

**Eine Linienmethode
zur approximativen Lösung
inverser Probleme für elliptische
Differentialgleichungen**

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
Doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat)

vorgelegt von
Diplom-Mathematiker Jean Mathias Charton
aus Berlin

Fachbereich Mathematik
Universität Siegen
Juli 2004

Gutachter der Dissertation: Prof. Dr. H.-J. Reinhardt
Prof. Dr. B. Dreseler
Datum der mündlichen Prüfung: 29.07.2004
Veröffentlichung auf den Internetseiten
der Universitätsbibliothek Siegen unter: urn:nbn:de:hbz:467-690

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Herleitung, theoretische Analyse und praktisch-numerische Erprobung einer Linienmethode für das Cauchy-Problem für elliptische Differentialgleichungen. Untersucht werden zum einen die Poisson- beziehungsweise Laplace-Gleichung und zum anderen eine allgemeinere Gleichung mit einem von einer Ortsdimension abhängigen Diffusionskoeffizienten. Auf der Grundlage einer bedingten Stabilitätsabschätzung für das kontinuierliche Problem vom Hölder-Typ, deren Beweis in der bisherigen Literatur zum Teil nicht ausreichend exakt durchgeführt wurde, und mit Hilfe der Einführung bestimmter endlichdimensionaler Datenräume, auf die man die (unter Umständen) gestörten Cauchy-Daten projiziert, gelingt die Regularisierung dieses schlecht gestellten Problems und der Nachweis von Fehlerabschätzungen und Konvergenzsätzen für die Linienmethode für beide betrachtete Differentialoperatoren. In dem Fall einer PDGL mit Diffusionskoeffizient werden dabei zusätzlich benötigte, umfangreiche Untersuchungen zur Konvergenz der Eigenwerte beziehungsweise Eigenvektoren der diskreten Approximation einer Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe durchgeführt. Zum Abschluß werden einige numerische Ergebnisse vorgestellt und unter Bezugnahme auf die vorher erzielten theoretischen Resultate diskutiert. Eine etwas ausführlichere Übersicht über diese Arbeit, die den Rahmen dieser Zusammenfassung sprengen würde, befindet sich im Übrigen im Abschnitt 1.4.

Abstract

In this thesis we deal with the development, theoretical examination and numerical implementation of a method of lines for the Cauchy-problem for elliptic partial differential equations. We consider both the Laplace-equation and a more general elliptic equation containing a diffusion coefficient, which depends on one of the space variables. Our main results for both differential operators are the regularization of the illposed Cauchy-Problem and the proof of error estimates leading to convergence results for the method of lines. We base them principally on two major foundations. The first one is a conditional stability result for the continuous Cauchy-problem, of which the proof in parts of the relevant literature was not carried out thoroughly enough. The second one consists of introducing certain finite-dimensional spaces, onto which the possibly perturbed Cauchy-data is projected. For the more general PDE, comprehensive additional examinations are required, which reveal the convergence of the eigenvalues and eigenvectors of the discrete approximation of a Sturm-Liouville eigenvalue problem. We finish the thesis with the presentation of the results of some of our numerical computations and discuss them referring to the knowledge, we have gained by our preceding theoretical work. The reader can find a more detailed overview beyond the scope of this abstract in Section 1.4.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	v
Tabellenverzeichnis	ix
1 Einleitung	1
1.1 Elliptische partielle Differentialgleichungen	2
1.1.1 Partielle Differentialgleichungen	2
1.1.2 Klassifikation partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung	6
1.1.3 Beispiele und Anwendungen elliptischer Differentialgleichungen	13
1.2 Einführung in inverse und schlecht gestellte Probleme	16
1.3 Das Cauchy-Problem für elliptische PDGL	19
1.3.1 Beschreibung der Problemstellung	19
1.3.2 Anwendungsbeispiele des Cauchy-Problems	24
1.3.3 Das Cauchy-Problem in der Literatur	30
1.4 Übersicht und Zusammenfassung der Arbeit	34
I Der Fall des Cauchy-Problems für die Poisson-Gleichung (CPPG)	41
2 Eine Linienmethode für das CPPG	43
2.1 Reduktion des CPPG auf ein halbhomogenes CPLG	43
2.2 Herleitung und Formulierung des Verfahrens	45
2.2.1 Diskretisierung und Umformulierung der Problemstellung	45
2.2.2 Die Matrix D_2	46
2.2.3 Entkoppelung des Problems und explizite Lösungsdarstellung	48
3 Konvergenz für frequenzbeschränkte Daten	51
3.1 Vorbereitende Untersuchungen und ein Modellbeispiel	51
3.2 Ausgewählte Ergebnisse aus der Fourieranalysis	62
3.3 Definition und Eigenschaften der Datenräume D_M^h	67
3.4 Konvergenz und Fehlerabschätzung für ungestörte Daten	73
3.4.1 Darstellung der exakten Lösung	73
3.4.2 Ein Konvergenzsatz für beliebige ungestörte Daten	78

3.4.3	Ein Konvergenzsatz für ungestörte Daten aus D_M	81
3.5	Auswirkung der Schlechtgestellttheit des CP auf die Linienmethode	83
3.6	Bedingte Gutgestellttheit des CP für Daten in D_M^h	91
4	Stabilität und Konvergenz für beschränkte Lösung	103
4.1	Ein Stabilitätssatz für das kontinuierliche Problem	103
4.1.1	Logarithmische Konvexität	105
4.1.2	Verdeutlichung der Notwendigkeit tiefergehender Untersuchungen an einem Gegenbeispiel	108
4.1.3	Der Spezialfall identischer Fourierkoeffizienten	110
4.1.4	Logarithmische Konvexität von F im allgemeinen Fall	121
4.1.5	Beweis des Stabilitätssatzes	138
4.2	Fehlerabschätzung und Konvergenzsatz für die Linienmethode	144
4.2.1	Betrachtung des Projektionsfehlers	144
4.2.2	Die Hauptergebnisse	148
II	Der Fall einer elliptischen Gleichung mit einem Diffusions- koeffizienten	161
5	Die Linienmethode für ein allgemeineres Problem	163
5.1	Das Cauchy-Problem für eine PDGL mit Diffusionskoeffizient	163
5.2	Herleitung der Linienmethode	166
5.2.1	Diskretisierung	166
5.2.2	Hilfsergebnisse aus der Eigenwerttheorie	167
5.2.3	Entkoppelung des Problems und erste Lösungsdarstellung	173
5.3	Detaillierte Untersuchung der diskreten Eigenwerte	180
5.3.1	Gitterfunktionen, Differenzenquotienten und Skalarprodukte	180
5.3.2	Der Differenzenoperator L_h	187
5.3.3	Diskretes Sturm-Liouvillesches EWP und diskreter Fredholmoperator	192
5.3.4	Abschätzung der diskreten Eigenwerte und alternative Lösungsdarstellung	201
6	Das kontinuierliche Problem	207
6.1	Separation der Variablen	207
6.2	Das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem	208
6.2.1	Die Sturmsche Randwertaufgabe und zugehörige Greensche Funktion	208
6.2.2	Aufstellung des Eigenwertproblems und erste Charakteristika	212
6.2.3	Der Fredholmsche Integraloperator	213
6.2.4	Eigenwerte und Eigenfunktionen des Fredholmschen Integraloperators	217
6.2.5	Eigenwerte und Eigenfunktionen der Sturm-Liouvilleschen Aufgabe sowie Entwicklungssätze	218
6.3	Lösungsdarstellung und Stabilitätssatz	224
6.3.1	Lösungsdarstellung des Cauchy-Problems	224

6.3.2	Verallgemeinerung des kontinuierlichen Stabilitätssatzes	225
7	Konvergenz der Linienmethode	241
7.1	Konvergenz der Eigenwerte und Eigenvektoren	241
7.1.1	Konvergenz der Eigenwerte	241
7.1.2	Konvergenz der Eigenvektoren	272
7.2	Endlichdimensionale Datenräume	288
7.3	Gestörte Daten und Projektion	301
7.4	Fehlerabschätzung und Konvergenzsatz	304
7.4.1	Projektionsfehlerabschätzung	304
7.4.2	Formulierung und Beweis der Hauptidee	310
III	Erprobung der Linienmethode in numerischen Beispielen	323
8	Numerische Berechnungen und Beispiele	325
8.1	Berechnungen zur Poisson-Gleichung	326
8.1.1	Beschreibung des Verfahrens	326
8.1.2	Das Hadamard-Beispiel	327
8.1.3	Ein inhomogenes Problem	329
8.2	Berechnungen zu einer Gleichung mit Diffusionskoeffizient	331
8.2.1	Beschreibung des Verfahrens	331
8.2.2	Ein polynomiales Beispiel	332
8.3	Zum Problem der Randidentifizierung	333
8.3.1	Beschreibung des Verfahrens	333
8.3.2	Das Hadamard-Beispiel	334
8.3.3	Ein inhomogenes Problem	335
A	Bilder und Tabellen zu den numerischen Ergebnissen	337
A.1	Beispiele zur Poisson-Gleichung	337
A.1.1	Das Hadamard-Beispiel	337
A.1.2	Ein inhomogenes Problem	354
A.2	Beispiele zu einer Gleichung mit Diffusionskoeffizient	360
A.3	Zum Problem der Randidentifizierung	365
A.3.1	Das Hadamard-Beispiel	365
A.3.2	Ein inhomogenes Problem	371
	Literaturverzeichnis	373
	Index	381
	Danksagung	389

Abbildungsverzeichnis

1.1	Beispiel eines eindimensionalen Einflußgebiets für die Wellengleichung	10
1.2	Das Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung	20
1.3	Das Cauchy-Problem für die Poisson-Gleichung, klassisches Beispiel eines schlecht gestellten Problems	21
1.4	Die Funktion u_2 des Hadamard-Beispiels	22
1.5	Die Funktion u_4 des Hadamard-Beispiels	23
1.6	Das inverse Potentialproblem der Elektrokardiologie	25
1.7	Gravimetrische Suche nach Bodenschätzen	26
1.8	Modellierung der Hochofengeometrie	29
1.9	Randidentifizierungsproblem	29
1.10	Graphische Darstellung des Aufbaus der vorliegenden Arbeit	39
4.1	Darstellung des Regularisierungs- beziehungsweise Projektionsfehlers (1) und des Datenfehlers (2)	157
A.1	Exakte Daten Φ_1 , gestörte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon$ und projizierte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon^*$ bei $y = 0$ für $m = 2, M = 2, \varepsilon = 0.1, h = \frac{1}{100}$	337
A.2	Exakte Daten Φ_1 , gestörte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon$ und projizierte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon^*$ bei $y = 0$ für $m = 2, M = 4, \varepsilon = 0.1, h = \frac{1}{100}$	338
A.3	Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2, M = 2, \varepsilon = 1, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	338
A.4	Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2, M = 2, \varepsilon = 10^{-1}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	339
A.5	Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2, M = 2, \varepsilon = 10^{-2}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	339
A.6	Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2, M = 2, \varepsilon = 10^{-3}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	340
A.7	Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2, M = 4, \varepsilon = 10^{-2}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	340
A.8	Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2, M = 4, \varepsilon = 10^{-3}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	341
A.9	Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2, M = 4, \varepsilon = 10^{-4}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	341

A.10 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2, M = 4, \varepsilon = 10^{-5}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	342
A.11 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2, M = 6, \varepsilon = 10^{-4}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	342
A.12 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2, M = 6, \varepsilon = 10^{-5}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	343
A.13 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2, M = 6, \varepsilon = 10^{-6}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	343
A.14 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2, M = 6, \varepsilon = 10^{-7}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	344
A.15 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 4, \varepsilon = 1, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	344
A.16 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 4, \varepsilon = 10^{-1}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	345
A.17 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 4, \varepsilon = 10^{-2}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	345
A.18 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 4, \varepsilon = 10^{-3}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	346
A.19 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 6, \varepsilon = 10^{-2}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	346
A.20 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 6, \varepsilon = 10^{-3}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	347
A.21 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 6, \varepsilon = 10^{-4}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	347
A.22 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 6, \varepsilon = 10^{-5}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	348
A.23 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 8, \varepsilon = 10^{-4}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	348
A.24 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 8, \varepsilon = 10^{-5}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	349
A.25 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 8, \varepsilon = 10^{-6}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	349
A.26 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 8, \varepsilon = 10^{-7}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	350
A.27 Exakte Daten Φ_1 , gestörte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon$ und projizierte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon^*$ bei $y = 0$ für $M = 2, \varepsilon = 0.0001, h = \frac{1}{100}$	354
A.28 Exakte Daten Φ_1 , gestörte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon$ und projizierte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon^*$ bei $y = 0$ für $M = 4, \varepsilon = 0.0001, h = \frac{1}{100}$	354
A.29 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{50}, M = 2, \varepsilon = 10^{-1}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	355
A.30 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{50}, M = 2, \varepsilon = 10^{-3}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	355

A.31 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{50}, M = 2, \varepsilon = 10^{-5}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	356
A.32 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{50}, M = 4, \varepsilon = 10^{-1}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	356
A.33 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{50}, M = 4, \varepsilon = 10^{-3}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	357
A.34 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{50}, M = 4, \varepsilon = 10^{-5}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	357
A.35 Exakte Daten Φ_1 , gestörte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon$ und projizierte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon^*$ bei $y = 0$ für $M = 2, \varepsilon = 0.01, h = \frac{1}{100}$	360
A.36 Exakte Daten Φ_1 , gestörte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon$ und projizierte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon^*$ bei $y = 0$ für $M = 4, \varepsilon = 0.01, h = \frac{1}{100}$	360
A.37 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{50}, M = 2, \varepsilon = 10^{-1}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	361
A.38 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{200}, M = 2, \varepsilon = 10^{-1}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	361
A.39 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{50}, M = 2, \varepsilon = 10^{-2}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	362
A.40 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{200}, M = 2, \varepsilon = 10^{-2}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	362
A.41 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{50}, M = 2, \varepsilon = 10^{-3}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	363
A.42 Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{200}, M = 2, \varepsilon = 10^{-3}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$	363
A.43 Exakte Randform $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin(4\pi x)$ und Näherung für $m = 2, M = 2, \varepsilon = 10^{-1}, h = \frac{1}{50}$	365
A.44 Exakte Randform $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin(4\pi x)$ und Näherung für $m = 2, M = 2, \varepsilon = 10^{-3}, h = \frac{1}{50}$	365
A.45 Exakte Randform $\frac{1}{2} + \sin(\pi x)$ und Näherung für $m = 2, M = 2, \varepsilon = 10^{-1}, h = \frac{1}{50}$	366
A.46 Exakte Randform $\frac{1}{2} + \sin(\pi x)$ und Näherung für $m = 2, M = 2, \varepsilon = 10^{-3}, h = \frac{1}{50}$	366
A.47 Exakte Randform $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin(4\pi x)$ und Näherung für $m = 2, M = 4, \varepsilon = 10^{-1}, h = \frac{1}{50}$	367
A.48 Exakte Randform $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin(4\pi x)$ und Näherung für $m = 2, M = 4, \varepsilon = 10^{-3}, h = \frac{1}{50}$	368
A.49 Exakte Randform $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin(4\pi x)$ und Näherung für $m = 2, M = 4, \varepsilon = 10^{-5}, h = \frac{1}{50}$	369
A.50 Exakte Randform $\frac{1}{2} + \sin(\pi x)$ und Näherung für $m = 2, M = 4, \varepsilon = 10^{-1}, h = \frac{1}{50}$	369
A.51 Exakte Randform $\frac{1}{2} + \sin(\pi x)$ und Näherung für $m = 2, M = 4, \varepsilon = 10^{-3}, h = \frac{1}{50}$	370
A.52 Exakte Randform $\frac{1}{2} + \sin(\pi x)$ und Näherung für $m = 2, M = 4, \varepsilon = 10^{-5}, h = \frac{1}{50}$	370
A.53 Exakte Randform $\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2} - x)$ und Näherung für $\bar{h} = \frac{1}{100}, M = 2, \varepsilon = 10^{-1}, h = \frac{1}{50}$	371
A.54 Exakte Randform $\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2} - x)$ und Näherung für $\bar{h} = \frac{1}{100}, M = 2, \varepsilon = 10^{-4}, h = \frac{1}{50}$	371

A.55 Exakte Randform $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} - x)$ und Näherung für $\bar{h} = \frac{1}{100}, M = 2, \varepsilon = 10^{-7}, h = \frac{1}{50}$	372
--	-----

Tabellenverzeichnis

4.1	Lösungsbezeichnungen im Zusammenhang mit der Linienmethode für das Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung	149
A.1	Relativer L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $m = 2, M = 2$	350
A.2	Relativer L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $m = 2, M = 4$	351
A.3	Relativer L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $m = 2, M = 6$	351
A.4	Relativer L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $m = 4, M = 4$	352
A.5	Relativer L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $m = 4, M = 6$	352
A.6	Relativer L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $m = 4, M = 8$	353
A.7	Relativer L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $\bar{h} = \frac{1}{50}, M = 2$	358
A.8	Relativer L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $\bar{h} = \frac{1}{50}, M = 4$	358
A.9	Relativer L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $\bar{h} = \frac{1}{200}, M = 2$	359
A.10	Relativer L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $\bar{h} = \frac{1}{200}, M = 4$	359
A.11	Relativer L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $\bar{h} = \frac{1}{50}, M = 2$	364
A.12	Relativer L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $\bar{h} = \frac{1}{200}, M = 2$	364

Kapitel 1

Einleitung

In diesem Kapitel wollen wir die spezielle Fragestellung dieser Arbeit in den allgemeinen naturwissenschaftlich-mathematischen Rahmen einordnen, um so sicherzustellen, daß auch bei der im folgenden nötigen und unvermeidlichen Behandlung von Detailfragen der Gesamtzusammenhang nicht aus dem Blickfeld gerät. Der kundige Leser, der mit diesem Zusammenhang vertraut ist, und die Grundlagen partieller Differentialgleichungen beziehungsweise schlecht gestellter Probleme beherrscht, kann die ersten Unterabschnitte dieser Einleitung (1.1 und 1.2) daher ohne Probleme überspringen und direkt bei der Einführung in das Thema der Arbeit im engeren Sinne (Abschnitt 1.3) mit der Lektüre beginnen.

Das Problem, mit dem wir uns beschäftigen werden, entstammt der mathematischen Disziplin der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Daher ist es naheliegend, zunächst in aller Kürze auf dieses Teilgebiet der angewandten Mathematik einzugehen und die Herkunft der dort behandelten Probleme zu klären, die im Gegensatz zu anderen Forschungsgebieten der Mathematik nicht allein dem menschlichen Geist entspringen, sondern aus dem Dialog mit seiner Umwelt mit physikalischen Hilfsmitteln und dem Willen, diese Umwelt zu verstehen und zu beeinflussen, entstehen. Außer einer kleinen Einführung in partielle Differentialgleichungen und einer allgemeinen Klassifikation der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Analogie zu der Theorie der Kegelschnitte werden wir für jeden Gleichungstyp auch eine kennzeichnende sogenannte Modellgleichung angeben, an der exemplarisch die Eigenschaften dieser Art von Gleichungen deutlich werden. Anschließend werden wir auf die für unsere Zwecke zentralen elliptischen PDGL eingehen und zum Abschluß von Abschnitt 1.1 einige Beispiele für physikalische Fragestellungen geben, die auf solche Gleichungen führen, bevor wir uns in Abschnitt 1.3 dem Hauptthema dieser Arbeit, dem Cauchy-Problem für elliptische partielle Differentialgleichungen, zuwenden. Hierzu klären wir zuvor einige Begriffe aus der Theorie inverser und schlecht gestellter Probleme (Abschnitt 1.2), beschreiben dann die Aufgabenstellung des Cauchy-Problems und diskutieren Anwendungen und Literatur zu diesem Problem. Wir beschließen die Einleitung mit einem kurzen inhaltlichen Überblick über die einzelnen Kapitel der vorliegenden Arbeit.

1.1 Elliptische partielle Differentialgleichungen

1.1.1 Partielle Differentialgleichungen

Zunächst werden wir nun vom rein mathematischen Standpunkt aus darlegen, was man unter einer partiellen Differentialgleichung versteht. Zur Klärung des Begriffs der partiellen Differentialgleichung ist es am einfachsten, die drei Bestandteile dieser Bezeichnung zu beschreiben.

- Es handelt sich um eine **Gleichung**, das heißt, es werden gewisse (bekannte oder unbekannte, abhängige oder unabhängige) mathematische Größen so (z.B. durch Addition etc.) in Beziehung zueinander gesetzt, daß eine Identität zweier solcher Beziehungsgefüge entsteht, das heißt die Auswertung beider Seiten liefert dasselbe Element der betrachteten Grundmenge (z.B. reelle Zahlen o.ä.).
- Es geht um **Differentialgleichungen**, also um Gleichungen, in denen Ableitungen einer gesuchten Funktion u — möglicherweise ein Vektor, wenn es sich um Systeme solcher Gleichungen handelt — auftauchen.
- **Partielle Differentialgleichungen** schließlich zeichnen sich dadurch aus, daß im Gegensatz zu den sogenannten gewöhnlichen Differentialgleichungen die auftretende Funktion u , die sogenannte abhängige Variable, von mindestens zwei unabhängigen Variablen abhängt, also in der Form

$$u(x_1, \dots, x_n), \quad n \geq 2$$

geschrieben werden kann.

Wir geben nach diesen einleitenden Bemerkungen nun eine Definition einer allgemeinen partiellen Differentialgleichung im Reellen an:

Definition 1.1.1 *Gegeben sei eine genügend glatte (damit wird sichergestellt, daß die auftretenden Ableitungen definiert sind) Funktion*

$$u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \quad .$$

Die partiellen Ableitungen der Ordnung k seien (soweit definiert) wie üblich mit

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad \sum_{i=1}^n k_i = k \in \mathbb{N}$$

bezeichnet. Weiter sei eine Zahl $k_0 \in \mathbb{N}$ und eine beliebige Funktion

$$F : \mathbb{R}^{n+1+m} \mapsto \mathbb{R}$$

gegeben, wobei m durch

$$m := \sum_{l=1}^{k_0} n^l$$

definiert ist, und alle m partiellen Ableitungen von u , deren Ordnung kleiner oder gleich k_0 ist (wir betrachten in unserem Fall der Einfachheit halber auch die partiellen Ableitungen, die sich nur durch die Differentiationsreihenfolge unterscheiden, als wesentlich verschieden), seien durchnummeriert und mit

$$u_1, \dots, u_m$$

benannt. Dann heißt

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_1, \dots, u_m) = 0 \quad (1.1)$$

partielle Differentialgleichung der Ordnung k_0 . Eine Funktion $u(x_1, \dots, x_n)$, die für einen bestimmten Bereich der unabhängigen Variablen x_1, \dots, x_n die partielle Differentialgleichung (1.1) erfüllt, heißt Lösung dieser PDGL.

In dieser Allgemeinheit ist natürlich das Problem, eine partielle Differentialgleichung zu lösen, unangreifbar. So ist zum Beispiel im allgemeinen völlig unklar, ob es zu einer gegebenen partiellen Differentialgleichung überhaupt eine Lösung gibt (Existenz einer Lösung) und, wenn dies der Fall sein sollte, ob diese Lösung die einzige ist (Eindeutigkeit der Lösung). Die in der physikalischen Praxis auftretenden Gleichungen sind jedoch meist im Vergleich zu (1.1) relativ einfach (was noch nichts darüber aussagt, ob sie tatsächlich einfach zu lösen sind), so daß es genügt, sich auf einige wenige Spezialfälle zu konzentrieren. Die Ordnung dieser für die Praxis relevanten PDGL übersteigt vier meistens nicht. Auch ist die Anzahl n der unabhängigen Variablen für die meisten Anwendungen nicht größer als vier (drei Raumvariablen x, y, z und eine Zeitvariable t). Einige Beispiele aus der Physik für partielle Differentialgleichungen sind unter anderem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 && \text{(Einfacher Transport)} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 && \text{(Stoßwelle)} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3 &= 0 && \text{(Welle mit Rückkoppelung)} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= 0 && \text{(Dispersionswelle)} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= 0 && \text{(schwingender Stab)} \\ \frac{\partial u}{\partial t} - i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 && \text{(Quantenmechanik)} \end{aligned}$$

Jede partielle Differentialgleichung kann man in der Form $Du = g$ mit einem Operator D , der einer Funktion u eine Funktion Du zuordnet, und einer nur von den unabhängigen Variablen abhängigen Funktion g schreiben. Je nach der Gestalt von D unterscheiden wir lineare und nichtlineare partielle Differentialgleichungen:

Definition 1.1.2 Gegeben seien zwei \mathbb{R} -Vektorräume von Funktionen \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 sowie ein Operator

$$D : \mathcal{F}_1 \mapsto \mathcal{F}_2 \quad .$$

Dann heißt D linear, falls für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und für alle $u, v \in \mathcal{F}_1$ die Linearitätsbedingung

$$D(\lambda u + \mu v) = \lambda Du + \mu Dv$$

erfüllt ist. Eine partielle Differentialgleichung der Form $Du = g$ heißt lineare PDGL, falls D ein linearer Operator ist. In diesem Fall spricht man von einer homogenen linearen Gleichung, falls zusätzlich noch $g = 0$ gilt, sonst von einer inhomogenen linearen Gleichung.

Die allerwenigsten partiellen Differentialgleichungen besitzen eine eindeutige Lösung. Meistens ist man jedoch an einer ganz bestimmten Lösung interessiert, die gewisse Zusatzbedingungen erfüllt, auf die wir weiter unten noch genauer eingehen wollen. Hilfreich ist an diesem Punkt oft das sogenannte Superpositionsprinzip, das für lineare homogene Differentialgleichungen angibt, wie man aus schon bekannten Lösungen einer solchen Gleichung weitere Lösungen ableiten kann:

Satz 1.1.3 (Superpositionsprinzip) Sind u_1, \dots, u_n Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung $Du = 0$, dann löst auch jede Linearkombination der Gestalt

$$u := \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \quad , \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

diese Gleichung.

Beweis:

Die Behauptung folgt mittels vollständiger Induktion direkt aus Definition 1.1.2. □

Bemerkung 1.1.4 Liegt statt einer homogenen eine inhomogene lineare Gleichung vor, so gilt das Superpositionsprinzip nicht mehr in der Form von Satz 1.1.3. Allerdings kann man diesen Fall relativ leicht auf den homogenen Fall zurückführen, wenn man eine spezielle Lösung u^* der inhomogenen Gleichung kennt. Dann ergibt sich nämlich die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems durch einfache Addition von u^* zu jeder Lösung des homogenen Problems.

Da die allgemeine Lösung einer partiellen Differentialgleichung fast immer von beliebigen Funktionen abhängt (im Gegensatz zu beliebigen Konstanten bei gewöhnlichen Differentialgleichungen), ist es, falls man eine eindeutige Lösung erhalten will, fast immer notwendig, zusätzliche Bedingungen an die gewünschte Lösung zu stellen. Solche Zusatzbedingungen sind meistens **Anfangs- oder Randbedingungen** der unterschiedlichsten Art und sind fast immer aus den physikalischen Anwendungen der betreffenden Differentialgleichung abgeleitet. Eine **Anfangsbedingung** beschreibt den Anfangszustand eines physikalischen Systems, dessen zukünftige Entwicklung man beobachten bzw. vorhersagen will. Möchte man zum Beispiel die Auslenkung $u(x, t)$ einer schwingenden Saite an der Stelle x zum Zeitpunkt

t angeben, so ist es physikalisch einleuchtend, daß man die Anfangslage $u(x, 0)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ vorgeben muß, um eine eindeutige Lösung zu erhalten. Die Herkunft von **Randbedingungen** ist ebenfalls physikalischer Natur, da sich aus einem mit Hilfe einer partiellen Differentialgleichung zu beschreibenden Experiment in der Praxis auch immer sofort ein Bereich Ω ergibt, in dem die Gleichung Gültigkeit hat. Für eine schwingende Saite etwa ist dies z.B. das Intervall $[0, l]$, wobei l die Länge der Saite angibt. Der Rand besteht in diesem Fall nur aus den zwei Punkten 0 und l . Andere Beispiele sind die Diffusion einer chemischen Substanz — in diesem Fall ist Ω das Gefäß, das die Substanz enthält und der Rand besteht aus der Oberfläche dieses Behältnisses — oder eine schwingende Membran (Ω ist ein ebener Bereich und der Rand eine geschlossene Kurve). Offenbar sind die physikalischen Gegebenheiten am Rand von immenser Bedeutung für das Gesamtergebnis des Experiments (was jeder, der im Winter die Wahl zwischen einem gut isolierten Haus und einer zugigen Bretterbude hat, bestätigen wird). Die wichtigsten drei Arten von Randbedingungen sind:

1. **Dirichlet-Bedingung:**

Die gesuchte Funktion selbst wird auf dem Rand vorgegeben. Eine eingespannte Saite etwa würde man durch die Dirichlet-Bedingung

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

beschreiben.

2. **Neumann-Bedingung:**

Der Fluß in bzw. aus dem Gebiet wird vorgeschrieben. Mathematisch handelt es sich um die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial n}$ in Richtung der äußeren Normalen. So würde zum Beispiel der ideale Kühlschrank mit vollständiger Isolierung die Randbedingung (u=Temperatur)

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

erfüllen.

3. **Robin-Bedingung:**

Eine Linearkombination der beiden vorhergehenden Bedingungen der Form

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u$$

wird auf dem Rand festgelegt. Ein Beispiel hierfür wäre etwa ein isolierter Stab der Länge l über dem Intervall $[0, l]$, dessen Ende bei $x = l$ in ein Wasserreservoir der Temperatur $g(t)$ getaucht wird. Wenn nun Wärmeaustausch zwischen dem Stabende und dem Reservoir gemäß Newtons Abkühlungsgesetz stattfindet, so gilt mit einer Konstanten $a > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(l, t) = -a[u(l, t) - g(t)] \quad ,$$

was nichts anderes besagt, als daß der Wärmefluß bei l proportional zur Temperaturdifferenz an diesem Punkt ist. Offenbar entspricht dies der inhomogenen Robin-Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n}(l, t) + au(l, t) = ag(t) \quad .$$

Selbstverständlich ist es im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich, auf die allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen und analytische Lösungsmethoden näher einzugehen. Wir werden daher im folgenden nur in einigen Schritten aufzeigen, wie sich das speziell von uns betrachtete Problem in einen jeweils größeren Rahmen einordnen läßt. Dabei werden wir uns mit Gleichungen zweiter Ordnung, hier insbesondere mit den elliptischen Problemen und schließlich mit dem von uns behandelten Cauchy-Problem, bei dem eine besondere Art von Randbedingungen vorliegt, befassen.

1.1.2 Klassifikation partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Von besonderer Bedeutung für eine Vielzahl von praktischen Anwendungen sind nun partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Diese Gleichungen zerfallen im wesentlichen in drei Klassen, nämlich in **elliptische**, **parabolische** und **hyperbolische** Probleme. Für jede dieser Klassen wollen wir, bevor wir sie genau definieren, zunächst ein sogenanntes **Modellproblem** angeben, wobei wir uns in der Darstellung zum Teil an [Rei97] orientieren:

1. Elliptischer Fall:

Das einfachste Modell für eine elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung ist die Laplace-Gleichung (wegen der zahlreichen Anwendungen im Zusammenhang mit der Potentialtheorie auch Potentialgleichung genannt)

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad ,$$

wobei Ω ein Gebiet (also eine offene und zusammenhängende Menge) im \mathbb{R}^n und der sogenannte Laplace-Operator Δ durch

$$\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}(\nabla)$$

definiert ist. Eine Lösung der Laplace-Gleichung nennt man harmonische Funktion. Es sind zahlreiche Beispiele für harmonische Funktionen bekannt, von denen wir nur einige beispielhaft nennen können:

- Die sogenannten harmonischen Polynome

$$1, x_1, \dots, x_n, x_j x_k, x_j^2 - x_k^2, (j \neq k), \dots$$

- Ein bekanntes Ergebnis aus der Funktionentheorie besagt, daß Real- und Imaginärteil einer beliebigen analytischen Funktion harmonische Funktionen sind, was eine einfache Folgerung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für analytische Funktionen und dem Satz von Schwarz ist und hier nicht ausführlich bewiesen werden soll.

- Die Funktionen

$$\frac{\sin(m\pi x) \sinh(m\pi y)}{(m\pi)^2}, \quad m \in \mathbb{N},$$

auf die wir im Laufe dieser Einleitung noch zurückkommen werden (siehe Satz 1.3.2).

- Beliebige Linearkombinationen harmonischer Funktionen sind nach dem Superpositionsprinzip (Satz 1.1.3) wieder harmonisch, da es sich bei der Laplace-Gleichung um eine homogene lineare Differentialgleichung handelt.

Die zugehörige inhomogene Gleichung zur Laplace-Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

heißt Poisson-Gleichung und beschreibt eine Vielzahl physikalischer Gegebenheiten und Anwendungen, auf die wir unter anderem im nächsten Abschnitt näher eingehen werden. Das entsprechende Eigenwertproblem

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega$$

tritt im Zusammenhang mit gewissen Schwingungsproblemen auf. Um eine zumindest bis auf konstante Terme eindeutige Lösung derartiger Probleme zu erhalten, muß man noch Randbedingungen vorschreiben, die meist in Form einer der oben eingeführten drei Arten (Dirichlet-, Neumann-, Robin-Randbedingungen) vorliegen. Anzumerken ist noch, daß bei einem reinen Neumann-Problem die Lösung niemals eindeutig ist, da mit einer Lösung u auch $u + c$ für jede Konstante c eine Lösung darstellt.

2. Parabolischer Fall:

Als Modellproblem kann hier ein sogenanntes Anfangs-Randwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung dienen, das folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u + f \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) &= r(x, t) \quad \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) &= g(x) \quad \text{für } x \in \Omega \end{aligned} \tag{1.2}$$

Wie der Name schon nahelegt, wird durch diese Aufgabenstellung die Wärmeverteilung in einem n -dimensionalen Medium (Draht ($n = 1$), Membran ($n = 2$), homogenes Material ($n = 3$)) beschrieben — mathematisch das n -dimensionale Gebiet Ω —, in dem zu Anfang die Temperatur $g(x)$ herrscht, an dessen Rand im Laufe des Experiments die Temperatur $r(x, t)$ vorliegt, und das im Inneren mit der Verteilung f geheizt

wird. Ebenfalls durch diesen Typ von Gleichung werden Diffusionsprozesse beschrieben, weswegen die obige Differentialgleichung auch manchmal als Diffusionsgleichung bezeichnet wird. Weitere Anwendungen finden sich in populationsdynamischen Modellen oder der Brownschen Molekularbewegung. Eine wichtige Methode zur Lösung parabolischer Probleme, die auch durch die Herkunft dieser Probleme nahegelegt wird, ist die Methode der Separation der Zeit- und Ortsvariablen. Dabei macht man im Fall $f = 0, r = 0$ den Lösungsansatz:

$$u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$$

Setzt man diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} vw' &= w\Delta v \\ \implies \frac{w'}{w} &= \frac{\Delta v}{v} \end{aligned}$$

Da auf der linken Seite ein nicht vom Ort abhängiger Term und auf der rechten Seite eine nicht von der Zeit abhängige Größe steht, müssen beide Seiten dieser Gleichung konstant, also unabhängig von Ort und Zeit sein. Daher erhält man als äquivalente Aufgabenstellung, eine Konstante λ zu bestimmen, so daß

$$\frac{w'}{w} = \frac{\Delta v}{v} = -\lambda$$

gilt. Zur Lösung betrachtet man Orts- und Zeitanteil getrennt, wobei die entsprechenden Rand- bzw. Anfangsbedingungen hinzugenommen werden. Für den Ortsanteil v erhält man das elliptische Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta v &= \lambda v \quad \text{in } \Omega \\ v &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad . \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Eigenwerte dieses Systems mit λ_k und die zugehörigen Eigenfunktionen mit v_k , so führt das zeitabhängige Problem auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$w' = -\lambda_k w$$

mit der aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen bekannten Lösung

$$w_k := w_k(0)e^{-\lambda_k t} \quad .$$

Da jede so ermittelte Lösung $v_k w_k$ die Wärmeleitungsgleichung inklusive der homogenen Randbedingung erfüllt und es sich bei dem Differentialoperator

$$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$$

um einen linearen Operator handelt, kann man ein auf Reihen erweitertes Superpositionsprinzip anwenden und erhält als Lösung

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(0)v_k(x)e^{-\lambda_k t} \quad ,$$

wobei die Konstanten $w_k(0)$ so gewählt werden müssen, daß die gewünschte Anfangsbedingung $u(x, 0) = g(x)$ erfüllt ist, was auf die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k(0)v_k(x) = g(x)$$

führt. Eine solche Darstellung ist immer möglich, falls sich g nach dem System der Eigenfunktionen v_k entwickeln läßt.

3. Hyperbolischer Fall:

Das wichtigste Beispiel dieser Klasse von Gleichungen ist die sogenannte Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + f \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \quad .$$

Ähnlich wie im parabolischen Fall kann man Randbedingungen wie etwa

$$u(x, t) = r(x, t) \quad \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T)$$

fordern, im Unterschied dazu ist es aber im allgemeinen sinnvoll und notwendig, zwei Anfangsbedingungen, z.B. in der Form

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= g_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g_1(x) \quad , \quad x \in \Omega \end{aligned}$$

vorzuschreiben.

Beschrieben werden durch dieses Anfangs-Randwertproblem für die Wellengleichung unterschiedlichste Schwingungsvorgänge, z.B. einer Saite ($n = 1$), Membran ($n = 2$), Platte ($n = 3$). Bei der Lösung solcher Probleme führt oftmals ein ähnlicher Separationsansatz, wie wir ihn oben kurz für die Wärmeleitungsgleichung skizziert haben, zum Ziel.

