen Bereiches und dann die quasi-ständige für die Verformungsberechnung verwendet. Dabei wird ungünstig unterstellt, dass die seltene Last schon direkt zu Beginn der Belastungsgeschichte vorhanden ist (weitere Hinweise s. Abschnitt 7.1.3). In Gl. (7.7) ist also für die Streckenlast  $f$  die seltene Last  $f_{rare}$  einzusetzen.

Für die beiden Bereiche werden die jeweiligen Funktionen des Krümmungsverlaufes gesucht. Es werden zunächst die Krümmungen an den Stellen  $x = x_{cr}$  (Zustand I) und  $x = L/2$  (reiner Zustand II) bestimmt. Das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen („Tension Stiffening“) im Bereich  $x_{cr} < x \leq L/2$  wird mittels einer mittleren Krümmung  $\kappa^{llm}$  berücksichtigt s. Abschnitt 7.3). Es wird eine nicht gestaffelte Bewehrung unterstellt, so dass bei Lastbeanspruchung näherungsweise der Verlauf der Krümmung affin zum Momentenverlauf angenommen werden kann. Bei einer Gleichstreckenlast erhält man also eine Funktion der Form:

$$\kappa(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad (7.9)$$

Die Faktoren  $a$ ,  $b$  und  $c$  können über folgende Randbedingungen ermittelt werden:

$$\text{RB 1: } \kappa(0) = 0 \quad \rightarrow c = 0$$

$$\text{RB 2: } \kappa(L) = 0 \quad \rightarrow a = -b/L$$

$$\text{RB 3a: } \kappa(x_{cr}) = \kappa^l(x_{cr}) \quad \rightarrow b = \frac{\kappa^l(x_{cr})}{x_{cr} \cdot (1 - x_{cr}/L)}; \quad a = -\frac{\kappa^l(x_{cr})}{x_{cr} \cdot (L - x_{cr})}$$

$$\text{RB 3b: } \kappa(L/2) = \kappa^{llm}(L/2) \quad \rightarrow b = \frac{4 \cdot \kappa^{llm}(L/2)}{L}; \quad a = -\frac{4 \cdot \kappa^{llm}(L/2)}{L^2}$$

Durch die Einteilung in einen ungerissenen und einen gerissenen Bereich kann der Verlauf der Krümmung wie folgt angegeben werden:

$$\kappa(x) = w''(x) = \begin{cases} -\frac{\kappa^l(x_{cr})}{x_{cr} \cdot (L - x_{cr})} \cdot x^2 + \frac{\kappa^l(x_{cr})}{x_{cr} \cdot (1 - x_{cr}/L)} \cdot x & \text{für } 0 \leq x < x_{cr} \\ -\frac{4 \cdot \kappa^{llm}(L/2)}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot \kappa^{llm}(L/2)}{L} \cdot x & \text{für } x_{cr} \leq x \leq L/2 \end{cases} \quad (7.10)$$

Durch zweifache Integration erhält man die Verformungslinie. Sie wird in beiden Bereichen durchgeführt.

Bereich 1:

$$w''(x) = -\frac{\kappa^l(x_{cr})}{x_{cr} \cdot (L - x_{cr})} \cdot x^2 + \frac{\kappa^l(x_{cr})}{x_{cr} \cdot (1 - x_{cr}/L)} \cdot x$$



$$w'(x) = -\frac{\kappa^I(x_{cr})}{3 \cdot x_{cr} \cdot (L - x_{cr})} \cdot x^3 + \frac{\kappa^I(x_{cr})}{2 \cdot x_{cr} \cdot (1 - x_{cr}/L)} \cdot x^2 + C_1$$

$$w(x) = -\frac{4 \cdot \kappa^I(x_{cr})}{12 \cdot x_{cr} \cdot (L - x_{cr})} \cdot x^4 + \frac{\kappa^I(x_{cr})}{6 \cdot x_{cr} \cdot (1 - x_{cr}/L)} \cdot x^3 + C_1 \cdot x + C_2$$

Bereich 2:

$$w''(x) = -\frac{4 \cdot \kappa^{II m}(L/2)}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot \kappa^{II m}(L/2)}{L} \cdot x$$

$$w'(x) = -\frac{4 \cdot \kappa^{II m}(L/2)}{3 \cdot L^2} \cdot x^3 + \frac{2 \cdot \kappa^{II m}(L/2)}{L} \cdot x^2 + C_3$$

$$w(x) = -\frac{\kappa^{II m}(L/2)}{3 \cdot L^2} \cdot x^4 + \frac{2 \cdot \kappa^{II m}(L/2)}{3 \cdot L} \cdot x^3 + C_3 \cdot x + C_4$$

Für die vier unbekanntenen Integrationskonstanten müssen vier Randbedingungen gefunden werden. Im Bereich 1 ist durch das Auflager bei  $x = 0$  die Vertikalverschiebung gleich Null. Im Bereich 2 ist bei  $x = L/2$  das Momentenmaximum. Die Verformungslinie weist am Auflager den Winkel  $\tau_A$  auf. Als letzte Bedingung gilt, dass innerhalb der Verformungsfigur keine Sprünge auftreten dürfen; am Übergang zwischen Bereich 1 und 2 müssen die Verformungen gleich sein. Die vier Randbedingungen sind also:

RB 1:  $w_1(0) = 0$

RB 2:  $w_2'(L/2) = 0$

RB 3:  $w_1'(0) = \tau_A$

RB 4:  $w_1(x_{cr}) = w_2(x_{cr})$

Zur Berechnung des Winkels  $\tau_A$ :

Die Verdrehung am Auflager A kann mit dem Arbeitssatz der Mechanik bestimmt werden. Die Verdrehung bzw. der Winkel der Tangente der Verformungsfigur beträgt:

$$\tau_A = \int_0^L \overline{M}(x) \cdot \kappa(x) dx \quad (7.11)$$

Dabei muss der Verlauf der Krümmung in einen ungerissenen und einen gerissenen Bereich unterteilt werden. Durch Überlagerung der in Abb. 7.1 dargestellten Verläufe erhält man:

$$\tau_A = \frac{1}{3} \cdot L \cdot \kappa^I(L/2) + \frac{1}{3} \cdot L_{II} \cdot (\kappa^{II m}(L/2) - \kappa^I(L/2)) + \frac{1}{6} \cdot L_{II} \cdot (\kappa^{II m}(x_{cr}) - \kappa^I(x_{cr})) \quad (7.12)$$

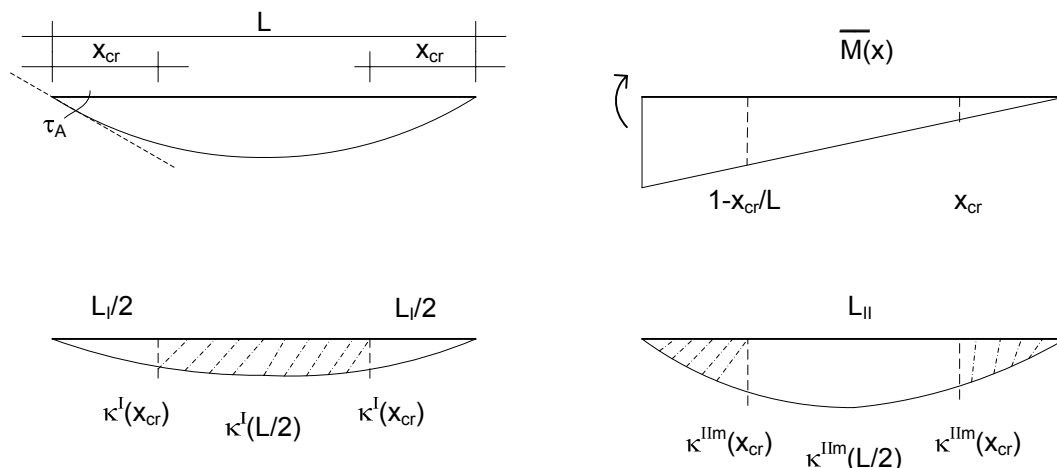


Abb. 7.1: Berechnung der Verdrehung  $\tau_A$  bei Lastbeanspruchung

Die Integrationskonstanten werden somit wie folgt bestimmt:

RB 1:  $w_1(0) = 0$ :

$$\rightarrow C_2 = 0$$

RB 2:  $w_2'(L/2) = 0$ :

$$-\frac{4 \cdot \kappa^{II m}(L/2)}{3 \cdot L^2} \cdot (L/2)^3 + \frac{2 \cdot \kappa^{II m}(L/2)}{L} \cdot (L/2)^2 + C_3 = 0$$

$$\rightarrow C_3 = -\frac{1}{3} \cdot L \cdot \kappa^{II m}(L/2)$$

RB 3:  $w_1'(0) = \tau_A$ :

$$\rightarrow C_1 = \frac{1}{3} \cdot L \cdot \kappa^I(L/2) + \frac{1}{3} \cdot L_{II} \cdot (\kappa^{II m}(L/2) - \kappa^I(L/2)) + \frac{1}{6} \cdot L_{II} \cdot (\kappa^{II m}(x_{cr}) - \kappa^I(x_{cr}))$$

RB 4:  $w_1(x_{cr}) = w_2(x_{cr})$ :

$$\begin{aligned} &-\frac{4 \cdot \kappa^I(x_{cr})}{12 \cdot x_{cr} \cdot (L - x_{cr})} \cdot x_{cr}^4 + \frac{\kappa^I(x_{cr})}{6 \cdot x_{cr} \cdot (1 - x_{cr}/L)} \cdot x_{cr}^3 + \tau_A \cdot x_{cr} \\ &= -\frac{\kappa^{II m}(L/2)}{3 \cdot L^2} \cdot x_{cr}^4 + \frac{2 \cdot \kappa^{II m}(L/2)}{3 \cdot L} \cdot x_{cr}^3 - \frac{1}{3} \cdot L \cdot \kappa^{II m}(L/2) \cdot x_{cr} + C_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow C_4 = &\kappa^I(x_{cr}) \cdot \left( -\frac{x_{cr}^3}{12 \cdot (L - x_{cr})} + \frac{x_{cr}^2}{6 \cdot (1 - x_{cr}/L)} - \frac{L_{II} \cdot x_{cr}}{6} \right) + \kappa^{II m}(x_{cr}) \cdot \frac{L_{II} \cdot x_{cr}}{6} \\ &+ \kappa^{II m}(L/2) \cdot \left( \frac{x_{cr}^4}{3 \cdot L^2} - \frac{2x_{cr}^3}{3 \cdot L} - \frac{2 \cdot x_{cr}^2}{3} + \frac{2 \cdot L \cdot x_{cr}}{3} \right) \end{aligned}$$

Das gleiche Prinzip kann man bei der Ermittlung der Verformungslinie infolge des Betonschwindens anwenden. Bei konstanter Bewehrung ergibt sich auch eine konstante Krümmung, da das Schwinden lastunabhängig erfolgt. Im Zustand I beträgt diese  $\kappa_{cs}^I$ , im Zustand II ist sie  $\kappa_{cs}^{II m}$ . Die Lage und Länge der ungerissenen und gerissenen Bereiche wird aus der vorigen Berechnung übernommen; es wird also davon ausgegangen, dass die unter Last entstandenen Rissbereiche sich durch Schwinden nicht verändern.

$$\kappa_{cs}(x) = w_{cs}''(x) = \begin{cases} \kappa_{cs}^I & \text{für } 0 \leq x < x_{cr} \\ \kappa_{cs}^{II m} & \text{für } x_{cr} \leq x \leq L/2 \end{cases} \quad (7.13)$$

Die Integration wird in beiden Teilbereichen durchgeführt.

Bereich 1:

$$w_{cs}''(x) = \kappa_{cs}^I; \quad w_{cs}'(x) = \kappa_{cs}^I \cdot x + C_1; \quad w_{cs}(x) = \kappa_{cs}^I \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2$$

Bereich 2:

$$w_{cs}''(x) = \kappa_{cs}^{II m}; \quad w_{cs}'(x) = \kappa_{cs}^{II m} \cdot x + C_3; \quad w_{cs}(x) = \kappa_{cs}^{II m} \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4$$

Die vier Randbedingungen können aus den Vorhergehenden übernommen werden, nur die Auflagerverdrehung  $\tau_A$  muss neu bestimmt werden (s. Abb. 7.2). Sie beträgt

$$\tau_A = \kappa_{cs}^I \cdot x_{cr} + \kappa_{cs}^{II m} \cdot \frac{L_{II}}{2} \quad (7.14)$$

Damit erhält man die 4 unbekanntenen Integrationskonstanten:

RB 1:  $w_{cs,1}(0) = 0 \quad \rightarrow C_2 = 0$

RB 2:  $w_{cs,2}'(L/2) = 0 \quad \rightarrow C_3 = -\kappa_{cs}^{II m} \cdot \frac{L}{2}$

RB 3:  $w_{cs,1}'(0) = \tau_A \rightarrow C_1 = \kappa_{cs}' \cdot x_{cr} + \kappa_{cs}^{II m} \cdot \frac{L_{II}}{2}$

RB 4:  $w_{cs,1}(x_{cr}) = w_{cs,12}(x_{cr}) : \kappa_{cs}' \cdot \frac{x_{cr}^2}{2} + \kappa_{cs}' \cdot x_{cr}^2 + \kappa_{cs}^{II m} \cdot x_{cr} \cdot \frac{L_{II}}{2} = \kappa_{cs}^{II m} \cdot \frac{x_{cr}^2}{2} - \kappa_{cs}^{II m} \cdot x_{cr} \cdot \frac{L}{2} + C_4$   
 $\rightarrow C_4 = \frac{3 \cdot x_{cr}^2}{2} \cdot (\kappa_{cs}' - \kappa_{cs}^{II m}) + \kappa_{cs}^{II m} \cdot L \cdot x_{cr}$

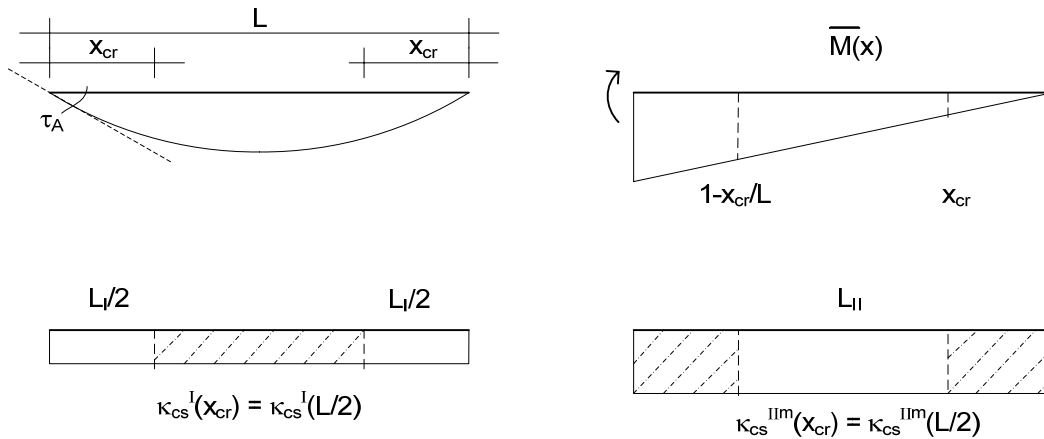


Abb. 7.2: Berechnung der Verdrehung  $\tau_A$  bei Schwindbeanspruchung

### 7.1.2 Näherungslösung für Einfeldträger

Die dargestellte Berechnung ist schon für das einfache Modell eines Einfeldträgers recht aufwendig. Wird nur die maximale Verformung in Feldmitte benötigt, so bietet sich eine direkte Lösung mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit nur für diesen Punkt an:

$$w(L/2) = \int_0^L \bar{M}(x) \cdot \kappa(x) dx \tag{7.15}$$

Das Moment aus der „1“-Last ist  $\bar{M} = x_{cr} / 2$  am Übergang von Zustand I in Zustand II und  $\bar{M} = L / 4$  in Feldmitte. Somit ist die Durchbiegung:

$$w(L/2) = \frac{5}{48} \cdot \kappa'(L/2) \cdot L^2 + \frac{1}{48} \cdot L_{II} \cdot (\kappa^{II m}(L/2) - \kappa'(L/2)) \cdot (5 \cdot L_{II} + 8 \cdot L_I) + \frac{1}{48} \cdot L_{II} \cdot (\kappa^{II m}(x_{cr}) - \kappa'(x_{cr})) \cdot (L_{II} + 4 \cdot L_I) \tag{7.16}$$

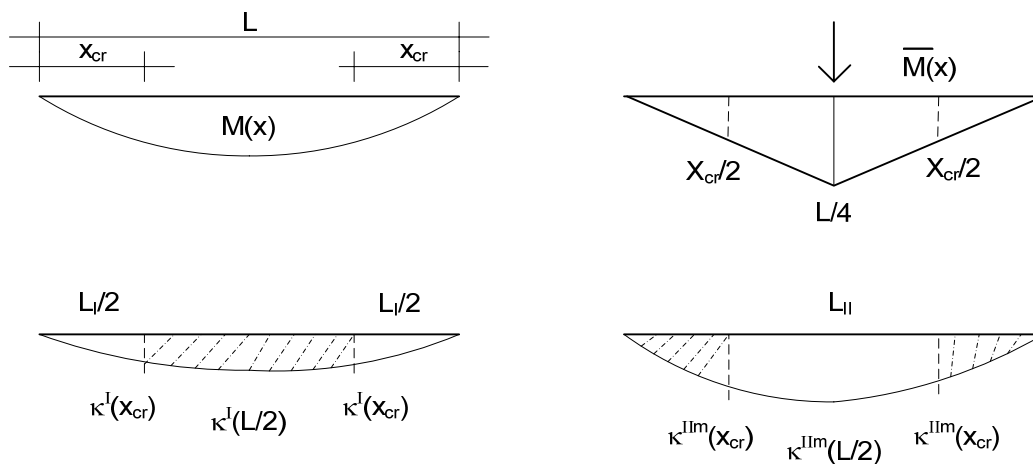


Abb. 7.3: Ermittlung der Durchbiegung in Feldmitte über das Kraftgrößenverfahren

Eine ähnliche Beziehung lässt sich für die Schwindverformung in Feldmitte aufstellen. Unter der Annahme, dass die Bewehrung über die Trägerlänge konstant ist, erhält man:

$$w(L/2) = \frac{1}{2} \cdot x_{cr}^2 \cdot (\kappa_{cs}^I - \kappa_{cs}^{II}) + \frac{1}{8} \cdot L^2 \cdot \kappa_{cs}^{II} \quad (7.17)$$



Abb. 7.4: Verlauf der Krümmung aus den Schwindverformungen

### 7.1.3 Numerische Integration

Eine geschlossene Lösung nach Abschn. 7.1.1 und 7.1.2 ist nur dann möglich, wenn das Tragwerk in maximal zwei Bereiche mit jeweils konstanter Biegesteifigkeit aufgeteilt werden kann. Diese Voraussetzung ist schon dann nicht mehr erfüllt, wenn beispielsweise die Bewehrung gestaffelt wird oder ein Rissmodell zur Anwendung kommt, welches zwischen verschiedenen Fortschritten der Rissbildung unterscheidet. In solchen Fällen kommen numerische Integrationsmethoden in Frage.

Der Träger wird in  $n$  Intervalle aufgeteilt. Die Funktion der Verschiebungsarbeit wird in jedem Intervall der Größe  $[x_0, x_0 + 2 \cdot h]$  durch ein Polynom 2. Grades ersetzt, das die Funktion in den Stützstellen  $x_0$ ,  $x_1 = x_0 + h$  und  $x_2 = x_0 + 2 \cdot h$  schneidet. Näherungsweise gilt dann:

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x) dx \approx h/3 \cdot (y_0 + 4 \cdot y_1 + y_2) \quad (7.18)$$

mit  $f(x) = \overline{M}(x) \cdot \kappa(x)$   
 $y_0, y_1, y_2$  Funktionswerte an den drei Stützstellen

Auf den ganzen Bereich  $[x_0, x_n]$  bezogen erhält man die bekannte Simpson-Gleichung (vgl. [Bronstein et al. – 99]):

$$\int_0^L f(x) dx \approx \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 4 \cdot y_3 + \dots + 2 \cdot y_{n-2} + 4 \cdot y_{n-1} + y_n) \quad (7.19)$$

mit  $h = L / n$   
 $n$  Gerade Anzahl von Intervallen

Um den Übergang zwischen den Zuständen I und II korrekt zu erfassen, sollte eine ausreichende Anzahl an Intervallen gewählt werden. I.d.R. ergeben sich ab ca. 20 Intervallen keine nennenswerten Veränderungen/Verbesserungen der Ergebnisse.

In jedem Abschnitt kann durch den Vergleich des aktuellen Momentes zum Rissmoment überprüft werden, in welchem Zustand sich der Querschnitt befindet. Wie vorher beschrieben, sollte dieses über die seltene Einwirkungskombination erfolgen. Damit werden von der quasi-ständigen Lastfallkombination abweichende Spannungszustände („Gedächtnis“ des Bauteils) erfasst. Die Auswirkung des Betonschwindens auf die Rissbildung kann über einen direkten Vergleich der Spannungen berücksichtigt werden. Dazu wird an jeder Stützstelle die Betonspannung am äußersten, unter Zugspannung stehendem Querschnittsrand für die äußere Last und das Schwinden berechnet (vgl. Abschnitt 5.5) und mit der Zugfestigkeit des Betons verglichen. Sobald diese überschritten ist, gelten für die Stützstelle die Ergebnisse der Krümmungsberechnung im Zustand II. Vergleichsrechnungen haben gezeigt, dass sowohl die Berechnung des Erstrisses mit der seltenen Einwirkungskombination als auch der direkte Vergleich der Spannungen in etwa zum gleichen Ergebnis führen. Besonders bei Platten mit Bewehrungsgraden unter 0,5 Prozent liegt man bei Schwindzahlen bis ca. –0,8 Promille auf der sicheren Seite.