Für den Spezialfall der homogenen Wellengleichung in einer Ortsdimension, betrachtet auf der ganzen reellen Achse,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= g_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g_1(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad , \end{aligned}$$

kann man sofort explizit eine Lösung mit Hilfe der sogenannten Formel von d'Alembert angeben, nämlich

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left((g_0(x+t) + g_0(x-t)) + \int_{x-t}^{x+t} g_1(s) ds \right) .$$

Hieran ist auch deutlich zu erkennen, daß die Lösung der homogenen Wellengleichung nur von den Werten der Anfangsbedingungen in einem bestimmten Bereich, nämlich dem Intervall $[x-t, x+t]$, abhängt. Man nennt diesen Bereich auch Einflußgebiet (siehe Abbildung 1.1) und bezeichnet die beiden Geraden durch (x, t) und $(x-t, 0)$ bzw. (x, t) und $(x+t, 0)$, die diesen Bereich aus der x -Achse ausschneiden, als Charakteristiken. Die Tatsache, daß es sich um ein endliches Gebiet handelt, trägt der

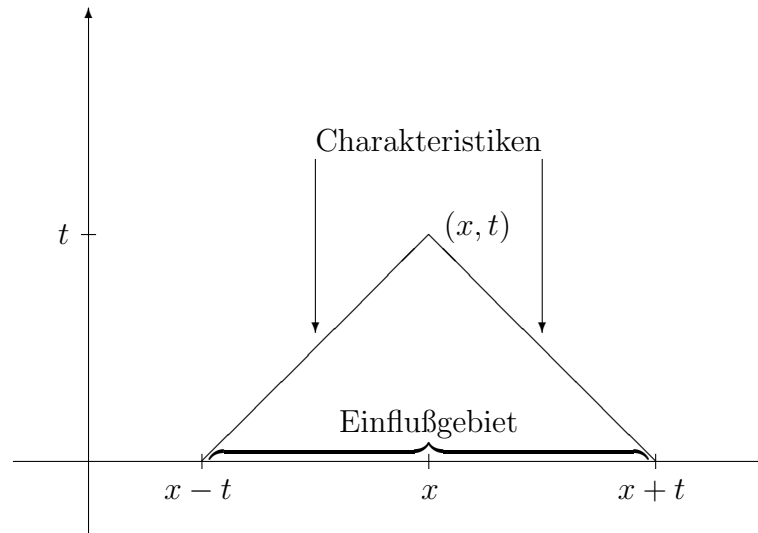


Abbildung 1.1: Beispiel eines eindimensionalen Einflußgebiets für die Wellengleichung

physikalischen Gegebenheit, daß sich Wirkungen in den Anfangsbedingungen nur mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten, Rechnung. Die Information wird quasi entlang der Charakteristiken transportiert. In mehr als einer Dimension erhält man entsprechend als Einflußgebiet Kreise ($n = 2$) oder Kugeln ($n = 3$).

Wir wollen nun nach dieser Betrachtung einzelner Modellbeispiele dazu übergehen, lineare, homogene partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung allgemein zu **klassifizieren**. Dabei werden wir das Vorgehen zunächst in zwei Dimensionen klarmachen und anschließend eine Verallgemeinerung auf n Dimensionen durchführen. Sei also zunächst eine Gleichung der Form

$$a_{1,1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{2,2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + a_{1,2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + cu = 0 \quad (1.3)$$

mit reellen konstanten Koeffizienten $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{1,2}, b_1, b_2, c$ gegeben. Aus technischen Gründen führen wir noch das Symbol $\text{diff}(1)$ ein, mit dem wir allgemein Terme bezeichnen, die nur Ableitungen der Ordnung 1 oder niedriger enthalten. Es gilt das folgende Ergebnis, das eine gewisse Ähnlichkeit mit der Untersuchung von Kegelschnitten in der analytischen Geometrie hat (von daher auch die Bezeichnungen elliptisch, parabolisch, hyperbolisch):

Definition und Satz 1.1.5 *Jede Gleichung vom Typ (1.3) kann durch eine Koordinatentransformation der Form*

$$\mathbf{x} = B\xi \quad , \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \quad , \quad \xi = (\xi_1, \xi_2)^T \quad , \quad B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

auf genau eine der drei folgenden Gestalten gebracht werden. Entscheidend ist hierbei das Vorzeichen der Diskriminante

$$D := a_{1,2}^2 - 4a_{1,1}a_{2,2} \quad .$$

1. $D < 0$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} + \text{diff}(1) = 0$$

2. $D = 0$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \text{diff}(1) = 0$$

3. $D > 0$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} + \text{diff}(1) = 0$$

Im ersten Fall heißt die Differentialgleichung (1.3) elliptisch, im zweiten parabolisch und im dritten hyperbolisch.

Beweis:

Wir führen den Beweis nur für den elliptischen Fall. Die anderen Fälle können analog bewiesen werden. Sei also $D < 0$, d.h.

$$a_{1,2}^2 < 4a_{1,1}a_{2,2} \quad \implies \quad a_{1,1} \neq 0 \quad .$$

Man kann daher Gleichung (1.3) durch $a_{1,1}$ dividieren und erhält:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{a_{2,2}}{a_{1,1}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \text{diff}(1) = 0 \\ \iff & \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{a_{1,2}}{2a_{1,1}} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2 u + \underbrace{\frac{4a_{2,2}a_{1,1} - a_{1,2}^2}{4a_{1,1}^2}}_{= \frac{-D}{4a_{1,1}^2} > 0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \text{diff}(1) = 0 \end{aligned}$$

Nun definiert man

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{1,2}}{2a_{1,1}} & \sqrt{\frac{-D}{4a_{1,1}^2}} \end{pmatrix},$$

führt die neuen Koordinaten (ξ_1, ξ_2) ein, die durch $\mathbf{x} = B\xi$ definiert sind und erhält nach der Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{a_{1,2}}{2a_{1,1}} \frac{\partial}{\partial x_2}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} = \sqrt{\frac{-D}{4a_{1,1}^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Durch Einsetzen folgt jetzt die Behauptung. □

Die Verallgemeinerung dieses Satzes auf n Dimensionen bereitet nun unter Verwendung von etwas linearer Algebra keine Schwierigkeiten mehr. Dazu betrachtet man jetzt die partielle Differentialgleichung

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au = 0 \quad . \quad (1.4)$$

Dem Satz von Schwarz zufolge dürfen wir voraussetzen, daß die Koeffizientenmatrix

$$A := (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$$

symmetrisch ist. Nach einem Satz der linearen Algebra ist jede symmetrische reelle Matrix diagonalisierbar, das heißt, es existiert eine orthogonale Matrix B mit $\det(B) = 1$, so daß BAB^T eine Diagonalmatrix $D = (d_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ ist. Diese Matrix B verwenden wir als Koordinatentransformation, indem wir neue Koordinaten $(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi$ durch die Transformationsgleichungen

$$\xi = B\mathbf{x} \iff \xi_k = \sum_{m=1}^n b_{k,m} x_m \quad , \quad k = 1, \dots, n$$

definieren. Wiederum mit der Kettenregel erhält man

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_k}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \left(\sum_{k=1}^n b_{k,i} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \right) \left(\sum_{l=1}^n b_{l,j} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \right),$$

so daß man Gleichung (1.4) auch schreiben kann als

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \sum_{k,l=1}^n b_{k,i} b_{l,j} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_l} + \text{diff}(1) = 0 \\
\iff & \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n b_{k,i} a_{i,j} b_{l,j} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_l} + \text{diff}(1) = 0 \\
\iff & \sum_{k,l=1}^n d_{k,l} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_l} + \text{diff}(1) = 0 \\
\iff & \sum_{k=1}^n d_k \frac{\partial^2}{\partial \xi_k^2} + \text{diff}(1) = 0 \quad .
\end{aligned}$$

Durch eine Streckung der neuen Koordinaten schließlich kann man D sogar in eine Diagonalmatrix überführen, in der nur noch die Werte 1, -1 oder 0 auftreten. Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen in

Definition und Satz 1.1.6 *Jede partielle Differentialgleichung der Form (1.4) kann durch eine Koordinatentransformation in eine äquivalente Gleichung der Gestalt*

$$\sum_{i=1}^n d_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \text{diff}(1) = 0 \quad , \quad d_i \in \{-1, 0, 1\}$$

überführt werden. Sind alle d_i positiv (was äquivalent zur positiven Definitheit von A ist), so heißt die Gleichung elliptisch. Ist genau ein d_i gleich 0 und haben alle anderen dasselbe Vorzeichen, so nennt man die Gleichung parabolisch. Verschwindet kein d_i und hat genau eins der d_i ein anderes Vorzeichen als die anderen, so spricht man von einer hyperbolischen Gleichung. Im für Anwendungen weniger bedeutsamen Fall, daß kein d_i gleich 0 ist und wenigstens zweimal jedes Vorzeichen auftritt, handelt es sich um eine sogenannte ultrahyperbolische Gleichung.

Beweis:

Siehe oben. □

1.1.3 Beispiele und Anwendungen elliptischer Differentialgleichungen

Da das in unserer Arbeit zu behandelnde Problem vom elliptischen Typ ist, wollen wir an dieser Stelle näher auf diese Klasse partieller Differentialgleichungen eingehen, wobei wir besonderes Gewicht auf Anwendungsbeispiele aus der Physik legen wollen. Natürlich können wir dieses umfangreiche Gebiet hier nur ausschnittsweise beleuchten. Für weitergehende Fragen

zu elliptischen Problemen und ihren Anwendungen verweisen wir auf die entsprechende Literatur (u.a. [GT77], [Agm65], [Hac86], [Nec67], [Str95], [Gri85], [AES97], [Rau90], [Dau88], [GL88], [ZT86], [Sob64], [Zau83], [MD87]).

Beispiel 1.1.7 (stationäre Wärmeleitung und Wellen) *Bei bestimmten Vorgängen, die mit Hilfe der Wärmeleitungsgleichung (also einer parabolischen Differentialgleichung) beschrieben werden, stellt sich nach einer gewissen Zeit ein Gleichgewichtszustand, der sogenannte "steady-state" ein. In diesem Zustand ist die Temperatur u nicht mehr zeitabhängig. Es gilt also*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

und man erhält als Charakterisierung dieses Zustandes die Laplace- bzw. die Poisson-Gleichung. Analoge Zusammenhänge gelten für stationäre Wellen. Handelt es sich um ein inhomogenes Material, so erhält man die ebenfalls elliptische Gleichung

$$-\operatorname{div}(a\nabla u) = f.$$

Der Koeffizient a bezeichnet hierbei eine physikalische Eigenschaft des betrachteten Mediums, wie etwa Wärmeleitfähigkeit, Diffusivität oder ähnliches. Auf Gleichungen dieser Art werden wir ab Kapitel 5 näher eingehen, während wir uns davor ausschließlich mit der Poisson-beziehungsweise Laplace-Gleichung auseinandersetzen werden.

Beispiel 1.1.8 (Elektrisches Potential) *Es sei ein z.B. durch eine Punktladung erzeugtes elektrisches Feld E gegeben. Nach den Maxwell'schen Gleichungen gilt $\operatorname{rot}(E) = 0$ und $\operatorname{div}(E) = 4\pi\rho$, wobei ρ die Ladungsdichte ist. Aus der ersten dieser Gleichungen folgert man $E = -\nabla\phi$ für eine skalare Funktion ϕ , die man als elektrisches Potential bezeichnet. Es folgt*

$$\Delta\phi = \operatorname{div}(\nabla\phi) = -\operatorname{div}(E) = -4\pi\rho.$$

Also erfüllt das elektrische Potential ϕ die Poisson-Gleichung.

Beispiel 1.1.9 (Gravitationspotential) *Das durch eine Masse m in einem Punkt P erzeugte Gravitationsfeld kann man durch die Intensität (also Kraft pro Einheitsmasse) des Feldes in einem Punkt Q , der r Längeneinheiten von P entfernt liegt, charakterisieren. Diese Intensität F erfüllt mit dem sogenannten Gravitationspotential*

$$V := -\frac{m}{r}$$

die Gleichung

$$F = -\nabla V \quad ,$$

woraus man mit Hilfe einiger physikalischer Überlegungen (siehe z.B. [MD87] S.23ff) herleiten kann, daß das Gravitationspotential die Eigenschaft

$$\Delta V = 0$$

besitzt und folglich der Laplace-Gleichung genügt.

Beispiel 1.1.10 (Stetige Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten) Wir betrachten eine rotationsfreie Strömung (d.h. es sind keine Wirbel vorhanden) und bezeichnen mit $v(x,y,z)$ den als zeitunabhängig vorausgesetzten Geschwindigkeitsvektor an der Stelle (x,y,z) . Dann gilt

$$\operatorname{rot}(v) = 0$$

und weiter, falls keine Quellen oder Senken auftreten und die Flüssigkeit inkompressibel (wie z.B. Wasser) ist,

$$\operatorname{div}(v) = 0 \quad ,$$

also

$$v = -\nabla\phi$$

mit einer skalaren Funktion ϕ , dem sogenannten Geschwindigkeitspotential. Es folgt schließlich

$$\Delta v = -\operatorname{div}(v) = 0 \quad ,$$

was nichts anderes bedeutet, als daß das Geschwindigkeitspotential die Laplace-Gleichung erfüllt.

Beispiel 1.1.11 (Brownsche Molekularbewegung) Es sei ein Gefäß G gegeben, in dem Brownsche Molekularbewegung stattfindet, das heißt, daß sich die Partikel im Inneren von G völlig zufällig bewegen und gestoppt werden, sobald sie auf den Rand treffen. Zerlegt man den Rand von G in zwei Teilbereiche R_1 und R_2 und bezeichnet mit $u(x,y,z)$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen, das sich zu Beginn an der Stelle (x,y,z) befindet, in einem Punkt von R_1 gestoppt wird, so kann man

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } G \\ u &= 1 && \text{in } R_1 \\ u &= 0 && \text{in } R_2 \end{aligned}$$

zeigen, die Wahrscheinlichkeit erfüllt also ein Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung.

Beispiel 1.1.12 (belastete Membran) Die Auslenkung u einer am Rand längs der (geschlossenen) Raumkurve $g(x(t),y(t))$ befestigten Membran unter der äußeren Last f erfüllt unter gewissen Voraussetzungen (z.B. darf die Auslenkung bzw. die Ableitungen nach x und y nicht zu groß werden) das folgende Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung:

$$\begin{aligned} \Delta u &= f && \text{in } G \\ u &= g && \text{in } \partial G \end{aligned}$$

Der Rand von G ist hierbei die Projektion der Kurve g auf die (x,y) -Ebene.

Alle Beispiele machen deutlich, daß die mathematische Behandlung solcher Probleme von großer Bedeutung für eine Vielzahl von praktischen Anwendungen ist. Grundlegend für mathematische Überlegungen sind natürlich vor allem Fragestellungen wie etwa Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen sowie gewisse Eigenschaften der gefundenen Funktionen. Es sei noch angemerkt, daß man in vielen Fällen auf numerische Lösungsmethoden angewiesen ist, da analytische Lösungswege nur für die wenigsten partiellen Differentialgleichungen bekannt sind.

1.2 Einführung in inverse und schlecht gestellte Probleme

Nachdem wir im vorangegangenen Abschnitt einige Beispiele aus der Physik betrachtet haben, die auf elliptische Differentialgleichungen hinausliefen, stellt sich die Frage, welche Eigenschaften die mathematischen Problemstellungen bzw. Modelle haben, die wir aus den physikalischen Überlegungen gewonnen haben. Wir wollen dabei ein allgemeines Problem in Form einer Abbildung

$$A : X \mapsto Y$$

betrachten. Hierbei stellt X die Menge möglicher Ursachen (Parameter eines Experiments, gegebene Randbedingungen etc.) und Y die Menge der Wirkungen (Ergebnisse eines Experiments, gesuchte Lösung) dar. Man kann das Problem als gelöst betrachten, wenn wir die Abbildung A präzise beschrieben haben. Wir bezeichnen dies als direktes Problem. Häufig möchte man jedoch den umgekehrten Weg gehen und aus beobachteten Wirkungen auf die Ursachen zurückschließen. Dies bezeichnet man als inverses Problem. Mathematisch gesprochen besteht das inverse Problem darin, das Urbild $x \in X$ zu einem gegebenen Element $y \in Y$ unter A zu finden. Dieses Problem ist relativ einfach zu lösen, falls A eine Bijektion und stetig bezüglich geeigneter Topologien auf X und Y ist. In diesem Fall hat man nämlich sichergestellt, daß zu einer gegebenen Wirkung eine eindeutig bestimmte Ursache existiert und daß diese Ursache sich bei einer kleinen Veränderung der Wirkung (wie sie z.B. schon durch Meßfehler unvermeidlich sind) auch nur wenig ändert.

Bemerkung 1.2.1 *Es ist offensichtlich, daß vom mathematischen Standpunkt aus gesehen direktes und inverses Problem zunächst völlig gleichwertig sind, so daß man in vielen Fällen die Rollen von direktem und inversem Problem vertauschen kann und von zueinander inversen Problemen spricht. Keller etwa (siehe [Kel76], vgl. [Kir96]) nennt demnach auch zwei Probleme invers zueinander, wenn zur Formulierung des einen die Lösung des anderen ganz oder zumindest teilweise bekannt sein muß. Dennoch hat sich bei den meisten Paaren von zueinander inversen Problemen eine bestimmte Sprechweise eingebürgert, die oft das früher oder genauer untersuchte Problem als direktes Problem und das andere als inverses Problem bezeichnet. Außerdem stellt sich oft heraus, daß eins der Probleme korrekt gestellt und das andere schlecht gestellt ist (siehe Definition 1.2.2). In diesem Fall nennt man oft das erste direktes Problem und das zweite inverses Problem.*

Einige Beispiele für zueinander inverse Probleme sind (DP=direktes Problem, IP=inverses Problem, Bem=Bemerkung):

1. Nullstellen eines Polynoms

DP: Finde die Nullstellen x_1, \dots, x_n eines gegebenen Polynoms p vom Grad n .

IP: Finde ein Polynom p vom Grad n mit gegebenen Nullstellen x_1, \dots, x_n

Bem: In diesem Fall ist das inverse Problem einfacher zu lösen als das direkte.

2. Werte eines Polynoms an n Stützstellen

DP: Werte ein gegebenes Polynom p vom Grad n an n Stützstellen x_1, \dots, x_n aus.

IP: Bestimme ein Polynom p vom Grad n , daß an n gegebenen Stützstellen x_1, \dots, x_n die Werte y_1, \dots, y_n annimmt.

Bem: Das inverse Problem heißt auch Lagrangesche Interpolationsaufgabe.

3. Bildungsgesetz einer Folge

DP: Bestimme die Glieder a_n , $n \in \mathbb{N}$ einer Folge mit Hilfe eines gegebenen Bildungsgesetzes.

IP: Bestimme aus den ersten k gegebenen Folgengliedern das allgemeine Bildungsgesetz der Folge.

Bem: Die Lösung des inversen Problems ist auf keinen Fall eindeutig. Die häufige Verwendung dieses inversen Problems bei Intelligenztests ist daher umstritten.

4. Inverse Streuungsprobleme

DP: Schall oder elektromagnetische Wellen fallen auf ein gegebenes Objekt. Berechne das Muster der gestreuten Wellen.

IP: Berechne die Form des Objekts aus dem gegebenen Streumuster.

Bem: Dieses Problem besitzt eine Reihe von Anwendungen z.B. in der Computertomographie, geophysikalischen Forschungen auf dem Gebiet der Seismik und des Elektromagnetismus und der nichtdestruktiven Materialforschung. Standardliteratur hierzu sind unter anderem die Monographien von Colton und Kress ([CK83], [CK92]) sowie von Lax und Phillips ([LP67]).

5. Inverse Wärmeleitprobleme

DP: Löse das klassische Anfangsrandwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung (1.2).

IP: Aus der gegebenen Temperaturverteilung zum Zeitpunkt T versucht man die Temperaturverteilung zu früheren Zeitpunkten bzw. zum Zeitpunkt 0 zu bestimmen.

Bem: Man kann auch ein analoges Diffusionsproblem formulieren. Es ist aus den physikalischen Gegebenheiten klar erkennbar, daß das inverse Problem wesentlich schwieriger zu behandeln ist, da Wärmeleitung und Diffusion immer einen Ausgleichsprozeß bedeutet, der Extreme glättet, die anschließend nur schwer zu rekonstruieren sind.

Es ließen sich hier noch viele Beispiele für ähnliche Probleme anführen, was jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Lange Zeit war man der Auffassung, daß physikalisch sinnvolle Fragestellungen auch mathematisch auf Probleme mit gewissen Regularitätseigenschaften, sogenannte korrekt oder gutgestellte Probleme (engl. "well-posed problems")

führen. Für diesen Begriff, der auf J. Hadamard zurückgeht (s. [Had23]), kann man folgende Definition angeben:

Definition 1.2.2 *Seien X, Y topologische Räume und $A : X \mapsto Y$. Dann heißt das Problem (A, X, Y) gutgestellt, falls*

1. $Ax = y$ für alle $y \in Y$ lösbar ist ,
2. diese Lösung eindeutig bestimmt ist und
3. stetig von den Daten abhängt.

Ist eine der drei Eigenschaften verletzt, bezeichnet man das Problem als schlecht gestellt (engl. "ill-posed"). Gibt es keine Lösung, d.h. Eigenschaft 1 gilt nicht, so spricht man von einem überbestimmten Problem. Ist mehr als eine Lösung vorhanden, so heißt (A, X, Y) entsprechend unterbestimmt.

In den meisten für praktische Anwendungen aus Physik und Technik relevanten Fragestellungen, die auf schlecht gestellte Probleme führen, ist die dritte Eigenschaft nicht erfüllt. Für numerische Berechnungen bedeutet dies, daß ein Problem dieser Art praktisch unlösbar ist, falls nicht zusätzliche Informationen über die Lösung zur Verfügung gestellt werden. Dies hängt damit zusammen, daß selbst in dem (in der Praxis nicht vorkommenden) Fall, daß man exakte Daten bereitstellen kann, bei jeder Berechnung Rundungsfehler auftreten, die das Ergebnis bereits unbrauchbar machen können. Wie schon in Bemerkung 1.2.1 festgestellt wurde, sind viele inverse Probleme schlecht gestellt, so zum Beispiel die Wärmeleitung rückwärts in der Zeit und andere. Weitere wichtige mathematische Beispiele für schlecht gestellte Probleme, die ebenfalls oft in Anwendungen auftreten, sind u.a.

- Differentiation (siehe [Rei95], [Kir96])
- Integralgleichungen der Form

$$(Ku)(x) := \int_a^b k(x, y)u(y) dy = g(x)$$

mit $k \in C([a, b] \times [a, b])$ oder abgeschwächt $k \in L_2((a, b) \times (a, b))$ (K ist unter diesen Voraussetzungen ein kompakter Operator von $C[a, b]$ bzw. $L_2(a, b)$ in sich), auch Integralgleichungen erster Art genannt.

- Numerische Differentiation mit Hilfe von Differenzenquotienten.

Selbstverständlich konnten wir an dieser Stelle nur in aller Kürze die Problematik umreißen. Für weitergehende Studien sei auf die zahlreichen Bücher zu inversen und schlecht gestellten Problemen verwiesen, so zum Beispiel [Kir96], [Lou89], [LRS86], [Gro93], [Ang90], [Hen91].

1.3 Das Cauchy-Problem für elliptische Differentialgleichungen

Nachdem wir uns nun mit schlecht gestellten Problemen im allgemeinen vertraut gemacht haben, wenden wir uns der einfachsten Form der Aufgabenstellung zu, die in der vorliegenden Arbeit untersucht werden soll, dem sogenannten Cauchy-Problem für die Laplace- bzw. die Poisson-Gleichung (in fortgeschrittenerem Kontext ab Kapitel 5 werden wir dann eine allgemeinere elliptische Differentialgleichung mit einem Diffusionskoeffizienten ausführlich betrachten). Dieses Problem ist in gewisser Weise ein klassisches Beispiel für schlecht gestellte Probleme mit einer Vielzahl wichtiger Anwendungen in verschiedensten wissenschaftlichen Disziplinen, auf die wir weiter unten noch genauer eingehen werden. Außerdem wollen wir kurz die existierende Literatur zu diesem Problem beleuchten, wobei neben solchen Arbeiten, die sich analytisch mit dem Problem beschäftigen und z.B. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen und ähnliches zeigen, vor allem Schriften, die sich mit numerischen Aspekten dieses Problems befassen, besondere Beachtung finden sollen. Zunächst wollen wir jedoch die Aufgabenstellung an einem einfachen Modellproblem verdeutlichen und die Schlechtgestellttheit des Cauchy-Problems am klassischen Beispiel von J. Hadamard (s. [Had23]) demonstrieren.

1.3.1 Beschreibung der Problemstellung

Wir betrachten zu Beginn das (klassische) Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung im Rechteck

$$\Omega := [0, 1] \times [0, r_{max}] \quad , \quad \Gamma := \partial\Omega ,$$

das sich wie folgt beschreiben läßt:

Zu gegebenen Funktionen $f, g \in C(\Omega)$ (zu Abschwächungen dieser Voraussetzungen siehe z.B. [GT77] S.55) ist eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ gesucht, so daß

$$\begin{aligned} \Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= g && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

erfüllt ist (siehe Abbildung 1.2).

Es ist allgemein bekannt, daß dieses Problem eine eindeutige Lösung besitzt, die aufgrund von Maximumprinzipien stetig von den Daten abhängt (siehe [PW67]). Zu einer Lösung dieser Gleichung kann man natürlich den Fluß aus dem Gebiet (oder mathematisch gesprochen die Normalenableitung) auf dem Randstück

$$\Sigma_1 := \{(x, 0) \mid x \in [0, 1]\}$$

bestimmen. Das Cauchy-Problem für die Poisson-Gleichung kann nun in gewisser Weise als inverses Problem zu dem eben betrachteten direkten Problem verstanden werden.

Man stellt nämlich die Frage, ob fehlende Informationen auf dem Randsegment

$$\Sigma_4 := \{(x, r_{max}) \mid x \in [0, 1]\}$$

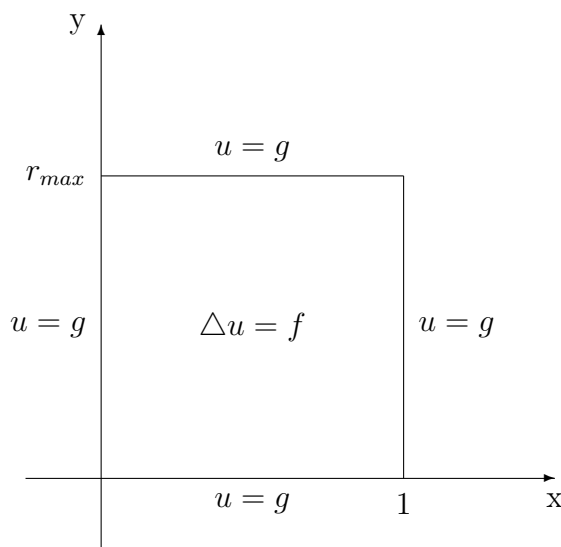


Abbildung 1.2: Das Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung

rekonstruiert werden können, falls zusätzlich zu den Dirichlet-Bedingungen auf den drei übrigen Randabschnitten noch die Normalenableitung auf Σ_1 gegeben ist. Wir fassen diese Fragestellung zusammen in der folgenden Problemdefinition:

Problem 1.3.1 (CP für die Poisson-Gleichung, klassische Formulierung) *Es seien Funktionen $f, f_1, f_2, f_3, \phi_1 \in C(\Omega)$ gegeben. Gesucht ist eine Funktion $u \in C^2(\text{int}(\Omega)) \cap C(\Omega)$, die die Bedingungen*

$$\begin{aligned} \Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= f_1 && \text{auf } \Sigma_1 \\ u &= f_2 && \text{auf } \Sigma_2 := \{(0, y) \mid y \in [0, r_{\max}]\} \\ u &= f_3 && \text{auf } \Sigma_3 := \{(1, y) \mid y \in [0, r_{\max}]\} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) &= \phi_1 && \text{auf } \Sigma_4 \end{aligned}$$

erfüllt, wobei insbesondere die Werte dieser Funktion bzw. ihrer Normalenableitung auf Σ_4 interessieren. Die Daten auf Σ_1 nennt man auch Cauchy-Daten.

Wir wollen nun anhand eines typischen Beispiels, das auf Hadamard zurückgeht, zeigen, daß es sich bei dem Cauchy-Problem für die Laplace- bzw. Poisson-Gleichung um ein schlecht gestelltes Problem handelt, weil die Lösung nicht stetig von den Daten abhängt. Wir formulieren dieses Ergebnis in Form eines Satzes:

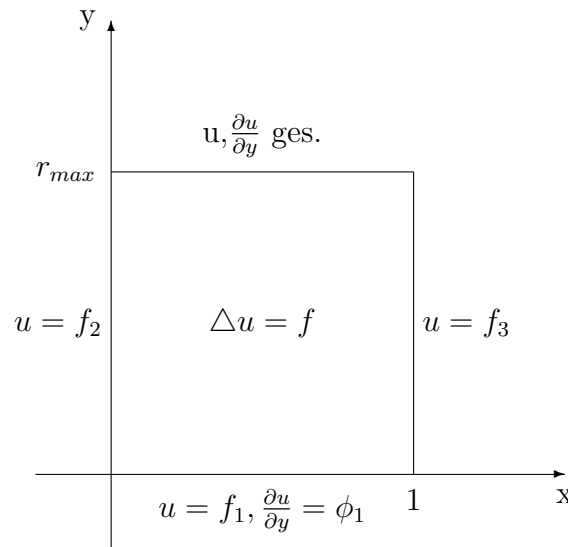


Abbildung 1.3: Das Cauchy-Problem für die Poisson-Gleichung, klassisches Beispiel eines schlecht gestellten Problems

Satz 1.3.2 (Hadamard-Beispiel) Sei $u_m, m \in \mathbb{N}$ Lösung von Problem 1.3.1 mit

$$f = 0 \quad , \quad f_1 = f_2 = f_3 = 0 \quad , \quad \phi_1 := \phi_{1,m} := \frac{1}{m\pi} \sin(m\pi x).$$

Dann hängt u_m nicht stetig von den gegebenen Daten $\phi_{1,m}$ der Normalenableitung ab.

Beweis:

Im folgenden schreiben wir der Einfachheit halber statt $\phi_{1,m}$ einfach nur ϕ_m für die Flußranddaten. Wie man sich leicht durch Differentiation überzeugt, ist die (eindeutige) Lösung u_m des Beispielproblems (siehe auch die Abbildungen 1.4 und 1.5) gegeben durch

$$u_m = \frac{\sin(m\pi x) \sinh(m\pi y)}{(m\pi)^2} \quad .$$

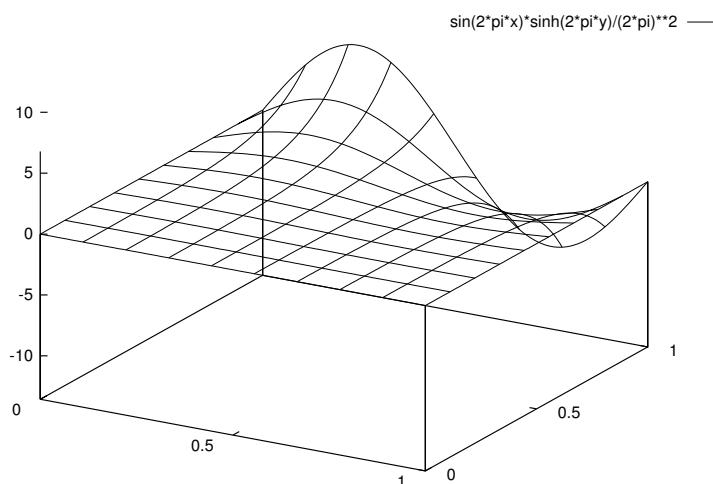
Wir werden für jedes feste $y > 0$ unter Verwendung der Supremumnorm

$$\|u\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} u(x, y)$$

folgendes zeigen:

$$\forall C > 0 \forall \delta > 0 \exists m_1, m_2 \in \mathbb{N} : \|\phi_{m_1} - \phi_{m_2}\|_\infty < \delta \wedge \|u_{m_1} - u_{m_2}\|_\infty > C$$

Dies bedeutet, daß trotz beliebig kleiner maximaler Datenstörung δ die Differenz zwischen den entsprechenden Lösungen nicht beschränkt ist oder anders ausgedrückt: Wenn man durch

Abbildung 1.4: Die Funktion u_2 des Hadamard-Beispiels

einen Meßfehler beliebig kleiner Größe δ statt der wirklichen Daten g_{m_1} die Daten g_{m_2} mißt, so beträgt dennoch der Fehler in der Lösung mehr als eine zu Beginn beliebig vorgegebene feste Konstante C . Zum Beweis seien also zunächst $y_0, C_0, \delta_0 > 0$ beliebig. Nun gilt offenbar zum einen

$$\|\phi_m\|_\infty = \frac{1}{m\pi} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) \quad ,$$

das heißt nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium

$$\forall \delta > 0 \exists m(\delta) \forall m_1, m_2 > m(\delta) : \|\phi_{m_1} - \phi_{m_2}\| < \delta \quad , \quad (1.5)$$

und zum anderen hat man

$$\|u_m\|_\infty = \frac{\sinh(m\pi y)}{(m\pi)^2} \rightarrow \infty \quad (m \rightarrow \infty) \quad ,$$

weil die Exponentialfunktion schneller wächst als jede Potenz (also insbesondere m^2). Das bedeutet in Zeichen ausgedrückt:

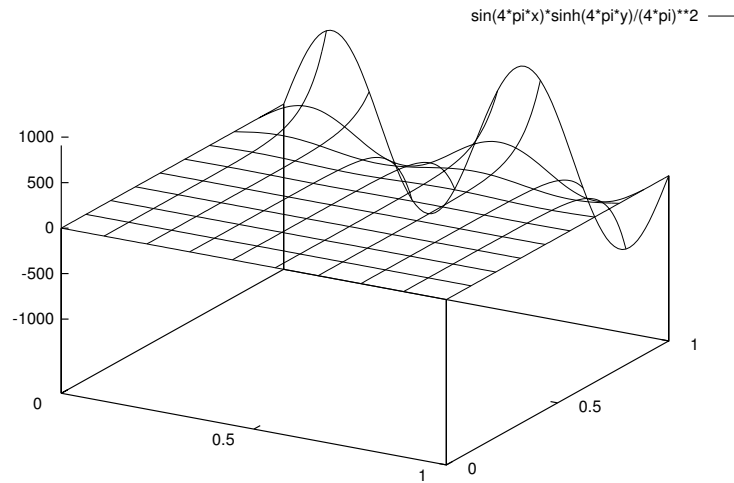
$$\forall C \exists \hat{m}(C) \forall m_3 > \hat{m}(C) : \|u_{m_3}\|_\infty > C \quad (1.6)$$

Außerdem ist mit demselben Argument klar, daß die betrachtete Folge der Normen $\|u_m\|_\infty$ monoton wachsend ist. Nun wählt man

$$m_2 > m(\delta_0) \quad (1.7)$$

und anschließend

$$m_1 > \max(\hat{m}(C_0 + \|u_{m_2}\|_\infty), m_2) \quad . \quad (1.8)$$

Abbildung 1.5: Die Funktion u_4 des Hadamard-Beispiels

Dann gilt wegen (1.7) und (1.8) in Verbindung mit (1.5)

$$\|\phi_{m_1} - \phi_{m_2}\| < \delta_0 \quad ,$$

und andererseits folgt unter Verwendung von (1.8) und (1.6)

$$\begin{aligned} \|u_{m_1}\|_\infty &\geq C_0 + \|u_{m_2}\|_\infty \\ \implies \|u_{m_1}\|_\infty - \|u_{m_2}\|_\infty &\geq C_0 \quad , \end{aligned} \tag{1.9}$$

was auf

$$\begin{aligned} \|u_{m_1} - u_{m_2}\|_\infty &\geq \left| \|u_{m_1}\|_\infty - \|u_{m_2}\|_\infty \right| \\ &\stackrel{\text{Monotonie, } m_1 > m_2}{=} \|u_{m_1}\|_\infty - \|u_{m_2}\|_\infty \\ &\stackrel{(1.9)}{\geq} C_0 \end{aligned}$$

führt. Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Es sind verschiedene Modifikationen bzw. Erweiterungen der Problemstellung durch Zusatzbedingungen vorgeschlagen worden, um dieses in der obigen Form offenbar nicht stabil lösbare Problem zu stabilisieren. Auf diesem Gebiet ragen besonders die Arbeiten von Payne (siehe [Pay60], [Pay70], [Pay75]) heraus, der Stabilität zeigen kann, falls eine Beschränktheitsbedingung für die gesuchte Funktion auf dem Teil des Randes, wo keine Daten gegeben sind, vorausgesetzt wird (entweder wie in [Pay60] eine gleichmäßige Beschränktheit oder wie in [Pay70], [Sch65] die Beschränktheit der L_2 -Norm der Lösung).

1.3.2 Anwendungsbeispiele des Cauchy-Problems

Die Anwendungsmöglichkeiten der oben dargelegten Problemstellung in Physik, Technik und Medizin sind vielfältig und können an dieser Stelle nur beispielhaft verdeutlicht werden. Im Prinzip ist zunächst einmal klar, daß jedes der Anwendungsbeispiele für elliptische Differentialgleichungen, die wir in Abschnitt 1.1.3 beschrieben haben, prinzipiell auch zu einem Cauchy-Problem für die entsprechende elliptische Differentialgleichung führen kann, falls aus verschiedensten Gründen nur auf einem Teil des Randes Daten verfügbar sind. Wir wollen im folgenden drei dieser Anwendungen aus den Bereichen Medizin, Geophysik und Eisenverhüttung, die von beachtlicher Bedeutung für die entsprechenden Gebiete sind, im Detail darstellen. Zunächst betrachten wir das sogenannte "Inverse Potentialproblem der Elektrokardiologie":

Beispiel 1.3.3 *Der menschliche Körper zerfällt in der Elektrokardiologie grob gesprochen in das Herz Ω_0 (die Quelle des elektrischen Feldes im Körper) und den übrigen Körper Ω , der vereinfachend als homogenes Leitungsmedium (wir werden o.B.d.A. die elektrische Leitfähigkeit als konstant und identisch eins betrachten) angesehen werden kann (siehe Abbildung 1.6). Offenbar ist der Körper in eine isolierende Umgebung Ω' —die Luft— eingebettet. Aus gewissen medizinischen Gründen ist man an Informationen über das elektrische Feld auf der Herzoberfläche Γ_0 interessiert. Es ist naheliegend, einen Patienten nicht mit einer viel aufwendigeren und unangenehmeren direkten Messung am Herzen zu belasten (und zu gefährden) sondern stattdessen aufgrund von Daten z , die man auf einem Teilstück Σ der Körperoberfläche Γ_1 mißt, zu versuchen, die gewünschten Werte auf Γ_0 zu berechnen. Physikalische Überlegungen führen dann auf die folgende Problemstellung: Gesucht ist eine Funktion V (das elektrische Potential), die auf Ω definiert ist und den Bedingungen*

$$\begin{aligned}\Delta V &= 0 && \text{in } \Omega \\ V &= z && \text{auf } \Sigma \\ \frac{\partial V}{\partial n} &= 0 && \text{auf } \Gamma_1\end{aligned}$$

genügt. Insbesondere ist man hierbei an den Werten von V auf Γ_0 , der Oberfläche des Herzens, interessiert. Es ist klar, daß es sich hier um ein Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung im dreidimensionalen Raum handelt. Für weiterführende Literatur siehe vor allem die beiden ausführlichen Arbeiten von Franzone und Magenes bzw. von Franzone, Tentoni, Viganotti et al. zu diesem Thema ([FM79], [FTV85]) und die dort angegebenen Literaturhinweise.

Als zweites Anwendungsbeispiel wollen wir uns nun der Geophysik zuwenden, und zwar dem Problem der Suche nach Bodenschätzen mit Hilfe der Auswertung gewisser Daten über Felder, die von der Erde erzeugt werden, wie z.B. das Erdmagnetfeld oder auch das Gravitationsfeld, das wir exemplarisch betrachten wollen.

Beispiel 1.3.4 (Gravimetrische Suche nach Bodenschätzen) *Da die Erde keine homogene Kugel darstellt, ist auch das Gravitationsfeld an der Erdoberfläche nicht homogen,*

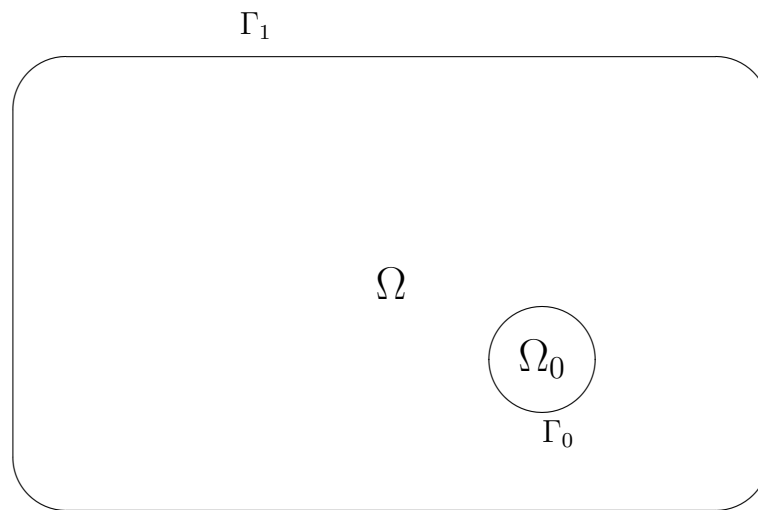


Abbildung 1.6: Das inverse Potentialproblem der Elektrokardiologie. Gesucht ist aufgrund einer Messung auf $\Sigma \subset \Gamma_1$ das elektrische Potential auf Γ_0 .

sondern bei Messungen mit sogenannten Gravimetern stellt man minimale lokale Schwankungen der Intensität fest, die zum Teil durch die unterschiedliche Dichte der Sedimente an der Erdoberfläche (ca. $2\text{-}4\text{ g/cm}^3$) und der darunterliegenden dichteren Gesteinsbasis (ca. $4\text{-}6\text{ g/cm}^3$) und zum Teil auch durch Einlagerungen flüssiger Magma in das umgebende Felsgestein, sogenannte Intrusionen, erklärt werden können. Gebirgsähnliche Erhebungen der Basis sind oft mit Erdölvorkommen verbunden und Intrusionen lassen in bestimmten Fällen den Schluß auf Erzvorkommen zu, so daß man natürlich daran interessiert ist, die Topographie der Basis aufgrund der vorgenommenen gravimetrischen Messungen an der Erdoberfläche zu bestimmen (siehe Abbildung 1.7). Wir werden die Probleme, die sich daraus ergeben, am Beispiel der Intrusionen, deren mögliche Lage beispielhaft in der unteren Hälfte von Abbildung 1.7 dargestellt ist, erläutern. Betrachtet man zunächst den linken Teil, so stellt man fest, daß den zwei Intrusionen auch zwei Maxima in dem Verlauf der ermittelten Gravitationsintensität entsprechen. Probebohrungen am Ort eines solchen Maximums wären also mit großer Wahrscheinlichkeit von Erfolg begleitet. Anders im rechten Teil der Abbildung: Hier sind im Gegensatz zum linken Teil die zwei Intrusionen dichter beieinander als sie von der Erdoberfläche entfernt sind, was darin seinen Ausdruck findet, daß nur ein Maximum zu sehen ist. Eine Probebohrung an der Stelle eines solchen Maximums würde genau zwischen die zwei Intrusionen führen, also ziemlich sicher kein positives Resultat liefern. Ein von Geophysikern vorgeschlagenes Vorgehen ist nun der Versuch aus den Daten an der Erdoberfläche entsprechende Daten über den Intensitätsverlauf des Gravitationsfeldes in einer gewissen Tiefe zu berechnen. Behält die Anomalie dann die Form eines Maximums, kann mit größerer Wahrscheinlichkeit davon ausgegangen werden, daß es sich tatsächlich um eine einzige Intrusion handelt, die dieses Maximum verursacht hat. Zeigen sich jedoch zwei Maxima, so kann man den Schluß ziehen, daß es sich um (mindestens) zwei Körper handelt

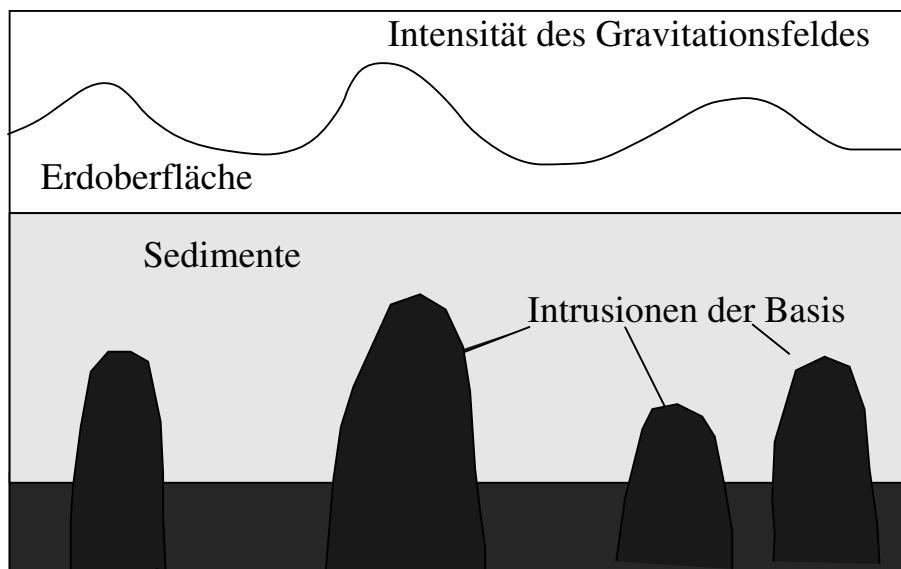
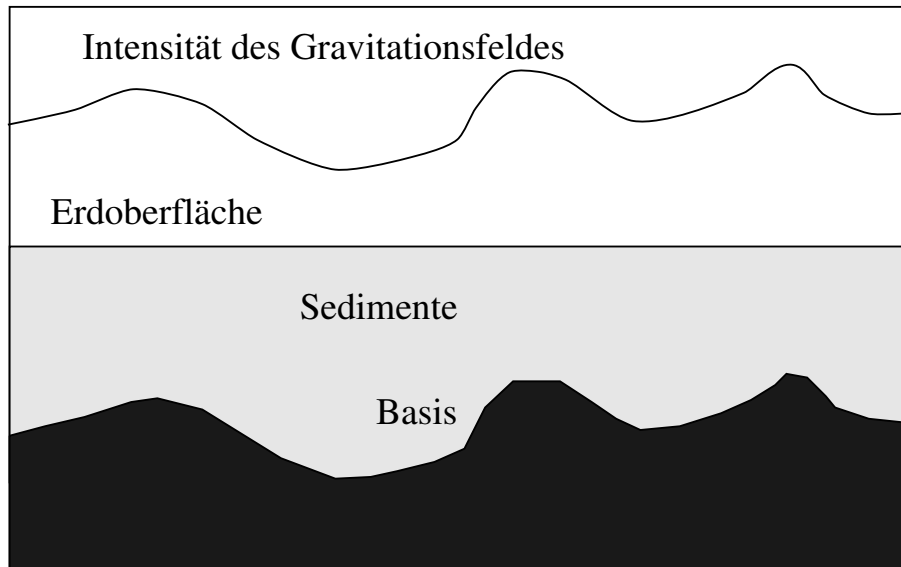


Abbildung 1.7: Gravimetrische Suche nach Bodenschätzen

und entsprechend einen Ort für Probebohrungen wählen. Das Problem, auf das wir so geführt werden, ist wiederum ein Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung, da das Gravitationspotential gerade eine harmonische Funktion ist und entsprechende Randbedingungen sich aus der Problemstellung ganz natürlich ergeben.

Analoge Überlegungen kann man auch zum Magnetfeld der Erde anstellen (engl. "magnetical prospecting") oder auch mit Hilfe der Untersuchung eines künstlich erzeugten elektrischen Feldes zwischen zwei Elektroden auf der Erdoberfläche (engl. "electrical prospecting"). Bei allen Methoden möchte man aus den Messungen an der Oberfläche Rückschlüsse auf die Struktur im Erdinneren schließen. Für Näheres zu dieser Art von Problemen siehe [LRS86] und die hierin angegebene Literatur, insbesondere zum Problem der Gravimetrik [Gla73] und [GKK70].

Ein letztes Beispiel schließlich entstammt der Eisenverhüttung, wobei hier das Cauchy-Problem nur ein Teilproblem der zu lösenden Aufgabe (wenn auch das wesentliche) darstellt.

Beispiel 1.3.5 (Randidentifizierung der Innenwand eines Hochofens) *Ein Hochofen ist ein relativ abgeschlossener Reaktorraum, der von oben mit Rohstoffen beschickt und von unten mit Luft (Wind) versorgt wird. Der Reaktionsprozess verläuft vertikal im Gegenstrom. Dadurch, daß an der Basis des Hochofens kontinuierlich Roheisen und Schlacke abgeführt und von oben Rohstoffe zugeführt werden, bleibt der Ofen immer gefüllt. Im Basisbereich des Hochofens wird wechselweise an zwei Abstichstellen fortgesetzt Roheisen und Schlacke entnommen. Nachdem der Hochofen einmal in Betrieb genommen ist, läuft die Produktion ca. 12 bis 15 Jahre ununterbrochen weiter. Die Produktionsmenge kann in dieser Zeit nur bedingt verringert werden, da der Prozess im Hochofen pausenlos fortlaufen muss. Die Prozessparameter werden also im wesentlichen nicht verändert. Die Innenseite des Hochofens ist mit dem sogenannten Ofenfutter, das aus Steinen unterschiedlichen Materials besteht, ausgekleidet. Dieses Ofenfutter ist natürlich im Laufe der Jahre aufgrund physikalischer und chemischer Vorgänge einem gewissen Verschleiß ausgesetzt, Teile des Materials erodieren und damit wird die Wanddicke des Ofens an bestimmten Stellen verringert. Andererseits lagern sich unter bestimmten Bedingungen auch immer wieder Schlacken an der Wand an, so daß insgesamt die tatsächliche Wanddicke relativ stark variieren kann. Natürlich möchte man den Prozeß im Hochofen stoppen, bevor es im schlimmsten Fall zu einem Waddurchbruch und einem Austritt des bis zu 2000 Grad Celsius heißen Materials und damit zu erheblichen Personen- und Sachschäden kommen kann. Andererseits möchte man den Hochofen auch nicht zu früh herunterfahren, da der einmal abgebrochene Prozeß nur mit großem Aufwand und erhebliche Kosten verursachend wieder angefahren werden kann. Man ist daher während des Ofenbetriebs an einem möglichst genauen Bild des inneren Ofenrandes interessiert. Eine direkte Beobachtung der Form dieses Randes kommt wegen der hohen Betriebstemperaturen im Inneren nicht in Betracht. Man integriert daher schon während der Bauphase Temperaturfühler in die Wand und möchte mit Hilfe von Temperaturmessungen auf die Form des inneren Randes schließen. Um das Problem geeignet zu behandeln, macht man einige zusätzliche Modellannahmen, die wir im folgenden angeben werden:*

- Der Hochofen wird als rotationssymmetrisch zu seiner Mittelachse angenommen, so daß man sich auf den zweidimensionalen Fall beschränken kann.
- Nach dem Anfahren des Prozesses ist der zu beschreibende Sachverhalt quasi-stationär, d.h. die Wärmeleitungsgleichung geht in eine elliptische Gleichung über, und zwar in die Gleichung

$$\operatorname{div}(a(x, y)\nabla u) = 0, \quad (1.10)$$

wobei $a(x, y)$ den Wärmeleitkoeffizienten innerhalb des betrachteten Gebietes darstellt (man beachte, daß sich im untersuchten Gebiet im wesentlichen zwei Werte von a zeigen, nämlich der Koeffizient innerhalb der Wand und der Koeffizient im Ofeninneren).

- Auf einem Teil des Randes läßt sich nicht nur die Temperatur, sondern auch der Wärmefluß bestimmen.

Unter diesen Bedingungen modellieren wir nun zunächst die geometrischen Gegebenheiten und beschreiben anschließend die sich in diesem Modell ergebende mathematische Problemstellung:

Sei $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ wie folgt definiert:

$$\Omega_0 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq r(x)\} \quad .$$

Der Rand von Ω besteht dann offenbar aus den vier Komponenten:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = 0\} \\ \Sigma_2 &= \{(x, y) \mid x = 0, 0 \leq y \leq r(0)\} \\ \Sigma_3 &= \{(x, y) \mid x = 1, 0 \leq y \leq r(1)\} \\ \Sigma_0 &= \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = r(x)\} \end{aligned}$$

Hierbei ist $r \in C[0, 1]$, $r(x) > 0 \forall x \in [0, 1]$. Damit stellt sich nun das Randidentifizierungsproblem wie folgt dar:

Finde eine Funktion $r : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ (und damit ein Gebiet Ω_0 mit oberem Rand Σ_0 , der durch r beschrieben wird) und eine auf Ω_0 definierte Funktion u , die die Differentialgleichung

$$\operatorname{div}(a(x, y)\nabla u(x, y)) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_0$$

löst und den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u &= f_i \quad \text{auf } \Sigma_i, i = 0, 1, 2, 3 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \phi_1 \quad \text{auf } \Sigma_1 \end{aligned}$$

genügt. Hiermit verbunden ist die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit sowohl der gefundenen Lösung u als auch des durch r beschriebenen Randes Σ_0 .

An dieser Stelle kommt nun das Cauchy-Problem für die betrachtete elliptische Gleichung ins Spiel. Kennt man nämlich eine Schranke r_{max} , so daß $r(x) \leq r_{max} \forall x \in [0, 1]$ gilt, so

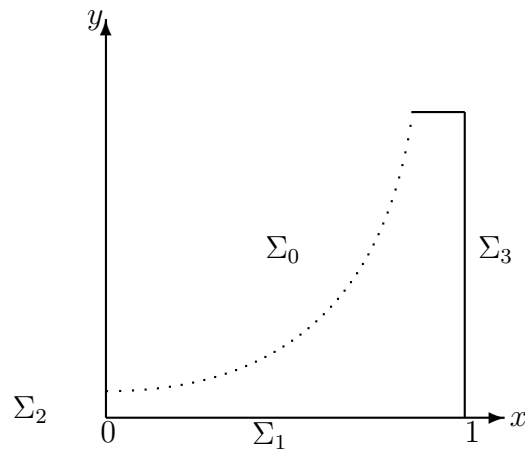


Abbildung 1.8: Modellierung der Hochofengeometrie

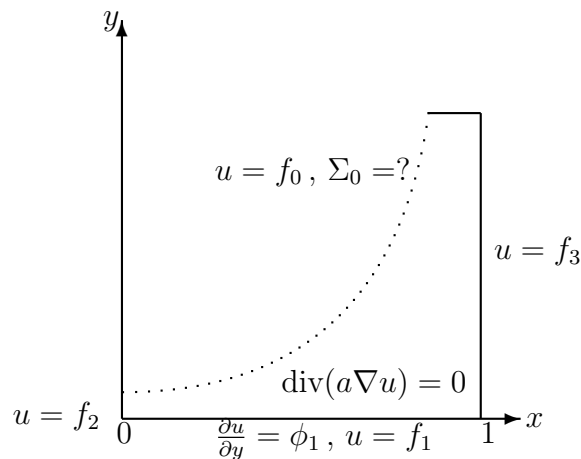


Abbildung 1.9: Randidentifizierungsproblem

kann man zunächst in $[0, 1] \times [0, r_{max}] = \Omega \supset \Omega_0$ das Cauchy-Problem für die angegebene elliptische Gleichung lösen und in einem zweiten Schritt (es handelt sich dann nur noch um eine Nullstellenbestimmung) die Werte für $r(x)$ suchen (also Σ_0 identifizieren), bei denen die Lösung u des Cauchy-Problems die durch die Dirichlet-Daten f_0 vorgegebenen Werte annimmt. Näheres zu dieser Art von Problemen findet der Leser in den Arbeiten von Radmosek und Wincor [RW98] und Berntsson [Ber02] sowie in [CRH02]. Die Arbeit von Berntsson verwendet einen im Ansatz ähnlichen Weg zur Lösung des Cauchy-Problems wie wir in der vorliegenden Arbeit; es wird nämlich hier wie dort zunächst in x -Richtung diskretisiert und die entsprechende Ableitung approximiert, allerdings schlägt Berntsson dann einen gänzlich anderen Weg ein. Statt wie wir eine allgemeine Lösungsdarstellung herzuleiten, löst er das entstehende Anfangswertproblem für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Standardmethoden (Runge-Kutta-Verfahren) und verwendet dabei in experimenteller Weise die Gitterweite als Regularisierungsparameter, ohne freilich analytische Resultate wie etwa

eine Fehlerabschätzung oder eine Konvergenzaussage zu beweisen. Dem vorgestellten Verfahren sind auch deshalb enge Grenzen gesetzt, weil gerade für die feinen Diskretisierungen (die unter Umständen benötigt werden) — wie vom Autor selbst angemerkt — die Schlechtgestellttheit voll zum Tragen kommt und die Ergebnisse unbrauchbar macht.

Literatur zu verwandten Fragestellungen, die sich ebenfalls mit der Gebietsidentifizierung für elliptische Probleme beschäftigen ist unter anderem das Buch von Pironneau [Pir84] und die Arbeiten [Ale93], [AV95], [KSV96], [Ale97], [AR98], [BV98], [BCY99] und [BK00].

Die drei angeführten Beispiele belegen anschaulich die enorme praktische Bedeutung, die einer mathematischen Behandlung bzw. numerischen Lösung des von uns betrachteten Cauchy-Problems für elliptische Gleichungen zukommt.

1.3.3 Das Cauchy-Problem in der Literatur

Zum Cauchy-Problem für elliptische Differentialgleichungen sind in der Literatur eine ganze Reihe von Arbeiten zu finden, die sich mit verschiedensten Teilaspekten dieses Problems beschäftigen. Im Vordergrund stehen hierbei meist analytische Überlegungen wie Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung unter gewissen Voraussetzungen oder die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten. Wesentlich geringer ist der Anteil der Arbeiten, die numerische Aspekte dieses Problems, also Definition von numerischen Verfahren, Beweis von Fehlerabschätzungen, Konvergenz- und Stabilitätsfragen usw., beleuchten. Wir wollen bei dem folgenden Einblick in die Literatur in besonderer Weise solche Arbeiten berücksichtigen, die diesem Ziel der Klärung numerischer Fragen gewidmet sind, während wir zu anderen, mehr theoretischen Aspekten nur eine kleine Auswahl des vorhandenen Materials kurz ansprechen können.

Eine der ersten Arbeiten, in denen ein numerisches Verfahren für das Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung formuliert wird, stammt von J.R. Cannon und P. DuChateau (s. [CD77]). Das Problem wird als eine Art "Anfangswertproblem" für den Laplace-Operator gestellt, d.h. nur auf der x-Achse bzw. einem Teil dieser Achse sind Randbedingungen (erster und zweiter Art) vorgeschrieben. Außerdem wird die gleichmäßige Beschränktheit der Lösung gefordert. Gesucht wird eine Lösung auf einer kompakten Teilmenge des rechteckigen Gebiets, auf dem das Problem definiert wurde. Die beiden Autoren zerlegen die Aufgabenstellung in zwei Teilprobleme: Die Lösung des einen realisiert die gegebenen Flußrandbedingungen und ist in der gesamten oberen Halbebene definiert, das andere Problem ist im wesentlichen das Ausgangsproblem mit modifizierten Randbedingungen. Zu beiden Teilproblemen wird unter gewissen Voraussetzungen an die Daten eine exakte Lösung sowie eine numerische Approximation mit Hilfe von elementaren Konzepten wie Quadraturformeln und Differenzenquotienten angegeben. Eine Fehlerabschätzung zwischen wahrer Lösung und dieser numerischen Approximation wird formuliert, wobei m.E. die Unabhängigkeit der Konstanten in dieser Abschätzung von der Datenstörung nicht gegeben ist.

Ein weiteres Verfahren, das auf einer äquivalenten Formulierung des Problems als Variationsgleichung bzw. -ungleichung basiert, geht auf H. Han zurück (s. [Han82]). Mit aus Ergebnissen von Payne (siehe z.B. [Pay75]) abgeleiteten Methoden wird zunächst die stetige Abhängigkeit der Lösung des Problems ohne Datenstörungen von den Cauchy-Daten

gezeigt. Anschließend wird das Problem derart in ein Minimierungs- bzw. Variationsproblem umformuliert, daß gewisse Datenstörungen zugelassen werden und ein Energiefunktional minimiert wird. Man kann dann zeigen, daß durch eine weitere Modifikation der Problemstellung eine äquivalente Variationsungleichung entsteht (vgl. [ET76]). Im folgenden werden Eigenschaften einer Lösung dieser Variationsungleichung, wie etwa Existenz, Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von den Datenstörungen, bewiesen. Ein numerisches Verfahren wird mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente formuliert, wobei stetige, stückweise lineare Funktionen als Ansatzfunktionen gewählt werden. Schließlich wird noch die Konvergenz der Näherungslösung gegen die (eindeutige) Lösung der Variationsungleichung unter bestimmten Bedingungen bewiesen.

Eine weitere wichtige Arbeit wurde im Jahr 1986 von R.S. Falk und P.B. Monk veröffentlicht ([FM86]). Unter Verwendung einer variationellen Formulierung des direkten Problems und dessen Approximationseigenschaften wird ein Verfahren für das Cauchy-Problem für die Poisson-Gleichung mit gestörten Randdaten definiert, das im wesentlichen eine Defektminimierung beinhaltet. Die Stabilisierung wird durch Einführung eines Regularisierungsparameters, der als Gewicht zur L_2 -Norm der gesuchten Funktion auf dem nicht zugänglichen Teil des Randes hinzutritt, erreicht. Dies geschieht in Analogie zur Theorie im kontinuierlichen Fall, da hier eine Beschränktheitsbedingung für eben diese Norm die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten garantiert. Infolgedessen kann auch im diskreten Fall ein solches Resultat vom Typ logarithmischer Konvexität gezeigt werden. Als wesentliches Beweishilfsmittel dient hierbei ein Ergebnis über die logarithmische Konvexität diskret harmonischer Funktionen. Das Minimierungsproblem wird mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente behandelt und schließlich die Ergebnisse einiger numerischer Experimente präsentiert.

Einen allgemeineren linearen, elliptischen Differentialoperator zweiter Ordnung in einem beschränkten Gebiet (Falk/Monk beschäftigen sich nur mit dem Laplace-Operator in einem Rechteck) betrachtet A.V. Fursikov ([Fur90]). Der Rand des dort betrachteten Gebietes besteht aus zwei glatten, diffeomorphen, sich nicht schneidenden Mannigfaltigkeiten Γ_1, Γ_2 , wobei wie üblich auf Γ_1 Cauchy-Daten vorgeschrieben sind. Fursikov kann konstruktiv zeigen, daß es eine Überdeckung des betrachteten Gebietes mit zu Γ_1, Γ_2 diffeomorphen Mannigfaltigkeiten κ_t , $t \in [0, 1]$ gibt, so daß mit einer Näherungslösung \hat{u} und der Datenstörung ε die Abschätzung

$$\|u - \hat{u}\|_{L_2(\kappa_t)} \leq C(2\varepsilon)^{1-t}(2M)^t$$

gilt. Weiter wird durch Konstruktion eines Gegenbeispiels dargelegt, daß der Exponent von ε nicht verbessert werden kann, was zur Folge hat, daß der Fehler einer Approximation auf Γ_2 nicht notwendig klein wird, obwohl die Daten dieser Näherungslösung nahe bei den Cauchy-Daten liegen. Daher wird eine Verfeinerung der Definition des Problems dahingehend vorgenommen, daß eine Näherungslösung die exakte Lösung nur außerhalb einer Umgebung von Γ_2 approximieren muß. Als Näherungsverfahren verwendet Fursikov eine ähnliche Methode der kleinsten Fehlerquadrate wie Falk/Monk, da auch hier ein Defekt minimiert wird. Eine Funktion, die das so festgelegte Minimierungsproblem löst, nennt Fursikov eine Quasi-Lösung (engl. "quasi-solution"), für deren Bestimmung ein konstruktiver Vorschlag gemacht wird. Schließlich studiert der Autor noch einige Eigenschaften des Quasi-Lösungsoperators wie etwa Stetigkeit und Stabilität.

Auch in der Veröffentlichung von S.I. Kabanikhin und A.L. Karchevsky ([KK95]) wird wie in den Arbeiten von Falk/Monk und Fursikov ein Defektfunktional minimiert, um ein leicht modifiziertes Cauchy-Problem (es werden Robin-Randbedingungen sowohl für das direkte wie das inverse Problem gefordert) für einen elliptischen Operator der Form

$$\operatorname{div}(k(x)\nabla u) - q(x)u = f$$

zu lösen. Zur Minimierung dieses Funktionals wird die Methode der konjugierten Gradienten eingesetzt, also ein iteratives Verfahren. Unter bestimmten Glattheitsvoraussetzungen an den Rand des betrachteten Gebiets und die auftretenden Funktionen zeigen die Autoren die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung sowie Konvergenz des Verfahrens gegen diese Lösung. In einem weiteren Abschnitt wird das Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung behandelt und im Gegensatz zur Vorgehensweise in dem zuvor beschriebenen allgemeineren Fall der Defekt in den Flußrandbedingungen und nicht mehr in den Dirichlet-Randbedingungen minimiert. Die Methode der konjugierten Gradienten wird jedoch beibehalten und für den Fall der Poisson-Gleichung explizit angegeben. Außerdem zeigen einige numerische Beispiele, die nur in Bild-, nicht aber in Tabellenform vorliegen, welche Ergebnisse grundsätzlich von der Methode zu erwarten sind.

Von allen bisher betrachteten Methoden wesentlich verschieden ist das Verfahren, das M.V. Klibanov und F. Santosa in ihrer Arbeit zum Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung vorstellen ([KS91]). Sie greifen dabei auf die sogenannte Methode der Quasi-Reversibilität ("quasi-reversibility") von Lattes und Lions ([LL69]) zurück. Diese Methode besteht darin, zu einem schlecht gestellten Problem P eine u. a. von einem Parameter ε abhängige Familie von gutgestellten Problemen P_ε so zu definieren, daß die Probleme P_ε gegen P konvergieren, falls ε gegen 0 geht, wobei Konvergenz der Probleme die Konvergenz der Lösungen u_ε von P_ε gegen die Lösung u von P meint. Die Autoren beschreiben nun diese Methode für das Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung und können im Gegensatz zu Lattes und Lions auch die Ordnung der Konvergenz zeigen. Die gefundene Familie der gutgestellten Probleme P_ε approximieren Klibanov und Santosa mit Hilfe einer Differenzenapproximation, bei der Standarddifferenzenquotienten erster und zweiter Ordnung zum Einsatz kommen. Die evtl. gestörten und damit nicht genügend glatten Daten werden mit Hilfe kubischer Splines geglättet. Für dieses Verfahren kann eine Fehlerabschätzung vom Carleman-Typ in Analogie zu den stetigen Resultaten hergeleitet werden. Die Ergebnisse numerischer Experimente werden vorgestellt, wobei besonders gute Erfolge erzielt werden können, wenn noch bestimmte zusätzliche Daten verfügbar sind.

M. Kubo (s. [Kub94]) betrachtet eine ähnliche Geometrie wie Fursikov in [Fur90]. Allerdings beschränkt er sich auf ein zweidimensionales Gebiet und betrachtet dort das Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung. Das wesentliche Ergebnis seiner Arbeit besteht in einer Stabilitätsabschätzung für das kontinuierliche Problem, wobei der entscheidende Punkt darin liegt, daß die abzuschätzende Funktion nur durch ihre Randwerte abgeschätzt werden kann, so daß es nicht notwendig ist, eine globale Beschränktheitsbedingung zu fordern, um Stabilität zu sichern. Stattdessen genügt es — ähnlich wie bei Falk/Monk in [FM86] — Beschränktheit der L_2 -Norm auf dem Rand zu fordern. Diese Überlegungen werden als Ausgangspunkt benutzt, um das Problem mit der sogenannten Rand-Element-Methode (engl. "boundary element

method" (BEM)) anzugehen. Dazu wird das Problem in ein System von Integralgleichungen für Randintegrale überführt, die anschließend diskretisiert werden und auf ein lineares Gleichungssystem führen. Dies wird jedoch nicht näher ausgeführt, sondern lediglich einige numerische Beispiele präsentiert und im Übrigen auf entsprechende Literatur verwiesen, wie z. B. [KIT93] und [Iso90].

In einer im Jahr 1997 erschienenen Arbeit von H. Han und H.-J. Reinhardt ([HR97]) wird ein Cauchy-Problem für einen allgemeinen elliptischen Operator auf einem zylindrischen Gebiet $\Omega \times (0, 1)$ betrachtet, wobei als Cauchy-Daten homogene Rand- und inhomogene "Anfangsbedingungen" vorgegeben werden. Durch Betrachtung eines bestimmten Energiefunktionals, für das eine Abschätzung vom Hölder-Typ hergeleitet wird, kann ein Stabilitätssatz bewiesen werden, wobei vorausgesetzt wird, daß das Energiefunktional auf dem Randstück $\Omega \times \{1\}$, auf dem man die Lösung sucht, beschränkt bleibt. Das Stabilitätsergebnis wird sowohl im Raum H^* als auch mit einem jeweils modifizierten Funktional in den Räumen H^1 bzw. H_*^2 erreicht. Am Beispiel der H^1 -Stabilität wird im Anschluß gezeigt, wie die gefundenen Ergebnisse zur Regularisierung des Cauchy-Problems eingesetzt werden können. Das Problem wird dabei im wesentlichen als Minimierungsproblem für das Energiefunktional auf $\Omega \times \{1\}$ mit Nebenbedingungen formuliert. Dieses Minimierungsproblem wurde in numerischen Experimenten mit Hilfe eines Programms von K. Schittkowski, das auf einem Algorithmus basiert, der auf M.J.D. Powell (s. [Pow83]) zurückgeht, gelöst, wobei Resultate von relativ hoher Genauigkeit für das klassische Hadamard-Beispiel (vgl. Satz 1.3.2) erzielt werden konnten.

Ein diskretes Analogon zum Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung auf dem Einheitsquadrat im \mathbb{R}^2 wird in einem weiteren Paper von H.-J. Reinhardt, H. Han und Dinh Nho Hào, das als diskrete Version von [HR97] angesehen werden kann, behandelt (s. [RHH99]). Es wird gezeigt, daß die Lösung dieses mit Hilfe des üblichen Fünfpunkt-Differenzenoperators definierten Problems eine Stabilitätsungleichung erfüllt, falls ein zuvor angegebenes diskretes Funktional beschränkt bleibt. Wesentlich geht hierbei die zuvor gezeigte logarithmische Konvexität dieses Funktionals ein. Ähnlich wie in der Arbeit über das kontinuierliche Problem (s.o.) wird dieses Funktional dann auch bei $y = 1$ unter Hinzunahme von Nebenbedingungen minimiert, um so eine Näherungslösung zu erhalten. Für dieses Verfahren werden Fehlerabschätzungen bewiesen, die zum einen den Diskretisierungsfehler und zum anderen den Regularisierungsfehler behandeln. Die praktische Relevanz der Methode wird auch hier an numerischen Beispielen für die Poisson-Gleichung mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen in Bild- und Tabellenform demonstriert.

Weitere, mehr theoretische Aspekte finden sich in den allgemeineren, grundlegenden Arbeiten von Carleman [Car39], Calderón [Cal58], Hörmander [Hoe76] und Nirenberg [Nir72]. Zu Existenz- und Eindeutigkeitsätzen ist ebenfalls eine Fülle von Literatur erschienen. Beispielhaft seien hier nur einige genannt, wie etwa [Aro57], [Nir57], [Pro60], [Dou60], [Kum62], [Sch65], [Wat71], [Sch73], [MK74], [KP79], [Hoe83], [RF87]. Verschiedene Stabilitätsabschätzungen finden sich unter anderem in [Joh55], [Joh60], [Mil64], [Lav67], [CD68], [LV86], [Bau87] oder zuletzt in [HH03]. Letztgenannte Arbeit ist bisher nach unserem Kenntnisstand die einzige, in der eine L_p -Theorie ($p \neq 2$) aufgebaut wird, während sich alle anderen Arbeiten in L_2 bewegen. Für eine ausführliche Bibliographie, die außer den genannten eine Reihe weiterer analytischer Arbeiten enthält, siehe die Arbeit von Hào, Van und Gorenflo

[HVG92].

Zu beachten ist weiterhin, daß es einige verwandte bzw. äquivalente Probleme zum Cauchy-Problem für elliptische Differentialgleichungen, wie etwa bestimmte Integralgleichungen erster Art oder das Problem der analytischen Fortsetzung ([Do60], [Can64], [CM65], [CD68]) gibt, zu denen ebenfalls eine Vielzahl von Veröffentlichungen existiert.

Selbstverständlich erheben wir mit der vorangehenden kurzen Übersicht keinen Anspruch auf Vollständigkeit, ein gewisser Überblick über das vorhandene Material ist aber — vor allem, was die numerischen Aspekte angeht — sicher gewährleistet.

1.4 Übersicht und Zusammenfassung der Arbeit

Um dem Leser die Möglichkeit zu geben, sich von vorneherein über den Inhalt der vorgelegten Arbeit im Groben orientieren zu können und insbesondere die inhaltliche Funktion der einzelnen Kapitel für den Gesamtzusammenhang sowie den logischen Aufbau der Arbeit in Kürze nachvollziehen zu können, werden wir im folgenden eine knappe Zusammenfassung des Inhalts jedes Kapitels und seiner Stellung im Gesamtkontext angeben.

Bereits begonnen haben wir unsere Arbeit in **Kapitel 1** mit einer Einführung in grundlegende Themen, die in gewisser Weise Voraussetzung zum Verständnis der Problemstellung sind, wie etwa partielle Differentialgleichungen, schlecht gestellte Probleme und eine Definition des Cauchy-Problems für die Poisson-Gleichung. Besonderes Schwergewicht haben wir hierbei auf Anwendungen sowohl elliptischer Differentialgleichungen im allgemeinen als auch des Cauchy-Problems für solche Gleichungen im besonderen gelegt. Die große praktische Bedeutung, die der Betrachtung und Lösung solcher Probleme zukommt, konnten wir an drei Beispielen aus der Geophysik, der Medizin und der Eisenverhüttung eindrücklich bestätigen. Die Einleitung schließen wir mit einem ausführlichen Literaturüberblick mit dem Schwerpunkt auf numerischen Arbeiten und dieser Übersicht.

Zum Verständnis der weiteren Gliederung bemerken wir nun zuvorderst, daß die nachfolgenden Kapitel sich in **drei größeren Einheiten** unterteilen lassen, nämlich in einen **ersten Teil**, der sich mit der Herleitung und Analyse einer Linienmethode für das Cauchy-Problem für die Poisson- beziehungsweise Laplace-Gleichung beschäftigt und die **Kapitel 2 bis 4** umfaßt, einen sich über **Kapitel 5 bis 7** erstreckenden **zweiten Teil**, der die erzielten Ergebnisse auf eine allgemeinere elliptische Differentialgleichung mit einem Diffusionskoeffizienten verallgemeinert, wobei erheblich umfangreichere theoretische Grundlagen als für den Fall des Laplace-Operators benötigt werden, und einen **dritten Teil**, der für beide genannten Fälle die Ergebnisse praktischer numerischer Berechnungen, die wir mittels Linienmethode durchgeführt haben, in **Kapitel 8** sowie in **Anhang A** dokumentiert.

Das auf diese Zusammenfassung folgende **Kapitel 2** beginnt mit der Beschreibung der Problemstellung und einer Reduktion des inhomogenen Cauchy-Problems für die Poisson-Gleichung auf ein halbhomogenes Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung, für das im Anschluß durch Semidiskretisierung (nur in x -Richtung) eine Linienmethode hergeleitet wird. Nach Entkoppelung des entstehenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, die aufgrund der genauen Kenntnis der Eigenwerte und Eigenvektoren der zum zentralen

Differenzenquotienten zweiter Ordnung gehörigen Matrix vergleichsweise glatt vorstatten geht, können wir eine explizite Lösungsdarstellung für die Linienmethode zeigen (siehe (2.7) beziehungsweise (2.8)).