Der Verlauf von  $\bar{M}(x)$  kann in einem Einfeldträger wie folgt angegeben werden:

$$\bar{M}(x) = \begin{cases} x/2 & \text{für } 0 \leq x \leq L/2 \\ L/2 - x & \text{für } L/2 < x \leq L \end{cases} \quad (7.20)$$

Ein etwas genaueres, dafür aber auch aufwendigeres Verfahren stellt die numerische Integration nach der Gaußschen Quadraturformel dar. Hier ist:

$$\int_0^L \bar{M}(x) \cdot \kappa(x) dx \approx \frac{h}{9} \sum_{i=1}^n 5 \cdot f(x_i - h \cdot \sqrt{0,6}) + 8 \cdot f(x_i) + 5 \cdot f(x_i + h \cdot \sqrt{0,6}) \quad (7.21)$$

mit  $h = L / 2n$  und  $x_i = (2 \cdot i - 1) \cdot h$

## 7.2 Durchlaufträger

Für die Berechnung der Durchbiegung von Innen- und Randfeldern wird das betrachtete Feld in Abschnitte mit positivem und negativem Moment unterteilt, diese wiederum in gerissene und ungerissene Teilbereiche. Die Schnittgrößenermittlung selbst erfolgt jedoch vereinfachend linear-elastisch. Die Abweichungen der Berechnung unter tatsächlichen Steifigkeiten zur linearen Berechnung betragen im Gebrauchszustand ca. 10 %, in Ausnahmefällen auch bis zu 20 % (nach [Zilch/Fritsche – 95]). Zusätzlich wird bei der nun folgenden vereinfachten Lösung davon ausgegangen, dass an Innenauflagern volle Einspannung (horizontale Tangente) und am Endauflager frei drehbare Lagerung vorliegt. Der hieraus resultierende Fehler ist gering, wenn die ständige Last deutlich größer als die veränderliche ist und die Stützweiten zweier benachbarter Felder zwischen  $0,8 \cdot l_1 < l_2 < 1,25 \cdot l_1$  liegen.

### 7.2.1 Vereinfachte Lösung

Für das Innenfeld eines Durchlaufträgers mit den Stützmomenten  $M_{S1,qs}$  und dem Feldmoment  $M_{F,qs}$  aus quasi-ständiger Last  $f_{qs}$  werden zunächst die Momentennulldurchgänge bestimmt:

$$x_{1,2} = V_{S1,qs} / f_{qs} \pm \sqrt{2 \cdot M_{F,qs} / f_{qs}} \quad (7.22)$$

$$\text{mit } V_{S1,qs} = \frac{M_{S2,qs} - M_{S1,qs}}{L} + \frac{f_{qs} \cdot L}{2}$$

Somit kann das betrachtete Feld in zwei Bereiche mit negativem Moment  $L_{K1}$  und einen mit positivem Moment  $L_E$  unterteilt werden:

$$L_{K1} = x_2; \quad L_{K2} = L - x_1; \quad L_E = L - x_1 - x_2$$

Die Abschnitte werden jeweils separat als Kragarme bzw. Einfeldträger betrachtet. An den Verbindungsstellen wird die Querkraft  $V_{0i}$  übertragen, außerdem treten dort die Verformungen  $f_{K,i}$  auf. Zusammen mit der Durchbiegung des Einfeldträgers  $f_E$  erhält man die Gesamtverformung:

$$f = (f_{K1} + f_{K2}) / 2 + f_E \quad (7.23)$$

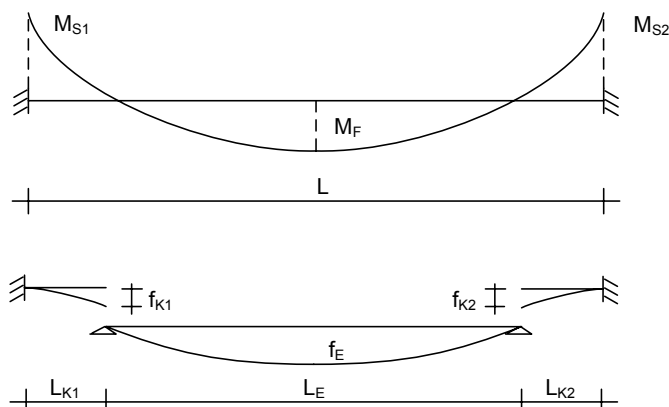


Abb. 7.5: Aufteilung in Feld- und Stützbereiche

*Bestimmung der Verformung im Ersatz-Einfeldträger ( $f_E$ )*

Die Berechnung erfolgt analog zu dem in Abschnitt 7.1.2 vorgestelltem Verfahren. Der Einfeldträger wird an der Stelle des Rissmomentes  $M_{cr}$  in einen ungerissenen und einen gerissenen Bereich unterteilt. Die Übergänge befinden sich bei:

$$x_{cr} = \frac{L_E}{2} - \sqrt{\left(\frac{L_E}{2}\right)^2 - \frac{2 \cdot M_{cr}}{f}} \leq \frac{L_E}{2} \quad (7.24)$$

$$L_E^I = 2 \cdot x_{cr}; \quad L_E^{II} = L_E - 2 \cdot x_{cr}$$

Die Gleichung (7.16) wird auf die Länge des Ersatzinfeldträgers bezogen. Sie gibt folgende Durchbiegung an:

$$f_E = \frac{5}{48} \cdot \kappa^I(L_E/2) \cdot L_E^2 + \frac{1}{48} \cdot L_E^{II} \cdot (\kappa^{II m}(L_E/2) - \kappa^I(L_E/2)) \cdot (5 \cdot L_E^{II} + 16 \cdot x_{cr}) + \frac{1}{48} \cdot L_E^{II} \cdot (\kappa^{II m}(x_{cr}) - \kappa^I(x_{cr})) \cdot (L_E^{II} + 8 \cdot x_{cr}) \quad (7.25)$$

*Bestimmung der Verformung im Ersatz-Kragarm ( $f_K$ )*

Der Kragarm wird zusätzlich zur Streckenlast  $f_{qs}$  am Schnittpunkt zum Einfeldträger mit der Querkraft  $V_0 = L_E/2 \cdot f_{qs}$  belastet.

$$x_{cr} = -\frac{L_E}{2} + \sqrt{\left(\frac{L_E}{2}\right)^2 + \frac{2 \cdot M_{cr}}{f_{qs}}} \leq L_K \quad (7.26)$$

$$L_K^I = x_{cr}; \quad L_K^{II} = L_K - x_{cr}$$

Die Verformung am Kragarmende wird mit dem Arbeitssatz berechnet; das virtuelle Moment beträgt  $-x_{cr}$  an der Stelle des Erstrisses und  $-L_K$  an der Einspannstelle, die Krümmung aus der tatsächlichen Beanspruchung ist  $\kappa^I$  bzw.  $\kappa^{II m}$ . Für die Verformung erhält man:

$$f_K = -\frac{L_K^2}{4} \cdot \kappa^{II m}(L_K) - \frac{x_{cr}^2}{4} \cdot (\kappa^I(x_{cr}) - \kappa^{II m}(x_{cr})) \quad (7.27)$$

**7.2.2 Berechnung der Schwindverformung**

Aufgrund von den vielen Bereichen unterschiedlicher Steifigkeit und der Schnittkraftumlagerung innerhalb des statisch unbestimmten Systems kann die Schwindverformung bei Durchlaufträgern nur mit erheblichem Aufwand berechnet werden. Untersuchungen von [Zilch/Donaubauer – 06] haben jedoch ergeben, dass der Anteil des Schwindens an der Gesamtverformung in Innenfeldern sehr gering ist. Für Randfelder wird folgende Näherung angegeben:

$$f_{cs,RF} = k_I \cdot \kappa_{cs}^I \cdot L_{RF}^2 + k_{II} \cdot \kappa_{cs}^{II m} \cdot L_{RF}^2 \quad (7.28)$$

Die Hilfswerte  $k_I$  und  $k_{II}$  können in Abhängigkeit vom Anteil der gerissenen Bereiche zur Gesamtlänge des Randfeldes für symmetrisch bewehrte Querschnitte Tafel 7.1 entnommen werden.

$\frac{\sum L_{II,RF}}{L_{RF}}$	$k_I$	$k_{II}$
0	0,0313	0,0
0,05	0,0462	0,0022
0,10	0,0445	0,0205
0,25	0,0285	0,0426
0,33	0,0215	0,0503
0,50	0,0107	0,0555

**Tafel 7.1:** Beiwerte zur Bestimmung der Schwindverformung

### 7.3 Berücksichtigung des Mittragens des Betons zwischen den Rissen

#### 7.3.1 Momenten-Krümmungsbeziehung aus der Spannungs-Dehnungslinie

Die Krümmung kann aus der auf die Nutzhöhe  $d$  bezogenen Stahldehnung  $\varepsilon_s$  und der Betonranddehnung der Druckzone  $\varepsilon_c$  ermittelt werden:

$$\kappa = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_c}{d} \quad (7.29)$$

Im ungerissenen Zustand gelten die Dehnungen  $\varepsilon_s^I$  und  $\varepsilon_c^I$  des Zustandes I, im Riss selbst  $\varepsilon_s^{II}$  und  $\varepsilon_c^{II}$  des Zustandes II. Im gerissenen Zustand werden jedoch mittlere Krümmungen und Dehnungen benötigt:

$$\kappa^{II} = \frac{\varepsilon_s^{II} - \varepsilon_c^{II}}{d} \quad (7.30)$$

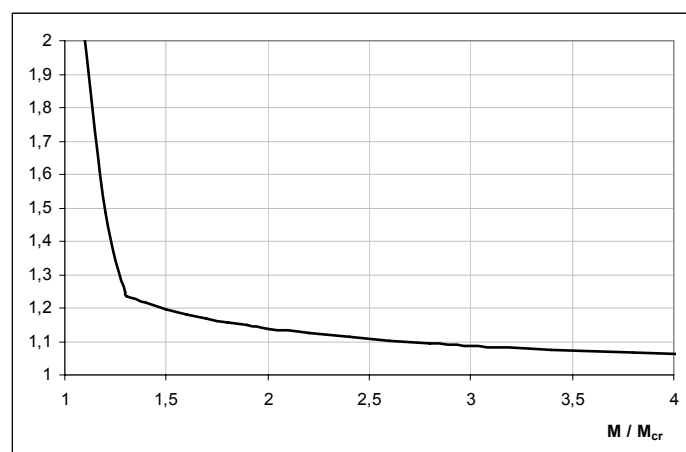
Die Bestimmung der mittleren Stahldehnung wurde in Abschnitt 5.3 ausführlich und unter Berücksichtigung verschiedener Ansätze erläutert. Die Betonstauchung wird auch vom Verlauf der Stahldehnungen und damit dem Verlauf und der Größe der Verbundspannungen beeinflusst. Unter der Voraussetzung, dass Beton- und Stahldehnung linear voneinander abhängig sind, gilt für die mittlere Betonstauchung:

$$\frac{\varepsilon_s^{II}}{\varepsilon_s^{II}} = \frac{\varepsilon_c^{II}}{\varepsilon_c^{II}} = \zeta \quad (7.31)$$

d. h., dass ein und derselbe Verteilungsfaktor  $\zeta$  gelten würde. Die Berechnung der mittleren Krümmung könnte dann direkt über die Krümmungen in den reinen Zuständen I und II erfolgen (vgl. Gl. (7.33)). Tatsächlich sind die Dehnungsverläufe im Zustand II jedoch nicht linear und die Annahme nach Gl. (7.31) ist zwischen den Rissen nicht korrekt. Durch die konzentrierte Einleitung der Stahlkräfte kommt es in der unmittelbaren Umgebung der Bewehrung zu einem unregelmäßigen Verlauf der Dehnungen, den bspw. [Castel et al. – 06] experimentell nachgewiesen haben. Die Abweichungen sind für Belastungen nahe der Risslast besonders groß, die mittlere Krümmung wird unterschätzt. Erst bei deutlich über der Risslast liegender Beanspruchung wird die Abweichung vernachlässigbar klein (vgl. Abb. 7.6; s. a. [Krüger/Mertzsch – 06]).

Als Alternative kann die Betondehnung des reinen Zustandes II beibehalten werden. Nach [Graubner – 89] sind die Abweichungen gering und liegen auf der sicheren Seite, d. h. die mittlere Krümmung wird etwas überschätzt, wenn sie nach folgender Beziehung berechnet wird:

$$\kappa^{II} = \frac{\varepsilon_s^{II} - \varepsilon_c^{II}}{d} \quad (7.32)$$



**Abb. 7.6:** Verhältnis der mittleren Krümmungen nach Gl. (7.32) und nach Gl. (7.31) für eine Platte mit  $d = 20$  cm, Bewehrungsgrad 0,5%, Beton C30/37

In den folgenden Abschnitten wird die mittlere Krümmung für alle Ansätze in einer einheitlichen Form dargestellt. Dabei werden die Krümmungen im Zustand I und im reinen Zustand II sowie ein Verteilungswert  $\zeta$  verwendet:

$$\kappa^{lm} = \zeta \cdot \kappa^{II} + (1 - \zeta) \cdot \kappa^I \quad (\text{Abschnitt 7.3.1.1 – 7.3.1.3}) \quad (7.33)$$

$$\kappa^{lm} = \zeta_s \cdot \kappa^{II} \quad (\text{Abschnitt 7.3.1.4 – 7.3.1.5}) \quad (7.34)$$

### 7.3.1.1 Berechnung nach [CEB/FIP – 91] und [DAFStb-H525 – 03]

Mit Gl. (5.87) erhält man eine bilineare Spannungs-Dehnungsbeziehung zur Bestimmung der mittleren Stahldehnung in gerissenen Bereichen. Unter der Annahme von

$$\varepsilon_{sr}^{II}/\varepsilon_s^{II} = \varepsilon_{sr}^I/\varepsilon_s^I = \sigma_{sr}^{II}/\sigma_s^{II}$$

kann man Gleichung (5.87) wie folgt umstellen:

$$\varepsilon_s^{II m} = \varepsilon_s^{II} - \beta_t \cdot \varepsilon_s^{II} \cdot \frac{\sigma_{sr}^{II}}{\sigma_s^{II}} + \beta_t \cdot \varepsilon_s^I \cdot \frac{\sigma_{sr}^{II}}{\sigma_s^{II}} = \zeta \cdot \varepsilon_s^{II} + (1 - \zeta) \cdot \varepsilon_s^I \quad (7.35)$$

$$\text{mit } \zeta = 1 - \beta_t \cdot \frac{\sigma_{sr}^{II}}{\sigma_s^{II}} \quad (7.36)$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (7.31) erhält man:

$$\kappa^{lm} = \frac{\zeta \cdot \varepsilon_s^{II} + (1 - \zeta) \cdot \varepsilon_s^I + \zeta \cdot \varepsilon_c^{II} + (1 - \zeta) \cdot \varepsilon_c^I}{d} = \zeta \cdot \kappa^{II} + (1 - \zeta) \cdot \kappa^I \quad (7.37)$$

Bei reiner Biegung kann der Verteilungsbeiwert wie folgt angegeben werden:

$$\zeta = 1 - \beta_t \cdot \frac{M_{cr}}{M} \quad (7.38)$$

Der Völligkeitsbeiwert  $\beta_t$  ist bei einer einmaligen, kurzzeitigen Einwirkung  $\beta_t = 0,4$  und unter andauernder oder sich wiederholender Last  $\beta_t = 0,25$ .

Soll gemäß Gl. (7.32) die Betondehnung durchgehend als  $\varepsilon_c^{II}$  angesetzt werden, muss zur Gleichung (7.37) der Korrekturterm  $K_\varepsilon$  nach Gl. (7.39) addiert werden. Dieser hat allerdings nur bei Biegemomenten in der Nähe des Rissmomentes einen nennenswerten Einfluss, bei deutlich größerer Belastung wird er vernachlässigbar klein.

$$K_\varepsilon = (1 - \zeta) \cdot \frac{\varepsilon_c^I - \varepsilon_c^{II}}{d} \quad (7.39)$$

Soll die trilineare Spannungs-Dehnungsverteilung angewandt werden, so gelten die dargestellten Beziehungen erst bei abgeschlossener Rissbildung, also bei  $M > 1,3 M_{cr}$ . Im Bereich der Rissbildung muss der Faktor  $\zeta$  aus Gl. (7.37) ersetzt werden durch:

$$\zeta = 1 - \frac{1}{0,3} \cdot \beta_t \cdot \left(1 - \frac{M_{cr}}{M}\right) + \frac{1}{0,3} \cdot \left(1 - 1,3 \cdot \frac{M_{cr}}{M}\right) \quad (7.40)$$

### 7.3.1.2 Ansatz in [EN 1992-1-1 – 04]

In den Gleichungen Gl. (5.88) bis Gl. (5.91) wurde gezeigt, dass im Eurocode 2 ein spannungsabhängiger Ansatz zur Beschreibung des Völligkeitsbeiwertes  $\beta_t$  verwendet wird. Somit erhält man für die Berechnung der mittleren Krümmung:

$$\kappa^{lm} = \zeta \cdot \kappa^{II} + (1 - \zeta) \cdot \kappa^I$$

$$\text{mit } \zeta = 1 - \beta_t \cdot \frac{M_{cr}}{M} \quad \text{und} \quad \beta_t = \beta \cdot \frac{M_{cr}}{M}$$

$$\text{somit } \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^2 \quad (7.41)$$



Der Beiwert  $\beta$  wird bei einmaliger, kurzzeitiger Belastung zu 1,0 und bei andauernder oder sich wiederholender Einwirkung zu 0,5 gesetzt.

Der Korrekturwert  $K_\varepsilon$  kann aus Gl. (7.39) mit dem entsprechenden  $\zeta$  übernommen werden.

### 7.3.1.3 Ermittlung nach [Krüger/Mertzsch – 06]

Prinzipiell gelten hier die im vorigen Abschnitt dargestellten Beziehungen. Allerdings ersetzen die Autoren den konstanten Beiwert  $\beta$  durch den spannungsabhängigen Beiwert  $\beta_\sigma$ .

$$\beta_\sigma = 1 + \left( \frac{\sigma_s''}{\sigma_{sr}} - 1 \right) \cdot \left( 1 - \frac{\sigma_s''}{f_{yd}} \right) \geq 1 \quad (7.42)$$

### 7.3.1.4 Ansatz in [Tue – 93]

Die Gleichung (5.82) kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\varepsilon_{sm} = \zeta_s \cdot \varepsilon_s''$$

mit  $\zeta_s = 1 - 0,6 \cdot \frac{T_{um}}{F_s''}$  (7.43)

Dabei ist  $F_s''$  die gesamte Stahlkraft im Riss unter aktueller Belastung, die Berechnung der Verbundkraft  $T_{um}$  kann Gleichung (5.79) entnommen werden. Unter der in Gleichung (7.31) beschriebenen Bedingung ist die mittlere Krümmung:

$$\kappa^{lm} = \zeta_s \cdot \kappa'' \quad (7.44)$$

Wenn die mittlere Krümmung unter einer konstanten Betondehnung von  $\varepsilon_c''$  berechnet werden soll, ist folgende Korrektur vorzunehmen:

$$\kappa^{lm} = \zeta_s \cdot \kappa'' + (1 - \zeta_s) \cdot \frac{\varepsilon_c''}{d} \quad (7.45)$$

### 7.3.1.5 Berechnung nach [Noakowski – 88]

Dieser Ansatz berücksichtigt einen konstanten, spannungsunabhängigen Beiwert zur Bestimmung der mittleren Stahldehnung (vgl. Gl. (5.96)). Die mittlere Krümmung erhält man durch das Produkt der Krümmung im reinen Zustand II und des Beiwertes  $\zeta_s$ :

$$\kappa^{lm} = \zeta_s \cdot \kappa'' \quad \text{mit } \zeta_s = 0,58 \quad (7.46)$$

Wie schon in den vorigen Ansätzen wird die Gleichung durch eine Korrektur in Form eines zusätzlichen Summanden  $K_\varepsilon$  ergänzt:

$$\kappa^{lm} = \zeta_s \cdot \kappa'' + K_\varepsilon$$

mit  $K_\varepsilon = \zeta_s \cdot \varepsilon_c'' / d$  (7.47)

## 7.3.2 Zusammenfassung

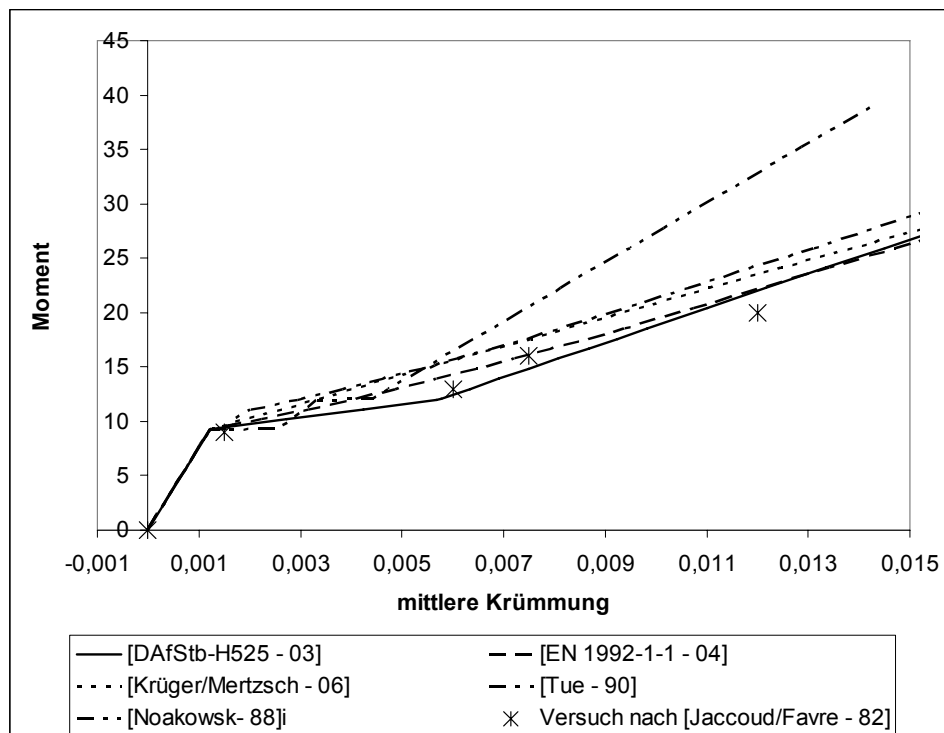
Die dargestellten Berechnungsmöglichkeiten werden nachfolgend in Tafel 7.2 zusammengefasst. Dabei werden alle Bezeichnungen einheitlich und ggf. abweichend zu den ursprünglichen Formelzeichen in der genannten Literatur gewählt.