Nach einigen vorbereitenden Resultaten, mit denen wir das **Kapitel 3** eröffnen, gelingt zunächst der Beweis der Konvergenz der Linienmethode für das Modellbeispiel nach J. Hadamard, wenn man ungestörte Daten vorliegen hat (Beispiel 3.1.8). Anschließend definiert man auf der Grundlage einfacher Hilfsergebnisse aus der Fourieranalysis die Datenräume D_M (Definition 3.3.1) und ihr diskretes Pendant D_M^h , die Funktionen enthalten, deren Fourier-sinuentwicklung (spätestens) nach M Summanden abbricht und die somit nur aus endlich vielen (niedrigen) Frequenzen zusammengesetzt sind. Während ein auf der Reihendarstellung der Lösung des kontinuierlichen Problems (Satz 3.4.1) basierender Beweis der Konvergenz der Linienmethode für beliebige, ungestörte Daten nur unter relativ künstlichen Voraussetzungen an diese Daten gelingt (Satz 3.4.5) weshalb wir diese Richtung nicht weiter verfolgen, kann man für ungestörte Daten in den endlichdimensionalen Räumen D_M ohne weitere Voraussetzungen die Konvergenz der Linienmethode für $h \rightarrow 0$ zeigen (Satz 3.4.7). Die Konvergenzordnung ist dabei der Genauigkeit des zentralen Differenzenquotienten entsprechend $O(h^2)$. In einem anschließenden Negativbeispiel demonstrieren wir, daß diese Resultate im Fall gestörter Daten jedoch noch nicht ausreichen, da sich auch bei Verwendung der Linienmethode interessanterweise gerade für die kleinen Werte von h die Schlechtgestellttheit des Cauchy-Problems voll auswirkt, so daß die Lösung durch kleine Datenstörung völlig unbrauchbar werden kann (Beispiel 3.5.3). Der von manchen Autoren wie etwa Berntsson (siehe [Ber02]) an dieser Stelle vorgeschlagene Weg der Regularisierung durch geeignete (genügend große) Wahl des Diskretierungsparameters erscheint zwar auf den ersten Blick einleuchtend, erforderte jedoch in den von uns durchgeführten Experimenten unter Umständen zu große Werte für h , so daß wir einen anderen, unseres Erachtens analytisch und numerisch ergiebigeren Weg eingeschlagen haben, der in Abschnitt 3.6 zunächst für Daten aus D_M beschränkt wird. Man kann nämlich zeigen, daß auf diesen endlichdimensionalen Räumen der Lösungsoperator des Cauchy-Problems stetig ist (Satz 3.6.1), das Problem also bedingt gutgestellt ist, und daß man, falls man Daten aus D_M stört, sie anschließend wieder auf D_M projiziert und mit diesen Daten die Lösung der Linienmethode ermittelt, Konvergenz dieser Lösung gegen die wahre Lösung des kontinuierlichen Problems zu ungestörten Daten erhält, wenn h und die (maximale) Störung ε gegen 0 konvergieren (Folgerung 3.6.5 zeigt dies, falls die Daten auf Σ_1 nur aus einer inhomogenen Neumann-Bedingung bestehen, Folgerung 3.6.7 verallgemeinert dieses Resultat auf zusätzliche inhomogene Dirichlet-Daten).

Die bisher relativ starken Voraussetzungen für die Konvergenz der Linienmethode, nämlich, daß die Cauchy-Daten einem der endlichdimensionalen Räume D_M entstammen, können wir in **Kapitel 4** noch entscheidend abschwächen, indem wir nur noch die in der Literatur übliche Bedingung, nämlich eine Normbeschränktheit der Lösung des kontinuierlichen Problems fordern (siehe Bedingung (4.41)). Unter dieser Bedingung und der Voraussetzung, daß die Fourierkoeffizienten der Cauchy-Daten rasch genug gegen 0 konvergieren (siehe Bedingung (4.21), deren Notwendigkeit für den von uns eingeschlagenen Beweisweg wir in Bemerkung 4.1.16 anhand eines Beispiels diskutieren), gelingt uns der Beweis eines Stabilitätssatzes für das kontinuierliche Problem (Satz 4.1.20), der sich zwar schon bei M. M. Lavrentiev in

[Lav56] findet, dort allerdings lückenhaft durchgeführt ist. Wesentliches Beweishilfsmittel ist dabei der Nachweis der logarithmischen Konvexität einer eng mit der Norm der Lösung verbundenen Funktion F (Folgerung 4.1.17). Nach dieser relativ gründlichen Untersuchung des kontinuierlichen Problems beweisen wir dann unter den oben diskutierten abgeschwächten Voraussetzungen nach Betrachtung des Projektionsfehlers bei der Orthogonalprojektion auf D_M (Satz 4.2.3) und unter Verwendung sowohl des gerade gezeigten kontinuierlichen Stabilitätssatzes als auch der in Kapitel 2 für den endlichdimensionalen Fall erzielten Ergebnisse eine Fehlerabschätzung (Satz 4.2.6) und einen Konvergenzsatz (Satz 4.2.8) für die Linienmethode, der auf einer (explizit angegebenen) geeigneten Wahl von M in Abhängigkeit von ε basiert.

Unsere bis dahin ausschließlich auf das Cauchy-Problem für die Poisson- beziehungsweise Laplace-Gleichung ausgerichteten Untersuchungen erweitern wir im **zweiten Teil** ab **Kapitel 5** dahingehend, daß nun auch ein allgemeinerer elliptischer Differentialoperator, der einen von x abhängigen Diffusionskoeffizienten $a(x)$ enthält, zugelassen wird und für diesen Fall ebenfalls durch Semidiskretisierung eine Linienmethode formuliert wird. Die Entkopplung des entstehenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen gestaltet sich in diesem Fall jedoch wesentlich schwieriger als zuvor, da die Eigenwerte und Eigenvektoren der zugehörigen Matrix B_a nicht mehr explizit bekannt sind, somit auch nicht mehr unmittelbar in die Linienmethode einfließen können, sondern numerisch approximiert werden müssen, nachdem man theoretisch Realität und Vorzeichen der Eigenwerte (B_a ist nicht notwendig symmetrisch) geklärt hat (Lemma 5.2.8 (c)) und daraus in (5.20) eine erste explizite Darstellung der Lösung der Linienmethode hergeleitet hat. Um die theoretische Analyse fortsetzen zu können, benötigt man außerdem eine Abschätzung dieser Eigenwerte, die mit Hilfe von Minimum-Maximumprinzipien gelingt (Satz 5.3.26), nachdem man mittels Hilbertraummethoden gezeigt hat, daß die Eigenwerte von $-B_a$ gleich den Eigenwerten eines diskreten Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems für den durch die Linienmethode definierten Differenzenoperator L_h sind (Folgerung 5.3.7 in Verbindung mit Satz 5.3.11) und eine für spätere Fragestellungen nötige Untersuchung der diskreten Fredholmgleichung (5.52), die wir mit Hilfe der diskreten Greenschen Funktion aus Satz 5.3.15 durchführen, abgeschlossen hat. Ausdrücklich verweisen wir auch noch auf die alternative Lösungsdarstellung (5.60) der Linienmethode, die aus diesen Untersuchungen hervorgeht und nachher für den Konvergenzbeweis von zentraler Bedeutung sein wird.

Nachdem also in Kapitel 5 das diskrete Problem (insbesondere in Form eines diskreten Sturm-Liouville Problems) im Vordergrund stand, besteht nun die Notwendigkeit, auch das kontinuierliche Problem, das man mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen angeht, zu untersuchen. Das sich daraus ergebende Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem und die zugehörigen klassischen Sätze stellen wir (ohne die Beweise auszuführen, sondern lediglich auf die Literatur verweisend) zu Beginn von **Kapitel 6** dar, soweit wir sie im folgenden benötigen werden. Als wesentliches Resultat für unsere Untersuchungen erhalten wir daraus anschließend die Lösungsdarstellung (6.26) des kontinuierlichen Problems. Die Verallgemeinerung des Stabilitätssatzes für das kontinuierliche Problem auf die betrachtete Differentialgleichung mit Diffusionskoeffizient führen wir in Abschnitt 6.3.2 aus und erhalten so Satz 6.3.6.

Um nun in **Kapitel 7** die Konvergenz der Lösung der Linienmethode gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems zu unter Umständen gestörten Cauchy-Daten beweisen zu können, benötigt man im Unterschied zur Situation, die man für den Laplace-Operator vorgefunden hat, umfangreiche zusätzliche Überlegungen. Sind im letztgenannten Fall nämlich Eigenwerte und Eigenvektoren im diskreten wie im kontinuierlichen Fall bekannt und sind die diskreten Eigenvektoren schlicht die diskretisierten kontinuierlichen Eigenfunktionen, so ist keine dieser günstigen Eigenschaften für den allgemeineren Differentialoperator mit Koeffizient $a(x)$ notwendigerweise noch gegeben. Somit ist eine Untersuchung des Verhältnisses von diskreten und kontinuierlichen Eigenwerten und -vektoren vonnöten. Man zeigt zunächst mit Hilfe von Minimum-Maximumprinzipien die Konvergenz der diskreten gegen die kontinuierlichen Eigenwerte (siehe Satz 7.1.2 und Folgerung 7.1.3) und anschließend darauf aufbauend die Konvergenz der diskreten gegen die kontinuierlichen Eigenvektoren (Satz 7.1.11), wobei jedesmal nicht nur die Tatsache der Konvergenz selbst, sondern auch eine Konvergenzordnung bewiesen wird ($O(h)$ für die Eigenwerte und $O(\sqrt{h})$ in der Maximumnorm beziehungsweise $O(h)$ in der $\|\cdot\|_{0,a}$ -Norm für die Eigenvektoren). Als wesentliches Hilfsmittel für die Konvergenz der Eigenvektoren benutzt man, daß der Abschneidefehler für den diskreten Fredholm-Operator mit der Ordnung $O(h)$ gegen 0 konvergiert (Satz 7.1.9). Nachdem man somit Klarheit über die Eigenwerte und Eigenvektoren gewonnen hat, definiert man zunächst in Analogie zum Vorgehen im Fall des Laplace-Operators endlichdimensionale Datenräume D_M^a und beweist für Neumann-Daten aus diesen Räumen einen Konvergenzsatz für ungestörte Daten (Satz 7.2.8), bevor man unter gleichartigen Voraussetzungen wie schon zuvor, nämlich einer Normbeschränktheitsbedingung (siehe (7.141)) und hinreichend schneller Konvergenz der verallgemeinerten Fourierkoeffizienten der Cauchy-Daten bezüglich des aus den Eigenfunktionen der kontinuierlichen Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe bestehenden a -Orthonormalsystems (siehe (6.28)), Fehlerabschätzung (Satz 7.4.4) und Konvergenzsatz (Satz 7.4.6) in Analogie zu den Ergebnissen für den Laplace-Operator auch im betrachteten allgemeineren Kontext beweisen kann. Die Konvergenzordnung des Diskretisierungsfehleranteils ist dabei schlechter als vorher, was man auch erwartet, da der bei der Linienmethodenapproximation verwendete Differenzenquotient nicht so genau sein kann, wie der einfache zentrale Differenzenquotient zweiter Ordnung, den wir im Falle der Poisson-beziehungsweise Laplace-Gleichung für die Approximation der zweiten Ableitung in x -Richtung verwendet haben. Für die übrigen Fehleranteile (also Projektions- beziehungsweise Regularisierungsfehler und Datenfehler) verändern sich zwar die Konstanten, die grundlegenden Eigenschaften dieser Anteile bleiben ansonsten aber erhalten.

Neben den oben zusammengefaßten, sehr zufriedenstellenden theoretischen Resultaten, haben wir auch praktische Experimente mit der Linienmethode zu zahlreichen Beispielen durchgeführt. Die durchweg den theoretischen Erkenntnissen entsprechenden numerischen Ergebnisse haben wir in **Kapitel 8** dokumentiert, und zwar sowohl für den Fall des Laplace-Operators wie für den Fall einer allgemeineren elliptischen Gleichung. Auch die Anwendung der Linienmethode auf inhomogene Cauchy-Probleme haben wir anhand mehrerer Beispiele ausführlich beschrieben und können hierzu sehr brauchbare Ergebnisse präsentieren. Man beachte, daß wir in diesem Kapitel für die verschiedenen Fälle auch jeweils eine zusammenfassende Beschreibung des sich aus der Linienmethode ergebenden Algorithmus angeben,

die es jedem Leser mit Programmierkenntnissen ermöglichen sollte, die Linienmethode mit relativ geringem Aufwand implementieren zu können. Im **Anhang A** schließlich sind die Bilder und Tabellen zu den numerischen Ergebnisse enthalten, auf die in Kapitel 8 Bezug genommen wird.

Wir schließen die Arbeit mit dem Verzeichnis der verwendeten **Literatur**, einem **Stichwortindex** und einer **Danksagung**.

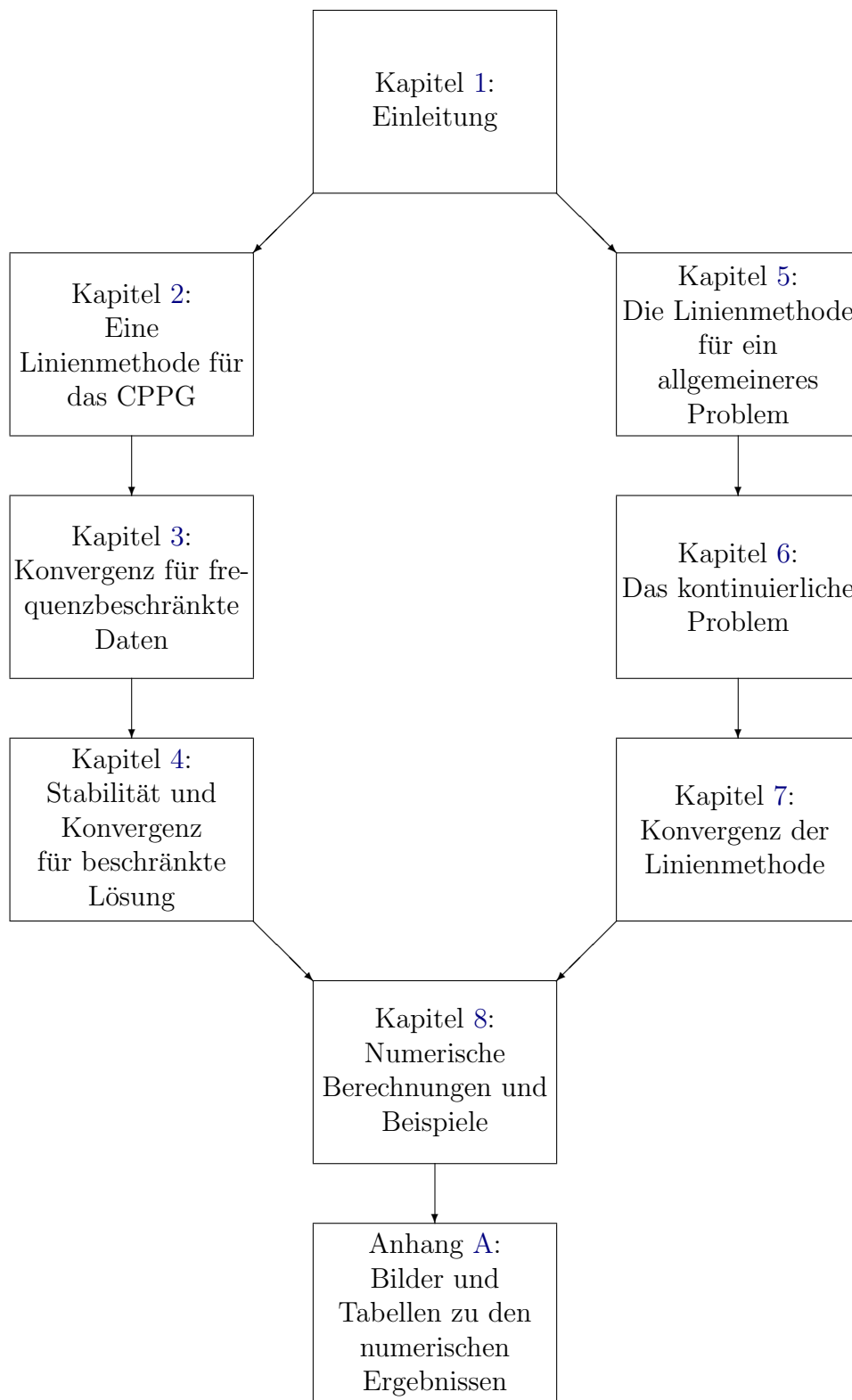


Abbildung 1.10: Graphische Darstellung des Aufbaus der vorliegenden Arbeit

Teil I

Der Fall des Cauchy-Problems für die Poisson-Gleichung (CPPG)

Kapitel 2

Eine Linienmethode für das Cauchy-Problem für die Poisson-Gleichung

2.1 Das Cauchy-Problem für die Poisson-Gleichung und seine Reduktion auf ein halbhomogenes Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung

Zu Beginn stellen wir noch einmal klar die Problemstellung heraus, die wir in diesem und den folgenden Kapiteln bis einschließlich Kapitel 4 betrachten wollen. Dabei gehen wir vom allgemeinen Cauchy-Problem für die Poisson-Gleichung aus und zeigen, daß dieses Problem auf ein halbhomogenes Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung reduziert werden kann.

Problem 2.1.1 (Cauchy-Problem für die Poisson-Gleichung, allgemeine Form)

Definiere

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq r_{max}\}$$

sowie

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\} \\ \Sigma_2 &= \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq r_{max}\} \\ \Sigma_3 &= \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq r_{max}\} \\ \Sigma_4 &= \{(x, r_{max}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\} \quad .\end{aligned}$$

Gesucht ist eine Funktion $u \in C^2(\text{int}(\Omega)) \cap C(\Omega)$ mit

$$\Delta u = f \text{ in } \text{int}(\Omega),$$

die den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u &= f_1 \text{ auf } \Sigma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \phi_1 \text{ auf } \Sigma_1 \\ u &= f_2 \text{ auf } \Sigma_2 \\ u &= f_3 \text{ auf } \Sigma_3 \end{aligned}$$

genügt. Die Neumann-Daten ϕ_1 bezeichnen wir auch als Cauchy-Daten.

Bemerkung 2.1.2 Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir im Fall des in Problemstellung 2.1.1 beschriebenen Problems annehmen, daß man homogene Dirichlet-Daten sowie eine homogene rechte Seite der Differentialgleichung vorliegen hat, mit anderen Worten, daß

$$f = f_1 = f_2 = f_3 = 0$$

gilt. Andernfalls kann man nämlich eine Lösung dieses Problems in der Form

$$u = v + w$$

erhalten, wobei v Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \quad \text{in } \text{int}(\Omega) \\ v &= 0 \quad \text{auf } \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \phi_1 - \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{auf } \Sigma_1 \end{aligned}$$

ist und w das (direkte) Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta w &= f \quad \text{in } \text{int}(\Omega) \\ w &= f_1 \quad \text{auf } \Sigma_1 \\ w &= f_2 \quad \text{auf } \Sigma_2 \\ w &= f_3 \quad \text{auf } \Sigma_3 \\ w &= (1-x) \cdot f_2(r_{\max}) + x \cdot f_3(r_{\max}) \quad \text{auf } \Sigma_4 \end{aligned}$$

löst. Wahlweise kann man offenbar auch nur einen Teil der inhomogenen Terme zur Berechnung von w heranziehen und den anderen Teil bei der Berechnung von v berücksichtigen.

Die vorangegangene Bemerkung erlaubt es uns, die Problemstellung spezieller zu formulieren, was die nachfolgenden Untersuchungen wesentlich erleichtern wird:

Problem 2.1.3 (CPLG mit halbhomogenen Dirichlet-Bedingungen)

Gesucht ist eine Funktion $u \in C^2(\text{int}(\Omega)) \cap C(\Omega)$ mit

$$\Delta u = 0 \text{ in } \text{int}(\Omega), \tag{2.1}$$

die den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u &= f_1 \text{ auf } \Sigma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \phi_1 \text{ auf } \Sigma_1 \\ u &= 0 \text{ auf } \Sigma_2 \\ u &= 0 \text{ auf } \Sigma_3 \end{aligned}$$

genügt.

Bemerkung 2.1.4 In unseren Untersuchungen werden wir der größeren Allgemeinheit wegen zunächst insofern noch nicht die volle Tragweite von Bemerkung 2.1.2 ausnutzen, als wir am unteren Rand Σ_1 auch inhomogene Dirichlet-Daten f_1 zulassen werden. An geeigneter Stelle werden wir jeweils darauf hinweisen, welche Konsequenzen der Fall $f_1 = 0$ nach sich zieht.

Im nachfolgenden Abschnitt werden wir nun für das halbhomogene Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung eine Linienmethode entwickeln.

2.2 Herleitung und Formulierung des Verfahrens

2.2.1 Diskretisierung und Umformulierung der Problemstellung

Die Idee der folgenden Linienmethode ist es, eine Diskretisierung in x -Richtung einzuführen und anschließend eine explizite Lösungsdarstellung des entstehenden Anfangswertproblems für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen anzugeben.

Sei dazu

$$N \in \mathbb{N}, h = \frac{1}{N} \quad .$$

Mit Hilfe der Punkte

$$x_i = ih, i = 0, \dots, N$$

führt man dann eine Diskretisierung in x -Richtung ein. Approximiert man jetzt die zweite partielle Ableitung von u in x -Richtung durch den zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung, so kann man den Laplace-Operator durch

$$\Delta_h u(x_i, y) = u''_i(y) + \frac{u_{i-1}(y) - 2u_i(y) + u_{i+1}(y)}{h^2}$$

annähern. Hierbei ist $u_i \approx u(x_i, y), i = 0, \dots, N$.

Die Laplace-Gleichung (2.1) auf $\text{int}(\Omega)$ kann damit approximiert werden durch

$$\Delta_h u(x_i, y) = 0,$$

wodurch man auf das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung geführt wird:

$$u_i'' + \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = 0, \quad i = 1, \dots, N-1$$

In Matrixschreibweise erhält man, wenn man $u_0 = u_N = 0$ beachtet (siehe Problemstellung 2.1.3) und $U := (u_1, \dots, u_{N-1})$ sowie

$$D_2 := \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N-1, N-1} \quad (2.2)$$

definiert, folgende Approximation des Cauchy-Problems für die Laplace-Gleichung:

Problem 2.2.1 (AWP für ein gekoppeltes System gew. Differentialgleichungen)

Finde $N-1$ auf $[0, r_{max}]$ definierte Funktionen u_i , $i = 1, \dots, N-1$, so daß

$$U'' + D_2 U = 0 \quad (2.3)$$

gilt, und die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} U(0) &:= (u_1(0), \dots, u_{N-1}(0)) = (f_1(x_1), \dots, f_1(x_{N-1})) =: F_1 \\ U'(0) &:= (u_1'(0), \dots, u_{N-1}'(0)) = (\phi_1(x_1), \dots, \phi_1(x_{N-1})) =: \Phi_1 \end{aligned}$$

erfüllt sind.

2.2.2 Die Matrix D_2

Nun geben wir einige Eigenschaften der Matrix D_2 an, die im folgenden von Nutzen sein werden (vgl. auch [Rei97] S.58ff). Wir benötigen zum Beweis dieser Eigenschaften einen Hilfssatz aus der linearen Algebra, den wir vorab der Vollständigkeit halber zitieren:

Hilfssatz 2.2.2 Gegeben sei eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit paarweise verschiedenen (reellen) Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und zugehörigen Eigenvektoren v_1, \dots, v_n . Dann bilden die Eigenvektoren eine Orthogonalbasis des \mathbb{R}^n .

Beweis:

Sei zum Beweis der Orthogonalität $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\lambda_i - \lambda_j)(v_i, v_j)_e &= \lambda_i(v_i, v_j)_e - \lambda_j(v_i, v_j)_e = (Av_i, v_j)_e - (v_i, Av_j)_e \\ &\stackrel{A \text{ symm.}}{=} (v_i, Av_j)_e - (v_i, Av_j)_e = 0 \end{aligned}$$

Da die Eigenwerte paarweise verschieden sind, erhält man $(v_i, v_j)_e = 0$. Für die Basiseigenschaft hat man nur die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, da jedes linear unabhängige Vektorsystem der Länge n eine Basis des \mathbb{R}^n bildet und macht den Ansatz:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0 \\ \implies & \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v_j \right)_e = 0 \quad , \quad 1 \leq j \leq n \\ \xrightarrow{\text{Orth.}} & \alpha_j \underbrace{(v_j, v_j)_e}_{>0} = 0 \quad , \quad 1 \leq j \leq n \\ \implies & \alpha_j = 0 \quad , \quad 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Lemma 2.2.3 (Eigenwerte, Eigenvektoren und weitere Eigenschaften von D_2)
Die Matrix D_2 hat die Eigenwerte

$$\lambda_j = -4N^2 \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2N} \right) = -\frac{4}{h^2} \sin^2 \left(jh \frac{\pi}{2} \right) \quad , \quad j = 1, \dots, N-1$$

mit zugehörigen Eigenvektoren

$$\begin{aligned} & v_j \\ &= \left(\sin \left(\frac{j\pi}{N} \right), \sin \left(\frac{j\pi \cdot 2}{N} \right), \dots, \sin \left(\frac{j\pi(N-1)}{N} \right) \right)^T \\ &= (\sin(jkh\pi))_{k=1, \dots, N-1}^T \quad , \quad j = 1, \dots, N-1 \quad . \end{aligned}$$

Die Vektoren v_j bilden eine Orthogonalbasis des \mathbb{R}^{N-1} . Setzt man mit der euklidischen Norm $|\cdot|_e$

$$w_j = \frac{v_j}{|v_j|_e} \quad , \quad j = 1, \dots, N-1 \quad ,$$

dann bilden die w_j eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^{N-1} . Es gilt

$$w_{j,k} = \frac{\sin \left(\frac{jk\pi}{N} \right)}{\sqrt{\frac{N}{2}}} = \sqrt{2h} \sin(jkh\pi) \quad , \quad j, k = 1, \dots, N-1 \quad .$$

D_2 ist symmetrisch, negativ definit und es gilt $\rho(D_2) \leq \frac{4}{h^2}$. Weiter ist die Matrix $W = (w_{j,k})_{j,k=1, \dots, N-1}$, die die normierten Eigenvektoren von D_2 als Spalten enthält, ebenfalls symmetrisch, orthogonal (und daher ist $W = W^T = W^{-1}$) und es gilt

$$W D_2 W^{-1} = D := \text{diag}(\lambda_j)_{j=1, \dots, N-1} \quad .$$

Beweis:

Es ist für $1 \leq k \leq N - 1$ zu zeigen:

$$\sin\left(\frac{j\pi(k-1)}{N}\right) - 2\sin\left(\frac{j\pi k}{N}\right) + \sin\left(\frac{j\pi(k+1)}{N}\right) = -4\sin^2\left(\frac{j\pi}{2N}\right) \cdot \sin\left(\frac{j\pi k}{N}\right)$$

Man setzt also an:

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{j\pi(k-1)}{N}\right) - 2\sin\left(\frac{j\pi k}{N}\right) + \sin\left(\frac{j\pi(k+1)}{N}\right) \\ \stackrel{\text{Add.th.}}{=} & \left(\sin\left(\frac{j\pi k}{N}\right)\cos\left(\frac{j\pi}{N}\right) - \sin\left(\frac{j\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{j\pi k}{N}\right)\right) - 2\sin\left(\frac{j\pi k}{N}\right) \\ & + \left(\sin\left(\frac{j\pi k}{N}\right)\cos\left(\frac{j\pi}{N}\right) + \sin\left(\frac{j\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{j\pi k}{N}\right)\right) \\ = & -2\sin\left(\frac{j\pi k}{N}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right)\right) \\ \stackrel{\text{Add.th.}}{=} & -2\sin\left(\frac{j\pi k}{N}\right)\left(1 - \cos^2\left(\frac{j\pi}{2N}\right) + \sin^2\left(\frac{j\pi}{2N}\right)\right) \\ = & -4\sin^2\left(\frac{j\pi}{2N}\right) \cdot \sin\left(\frac{j\pi k}{N}\right) \end{aligned}$$

Die Orthogonalität der v_j , $1 \leq j \leq N - 1$, folgt sofort aus Hilfssatz 2.2.2 und aus der Orthogonalität der v_j trivialerweise die Orthonormalität der w_j , $1 \leq j \leq N - 1$. Damit ist die Aussage über Eigenwerte und Eigenvektoren von D_2 bewiesen. Hieraus kann man unmittelbar die weiteren Aussagen über Symmetrie (sofort an der Matrix ablesbar) und den Spektralradius schlußfolgern. Die negative Definitheit erhält man über die Negativität der Eigenwerte aus

$$(D_2x, x)_e = \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j(x, w_j)_e^2 < 0, \quad x \neq 0 \quad .$$

□

2.2.3 Entkoppelung des Problems und explizite Lösungsdarstellung

Wir multiplizieren nun Gleichung (2.3) von links mit W und erhalten die folgende äquivalente Formulierung dieser Gleichung:

$$\begin{aligned} & WU'' + WD_2U = 0 \\ \iff & WU'' + \underbrace{WD_2W^{-1}}_{=D}WU = 0 \\ \iff & (WU)'' + D(WU) = 0 \\ \stackrel{V:=WU}{\iff} & V'' + DV = 0, \quad V = (v_1, \dots, v_{N-1}) \end{aligned}$$

$$\iff v_i'' + \lambda_i v_i = 0, \quad i = 1, \dots, N-1$$

Damit hat man das vorliegende System entkoppelt und die Problemstellung weiter vereinfacht.

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist ein Fundamentalsystem der hier auftretenden Differentialgleichung zweiter Ordnung gut bekannt, die allgemeine Lösung hat die Form:

$$v_i(y) = \xi_i \exp(\sqrt{-\lambda_i} y) + \eta_i \exp(-\sqrt{-\lambda_i} y), \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (2.4)$$

Wir betrachten nun die Randbedingungen, um die Koeffizienten $\xi_i, \eta_i, i = 1, \dots, N-1$ zu bestimmen.

Es ist

$$v_i(0) = \xi_i + \eta_i \quad \text{und} \quad v_i'(0) = (\xi_i - \eta_i)\sqrt{-\lambda_i} \quad .$$

Daher muß mit $\Xi := (\xi_1, \dots, \xi_{N-1}), H := (\eta_1, \dots, \eta_{N-1})$ gelten:

$$\begin{aligned} U(0) &= F_1 \\ \iff (W^{-1}V)(0) &= F_1 \\ \iff V(0) &= WF_1 \\ \iff \Xi + H &= WF_1 \end{aligned}$$

Analog erhält man:

$$\begin{aligned} U'(0) &= \Phi_1 \\ \iff (W^{-1}V)'(0) &= \Phi_1 \\ \iff V'(0) &= W\Phi_1 \\ \iff \xi_i - \eta_i &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{-\lambda_i}} \sum_{j=1}^{N-1} w_{i,j} \phi_1(x_j)}_{=(W\Phi_1)_i}, \quad i = 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Als Lösung des entstehenden Gleichungssystems ergibt sich ($1 \leq k \leq N-1$)

$$\begin{aligned} &\xi_k \\ &= \frac{\left(W \left(F_1 + \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}} \Phi_1 \right) \right)_k}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\sin(kjh\pi)}{\sqrt{\frac{1}{2h}}} \left((F_1)_j + \frac{1}{h \sin(kh\frac{\pi}{2})} (\Phi_1)_j \right) \\ &= \sqrt{\frac{h}{2}} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sin(kjh\pi) (F_1)_j + \frac{h \sin(kjh\pi)}{2 \sin(kh\frac{\pi}{2})} (\Phi_1)_j \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

sowie

$$\begin{aligned}
& \eta_k \\
&= \frac{\left(W \left(F_1 - \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}} \Phi_1 \right) \right)_k}{2} \\
&= \sqrt{\frac{h}{2}} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sin(kjh\pi)(F_1)_j - \frac{h \sin(khj\pi)}{2 \sin(kh\frac{\pi}{2})} (\Phi_1)_j \right) . \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Wir setzen die in (2.5) und (2.6) gewonnenen Werte $\xi_k, \eta_k, 1 \leq k \leq N-1$ in 2.4 ein und damit ergibt sich folgende explizite Lösungsdarstellung auf jeder Linie:

$$\begin{aligned}
& u_i(y) \\
&= (WV)_i(y) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\sin(ikh\pi)}{\sqrt{\frac{1}{2h}}} \left(\xi_k \exp(\sqrt{-\lambda_k}y) + \eta_k \exp(-\sqrt{-\lambda_k}y) \right) \right) \\
&= h \sum_{k=1}^{N-1} \left(\sin(ikh\pi) \left(\exp(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sin(kjh\pi)(F_1)_j + \frac{h \sin(khj\pi)}{2 \sin(kh\frac{\pi}{2})} (\Phi_1)_j \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \exp(-\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sin(kjh\pi)(F_1)_j - \frac{h \sin(khj\pi)}{2 \sin(kh\frac{\pi}{2})} (\Phi_1)_j \right) \right) \right) \\
&= 2h \cdot \sum_{k=1}^{N-1} \left(\sin(ikh\pi) \left(\cosh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi)(F_1)_j \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{h}{2 \sin(kh\frac{\pi}{2})} \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi)(\Phi_1)_j \right) \right) \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Im Falle $F_1 = 0$ (siehe die Bemerkungen 2.1.2 und 2.1.4) geht diese Beziehung über in

$$\begin{aligned}
u_i(y) &= h^2 \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\sin(ikh\pi)}{\sin(kh\frac{\pi}{2})} \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi)(\Phi_1)_j \right) \tag{2.8} \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} h \frac{(w_k, \Phi_1)_e}{\sqrt{-\lambda_k}} w_{i,k} \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) .
\end{aligned}$$

Kapitel 3

Stabilität und Konvergenz des Verfahrens für frequenzbeschränkte Daten

In diesem Kapitel sollen nun erste Stabilitäts- und Konvergenzeigenschaften des eben vorgestellten Verfahrens zur Lösung des Cauchy-Problems für die Laplace-Gleichung untersucht werden. Zunächst geht man dabei von ungestörten Daten aus und untersucht, wie sich die Lösung der Linienmethode im Verhältnis zur exakten Lösung verhält, wenn der Diskretisierungsparameter h gegen 0 strebt. Unter gewissen Voraussetzungen an die Daten werden wir dazu einige Konvergenzsätze beweisen, die im wesentlichen zeigen, daß eine quadratische Konvergenz der Näherungslösung gegen die exakte Lösung vorliegt. Im Anschluß an den Beweis dieser Konvergenzresultate können wir dann der Frage nachgehen, wie man die bekannte Schlechtgestellttheit des Cauchy-Problems für die Laplace-Gleichung, deren Auswirkungen auf unser Verfahren wir auch diskutieren werden, angemessen berücksichtigen kann, falls gestörte Daten vorliegen. In diesem Kapitel werden wir uns dabei zunächst auf Daten aus gewissen endlichdimensionalen Räumen beschränken, die als gestört angenommen werden. Mit Hilfe einer orthogonalen Projektion auf diese Räume können wir zum Abschluß des Kapitels dann zeigen, daß das Problem für die betrachtete Klasse von Datenräumen bedingt gutgestellt ist und einen Konvergenzsatz sowie eine Fehlerabschätzung beweisen.

3.1 Vorbereitende Untersuchungen und ein erstes Modellbeispiel

Wir greifen im Laufe unserer Untersuchungen auf einige analytische Ergebnisse zurück, die wir im folgenden von Grund auf darstellen und beweisen wollen. Die allerersten dieser Ergebnisse sind sicher jedem Leser sehr geläufig, jedoch haben wir sie ebenfalls mit aufgenommen, um eine in sich geschlossene Darstellung zu erzielen. Die nachfolgenden Hilfsresultate sind dann durchaus nichttrivial.

Lemma 3.1.1 (a) Ist $0 < x \leq \sqrt{10}$, so gilt $\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x}$.

(b) Für $x \geq 0$ ist $\sin(x) \leq x$.

(c) Für $x > 0$ gilt $\frac{\sin(x)}{x} \geq 1 - \frac{x^2}{6}$.

(d) Für $x \geq 0$ gilt die Abschätzung (b) sogar in der schärferen Form $|\sin(x)| \leq x$.

Beweis:

Es gelten die folgenden Reihenentwicklungen:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} =: \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{(1)} \quad (3.1)$$

und

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} =: \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{(2)} \quad (3.2)$$

Wir zeigen $s_n^{(1)} \geq s_n^{(2)} \forall n \in \mathbb{N}$, woraus dann unmittelbar die Behauptung folgt. Da $x \leq \sqrt{10}$ nach Voraussetzung richtig ist, kann man folgern:

$$\begin{aligned} & 10 \geq x^2 \\ \implies & 4k^2 + 6k \geq x^2 \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \iff & 2k(2k+3) \geq x^2 \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \iff & 2k(2k+2)(2k+3) \geq (2k+2)x^2 \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \iff & (2k+1)(2k+2)(2k+3)x^{2k} - (2k+2)(2k+3)x^{2k} \geq (2k+3)x^{2k+2} - x^{2k+2} \\ \iff & \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \geq \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} - \frac{x^{2k+2}}{(2k+3)!} \quad . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich zunächst für gerades $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & s_n^{(1)} \\ = & \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} \\ = & 1 - \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} \right) - \dots - \left(\frac{x^{2k}}{(2k+1)!} - \frac{x^{2k+2}}{(2k+3)!} \right) - \dots - \left(\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} - \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \right) \\ \geq & 1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \right) - \dots - \left(\frac{x^{2k}}{(2k)!} - \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \right) - \dots - \left(\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} - \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right) \\ = & \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ = & s_n^{(2)} \end{aligned}$$

Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ erhält man unter Verwendung dieses Ergebnisses:

$$\begin{aligned} & s_n^{(1)} \\ &= s_{n-1}^{(1)} - \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \\ &\geq s_{n-1}^{(2)} - \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \\ &\geq s_{n-1}^{(2)} - \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &= s_n^{(2)}, \end{aligned}$$

womit Behauptung (a) gezeigt ist.

Die Teile (b) und (c) ergeben sich aus den Reihenentwicklungen von $\sin(x)$ beziehungsweise $\frac{\sin(x)}{x}$ mit Hilfe des Leibniz-Kriteriums, das besagt, daß die Partialsummen einer Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ mit einer monoton fallenden Nullfolge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ jeweils abwechselnd obere bzw. untere Schranken der Reihensumme bilden.

Zum Beweis von Teil (d) unterscheidet man die Fälle $0 \leq x \leq \pi$ und $x > \pi$. Im ersten Fall hat man

$$|\sin(x)| = \sin(x) \stackrel{(b)}{\leq} x$$

und im zweiten Fall folgt die Behauptung aus

$$|\sin(x)| \leq 1 < \pi < x \quad .$$

□

Lemma 3.1.2 *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig, $\alpha, \beta \neq 0$. Dann gilt*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha h)}{\sin(\beta h)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

und

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha h)}{\beta h} = \frac{\alpha}{\beta}$$

sowie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha h}{\sin(\beta h)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad .$$

Sind $\alpha > 0, \beta > 0$ und $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge mit (o.B.d.A.) $h_1 \leq \frac{\sqrt{10}}{\beta}$, so ist $\frac{\alpha h_n}{\sin(\beta h_n)}$ ebenfalls monoton fallend.

Beweis:

Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Regel von de l'Hôpital, denn man hat

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha h)}{\sin(\beta h)} \\ & \stackrel{\text{l'Hôsp.}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\alpha \cos(\alpha h)}^{\rightarrow 1 (h \rightarrow 0)}}{\overbrace{\beta \cos(\beta h)}^{\rightarrow 1 (h \rightarrow 0)}} \\ & = \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

und analog auch den zweiten Grenzwert:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha h)}{\beta h} \\ & \stackrel{\text{l'Hôsp.}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\alpha \cos(\alpha h)}^{\rightarrow 1 (h \rightarrow 0)}}{\beta} \\ & = \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

Der dritte Grenzwert ergibt sich aus dem zweiten, wenn man den Kehrwert betrachtet und die Rollen von α und β vertauscht.

Zum Beweis der Monotoniebehauptung differenziert man die Funktion $F(h) = \frac{\alpha h}{\sin(\beta h)}$ nach h und erhält für $h \leq \frac{\sqrt{10}}{\beta}$ ($\implies h\beta \leq \sqrt{10}$) unter Verwendung von Lemma 3.1.1 (a):

$$\begin{aligned} & F'(h) \\ & = \frac{\sin(\beta h) - h\beta \cos(\beta h)}{\sin^2(\beta h)} \\ & \stackrel{\text{Lemma 3.1.1 (a)}}{\geq} 0 \end{aligned}$$

Es ist also F monoton wachsend in h , $h \in \left(0, \frac{\sqrt{10}}{\beta}\right]$, woraus die Behauptung folgt. □

Lemma 3.1.3 Sei $y \in \mathbb{R}$.

(a) Es gilt

$$1 + y \leq \exp(y)$$

und folglich auch

$$1 - \exp(-y) \leq y \quad .$$

(b) Ist $y \geq 0$, so hat man die Abschätzung

$$\exp(y) - 1 \leq y \exp(y) \quad .$$

(c) Für $y \geq 0$ ist

$$\exp(y)(1 - y) \leq \exp(-y)(1 + y)$$

und folglich

$$\sinh(y) - y \cosh(y) \leq 0 \quad . \quad (3.3)$$

Beweis:

Zum Beweis von (a) genügt es wegen

$$\exp(y) = 1 + y + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$$

zu zeigen, daß

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \geq 0$$

gilt. Im Fall $y \geq 0$ ist dies trivialerweise klar. Im Fall $-1 < y < 0$ handelt es sich wegen

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{|y|^k}{k!}$$

um eine alternierende Reihe, deren Glieder wegen

$$\frac{\frac{|y|^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{|y|^k}{k!}} = \frac{|y|}{k+1} < \frac{1}{k+1} < 1$$

eine monoton fallende Nullfolge bilden. Nach dem Leibniz-Kriterium hat daher die Reihensumme dasselbe Vorzeichen wie ihr erster Summand, ist also positiv. Im Fall $y \leq -1$ ist die Abschätzung trivial, da in diesem Fall

$$1 + y \leq 0 \leq \exp(y)$$

gilt.

Behauptung (b) sieht man wie folgt ein:

$$\begin{aligned} & \exp(y) - 1 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \\ &= y \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{(k+1)!} \\ &\leq y \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \\ &= y \exp(y) \end{aligned}$$

Um Teil (c) zu zeigen, benutzt man für beliebige $\mathbb{R} \ni y \geq 0, k \in \mathbb{N}$ die im folgenden hergeleitete Ungleichung

$$\begin{aligned}
 & 1 \geq (-1)^k \\
 \implies & y^k \geq (-1)^k y^k \\
 \implies & \underbrace{\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k-1)!} \right)}_{\leq 0} y^k \leq (-1)^k \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k-1)!} \right) y^k
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

und somit ergibt sich leicht:

$$\begin{aligned}
 & \exp(y)(1-y) \\
 = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{k+1}}{k!} \\
 = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{(k-1)!} \\
 = & 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k-1)!} \right) y^k \\
 \stackrel{(3.4)}{\leq} & 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k-1)!} \right) y^k \\
 = & 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \right) y^k \\
 = & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^k}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{y^k}{(k-1)!} \\
 = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-y)^k}{k!} + y \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-y)^k}{k!} \\
 = & \exp(-y)(1+y)
 \end{aligned}$$

Die ebenfalls behauptete Ungleichung für \sinh und \cosh folgt daraus dann mittels

$$\begin{aligned}
 & \exp(y)(1-y) \leq \exp(-y)(1+y) \\
 \implies & \exp(y) - \exp(-y) - y(\exp(y) + \exp(-y)) \leq 0 \\
 \implies & \sinh(y) - y \cosh(y) \leq 0 \quad .
 \end{aligned}$$

□

Lemma 3.1.4 Sei $C > 0$ beliebig. Die Funktion $f : (0, \infty) \ni x \mapsto x \sinh\left(\frac{C}{x}\right)$ ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich monoton fallend und (insbesondere) bei 1 stetig. Ist also x_n eine monoton fallende Folge mit $x_n \geq 1$, $x_n \rightarrow 1$, ($n \rightarrow \infty$), so gilt, daß $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge ist und gegen $f(1) = \sinh(C)$ konvergiert.

Beweis:

Wir zeigen $f'(x) < 0 \forall x > 0$. Für die Ableitung errechnet man:

$$\begin{aligned} & f'(x) \\ = & \sinh\left(\frac{C}{x}\right) - x \frac{C}{x^2} \cosh\left(\frac{C}{x}\right) \\ = & \sinh\left(\frac{C}{x}\right) - \frac{C}{x} \cosh\left(\frac{C}{x}\right) \\ \stackrel{\text{Lemma 3.1.3 (c)}}{\leq} & 0 \quad . \end{aligned}$$

Beachte hierbei, daß wegen $\frac{C}{x} > 0$ die Voraussetzung von Lemma 3.1.3 (c) erfüllt ist. \square

Folgerung 3.1.5 Es konvergiere h monoton fallend gegen 0 und es sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) Es konvergiert

$$\frac{mh \frac{\pi}{2}}{\sin(mh \frac{\pi}{2})} \sinh\left(2y \frac{\sin(mh \frac{\pi}{2})}{h}\right)$$

monoton wachsend gegen $\sinh(m\pi y)$. Insbesondere ist also für $h \leq \frac{\sqrt{10}}{\pi}$

$$\frac{mh \frac{\pi}{2}}{\sin(mh \frac{\pi}{2})} \sinh\left(2y \frac{\sin(mh \frac{\pi}{2})}{h}\right) \leq \sinh(m\pi y) \quad .$$

(b) Der Term

$$\cosh\left(2 \frac{\sin(mh \frac{\pi}{2})}{h} y\right)$$

konvergiert monoton wachsend gegen $\cosh(m\pi y)$. Es ist daher für $h \leq \frac{\sqrt{10}}{\pi}$

$$\cosh\left(2 \frac{\sin(mh \frac{\pi}{2})}{h} y\right) \leq \cosh(m\pi y) \quad .$$

Beweis:

Sei $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge mit (o.B.d.A.) $h_1 \leq \frac{\sqrt{10}}{\pi}$.

- (a) Nach Lemma 3.1.2 ist $x_n := \frac{mh_n \frac{\pi}{2}}{\sin(mh_n \frac{\pi}{2})}$ ebenfalls monoton fallend und konvergiert gegen 1. Aus Lemma 3.1.4 (mit $C := m\pi y$) ergibt sich damit unmittelbar die Behauptung (a).
- (b) Nach Lemma 3.1.2 ist $x_n := \frac{\sin(mh_n \frac{\pi}{2})}{h_n}$ monoton wachsend und konvergiert gegen $m\frac{\pi}{2}$. Aus dem monotonen Wachstum des cosinus hyperbolicus im nichtnegativen Bereich der Abszisse folgt somit die Behauptung (b).

□

Bemerkung 3.1.6 Wir werden im folgenden die Einschränkung $h \leq \frac{\sqrt{10}}{\pi}$ nicht mehr erwähnen, da h als Diskretisierungsparameter sowieso nur sinnvoll gewählt ist, wenn

$$h = \frac{1}{N} < 1 < 1.007 \approx \frac{\sqrt{10}}{\pi}$$

gilt.

Hilfssatz 3.1.7 Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $h_0 = h_0(m) > 0$, so daß für alle $h \leq h_0$

(a)

$$\left| \sinh(m\pi y) - \frac{mh \frac{\pi}{2}}{\sin(mh \frac{\pi}{2})} \sinh\left(2 \frac{\sin(mh \frac{\pi}{2})}{h} y\right) \right| \leq \frac{m^3 \pi^3 y}{24} \exp(m\pi y) h^2$$

(b)

$$\left| \cosh(m\pi y) - \cosh\left(2 \frac{\sin(mh \frac{\pi}{2})}{h} y\right) \right| \leq \frac{m^3 \pi^3 y}{24} \sinh(m\pi y) h^2$$

gilt.

Beweis:

- (a) Um den in Rede stehenden Term nach oben abschätzen zu können, verwenden wir die weiter oben bewiesenen Lemmata sowie das monotone Wachstum des sinus hyperbolicus und erhalten so:

$$\begin{aligned}
& \left| \sinh(m\pi y) - \frac{mh\frac{\pi}{2}}{\sin(mh\frac{\pi}{2})} \sinh\left(2\frac{\sin(mh\frac{\pi}{2})}{h}y\right) \right| \\
\stackrel{\text{Folgerung 3.1.5 (a)}}{=} & \sinh(m\pi y) - \frac{mh\frac{\pi}{2}}{\sin(mh\frac{\pi}{2})} \sinh\left(2\frac{\sin(mh\frac{\pi}{2})}{h}y\right) \\
\stackrel{\text{Lemma 3.1.1 (b)}}{\leq} & \sinh(m\pi y) - \sinh\left(2\frac{\sin(mh\frac{\pi}{2})}{h}y\right) \\
= & \sinh(m\pi y) - \sinh\left(m\pi y \frac{\sin(mh\frac{\pi}{2})}{mh\frac{\pi}{2}}\right) \\
\stackrel{\text{Lemma 3.1.1 (c)}}{\leq} & \sinh(m\pi y) - \sinh\left(m\pi y \left(1 - \frac{(mh\frac{\pi}{2})^2}{6}\right)\right) \\
= & \frac{1}{2} \left(\exp(m\pi y) - \exp(-m\pi y) - \exp\left(m\pi y \left(1 - \frac{(mh\frac{\pi}{2})^2}{6}\right)\right) \right. \\
& \left. + \exp\left(-m\pi y \left(1 - \frac{(mh\frac{\pi}{2})^2}{6}\right)\right) \right) \\
= & \frac{1}{2} \left(\exp(m\pi y) - \exp(-m\pi y) - \exp\left(m\pi y - \frac{m^3\pi^3 y}{24}h^2\right) \right. \\
& \left. + \exp\left(-m\pi y + \frac{m^3\pi^3 y}{24}h^2\right) \right) \\
= & \frac{1}{2} \left(\exp(m\pi y) \left(1 - \exp\left(-\frac{m^3\pi^3 y}{24}h^2\right)\right) \right. \\
& \left. - \exp(-m\pi y) \left(1 - \exp\left(\frac{m^3\pi^3 y}{24}h^2\right)\right) \right) \\
\stackrel{\text{Lemma 3.1.3 (a)}}{\leq} & \frac{1}{2} \left(\exp(m\pi y) \frac{m^3\pi^3 y}{24}h^2 + \exp(-m\pi y) \left(\exp\left(\frac{m^3\pi^3 y}{24}h^2\right) - 1\right) \right) \\
\stackrel{\text{Lemma 3.1.3 (b)}}{\leq} & \frac{1}{2} \left(\exp(m\pi y) \frac{m^3\pi^3 y}{24}h^2 + \exp(-m\pi y) \frac{m^3\pi^3 y}{24}h^2 \exp\left(\frac{m^3\pi^3 y}{24}h^2\right) \right)
\end{aligned}$$

Für $h \leq \frac{4\sqrt{3}}{m\pi} =: h_0(m)$ folgt

$$\frac{m^3\pi^3 y}{24}h^2 \leq \frac{m^3\pi^3 y}{24} \frac{48}{m^2\pi^2} = 2m\pi y$$

und somit kann man den gewonnenen Term wie folgt nach oben abschätzen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\exp(m\pi y) \frac{m^3 \pi^3 y}{24} h^2 + \exp(-m\pi y) \frac{m^3 \pi^3 y}{24} h^2 \exp \left(\underbrace{\frac{m^3 \pi^3 y}{24} h^2}_{\leq 2m\pi y} \right) \right) \\ & \leq \frac{m^3 \pi^3 y}{24} \exp(m\pi y) h^2 \end{aligned}$$

(b) Analoges Vorgehen wie in (a) führt auf:

$$\begin{aligned} & \left| \cosh(m\pi y) - \cosh \left(2 \frac{\sin \left(\frac{mh\pi}{2} \right)}{h} y \right) \right| \\ \stackrel{\text{Folgerung 3.1.5 (b)}}{=} & \cosh(m\pi y) - \cosh \left(2 \frac{\sin \left(\frac{mh\pi}{2} \right)}{h} y \right) \\ = & \cosh(m\pi y) - \cosh \left(m\pi y \frac{\sin \left(\frac{mh\pi}{2} \right)}{mh\frac{\pi}{2}} \right) \\ \stackrel{\text{Lemma 3.1.1 (c)}}{\leq} & \cosh(m\pi y) - \cosh \left(m\pi y \left(1 - \frac{(mh\frac{\pi}{2})^2}{6} \right) \right) \\ = & \frac{1}{2} \left(\exp(m\pi y) + \exp(-m\pi y) - \exp \left(m\pi y \left(1 - \frac{(mh\frac{\pi}{2})^2}{6} \right) \right) \right. \\ & \left. - \exp \left(-m\pi y \left(1 - \frac{(mh\frac{\pi}{2})^2}{6} \right) \right) \right) \\ = & \frac{1}{2} \left(\exp(m\pi y) + \exp(-m\pi y) - \exp \left(m\pi y - \frac{m^3 \pi^3 y}{24} h^2 \right) \right. \\ & \left. - \exp \left(-m\pi y + \frac{m^3 \pi^3 y}{24} h^2 \right) \right) \\ = & \frac{1}{2} \left(\exp(m\pi y) \left(1 - \exp \left(-\frac{m^3 \pi^3 y}{24} h^2 \right) \right) \right. \\ & \left. + \exp(-m\pi y) \left(1 - \exp \left(\frac{m^3 \pi^3 y}{24} h^2 \right) \right) \right) \\ \stackrel{\text{Lemma 3.1.3 (a)}}{\leq} & \frac{1}{2} \left(\exp(m\pi y) \frac{m^3 \pi^3 y}{24} h^2 + \exp(-m\pi y) \left(-\frac{m^3 \pi^3 y}{24} h^2 \right) \right) \\ = & \frac{m^3 \pi^3 y}{24} \sinh(m\pi y) h^2 \end{aligned}$$

□

Das folgende allererste Modellbeispiel in Anlehnung an J. Hadamard (siehe [Had23] und die entsprechenden Bemerkungen in Satz 1.3.2) demonstriert in einem Spezialfall, daß für $h \rightarrow 0$ die Lösung u_i auf jeder Linie gegen die wahre Lösung konvergiert.

Beispiel 3.1.8 *Es sei*

$$u(x, y) = \frac{\sin(m\pi x) \sinh(m\pi y)}{m^2\pi^2} \text{ in } \Omega$$

mit $m \in \mathbb{N}$, $N > m$. Bekanntermaßen löst u die Laplace-Gleichung und genügt den Randbedingungen

$$u(x, 0) = 0 \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\sin(m\pi x)}{m\pi}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

und

$$u(0, y) = u(1, y) = 0, \quad y \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \quad .$$

Man hat also, wenn man in x -Richtung diskretisiert, die Datenvektoren

$$F_1 = \underbrace{(0, \dots, 0)^T}_{N-1 \text{ mal}} \text{ und } \Phi_1 = \left(\frac{\sin(m\pi x_j)}{m\pi} \right)_{j=1, \dots, N-1}$$

gegeben.

Berechnet man nun aus diesen Datenvektoren mit Hilfe von (2.7) bzw. (2.8) die Näherungslösung u_i auf der i -ten Linie, dann konvergiert für jedes $1 \leq i \leq N-1$ die Funktion $u_i(y)$ für $h \rightarrow 0$ gegen $u(x_i, y)$ und es gilt für $h \leq \frac{4\sqrt{3}}{m\pi}$ die Fehlerabschätzung

$$|u(x_i, y) - u_i(y)| \leq |\sin(m\pi x_i)| \frac{m\pi y}{24} \exp(m\pi y) h^2 \quad .$$

Beweis:

Wir setzen in den Term (2.7) beziehungsweise (2.8) der allgemeinen Lösung die speziellen Randbedingungen (also die bekannten Vektoren F_1 und Φ_1) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} & u_i(y) \\ = & \frac{h^2}{m\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\sin(ikh\pi)}{\sin(kh\frac{\pi}{2})} \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \underbrace{\sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi) \sin(mjh\pi)}_{=0, k \neq m \text{ (Lemma 2.2.3)}} \right) \\ = & \frac{h^2 \sin(mih\pi)}{m\pi \sin(mh\frac{\pi}{2})} \sinh(\sqrt{-\lambda_m}y) \underbrace{\sum_{j=1}^{N-1} \sin^2(mjh\pi)}_{=\frac{1}{2h} \text{ (Lemma 2.2.3)}} \\ = & \frac{1}{m^2\pi^2} \underbrace{\frac{mh\frac{\pi}{2}}{\sin(mh\frac{\pi}{2})}}_{\rightarrow 1 \text{ (} h \rightarrow 0 \text{)}} \sin(m\pi x_i) \sinh \left(\underbrace{\frac{2 \sin(mh\frac{\pi}{2})}{h}}_{\rightarrow m\pi \text{ (} h \rightarrow 0 \text{)}} y \right) \tag{3.5} \\ \xrightarrow{\text{Lemma 3.1.2}} & \frac{1}{m^2\pi^2} \sin(m\pi x_i) \sinh(m\pi y) = u(x_i, y) \quad (h \rightarrow 0) \end{aligned}$$

Der Beweis der Fehlerabschätzung ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
& |u(x_i, y) - u_i(y)| \\
(3.5) \quad & \left| \frac{1}{m^2 \pi^2} \sin(m\pi x_i) \sinh(m\pi y) - \frac{1}{m^2 \pi^2} \frac{mh \frac{\pi}{2}}{\sin\left(mh \frac{\pi}{2}\right)} \sin(m\pi x_i) \sinh\left(\frac{2 \sin\left(mh \frac{\pi}{2}\right)}{h} y\right) \right| \\
& = \frac{|\sin(m\pi x_i)|}{m^2 \pi^2} \left| \sinh(m\pi y) - \frac{mh \frac{\pi}{2}}{\sin\left(mh \frac{\pi}{2}\right)} \sinh\left(2 \frac{\sin\left(mh \frac{\pi}{2}\right)}{h} y\right) \right| \\
\text{Hilfss. 3.1.7 (a)} \quad & \leq \frac{|\sin(m\pi x_i)|}{m^2 \pi^2} \frac{m^3 \pi^3 y}{24} \exp(m\pi y) h^2 \\
& = |\sin(m\pi x_i)| \frac{m\pi y}{24} \exp(m\pi y) h^2
\end{aligned}$$

□

3.2 Ausgewählte Ergebnisse aus der Fourieranalysis

Die Untersuchungen der folgenden Abschnitte basieren auf bestimmten grundlegenden Ergebnissen der Fourieranalysis, die wir in diesem Rahmen kurz angeben und zum Teil auch beweisen wollen, ohne dieses Feld hier wirklich erschöpfend darstellen zu können.

Lemma 3.2.1 (Integralformeln einiger trigonometrischer Funktionen) *Seien $k, l \in \mathbb{Z}$. Es gelten folgende Integrationsformeln:*

$$\int_0^1 \sin(k\pi t) \sin(l\pi t) dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad k = l, |k| \geq 1 \\ -\frac{1}{2} & , \quad k = -l, |k| \geq 1 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\int_0^1 \cos(k\pi t) \cos(l\pi t) dt = \begin{cases} 1 & , \quad k = l = 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad |k| = |l| \geq 1 \\ 0 & , \quad |k| \neq |l| \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\int_0^1 \sin(k\pi t) \cos(l\pi t) dt = \begin{cases} \frac{2k}{\pi(k-l)(k+l)} & , \quad (k-l) \text{ ungerade} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (3.8)$$

und daraus abgeleitet mit Hilfe der Regeln zur Integration gerader beziehungsweise ungerader

Funktionen auf zum Ursprung symmetrischen Integrationsintervallen:

$$\int_{-1}^1 \sin(k\pi t) \sin(l\pi t) dt = \begin{cases} 1 & , \quad k = l, |k| \geq 1 \\ -1 & , \quad k = -l, |k| \geq 1 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\int_{-1}^1 \cos(k\pi t) \cos(l\pi t) dx = \begin{cases} 2 & , \quad k = l = 0 \\ 1 & , \quad |k| = |l| \geq 1 \\ 0 & , \quad |k| \neq |l| \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\int_{-1}^1 \sin(k\pi t) \cos(l\pi t) dx = 0 \quad . \quad (3.11)$$

Beweis:

Die Stammfunktionen sind jeder gewöhnlichen Integraltafel zu entnehmen. Wir demonstrieren daher nur an einem Beispiel die angewendete Integrationstechnik (Formel (3.8), Fall: $(k - l)$ ungerade):

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sin(k\pi t) \cos(l\pi t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sin((k+l)\pi t) + \sin((k-l)\pi t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{(k+l)\pi} \frac{1}{(k+l)\pi} \sin(u) du + \int_0^{(k-l)\pi} \frac{1}{(k-l)\pi} \sin(u) du \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(k+l)\pi} [-\cos(u)]_0^{(k+l)\pi} + \frac{1}{(k-l)\pi} [-\cos(u)]_0^{(k-l)\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(k+l)\pi} \left[\underbrace{(-1)^{k+l+1}}_{=(-1)^{k-l+2l+1}=1} + 1 \right] + \frac{1}{(k-l)\pi} \left[\underbrace{(-1)^{k-l+1}}_{=1} + 1 \right] \right) \\ &= \frac{1}{(k+l)\pi} + \frac{1}{(k-l)\pi} \\ &= \frac{2k}{(k+l)(k-l)\pi} \end{aligned}$$

□

Die in obigem Lemma enthaltenen Integrale kann man natürlich mit geeigneten Quadraturformeln approximieren. Interessant ist dabei, daß die Approximation mit Hilfe der summierten Sehnentrapezregel in vielen Fällen jeweils den exakten Wert des Integrals liefert, wie folgendes Lemma exemplarisch anhand der ersten Formel zeigen wird:

Lemma 3.2.2 *Seien $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{1}{N}$, $k, l \in \mathbb{Z}$ beliebig. Weiter seien*

$$\begin{aligned} k &\equiv k_0 \pmod{2N} \\ l &\equiv l_0 \pmod{2N} \end{aligned}$$

mit $-N + 1 \leq k_0, l_0 \leq N$. Dann gilt

$$h \sum_{j=1}^{N-1} \sin(k\pi jh) \sin(l\pi jh) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad k_0 = l_0, N > |k_0| \geq 1 \\ -\frac{1}{2} & , \quad k_0 = -l_0, N > |k_0| \geq 1 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} .$$

Beweis:

Im Fall $1 \leq k, l \leq N - 1$ folgt die Behauptung unmittelbar aus Lemma 2.2.3 mit Hilfe der dort definierten Vektoren w_j , $j = 1, \dots, N - 1$, denn man sieht leicht unter Verwendung des Kronecker-Symbols

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1 & , \quad k = l \\ 0 & , \quad k \neq l \end{cases}$$

ein, daß

$$\begin{aligned} & h \sum_{j=1}^{N-1} \sin(k\pi jh) \sin(l\pi jh) \\ &= h \left(\frac{1}{\sqrt{2h}} w_k, \frac{1}{\sqrt{2h}} w_l \right)_e \\ &= \frac{1}{2} \delta_{k,l} \end{aligned}$$

gilt. Ist $k = 0 \vee l = 0 \vee k = N \vee l = N$, so verschwindet die Summe trivialerweise (beachte $\sin(\nu\pi) = 0$, $\nu \in \mathbb{Z}$). Läßt man nun den Fall $-N + 1 \leq k, l \leq N$ zu, so läßt sich der Beweis mühelos mit Hilfe der Tatsache, daß die Sinusfunktion ungerade ist, auf obigen Fall zurückführen. Zum Beweis des allgemeinen Falles beachtet man schließlich, daß die Funktion

$F_h(k, l) = h \sum_{j=1}^{N-1} \sin(k\pi jh) \sin(l\pi jh)$ in beiden Argumenten $2N$ -periodisch ist, denn es gilt

$$\begin{aligned} & F_h(k + 2N, l) \\ &= h \sum_{j=1}^{N-1} \sin((k + 2N)\pi jh) \sin(l\pi jh) \\ &= h \sum_{j=1}^{N-1} \underbrace{\sin(k\pi jh + 2\pi j)}_{=\sin(k\pi jh)} \sin(l\pi jh) \\ &= F_h(k, l) \end{aligned}$$

und bei analoger Schlußweise $F_h(k, l + 2N) = F_h(k, l)$. Für beliebige $k, l \in \mathbb{Z}$ existieren nun $k_0, l_0 \in \{-N + 1, \dots, N\}$ mit

$$\begin{aligned} k &\equiv k_0 \pmod{2N} \\ l &\equiv l_0 \pmod{2N} \quad . \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} & F_h(k, l) \\ &= F_h(k_0, l_0) \end{aligned}$$

und daraus kann sofort die Behauptung abgelesen werden. □

Bemerkung 3.2.3 Das obige Lemma zeigt, daß die summierte Sehnentrapezregel nur dann einen falschen Wert für das Integral $\int_0^1 \sin(k\pi t) \sin(l\pi t) dt$ liefert, falls $k \neq l$, aber $1 \leq |k_0| = |l_0| < N$ gilt. Die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Fall auftritt, sinkt natürlich mit wachsendem N .

Satz 3.2.4 Ist eine 2-periodische Funktion f auf $[-1, 1]$ stetig differenzierbar, so konvergiert ihre Fourierreihe

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x))$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$a_k = \int_{-1}^1 f(t) \cos(k\pi t) dt, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

und

$$b_k = \int_{-1}^1 f(t) \sin(k\pi t) dt, \quad k \in \mathbb{N}$$

auf jedem kompakten Teilintervall von $[-1, 1]$ gleichmäßig gegen f .

Beweis:

Vergleiche zum Beispiel [Heu01], Band 2, Satz 137.2. Das dortige Ergebnis ist lediglich durch eine einfache Substitution vom Intervall $[-\pi, \pi]$ auf das hier vorliegende Intervall $[-1, 1]$ zu übertragen.

□

Satz 3.2.5 Sei $\phi \in C^1[0, 1]$ mit $\phi(0) = \phi(1) = 0$ gegeben. Dann gilt für alle $x \in [0, 1]$

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x)$$

mit

$$b_k = 2 \int_0^1 \phi(t) \sin(k\pi t) dt, \quad k \in \mathbb{N} \quad .$$

Die Funktion ϕ läßt sich also als reine Sinusreihe darstellen. Weiter ist die Konvergenz dieser Reihe gleichmäßig in x .

Beweis:

Offenbar läßt sich ϕ auf $[-1, 1]$ fortsetzen zu einer stetig differenzierbaren ungeraden Funktion

$$U_\phi(x) := \begin{cases} \phi(x) & , \quad x \geq 0 \\ -\phi(-x) & , \quad x < 0 \end{cases} \quad .$$

Entwickelt man nun U_ϕ in eine Fourierreihe der Form

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x)),$$

so gilt nach den Euler-Fourierschen Formeln:

$$a_k = \int_{-1}^1 \underbrace{U_\phi(t) \cos(k\pi t)}_{\text{ungerade Fkt.}} dt = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

und

$$b_k = \int_{-1}^1 \underbrace{U_\phi(t) \sin(k\pi t)}_{\text{gerade Fkt.}} dt = 2 \int_0^1 U_\phi(t) \sin(k\pi t) dt = 2 \int_0^1 \phi(t) \sin(k\pi t) dt, \quad k \in \mathbb{N},$$

womit gezeigt ist, daß die Fourierreihe eine reine Sinusreihe ist. Die gleichmäßige Konvergenz und Darstellung von ϕ durch diese Reihe folgt aus Satz 3.2.4.

□

3.3 Definition und Eigenschaften der Datenräume D_M^h

Zentral für unsere weiteren Untersuchungen werden nun gewisse endlichdimensionale Funktionenräume sein. Wenn die Cauchy-Daten diesen Räumen entstammen, so bedeutet das, daß nur Frequenzen unterhalb einer gewissen Grenzfrequenz M in der Sinusreihenentwicklung von ϕ_1 beziehungsweise f_1 auftreten und die übrigen Koeffizienten verschwinden. Diese Datenräume werden wir samt einigen ihrer Eigenschaften betrachten, wobei wiederum die Hilfsergebnisse aus der Fourieranalysis zum Tragen kommen werden, die wir in Abschnitt 3.2 zuvor bereitgestellt haben. Aufgrund der Voraussetzung

$$u|_{\Sigma_2} = u|_{\Sigma_3} = 0$$

findet man für eine in sich stimmige Problemstellung

$$\phi_1(0) = \phi_1(1) = 0 \quad .$$

Vorausgesetzt sei weiter $\phi_1 \in C^1[0, 1]$.

Definition 3.3.1 Sei $M \in \mathbb{N}, h = \frac{1}{N}, N > M$. Dann definiert man

$$D := \{ \phi \in C^1[0, 1] \mid \phi(0) = \phi(1) = 0 \} \quad .$$

Die Funktionen in D lassen sich nach Satz 3.2.5 in eine reine Sinusreihe entwickeln. Für die praktische numerische Behandlung unseres Problems werden sich solche Räume als geeignet herausstellen, bei denen diese Reihe nur aus endlich vielen nichtverschwindenden Summanden besteht:

$$D_M := \left\{ \phi \in D \mid \int_0^1 \sin(k\pi t) \phi(t) dt = 0, k > M \right\} \quad .$$

Da wir sowohl in der Numerik wie in der Praxis nur diskrete Datenwerte behandeln können, definieren wir schließlich noch die für unsere Zwecke im folgenden verwendeten Räume, die man als diskrete Versionen der Räume D_M auffassen kann:

$$D_M^h := \left\{ \Phi \in \mathbb{R}^{N-1} \mid \sum_{j=1}^{N-1} \sin(k\pi jh) \Phi_j = 0, N > k > M \right\} \quad .$$

Die Räume D_M^h und D_M stehen in einem engen Zusammenhang, wie die folgenden Ergebnisse zeigen:

Satz 3.3.2 Sei $M < N$. Ist $\phi \in D_M$, so ist $\Phi := (\phi(h), \dots, \phi((N-1)h))^T \in D_M^h$. Sind umgekehrt $N-1$ diskrete Werte $\Phi \in D_M^h$ gegeben, so läßt sich stets eine (eindeutige!) Fortsetzung $\phi \in D_M$ finden, so daß $\Phi = (\phi(h), \dots, \phi((N-1)h))^T$ gilt.

Beweis:

Sei $\phi \in D_M$ und $\Phi := (\phi(h), \dots, \phi((N-1)h))$. Wegen $\phi \in D$ gilt:

$$\begin{aligned} & \phi(x) \\ \stackrel{\text{Satz 3.2.5}}{=} & \sum_{l=1}^{\infty} \left(2 \int_0^1 \phi(t) \sin(l\pi t) dt \right) \sin(l\pi x) \\ \stackrel{\phi \in D_M}{=} & \sum_{l=1}^M \left(2 \int_0^1 \phi(t) \sin(l\pi t) dt \right) \sin(l\pi x) \quad . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Sei nun $N > k > M$. Dann hat man

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N-1} \sin(k\pi jh) \Phi_j \\ = & \sum_{j=1}^{N-1} \sin(k\pi jh) \phi(x_j) \\ \stackrel{(3.12)}{=} & \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sin(k\pi jh) \sum_{l=1}^M \left(2 \int_0^1 \phi(t) \sin(l\pi t) dt \right) \sin(l\pi jh) \right) \\ = & 2 \sum_{l=1}^M \left(\underbrace{\sum_{j=1}^{N-1} \sin(k\pi jh) \sin(l\pi jh)}_{=0 \text{ nach Lemma 2.2.3, da } k > M \geq l} \right) \int_0^1 \phi(t) \sin(l\pi t) dt \\ = & 0 \end{aligned}$$

und folglich ist $\Phi \in D_M^h$.

Sei nun umgekehrt $\Phi \in D_M^h$ gegeben und weiter sei $N > M$. Definiere

$$b_k = 2h \sum_{j=1}^{N-1} \sin(k\pi jh) \Phi_j, \quad k = 1, \dots, M$$

und damit

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^M b_k \sin(k\pi x) \quad .$$

Dann ist offenbar $\phi \in D_M$, denn für $k_0 > M$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \phi(t) \sin(k_0 \pi t) dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^M b_k \sin(k \pi t) \cdot \sin(k_0 \pi t) \right) dt \\
&= \sum_{k=1}^M \left(b_k \underbrace{\int_0^1 \sin(k \pi t) \sin(k_0 \pi t) dt}_{=0 \text{ nach (3.6)}} \right) \\
&= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Weiter erhält man für beliebiges $1 \leq l \leq N-1$:

$$\begin{aligned}
& \phi(lh) \\
&= \sum_{k=1}^M \left(2h \sum_{j=1}^{N-1} \sin(k \pi j h) \Phi_j \right) \sin(k \pi l h) \\
&\stackrel{\Phi \in D_M^h}{=} \sum_{k=1}^{N-1} \left(2h \sum_{j=1}^{N-1} \sin(k \pi j h) \Phi_j \right) \sin(k \pi l h) \\
&= 2h \sum_{j=1}^{N-1} \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} \sin(l \pi k h) \sin(j \pi k h)}_{=0 (j \neq l)} \right) \Phi_j \\
&= 2h \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} \sin(l \pi k h) \sin(l \pi k h)}_{=\frac{1}{2h} \text{ nach Lemma 2.2.3}} \Phi_l \\
&= \Phi_l \quad .
\end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit der Fortsetzung zeigen wir im Anschluß an Satz 3.3.3. □

Satz 3.3.3 Sei $N > M$. D_M besitzt die Orthonormalbasis $\overline{w}_k = \sqrt{2} \sin(k \pi x)$, $k = 1, \dots, M$ und D_M^h hat die Vektoren $w_k = \sqrt{2h} (\sin(k \pi j h))_{j=1, \dots, N-1}^T$, $k = 1, \dots, M$ als Orthonormalbasis. Die Räume D_M und D_M^h sind daher isomorphe M -dimensionale Vektorräume. Die Abbildung

$$F : D_M \ni \phi \mapsto F(\phi) = \sqrt{h}(\phi(1h), \dots, \phi((N-1)h))$$

ist ein isometrischer Isomorphismus. Hierbei ist \mathbb{R}^{N-1} mit dem euklidischen $(\cdot, \cdot)_e$ und D mit dem L_2 -Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{L_2}$ versehen.

Beweis:

Die Funktionen \overline{w}_k , $k = 1, \dots, M$ sind offenbar linear unabhängig, denn aus

$$\sum_{k=1}^M \lambda_k \sqrt{2} \sin(k\pi x) = 0$$

folgt für beliebiges $0 < x < \frac{1}{M}$ zunächst

$$0 < k\pi x < \pi \implies \sin(k\pi x) > 0 \quad \forall k = 1, \dots, M$$

und daraus notwendig das Verschwinden aller λ_k , $k = 1, \dots, M$. Weiter ist nach Satz 3.2.5 eine beliebige Funktion ϕ aus $D_M \subset D$ als Sinusreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x) \quad , \quad b_k = 2 \int_0^1 \phi(t) \sin(k\pi t) dt, \quad k \in \mathbb{N}$$

darstellbar. Wegen $\phi \in D_M$ folgt $b_k = 0$, $k > M$, also:

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^M b_k \sin(k\pi x) = \sum_{k=1}^M \frac{b_k}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \sin(k\pi x), \quad x \in [0, 1] \quad . \quad (3.13)$$

Somit ist auch die Erzeugendensystemeigenschaft, insgesamt also die Basiseigenschaft der Funktionen $\sqrt{2} \sin(k\pi x)$, $k = 1, \dots, M$ nachgewiesen. Ihre Orthonormalität folgt aus der Integralformel (3.6) in Lemma 3.2.1.

Wenden wir uns nun den Vektoren w_k , $k = 1, \dots, M$ zu, so stellt man zunächst fest, daß diese Vektoren als Teilsystem der Orthonormalbasis w_1, \dots, w_{N-1} des \mathbb{R}^{N-1} offenbar linear unabhängig und orthonormal sind, so daß man nur noch zu zeigen hat, daß $\text{span}(w_1, \dots, w_M) = D_M^h$ gilt. Hat man $\Phi \in \text{span}(w_1, \dots, w_M)$, so folgt für $N > k > M$

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{i=1}^M \alpha_i w_i \\ \implies \sum_{j=1}^{N-1} \sin(k\pi jh) \Phi_j & \\ &= \left(\frac{w_k}{\sqrt{2h}}, \Phi \right)_e \\ &= \left(\frac{w_k}{\sqrt{2h}}, \sum_{i=1}^M \alpha_i w_i \right)_e \\ &= \frac{1}{\sqrt{2h}} \sum_{i=1}^M \alpha_i \underbrace{(w_k, w_i)_e}_{=0} \\ &= 0, \end{aligned}$$

also $\Phi \in D_M^h$. Ist umgekehrt $\Phi \in D_M^h$ gegeben, so hat Φ mit Hilfe der Orthonormalbasis w_1, \dots, w_{N-1} des \mathbb{R}^{N-1} nach Standardergebnissen der linearen Algebra die Darstellung

$$\Phi = \sum_{k=1}^{N-1} \underbrace{(\Phi, w_k)_e}_{=0, k > M} w_k = \sum_{k=1}^M (\Phi, w_k)_e w_k,$$

somit also $\Phi \in \text{span}(w_1, \dots, w_M)$.

Insgesamt folgt, daß die Abbildung

$$F : D_M \ni \phi \mapsto F(\phi) = \sqrt{h}(\phi(1h), \dots, \phi((N-1)h))$$

ein Isomorphismus ist, da diese Abbildung die Basis in D_M auf die Basis in D_M^h abbildet.