Ansätze in der Form $\kappa^{lm} = \zeta \cdot \kappa'' + (1 - \zeta) \cdot \kappa'$ (+ $K_\varepsilon$ )	
[DAfstb-H525 – 03] [CEB/FIP – 91]	$\zeta = 1 - \beta_t \cdot \frac{M_{cr}}{M}$ abgeschlossenes Rissbild
	$\zeta = 1 - \frac{1}{0,3} \cdot \beta_t \cdot \left(1 - \frac{M_{cr}}{M}\right) + \frac{1}{0,3} \cdot \left(1 - 1,3 \cdot \frac{M_{cr}}{M}\right)$ Rissbildung, $M_{cr} < M < 1,3 \cdot M_{cr}$
	$\beta_t = 0,4$ bei kurzer, einmaliger Einwirkung $\beta_t = 0,25$ bei langandauernder oder sich wiederholender Einwirkung
	$K_\varepsilon = (1 - \zeta) \cdot \frac{\varepsilon_c' - \varepsilon_c''}{d}$
[EN 1922-1-1 – 04]	$\zeta = 1 - \beta_t \cdot \frac{M_{cr}}{M}$
	$\beta_t = 1,0 \cdot \frac{M_{cr}}{M}$ bei kurzer, einmaliger Einwirkung $\beta_t = 0,5 \cdot \frac{M_{cr}}{M}$ bei langandauernder oder sich wiederholender Einwirkung
	$\zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^2$ Zusammenführung mit $\beta_t$ , dabei ist $\beta = 1,0$ oder $= 0,5$
	$K_\varepsilon = (1 - \zeta) \cdot \frac{\varepsilon_c' - \varepsilon_c''}{d}$
[Krüger/Mertzsch – 06]	$\zeta = 1 - \beta_t \cdot \frac{M_{cr}}{M}$
	$\beta_t = \left[1 + \left(\frac{\sigma_s''}{\sigma_{sr}} - 1\right) \cdot \left(1 - \frac{\sigma_s''}{f_{yd}}\right)\right] \cdot \frac{M_{cr}}{M}$
	$K_\varepsilon = (1 - \zeta) \cdot \frac{\varepsilon_c' - \varepsilon_c''}{d}$
Ansätze in der Form $\kappa^{lm} = \zeta_s \cdot \kappa''$ (+ $K_\varepsilon$ )	
[Tue – 93]	$\zeta_s = 1 - \beta_t \cdot \frac{T_{um}}{F_s''}$
	$\beta_t = 0,6$ konstanter Beiwert. Die Auswirkungen von einmaliger oder langandauernder bzw. sich wiederholender Belastung gehen bei der Berechnung von $T_{um}$ in Gl. (5.79) ein
	$K_\varepsilon = (1 - \zeta_s) \cdot \frac{\varepsilon_c''}{d}$
[Noakowski – 88]	$\zeta_s = 1 - \beta_t$
	$\beta_t = 0,56$ bei Erstrissbildung $\beta_t = 0,75 \cdot 0,56 = 0,42$ bei abgeschlossenem Rissbild
	$K_\varepsilon = (\zeta_s - 1) \cdot \varepsilon_c'' / d$
Formelzeichen: $\zeta, \zeta_s$ Verteilungsbeiwert $\beta_t$ Völligkeitsbeiwert $K_\varepsilon$ Korrekturterm	

Tafel 7.2: Ansätze nach Abschnitten 7.3.1.1 – 7.3.1.5

Die Berechnungen nach [DAfStb-H525 – 03] und [Noakowski – 88] unterscheiden zwischen Erstriss und abgeschlossenem Rissbild und eignen sich somit sehr gut für Tragwerke, deren Gebrauchslast nur Momente knapp oberhalb des Rissmomentes verursacht. Allerdings unterschätzt [Noakowski – 88] die Krümmung bei deutlich größeren Momenten. Zusätzlich gibt es in dem recht einfachen Ansatz keine Möglichkeit, das bei Dauerbelastung schlechtere Verbundverhalten zu berücksichtigen. Hier eignen sich die anderen Ansätze deutlich besser. [DAfStb-H525 – 03] berücksichtigt einen konstanten Völligkeitsbeiwert, der bei langandauernder Belastung mit dem Faktor 2/3 multipliziert wird. [EN 1992-1-1 – 04] greift auf einen spannungsabhängigen Völligkeitsbeiwert zurück, der bei Dauerlast mit dem Faktor 0,5 multipliziert wird. [Krüger/Mertzsch – 06] greifen diesen Ansatz auf, ersetzen jedoch den Faktor 0,5 durch einen weiteren, vom Abstand der aktuellen Spannung zur Rissspannung bzw. zur maximal aufnehmbaren Spannung (Streckgrenze des Stahls) abhängigen Faktor. [Tue – 90] setzt einen konstanten Völligkeitsbeiwert an, berücksichtigt jedoch über das Verhältnis der Verbundkraft zur aktuellen Stahlkraft eine andauernde oder sich wiederholende Beanspruchung. Dabei ist besonders erwähnenswert, dass bei der Bestimmung der Verbundkraft explizit die Anzahl der Lastwechsel berücksichtigt werden kann.

In der nachfolgenden Abbildung sind die mittleren Krümmungen für einen Plattenstreifen mit  $b/h/d = 75/16/13,1$  cm und  $\rho_{s1} = 0,6$  % zu sehen (vgl. [Jaccoud/Favre – 82]). Die im Versuch gemessenen Krümmungen sind mit angegeben.



**Abb. 7.7:** Darstellung der verschiedenen Ansätze zur Bestimmung der mittleren Krümmung für ein Rissmoment von ca. 9 kNm bei einem Beton C30/37



## 8 Auswertung

### 8.1 Bewertung verschiedener Konstruktionsregeln

#### 8.1.1 Erforderliche Nutzhöhe

Im Kapitel 3 wurden Verfahren gezeigt, die Begrenzung der Verformung über zulässige Biegeschlankheiten nachzuweisen. Sie gelten teilweise nur für Platten des üblichen Hochbaus mit charakteristischen Werten der veränderlichen Last zwischen  $q = 2 \text{ kN/m}^2$  (Wohn- und Büroflächen) und  $q = 5 \text{ kN/m}^2$  (Versammlungs- oder Verkaufsräume). Der Kombinationsbeiwert  $\psi_2$ , der den Anteil der Nutzlast im quasi-ständigen Lastfall vorgibt, nimmt Werte zwischen 0,3 und 0,6 an. Die Biegeschlankheitsnachweise sind also für veränderliche Lasten von  $q_{perm} = 0,3 \cdot 2,0 = 0,6 \text{ kN/m}^2$  bis  $q_{perm} = 0,6 \cdot 5,0 = 3 \text{ kN/m}^2$  ausgelegt, der tatsächliche Wert geht teilweise nicht in den Nachweis ein. Eine Ausnahme bildet bspw. [EN 1992-1-1 – 04], bei der die Belastung indirekt über den Bewehrungsgrad berücksichtigt wird. Allerdings wird dadurch nur die Größe der Gesamtlast erfasst, die quasi-ständigen Last kann nur indirekt berücksichtigt werden. Bei [Zilch/Donaubauer – 06] ist der Biegeschlankheitsnachweis auf eine maximale Nutzlast von  $q = 2,75 \text{ kN/m}^2$  begrenzt, der Kombinationsbeiwert darf  $\psi_2 = 0,3$  nicht überschreiten.

Im Folgenden werden die Biegeschlankheitskriterien aus [DIN 1045-1 – 08], [EN 1992-1-1 – 04], [Krüger/Mertzsch – 03] und [Zilch/Donaubauer – 06] verglichen. Die Verformung soll jeweils auf  $w < L / 250$  begrenzt werden. Die erforderliche Nutzhöhe nach EC 2 wird über Gleichung (3.5a) (in den Diagrammen mit „EC2 (Gl. 3.5)“ gekennzeichnet) und 3.3a („EC2 (Gl. 3.3)“) mit der jeweils statisch erforderlichen Bewehrung berechnet. Eine Korrektur zur Berücksichtigung der tatsächlichen Stahlspannung wird gem. Kap. 3.1.2 über den Faktor  $310/\sigma_s$  berücksichtigt, so dass eine Iteration erforderlich ist. Der Biegeschlankheitsnachweis von *Krüger/Mertzsch* kann über die entsprechenden Werte aus Tafel 3.4 angewendet werden. Nach der DIN 1045-1 beträgt für allgemeine Anforderungen an die Durchbiegung (d. h. eine Begrenzung auf  $L / 250$ ) die erforderliche Nutzhöhe  $d = L / 35$  (vgl. Gleichung (3.1a)). In den Diagrammen wird dieser Grenzwert mit „DIN 1045-1 (Gl. 3.1a)“ gekennzeichnet. Zusätzlich ist auch die zweite Bedingung  $d = L^2/150$  nach Gleichung (3.1b) berücksichtigt (in den Diagrammen „DIN 1045-1 (Gl. 3.1b)“). Diese Grenze gilt für erhöhte Anforderungen an die Verformungsbegrenzung und bräuchte hier nicht berücksichtigt zu werden. Sie wird in den nachfolgenden Beispielen dennoch erfasst, da das  $L/35$ -Kriterium bei großen Stützweiten als unzureichend erscheint. Gleichung (3.1b) wird ab einer Stützweite von 4,28 Metern maßgebend.

In Abb. 8.1 sind die erforderlichen Nutzhöhen  $d$  für eine Einfeldplatte mit Längen zwischen 3,0 und 7,5 m dargestellt; es wird von einer Betonfestigkeitsklasse C20/25, einem Schwindmaß von  $\varepsilon_{cs} = -0,5 \text{ ‰}$  und einer Kriechzahl  $\varphi = 2,5$  ausgegangen. Die veränderliche Last beträgt  $q_k = 2,0 \text{ kN/m}^2$  mit  $\psi_2 = 0,3$ , außerdem wirkt die Eigenlast  $g_k = (d + 0,025) \cdot 25$  und eine Ausbaulast  $\Delta g_k = 1,0 \text{ kN/m}^2$ .

Es ist festzustellen, dass nach Eurocode 2 i. d. R. mit einem Faktor  $\sigma_s/310 < 1$  korrigiert wird, da die Stahlspannung unter quasi-ständiger Last kleiner als  $310 \text{ MN/m}^2$  ist.

Die Betonfestigkeitsklasse beeinflusst die Verformung. Bei einer höheren Festigkeitsklasse werden kleinere Durchbiegungen erwartet, die Anforderung an die Nutzhöhe könnte entsprechend gesenkt werden. In Abb. 8.2 wurde daher zum Vergleich ein C30/37 gewählt. Die Auswirkungen sind bei allen Verfahren zu sehen mit Ausnahme von [DIN 1045-1 – 08], bei der die Betonfestigkeit nicht berücksichtigt wird. Bei der Berechnung nach Eurocode 2 (s. Linie „EC2 (Gl. 3.3)“) verkleinert sich die erforderliche Nutzhöhe um zwei Zentimeter bei einer Stützweite von 3 Metern und um vier Zentimeter bei  $L = 7,5 \text{ m}$ . Bei der Berechnung nach *Krüger/ Mertzsch* sind die Abweichungen gering (s. Faktor  $k_c$  in Gl. (3.18)), bei *Donaubauer* sind sie deutlich größer (bis zu 11 Zentimeter; vgl. Gl. (3.19)).

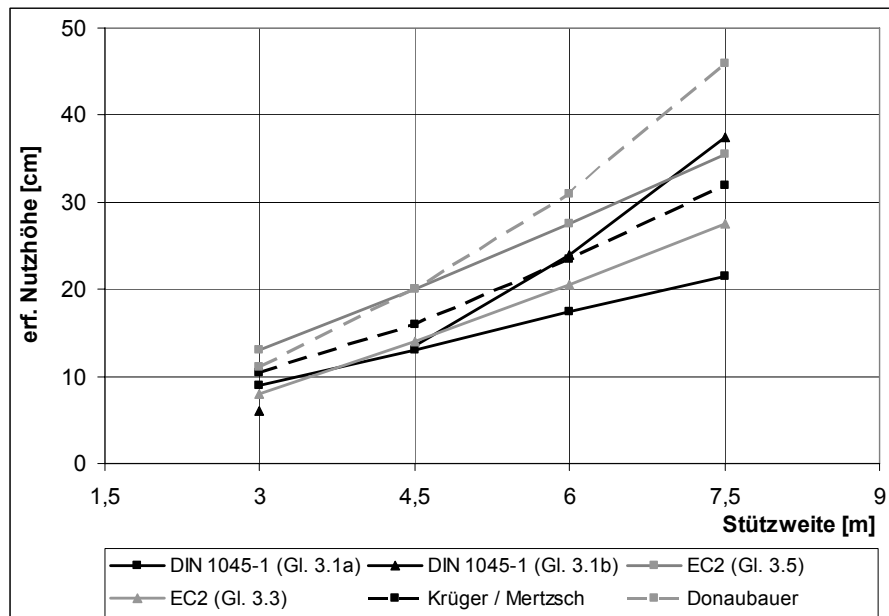


Abb. 8.1: Erforderliche Nutzhöhe: Beton C20/25,  $q_k = 2,0 \text{ kN/m}^2$ ,  $\psi_2 = 0,3$

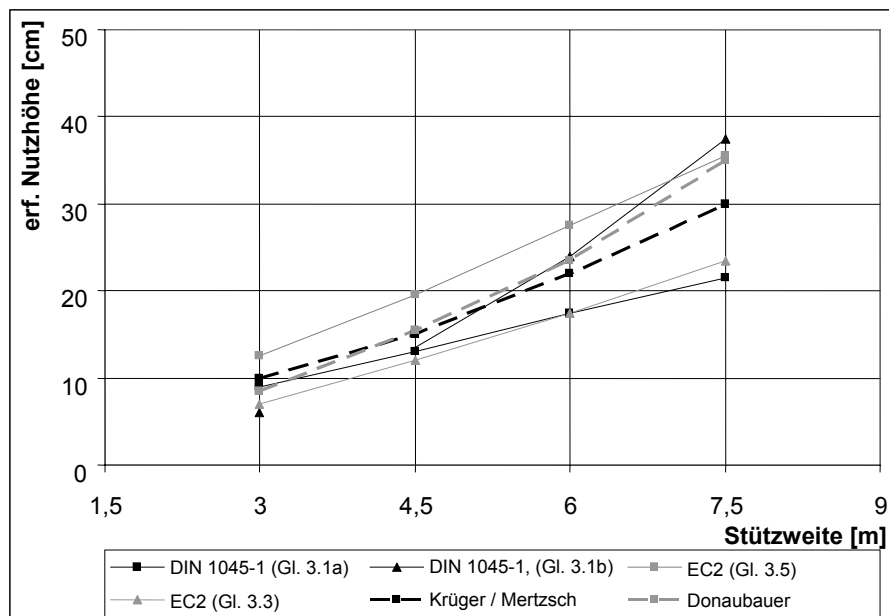


Abb. 8.2: Erforderliche Nutzhöhe: Beton C30/37,  $q_k = 2,0 \text{ kN/m}^2$ ,  $\psi_2 = 0,3$ .

In Abb. 8.1 und 8.2 wurde eine relativ kleine veränderliche Last gewählt. Wird die erforderliche Nutzhöhe unter der Nutzlast  $q_k = 5,0 \text{ kN/m}^2$  und mit  $\psi_2 = 0,6$  bestimmt, werden die Werte nach Eurocode 2 etwas ungünstiger (erforderliche Nutzhöhe wird um 1 cm („EC2 (Gl. 3.5)“) bzw. 3 cm („EC2 (Gl. 3.3)“) größer, DIN 1045-1 bleibt wiederum unverändert (s. Abb. 8.3). Der Nachweis nach [Zilch/Donaubauber – 06] ist für diese Nutzlast nicht mehr zulässig, wird jedoch aus Anschauungsgründen mit aufgeführt.

Eine Änderung des statischen Systems wirkt sich in allen Fällen etwa gleich aus. Dies ist in Abb. 8.4 für das Randfeld einer durchlaufenden Platte dargestellt. Die günstige Wirkung der Einspannung am Zwischenaufleger wird in allen betrachteten Biegeschlankheitsnachweisen durch eine Verkleinerung der Stützweite und damit der erforderlichen Nutzhöhen berücksichtigt.

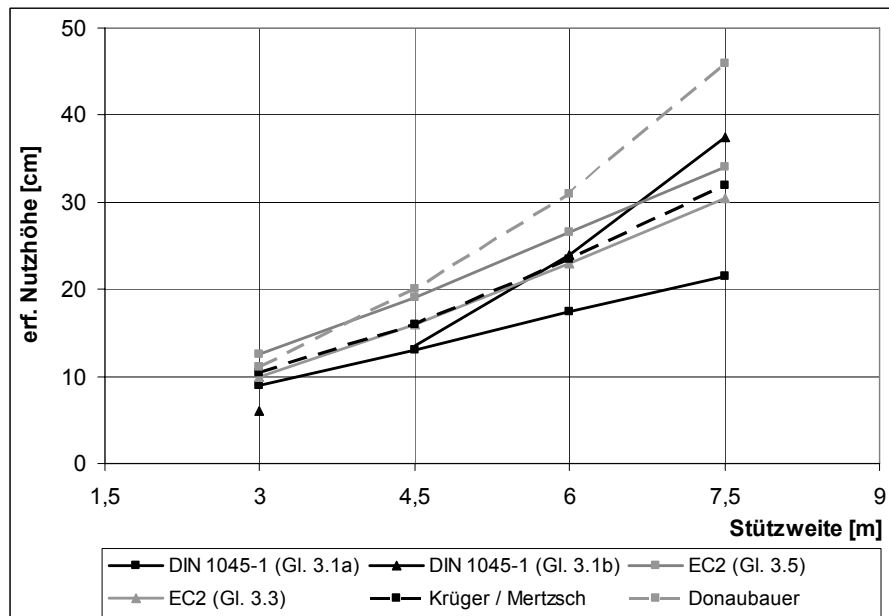


Abb. 8.3: Erforderliche Nutzhöhe: Beton C20/25,  $q_k = 5,0 \text{ kN/m}^2$ ,  $\psi_2 = 0,6$

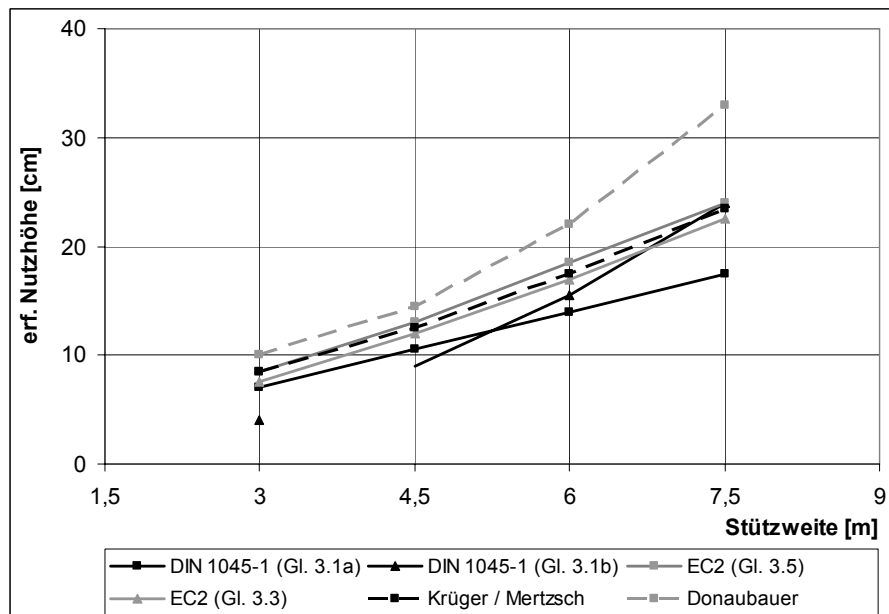


Abb. 8.4: Erforderliche Nutzhöhe: Randfeld, C20/25,  $q_k = 5,0 \text{ kN/m}^2$ ,  $\psi_2 = 0,6$

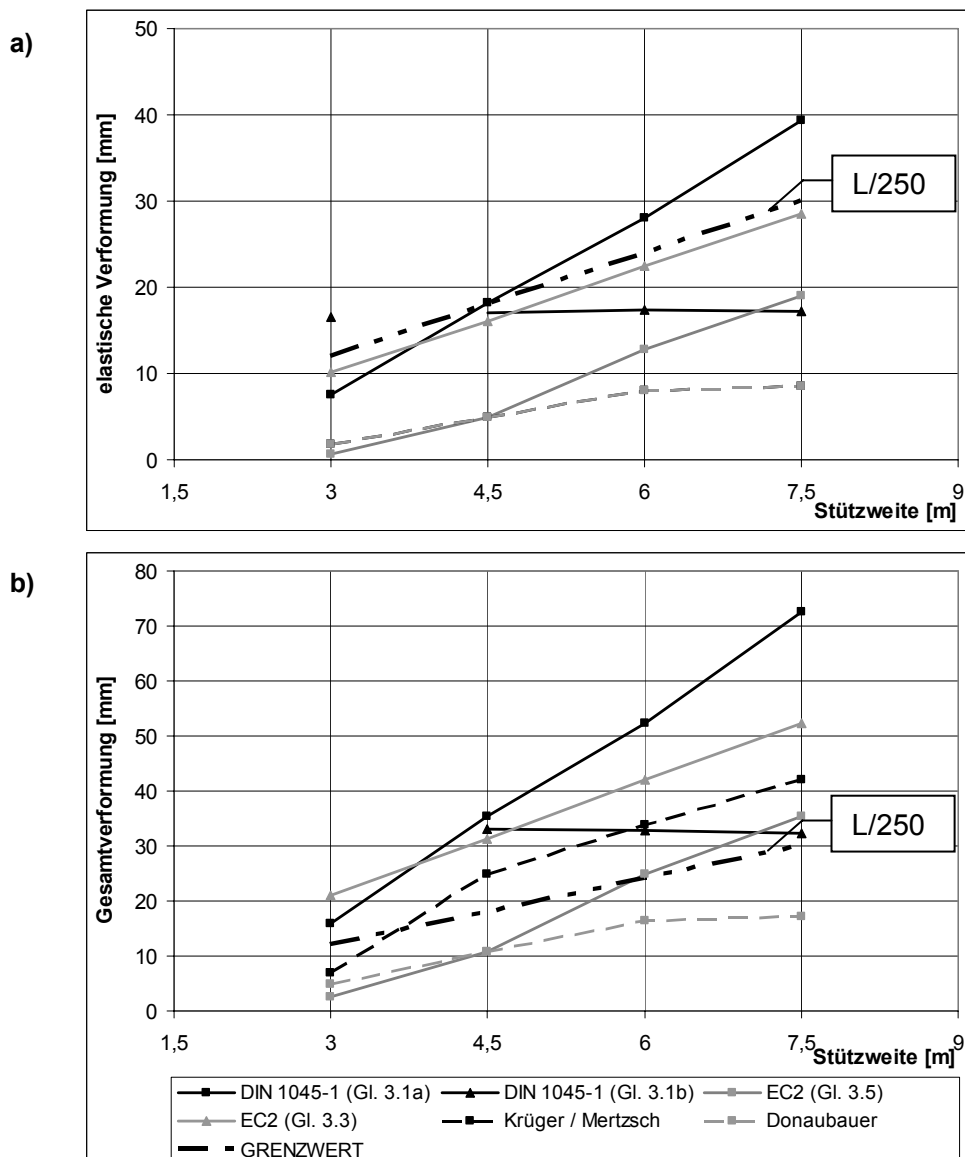
### 8.1.2 Berechnung der Verformung

Für die zuvor ermittelten Nutzhöhen sollen mit den in Kapitel 5 und 7 beschriebenen Verfahren die Durchbiegungen rechnerisch bestimmt werden. Die Berechnung der Durchbiegung erfolgt unter der quasi-ständigen Last. Die Rissbildung wird jedoch nach drei verschiedenen Ansätzen betrachtet:

1. Rissbildung wird bei Belastungsbeginn unter seltener Last berücksichtigt, das Rissmoment wird mit der zentrischen Zugfestigkeit bestimmt (somit Größtwert der Verformung)
2. Es wird auch für die Rissbildung nur die quasi-ständige Last berücksichtigt, das Rissmoment wird mit der zentrischen Zugfestigkeit bestimmt
3. wie 2., das Rissmoment wird jedoch mit der Biegezugfestigkeit bestimmt (Annahme: kleine Eigenspannungen, keine Vorschädigungen)

Wie in Abschnitt 7.1 beschrieben, stellt eine Berechnung nach 1., die schon bei Erstbelastung die seltene Last berücksichtigt, den ungünstigsten Fall dar. Zusätzlich wird auf der sicheren Seite liegend das Rissmoment mit der zentrischen Zugfestigkeit – statt mit der etwas höheren Biegezugfestigkeit – ermittelt, um rechnerisch nicht berücksichtigte Zwängungen zu erfassen.