Die Isometrie-eigenschaft ergibt sich mit beliebigen $\phi = \sum_{i=1}^M \alpha_i \bar{w}_i$, $\psi = \sum_{j=1}^M \beta_j \bar{w}_j$ aus D_M wie folgt:

$$\begin{aligned} & (F(\phi), F(\psi))_e \\ &= \left(\sum_{i=1}^M \alpha_i F(\bar{w}_i), \sum_{j=1}^M \beta_j F(\bar{w}_j) \right)_e \\ &= \sum_{i,j=1}^M \alpha_i \beta_j (F(\bar{w}_i), F(\bar{w}_j))_e \\ &= \sum_{i,j=1}^M \alpha_i \beta_j (w_i, w_j)_e \\ &= \sum_{i,j=1}^M \alpha_i \beta_j (\bar{w}_i, \bar{w}_j)_{L_2} \\ &= (\phi, \psi)_{L_2} \end{aligned}$$

Es ist hier übrigens ersichtlich, daß jeder Isomorphismus, der eine Orthonormalbasis eines endlichdimensionalen Raums auf eine Orthonormalbasis eines anderen endlichdimensionalen Raums abbildet, diese Isometrie-eigenschaft besitzt. □

Fortsetzung des Beweises von Satz 3.3.2:

Zu zeigen ist noch die Eindeutigkeit der Fortsetzung $\phi \in D_M$ zu einem gegebenen Vektor $\Phi \in D_M^h$. Wir nehmen an, es gäbe eine weitere Fortsetzung $\tilde{\phi} \in D_M$ mit den gewünschten Eigenschaften. Dann folgt $\phi - \tilde{\phi} \in D_M$, also mit Satz 3.3.3 die Basisdarstellung

$$\phi - \tilde{\phi} = \sum_{k=1}^M \alpha_k \bar{w}_k \quad . \quad (3.14)$$

Da sowohl ϕ als auch $\tilde{\phi}$ Fortsetzungen von Φ sind, also an den Gitterpunkten mit Φ übereinstimmen, gilt offenbar

$$\begin{aligned}
& (\phi - \tilde{\phi})(lh) = 0, \quad l = 1, \dots, N-1 \\
\stackrel{(3.14)}{\implies} & \sum_{k=1}^M \alpha_k \overline{w_k}(lh) = 0, \quad l = 1, \dots, N-1 \\
\implies & \sum_{k=1}^M \alpha_k \frac{1}{\sqrt{h}} (w_k)_l = 0, \quad l = 1, \dots, N-1 \\
\implies & \sum_{k=1}^M \alpha_k w_k = 0 \\
\stackrel{\text{Satz 3.3.3}}{\implies} & \alpha_k = 0, \quad k = 1, \dots, M \\
\stackrel{(3.14)}{\implies} & \phi - \tilde{\phi} = 0 \\
\implies & \phi = \tilde{\phi}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.3.4 Wir haben soeben auch das folgende Ergebnis gezeigt: Eine Funktion $\phi \in D_M$, die an den äquidistanten Punkten $x_l = lh$, $l = 1, \dots, N-1$, $h = \frac{1}{N}$, $N > M$ verschwindet, muß die Nullfunktion sein.

Wir beweisen noch den folgenden interessanten Zusammenhang für Funktionen aus D_M beziehungsweise D_M^h :

Satz 3.3.5 Seien $M, N, k \in \mathbb{N}$, $M < N$, $k < N$, $h = \frac{1}{N}$ und $f \in D_M (\implies F := (f(1 \cdot h), \dots, f((N-1) \cdot h)) \in D_M^h)$. Dann gilt:

$$\int_0^1 f(t) \sin(k\pi t) dt = h \sum_{j=1}^{N-1} \sin(k\pi jh) F_j \quad .$$

Die Fourierkoeffizienten einer Funktion aus D_M lassen sich also als endliche Summe darstellen.

Beweis:

Man rechnet nach:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 f(t) \sin(k\pi t) dt \\
= & 2h \sum_{l=1}^M \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{N-1} \sin(k\pi jh) \sin(l\pi jh) \right)}_{= \begin{cases} \frac{1}{2h} & , \quad l = k \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}} \int_0^1 f(t) \sin(l\pi t) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= h \sum_{j=1}^{N-1} \sin(k\pi jh) \underbrace{\sum_{l=1}^M \left(2 \int_0^1 f(t) \sin(l\pi t) dt \right)}_{f(jh)} \sin(l\pi jh) \\
 &\stackrel{(3.13)}{=} h \sum_{j=1}^{N-1} \sin(k\pi jh) F_j,
 \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Bemerkung 3.3.6 Die vorangegangenen Sätze zeigen, daß man beim Übergang zu diskreten Werten nur im Fall $N \leq M$, das heißt, wenn man die Diskretisierung zu grob im Verhältnis zur maximalen in der betrachteten Funktion vorkommenden Frequenz gewählt hat, Informationen verliert. Im Fall $M < N$ entsprechen sich dagegen kontinuierliche Funktionen in D_M und diskrete Datenvektoren in D_M^h völlig.

3.4 Konvergenz und Fehlerabschätzung für den Fall ungestörter Daten

Natürlich kann die im Abschnitt 3.1 hergeleitete Fehlerabschätzung für das Hadamardsche Modellbeispiel nur ein erster Schritt auf dem Weg zu einer allgemeinere Fälle umfassenden Konvergenzaussage beziehungsweise Fehlerabschätzung sein. Ein erster Schritt in diese Richtung besteht darin, daß wir im folgenden auf Σ_1 allgemeinere Daten f_1 (Dirichlet-Daten) und ϕ_1 (Neumann-Daten) zulassen und untersuchen, wie sich die Lösung der Linienmethode verhält, falls wir zunächst annehmen, daß ungestörte Daten vorliegen. Ein wichtiges Ergebnis in diesem Zusammenhang wird eine Konvergenzaussage für Daten in den eben eingeführten endlichdimensionalen Räumen D_M sein.

3.4.1 Darstellung der exakten Lösung

Um den Fehler zwischen der mit Hilfe der Linienmethode bestimmten Näherungslösung des Cauchy-Problems für die Laplace-Gleichung und der exakten Lösung abschätzen zu können, benötigt man zuerst einmal eine Darstellung der exakten Lösung. Man gewinnt sie leicht mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen. Wir werden an dieser Stelle nur das Ergebnis angeben:

Satz 3.4.1 Seien $f_1, \phi_1 \in D$ (vergleiche Definition 3.3.1), $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq r_{max}$. Weiter seien für $k \in \mathbb{N}$ Funktionen $g_k : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ durch

$$g_k(x, y) = 2 \sin(k\pi x) \left((f_1(\cdot), \sin(k\pi \cdot))_{L_2} \cosh(k\pi y) + \frac{(\phi_1(\cdot), \sin(k\pi \cdot))_{L_2}}{k\pi} \sinh(k\pi y) \right)$$

erklärt. Konvergiert dann eine der beiden Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x^2}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 g_k}{\partial y^2}$ gleichmäßig auf $[0, 1] \times [0, r_{\max}]$, so konvergiert auch die andere der beiden Reihen und die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial g_k}{\partial y}$$

gleichmäßig auf $[0, 1] \times [0, r_{\max}]$. Darüberhinaus löst die Funktion

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x, y) \quad (3.15)$$

Problem 2.1.3. Ist $f_1 = 0$ (homogene Dirichlet-Daten), vereinfacht sich diese Darstellung zu

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2 \sin(k\pi x) \frac{(\phi_1(\cdot), \sin(k\pi \cdot))_{L_2}}{k\pi} \sinh(k\pi y) \right) . \quad (3.16)$$

Die M -te Partialsumme $u_M(x, y)$ der Reihendarstellung (3.15) ist eine harmonische Funktion, die den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_M(x, 0) &= \sum_{k=1}^M 2(f_1(\cdot), \sin(k\pi \cdot))_{L_2} \sin(k\pi x) = \bar{P}_M f_1 \\ \frac{\partial u_M}{\partial y}(x, 0) &= \sum_{k=1}^M 2(\phi_1(\cdot), \sin(k\pi \cdot))_{L_2} \sin(k\pi x) = \bar{P}_M \phi_1 \\ u_M(0, y) &= u_M(1, y) = 0 \end{aligned}$$

genügt, wobei

$$\bar{P}_M : C^1[0, 1] \ni g \mapsto \sum_{k=1}^M 2(g(\cdot), \sin(k\pi \cdot))_{L_2} \sin(k\pi x) \quad (3.17)$$

die orthogonale Projektion auf den Raum D_M , der von den Funktionen $\sqrt{2} \sin(k\pi x)$, $k = 1, \dots, M$ aufgespannt wird, darstellt (vergleiche Satz 3.3.3).

Beweis:

Durch gliedweise partielle Differentiation von u erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} -2(k\pi)^2 g_k \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2(k\pi)^2 g_k, \end{aligned}$$

also

$$\Delta u = 0 \quad .$$

Eine der beiden entstehenden Reihen ist als gleichmäßig konvergent vorausgesetzt. Da sich beide Reihen nur durch das Vorzeichen ihrer Glieder unterscheiden, konvergiert damit auch die andere Reihe gleichmäßig. Weiter ist damit auch die gleichmäßige Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial g_k}{\partial y}$$

gesichert, da aus ihnen durch gliedweise Differentiation eine gleichmäßig konvergente Reihe entsteht (vergleiche zum Beispiel [Heu01] Band 1, Satz 104.6).

Außerdem sind die Randbedingungen wegen

$$\begin{aligned} & u(x, 0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2(f_1, \sin(k\pi t))_{L_2} \sin(k\pi x) \\ &\stackrel{\text{Satz 3.2.5}}{=} f_1(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2(\phi_1, \sin(k\pi t))_{L_2} \sin(k\pi x) \\ &\stackrel{\text{Satz 3.2.5}}{=} \phi_1(x) \end{aligned}$$

sowie (man beachte $g_k(0) = g_k(1) = 0$)

$$u(0, y) = u(1, y) = 0$$

erfüllt. Ersetzt man im vorangegangenen Beweisabschnitt unendliche durch endliche Summen, so erhält man mühelos die Behauptungen über die Partialsumme u_M , $M \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung 3.4.2 1. *Es erscheint sehr schwierig, eine genaue sowohl hinreichende als auch notwendige Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz der in Satz 3.4.1 angegebenen Reihe(n) zu finden, auch wenn natürlich die Standardsätze über notwendige (die Glieder der Reihe müssen eine Nullfolge bilden) und hinreichende Bedingungen (Konvergenzkriterien, insbesondere Weierstraß'sches Majorantenkriterium) der (gleichmäßigen) Konvergenz von Reihen jeweils im konkreten Einzelfall Anwendung finden können.*

2. *Die Bedingung $f_1, \phi_1 \in D_M$ ist hinreichend für die Reihenkonvergenz (da die Reihe in diesem Fall nur endlich viele nichtverschwindende Summanden besitzt), jedoch nicht*

notwendig, wie das folgende Beispiel zeigen wird (zur Definition von r_{max} siehe Problem 2.1.1 und den vorangehenden Absatz). Man definiert dazu

$$a_l(t) := \frac{2 \sin(l\pi t)}{l^2 \cosh(l\pi r_{max})}, \quad t \in [0, 1]$$

$$b_l(t) := \frac{2\pi \sin(l\pi t)}{l \sinh(l\pi r_{max})}, \quad t \in [0, 1]$$

$$f_1(t) := \sum_{l=1}^{\infty} a_l(t), \quad t \in [0, 1]$$

$$\phi_1(t) := \sum_{l=1}^{\infty} b_l(t), \quad t \in [0, 1] \quad .$$

Für $l \geq \max\left(\frac{\ln 4}{\pi r_{max}}, \frac{8}{\pi r_{max}^2}\right)$ gilt

$$\begin{aligned} & \ln 4 \leq l\pi r_{max} \\ \implies & 4 \leq \exp(l\pi r_{max}) \\ \implies & 2 \leq \cosh(l\pi r_{max}) \\ \implies & \frac{2}{l^2 \cosh(l\pi r_{max})} \leq \frac{1}{l^2} \\ \implies & |a_l(t)| \leq \frac{1}{l^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & (4 - y)\pi \leq l \frac{\pi^2 r_{max}^2}{2} \\ \implies & 4\pi \leq \frac{\left(1 + l\pi r_{max} + \frac{(l\pi r_{max})^2}{2}\right) - 1}{l} \\ \implies & 2\pi \leq \frac{\exp(l\pi r_{max}) - 1}{2l} \\ \implies & 2\pi \leq \frac{\sinh(l\pi r_{max})}{l} \\ \implies & \frac{2\pi}{l \sinh(l\pi r_{max})} \leq \frac{1}{l^2} \\ \implies & |b_l(t)| \leq \frac{1}{l^2} \end{aligned}$$

und daher sind nach dem Weierstraß'schen Majorantenkriterium beide Reihen absolut und gleichmäßig konvergent. Bei gliedweiser Differentiation nach t erhält man mit analoger Argumentation wiederum absolut und gleichmäßig konvergente Reihen, so daß insgesamt $f_1, \phi_1 \in C^1[0, 1]$ ist (bei sukzessiver gliedweiser Differentiation erkennt man sogar $f_1, \phi_1 \in C^\infty[0, 1]$). Da offenbar auch beide Funktionen bei $t = 0$ bzw. $t = 1$

verschwinden, gilt also $f_1, \phi_1 \in D$. Andererseits sind f_1, ϕ_1 in keinem Raum D_M , $M \in \mathbb{N}$ enthalten, denn man hat für beliebiges $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 f_1(t) \sin(k\pi t) dt \\
 = & \int_0^1 \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{2 \sin(l\pi t)}{l^2 \cosh(l\pi r_{max})} \right) \cdot \sin(k\pi t) dt \\
 = & \int_0^1 \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{2 \sin(l\pi t)}{l^2 \cosh(l\pi r_{max})} \cdot \sin(k\pi t) \right) dt \\
 \stackrel{\text{glm. Konv.}}{=} & \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{2}{l^2 \cosh(l\pi r_{max})} \sin(l\pi t) \sin(k\pi t) dt \\
 = & \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l^2 \cosh(l\pi r_{max})} \cdot \underbrace{\int_0^1 \sin(k\pi t) \sin(l\pi t) dt}_{= \frac{1}{2} \delta_{k,l} \text{ nach Lemma 3.2.1}} \right) \\
 = & \frac{1}{k^2 \cosh(k\pi r_{max})} \\
 \neq & 0
 \end{aligned}$$

und mit Hilfe derselben Schlußweise

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \phi_1(t) \sin(k\pi t) dt \\
 = & \int_0^1 \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{2\pi \sin(l\pi t)}{l \sinh(l\pi r_{max})} \right) \cdot \sin(k\pi t) dt \\
 = & \int_0^1 \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi \sin(l\pi t)}{l \sinh(l\pi r_{max})} \cdot \sin(k\pi t) \right) dt \\
 \stackrel{\text{glm. Konv.}}{=} & \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{2\pi}{l \sinh(l\pi r_{max})} \sin(l\pi t) \sin(k\pi t) dt \\
 = & \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{l \sinh(l\pi r_{max})} \cdot \underbrace{\int_0^1 \sin(k\pi t) \sin(l\pi t) dt}_{= \frac{1}{2} \delta_{k,l} \text{ nach Lemma 3.2.1}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi k}{k^2 \sinh(k\pi r_{max})} \\
&\neq 0,
\end{aligned}$$

also

$$\frac{(\phi_1(\cdot), \sin(k\pi\cdot))_{L_2}}{\pi k} = \frac{1}{k^2 \sinh(k\pi r_{max})} .$$

Daraus folgt dann für die in Satz 3.4.1 definierten Funktionen g_k bei Verwendung obiger Ergebnisse sowie der Monotonie des sinus hyperbolicus und des cosinus hyperbolicus:

$$\begin{aligned}
&|g_k(x, y)| \\
&= 2|\sin(k\pi x)| \left| (f_1(\cdot), \sin(k\pi\cdot))_{L_2} \cosh(k\pi y) + \frac{(\phi_1(\cdot), \sin(k\pi\cdot))_{L_2}}{k\pi} \sinh(k\pi y) \right| \\
&= 2 \underbrace{|\sin(k\pi x)|}_{\leq 1} \left| \frac{\cosh(k\pi y)}{k^2 \cosh(k\pi r_{max})} + \frac{\sinh(k\pi y)}{k^2 \sinh(k\pi r_{max})} \right| \\
&\leq 2 \left(\left| \frac{\cosh(k\pi y)}{k^2 \cosh(k\pi r_{max})} \right| + \left| \frac{\sinh(k\pi y)}{k^2 \sinh(k\pi r_{max})} \right| \right) \\
&\leq \frac{4}{k^2}
\end{aligned}$$

Nach dem Weierstraß'schen Majorantenkriterium konvergiert die Reihendarstellung (3.15) also absolut und gleichmäßig in x und y , obwohl die zugehörigen Daten, wie eben gesehen, in keinem der Räume D_M , $M \in \mathbb{N}$ liegen.

3.4.2 Ein Konvergenzsatz für beliebige ungestörte Daten

In diesem Abschnitt wollen wir nun untersuchen, unter welchen Voraussetzungen die Liniemethode für zunächst völlig beliebige Cauchy-Daten konvergiert, das heißt, wir fordern zunächst weder, daß die Daten notwendigerweise einem der Räume D_M entstammen müssen noch, daß eine Normbeschränktheit der Lösung auf dem oberen Rand Σ_4 gilt (was die Grundlage der nachfolgenden Untersuchungen ab Kapitel 4 sein wird). Der Preis den man in gewissem Sinne für die Allgemeinheit des Ergebnisses zu entrichten hat, ist die relative Künstlichkeit der Voraussetzungen, die man einführen muß, um Konvergenz zu zeigen. Bevor wir jedoch den eigentlichen Beweis angehen können, benötigt man noch gewisse vorbereitende Resultate, die wir jetzt anführen wollen.

Hilfssatz 3.4.3 *Gegeben seien Funktionen*

$$g_k^{(N)} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \quad N, k \in \mathbb{N}$$

und es existiere für jedes feste $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{N}$

$$g_k(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} g_k^{(N)}(x, y) .$$

Darüberhinaus sei (gleichmäßig in k)

$$|g_k(x, y) - g_k^{(N)}(x, y)| \leq a_N, \quad \forall N \geq N_0, \quad (3.18)$$

wobei $N \cdot a_N \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) vorausgesetzt wird (Mit anderen Worten gilt unter Verwendung des Landauschen Symbols o : $|g_k(x, y) - g_k^{(N)}(x, y)| = o\left(\frac{1}{N}\right)$ ($N \rightarrow \infty$) gleichmäßig in k).

Weiter konvergiere $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x, y)$ punktweise gegen $G(x, y)$. Dann gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N g_k^{(N)}(x, y) = G(x, y) \quad .$$

Beweis:

Es gilt

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^N g_k^{(N)}(x, y) - G(x, y) \right| \\ & \leq \left| \sum_{k=1}^N (g_k^{(N)}(x, y) - g_k(x, y)) \right| + \left| \sum_{k=1}^N g_k(x, y) - G(x, y) \right| \\ & \stackrel{N \geq N_0}{\leq} N \cdot a_N + \left| \sum_{k=1}^N g_k(x, y) - G(x, y) \right| \\ & \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

woraus sofort die Behauptung folgt. □

Bemerkung 3.4.4 Definiert man für beliebiges $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Funktionen $g_k^{(N)}$ durch $g_k^{(N)}(x, y) = \frac{1}{N}$, so folgt $g_k(x, y) = 0$ sowie $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x, y) = 0 = G(x, y)$, aber

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N g_k^{(N)}(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot \frac{1}{N} = 1 \neq 0 = G(x, y) \quad .$$

Dieses Beispiel zeigt, daß bei Verletztsein der Bedingung (3.18) die Behauptung des Hilfssatzes 3.4.3 durchaus nicht selbstverständlich ist.

Satz 3.4.5 (Konvergenzsatz für beliebige ungestörte Daten) Vorausgesetzt sei die Konvergenz der Reihe (3.15). Weiter seien Daten f_1, ϕ_1 derart gegeben, daß mit

$$\begin{aligned} g_k^{(N)}(x_i, y) & := 2 \sin(k\pi x_i) \left(\cosh \left(\frac{2}{h} \sin \left(kh \frac{\pi}{2} \right) y \right) \left(h \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi) (F_1)_j \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{h}{2 \sin \left(kh \frac{\pi}{2} \right)} \sinh \left(\frac{2}{h} \sin \left(kh \frac{\pi}{2} \right) y \right) \left(h \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi) (\Phi_1)_j \right) \right) \end{aligned}$$

und

$$g_k(x_i, y) := 2 \sin(k\pi x_i) \left((f_1(t), \sin(k\pi t))_{L_2} \cosh(k\pi y) + \frac{(\phi_1(t), \sin(k\pi t))_{L_2}}{k\pi} \sinh(k\pi y) \right)$$

gilt (man beachte $h = \frac{1}{N}$):

$$|g_k^{(N)}(x_i, y) - g_k(x_i, y)| = o\left(\frac{1}{N}\right) = o(h) \quad (h \rightarrow 0) \quad . \quad (3.19)$$

Dann konvergiert für $h \rightarrow 0$ die Näherungslösung $u_i(y)$ (ermittelt nach (2.7)) gegen die exakte Lösung $u(x_i, y)$ (ermittelt nach 3.15).

Beweis:

Wir betrachten die explizite Lösungsdarstellung $u_i(y)$ auf der i -ten Linie und erhalten mittels (2.7):

$$\begin{aligned} & u_i(y) \\ = & 2h \cdot \sum_{k=1}^{N-1} \left(\sin(ikh\pi) \left(\cosh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi)(F_1)_j \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{h}{2 \sin(kh\frac{\pi}{2})} \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi)(\Phi_1)_j \right) \right) \\ = & \sum_{k=1}^{N-1} \left(2 \cdot \sin(k\pi x_i) \left(\cosh\left(\frac{2}{h} \sin(kh\frac{\pi}{2}) y\right) \left(h \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi)(F_1)_j \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{h}{2 \sin(kh\frac{\pi}{2})} \sinh\left(\frac{2}{h} \sin(kh\frac{\pi}{2}) y\right) \left(h \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi)(\Phi_1)_j \right) \right) \right) \\ = & \sum_{k=1}^{N-1} g_k^{(N)}(x_i, y) \end{aligned}$$

Man hat

$$\begin{aligned} & \cosh\left(\underbrace{\frac{2}{h} \sin(kh\frac{\pi}{2}) y}_{\rightarrow k\pi y (h \rightarrow 0)}\right) \\ \xrightarrow{\text{Lemma 3.1.2}} & \cosh(k\pi y) \quad (h \rightarrow 0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{array}{l} h \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi)(F_1)_j \\ \xrightarrow{\text{summierte Sehnentrapezformel}} \int_0^1 \sin(k\pi x) f_1(x) dx \quad (h \rightarrow 0) \end{array}$$

sowie völlig analog:

$$\begin{array}{l} \sinh \left(\underbrace{\frac{2}{h} \sin \left(kh \frac{\pi}{2} \right) y}_{\rightarrow k\pi y (h \rightarrow 0)} \right) \\ \xrightarrow{\text{Lemma 3.1.2}} \sinh(k\pi y) \quad (h \rightarrow 0), \end{array}$$

$$\begin{array}{l} h \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi)(\phi_1)_j \\ \xrightarrow{\text{summierte Sehnentrapezformel}} \int_0^1 \sin(k\pi x) f_1(x) dx \quad (h \rightarrow 0) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{l} \frac{h}{2 \sin \left(kh \frac{\pi}{2} \right)} \\ \xrightarrow{\text{Lemma 3.1.2}} \frac{1}{k\pi} \quad (h \rightarrow 0) \quad . \end{array}$$

Einsetzen dieser Konvergenzergebnisse liefert $g_k^N \rightarrow g_k (N \rightarrow \infty)$ punktweise.

An dieser Stelle kann man nun Hilfssatz 3.4.3 verwenden, dessen Voraussetzungen vollständig erfüllt sind, und erhält so die Behauptung. □

3.4.3 Ein Konvergenzsatz für ungestörte Daten aus D_M

Im folgenden werden wir bis zum Schluß dieses Abschnitts nur noch Daten aus den in Abschnitt 3.3 definierten endlichdimensionalen Räumen D_M beziehungsweise D_M^h betrachten. Als einfache Folgerung aus Satz 3.4.1 erhält man die folgende Darstellung der exakten Lösung:

Satz 3.4.6 (Darstellung der exakten Lösung für Daten aus D_M) Es seien $f_1, \phi_1 \in D_M$, $M < N$ und $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq r_{max}$. Dann löst die Funktion

$$u(x, y) \tag{3.20} \\ = \sum_{k=1}^M \left(2 \sin(k\pi x) \left((f_1(\cdot), \sin(k\pi \cdot))_{L_2} \cosh(k\pi y) + \frac{(\phi_1(\cdot), \sin(k\pi \cdot))_{L_2}}{k\pi} \sinh(k\pi y) \right) \right)$$

Problem 2.1.3.

Beweis:

Offenbar verschwinden wegen $f_1, \phi_1 \in D_M$ in (3.15) alle Summanden ab $k = M + 1$. □

Damit kann nun nachstehender Konvergenzsatz bewiesen werden:

Satz 3.4.7 (Konvergenzsatz für ungestörte Daten in D_M) Seien $f_1, \phi_1 \in D_M$, $M < N$. Dann konvergiert für $h \rightarrow 0$ die Näherungslösung $u_i(y)$ (ermittelt nach (2.7)) gegen die exakte Lösung $u(x_i, y)$ (wie wir sie in (3.20) dargestellt haben). Es gilt für $h < h_0(M) = \frac{4\sqrt{3}}{M\pi}$ die Fehlerabschätzung:

$$|u(x_i, y) - u_i(y)| \leq \frac{M^4 \pi^3 y}{12} \exp(M\pi y) (\|f_1\|_{L_1} + \|\phi_1\|_{L_1}) h^2 = C(M, y, f_1, \phi_1) h^2 \quad .$$

Beweis:

Wegen $f_1, \phi_1 \in D_M$, $M < N$ ist nach Satz 3.3.2 auch $F_1, \Phi_1 \in D_M^h$. Es folgt daher mit Hilfe von (2.7) die folgende Darstellung der Näherungslösung:

$$u_i(y) \\ = \sum_{k=1}^{N-1} 2 \sin(k\pi x_i) \left(\overbrace{\left(h \sum_{j=1}^{N-1} \sin(k\pi jh) (F_1)_j \right)}^{=0, k>M} \cosh \left(\frac{2}{h} \sin \left(kh \frac{\pi}{2} \right) y \right) \right. \\ \left. + \frac{h}{2 \sin \left(kh \frac{\pi}{2} \right)} \underbrace{\left(h \sum_{j=1}^{N-1} \sin(k\pi jh) (\Phi_1)_j \right)}_{=0, k>M} \sinh \left(\frac{2}{h} \sin \left(kh \frac{\pi}{2} \right) y \right) \right) \\ = \sum_{k=1}^M 2 \sin(k\pi x_i) \left(\left(h \sum_{j=1}^{N-1} \sin(k\pi jh) (F_1)_j \right) \cosh \left(\frac{2}{h} \sin \left(kh \frac{\pi}{2} \right) y \right) \right. \\ \left. + \frac{h}{2 \sin \left(kh \frac{\pi}{2} \right)} \left(h \sum_{j=1}^{N-1} \sin(k\pi jh) (\Phi_1)_j \right) \sinh \left(\frac{2}{h} \sin \left(kh \frac{\pi}{2} \right) y \right) \right) \\ \stackrel{\text{Satz 3.3.5}}{=} \sum_{k=1}^M 2 \sin(k\pi x_i) \left(\int_0^1 \sin(k\pi t) f_1(t) dt \cdot \cosh \left(\frac{2}{h} \sin \left(kh \frac{\pi}{2} \right) y \right) \right. \\ \left. + \frac{h}{2 \sin \left(kh \frac{\pi}{2} \right)} \int_0^1 \sin(k\pi t) \phi_1(t) dt \cdot \sinh \left(\frac{2}{h} \sin \left(kh \frac{\pi}{2} \right) y \right) \right)$$

Mittels dieser Darstellung erhält man unter Verwendung von Satz 3.4.6:

$$\begin{aligned}
& |u(x_i, y) - u_i(y)| \\
= & \left| \sum_{k=1}^M 2 \sin(k\pi x_i) \left(\int_0^1 \sin(k\pi t) f_1(t) dt \cdot \left(\cosh(k\pi y) - \cosh\left(\frac{2}{h} \sin\left(kh\frac{\pi}{2}\right) y\right) \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_0^1 \sin(k\pi t) \phi_1(t) dt \cdot \left(\frac{\sinh(k\pi y)}{k\pi} - \frac{h}{2 \sin\left(kh\frac{\pi}{2}\right)} \sinh\left(\frac{2}{h} \sin\left(kh\frac{\pi}{2}\right) y\right) \right) \right) \right| \\
\leq & \sum_{k=1}^M 2 |\sin(k\pi x_i)| \left(\int_0^1 |\sin(k\pi t) f_1(t)| dt \cdot \left| \cosh(k\pi y) - \cosh\left(\frac{2}{h} \sin\left(kh\frac{\pi}{2}\right) y\right) \right| \right. \\
& \left. + \int_0^1 |\sin(k\pi t) \phi_1(t)| dt \cdot \left| \frac{\sinh(k\pi y)}{k\pi} - \frac{h}{2 \sin\left(kh\frac{\pi}{2}\right)} \sinh\left(\frac{2}{h} \sin\left(kh\frac{\pi}{2}\right) y\right) \right| \right) \\
\leq & \sum_{k=1}^M 2 |\sin(k\pi x_i)| \left(\|f_1\|_{L_1} \cdot \left| \cosh(k\pi y) - \cosh\left(\frac{2}{h} \sin\left(kh\frac{\pi}{2}\right) y\right) \right| \right. \\
& \left. + \|\phi_1\|_{L_1} \cdot \frac{1}{k\pi} \left| \sinh(k\pi y) - \frac{kh\frac{\pi}{2}}{\sin\left(kh\frac{\pi}{2}\right)} \sinh\left(\frac{2}{h} \sin\left(kh\frac{\pi}{2}\right) y\right) \right| \right) \\
\stackrel{\text{Hilfss. 3.1.7}}{\leq} & \sum_{k=1}^M 2 \underbrace{|\sin(k\pi x_i)|}_{\leq 1} \left(\|f_1\|_{L_1} \cdot \underbrace{\frac{k^3 \pi^3 y}{24} \sinh(k\pi y)}_{\leq \exp(M\pi y)} h^2 + \|\phi_1\|_{L_1} \cdot \frac{1}{k\pi} \underbrace{\frac{k^3 \pi^3 y}{24} \exp(k\pi y)}_{\leq \exp(M\pi y)} h^2 \right) \\
\leq & \frac{M^4 \pi^3 y}{12} \exp(M\pi y) (\|f_1\|_{L_1} + \|\phi_1\|_{L_1}) h^2 \\
= & C(M, y, f_1, \phi_1) h^2
\end{aligned}$$

Diese Abschätzung gilt für $h < h_0(M) = \frac{4\sqrt{3}}{M\pi} = \min\{h_0(k) \mid k = 1, \dots, M\}$ (siehe Beweis zu Hilfssatz 3.1.7). Aus der Fehlerabschätzung ist auch sofort die Konvergenzaussage des Satzes ersichtlich. Die Konvergenz läuft offenbar quadratisch in h ab. \square

3.5 Die Auswirkung der Schlechtgestellttheit des Cauchy-Problems auf die Linienmethode in einem Modellbeispiel

Bekanntermaßen handelt es sich bei dem bis jetzt betrachteten und explizit mit Hilfe der Linienmethode gelösten Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung um ein schlechtgestelltes Problem; kleine Datenstörungen können also große Fehler in der Lösung verursachen

und die Lösung somit unbrauchbar machen. Wir wollen uns im laufenden Abschnitt diesen Sachverhalt und seine Ursachen an dem Modellbeispiel, das wir auch schon in Beispiel 3.1.8 betrachtet haben, klar machen.

Für den Beweis benötigt man einige eher technische Resultate, die wir an dieser Stelle vorausschicken:

Lemma 3.5.1 *Seien $k, N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, $h = \frac{1}{N}$. Dann gilt (I =imaginäre Einheit)*

$$\sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi) = \begin{cases} 0 & , \quad kh = 2\nu, \nu \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2I} \left(\frac{1-(-1)^k}{1-e^{Ikh\pi}} - \frac{1-(-1)^k}{1-e^{-Ikh\pi}} \right) & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (3.21)$$

und hieraus folgend mit der Bezeichnung

$$N_0 = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$$

die Beziehung

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{N-1} (\sin(N_0jh\pi) + \sin((N_0+1)jh\pi)) = 1 \quad . \quad (3.22)$$

Darüberhinaus erhält man, wenn man die Bezeichnung $a_N^{(k)} = h \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi)$ einführt, die Zusammenhänge

$$a_N^{(k)} = 0, \quad (3.23)$$

falls k gerade oder $kh = 2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ und

$$a_N^{(k)} = \frac{h \sin(kh\pi)}{1 - \cos(kh\pi)} \rightarrow \frac{2}{k\pi} \quad \left(N \rightarrow \infty, N \geq \frac{k}{2} \right)$$

monoton wachsend, falls k ungerade. Schließlich gilt noch

$$a_N^{(k)} \geq 0, \quad \text{falls } N \geq k \quad . \quad (3.24)$$

Beweis:

Im Falle $kh = 2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ sind die entsprechenden Behauptungen des Lemmas ((3.21) und (3.23)) trivial, da alle Sinusterme unter der Summe in (3.21) verschwinden. Sei also im folgenden $kh \neq 2\nu \forall \nu \in \mathbb{N}$.

Dann gilt offenbar (I=imaginäre Einheit, beachte auch $e^{Ik\pi} = e^{-Ik\pi} = (-1)^k$)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi) &= \sum_{j=0}^{N-1} \sin(kjh\pi) \\
&= \frac{1}{2I} \sum_{j=0}^{N-1} (e^{Ikh\pi} - e^{-Ikh\pi}) \\
&= \frac{1}{2I} \sum_{j=0}^{N-1} \left((e^{Ikh\pi})^j - (e^{-Ikh\pi})^j \right) \\
&\stackrel{\text{geom. Summenf.}}{=} \frac{1}{2I} \left(\frac{1 - (e^{Ikh\pi})^N}{1 - e^{Ikh\pi}} - \frac{1 - (e^{-Ikh\pi})^N}{1 - e^{-Ikh\pi}} \right) \\
&= \frac{1}{2I} \left(\frac{1 - e^{Ik\pi}}{1 - e^{Ikh\pi}} - \frac{1 - e^{-Ik\pi}}{1 - e^{-Ikh\pi}} \right) \\
&= \frac{1}{2I} \left(\frac{1 - (-1)^k}{1 - e^{Ikh\pi}} - \frac{1 - (-1)^k}{1 - e^{-Ikh\pi}} \right)
\end{aligned}$$

Das erste behauptete Ergebnis ist damit bewiesen und wird nun verwendet, um die weiteren Behauptungen zu zeigen. Es folgt nämlich unmittelbar aus (3.21)

$$\begin{aligned}
&\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{N-1} (\sin(N_0jh\pi) + \sin((N_0+1)jh\pi)) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2I} \left(\frac{1 - (-1)^{N_0}}{1 - e^{IN_0h\pi}} - \frac{1 - (-1)^{N_0}}{1 - e^{-IN_0h\pi}} + \frac{1 - (-1)^{N_0+1}}{1 - e^{I(N_0+1)h\pi}} - \frac{1 - (-1)^{N_0+1}}{1 - e^{-I(N_0+1)h\pi}} \right) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2I} \begin{cases} \frac{2}{1 - e^{IN_0h\pi}} - \frac{2}{1 - e^{-IN_0h\pi}} & , \quad N_0 \text{ ungerade} \\ \frac{2}{1 - e^{I(N_0+1)h\pi}} - \frac{2}{1 - e^{-I(N_0+1)h\pi}} & , \quad N_0 \text{ gerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man $\lim_{N \rightarrow \infty} N_0h = \frac{1}{2} = \lim_{N \rightarrow \infty} (N_0+1)h$, so erkennt man, daß beide Teilfolgen für $N \rightarrow \infty$ wegen

$$\frac{1}{2I} \left(\frac{2}{1 - e^{IN_0h\pi}} - \frac{2}{1 - e^{-IN_0h\pi}} \right) \rightarrow \frac{1}{2I} \left(\frac{2}{1-i} - \frac{2}{1+i} \right) = \frac{1}{2I} \frac{2(1+i) - 2(1-i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{4I}{2I \cdot 2} = 1$$

und

$$\frac{1}{2I} \left(\frac{2}{1 - e^{I(N_0+1)h\pi}} - \frac{2}{1 - e^{-I(N_0+1)h\pi}} \right) \rightarrow \frac{1}{2I} \left(\frac{2}{1-i} - \frac{2}{1+i} \right) \stackrel{\text{s.o.}}{=} 1$$

denselben Grenzwert, der somit der Grenzwert der gesamten Folge ist, nämlich 1, besitzen, womit (3.22) gezeigt ist (der Fall $N_0h = 2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ kann hier wegen $N_0h < Nh = 1$ nicht auftreten). Darüberhinaus gilt für gerades $k \in \mathbb{N}$

$$a_N^{(k)} \stackrel{(3.21)}{=} \frac{h}{2I} \left(\overbrace{\frac{1 - (-1)^k}{1 - e^{Ikh\pi}}}^{=0} - \overbrace{\frac{1 - (-1)^k}{1 - e^{-Ikh\pi}}}^{=0} \right) = 0$$

und für ungerades k folgt schließlich unter Verwendung der bekannten Formeln $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$, die für jede beliebige komplexe Zahl z Gültigkeit besitzen:

$$\begin{aligned}
 & a_N^{(k)} \\
 (3.21) \quad & \stackrel{=}{=} \frac{h}{2I} \left(\overbrace{\frac{1 - (-1)^k}{1 - e^{ikh\pi}}}_{=2} - \overbrace{\frac{1 - (-1)^k}{1 - e^{-ikh\pi}}}_{=2} \right) \\
 & = \frac{h}{I} \left(\frac{1}{1 - e^{ikh\pi}} - \frac{1}{1 - e^{-ikh\pi}} \right) \\
 & = \frac{h(1 - e^{-ikh\pi} - 1 + e^{ikh\pi})}{I(1 - e^{ikh\pi} - e^{-ikh\pi} + 1)} \\
 & = \frac{h2I \sin(kh\pi)}{I(2 - 2\cos(kh\pi))} \\
 & = \frac{h \sin(kh\pi)}{1 - \cos(kh\pi)} .
 \end{aligned}$$

Zweimalige Anwendung der Regel von de l'Hôpital ergibt

$$\begin{aligned}
 & \lim_{N \rightarrow \infty} a_N^{(k)} \\
 & = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin(kh\pi)}{1 - \cos(kh\pi)} \\
 & = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(kh\pi) + kh\pi \cos(kh\pi)}{k\pi \sin(kh\pi)} \\
 & = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k\pi \cos(kh\pi) + k\pi \cos(kh\pi) - (k\pi)^2 h \sin(kh\pi)}{(k\pi)^2 \cos(kh\pi)} \\
 & = \frac{2k\pi}{(k\pi)^2} \\
 & = \frac{2}{k\pi} .
 \end{aligned}$$

Die Monotoniebehauptung ergibt sich durch Differentiation des gefundenen Terms für $a_N^{(k)}$, denn es ist

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dh} \left(\frac{h \sin(kh\pi)}{1 - \cos(kh\pi)} \right) \\
 & = \frac{(\sin(kh\pi) + kh\pi \cos(kh\pi))(1 - \cos(kh\pi)) - kh\pi \sin^2(kh\pi)}{(1 - \cos(kh\pi))^2} \\
 & = \frac{\sin(kh\pi)(1 - \cos(kh\pi)) + kh\pi \cos(kh\pi) - kh\pi \overbrace{(\cos^2(kh\pi) + \sin^2(kh\pi))}_{=1}}{(1 - \cos(kh\pi))^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& < 0, \text{ da } \sin(x) < x, x > 0 \\
& = \frac{\overbrace{\sin(kh\pi) - kh\pi}^{< 0}}{\underbrace{1 - \cos(kh\pi)}_{> 0}} \\
& < 0 \quad .
\end{aligned}$$

Der Beweis der verwendeten Aussage $\sin(x) < x, x > 0$ verläuft analog zu dem von Lemma 3.1.1 (b); die dortige Aussage wird lediglich verschärft. Damit ist $a_N^{(k)}$ monoton fallend in h also monoton wachsend in N . Ungleichung (3.24) folgt unmittelbar aus $a_k^{(k)} = 0$ und der eben gezeigten Monotonie in Verbindung mit Gleichung (3.23). \square

Lemma 3.5.2 Sei $N \in \mathbb{N}, N \geq 2, h = \frac{1}{N}, N_0 = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$. Dann gilt

(a) Es existiert ein $h_1 > 0$, so daß für alle $h < h_1$ die Abschätzung

$$\frac{\sin((N_0 + 1)h\pi)}{\sin((N_0 + 1)h\frac{\pi}{2})} \sum_{j=1}^{N-1} (\sin(N_0jh\pi) + \sin((N_0 + 1)jh\pi)) \geq \frac{1}{2} \quad (3.25)$$

erfüllt ist.