In Abbildung 8.5a und 8.5b sind die nach Ansatz 1 berechneten Verformungen des im vorigen Abschnitt beschriebenen Einfeldträgers dargestellt. Bleiben die zeitabhängigen Einflüsse unberücksichtigt, so erfüllen nahezu alle Querschnitte die Verformungsbegrenzung auf  $L/250$ ; Ausnahme ist bei Stützweiten  $L > 4,5$  Meter die „DIN 1045-1 (Gl. 3.1a)“. Zum Zeitpunkt  $t = \infty$  ( $\varphi = 2,5$ ;  $\varepsilon_{cs} = -0,5$  ‰) ist nur noch bei Platten mit einer Nutzhöhe nach den Regeln von [Zilch/Donaubauer – 06] und mit Einschränkungen nach der Regel  $d = L/20$  und Korrekturwert  $310/\sigma_s$  aus [EN 1992-1-1 – 04] die Durchbiegungsbegrenzung erfüllt.

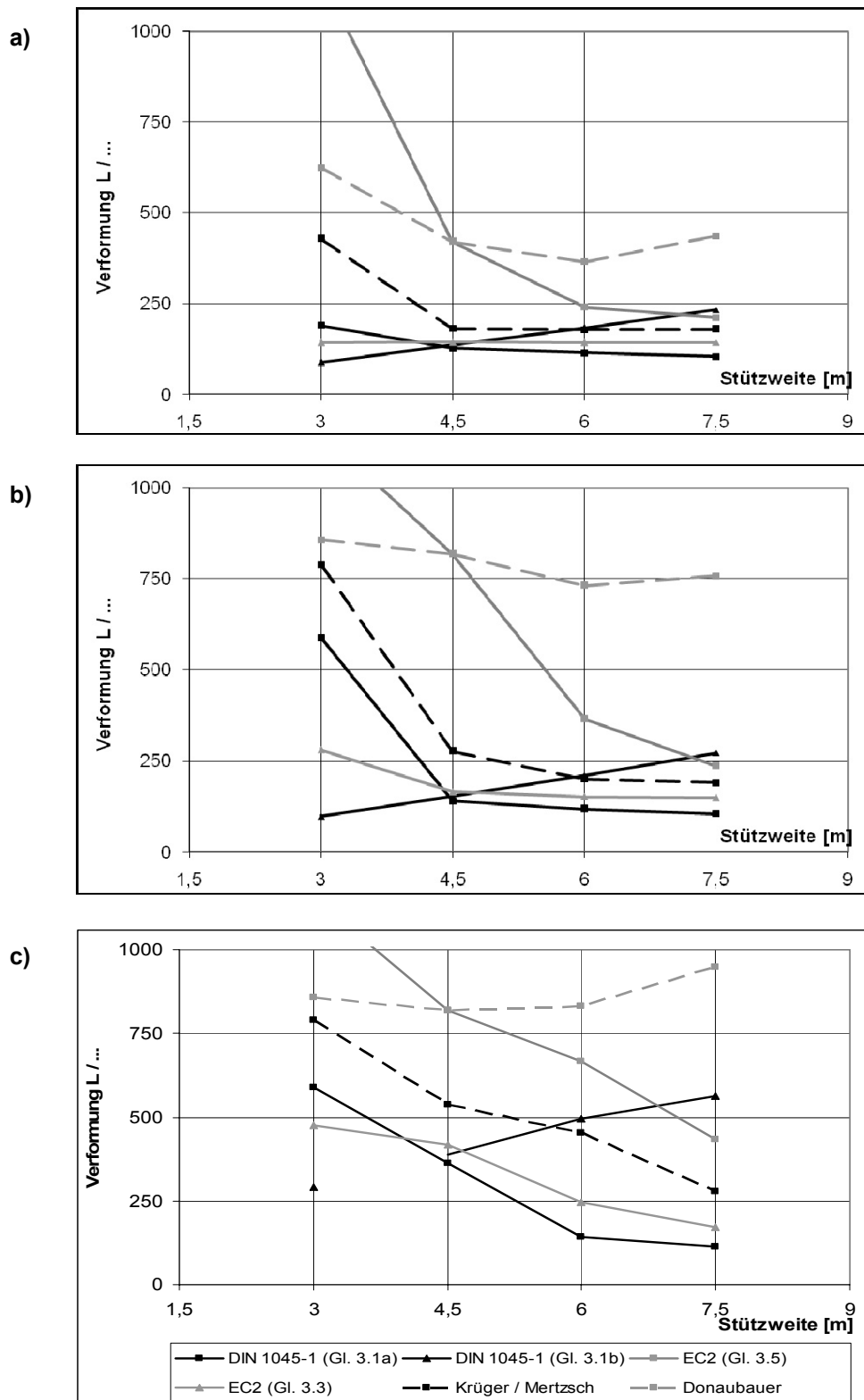


**Abb. 8.5:** Verformung für die in Abbildung 8.1 dargestellten Nutzhöhen. Rissbildung unter seltener Last, Rissmoment mit zentrischer Zugfestigkeit  
 a) Zeitpunkt  $t = 0$   
 b) Zeitpunkt  $t = \infty$  (nach Kriechen und Schwinden)

In den Abbildungen 8.6a bis 8.6c werden die Verformungen als bezogene Größe (auf die Länge bezogen) dargestellt, die zulässige Grenze kann somit direkt als waagerechte Linie



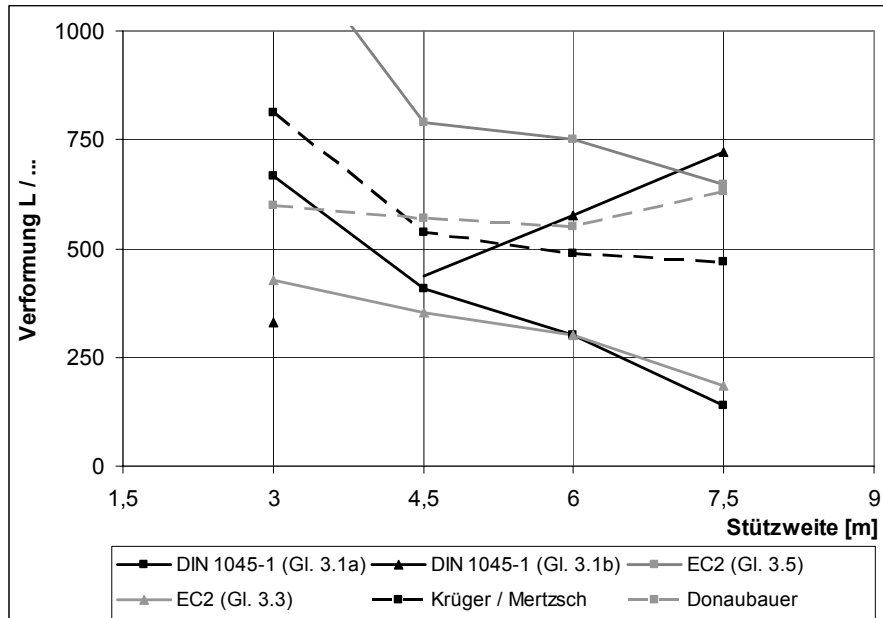
bei  $L/250$  abgelesen werden. Werte oberhalb von 250 erfüllen die Verformungskriterien. Berechnet wurde die Verformung mit den Nutzhöhen nach Abb. 8.1 für  $t = \infty$ . Abb. 8.6a zeigt die Werte nach Ansatz 1, Abb. 8.6b nach Ansatz 2 und Abb. 8.6c nach Ansatz 3.



**Abb. 8.6:** Auf die Stützweite bezogene Verformung zum Zeitpunkt  $t = \infty$  für die in Abbildung 8.1 dargestellten Nutzhöhen

- Rissbildung unter seltener Last; Rissmoment mit zentr. Zugfestigkeit
- Rissmoment unter zentr. Zugfestigkeit
- Erstriss unter quasi-ständiger Last; Rissmoment mit Biegezugfestigkeit

Wird die Betonfestigkeitsklasse auf C30/37 erhöht, bleibt die erforderliche Nutzhöhe nach DIN 1045-1 unverändert. Dementsprechend günstiger fällt – unter den gewählten Randbedingungen – die tatsächliche Berechnung der Durchbiegung unter Berücksichtigung einer höheren Festigkeit aus. Die Berechnungen nach Eurocode 2 zeigen, dass der Einfluss der Betonfestigkeit beim Biegeschlankheitskriterium unterschätzt wird, da die tatsächlichen Verformungen deutlich günstiger beeinflusst werden. Bei *Donaubauer* ist es genau umgekehrt: Die unter Ansatz der größeren Betonfestigkeit ermittelte erforderliche Nutzhöhe liefert deutlich größere Durchbiegungen, die Auswirkung der Festigkeit wird also überschätzt.

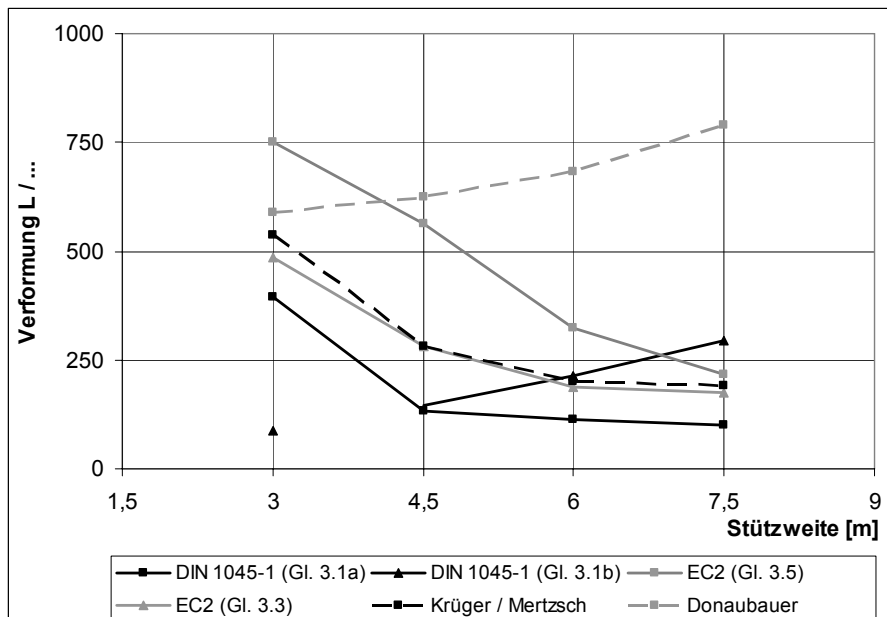


**Abb. 8.7:** Auf die Stützweite bezogene Verformung zum Zeitpunkt  $t = \infty$  für die in Abbildung 8.2 dargestellten Nutzhöhen; Erstriss unter quasi-ständiger Last; Rissmoment unter Biegezugfestigkeit

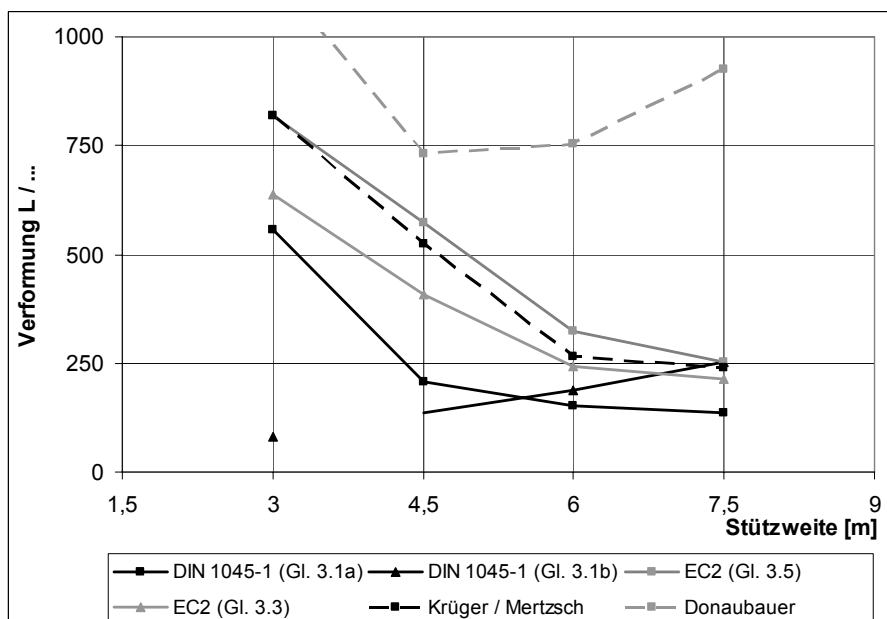
Nur unter den günstigsten Annahmen nach Ansatz 3 werden bei den meisten Biegeschlankheitskriterien die Verformungen eingehalten. Bei größeren Stützweiten kann es jedoch bei der Wahl der Nutzhöhe  $d = L/35$  nach DIN 1045-1 und auch nach dem genaueren Nachweis nach Eurocode 2 zu unzulässigen Verformungen kommen. Nach DIN 1045-1 gelingt nur mit  $L^2/150$  als Kriterium in den meisten Fällen ein Nachweis der Verformungsgrenze  $L/250$ , allerdings kann es bei großen Stützweiten zu deutlich unwirtschaftlichen Lösungen kommen. Nach Eurocode 2 könnte eine Verbesserung durch eine Erhöhung mit dem Faktor  $L/7$  ab 7 m Stützweite erzielt werden, wie dies bei verformungsempfindlichen Ausbauten vorgesehen ist (in den Diagrammen nicht dargestellt).

Es ist allerdings zu beachten, dass als veränderliche Last nur  $q_k = 2,0 \text{ kN/m}^2$  ( $\psi_2 = 0,3$ ) angenommen wurde. In Abbildung 8.3 wurden die Nutzhöhen für  $q_k = 5,0 \text{ kN/m}^2$  ( $\psi_2 = 0,6$ ) dargestellt. Die sich hierzu ergebende bezogene Durchbiegung nach Ansatz 3 ist in Abbildung 8.8 dargestellt. Abgesehen vom Ansatz nach [Zilch/Donaubauer – 06], der auch bisher sehr konservative Nutzhöhen lieferte und somit bei der Verformungsberechnung auf der sicheren Seite lag, erfüllt nur der nach dem Grenzwert  $L/20$  dimensionierte Querschnitt die Verformungsbegrenzung. Somit sind die Anwendungsgrenzen der Biegeschlankheitsnachweise in Frage zu stellen. Problematisch ist beispielsweise, dass nur die maximale Nutzlast  $q = 5 \text{ kN/m}^2$  ohne einen dazugehörigen Kombinationsbeiwert angegeben wird. Gerade dieser hat aber einen großen Einfluss auf die Verformung, da er sich nur auf den Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit auswirkt, während eine Veränderung der Nutzlast auch einen anderen Bewehrungsgrad und somit (bei größerer Einwirkung) eine größere Steifigkeit zur Folge hat. Letzteres gilt vor allem im Zustand II.

In der Abbildung 8.9 sind die Verformungsberechnungen für die in Abbildung 8.4 (Randfeld eines Durchlaufträgers) angegebenen Werte durchgeführt. Es ist zu erkennen, dass in den meisten Fällen deutlich günstigere Verformungen ermittelt wurden. Bis auf die nach DIN 1045-1 dimensionierten Querschnitte erfüllen alle (knapp) die Anforderung.



**Abb. 8.8:** Auf die Stützweite bezogene Verformung zum Zeitpunkt  $t = \infty$  für die in Abbildung 8.3 dargestellten Nutzhöhen; Erstriss unter quasi-ständiger Last; Rissmoment unter Biegezugfestigkeit



**Abb. 8.9:** Auf die Stützweite bezogene Verformung zum Zeitpunkt  $t = \infty$  für die in Abbildung 8.4 dargestellten Nutzhöhen; Erstriss unter quasi-ständiger Last; Rissmoment unter Biegezugfestigkeit, statisches System: Zweifeldträger

## 8.2 Zum Nachweis nach DIN 1045-1

Wie aus dem vorigen Abschnitt und speziell in den letzten beiden Abbildungen zu erkennen, ist die in der aktuell gültigen Norm [DIN 1045-1 – 08] vorhandene Regel zur Begrenzung der Biegeschlankheit kaum geeignet, die Vielzahl von möglichen Einflüssen zu erfassen. Besonders bei großen Belastungen, für die der Biegeschlankheitsnachweis gemäß Norm gerade noch anwendbar ist, kann das Einhalten des zulässigen Grenzwertes nicht nachgewiesen werden. Zu dem Verfahren ist kritisch anzumerken, dass die aus empirischen Studien der sechziger Jahre entnommenen Ergebnisse nicht ohne Einschränkung auf die heutigen Verhältnisse übertragbar sind. Hintergrund hierfür ist, dass seinerzeit meistens Bewehrungsstahl mit einer niedrigeren Streckgrenze ( $f_{yk} = 420 \text{ N/mm}^2$  oder sogar  $f_{yk} = 220 \text{ N/mm}^2$ ) zur Anwendung kam. Dies bedingt im Vergleich zu einem aktuell mit einem BSt 500 bemessenen Bauteil einen höheren Bewehrungsgrad und damit automatisch eine größere Steifigkeit (insbesondere im Zustand II). Außerdem wurden seinerzeit die Querschnitte weniger hoch ausgenutzt, da beim damaligen „ $n$ -gebundenen“ Bemessungsverfahren auch im Grenzzustand der Tragfähigkeit eine dreieckförmige Betondruckspannungsverteilung angenommen wurde. Der aktuelle Ansatz mit einem Parabel-Rechteckverlauf nutzt die Druckzone besser aus, der innere Hebelarm vergrößert sich, so dass sich auch dadurch zusätzlich kleinere Bewehrungsgrade ergeben.

Das aktuelle Sicherheitskonzept mit Teilsicherheitsbeiwerten ergibt bei üblich beanspruchten Tragwerken ebenfalls eine Bewehrungseinsparung im Vergleich zu einer „alten“ Bemessung mit dem damaligen Bemessungskonzept.

Auf der anderen Seite gibt es mit den heutigen höheren Betonfestigkeiten Effekte, die zu geringeren Verformungen führen. Diese Effekte gleichen jedoch die zuvor dargestellten ungünstigen Einflüsse vielfach nicht aus bzw. müssen im Einzelfall kritisch überprüft werden.

Es erscheint daher zumindest fraglich, ob die damaligen Untersuchungen als Beleg für eine Dimensionierung heutiger Konstruktionen herangezogen werden können.

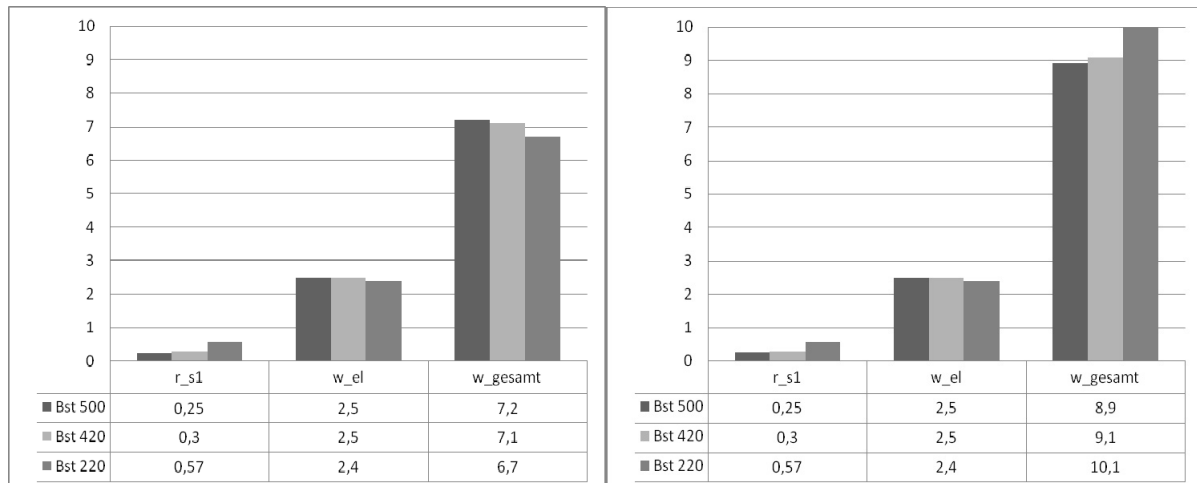
## 8.3 Ungünstige Veränderungen bzw. Einflüsse

### 8.3.1 Veränderung der Stahlfestigkeit

Im Anhang von [Mayer/Rüsch – 67] sind Angaben zu den verwendeten Stahlsorten der untersuchten Platten enthalten; insgesamt wurde in 110 Fällen die Streckgrenze der Bewehrung angegeben. Ein Betonstahl BSt IV (entspricht dem heutigen BSt 500 mit einer Streckgrenze von  $500 \text{ N/mm}^2$ ) ist nur zweimal vertreten. Am häufigsten werden die Stahlsorten BSt III (Streckgrenze  $420 \text{ N/mm}^2$ ) mit knapp 70 Prozent genannt, ein weiterer großer Anteil entfällt auf den BSt I (Streckgrenze  $220 \text{ N/mm}^2$ ) mit 25 Prozent.

In den folgenden Vergleichsrechnungen wurden die Verformungen zu Belastungsbeginn und nach abgeschlossenem Kriechen und Schwinden bestimmt. Die erforderliche Bewehrung wurde im Grenzzustand der Tragfähigkeit nach aktueller Norm ermittelt. Dabei gehen die Unterschiede der drei oben erwähnten Streckgrenzen direkt in die Bewehrungsmenge ein. Der Bewehrungsgrad eines Bauteils mit einem BSt III steigt gegenüber dem BSt IV um den Faktor  $500/420 = 1,19$ , bei einem BSt I beträgt der Faktor  $500/220 = 2,27$ .

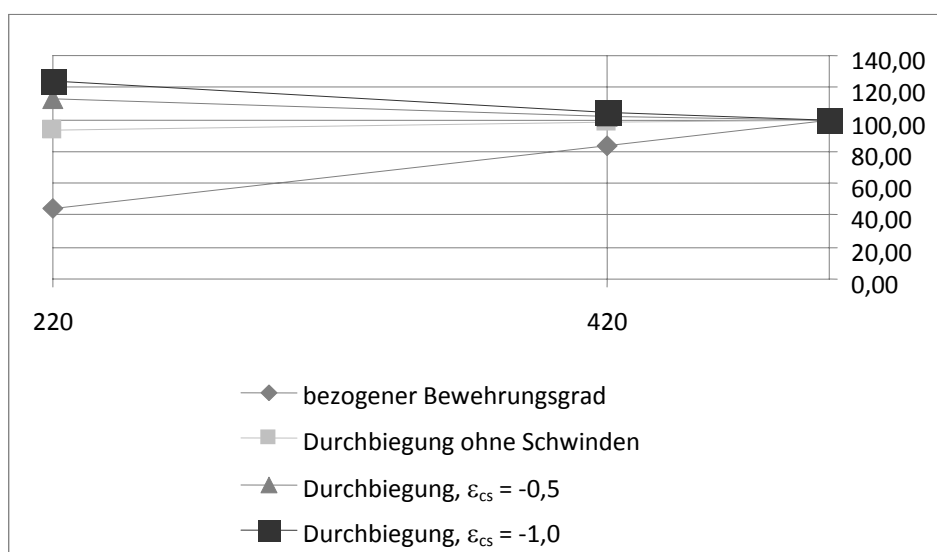
Zunächst wird der Sonderfall untersucht, dass der betrachtete Plattenstreifen im Zustand I verbleibt (Abb. 8.10 u. 8.11). Gewählt werden folgende Parameter: Stützweite  $L = 5 \text{ m}$ , Beton C40/50, quasi-ständige Last  $f_{perm} = 6,6 \text{ kN/m}^2$ , Bemessungslast  $f_{Ed} = 11,1 \text{ kN/m}^2$ , Kriechzahl  $\varphi = 2,5$ . Unter den genannten Parametern wird die Zugfestigkeit  $f_{ctm} = 3,5 \text{ N/mm}^2$  des Betons nicht überschritten, so dass Zustand I zutreffend ist.



**Abb. 8.10:** Verformung (in mm) eines Plattenstreifens ( $h/b/d = 20/100/17$ ) eines im Zustand I verbleibenden Einfeldträgers ohne Schwinden (links) und mit einem Schwindmaß von  $\epsilon_{CS} = -0,5 \text{ ‰}$  (rechts)

Im Zustand I wird der Verformungswiderstand fast vollständig vom Betonquerschnitt bestimmt, die Bewehrung beteiligt sich nur im geringen Umfang am Lastabtrag. In diesem Fall sind die Auswirkungen einer erhöhten Bewehrungsmenge bei üblichen Plattentragwerken (Bewehrungsgrad bei BSt 500  $< 0,5 \%$ ) gering. Allerdings behindert die Zugbewehrung das Kriechen des unter Zugspannung stehenden Betons, so dass der Einfluss der Bewehrung zum Zeitpunkt  $t = \infty$  etwas größer ist als zu Belastungsbeginn (vgl. Abb. 8.10 links; es ist  $w_{el}$  die elastische Durchbiegung in Feldmitte zum Zeitpunkt  $t = 0$  und  $w_{gesamt}$  zum Zeitpunkt  $t = \infty$  mit Kriechen). Wie zu erwarten, wirkt sich ein höherer Bewehrungsgrad günstig aus.

Beim Schwinden hingegen verhindert die Bewehrung das Verkürzen des Betons. Bei Bauteilen ohne Druckbewehrung wirkt sich im Zustand I die Bewehrungsmenge negativ auf die Verformung aus. Bei einem höheren Bewehrungsgrad nimmt auch der Unterschied zwischen den Dehnungen am oberen und am unteren Querschnittsrand zu, d. h. die Krümmungen und auch die Verformung werden größer. Dieser Effekt ist im rechten Teil der Abb. 8.10 dargestellt.



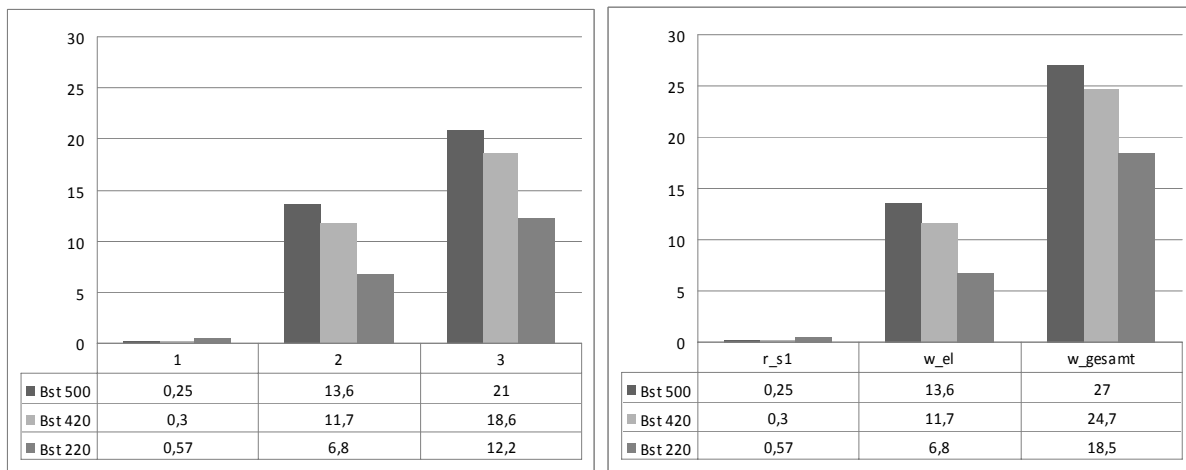
**Abb. 8.11:** Verformungen  $w_0$  und  $w_\infty$  bei unterschiedlichen Streckgrenzen und den damit verbundenen Bewehrungsmengen im Zustand I (bezogen auf die Werte des mit einem BSt 500 bewehrten Plattenstreifens, Angabe in Prozent)

In Abb. 8.11 sind die Verformungen für verschiedene Bewehrungsgrade (resultierend aus den unterschiedlichen Streckgrenzen des verwendeten Stahls) dargestellt. Dabei wird die Durchbiegung des Bauteils mit einem BSt 500 als Bezugsgröße zu 100 Prozent gesetzt. Der Bewehrungsgrad wird wie folgt dargestellt:

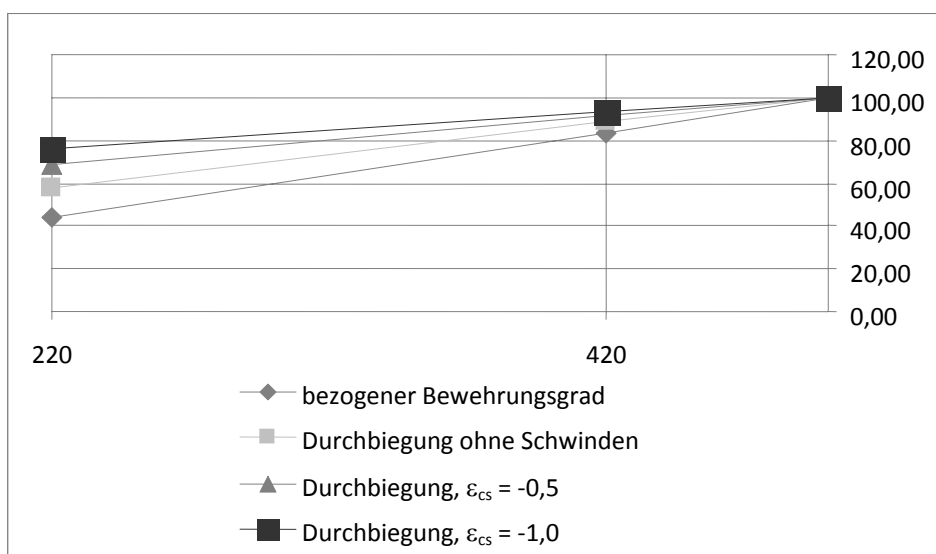
$$\rho_{s1}[\%] = \frac{\rho_{s1}(500)}{\rho_{s1}(f_{yk})} \cdot 100$$

In Abb. 8.11 ist der geringe Einfluss auf die Durchbiegung bei einem üblichen Schwindmaß (hier:  $\epsilon_{cs} = -0,5 \text{ ‰}$ ) zu erkennen. Da außerdem Verformungen i. d. R. erst kritisch auftreten, wenn der Querschnitt in den Zustand II übergegangen ist, kann der Einfluss in den folgenden Überlegungen vernachlässigt werden.

In Abbildung 8.12 wird der gleiche Plattenstreifen, allerdings für einen Beton C20/25, betrachtet. Dabei wird dann die Betonzugfestigkeit überschritten, so dass eine Untersuchung mit Rissbildung durchzuführen ist. Wie schon zuvor ist links die Verformung ohne Schwinden und rechts die Verformung mit einem Schwindmaß von  $-0,5 \text{ ‰}$  dargestellt.



**Abb. 8.12:** Verformung (in mm) des oben beschriebenen Plattenstreifens ohne Schwinden (links) und mit einem Schwindmaß von  $\epsilon_{cs} = -0,5 \text{ ‰}$  (rechts). Der Plattenstreifen befindet sich teilweise im Zustand II



**Abb. 8.13:** Auf die Werte des mit einem BSt 500 bewehrten Plattenstreifens bezogene Gesamtverformung bei unterschiedlichen Streckgrenzen und den damit verbundenen Bewehrungsmengen (Zustand II)

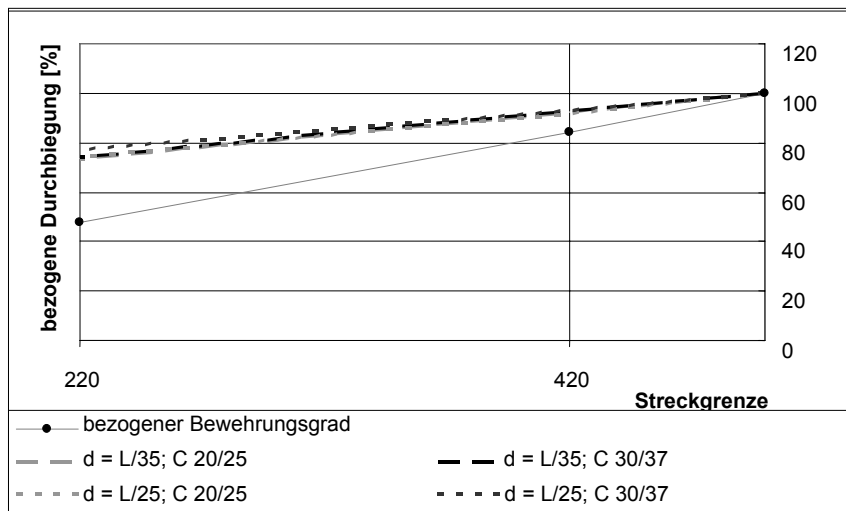
Im direkten Vergleich zu Abb. 8.10 ist deutlich die Zunahme der Verformung bei reduzierter Bewehrung zu erkennen, sowohl für  $t = 0$  bei Belastungsbeginn als auch für  $t = \infty$  nach abgeschlossenem Kriechen und Schwinden. In Abb. 8.13 wird als Bezugsgröße (= 100 %) wiederum der mit einem BSt 500 bewehrte Plattenstreifen gewählt. Die Verformung ist für drei verschiedene Schwindmaße (0, -0,5 und -1 Promille) dargestellt.

Um eine allgemeine Aussage über die Vergrößerung der Verformung durch den Einsatz aktueller Stahlsorten machen zu können, wurden weitere Randbedingungen wie Bauteilgeometrie, Betonfestigkeiten und Lastniveau untersucht. Die Ergebnisse sind auszugsweise in den Abbildungen 8.14 und 8.15 dargestellt. Als Bezugsgröße ist der Kehrwert des Verhältnisses der Streckgrenze und somit auch des Bewehrungsgrades angegeben. Es ist festzuhalten, dass größere Bewehrungsmengen stets zu einer erkennbaren Verkleinerung der Verformung führen. Diese lässt sich in etwa über folgende Beziehung abschätzen:

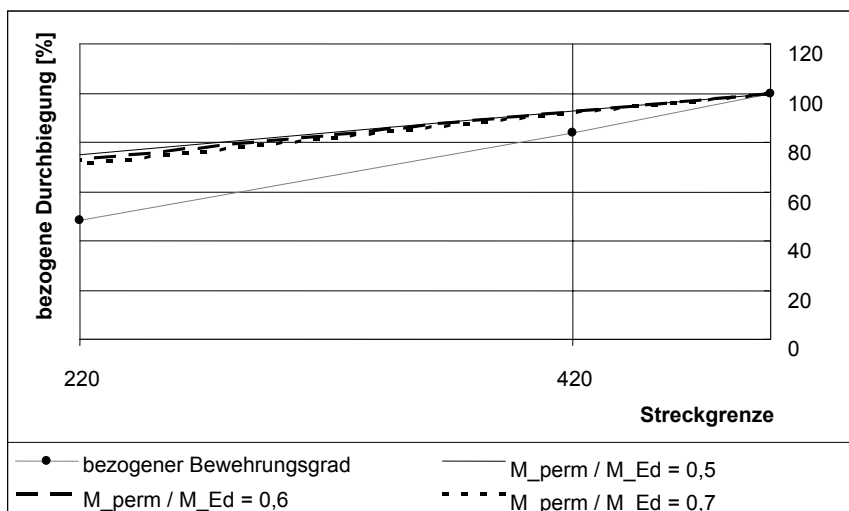
$$w_{f_{yk}} \geq \left( 0,5 + 0,5 \cdot \frac{f_{yk}}{500} \right) \cdot w_{500}$$

$$\leq \left( 0,67 + 0,33 \cdot \frac{f_{yk}}{500} \right) \cdot w_{500}$$

mit  $f_{yk}$  als maßgebende Streckgrenze in  $\text{N}/\text{mm}^2$



**Abb. 8.14:** Auf die Werte des mit einem BSt 500 bewehrten Plattenstreifens bezogene Gesamtverformung bei unterschiedlichen Betonfestigkeiten und Biegeschlankheiten



**Abb. 8.15:** Auf die Werte des mit einem BSt 500 bewehrten Plattenstreifens bezogene Gesamtverformung bei unterschiedlichen Streckgrenzen und den damit verbundenen Bewehrungsmengen (Zustand II)

### 8.3.2 Einfluss veränderter Bemessungskonzepte

Die Sicherheits- und Bemessungskonzepte haben sich in den letzten 50 Jahren mehrfach geändert. Zum Zeitpunkt der Untersuchungen von [Mayer/Rüsch – 67] kam das sog. n-gebundene Bemessungsverfahren mit einer dreieckförmigen Betondruckspannungsverteilung zur Anwendung. Seit 1972 wird mit der heute noch üblichen parabelförmigen Spannungsverteilung gerechnet, allerdings erfolgte die Bemessung mit einem globalen Sicherheitsfaktor  $\gamma = 1,75$ . Mit der neuen DIN 1045-1 (2001; 2008) erfolgt die Bemessung mit Teilsicherheitsbeiwerten.

Diese Effekte können bei üblichen Plattentragwerken Bewehrungseinsparungen von 15 bis 20 Prozent ausmachen (vgl. [Goris – 01], [Voigt – 09]). Prinzipiell gelten hierfür die zuvor dargestellten Abhängigkeiten zwischen Bewehrungsgrad und Verformung.

## 8.4 Günstige Veränderungen bzw. Einflüsse

Während höhere Stahlfestigkeiten sowie neuere Bemessungsverfahren und -konzepte zu einer Verringerung der Bewehrungsgrade und somit zu größeren Durchbiegungen führen, werden nachfolgend Einflüsse betrachtet, die sich günstig auf die Verformungsberechnung auswirken. Im Abschnitt 8.4.1 werden die Auswirkungen unterschiedlicher Betonfestigkeiten untersucht, Abschnitt 8.4.2 behandelt eine konstruktive, in der idealisierten Tragwerksberechnung nicht berücksichtigte Randeinspannung. Abschnitt 8.4.3 enthält weitere Hinweise auf günstige Einflüsse.

### 8.4.1 Rechnerische und tatsächliche Betonfestigkeit

Der Beton wird anhand seiner Druckfestigkeit klassifiziert. Aus diesem Wert lassen sich weitere Materialeigenschaften wie Elastizitätsmodul und Zugfestigkeit sowie die zur Beschreibung der Langzeiteinflüsse notwendige Kriech- und Schwindzahl ermitteln.

Seit den Untersuchungen von *Mayer* und *Rüsch* ist die Qualität von Betonen deutlich gestiegen. Man kann davon ausgehen, dass im Regelfall die Betonfestigkeit in aktuell geplanten Tragwerken größer ist als die der seinerzeit betrachteten Platten. Zusätzlich ist zu beachten, dass die Druckfestigkeit des tatsächlich eingebauten Betons von dem der Berechnung zugrunde gelegten Wert abweichen kann. In den nachfolgend aufgeführten Beispielen wurden sie jeweils um zehn und um zwanzig Prozent erhöht. Die Auswirkungen auf die Verformung werden in Abhängigkeit von den Veränderungen des Elastizitätsmoduls, der Zugfestigkeit, des Schwindmaßes und der Kriechzahl unterteilt.

Der **Elastizitätsmodul** wird aus der Druckfestigkeit mit Gleichung (4.5) berechnet. Ein größerer Elastizitätsmodul verringert die Durchbiegung im Zustand I und II, sowohl für Lasteinwirkungen als auch für das zeitabhängige Verhalten.

Die **Zugfestigkeit** wird über Gleichung (4.6) aus der Druckfestigkeit ermittelt und ist – im Gegensatz zur Biegezugfestigkeit – auch nur hiervon abhängig. Eine höhere Zugfestigkeit wirkt sich auf die Rissbildung und somit auf das Verhältnis von sich im Zustand I oder II befindlichen Bauteilabschnitten aus. Zusätzlich wird die Verbundspannung und damit auch die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen von der Zugfestigkeit beeinflusst.

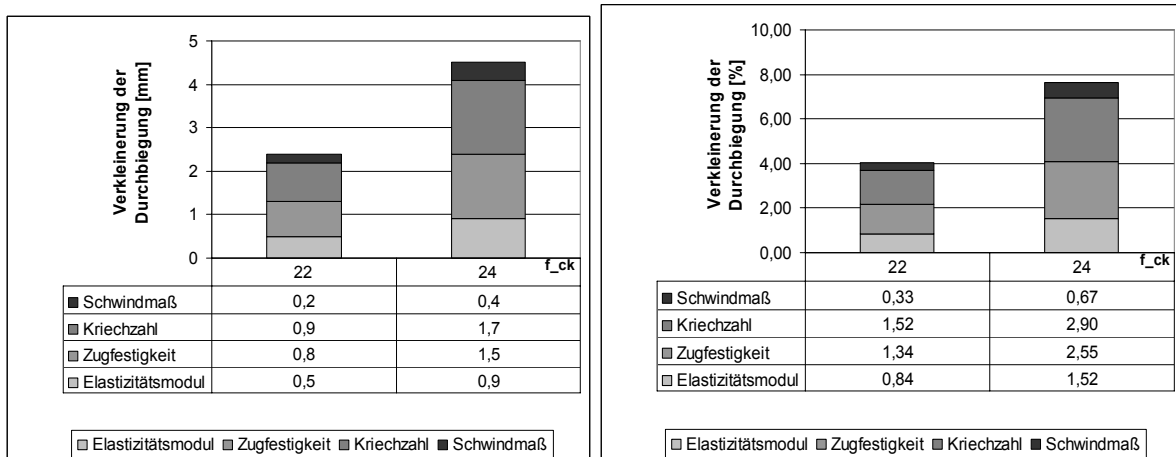
**Kriechen und Schwinden** werden ebenfalls von der Betonfestigkeit beeinflusst, allerdings sind weitere Faktoren zu berücksichtigen (u. a. Umgebungsbedingungen); vgl. Gleichung (4.12) und (4.14) sowie Gl. (4.22ff).

Um diese Einflüsse differenzierter betrachten zu können, wurden Parameterstudien an Plattenstreifen durchgeführt mit  $h/d = 20/17$  cm,  $L = 5,95$  m (daraus folgt  $L/d = 35$ ), einem Bewehrungsgrad  $\rho_s = 0,375$  % und einem Dauerlastanteil, der 60 % der maximalen Bemessungslast entspricht. In Abbildung 8.16 ist das Ergebnis für ein Innenbauteil mit einer relati-

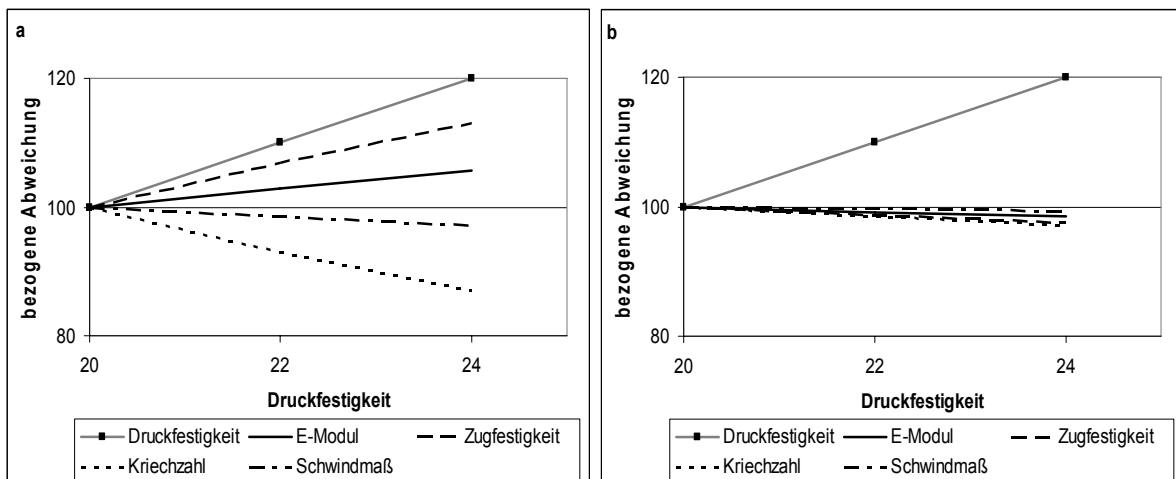


von Luftfeuchtigkeit von 50 % dargestellt. Die Gesamtverformung unter Annahme einer Druckfestigkeit von  $f_{ck} = 20 \text{ N/mm}^2$  beträgt für  $t = \infty$  (abgeschlossenes Schwinden und Kriechen)  $f_{\infty} = 60,3 \text{ mm}$ . In linken Teil der Abbildung sind die Differenzen dieses Wertes zu den Verformungen bei einer zehn- bzw. zwanzigprozentigen Erhöhung von  $f_{ck}$  angegeben (Hinweis: mit einer Erhöhung von  $f_{ck}$  steigt natürlich auch die Zugfestigkeit an). Die rechte Abbildung zeigt die prozentuale Abweichung. So führt eine Erhöhung der Druckfestigkeit um zehn Prozent zu einer Verringerung der Verformung um vier Prozent, bei einer Steigerung von zwanzig Prozent reduziert sich die Durchbiegung um knapp acht Prozent.