(b) Es existiert zu beliebigem $S_2 > 0$ ein $h_2 > 0$, so daß für alle $h < h_2$ die Ungleichung

$$h^2 \sinh\left(\sqrt{-\lambda_{N_0}y}\right) \geq S_2 \quad (3.26)$$

gilt (dabei ist $\lambda_j = -\frac{4}{h^2} \sin^2(jh\frac{\pi}{2})$, $j = 1, \dots, N - 1$ und $y > 0$ beliebig, aber fest).

Beweis:

(a) Wegen

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{N-1} (\sin(N_0jh\pi) + \sin((N_0 + 1)jh\pi)) \stackrel{(3.22)}{=} 1$$

existiert zu $\varepsilon_3 = \frac{1}{2}$ ein $N_3 \in \mathbb{N}$ (und damit ein zugehöriges $h_3 = \frac{1}{N_3}$), so daß für alle $N > N_3$ (gleichbedeutend ist $h < h_3$)

$$\sum_{j=1}^{N-1} (\sin(N_0jh\pi) + \sin((N_0 + 1)jh\pi)) \geq 1 - \varepsilon_3 = \frac{1}{2} \quad (3.27)$$

gilt. Mit analoger Argumentation schließt man unter Beachtung von $\lim_{h \rightarrow 0} (N_0 + 1)h = \frac{1}{2}$ zunächst

$$\frac{\sin((N_0 + 1)h\pi)}{\sin((N_0 + 1)h\frac{\pi}{2})} \rightarrow \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}$$

und daraus, daß zu $\varepsilon_4 = \sqrt{2} - 1$ ein $N_4 \in \mathbb{N}$ (und damit ein zugehöriges $h_4 = \frac{1}{N_4}$) existiert, so daß für alle $N > N_4$ (also $h < h_4$) die Ungleichung

$$\frac{\sin((N_0 + 1)h\pi)}{\sin((N_0 + 1)h\frac{\pi}{2})} \geq \sqrt{2} - \varepsilon_4 = 1 \quad (3.28)$$

erfüllt ist. Setzt man nun $N_1 = \max(N_3, N_4)$ (mithin also $h_1 = \frac{1}{N_1} = \min(h_3, h_4)$), so folgt aus (3.27) und (3.28) für jedes $h = \frac{1}{N} < h_1$ die behauptete Abschätzung.

(b) Sei $S_2 > 0$ beliebig. Definiere $N_2 = \max\left(\left\lceil \frac{6S_2}{y^3} \right\rceil, 3\right)$ und $h_2 = \frac{1}{N_2}$. Dann folgt für $h \leq h_2$ zunächst

$$\begin{aligned} & N_0 h \\ &= \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor h \\ &= \begin{cases} \frac{N}{2} h & , \quad N \text{ gerade} \\ \frac{N-1}{2} h & , \quad N \text{ ungerade} \end{cases} \\ &\geq \frac{N-1}{2} h \\ &= \frac{1-h}{2} \\ &\stackrel{N_2 \geq 3}{\geq} \frac{1 - \frac{1}{3}}{2} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

und daraus unter Berücksichtigung der Reihenentwicklung

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (3.29)$$

für alle $N > N_2$ (d.h. $h < h_2$) die Abschätzung:

$$\begin{aligned} & h^2 \sinh\left(\sqrt{-\lambda_{N_0}} y\right) \\ &= h^2 \sinh\left(\frac{2}{h} \sin\left(\underbrace{N_0 h}_{\geq \frac{1}{3}} \frac{\pi}{2}\right) y\right) \\ &\geq \frac{1}{N^2} \sinh\left(2N \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{=\frac{1}{2}} y\right) \\ &= \frac{1}{N^2} \sinh(Ny) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(3.29)}{\geq} \frac{1}{N^2} \cdot \frac{(Ny)^3}{3!} \\
& = N \cdot \frac{y^3}{6} \\
& \geq \frac{6S_2}{y^3} \cdot \frac{y^3}{6} \\
& = S_2
\end{aligned}$$

□

Beispiel 3.5.3 Sei $u(x, y) = u_2(x, y)$ wie in Beispiel 3.1.8 (hier für $m = 2$) definiert. Seien weiter unveränderte Dirichlet-Daten

$$F_1 = (0, \dots, 0)$$

sowie gestörte Neumann-Daten

$$\Phi_{1,\varepsilon} = \left(\frac{\sin(2\pi x_i) - \varepsilon}{2\pi} \right)_{i=1,\dots,N-1}$$

gegeben. Bestimmt man nun zu diesen gestörten Daten mit Hilfe von (2.7) beziehungsweise (2.8) die Lösung $u_{i,\varepsilon}$, $1 \leq i \leq N - 1$, so existiert zu jedem $y > 0$ und zu jeder Schranke $0 < S \in \mathbb{R}$ ein $h^* = h^*(y, S)$, so daß für den Fehler bei $(x_1, y) = (1 \cdot h, y)$ gilt:

$$|u(x_1, y) - u_{1,\varepsilon}(y)| \geq S \quad .$$

Der Fehler wird also auch im Fall sehr kleiner Datenstörungen beliebig groß, wenn man h nur klein genug wählt (was hier exemplarisch anhand der Lösung auf der ersten Linie gezeigt wird).

Beweis:

Sei $S > 0$ beliebig. Wir betrachten zunächst den Fehlerterm, der auf der i -ten Linie ($1 \leq i \leq N - 1$) die Näherungslösung u_i zu ungestörten Daten Φ_1 mit der Näherungslösung $u_{i,\varepsilon}$ zu gestörten Daten $\Phi_{1,\varepsilon}$ vergleicht:

$$\begin{aligned}
& |u_i(y) - u_{i,\varepsilon}(y)| \\
\stackrel{(2.8)}{=} & \left| \frac{h^2}{2\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\sin(ikh\pi)}{\sin(kh\frac{\pi}{2})} \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi) \sin(2jh\pi) \right) \right. \\
& \left. - \frac{h^2}{2\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\sin(ikh\pi)}{\sin(kh\frac{\pi}{2})} \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi) (\sin(2jh\pi) - \varepsilon) \right) \right| \\
= & \varepsilon \frac{h^2}{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\sin(ikh\pi)}{\sin(kh\frac{\pi}{2})} \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi) \right) \right|
\end{aligned}$$

Betrachtet man diesen Fehlerterm nun für $i = 1$ und setzt noch

$$N_0 = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor ,$$

so erkennt man unschwer mit Hilfe der Abschätzungen

$$\frac{\sin(ikh\pi)}{\sin(kh\frac{\pi}{2})} = \frac{\sin(kh\pi)}{\sin(kh\frac{\pi}{2})} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi) \stackrel{(3.24)}{\geq} 0, \quad \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) > 0 \quad (3.30)$$

und (beachte $|\frac{\pi}{2} - N_0h\pi| \leq |\frac{\pi}{2} - (N_0 + 1)h\pi|$ und die explizite Darstellung der λ_k in Lemma 2.2.3)

$$\frac{\sin(N_0h\pi)}{\sin(N_0h\frac{\pi}{2})} \geq \frac{\sin((N_0 + 1)h\pi)}{\sin((N_0 + 1)h\frac{\pi}{2})}, \quad \sinh(\sqrt{-\lambda_{N_0+1}}y) \geq \sinh(\sqrt{-\lambda_{N_0}}y), \quad (3.31)$$

daß der Fehler wie folgt nach unten abgeschätzt werden kann:

$$\begin{aligned} & |u_1(y) - u_{1,\varepsilon}(y)| \\ \stackrel{(3.30)}{=} & \varepsilon \frac{h^2}{2\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\sin(kh\pi)}{\sin(kh\frac{\pi}{2})} \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi) \right) \\ \geq & \varepsilon \frac{h^2}{2\pi} \left(\frac{\sin(N_0h\pi)}{\sin(N_0h\frac{\pi}{2})} \sinh(\sqrt{-\lambda_{N_0}}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin(N_0jh\pi) \right. \\ & \left. + \frac{\sin((N_0 + 1)h\pi)}{\sin((N_0 + 1)h\frac{\pi}{2})} \sinh(\sqrt{-\lambda_{N_0+1}}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin((N_0 + 1)jh\pi) \right) \\ \stackrel{(3.31)}{\geq} & \varepsilon \frac{h^2}{2\pi} \frac{\sin((N_0 + 1)h\pi)}{\sin((N_0 + 1)h\frac{\pi}{2})} \sinh(\sqrt{-\lambda_{N_0}}y) \sum_{j=1}^{N-1} (\sin(N_0jh\pi) + \sin((N_0 + 1)jh\pi)) \\ \stackrel{(3.25)}{\geq} & \varepsilon \frac{1}{4\pi} h^2 \sinh(\sqrt{-\lambda_{N_0}}y), \quad h \leq h_1 \\ \stackrel{(3.26)}{\geq} & \frac{\varepsilon}{4\pi} S_2, \quad h \leq h_2 \\ S_2 := & \frac{4\pi(S+1)}{\varepsilon} S + 1 \end{aligned}$$

Sei nun $1 > \delta > 0$ beliebig. Dann gilt nach der in Beispiel 3.1.8 bewiesenen Aussage, daß ein $h_0 > 0$ existiert, so daß für alle $h = \frac{1}{N} < h_0$, $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|u(x_i, y) - u_i(y)| \leq \delta \quad 1 \leq i \leq N - 1 \quad .$$

Wähle nun $h < h^* := \min(h_0, h_1, h_2)$. Es folgt in diesem Fall

$$\begin{aligned}
& |u(x_i, y) - u_{i,\varepsilon}(y)| \\
& \geq \left| \underbrace{|u(x_i, y) - u_i(y)|}_{\leq \delta < 1} - \underbrace{|u_i(y) - u_{i,\varepsilon}(y)|}_{\geq S+1 > 1} \right| \\
& \geq |u_i(y) - u_{i,\varepsilon}(y)| - \delta \\
& \geq S + 1 - 1 \\
& = S,
\end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Die Aussage des vorangegangenen Beispiels illustriert nochmals die wohlbekannte Tatsache der Schlechtgestellttheit des Cauchy-Problems im Fall beliebiger Daten, an der auch die Diskretisierung nichts ändert. Durch Hinzufügen bestimmter a-priori Informationen kann dieses Problem jedoch in ein gutgestelltes Problem überführt werden, ist also bedingt gutgestellt (englisch: conditionally well-posed), wie der folgende Abschnitt für den Fall, daß die Cauchy-Daten aus einem der Räume D_M stammen, zeigen wird (zur sonst in der Literatur üblichen Bedingung, die das Cauchy-Problem in ein gutgestelltes Problem überführt, nämlich einer Normbeschränktheitsbedingung an die Lösung, kommen wir später in Kapitel 4).

3.6 Die bedingte Gutgestellttheit des CP für Daten in D_M^h , Konvergenzsatz und Fehlerabschätzung

In der Praxis numerischer Berechnungen muß man immer davon ausgehen, daß man niemals exakte Daten vorliegen hat, sondern immer nur durch Meßfehler oder sonstige Ursachen gestörte Daten. Wir werden zunächst nur den Fall betrachten, daß homogene Dirichlet-Daten vorliegen und die Neumann-Daten Φ_1 mit einer punktwisen Störung mit Maximalbetrag $\varepsilon > 0$ behaftet sind und später die Ergebnisse dann auf den Fall, daß die Dirichlet-Daten ebenfalls gestört sein können, erweitern. Das Hauptergebnis ist dabei ein Stabilitätsresultat, falls die Daten Φ_1 aus dem Raum D_M^h stammen. Die gestörten Daten sind allerdings selbst unter dieser Voraussetzung noch nicht notwendig im Raum D_M^h enthalten, sondern man kann im Gegenteil erwarten, daß dies nicht der Fall ist. Wir werden daher, um dem im vergangenen Abschnitt aufgezeigten Problem der Schlechtgestellttheit zu begegnen, die gestörten Daten zunächst wiederum in den Raum D_M^h projizieren. Einige Eigenschaften der dabei verwendeten orthogonalen Projektion rufen wir uns im nachfolgenden Lemma 3.6.2 kurz in Erinnerung. Zuvor sei darauf verwiesen, daß die Bedingung $\Phi_1 \in D_M^h$ tatsächlich auch im Fall des kontinuierlichen Cauchy-Problems dafür sorgt, daß das Problem gutgestellt ist, da der Lösungsoperator auf dem Raum D_M stetig ist. Dies zeigt der unmittelbar folgende Satz.

Satz 3.6.1 Sei A der Lösungsoperator auf D zum Cauchy-Problem 2.1.3 mit $f_1 = 0$, das heißt

$$A : D \ni \phi_1 \mapsto u|_{\Sigma_4} \in L_2(\Sigma_4), \quad (3.32)$$

wobei u Problem 2.1.3 mit $f_1 = 0$ und Neumann-Daten ϕ_1 löst. Dann ist A auf D_M ein stetiger, linearer Operator.

Beweis:

Sei

$$A(\lambda\phi_1 + \mu\psi_1) = w, \quad A(\phi_1) = u, \quad A(\psi_1) = v, \quad u, v, w \in L_2(\Sigma_4), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad .$$

Dann hat man für die Linearität zu zeigen, daß

$$w = \lambda u + \mu v$$

gilt, mit anderen Worten, daß $\lambda u + \mu v$ das Cauchy-Problem 2.1.3 zu Neumann-Daten $\lambda\phi_1 + \mu\psi_1$ löst. Es gilt nun

$$\Delta(\lambda u + \mu v) = \lambda \underbrace{\Delta u}_{=0} + \mu \underbrace{\Delta v}_{=0} = 0$$

sowie die Randbedingungen

$$\begin{aligned} (\lambda u + \mu v)|_{\Sigma_i} &= \lambda u|_{\Sigma_i} + \mu v|_{\Sigma_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial(\lambda u + \mu v)}{\partial y}|_{\Sigma_1} &= \lambda \frac{\partial u}{\partial y}|_{\Sigma_1} + \mu \frac{\partial v}{\partial y}|_{\Sigma_1} = \lambda\phi_1 + \mu\psi_1, \end{aligned}$$

was die Linearität beweist. Zum Nachweis der Stetigkeit, sei $\phi_1 \in D_M$ beliebig und u die zugehörige Lösung des Cauchy-Problems. Nach Satz 3.4.6 folgt dann (beachte $f_1 = 0$ und $\overline{w_k}(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$ (siehe Satz 3.3.3))

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^M \overline{w_k}(x) \frac{(\phi_1, \overline{w_k})_{L_2}}{k\pi} \sinh(k\pi y)$$

und daraus

$$u^2(x, y) = \sum_{k,l=1}^M \overline{w_k}(x) \overline{w_l}(x) \frac{(\phi_1, \overline{w_k})_{L_2}}{k\pi} \frac{(\phi_1, \overline{w_l})_{L_2}}{l\pi} \sinh(k\pi y) \sinh(l\pi y) \quad .$$

Dieses Ergebnis setzt man ein, um die gewünschte Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \|A\phi_1\|_{L_2(\Sigma_4)}^2 \\
= & \|u|_{\Sigma_4}\|_{L_2(\Sigma_4)}^2 \\
= & \int_0^1 u^2(x, r_{max}) dx \\
= & \int_0^1 \sum_{k,l=1}^M \overline{w_k}(x) \overline{w_l}(x) \frac{(\phi_1, \overline{w_k})_{L_2}}{k\pi} \frac{(\phi_1, \overline{w_l})_{L_2}}{l\pi} \sinh(k\pi r_{max}) \sinh(l\pi r_{max}) dx \\
= & \sum_{k,l=1}^M \frac{(\phi_1, \overline{w_k})_{L_2}}{k\pi} \frac{(\phi_1, \overline{w_l})_{L_2}}{l\pi} \sinh(k\pi r_{max}) \sinh(l\pi r_{max}) \underbrace{\int_0^1 \overline{w_k}(x) \overline{w_l}(x) dx}_{=\delta_{k,l}} \\
= & \sum_{k=1}^M \frac{(\phi_1, \overline{w_k})_{L_2}^2}{(k\pi)^2} \sinh^2(k\pi r_{max}) \\
\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} & \sum_{k=1}^M \|\phi_1\|_{L_2}^2 \cdot \underbrace{\|\overline{w_k}\|_{L_2}^2}_{=1} \cdot \frac{1}{(k\pi)^2} \sinh^2(k\pi r_{max}) \\
\leq & \sinh^2(M\pi r_{max}) \|\phi_1\|_{L_2}^2 \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^M \frac{1}{k^2} \\
\leq & \frac{1}{6} \sinh^2(M\pi r_{max}) \|\phi_1\|_{L_2}^2 \\
=: & C^2 \|\phi_1\|_{L_2}^2
\end{aligned}$$

zu erhalten. Hierbei wurde die bekannte Summenformel $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ und die daraus folgende Abschätzung jeder Partialsumme durch $\frac{\pi^2}{6}$ benutzt. \square

Nun folgt, wie angekündigt das Lemma über die Eigenschaften der orthogonalen Projektion auf den Raum D_M^h .

Lemma 3.6.2 *Seien $M, N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, $M < N$. Bekanntermaßen wird dann durch die Vektoren $w_k = \left(\sqrt{2h} \sin(k\pi jh) \right)_{j=1, \dots, N-1}$, $k = 1, \dots, N-1$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^{N-1} definiert, wobei w_1, \dots, w_M eine Orthonormalbasis von D_M^h und w_{M+1}, \dots, w_{N-1} eine Orthonormalbasis von $(D_M^h)^\perp$ bilden (siehe Lemma 2.2.3 und Satz 3.3.3). Erklärt man nun eine Abbildung*

$$P_M : \mathbb{R}^{N-1} \ni \Phi \mapsto P_M \Phi = \sum_{k=1}^M (\Phi, w_k)_e w_k \in D_M^h,$$

was komponentenweise aufgeschrieben

$$(P_M \Phi)_j = \sum_{k=1}^M \left(2h \sum_{l=1}^{N-1} \Phi_l \sin(k\pi lh) \right) \sin(k\pi jh), \quad 1 \leq j \leq N-1$$

bedeutet, so hat diese Abbildung folgende Eigenschaften:

(a) P_M ist ein Homomorphismus.

(b) $P_M \Phi = \Phi \quad \forall \Phi \in D_M^h$

(c) $P_M^2 = P_M$ (Projektionseigenschaft)

(d) $P_M \Phi \perp (\Phi - P_M \Phi)$ (daher orthogonale Projektion)

(e) $\min_{\Psi \in D_M^h} |\Phi - \Psi|_e^2 = |\Phi - P_M \Phi|_e^2 = |\Phi|_e^2 - |P_M \Phi|_e^2$

(f) Ist $\varepsilon > 0$ und $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$ mit $|\delta|_\infty < \varepsilon$ gegeben, so folgt

$$|P_M \delta - \delta|_\infty \leq (2M + 1)\varepsilon$$

Hierbei bezeichnen $|\cdot|_e$ und $|\cdot|_\infty$ die euklidische beziehungsweise die Maximumnorm auf \mathbb{R}^{N-1} .

Beweis:

Die Eigenschaften (a)–(e) sind nach entsprechenden Sätzen der linearen Algebra in jedem euklidischen Raum mit gegebener Orthonormalbasis gültig. Eigenschaft (f) ergibt sich aus der speziellen Gestalt der vorliegenden Basisfunktionen wie folgt:

$$\begin{aligned} & |P_M \delta - \delta|_\infty \\ &= \left| \sum_{k=1}^M (\delta, w_k)_e w_k - \delta \right|_\infty \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^M (\delta, w_k)_e w_k \right|_\infty + |\delta|_\infty \\ &= \max_{j=1, \dots, N-1} \left(\left| \sum_{k=1}^M 2h \sum_{l=1}^{N-1} \delta_l \sin(k\pi lh) \sin(k\pi jh) \right| \right) + |\delta|_\infty \\ &\leq 2h \max_{j=1, \dots, N-1} \left(\sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^{N-1} \underbrace{|\delta_l|}_{\leq \varepsilon} \cdot \underbrace{|\sin(k\pi lh)|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|\sin(k\pi jh)|}_{\leq 1} \right) + \underbrace{|\delta|_\infty}_{\leq \varepsilon} \\ &\leq 2hM(N-1)\varepsilon + \varepsilon \\ &\leq (2M+1)\varepsilon \end{aligned}$$

□

Um die angestrebte Fehlerabschätzung beweisen zu können, benötigt man noch gewisse Hilfsergebnisse, die wir an dieser Stelle kurz angeben und beweisen wollen.

Lemma 3.6.3 (a) Sei $f \in C^2[0, b]$, $f(0) = 0$, $f''(x) \leq 0 \forall x \in [0, b]$, $c \geq 1$. Dann gilt für alle $x \in [0, \frac{b}{c}]$ die Ungleichung $f(cx) \leq cf(x)$.

(b) Seien $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, $h = \frac{1}{N}$, $i, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq i, k \leq N-1$ beliebig. Weiter sei $\alpha := kh\frac{\pi}{2}$. Dann gilt

$$|\sin(2i\alpha)| \leq 2i \sin(\alpha), \quad .$$

woraus trivialerweise

$$\left| \frac{\sin(ikh\pi)}{\sin(kh\frac{\pi}{2})} \right| \leq 2i \quad (3.33)$$

folgt.

(c) Seien $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, $h = \frac{1}{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq N-1$ beliebig. Dann gilt

$$h \sum_{j=1}^{N-1} |\sin(kjh\pi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.34)$$

(d) Seien $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, $h = \frac{1}{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq M$, $y > 0$ beliebig. Weiter sei $\lambda_k = -\frac{4}{h^2} \sin^2(kh\frac{\pi}{2})$. Dann gilt

$$\sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \leq \sinh(\pi My) \quad (3.35)$$

und

$$\cosh(\sqrt{-\lambda_k}y) \leq \cosh(\pi My) \quad . \quad (3.36)$$

Beweis:

Zu (a):

Bekanntermaßen ist f unter den gegebenen Voraussetzungen eine konkave Funktion auf $[0, b]$ (siehe zum Beispiel [Heu01], Band 1, Satz 49.8). Daraus folgt unmittelbar (beachte $c \geq 1 \implies 0 \leq \frac{1}{c} \leq 1$)

$$\begin{aligned} & f(x) \\ &= f\left(\left(1 - \frac{1}{c}\right) \cdot 0 + \frac{1}{c} \cdot (cx)\right) \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{c}\right) \cdot \underbrace{f(0)}_{=0} + \frac{1}{c} f(cx) \\ &= \frac{1}{c} f(cx) \end{aligned}$$

und damit nach Multiplikation mit c die Behauptung (a).

Zu (b):

Offenbar ist $f : [0, \pi] \ni x \mapsto \sin(x)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = \sin(0) = 0$ und $f''(x) = -\sin(x) \leq 0$, $x \in [0, \pi]$. Daraus folgt mit Teil (a) des Lemmas (setze dort $c := 2i$), daß im Fall $2i\alpha \leq \pi$ die Abschätzung $\sin(2i\alpha) \leq 2i \sin(\alpha)$ gültig ist. Außerdem gilt in diesem Fall $-\sin(2i\alpha) \leq 0 \leq 2i \sin(\alpha)$, also insgesamt im Fall $2i\alpha \leq \pi$ die behauptete Abschätzung. Ist aber $2i\alpha > \pi$, so folgt

$$\begin{aligned}
 & 2i \sin(\alpha) \\
 = & 2i\alpha \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \\
 > & \pi \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \\
 \stackrel{\text{Lemma 3.1.1 (c)}}{\geq} & \pi \left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right) \\
 \stackrel{\alpha \leq \frac{\pi}{2}}{\geq} & \pi \left(1 - \frac{\pi^2}{24}\right) \\
 > & \pi \left(1 - \frac{16}{24}\right) \\
 = & \frac{\pi}{3} \\
 > & 1 \\
 \geq & |\sin(2i\alpha)|,
 \end{aligned}$$

also ebenfalls die Behauptung.

Zu (c):

Man sieht mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
 & h \sum_{j=1}^{N-1} |\sin(kjh\pi)| \\
 = & h \sum_{j=1}^{N-1} (|\sin(kjh\pi)| \cdot 1) \\
 \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} & h \left(\sum_{j=1}^{N-1} \sin^2(kjh\pi) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N-1} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 = & \sqrt{h} \left(h \sum_{j=1}^{N-1} \sin^2(kjh\pi) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{N-1} \\
 \stackrel{\text{Lemma 3.2.2}}{=} & \sqrt{h} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{N-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{h(N-1)}{2}} \\
&\leq \sqrt{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Dies zeigt Behauptung (c).

Zu (d):

Man nutzt die Monotonie der Sinusfunktion auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ aus und erhält so

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{-\lambda_k}}{h} \sin\left(kh \frac{\pi}{2}\right) \\
&\leq \frac{2}{h} \sin\left(Mh \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \pi M \frac{\sin\left(Mh \frac{\pi}{2}\right)}{Mh \frac{\pi}{2}} \\
&\stackrel{\text{Lemma 3.1.1 (b)}}{\leq} \pi M,
\end{aligned}$$

woraus mit Hilfe der Monotonie des sinus hyperbolicus für nichtnegative Argumente und der Monotonie des cosinus hyperbolicus sofort die Behauptung (d) folgt. \square

Satz 3.6.4 *Vorausgesetzt sei $M < N$ und es gelte $\Phi_1 \in D_M^h (\iff \phi_1 \in D_M)$, $F_1 = 0$. Seien weiter gestörte Daten $\Phi_{1,\varepsilon}$ mit $\|\Phi_1 - \Phi_{1,\varepsilon}\|_\infty \leq \varepsilon$ gegeben und $\Phi_{1,\varepsilon}^*$ sei definiert als orthogonale Projektion der gestörten Daten $\Phi_{1,\varepsilon}$ auf den Raum D_M^h , mit anderen Worten, es gelte*

$$\Phi_{1,\varepsilon}^* = P_M \Phi_{1,\varepsilon},$$

dann konvergiert für $\varepsilon \rightarrow 0$ die mit Hilfe der Linienmethode nach (2.7) beziehungsweise (2.8) ermittelte Lösung $u_{i,\varepsilon}^*$ zu gestörten und anschließend projizierten Daten $\Phi_{1,\varepsilon}^*$ gegen die nach (2.7) beziehungsweise (2.8) ermittelte Lösung u_i zu ungestörten Daten Φ_1 . Es gilt die Fehlerabschätzung:

$$|u_i(y) - u_{i,\varepsilon}^*(y)| \leq \frac{4ihM(M+1)}{\sqrt{2}} \sinh(\pi My) \varepsilon \leq \frac{4M(M+1)}{\sqrt{2}} \sinh(\pi My) \varepsilon = O(\varepsilon) \quad .$$

Beweis:

Offenbar gilt $\Phi_{1,\varepsilon} = \Phi_1 + \delta$ mit $|\delta|_\infty \leq \varepsilon$ und man hat

$$\begin{aligned}
& |\Phi_{1,\varepsilon}^* - \Phi_{1,\varepsilon}|_\infty \\
&= |P_M \Phi_{1,\varepsilon} - \Phi_{1,\varepsilon}|_\infty \\
&= |P_M(\Phi_1 + \delta) - (\Phi_1 + \delta)|_\infty \\
&\stackrel{\text{Lemma 3.6.2 (a)}}{=} |\underbrace{P_M \Phi_1}_{=\Phi_1} - \Phi_1 + P_M \delta - \delta|_\infty \\
&\stackrel{\text{Lemma 3.6.2 (b)}}{=} |P_M \delta - \delta|_\infty \\
&\stackrel{\text{Lemma 3.6.2 (f)}}{\leq} (2M + 1)\varepsilon,
\end{aligned}$$

woraus

$$|\Phi_1 - \Phi_{1,\varepsilon}^*|_\infty \leq |\Phi_1 - \Phi_{1,\varepsilon}|_\infty + |\Phi_{1,\varepsilon} - \Phi_{1,\varepsilon}^*|_\infty \leq \varepsilon + (2M + 1)\varepsilon = 2(M + 1)\varepsilon \quad (3.37)$$

folgt.

Mit Hilfe der expliziten Darstellung (2.8) der mittels Linienmethode ermittelten Lösung zu den vorgegebenen Daten erhält man (man beachte in beiden Fällen $F_1 = 0$):

$$\begin{aligned}
& u_i(y) \\
&= h^2 \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\sin(ikh\pi)}{\sin(kh\frac{\pi}{2})} \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \underbrace{\sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi)(\Phi_1)_j}_{=0, \text{ falls } k > M, \text{ da } \Phi_1 \in D_M^h} \right) \\
&= h^2 \sum_{k=1}^M \left(\frac{\sin(ikh\pi)}{\sin(kh\frac{\pi}{2})} \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi)(\Phi_1)_j \right) \quad (3.38)
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
& u_{i,\varepsilon}^*(y) \\
&= h^2 \sum_{k=1}^M \left(\frac{\sin(ikh\pi)}{\sin(kh\frac{\pi}{2})} \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi)(\Phi_{1,\varepsilon}^*)_j \right) . \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Subtrahiert man (3.39) von (3.38), so erhält man

$$\begin{aligned}
& |u_i(y) - u_{i,\varepsilon}^*(y)| \\
= & h^2 \left| \sum_{k=1}^M \left(\frac{\sin(ikh\pi)}{\sin(kh\frac{\pi}{2})} \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi)(\Phi_1 - \Phi_{1,\varepsilon}^*)_j \right) \right| \\
\leq & h^2 \sum_{k=1}^M \left(\left| \frac{\sin(ikh\pi)}{\sin(kh\frac{\pi}{2})} \right| \cdot \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} |\sin(kjh\pi)| \cdot |(\Phi_1 - \Phi_{1,\varepsilon}^*)_j| \right) \\
\stackrel{(3.37)}{\leq} & 2h\varepsilon(M+1) \sum_{k=1}^M \left(\left| \frac{\sin(ikh\pi)}{\sin(kh\frac{\pi}{2})} \right| \cdot \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \left(h \cdot \sum_{j=1}^{N-1} |\sin(kjh\pi)| \right) \right) \\
\stackrel{(3.33)}{\leq} & 4ih\varepsilon(M+1) \sum_{k=1}^M \left(\sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \left(h \cdot \sum_{j=1}^{N-1} |\sin(kjh\pi)| \right) \right) \\
\stackrel{(3.34)}{\leq} & \frac{4}{\sqrt{2}} ih\varepsilon(M+1) \sum_{k=1}^M \left(\sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \right) \\
\stackrel{(3.35)}{\leq} & \frac{4}{\sqrt{2}} ihM(M+1) \sinh(\pi My)\varepsilon \tag{3.40} \\
\leq & \frac{4M(M+1)}{\sqrt{2}} \sinh(\pi My)\varepsilon \quad . \tag{3.41}
\end{aligned}$$

□

Folgerung 3.6.5 (Konvergenzsatz und Fehlerabschätzung für $\phi_1 \in D_M$, $f_1 = 0$)

Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen des vorangegangenen Satzes konvergiert für $(\varepsilon, h) \rightarrow 0$ die Funktion $u_{i,\varepsilon}^*$ gegen die wahre Lösung $u(x_i, y)$ des kontinuierlichen Cauchy-Problems. Es gilt die Fehlerabschätzung

$$|u(x_i, y) - u_{i,\varepsilon}^*(y)| \leq \frac{M^4 \pi^3 y}{12} \exp(M\pi y) \|\phi_1\|_{L_1} h^2 + \frac{4M(M+1)}{\sqrt{2}} \sinh(\pi My)\varepsilon = O(h^2 + \varepsilon) \quad .$$

Beweis:

Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 3.4.7 und Satz 3.6.4, wenn man mit Hilfe der Dreiecksungleichung den Gesamtfehler aufspaltet:

$$\begin{aligned}
|u(x_i, y) - u_{i,\varepsilon}^*(y)| & \leq \underbrace{|u(x_i, y) - u_i(y)|}_{\leq \frac{M^4 \pi^3 y}{12} \exp(M\pi y) \|\phi_1\|_{L_1} h^2} + \underbrace{|u_i(y) - u_{i,\varepsilon}^*(y)|}_{\leq \frac{4M(M+1)}{\sqrt{2}} \sinh(\pi My)\varepsilon} \\
& \leq \frac{M^4 \pi^3 y}{12} \exp(M\pi y) \|\phi_1\|_{L_1} h^2 + \frac{4M(M+1)}{\sqrt{2}} \sinh(\pi My)\varepsilon
\end{aligned}$$

□

Wie angekündigt, sollen nun die Ergebnisse auf möglicherweise ebenfalls gestörte inhomogene Dirichlet-Daten F_1 erweitert werden.