Dabei spielt der Einfluss des Schwindens nur eine untergeordnete Rolle, da das Schwindmaß selbst sich nur wenig bei einer 20%igen Erhöhung von  $f_{ck}$  ändert (vgl. auch Abbildung 8.17a). Hinzu kommt, dass die Durchbiegung infolge Schwindens auch von den drei anderen Faktoren (Elastizitätsmodul, Zugfestigkeit und Kriechzahl) beeinflusst wird. Bei der Zugfestigkeit und der Kriechzahl sind die Auswirkungen deutlich erkennbar (s. Abb. 8.17a).

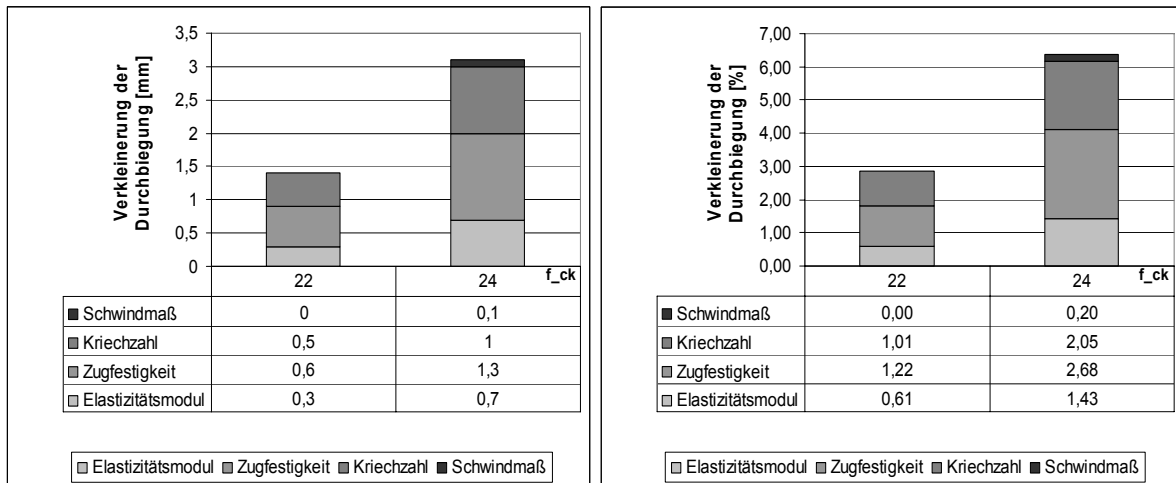


**Abb. 8.16:** Verkleinerung der Durchbiegung eines Innenbauteils bei Veränderung der Betonfestigkeit; Ausgangswert: C20/25, Gesamtdurchbiegung 60,3 mm (weitere Angaben im Text)



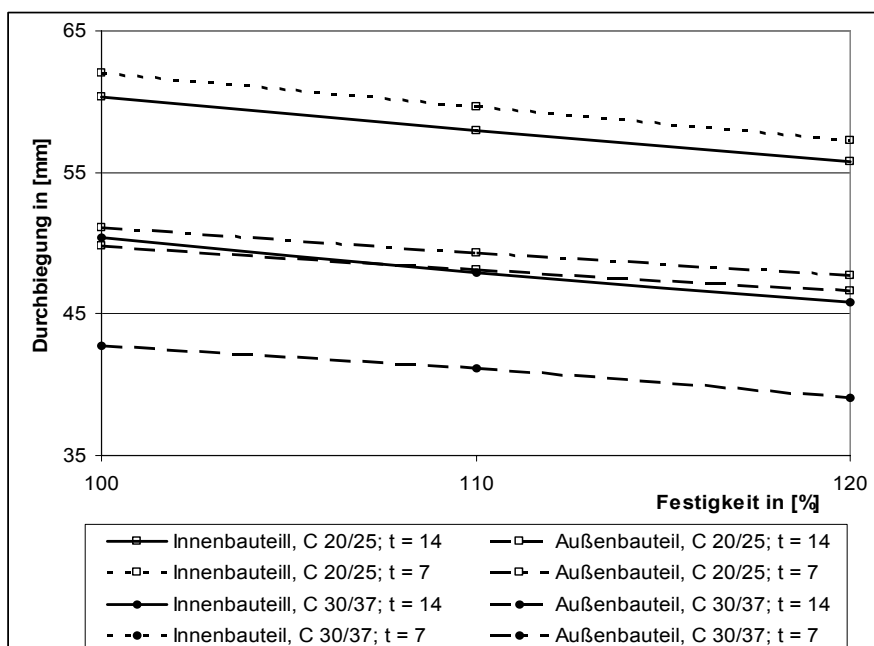
**Abb. 8.17:** Einfluss der Betonfestigkeit  
a) auf die untersuchten Parameter (C20/25 = 100 %)  
b) Verformungsänderung (Gesamtverformung des C20/25 = 100 %)

In Abb. 8.18 ist die Berechnung des zuvor beschriebenen Einfeldträgers als Außenbauteil mit einer relativen Luftfeuchtigkeit von 80% dargestellt. Der Einfluss des Schwindens geht deutlich zurück, die Veränderung der Verformung beträgt insgesamt weniger als drei Prozent bei  $f_{ck} = 22 \text{ N/mm}^2$  und sechs Prozent bei  $f_{ck} = 24 \text{ N/mm}^2$ .



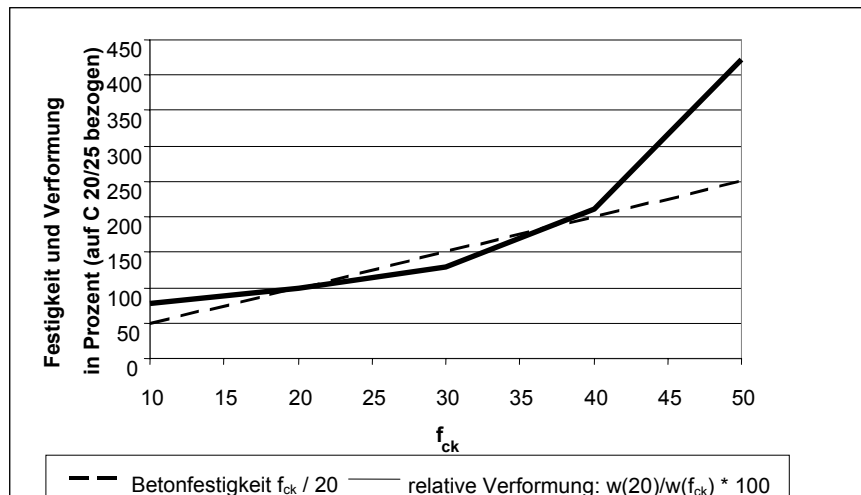
**Abb. 8.18:** Verkleinerung der Durchbiegung eines Außenbauteils bei Veränderung der Betonfestigkeit, ausgehend von der Durchbiegung unter Verwendung eines C20/25

In Abb. 8.19 sind die Verformungen für verschiedene Betonfestigkeiten und Umgebungsbedingungen als Absolutwerte dargestellt. Es ist festzuhalten, dass der zuvor beschriebene Unterschied zwischen Außen- und Innenbauteilen bestehen bleibt. Insgesamt liegen die Abweichungen jedoch relativ dicht beieinander. So verursacht eine zehnpromtente Steigerung der Druckfestigkeit in etwa drei- bis fünfprozentige Verkleinerungen der Verformung, bei zwanzigprozentiger Abweichung liegen sie bei ca. sechs bis neun Prozent.



**Abb. 8.19:** Verformungen in Abhängigkeit von den Umgebungsbedingungen (Innen-/ Außenbauteil), Betonfestigkeiten und Zeitpunkt der Erstbelastung (7 bzw. 14 Tage)

Abb. 8.20 stellt die relative Verformung nach abgeschlossenem Kriechen und Schwinden in bezogener Form dar. Dabei ist die Bezugsgröße (100 %) die Verformung bei Annahmen der Ausgangsfestigkeit  $f_{ck} = 20 \text{ N/mm}^2$ . Dabei ist der überproportionaler Einfluss der Betonfestigkeit festzustellen.



**Abb. 8.20:** Relative Verformungen des untersuchten Plattenstreifens bei verschiedenen Betonfestigkeitsklassen. Als Bezugswert dient die Verformung eines C20/25

#### 8.4.2 Unplanmäßige Randeinspannung

Nach [DIN 1045-1 – 08] werden frei drehbar gelagerte Ränder von Plattentragwerken i. d. R. so bewehrt, dass der Querschnitt ein Randmoment von 25 Prozent des Feldmomentes unter Bemessungslast aufnehmen kann. Eine tatsächliche Randeinspannung in dieser Größe beeinflusst natürlich auch die Verformungen. In den folgenden Berechnungen wird die Randeinspannung mit Drehfedern simuliert. Der Einspanngrad wird über die linear-elastisch ermittelten Schnittgrößen definiert; ein Einspanngrad von 25 % bedeutet dabei, dass das Verhältnis des Einspannmomentes zum Feldmoment des frei drehbar gelagerten Trägers 0,25 beträgt.

Die nichtlineare Berechnung erfolgt auf der Basis der im Abschnitt 7.2 dargestellten Zusammenhänge. In einem ersten Schritt wird der Zustand I angenommen. Treten Risse auf, so werden die Verdrehungen der Trägerenden neu bestimmt. Aus der Differenz der ursprünglichen und der neu ermittelten Verdrehung der Federn kann die Veränderung des Randmomentes bestimmt werden. Mit den neuen Randmomenten wird überprüft, ob weitere Bereiche in den Zustand II übergehen. Bereits gerissene Bereiche verbleiben im Zustand II, auch wenn sich aus der Umlagerung kleinere Momente als das Rissmoment einstellen. Die Iteration wird so lange wiederholt, bis keine neuen gerissenen Bereiche mehr hinzukommen.

In Abbildung 8.21 sind die Verformungen eines Einfeldträgers mit der Länge  $L = 5,0$  m dargestellt. Die Biegeschlankheit variiert zwischen 35, 30 und 25. Der Bewehrungsgrad beträgt  $\rho_s = 0,5\%$  bei  $L/d = 35$ ,  $\rho_s = 0,3\%$  bei  $L/d = 30$  und  $\rho_s = 0,25\%$  bei  $L/d = 25$ . Es wurden drei verschiedene Ausgangssituationen festgelegt:

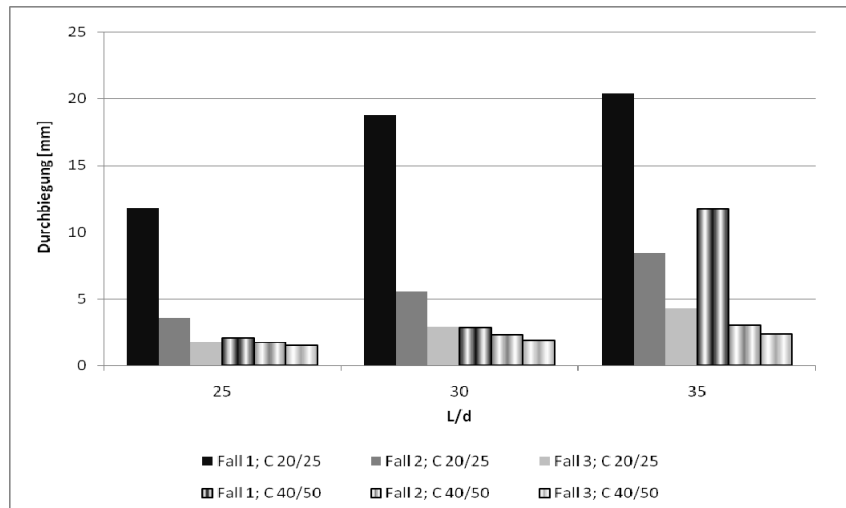
Fall 1: Einfeldträger mit frei drehbaren Endauflagern

Fall 2: Einfeldträger mit einseitiger Drehfeder (frei drehbarer Lagerung an der anderen Seite)

Fall 3: Einfeldträger mit Drehfeder an beiden Enden

Die Steifigkeit der Federn wurde so gewählt, dass unter der Bemessungslast im Grenzzustand der Tragfähigkeit ein Randmoment entsteht, welches 25 Prozent des maximalen Feldmomentes beträgt (s. vorher). Diese Bedingung ist bei den untersuchten Platten näherungsweise bei einer Federsteifigkeit  $c_w = 6$  MNm/m erfüllt.

Um den Einfluss der Betonzugfestigkeit bzw. der Rissbildung zu erfassen, wurde die Berechnung mit einer Betonfestigkeit C40/50 durchgeführt, bei der der betrachtete Plattenstreifen nur bei der Schlankheit  $L/d = 35$  in den Zustand II übergeht. Zum Vergleich wurde die Berechnung mit einem C20/25 durchgeführt, bei dem in weiten Bereichen mit Rissbildung zu rechnen ist.

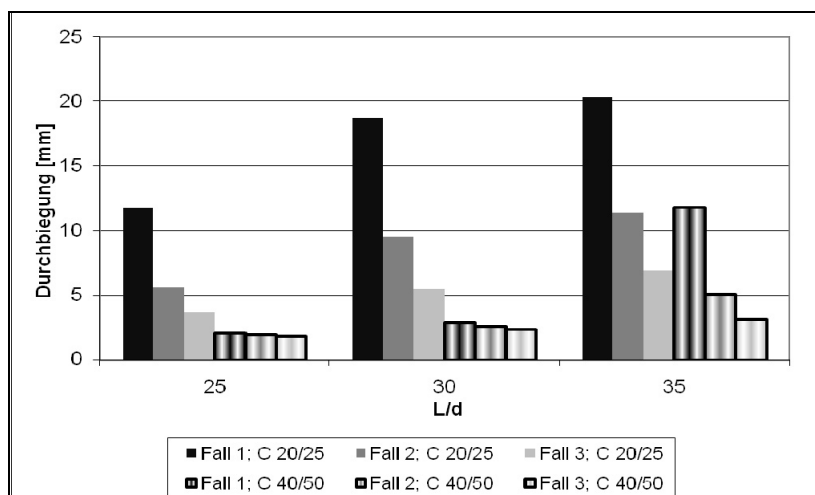


**Abb. 8.21:** Durchbiegung (in mm) des untersuchten Einfeldträgers bei frei drehbarer Lagerung (Fall 1), einseitiger (Fall 2) und beidseitiger (Fall 3) teilweiser 25-%iger Randeinspannung

Im Zustand I (Beton C40/50,  $L/d = 25$  und  $30$ ) unterscheiden sich die Durchbiegungen bei frei drehbarer Lagerung gegenüber der teilweisen Einspannung um ca. 15 % (Fall 2) bzw. 25 % (Fall 3). Bei einer Biegeschlankheit von 35 oder generell bei einem Beton C20/25 sind die Unterschiede um ein Vielfaches größer, da die untersuchte Platte (Bewehrungsgrade zwischen 0,25% und 0,50%, d. h. gering beansprucht) bei frei drehbarer Lagerung auf größerer Länge in den Zustand II übergeht, aber schon bei nur einseitiger teilweiser Randeinspannung die gerissenen Bereiche erheblich kleiner sind bzw. mit Rissbildung nicht mehr zu rechnen ist.

Die bisher verwendete Federsteifigkeit ist auf eine Randeinspannung von 25 % abgestimmt. Häufig liegen die Randeinspannmomente unter diesem Wert. In der Abbildung 8.25 wurde derselbe Träger mit einer Federsteifigkeit  $c_w = 2,4$  MNm/m berechnet (entspricht einer Randeinspannung von 10 %). Die Auswirkungen einer Endeinspannung sind jedoch noch deutlich erkennbar (s. Abb. 8.22). Im Zustand I betragen die Abweichungen etwa zehn bzw. zwanzig Prozent. Rissbildung tritt jedoch wegen der geringeren Randeinspannung und der damit verbundenen geringeren Entlastung des Feldbereichs auch in den Fällen 2 und 3 auf.

Der Einfluss der Randeinspannung kann in der Praxis nur schwer korrekt erfassen werden, da hierbei die Steifigkeit der einspannenden Bauteile erfasst werden müsste. Diese ist jedoch von vielen Faktoren abhängig und kann sich durch Rissbildung u.ä. verändern. Wie aus den vorhergehenden Darstellungen zu sehen ist, können auf der anderen Seite schon kleine Änderungen der Federsteifigkeit große Veränderungen der Verformung ergeben.



**Abb. 8.22:** Durchbiegung des oben beschriebenen Einfeldträgers bei frei drehbarer Lagerung (Fall 1), einseitiger (Fall 2) und beidseitiger (Fall 3) teilweiser Randeinspannung (10 Prozent)

Letzteres gilt ggf. auch für geringe Lasterhöhungen. In Abb. 8.23 ist der Einfluss einer Laststeigerung bei der betrachtete Ausgangssituation zu sehen, dargestellt über die quasi-ständige Nutzlast  $\psi_2 \cdot q_k$ , wobei  $\psi_2$  zwischen 0 und 1 gewählt wird, die Belastung im Grenzzustand der Tragfähigkeit und der Bewehrungsgrad bleiben unverändert. Es ist jeweils die Abweichungen der Verformungen mit einseitiger bzw. zweiseitiger teilweiser Randeinspannung im Vergleich zu den Verformungen des Ausgangssystems ohne Randeinspannung angegeben.

Im Einzelnen wird unterschieden:

- a)  $c_w = 6,0; L/d = 35$     b)  $c_w = 6,0; L/d = 30$     c)  $c_w = 6,0; L/d = 25$   
 d)  $c_w = 2,4; L/d = 35$     e)  $c_w = 2,4; L/d = 30$     f)  $c_w = 2,4; L/d = 25$

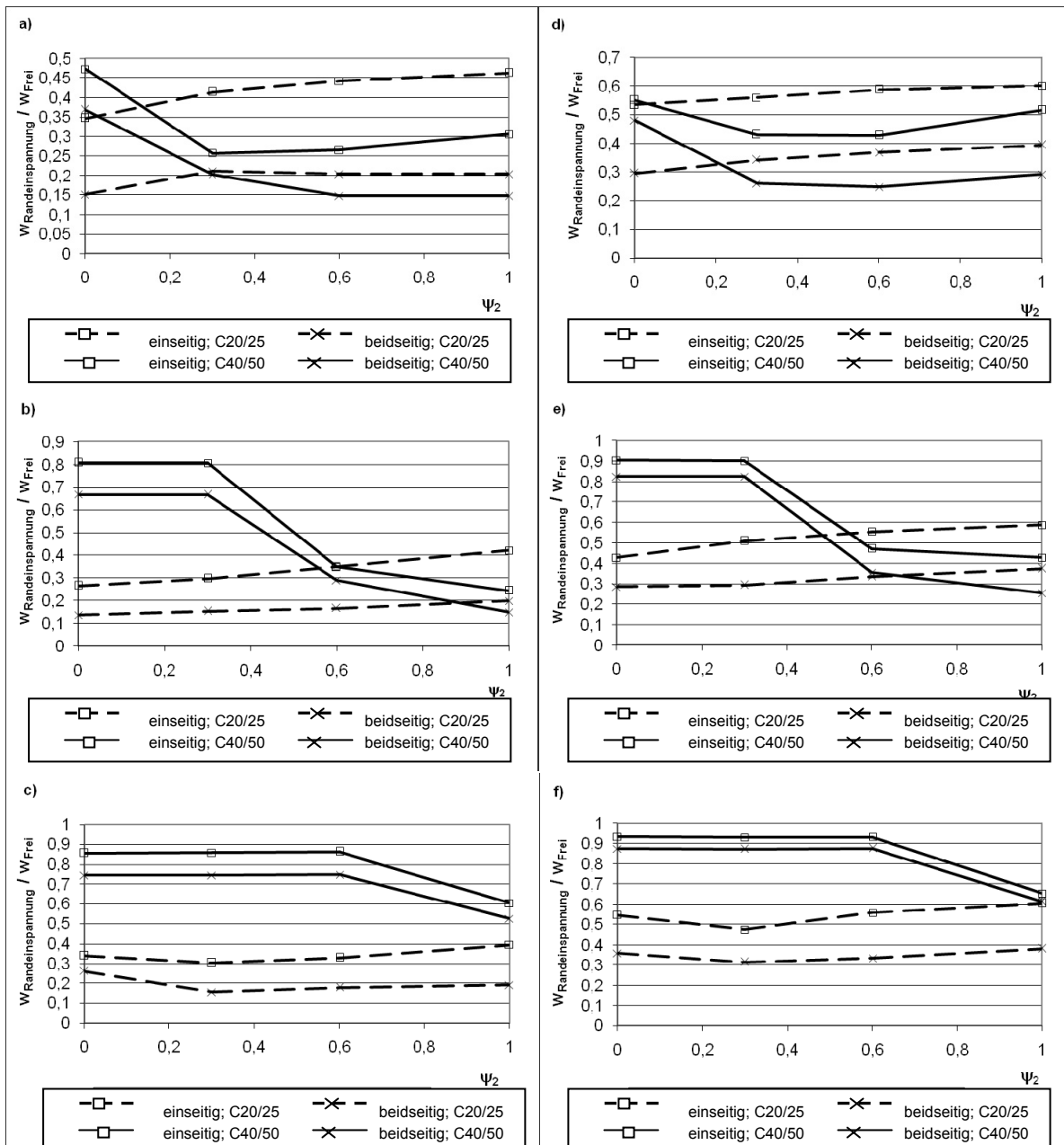


Abb. 8.23: Auf die frei drehbar Lagerung bezogene Durchbiegung bei einseitiger bzw. zweiseitiger, teilweiser Einspannung

### 8.4.3 Weitere günstige Effekte

Neben den oben genannten Einflüssen gibt es weitere, die das Verformungsverhalten eines Bauteils günstig beeinflussen. Beispielhaft genannt sei hier eine zweiachsige Lastabtragung.

## 8.5 Vergleich und Fazit

Die bisherigen Untersuchungen haben gezeigt, dass die höhere Stahlfestigkeit (BSt 500 statt BSt 420) eine Einsparung von mindestens 15 Prozent der Bewehrung gegenüber den bei [Mayer/Rüsch – 67] zugrunde liegenden Platten ergibt. Die Auswirkung des aktuellen Bemessungskonzeptes kann zusätzlich mit ca. 10 Prozent Einsparung angegeben werden. Die zu erwartende Vergrößerung der Verformung aufgrund einer um insgesamt 25 Prozent reduzierten Bewehrungsmenge liegt bei ca. 15 – 20 Prozent. Wenn man den seinerzeitigen Vorschlag zur Biegeschlankheit auf die aktuellen Bedingungen übertragen will, müsste der Grenzwert  $L/d = 35$  um einen entsprechenden Faktor verkleinert werden.

In grober Näherung kann man sagen, dass eine Vergrößerung der Nutzhöhe zu einer etwa doppelt so großen Verminderung der Verformung führt, d. h. steigt die Nutzhöhe um 10 Prozent, sinkt die Verformung um 20 Prozent. Auf den Nachweis der Biegeschlankheit bezogen bedeutet das, dass der Grenzwert  $L/d = 35$  um 10 Prozent gesenkt werden muss, um die oben beschriebene 20-%tige Vergrößerung der Verformung auszugleichen. Ein weiterer Nachteil der Untersuchungen von [Mayer/Rüsch – 67] ist das Fehlen von Angaben zu den zeitabhängigen Verformungen. Es ist nicht ersichtlich, in welchem Maße das Schwinden und Kriechen bei den untersuchten Platten schon fortgeschritten ist. Es scheint zunächst geboten, den Nachweis der Biegeschlankheit in der aktuellen Norm in einer ersten Näherung auf  $L/d = 30$  abzuändern.

Die Betonfestigkeitsklassen bei den Platten in [Mayer/Rüsch – 67] liegen in den meisten Fällen zwischen einem B160 und einem B300. Nach heutigen Normen entspräche das einer Zylinderdruckfestigkeit von  $f_{ck} = 10 \text{ N/mm}^2$  bzw.  $f_{ck} = 20 \text{ N/mm}^2$ , d. h., dass Betonfestigkeiten bis zu einem C20/25 damit abgedeckt sind. Es zeigt sich damit aber eine Schwäche des Nachweises; durch das Fehlen eines Faktors, der die Betonfestigkeit berücksichtigt, können die positiven, d. h. verformungsreduzierenden Effekte einer höheren Betonfestigkeit nicht berücksichtigt werden. Der Einfluss der Betonfestigkeit ist im Abschnitt 8.4.1 angegeben.

Die Abweichungen zwischen der erforderlichen Nutzhöhe bei einem rechnerischen Nachweis der Verformung und beim Nachweis über die Begrenzung der Biegeschlankheit sind bei großen Belastungen besonders hoch. Nach [DIN 1045-1 – 08] ist daher die Anwendung auf Platten des üblichen Hochbaus begrenzt, d. h. Belastung  $q_k \leq 5 \text{ kN/m}^2$ . Das Verfahren ist daher nur eingeschränkt anwendbar.

In den Abschnitten 8.1 (dort speziell in Abbildungen 8.3 und 8.11) und 8.4.2 wird gezeigt, dass der Anteil der quasi-ständigen Last an der Bemessungslast von großer Bedeutung für die Biegebemessung sein kann. Dieser Anteil ist in der aktuellen Norm über den Kombinationswert  $\psi_2$  geregelt. Bei üblichen Wohn- und Büroräumen liegt er bei 0,3. Wird ein größerer dauerhaft vorhandener Anteil der Nutzlast erwartet (bspw. bei Ausstellungs- oder Versammlungsräumen), kann dieser Wert auf 0,6 ansteigen. Somit verdoppelt sich der Anteil der Nutzlast an der verformungsrelevanten quasi-ständigen Last. Da gleichzeitig die Bemessungslast im Grenzzustand der Tragfähigkeit und somit der erforderliche Bewehrungsgrad unverändert bleiben, sind größere Verformungen zu erwarten.

Im Folgenden wird ein Vorschlag zur Anpassung des Biegeschlankheitsnachweises für einachsig gespannte Platten gemacht. Die nachzuweisende Verformungsgröße ist  $L/250$ . Ausgehend von den zu Beginn dieses Abschnittes aufgestellten Überlegungen werden die Veränderungen von Stahlfestigkeiten und Bemessungskonzept mit

$$L_i / d \leq 30 \quad (8.1)$$

abgeschätzt. Die Anforderung an die Nutzhöhe gilt nur für definierte Eingangsparameter. Folgende Werte werden als Obergrenze festgelegt:

Kriechzahl	$\varphi \leq 2,5$
Schwindmaß	$\varepsilon_{cs} \leq -0,6 \text{ ‰}$
Ausbaulast	$\Delta g \leq 1,0 \text{ kN/m}^2$
Bewehrungsgrad	$\rho \leq 0,5 \text{ ‰}$ (d. h. geringe Beanspruchung)

Als Referenzbeton wird ein C20/25 angesetzt. Größere Festigkeiten haben einen günstigen Effekt auf die Verformung (s. Gl. (8.2)).

Die zulässige Nutzlast  $q_k$  kann sich im Bereich der Werte des üblichen Hochbaus bewegen, die obere Grenze liegt hier also bei  $5,0 \text{ kN/m}^2$ . Bei der Berechnung der erforderlichen Bewehrungsmenge ist der Einfluss der Nutzlast aufgrund des Sicherheitsbeiwertes  $\gamma_Q = 1,5$  groß, während sie bei der verformungsrelevanten quasi-ständigen Last eher eine untergeordnete Rolle spielt. Bei der Verformungsberechnung wird eine große Nutzlast also weitestgehend vom erhöhten Bauteilwiderstand (erzeugt von der größeren Bewehrungsmenge) wieder ausgeglichen, so dass eine konstante Biegeschlankheitsgrenze bei großen Unterschieden der zulässigen Nutzlast gerechtfertigt scheint. Anders verhält es sich mit dem Kombinationsfaktor  $\psi_2$  (s.o.). Für diesen und weitere wichtige günstige und ungünstige Einflüsse werden vier Faktoren eingeführt. Die erforderliche Nutzhöhe beträgt:

$$d \geq L_i / 30 \cdot f_\psi \cdot f_L \cdot f_C \cdot f_\rho \quad (8.2)$$

Dabei sind:

$f_\psi$  Faktor zur Berücksichtigung der Nutzlastanteile an der quasi-ständigen Last:  
 $f_\psi = (2 - 0,3 / \psi_2)^{1/3}$  für  $0,3 \leq \psi_2 \leq 0,6$  (8.3)

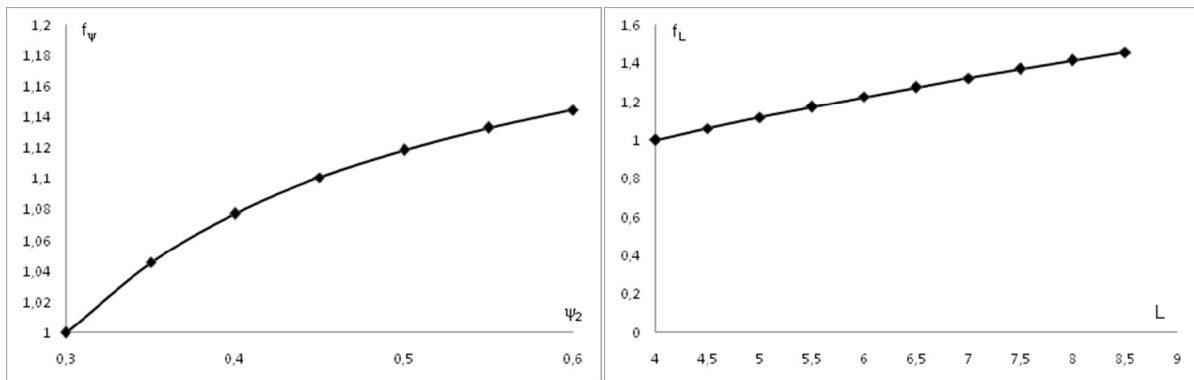
$f_L$  Faktor zur Berücksichtigung des überproportionalen Einflusses der Stützweite:  
 $f_L = (L_i / 4)^{1/2}$  für  $L_i \geq 4$  (8.4)

$f_C$  Faktor zur Berücksichtigung der Auswirkung unterschiedlicher Festigkeitsklassen:  
 $f_C = (20 / f_{ck})^{1/6}$  für  $20 \leq f_{ck} \leq 50$  (Normalbeton); s. a. [Krüger/Mertzsch – 03] (8.5)

$f_\rho$  Faktor zur Berücksichtigung der günstigen Auswirkung von Bewehrungsgraden, die oberhalb der im Grenzzustand der Tragfähigkeit ermittelten erforderlichen Bewehrung liegen:

$$f_\rho = (\rho_{s,erf} / \rho_{s,vorn})^{1/4} \quad (8.6)$$

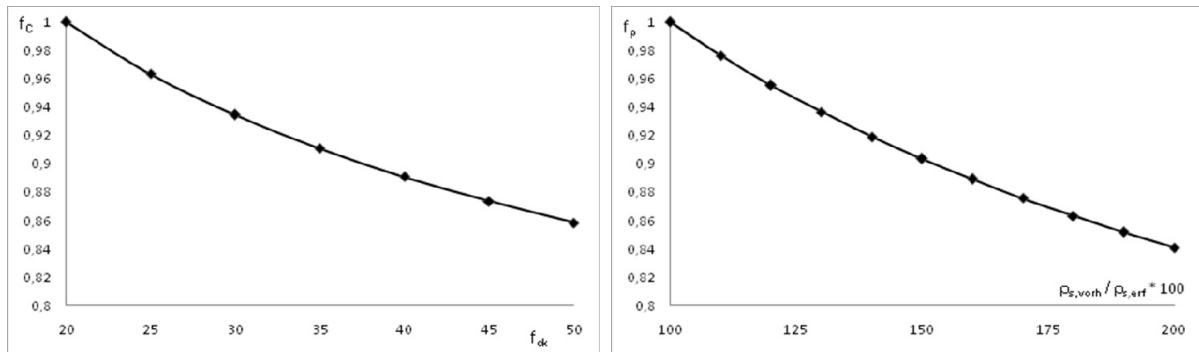
Außer  $f_\rho$  sind alle Faktoren schon vor der eigentlichen Bemessung bekannt. Somit eignet sich die Gleichung (8.2) auch zur schnellen Vordimensionierung von Deckenplatten. In Abbildung 8.24 sind die beiden Faktoren  $f_\psi$  und  $f_L$  dargestellt, die die ungünstigen Auswirkungen des Faktors  $\psi_2$  und der Stützweite  $L$  erfassen. Als Grundwert dienen  $\psi_2 = 0,3$  und  $L = 4,0 \text{ m}$ , hier nehmen die Faktoren den Wert 1 an.



**Abb. 8.24:** Vergrößerung der erforderlichen Nutzhöhe durch die Faktoren  $f_\psi$  nach Gleichung (8.3) (links) und  $f_L$  nach Gleichung (8.4) (rechts).

Die in Abbildung 8.25 dargestellten Faktoren  $f_C$  und  $f_\rho$  berücksichtigen die günstigen Einflüsse von hohen Betonfestigkeiten und Bewehrungsgraden. Die Bezugswerte sind eine

Betonfestigkeit von  $20 \text{ N/mm}^2$  sowie ein Bewehrungsgrad von 100% der im Grenzzustand der Tragfähigkeit erforderlichen Bewehrung. Größere Werte führen über die genannten Faktoren zu einer kleineren erforderlichen Nutzhöhe.



**Abb. 8.25:** Abminderung der erforderlichen Nutzhöhe durch die Faktoren  $f_c$  nach Gleichung (8.5) (links) und  $f_p$  nach Gleichung (8.6) (rechts).

Nachfolgend sind die Auswirkungen der Faktoren im Vergleich zu den bereits vorgestellten Methoden zur Bestimmung der erforderlichen Nutzhöhe dargestellt. Dabei dienen folgende Randbedingungen den Berechnungen als Basis:

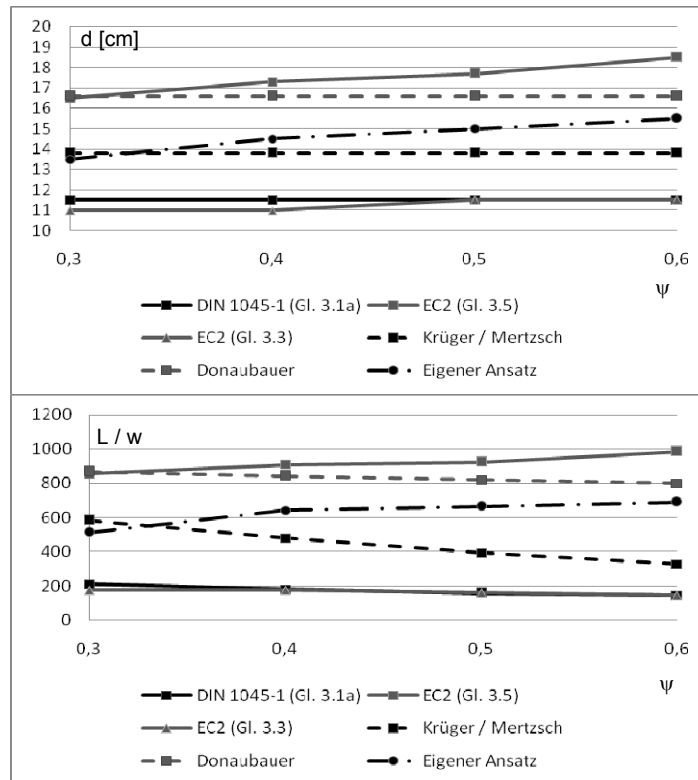
- Geometrie: Plattenstreifen mit Breite  $b = 100 \text{ cm}$ , Höhe  $h = d + 2,5 \text{ cm}$  und Nutzhöhe  $d$  in Abhängigkeit zur zulässigen Biegeschlankheit
- Belastung: Eigengewicht  $g_k = h \cdot 25 + 0,5 \text{ [kN/m}^2\text{]}$ , Nutzlast  $q_k = 2,0 \text{ kN/m}^2$
- Langzeiteinflüsse: Kriechzahl  $\phi = 2,5$ ; Schwindmaß  $\varepsilon = -0,5 \text{ ‰}$
- Variabel: quasi-ständiger Anteil der Nutzlast  $\psi_2$   
Stützweite  $L$   
Betonfestigkeitsklasse bzw. Druckfestigkeit  $f_{ck}$   
Quotient vorhandene Bewehrung zu erforderlicher Bewehrung

Die Einflüsse der vier Faktoren sollen getrennt betrachtet werden, d.h. es wird jeweils nur eine Variable verändert, während die anderen konstant bleiben. Hier werden folgende Basiswerte zugrunde gelegt:

- quasi-ständiger Anteil der Nutzlast  $\psi_2 = 0,3$   
Stützweite  $L = 4,0 \text{ m}$   
Betonfestigkeitsklasse **C 20/25** bzw. Druckfestigkeit  $f_{ck} = 20 \text{ N/mm}^2$   
Quotient vorhandene Bewehrung zu erforderlicher Bewehrung  
 $\rho_{s,erf} / \rho_{s,vorh} = 1,0$

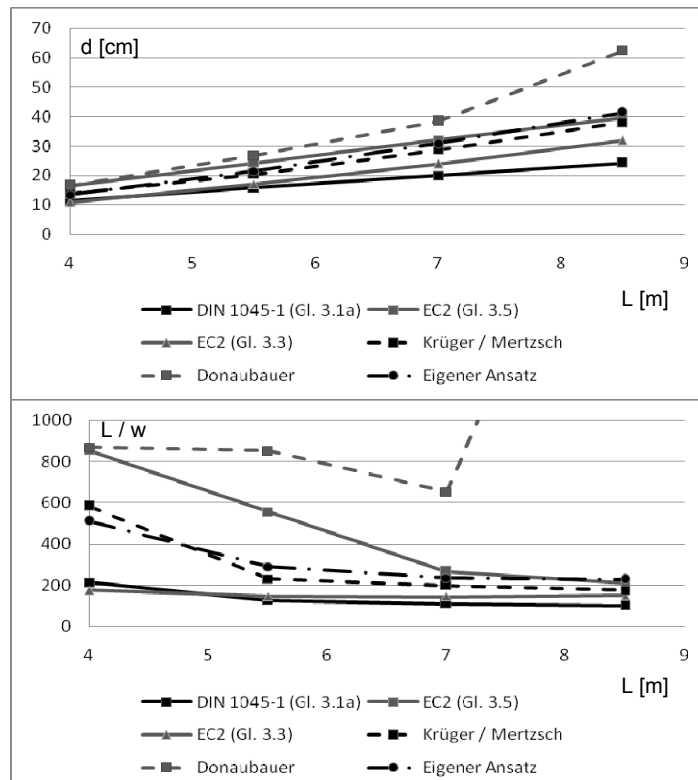
In Abbildung 8.26 wird der Beiwert  $\psi_2$  in den Grenzen von 0,3 und 0,6 gewählt. Dieses wird zusätzlich zu dem hier vorgestellten Ansatz gemäß Gleichung (8.2) nur noch in den Biegeschlankheitsnachweisen des Eurocodes berücksichtigt. Hier steigt die erforderliche Nutzhöhe durch die höhere Stahlspannung im quasi-ständigen Bemessungsfall. Die bezogene Verformung nimmt bei den übrigen Konstruktionsregeln, die den erhöhten Nutzlastanteil unberücksichtigt lassen, deutlich ab und liegt teilweise unter dem Grenzwert von  $L / 250$ .





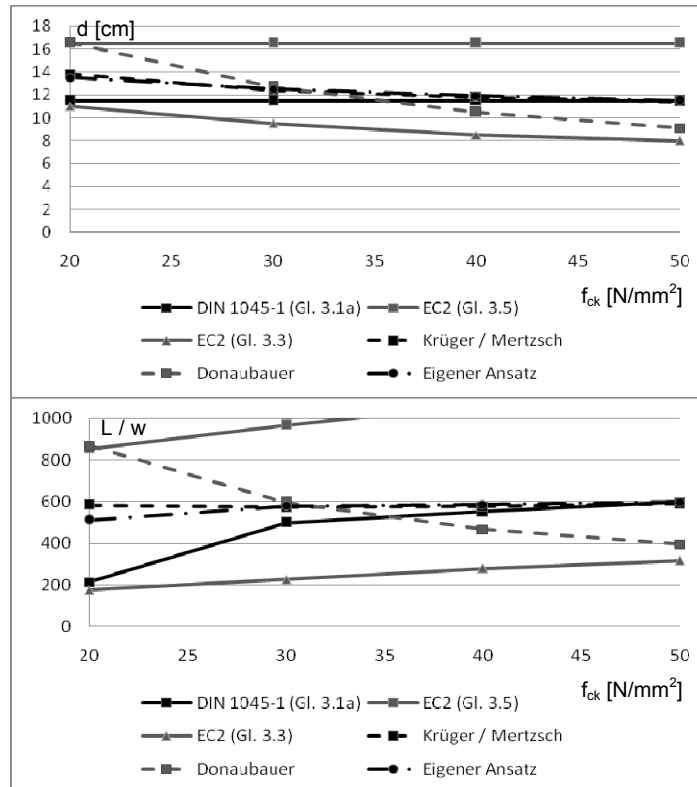
**Abb. 8.26:** Erforderliche Nutzhöhe  $d$  in [cm] (oben) und bezogene Verformung  $L/w$  (unten) bei Veränderung des quasi-ständigen Anteils der Nutzlast; Auswirkung von  $f_{\psi}$  nach Gl. (8.3)

Der überproportionale Einfluss der Stützweite wird in Abbildung 8.27 aufgezeigt. Hier liegt der Ansatz nach Donaubauer stark auf der sicheren Seite, während mit den zulässigen Nutzhöhen der übrigen Schlankheitsregeln der Grenzwert von  $L/250$  bei großen Stützweiten nicht eingehalten werden kann. Ausnahme sind hier die Konstruktionsregeln nach EC 2 (Gleichung (3.5)) und der eigene Ansatz mit dem entspr. Faktor nach Gleichung (8.4).

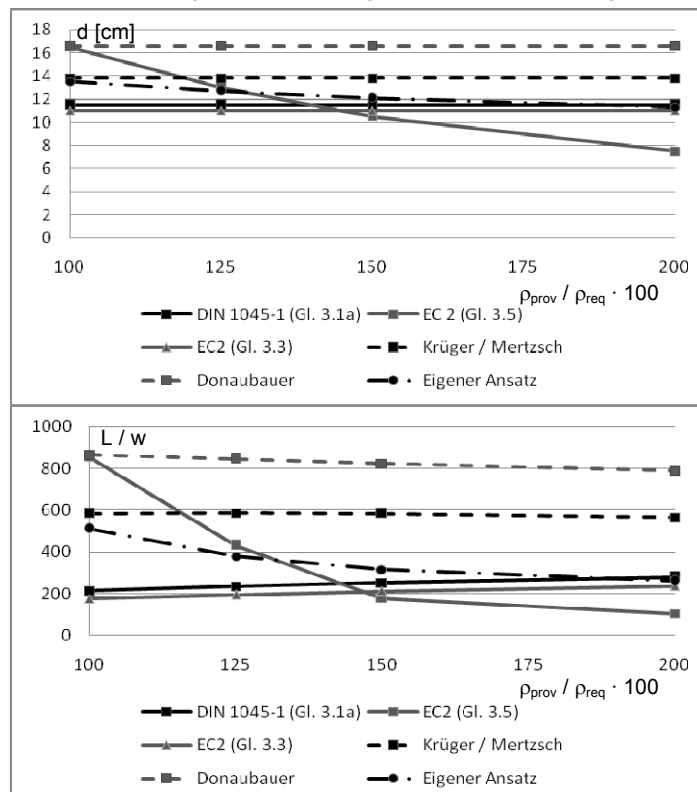


**Abb. 8.27:** Erforderliche Nutzhöhe  $d$  in [cm] (oben) und bezogene Verformung (unten) bei Veränderung der Stützweite; Auswirkung von  $f_L$  nach Gleichung (8.4)

Bei der Variation der Druckfestigkeit - Kriechzahl und Schwindmaß bleiben unverändert - sollte der Einfluss auf die Verformung so erfasst werden, dass durch Anpassung der erforderlichen Nutzhöhe an die Betonfestigkeiten die Verformung selbst unverändert bleibt. Dieses ist im Ansatz von Krüger/Mertzsch und auch im eigenen Ansatz sehr gut implementiert (s. Abb. 8.28).



**Abb. 8.28:** Erforderliche Nutzhöhe  $d$  in [cm] (oben) und bezogene Verformung (unten) bei Veränderung der Betondruckfestigkeit; Auswirkung von  $f_c$  nach Gleichung (8.5)



**Abb. 8.29:** Erforderliche Nutzhöhe  $d$  in [cm] (oben) und bezogene Verformung (unten) bei Veränderung des tatsächlichen Bewehrungsgrades; Auswirkung von  $f_p$  nach Gleichung (8.6)

In der Abbildung 8.29 wird die Bewehrung zwischen 100 und 200 Prozent der statisch erforderlichen Bewehrung gewählt. Der günstige Effekt einer großen Bewehrungsmenge wird sowohl vom eigenen Ansatz als auch von den Konstruktionsregeln nach Eurocode 2 erfasst (dort über die Stahlspannung im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit, die uneingeschränkte Anwendung nach Gl. (3.5) erscheint jedoch problematisch, s. Abbildung).

Zur Vermeidung von Schäden an Trennwänden u.ä. wird eine Verformungsgrenze von  $L/500$  verlangt. Ein Nachweis über eine zulässige Biegeschlankheit erscheint hier wenig sinnvoll, da der beschriebene Grenzwert erst nach Einbau der gefährdeten Ausbauten eingehalten werden muss. Zu diesem Zeitpunkt hat sich bereits die Verformung aus dem Eigengewicht der Deckenplatte selbst eingestellt. Die Durchbiegung muss also nur für die Nutzlast, eine eventuelle zusätzliche Ausbaulast und die Auswirkungen von Schwinden und Kriechen berechnet werden. Dieser Vorgang sollte generell rechnerisch erfasst werden.



## 9 Zusammenfassung und Ausblick

### 9.1 Zusammenfassung

Für die Dimensionierung von Plattentragwerken ist häufig die geforderte Begrenzung der Verformungen maßgebend. Der Grenzwert ist von den Anforderungen an das Tragwerk, von möglichen Folgeschäden an Ausbauteilen u.a. abhängig. In dieser Arbeit werden verschiedene Auswirkungen von Verformungen erläutert und einige Grenzwerte aus internationalen Normen vorgestellt.

Der Nachweis der Verformungsbegrenzung wird in der DIN 1045-1 über eine zulässige Biegeschlankheit geregelt. Diese eignet sich zwar aufgrund der geringen Anzahl von Eingangsparametern für eine einfache Vordimensionierung des Bauteils (es kann direkt und ohne Kenntnis der Beanspruchungen eine erforderliche Nutzhöhe bestimmt werden); wie Vergleichsrechnungen zeigen, werden damit jedoch häufig Ergebnisse erzielt, die die geforderten Durchbiegungsbegrenzungen nicht erfüllen. Zur rechnerischen Ermittlung der Verformungen macht die DIN 1045-1 keine Angaben.

In der Literatur und auch in internationalen Normen sind neben Biegeschlankheitsnachweisen auch Verfahren zur rechnerischen Ermittlung der Durchbiegung aufgeführt. Im Rahmen dieser Arbeit werden die bekannteren Verfahren dargestellt und gegenüber gestellt. An Beispielen wird gezeigt, dass es bei den Biegeschlankheitsnachweisen zu erheblichen Unterschieden bei den erforderlichen Nutzhöhen kommen kann. Zusätzlich kann festgestellt werden, dass diese Nachweise oft nur für einen sehr eng gesteckten Parameterbereich bzw. nur für bestimmte Bauteile (z. B. Platten) und Belastungsarten gelten. Auch genauere Berechnungsverfahren sind nicht immer allgemeingültig anwendbar.

Für einen eigenen Ansatz der Verformungsberechnung werden die Eigenschaften des „Stahlbetons“ mit seinen Inhomogenitäten und Streuungen der Betoneigenschaften genauer untersucht. Es werden dann verschiedene Ansätze über das Verbundverhalten zwischen Beton und Bewehrung dargestellt.

Die Verformung wird mittels der Querschnittskrümmungen berechnet; sie werden für die äußeren Lasten und für die Langzeiteinflüsse Schwinden und Kriechen bestimmt. Der Querschnitt kann gerissen oder ungerissen sein, ein Mitwirken des Betons zwischen den Rissen kann über eine mittlere Stahldehnung erfasst werden. Hierzu werden verschiedene Ansätze vorgestellt und hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit miteinander verglichen.

Zur Berechnung der Schwindkrümmung werden zwei verschiedene, jedoch zu identischen Ergebnissen führende Verfahren hergeleitet. Sie können im Zustand I und II angewendet werden und berücksichtigen neben der Zugbewehrung auch eine eventuell vorhandene Druckbewehrung. Die Ermittlung der Kriechverformungen bzw. der Querschnittskrümmung infolge Kriechen erfolgt mit dem Kraftgrößenverfahren (wie auch beim Schwinden als eine Variante). Die Gültigkeit der aufgestellten Krümmungsbeziehungen wird durch Gleichgewichtsbetrachtungen überprüft.

Nettoquerschnitte können berücksichtigt werden, die Auswirkungen auf die Querschnittskrümmungen werden untersucht. Es kann festgestellt werden, dass der Einfluss bei Normalbeton bis C 50/60 und üblichen Bewehrungsgraden gering ist.

Die hergeleiteten Krümmungsansätze gelten zunächst nur für Querschnitte, die in einem Guss hergestellt werden bzw. die aus nur einer Betonsorte bestehen mit je einer Lage Druck- und Zugbewehrung. Fertigteile benötigen weitere Überlegungen, wenn sie in Teilfertigung (d. h. als ergänzte Querschnitte aus Fertigteile und Ortbetonergänzung) hergestellt werden. Grundsätzlich muss unterschieden werden, ob der Teilquerschnitt die Eigen-

last der Konstruktion allein aufnehmen muss oder ob Montageunterstützungen vorhanden sind (im zweiten Fall wird die Gesamtlast von Beginn an von beiden Querschnittsteilen aufgenommen). In beiden Fällen lagern sich jedoch die Spannungen zeitabhängig nicht nur vom Beton auf die Bewehrung, sondern auch zwischen den beiden Betonteilen um. Dabei können die beiden Betone unterschiedliche Festigkeiten sowie Schwind- und Kriechzahlen aufweisen. Für einige gängige Ausführungsvarianten werden Bemessungsansätze hergeleitet. An einem abschließenden Beispiel wurde deutlich gemacht, dass sich die Verformung gegenüber monolithisch hergestellten Bauteilen ungünstig verändern kann.

Für Einfeld- und Durchlaufträger wird ein Näherungsverfahren vorgestellt, mit dem aus den Krümmungen im Zustand I und II sowie einem geeigneten Verteilungsfaktor zur Berücksichtigung des Mittragens des Betons zwischen den Rissen eine Verformung ermittelt werden kann. Zusätzlich werden numerische Verfahren angegeben, mit denen komplizierte Schnittgrößenverläufe, gestaffelte Bewehrung und ähnliche Unregelmäßigkeiten erfasst werden können. Die bereits bekannten Methoden zur Bestimmung von mittleren Stahldehnungen konnten hier in die angesprochenen Verteilungsfaktoren umgewandelt werden.

Die zu Beginn der Arbeit dargestellten Biegeschlankheitskriterien werden mit den hergeleiteten Berechnungsmethoden kritisch überprüft. Es wird festgestellt, dass sie nur eingeschränkt den Anforderungen genügen. Besonders der aktuell gültige Nachweis nach DIN 1045-1 befindet sich i.d.R. deutlich auf der unsicheren Seite. Die Gründe hierfür werden insbesondere in den höheren Stahlfestigkeiten und den geänderten Bemessungskonzepten gesehen, die heute im Vergleich zu den Untersuchungen aus den sechziger Jahren gelten.

Abschließend wird ein eigener Biegeschlankheitsnachweis entwickelt. Er unterscheidet sich insbesondere dadurch, dass wesentliche Einflüsse, die bisher nicht in die Ermittlung der erforderlichen Nutzhöhe einfließen, durch differenzierte Faktoren erfasst werden können. Der Nachweis eignet sich für eine schnelle und überschlägige Dimensionierung von Plattentragwerken unter Berücksichtigung einer allgemeinen Verformungsgrenze von  $L/250$ .

## 9.2 Ausblick

Die Untersuchungen haben gezeigt, dass auch kleinere Abweichungen von Materialeigenschaften oder Belastungen die Verformung nachhaltig beeinflussen können. Durch die Streuungen der Materialeigenschaften im Stahlbetonbau gibt eine Verformungsberechnung nur einen wahrscheinlichen Wert wieder. In weiteren Entwicklungen sollten daher Verformungsberechnungen auch stochastisch betrachtet werden; erste Überlegungen in dieser Richtung findet man beispielsweise bei [Hausmann – 07].

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf Plattentragwerken bzw. Tragwerken mit niedriger Bauhöhe. Davon unterscheidet sich das Rissbild „dicker“ Bauteilen (Höhe > 50 cm), da sich die meisten Risse nur im Bereich der Bewehrung entwickeln und nicht bis zur Dehnungsnulldlinie fortschreiten. Hieraus ergibt sich ein deutlich günstigerer Verformungswiderstand. Die Berechnung ist allerdings stark von der Nichtlinearität der Spannungs- und Dehnungsverläufe des verbleibenden Betons an einem solchen Sekundärriss geprägt. Hier sind Untersuchungen erforderlich, die zum einen das Verhältnis von durchgehenden Rissen zu Sekundärrissen genau erfassen und zum anderen die dort entstehenden Betonspannungen und -dehnungen beschreiben.

Forschungsbedarf besteht wie vor bei der genaueren Erfassung der Langzeiteinflüsse (vgl. auch [Fricke – 01]). Bisher werden die Krümmungen i.d.R. separat im Zustand I und II betrachtet und dann mit einem Verteilungsbeiwert, der ausschließlich aus der Lastbeanspruchung ermittelt wird, auf das gesamte Bauteil bezogen. Ungeklärt ist derzeit, ob die Übertragbarkeit auf das zeitabhängige Verhalten ohne Einschränkungen gegeben ist.







---

## Literaturverzeichnis

- [Blessenohl – 90] Blessenohl, B.: Zur numerischen Berechnung der Auswirkung des Kriechens und Schwindens auf Betonverbundtragwerke – Grundlagen und Algorithmen für die EDV. Dissertation, RWTH Aachen, 1990
- [Brand/Glatz – 05] Brand, B.; Glatz, G.: Schäden an Tragwerken aus Stahlbeton. In: Zimmermann/Ruhnau (Hrsg.), Schadenfreies Bauen, Band 14, Fraunhofer IRB Verlag, Stuttgart, 2005
- [Bronstein et al. – 99] Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. 4. Auflage, 1999
- [BS 8110 – 97] BS 8110: Beton im Hochbau. Leitfaden zur Berechnung und Konstruktion. März 1997
- [Castel et al. – 06] Castel, A.; Vidal, T.; Francois, R.: Effective tension active cross-section of reinforced concrete beams after cracking. Materials and Structures, 2006
- [CEB – 85] CEB-Manual: Design Manual on „Cracking and Deformation“, Comité Euro-International du Béton (CEB), 1985
- [CEB/FIP – 91] CEB – FIP Model Code 1990. Comité Euro-International du Béton, 1991
- [CEB-H215 – 93] CEB Bulletin 215: Structural effects of time-depending behaviour of concrete; Comité Euro-International du Béton (CEB), Bulletin 215, 1993
- [DAfStb-H400 – 89] Erläuterungen zur DIN 1045. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 400, 1989
- [DAfStb-H525 – 03] Erläuterungen zur DIN 1045-1. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 525, 2003
- [DIN 1045-1 – 08] DIN 1045-1:2008: Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton, August 2008
- [DIN 18530 – 87] DIN 18530:1987: Massive Deckenkonstruktionen für Dächer, Planung und Ausführung. März 1987
- [DIN 4150-2 – 99] DIN 4150-2:1999: Erschütterungen im Bauwesen – Teil 2: Einwirkungen auf Menschen in Gebäuden; Juni 1999
- [DIN 488 – 06] DIN 488:2006: Betonstahl. November 2006
- [DIN EN 13747 – 07] DIN EN 13747:2007: Betonfertigteile – Deckenplatten mit Ortbetonergänzung. April 2007
- [DIN EN 13978 – 05] DIN EN 13978-1:2005: Betonfertigteile - Betonfertiggaragen - Teil 1: Anforderungen an monolithische oder aus raumgroßen Einzelteilen bestehende Stahlbetongaragen. Juli 2005
- [Eibl/Häußler – 97] Eibl, J.; Häußler, U.: Baudynamik. In: Betonkalender 1997
- [Eickschen/Siebel – 98] Eickschen, E.; Siebel, E.: Einfluss der Ausgangsstoffe und der Betonzusammensetzung auf das Schwinden und Quellen von Straßenbeton. beton 48, H.9, S. 580-586 und H. 10, S. 641-646; 1998
- [Eligehausen – 83] Eligehausen, R. et al.: Local Bond stress-slip relationship of deformed bars under generalized excitations. Report No. UCB/EERC-83/23, University of California, Berkeley, 1983
- [EN 1992-1-1 – 04] EN 1992-1-1:2004: Eurocode 2; Planung von Stahlbeton- und Spannbetonbauwerken, 2004

- [Fingerloos/ Litzner – 05] Fingerloos, F.; Litzner, H.-U.: Erläuterung zur praktischen Anwendung der neuen DIN 1045-1. In: Betonkalender 2005, Verlag Ernst & Sohn, 2005
- [Fischer – 03] Fischer, A. et al.: Stahlbeton nach DIN 1045-1. Verlag Ernst und Sohn, 2003
- [Fricke – 01] Fricke, K.-L.; Baustatik- und Baudynamik-Praxis; Bauwerk-Verlag, 2001
- [Goris – 01] Goris, A.: Bemessung von Stahlbetonbauteilen. In: Avak/Goris; Stahlbetonbau aktuell, Praxishandbuch 2001, Bauwerk-Verlag, 2001
- [Goris – 08a] Goris, A.: Stahlbeton-Praxis nach DIN 1045 neu. Band 1 und 2, 3. Auflage, Bauwerk-Verlag, Berlin, 2008
- [Goris – 08b] Goris, A.: Bemessung von Stahlbetonbauteilen nach DIN 1045-1. In: Avak/Goris; Stahlbetonbau aktuell, Praxishandbuch 2008, Bauwerk-Verlag, Berlin, 2008
- [Grasser/Thielen – 75] Grasser, E.; Krämer, U.; Thielen, G.: Berechnung der Durchbiegung von biegebeanspruchten Stahlbetonbauteilen unter Gebrauchslast. Beton- und Stahlbetonbau, 4/1975
- [Grasser/Thielen – 91] Grasser, E.; Thielen, G.: Hilfsmittel zur Berechnung der Schnittgrößen und Formänderung von Stahlbetontragwerken. 3. überarbeitete Auflage, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 240, 1991
- [Graubner – 89] Graubner, C.-A.: Schnittgrößenermittlung in statisch unbestimmten Stahlbetonbalken unter Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Stoffgesetze. Dissertation, TU München, 1989
- [Grube – 03] Grube, H.: Definitionen der verschiedenen Schwindarten, Ursachen, Größe der Verformungen und baupraktische Bedeutung. beton 53, H. 12, S. 598-602; 2003
- [Hausmann – 07] Hausmann, G.: Verformungsvorhersage vorgespannter Flachdecken unter Berücksichtigung stochastischer Eigenschaften; Dissertation, TU Darmstadt, 2007
- [Jaccoud – 97] Jaccoud, J.-P.: Cracking under long term loads or imposed deformations. In: Comité Euro-International du Béton (Hrsg.): Serviceability Models – Behaviour and modelling in serviceability limit states including repeated and sustained loads. CEB-Bulletin d'Information, 1997
- [Jaccoud/Favre – 82] Jaccoud, J.-P.; Favre, R.: Flèche des structures en béton armé. Annales de l'ITBTP, Série béton 208, 1982
- [JCSS – 01] Joint Committee on Structural Safety: Probabilistic Model Code. www.jcss.ethz.ch, 2001
- [Kerkhoff/Siebel – 01] Kerkhoff, B.; Siebel, E.: Eigenschaften von Beton mit recycelten Gesteinskörnungen. beton 51, H. 1, S. 47-50 und H. 2, S. 105-108; 2001
- [König/Gerhardt – 86] König, G.; Gerhardt, H.-C.: Spannungs- und Schnittgrößenumlagerung infolge Kriechen und Schwinden des Betons bei Stabtragwerken aus Stahlbeton und Spannbeton, Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau der Technischen Hochschule Darmstadt, Heft 34, 1986
- [König/Tue – 96] König, G.; Tue, N. V.: Grundlagen und Bemessungshilfen für die Rissbreitenbeschränkung im Stahlbeton und Spannbeton. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 466, 1996

- [König/Tue – 08] König, G.; Tue, N.V.: Grundlagen des Stahlbetonbaus. 3. Auflage, Vieweg+Teubner, 2008
- [Kordina – 00] Kordina, K. et al.: Kriechen von Beton unter Zugbeanspruchung. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 498, 2000
- [Kreller – 90] Kreller, H.: Zum nichtlinearen Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonstabtragwerken unter Last- und Zwangseinwirkung. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 409, 1990
- [Krüger/Mertzsch – 03] Krüger, W.; Mertzsch, O.: Verformungsnachweise – Erweiterte Tafeln zur Begrenzung der Biegeschlankheit. In: Avak/Goris: Stahlbetonbau aktuell, Jahrbuch 2003, Bauwerk-Verlag, 2003
- [Krüger/Mertzsch – 06] Krüger, W.; Mertzsch, O.: Zum Trag- und Verformungsverhalten bewehrter Betonquerschnitte im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 533, 2006
- [Leonhardt – 78] Leonhardt, F.: Vorlesungen über Massivbau. Viertes Teil: Nachweis der Gebrauchstauglichkeit, Zweite Auflage, Springer-Verlag, 1978
- [Lücken – 85] Lücken, A.: Beitrag zur Ermittlung von Spannungen und Verformungen bei teilweiser Vorspannung. Dissertation, RWTH Aachen, 1985
- [Mal'cov – 68] Mal'cov, K.; Karavaev, A.: Abhängigkeit der Festigkeit des Betons auf Zug bei Biegung und ausmittiger Belastung von den Querschnittsabmessungen. Wiss. Z. d. Techn. Universität Dresden, Heft 6, 1968
- [Mayer – 67] Mayer, H.: Die Berechnung der Durchbiegung von Stahlbeton-Bauteilen. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 194, 1967
- [Mayer/Rüsch – 67] Mayer, H.; Rüsch, H.: Bauschäden als Folge der Durchbiegung von Stahlbeton-Bauteilen. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 193, 1967
- [Mertzsch – 03] Mertzsch, O.: Zum Einfluss zeitvarianter Materialgesetze auf die Verformungsvorhersage von biegebeanspruchten Betonbauteilen. Rostocker Berichte aus dem Fachbereich Bauingenieurwesen, Heft 10, 2003
- [Müller/Kvitsel – 02] Müller, H.; Kvitsel, V.: Kriechen und Schwinden von Beton. Grundlagen der neuen DIN 1045 und Ansätze für die Praxis; Beton- und Stahlbetonbau 97, Heft 1, S. 8-19; 2002
- [Noakowski – 88] Noakowski, P.: Nachweisverfahren für Verankerung, Verformung, Zwangbeanspruchung und Rissbreite. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 394, 1988
- [ÖNORM B 4700 – 00] ÖNORM B 4700: Stahlbetontragwerke - EUROCODE-nahe Berechnung, Bemessung und konstruktive Durchbildung. Juni 2000
- [Rao – 66] Rao, P. S.: Die Grundlagen zur Berechnung der bei statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen im plastischen Bereich auftretenden Umlagerungen der Schnittkräfte. DAfStb Heft 177, 1966

- [Rehm – 61] Rehm, G.: Über die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 138, 1961
- [Reinhardt – 05] Reinhardt, H.-W.: Beton. In: Betonkalender 2005, Ernst und Sohn Verlag, 2005
- [Schmidt – 08] Schmidt, M.: Baustoffe Beton und Baustahl. In: Avak/Goris; Stahlbetonbau aktuell, Praxishandbuch 2008, Bauwerk-Verlag, Berlin, 2008
- [Schneider – 08] Goris, A. (Hrsg.): Schneider Bautabellen für Ingenieure, 17. Auflage, 2008
- [SIA 260 – 03] SIA 260: Grundlagen der Projektierung von Tragwerken. Januar 2003
- [SIA 262 – 04] SIA 262: Allgemeine Bedingungen für Betonbau. April 2004
- [Trost – 87] Trost, H.: Dischingers grundlegende Arbeiten und neuere Erkenntnisse über die Auswirkungen des zeitabhängigen Werkstoffverhaltens in vorgespannten und nicht-vorgespannten Stahlbetonkonstruktionen. In: Manfred Specht (Hrsg.): Spannweite der Gedanken, Springer-Verlag, 1987
- [Tue – 93] Tue, N.V.: Zur Spannungsumlagerung im Spannbetonbau bei der Rissbildung unter statischer und wiederholter Belastung. DAfStb Heft 435; 1993
- [Voigt – 09] Voigt, J.: Tragwerksplanung im Bestand. In: Bauen mit Betonfertigteilen – Bauen im Bestand; Tagungsband, Universität Siegen, 2009
- [Zilch/Donaubauer – 06] Zilch, K.; Donaubauer, U.: Rechnerische Untersuchung der Durchbiegung von Stahlbetonplatten unter Ansatz wirklichkeitsnaher Steifigkeiten und Lagerungsbedingungen und unter Berücksichtigung zeitabhängiger Verformungen. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 533, 2006
- [Zilch/Fritsche – 95] Zilch, K.; Fritsche, T.: Wirklichkeitsnahe Schnittgrößenermittlung für die Nachweise im Stahlbetonbau. Forschungsbericht V 347 DAfStb, TU München, 1995
- [Zilch/Zehetmaier – 06] Zilch, K.; Zehetmaier, G.: Bemessung im konstruktiven Betonbau. Springer-Verlag, 2006