Dazu verallgemeinern wir zunächst das Ergebnis von Satz 3.6.4 auf den Fall inhomogener Dirichlet-Daten:

Satz 3.6.6 *Vorausgesetzt sei $M < N$ und es gelte $F_1, \Phi_1 \in D_M^h (\iff f_1, \phi_1 \in D_M)$. Seien weiter gestörte Daten $F_{1,\varepsilon}, \Phi_{1,\varepsilon}$ mit $\|F_1 - F_{1,\varepsilon}\|_\infty \leq \varepsilon$ und $\|\Phi_1 - \Phi_{1,\varepsilon}\|_\infty \leq \varepsilon$ gegeben und $F_{1,\varepsilon}^*$ beziehungsweise $\Phi_{1,\varepsilon}^*$ seien definiert als orthogonale Projektion der gestörten Daten $F_{1,\varepsilon}$ bzw. $\Phi_{1,\varepsilon}$ auf den Raum D_M^h , mit anderen Worten, es gelte*

$$F_{1,\varepsilon}^* = P_M F_{1,\varepsilon} \quad , \quad \Phi_{1,\varepsilon}^* = P_M \Phi_{1,\varepsilon} \quad ,$$

dann konvergiert für $\varepsilon \rightarrow 0$ die mit Hilfe der Linienmethode nach (2.7) ermittelte Lösung $u_{i,\varepsilon}^*$ zu gestörten und anschließend projizierten Daten $F_{1,\varepsilon}^*, \Phi_{1,\varepsilon}^*$ gegen die nach (2.7) ermittelte Lösung u_i zu ungestörten Daten F_1, Φ_1 . Es gilt die Fehlerabschätzung:

$$|u_i(y) - u_{i,\varepsilon}^*(y)| \leq \frac{4ihM^2(M+1)\pi}{\sqrt{2}} \exp(\pi My)\varepsilon \leq \frac{4M^2(M+1)\pi}{\sqrt{2}} \exp(\pi My)\varepsilon = O(\varepsilon) \quad .$$

Beweis:

Die Verfahrensweise ist ganz analog zum Beweis von Satz 3.6.4. Völlig identisches Vorgehen wie eben dort sichert in Ergänzung zu (3.37) auch

$$|F_1 - F_{1,\varepsilon}^*|_\infty \leq 2(M+1)\varepsilon \quad . \quad (3.42)$$

Daraus gewinnt man die Abschätzung

$$\begin{aligned} & 2h \sum_{k=1}^M \left(|\sin(ikh\pi)| \cdot \cosh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} |\sin(kjh\pi)| \cdot |(F_1 - F_{1,\varepsilon}^*)_j| \right) \\ (3.42) \quad & \leq 4(M+1)\varepsilon \sum_{k=1}^M \left(|\sin(ikh\pi)| \cdot \cosh(\sqrt{-\lambda_k}y) \left(h \cdot \sum_{j=1}^{N-1} |\sin(kjh\pi)| \right) \right) \\ \text{Lemma 3.1.1 (d)} \quad & \leq 4(M+1)\varepsilon \sum_{k=1}^M \left(\underbrace{ikh\pi}_{\leq ihM\pi} \cdot \cosh(\sqrt{-\lambda_k}y) \left(h \cdot \sum_{j=1}^{N-1} |\sin(kjh\pi)| \right) \right) \\ (3.34) \quad & \leq \frac{4}{\sqrt{2}} ihM\pi(M+1)\varepsilon \sum_{k=1}^M \cosh(\sqrt{-\lambda_k}y) \\ (3.36) \quad & \leq \frac{4\pi}{\sqrt{2}} ihM^2(M+1) \cosh(\pi My)\varepsilon \quad (3.43) \\ & \leq \frac{4\pi M^2(M+1)}{\sqrt{2}} \cosh(\pi My)\varepsilon \quad . \quad (3.44) \end{aligned}$$

Man subtrahiert nun die mit Hilfe von (2.7) und unter Verwendung von $F_1, \Phi_1 \in D_M^h$ gewonnenen Darstellungen

$$\begin{aligned} & u_i(y) \\ = & 2h \cdot \sum_{k=1}^M \left(\sin(ikh\pi) \left(\cosh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi)(F_1)_j \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{h}{2 \sin(kh\frac{\pi}{2})} \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi)(\Phi_1)_j \right) \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & u_{i,\varepsilon}^*(y) \\ = & 2h \cdot \sum_{k=1}^M \left(\sin(ikh\pi) \left(\cosh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi)(F_{1,\varepsilon}^*)^j \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{h}{2 \sin(kh\frac{\pi}{2})} \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi)(\Phi_{1,\varepsilon}^*)^j \right) \right) \end{aligned}$$

voneinander und erhält so

$$\begin{aligned} & |u_i(y) - u_{i,\varepsilon}^*(y)| \\ = & 2h \left| \sum_{k=1}^M \left(\sin(ikh\pi) \left(\cosh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi)(F_1 - F_{1,\varepsilon}^*)^j \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{h}{2 \sin(kh\frac{\pi}{2})} \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi)(\Phi_1 - \Phi_{1,\varepsilon}^*)^j \right) \right) \Big| \\ \leq & 2h \underbrace{\sum_{k=1}^M \left(|\sin(ikh\pi)| \cdot \cosh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} |\sin(kjh\pi)| \cdot |(F_1 - F_{1,\varepsilon}^*)^j| \right)}_{\leq \frac{4\pi}{\sqrt{2}} ihM^2(M+1) \cosh(\pi My)\varepsilon \text{ nach (3.43)}} \\ & + h^2 \underbrace{\sum_{k=1}^M \left(\left| \frac{\sin(ikh\pi)}{\sin(kh\frac{\pi}{2})} \right| \cdot \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} |\sin(kjh\pi)| \cdot |(\Phi_1 - \Phi_{1,\varepsilon}^*)^j| \right)}_{\leq \frac{4}{\sqrt{2}} ihM(M+1) \sinh(\pi My)\varepsilon \text{ nach (3.40)}} \\ \leq & \frac{4ihM(M+1)}{\sqrt{2}} \left(\pi M \cosh(\pi My) + \underbrace{\sinh(\pi My)}_{\leq \pi M \sinh(\pi My)} \right) \varepsilon \\ \leq & \frac{4ihM^2(M+1)\pi}{\sqrt{2}} \exp(\pi My)\varepsilon \\ \leq & \frac{4M^2(M+1)\pi}{\sqrt{2}} \exp(\pi My)\varepsilon . \end{aligned}$$

□

Nun ergibt sich nahtlos daraus

Folgerung 3.6.7 (Konvergenzsatz und Fehlerabschätzung für $\phi_1, f_1 \in D_M$) Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen des vorangegangenen Satzes (das heißt für unter Umständen inhomogene Dirichlet- und Neumann-Daten) konvergiert für $(\varepsilon, h) \rightarrow 0$ die Funktion $u_{i,\varepsilon}^*$ gegen die wahre Lösung $u(x_i, y)$ des Ausgangsproblems. Es gilt die

Fehlerabschätzung

$$|u(x_i, y) - u_{i,\varepsilon}^*(y)| \leq \frac{M^4 \pi^3 y}{12} \exp(M\pi y) (\|f_1\|_{L_1} + \|\phi_1\|_{L_1}) h^2 + \frac{4M^2(M+1)\pi}{\sqrt{2}} \exp(\pi M y) \varepsilon,$$

mit anderen Worten gilt also

$$|u(x_i, y) - u_{i,\varepsilon}^*(y)| = O(h^2 + \varepsilon) \quad .$$

Beweis:

Auch hier folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 3.4.7 und Satz 3.6.6, wenn man mit Hilfe der Dreiecksungleichung den Gesamtfehler aufspaltet:

$$\begin{aligned} |u(x_i, y) - u_{i,\varepsilon}^*(y)| &\leq \underbrace{|u(x_i, y) - u_i(y)|}_{\leq \frac{M^4 \pi^3 y}{12} \exp(M\pi y) (\|f_1\|_{L_1} + \|\phi_1\|_{L_1}) h^2} + \underbrace{|u_i(y) - u_{i,\varepsilon}^*(y)|}_{\leq \frac{4M^2(M+1)\pi}{\sqrt{2}} \exp(\pi M y) \varepsilon} \end{aligned}$$

□

Kapitel 4

Stabilität und Konvergenz im Fall normbeschränkter Lösung

Bis zum jetzigen Punkt haben wir stets vorausgesetzt, daß man eine relativ umfassende a-priori-Information über die vorliegenden Daten zur Verfügung hat, nämlich nicht nur, daß die Daten sich aus einer beschränkten Anzahl von Sinusfrequenzen zusammensetzen, sondern auch genaue Kenntnis einer festen Zahl M , so daß $\phi_1, f_1 \in D_M$ gilt. Unter diesen relativ starken Voraussetzungen haben wir weitreichende Konvergenzaussagen und Fehlerabschätzungen für die vorgestellte Linienmethode beweisen können. In diesem Abschnitt soll es nun darum gehen, unter allgemeineren Voraussetzungen, nämlich einer Beschränktheitsbedingung für die Lösung des Cauchy-Problems für die Laplace-Gleichung, ähnliche Ergebnisse zu beweisen. Die geforderte Beschränktheitsbedingung stellt die in der Literatur übliche Bedingung dar, das Cauchy-Problem in ein gutgestelltes Problem zu überführen. Wir werden auch in diesem allgemeineren Rahmen Konvergenz und eine Fehlerabschätzung für die Linienmethode beweisen können, allerdings ist die Fehlerabschätzung nicht mehr von der Güte, wie unter den stärkeren Voraussetzungen der letzten Abschnitte.

4.1 Ein Stabilitätssatz für das kontinuierliche Problem

In Anlehnung an Resultate, die erstmal von M. M. Lavrentiev im Jahr 1956 veröffentlicht wurden (siehe [Lav56]), wollen wir nun einen Stabilitätssatz für das Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung beweisen. Wesentliche zusätzliche Voraussetzung gegenüber den Problemstellungen 2.1.1 bzw. 2.1.3 ist hierbei die Beschränktheit der L_2 -Norm der Lösung auf dem Randstück Σ_4 (siehe (4.41)). Zunächst werden wir nur den Fall homogener Dirichlet-Randbedingungen betrachten, so daß die Problemstellung die folgende Gestalt hat:

Problem 4.1.1 (CPLG mit homogenen Dirichlet-Bedingungen)

Gesucht ist eine Funktion $u \in C^2(\text{int}(\Omega)) \cap C(\Omega)$ mit

$$\Delta u = 0 \text{ in } \text{int}(\Omega),$$

die den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u &= 0 \text{ auf } \Sigma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \phi_1 \text{ auf } \Sigma_1 \\ u &= 0 \text{ auf } \Sigma_2 \\ u &= 0 \text{ auf } \Sigma_3 \end{aligned}$$

genügt.

Bemerkung 4.1.2 Wir werden im folgenden der Einfachheit halber stets annehmen, daß die Neumann-Daten ϕ_1 aus dem Raum D (siehe Definition 3.3.1) stammen. Diese Voraussetzung wird uns die Darstellung der Funktion ϕ durch ihre Fourier(sinus)reihe gewährleisten, was jedoch auch unter schwächeren Bedingungen möglich wäre.

In dem vorliegenden Fall homogener Dirichlet-Bedingungen vereinfacht sich nach (3.16) die Darstellung der Lösung des Cauchy-Problems zu

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{a_k}{k\pi} (\sqrt{2} \cdot \sin(k\pi x)) \sinh(k\pi y)}_{u_k = u_k(x, y) :=} \quad , \quad a_k := \sqrt{2}(\phi_1(\cdot), \sin(k\pi \cdot))_{L_2}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.1)$$

vorausgesetzt, die angegebene Reihe konvergiert. Daraus erhält man nun folgende Darstellung des Quadrates der L_2 -Norm der Lösung:

Lemma 4.1.3 Die Reihe (4.1) sei konvergent für alle $(x, y) \in [0, 1] \times [0, r_{max}]$ und gleichmäßig konvergent in der Variablen x , $x \in [0, 1]$. Dann gilt für jedes feste $y \in [0, r_{max}]$ die Gleichung

$$N(y) := \|u(\cdot, y)\|_{L_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{(k\pi)^2} \sinh^2(k\pi y) \quad . \quad (4.2)$$

Beweis:

Die Voraussetzung liefert für jedes $(x, y) \in [0, 1] \times [0, r_{max}]$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y)$ gegen $u(x, y)$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} &N(y) \\ &= \int_0^1 u^2(x, y) dx \\ &= \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k(x, y) \right)^2 dx \\ &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n u_k(x, y) \right)^2 dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \sum_{k,l=1}^{\infty} 2 \frac{a_k a_l}{kl\pi^2} \sin(k\pi x) \sin(l\pi x) \sinh(k\pi y) \sinh(l\pi y) dx \quad .$$

Weiter ist $s_n := \sum_{k=1}^n u_k(x, y)$ als endliche Summe von in der Variablen x beschränkten Funktionen ebenfalls beschränkt und die Folge s_n konvergiert laut Voraussetzung gleichmäßig auf $[0, 1]$ in der Variablen x . Ein Standardsatz der Analysis (siehe zum Beispiel [Heu01], Band 1, Satz 103.5) liefert dann die gleichmäßige Konvergenz von s_n^2 gegen $u^2(x, y)$, so daß man die Reihenfolge von Summation und Integration vertauschen darf. Obige Gleichungskette läßt sich also fortsetzen mit

$$\begin{aligned} & N(y) \\ &= \sum_{k,l=1}^{\infty} \left(\int_0^1 2 \frac{a_k a_l}{kl\pi^2} \sin(k\pi x) \sin(l\pi x) \sinh(k\pi y) \sinh(l\pi y) dx \right) \\ &= \sum_{k,l=1}^{\infty} \left(2 \frac{a_k a_l}{kl\pi^2} \sinh(k\pi y) \sinh(l\pi y) \underbrace{\int_0^1 \sin(k\pi x) \sin(l\pi x) dx}_{=\frac{1}{2}\delta_{k,l} \text{ nach (3.6)}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{(k\pi)^2} \sinh^2(k\pi y), \end{aligned}$$

was die Gleichung (4.2) beweist. □

Das eben bewiesene Lemma legt uns also geradezu die Untersuchung von Reihen von ähnlicher Gestalt wie (4.2) nahe, wenn wir gewisse Stabilitätsabschätzungen für die L_2 -Norm der Lösung gewinnen wollen. Diese Abschätzungen werden wir mit Hilfe der sogenannten logarithmischen Konvexität der Funktion $\frac{N(y)}{y^2}$ beweisen. Die Division von $N(y)$ durch y^2 hat zwei Gründe, die unsere Untersuchungen deutlich machen werden: Zum einen ist $\frac{\sinh^2(k\pi y)}{y^2}$ (siehe (4.31)), jedoch nicht $h_k(y) = \sinh^2(k\pi y)$ logarithmisch konvex (letzteres zeigt man leicht mit Hilfe von (4.3), es ist nämlich $h_k'' h_k - (h_k')^2 = -2k^2 \pi^2 h_k < 0$), zum anderen konvergiert $\frac{N(y)}{y^2}$ für $y \rightarrow 0$ gerade gegen $\|\phi_1\|_{L_2}^2$, was für die Stabilitätsabschätzung benötigt wird (siehe (4.37) in Verbindung mit Satz 4.1.20).

4.1.1 Logarithmische Konvexität

Wie erinnern an dieser Stelle zunächst an die Definitionen der zentralen Begriffe der Konvexität sowie der logarithmischen Konvexität einer reellwertigen Funktion:

Definition 4.1.4 (Konvexität, logarithmische Konvexität) Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ gegeben. Dann heißt f konvex, falls

$$\forall x, y \in [a, b] \forall \lambda \in [0, 1] \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

gilt. Nimmt f nur positive Werte an, so nennt man f logarithmisch konvex, falls $\ln(f)$ konvex ist.

Wie man sich sofort klarmacht, gilt

Folgerung 4.1.5 Eine Funktion $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$ ist genau dann logarithmisch konvex, wenn sie

$$\forall x, y \in [a, b] \forall \lambda \in [0, 1] \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(x)^\lambda \cdot f(y)^{1-\lambda}$$

erfüllt.

Beweis:

Durch Äquivalenzumformungen der Definition logarithmischer Konvexität stellt man fest:

$$\begin{aligned} & f \text{ logarithmisch konvex} \\ \iff & \ln(f) \text{ konvex} \\ \iff & \forall x, y \in [a, b] \forall \lambda \in [0, 1] \quad \ln(f)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \ln(f)(x) + (1 - \lambda) \ln(f)(y) \\ \iff & \forall x, y \in [a, b] \forall \lambda \in [0, 1] \quad \ln(f)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \ln(f(x)^\lambda \cdot f(y)^{1-\lambda}) \\ \iff & \forall x, y \in [a, b] \forall \lambda \in [0, 1] \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(x)^\lambda \cdot f(y)^{1-\lambda} \end{aligned}$$

□

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für Konvexität bzw. logarithmische Konvexität zweimal differenzierbarer Funktionen liefert das hinlänglich aus der Analysis bekannte

Lemma 4.1.6 Eine zweimal auf $[a, b]$ differenzierbare Funktion f ist genau dann konvex, falls

$$\forall x \in [a, b] \quad f''(x) \geq 0$$

gilt. Eine positive, zweimal auf $[a, b]$ differenzierbare Funktion f ist genau dann logarithmisch konvex, falls

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b] \quad (\ln(f))''(x) &= \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} \geq 0 \\ \iff \forall x \in [a, b] \quad f''(x)f(x) - (f'(x))^2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

erfüllt ist.

Beweis:

Siehe zum Beispiel [Heu01], Satz 49.8. Dieser Satz enthält die eine Richtung des Lemmas explizit. Die andere Richtung folgt ebenfalls leicht mit Hilfe eines indirekten Schlusses aus dem zitierten Satz. Der zweite Teil der Behauptung ergibt sich unmittelbar aus dem ersten. □

Bemerkung 4.1.7 Offenbar ist eine logarithmisch konvexe Funktion f erst recht konvex, denn aus Ungleichung (4.3) folgt sofort

$$f''(x) \geq \frac{(f'(x))^2}{f(x)} \geq 0 \quad .$$

Logarithmische Konvexität ist also eine stärkere Eigenschaft als Konvexität.

Interessanterweise ist die Eigenschaft der logarithmischen Konvexität verträglich mit der Vektoraddition in $C^2[a, b]$ und der Multiplikation mit positiven Skalaren, wie das folgende Lemma zeigen wird:

Lemma 4.1.8 $LC[a, b]$ bezeichne die Menge der logarithmisch konvexen Funktionen auf $[a, b]$. Nun seien positive Funktionen $f, g, h_k \in C^2[a, b] \cap LC[a, b]$, $k \in \mathbb{N}$ sowie positive Skalare $\lambda, \mu_k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann gilt auch:

(a) $f + g \in LC[a, b]$.

(b) $\lambda f \in LC[a, b]$.

(c) $\sum_{k=1}^n \mu_k h_k \in LC[a, b]$

(d) Die Funktionenfolge h_k konvergiere in wenigstens einem Punkt x_0 und ebenso konvergiere die Folge h'_k in wenigstens einem Punkt x_1 . Konvergiert dann h''_k gleichmäßig auf $[a, b]$, so konvergiert h_k gleichmäßig auf dem gesamten Intervall $[a, b]$ gegen eine Funktion h und h ist logarithmisch konvex.

Beweis:

Zu (a):

Nach Lemma 4.1.6 liefert die Voraussetzung $f, g \in LC[a, b]$ die für alle $x \in [a, b]$ gültigen Ungleichungen

$$f''(x)f(x) - (f'(x))^2 \geq 0 \quad (4.4)$$

$$g''(x)g(x) - (g'(x))^2 \geq 0 \quad (4.5)$$

Daraus folgt für beliebiges $x \in [a, b]$ zunächst

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq \sqrt{f''(x)f(x)} \\ |g'(x)| &\leq \sqrt{g''(x)g(x)}, \end{aligned}$$

woraus sich

$$-2f'(x)g'(x) \geq -2|f'(x)| \cdot |g'(x)| \geq -2\sqrt{f''(x)f(x)g''(x)g(x)} \quad (4.6)$$

ergibt. Nun kann man weiter schlußfolgern:

$$\begin{aligned} &(f + g)''(x)(f + g)(x) - ((f + g)'(x))^2 \\ = &\underbrace{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}_{\geq 0 \text{ nach (4.4)}} + \underbrace{g''(x)g(x) - (g'(x))^2}_{\geq 0 \text{ nach (4.5)}} + f''(x)g(x) + g''(x)f(x) - 2f'(x)g'(x) \\ \geq &f''(x)g(x) + g''(x)f(x) - 2f'(x)g'(x) \\ \stackrel{(4.6)}{\geq} &f''(x)g(x) - 2\sqrt{f''(x)f(x)g''(x)g(x)} + g''(x)f(x) \\ = &\left(\sqrt{f''(x)g(x)} - \sqrt{g''(x)f(x)}\right)^2 \\ \geq &0 \end{aligned}$$

Somit ist nach nochmaliger Anwendung von Lemma 4.1.6 Teil (a) der Behauptung gezeigt.

Zu (b):

Wegen $\lambda > 0$ ist λf ebenfalls positiv. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} & (\lambda f)''(x) \cdot (\lambda f)(x) - ((\lambda f)'(x))^2 \\ &= \lambda^2 (f''(x)f(x) - (f'(x))^2) \\ &\stackrel{f \in LC[a,b]}{\geq} 0 \end{aligned}$$

Zu (c):

Aus Teil (b) folgt sofort für alle $k \in \mathbb{N}$ $\mu_k h_k \in LC[a, b]$. Offenbar ist die Behauptung für $n = 1$ trivial und für $n = 2$ folgt sie aus Teil (a). Induktiv sieht man nun

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \mu_k h_k(x) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \mu_k h_k(x)}_{\in LC[a,b] \text{ nach I.V.}} + \underbrace{\mu_n h_n(x)}_{\in LC[a,b]} \\ &\stackrel{(a)}{\in} LC[a, b] \end{aligned}$$

ein.

Zu (d):

Den Beweis der Konvergenzbehauptung findet man zum Beispiel in [Heu01] Satz 104.3 und es gilt danach sogar $h_k \rightarrow h$, $h'_k \rightarrow h'$, $h''_k \rightarrow h''$ jeweils gleichmäßig auf $[a, b]$, so daß die im folgenden auftretenden Grenzprozesse vertauschbar sind. Daher gilt für beliebiges $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} & h''(x) \cdot h(x) - (h'(x))^2 \\ &= \left(\lim_{k \rightarrow \infty} h_k(x) \right)'' \cdot \left(\lim_{k \rightarrow \infty} h_k(x) \right) - \left(\left(\lim_{k \rightarrow \infty} h_k(x) \right)' \right)^2 \\ &\stackrel{\text{glm. Konv.}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} h''_k(x) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} h_k(x) - \left(\lim_{k \rightarrow \infty} h'_k(x) \right)^2 \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\underbrace{h''_k(x) h_k(x) - (h'_k(x))^2}_{\geq 0 \text{ da } h_k \in LC[a,b]} \right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar wie behauptet $h \in LC[a, b]$. □

4.1.2 Verdeutlichung der Notwendigkeit tiefergehender Untersuchungen an einem Gegenbeispiel

In der Arbeit von M. M. Lavrentiev zum Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung wird nun (allerdings nicht hinreichend gründlich, wie wir gleich zeigen werden) bewiesen, daß die

Funktion

$$I(y) = \frac{1}{y^2} \int_0^\pi u^2(x, y) dx,$$

die man durch eine Grenzwertbetrachtung von $(0, \pi]$ auf $[0, \pi]$ fortsetzen kann, logarithmisch konvex ist (siehe [Lav56], Seite 827f). Die Schlußweise von Lavrentiev besteht darin, ein ähnliches Ergebnis zu beweisen, wie wir es in der vorliegenden Arbeit in Lemma 4.1.8 (a) getan haben. Anschließend behauptet er, daß dieses Ergebnis (wie an dieser Stelle des Beweises auch benötigt) sich auch auf unendlich viele Funktionen übertragen läßt (also eine weitergehende Aussage als Lemma 4.1.8 (c)), allerdings ohne diese Aussage näher zu begründen. Nun trifft die Behauptung sicher zu, da man zeigen kann, daß der punktweise Limes einer Folge logarithmisch konvexer Funktionen wieder logarithmisch konvex ist (man beweist dies ganz elementar mit Hilfe von Folgerung 4.1.5). Schlägt man allerdings diesen Beweisweg ein, so bleibt in der zitierten Arbeit außerdem unklar, wie genau der Grenzübergang für $y \rightarrow 0$ vonstatten gehen soll (dies leistet in unserem Beweisweg das Lemma 4.1.18). Man könnte sicherlich die angedeuteten Lücken in der beschriebenen Weise füllen, möglicherweise auch technisch etwas weniger aufwendig, als es der von uns im folgenden eingeschlagene Weg erfordert. Allerdings legt die Argumentation Lavrentievs, mit der er beweist, daß die Summe zweier logarithmisch konvexer Funktionen wieder logarithmisch konvex ist, es eher nahe, daß er beabsichtigte, auf der Grundlage der Charakterisierung (4.3) den Nachweis der logarithmischen Konvexität der betrachteten Reihe zu führen. Dies ist allerdings ohne zusätzliche Voraussetzungen nicht möglich, wie unsere ausführlichen Untersuchungen in diesem Abschnitt zeigen werden und folgendes Gegenbeispiel belegen wird:

Beispiel 4.1.9 Die Funktionen $f_n : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ seien erklärt durch

$$f_n(x) := \exp\left(-\frac{\cos(n^2x)}{n^3} - \frac{1}{2}x^2\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Offenbar konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen

$$f : f(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

und es gilt zwar

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2}(\ln(f_n))(x) \\ &= \left(-\frac{\cos(n^2x)}{n^3} - \frac{1}{2}x^2\right)'' \\ &= n \cos(n^2x) - 1 \\ &\stackrel{\text{z.B. } x=2\pi}{=} n - 1 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

aber

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2}{dx^2}(\ln(f(x))) \\
 &= \frac{d^2}{dx^2} \left(\ln \left(\exp \left(-\frac{1}{2}x^2 \right) \right) \right) \\
 &= \frac{d^2}{dx^2} \left(-\frac{1}{2}x^2 \right) \\
 &= -1 < 0 \quad .
 \end{aligned}$$

4.1.3 Der Spezialfall identischer Fourierkoeffizienten

Wir werden dem aufgeworfenen Problem zunächst dadurch begegnen, daß wir zeigen, wie man zumindest in dem Fall, daß alle Koeffizienten in der Reihendarstellung (4.2) identisch gleich eins sind, gewisse Schlüsse in Bezug auf die gleichmäßige Konvergenz der Folge der zweimal abgeleiteten, logarithmierten Partialsummen ziehen kann. Man hat in diesem Spezialfall natürlich keine Konvergenz der eigentlichen Lösungsdarstellung (denn dafür ist, wie schon aus Satz 3.4.1 ersichtlich ist, notwendig, daß die vorkommenden Koeffizienten sehr schnell gegen 0 konvergieren, was bei der Folge, die konstant den Wert eins annimmt, natürlich nicht der Fall ist), jedoch ergibt sich ein interessantes asymptotisches Verhalten des Logarithmus dieser divergenten Reihe und der betrachteten Ableitungen. In einem zweiten Schritt werden wir dann in Abschnitt 4.1.4 eine Untersuchung des Falles beliebiger Fourierkoeffizienten anschließen und unter gewissen Voraussetzungen die gleichmäßige Konvergenz der zweiten Ableitung der logarithmierten Partialsummen zeigen, woraus man dann die logarithmische Konvexität der Lösung folgert. Für den ersten Schritt unseres Vorgehens stellen wir nun die nötigen Hilfsmittel bereit:

Lemma 4.1.10 (a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig, X eine beliebige, nichtleere Menge und f_n, g_n, f, g reellwertige, auf X definierte Funktionen ($n \in \mathbb{N}$). Weiter konvergiere für $n \rightarrow \infty$ die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen f und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen g jeweils gleichmäßig auf X . Dann konvergiert für $n \rightarrow \infty$ auch $f_n + g_n$ gegen $f + g$ und αf_n gegen αf , und zwar ebenfalls gleichmäßig auf X .

(b) Die auf einer beliebigen nichtleeren Menge X definierten reellwertigen Funktionen h_j , $j = 1, \dots, k$ seien alle gleichmäßig konvergent gegen die Nullfunktion. Dann konvergiert auch $\sum_{j=1}^k h_j$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

(c) Sei $p(n)$ ein beliebiges Polynom in der Variablen n , weiter sei $0 < y_0 < r_{\max}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Dann konvergiert $\frac{p(n)}{\exp(2\pi y(n+k))}$ gleichmäßig auf $[y_0, r_{\max}]$ gegen die Nullfunktion.

(d) Sei $0 < y_0 < r_{\max}$ und die Funktionenfolgen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien auf $[y_0, r_{\max}]$ gleichmäßig konvergent gegen die Nullfunktion. Weiter seien f, g reellwertige Funktio-

nen auf $[y_0, r_{max}]$ mit

$$|f(y)| \leq m_2 \quad \text{und} \quad 0 < \mu_1 \leq |g(y)| \quad .$$

Dann konvergiert

$$\frac{f(y) + p_n(y)}{g(y) + q_n(y)}$$

gleichmäßig auf $[y_0, r_{max}]$ gegen $\frac{f(y)}{g(y)}$.

- (e) Sei $0 < y_0 < r_{max}$ und die Funktionenfolgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien auf $[y_0, r_{max}]$ gleichmäßig konvergent gegen reellwertige Funktionen f bzw. g . Weiter gelte für alle $n \in \mathbb{N}$ die gleichmäßige Abschätzung

$$|f_n(y)| \leq m_2 \quad \text{und} \quad 0 < \mu_1 \leq |g_n(y)| \quad .$$

Dann konvergiert

$$\frac{f_n(y)}{g_n(y)}$$

gleichmäßig auf $[y_0, r_{max}]$ gegen $\frac{f(y)}{g(y)}$.

Beweis:

Zu (a):

Siehe zum Beispiel [Heu01], Satz 103.3.

Zu (b):

Folgt unmittelbar induktiv aus (a).

Zu (c):

Sei $p(n) = \sum_{i=0}^m \alpha_i n^i$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt für alle $n \geq N := \left\lceil \frac{(m+1)(m+1)! \max_{1 \leq i \leq m} |\alpha_i|}{\varepsilon \min(2\pi y_0, (2\pi y_0)^{m+1})} \right\rceil + 1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{p(n)}{\exp(2\pi y(n+k))} \right| \\
 \leq & \left| \frac{p(n)}{\exp(2\pi y n)} \right| \\
 \leq & \left| \frac{p(n)}{\exp(2\pi y_0 n)} \right| \\
 = & \frac{|p(n)|}{\exp(2\pi y_0 n)} \\
 \leq & \frac{\sum_{i=0}^m |\alpha_i| n^i}{\exp(2\pi y_0 n)} \\
 = & \sum_{i=0}^m \frac{|\alpha_i| n^i}{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2\pi y_0)^l n^l}{l!}} \\
 \leq & \sum_{i=0}^m \frac{|\alpha_i| n^i}{\frac{(2\pi y_0)^{i+1} n^{i+1}}{(i+1)!}} \\
 = & \sum_{i=0}^m (i+1)! \cdot |\alpha_i| \cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi y_0)^{i+1}}}_{\leq \frac{1}{\min(2\pi y_0, (2\pi y_0)^{m+1})}} \cdot \frac{1}{n} \\
 \leq & (m+1)(m+1)! \cdot \max_{1 \leq i \leq m} |\alpha_i| \cdot \frac{1}{\min(2\pi y_0, (2\pi y_0)^{m+1})} \cdot \frac{1}{n} \\
 < & \varepsilon,
 \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Zu (d):

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Definiert man dann

$$\varepsilon_2 = \min \left(\frac{\varepsilon \mu_1^2}{4m_2 + 2\varepsilon \mu_1}, \frac{\mu_1}{2} \right) > 0,$$

so folgt

$$\mu_1 - \varepsilon_2 > 0 \tag{4.7}$$

und

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_2 & < \frac{\varepsilon \mu_1^2}{2m_2 + \varepsilon \mu_1} \\
 \implies \varepsilon_2 \left(m_2 + \frac{\varepsilon}{2} \mu_1 \right) & < \frac{\varepsilon}{2} \mu_1^2 \\
 \implies m_2 \varepsilon_2 & < \frac{\varepsilon}{2} \mu_1^2 - \frac{\varepsilon}{2} \varepsilon_2 \mu_1 \\
 \implies \frac{m_2 \varepsilon_2}{\mu_1^2 - \varepsilon_2 \mu_1} & < \frac{\varepsilon}{2}
 \end{aligned}$$

sowie die Existenz eines $N_2(= N_2(\varepsilon_2)) \in \mathbb{N}$, so daß für beliebiges $n \geq N_2$ und für alle $y \in [y_0, r_{max}]$ die Abschätzung

$$|q_n(y)| \leq \varepsilon_2 \tag{4.8}$$

erfüllt ist. Analog definiert man anschließend

$$\varepsilon_1 = \underbrace{(\mu_1 - \varepsilon_2)}_{>0 \text{ nach (4.7)}} \frac{\varepsilon}{4} > 0$$

und folgert hieraus

$$\frac{\varepsilon_1}{\mu_1 - \varepsilon_2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

sowie die Existenz eines $N_1(= N_1(\varepsilon_1)) \in \mathbb{N}$, so daß für beliebiges $n \geq N_1$ und für alle $y \in [y_0, r_{max}]$ die Abschätzung

$$|p_n(y)| \leq \varepsilon_1 \tag{4.9}$$

erfüllt ist. Die Verwendung dieser Ergebnisse führt für $n \geq N := \max(N_1, N_2)$ dann auf

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(y) + p_n(y)}{g(y) + q_n(y)} - \frac{f(y)}{g(y)} \right| \\ = & \left| \frac{f(y)g(y) + p_n(y)g(y) - f(y)g(y) - f(y)q_n(y)}{g^2(y) + q_n(y)g(y)} \right| \\ = & \left| \frac{p_n(y)g(y) - f(y)q_n(y)}{g^2(y) + q_n(y)g(y)} \right| \\ \leq & \left| \frac{p_n(y)g(y)}{g^2(y) + q_n(y)g(y)} \right| + \left| \frac{f(y)q_n(y)}{g^2(y) + q_n(y)g(y)} \right| \\ = & \left| \frac{p_n(y)}{g(y) + q_n(y)} \right| + \left| \frac{f(y)q_n(y)}{g^2(y) + q_n(y)g(y)} \right| \\ \stackrel{(4.9),(4.8)}{\leq} & \frac{\varepsilon_1}{\underbrace{|g(y)| - |q_n(y)|}_{>0 \text{ nach (4.7) und (4.8)}}} + \frac{|f(y)| \cdot \varepsilon_2}{\underbrace{|g(y)|(|g(y)| - |q_n(y)|)}_{\geq \mu_1(\mu_1 - \varepsilon_2)}} \\ \leq & \frac{\varepsilon_1}{\mu_1 - \varepsilon_2} + \frac{m_2 \varepsilon_2}{\mu_1^2 - \varepsilon_2 \mu_1} \\ \stackrel{\text{siehe oben}}{\leq} & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ = & \varepsilon, \end{aligned}$$

und dieses Ergebnis gilt gleichmäßig für alle $y \in [y_0, r_{max}]$.

Zu (e):

Definiere $p_n := f_n - f$ und $q_n := g_n - g$. Dann ist die gleichmäßige Konvergenz von f_n gegen f beziehungsweise von g_n gegen g gleichbedeutend mit der gleichmäßigen Konvergenz von p_n beziehungsweise q_n gegen die Nullfunktion. Außerdem existiert zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ offenbar ein $n \in \mathbb{N}$, so daß

$$|f(y)| \leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y)| \leq m_2 + \varepsilon$$

gilt. Läßt man nun ε gegen 0 gehen, so folgt

$$|f(y)| \leq m_2 \quad .$$

Analog zeigt man

$$|g(y)| \geq |g_n(y)| - |g_n(y) - g(y)| \geq \mu_1 - \varepsilon ,$$

mithin für ε gegen 0

$$|g(y)| \geq \mu_1 \quad .$$

Damit sind alle Voraussetzungen von Teil (d) erfüllt, dessen Anwendung nun die Behauptung, nämlich die gleichmäßige Konvergenz von

$$\frac{f + p_n}{g + q_n} = \frac{f_n}{g_n}$$

gegen $\frac{f}{g}$ zeigt.

□

Lemma 4.1.11 *Definiere für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen*

$$s_n : (0, r_{max}] \ni y \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{\sinh^2(k\pi y)}{y^2}$$

sowie

$$F_n : (0, r_{max}] \ni y \mapsto \ln(s_n(y)) \quad .$$

Dann gelten mit den Abkürzungen $a = a(y) := \exp(2\pi y)$ und

$$g_n = g_n(y) := \frac{a^{2n+1} - a^{n+1} + a^n - 1}{a^{n+1} - a^n} - 2n$$

folgende Aussagen:

(a) Für alle $y \in (0, r_{max}]$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$s_n(y) = \frac{g_n}{4y^2} \quad \text{und} \quad F_n(y) = -\ln(4) - 2\ln(y) + \ln(g_n) \quad .$$

(b) Für die ersten beiden Ableitungen von g_n nach y (mit g'_n beziehungsweise g''_n bezeichnet) gilt

$$\begin{aligned} g'_n &= g'_n(y) = 2\pi \frac{na^{2n+2} - (n+1)a^{2n+1} + (n+1)a - n}{a^n(a-1)^2} \\ g''_n &= g''_n(y) \\ &= 4\pi^2 (n^2 a^{2n+3} - (2n^2 + 2n - 1)a^{2n+2} + (n+1)^2 a^{2n+1} - (n+1)^2 a^2 \\ &\quad + (2n^2 + 2n - 1)a - n^2) : (a^n(a-1)^3) \quad . \end{aligned}$$

Außerdem gilt mit diesen Ableitungen die Beziehung

$$\begin{aligned}
& \frac{g_n'' g_n - (g_n')^2}{g_n^2} \\
= & 4\pi^2 (a^{4n+3} - (2n^3 + n^2)a^{3n+4} + (6n^3 + 7n^2 - 1)a^{3n+3} - (6n^3 + 11n^2 + 4n)a^{3n+2} \\
& + (2n^3 + 5n^2 + 4n + 1)a^{3n+1} - (4n^2 + 4n + 1)a^{2n+3} + (8n^2 + 8n)a^{2n+2} \\
& - (4n^2 + 4n + 1)a^{2n+1} + (2n^3 + 5n^2 + 4n + 1)a^{n+3} - (6n^3 + 11n^2 + 4n)a^{n+2} \\
& + (6n^3 + 7n^2 - 1)a^{n+1} - (2n^3 + n^2)a^n + a) \\
: & (a^{4n+4} - 2a^{4n+3} + a^{4n+2} - (4n + 2)a^{3n+4} + (12n + 6)a^{3n+3} - (12n + 6)a^{3n+2} \\
& + (4n + 2)a^{3n+1} + (4n^2 + 4n + 1)a^{2n+4} - (16n^2 + 16n + 6)a^{2n+3} \\
& + (24n^2 + 24n + 10)a^{2n+2} - (16n^2 + 16n + 6)a^{2n+1} + (4n^2 + 4n + 1)a^{2n} \\
& + (4n + 2)a^{n+3} - (12n + 6)a^{n+2} + (12n + 6)a^{n+1} - (4n + 2)a^n + a^2 - 2a + 1)
\end{aligned}$$

sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n'' g_n - (g_n')^2}{g_n^2} = 4\pi^2 \frac{a}{(a-1)^2},$$

wobei die Konvergenz gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall $[y_0, r_{max}]$ ist ($0 < y_0 < \min(1, r_{max})$ beliebig).

(c) Für die beiden ersten Ableitungen von F_n nach y (mit F_n' beziehungsweise F_n'' bezeichnet) gilt

$$\begin{aligned}
F_n' = F_n'(y) &= -\frac{2}{y} + \frac{g_n'}{g_n} \\
F_n'' = F_n''(y) &= \frac{2}{y^2} + \frac{g_n'' g_n - (g_n')^2}{g_n^2}
\end{aligned}$$

sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n'' = \frac{2}{y^2} + 4\pi^2 \frac{a}{(a-1)^2} = \frac{2}{y^2} + 4\pi^2 \frac{\exp(2\pi y)}{(\exp(2\pi y) - 1)^2} > 0 \quad \forall y \in [y_0, r_{max}] \quad ,$$

wobei auch hier die Konvergenz gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall $[y_0, r_{max}]$ ist ($0 < y_0 < r_{max}$ beliebig).

Beweis:

Zu (a):

Es ist

$$\begin{aligned}
& s_n(y) \\
= & \sum_{k=1}^n \frac{\sinh(k\pi y)}{y^2} \\
= & \sum_{k=1}^n \frac{(\exp(k\pi y) - \exp(-k\pi y))^2}{4y^2} \\
= & \frac{1}{4y^2} \sum_{k=1}^n \left(\underbrace{(\exp(2\pi y))^k}_{=a} - 2 + \underbrace{(\exp(-2\pi y))^k}_{=a^{-1}} \right) \\
= & \frac{1}{4y^2} \sum_{k=1}^n \left(a^k - 2 + (a^{-1})^k \right) \\
\stackrel{\text{geom. Summenf.}}{=} & \frac{1}{4y^2} \left(\frac{a - a^{n+1}}{1 - a} - 2n + \frac{a^{-1} - (a^{-1})^{n+1}}{1 - a^{-1}} \right) \\
= & \frac{1}{4y^2} \left(\frac{a^{2n+1} - a^{n+1} + a^n - 1}{a^{n+1} - a^n} - 2n \right) \\
= & \frac{g_n}{4y^2}
\end{aligned}$$

und somit auch

$$F_n(y) = \ln(s_n(y)) = -\ln(4) - \ln(y^2) + \ln(g_n(y)) = -\ln(4) - 2\ln(y) + \ln(g_n(y)),$$

womit (a) bewiesen ist.

Zu (b):

Man differenziert $g(y)$ nach den bekannten Regeln und gewinnt so unter Verwendung von $a' = (\exp(2\pi \cdot))' = 2\pi \exp(2\pi \cdot) = 2\pi a$

$$\begin{aligned}
& g'_n \\
= & \left[((2n+1)a^{2n}a' - (n+1)a^n a' + na^{n-1}a')(a^{n+1} - a^n) \right. \\
& \left. - (a^{2n+1} - a^{n+1} + a^n - 1)((n+1)a^n a' - na^{n-1}a') \right] : [(a^{n+1} - a^n)^2] \\
= & 2\pi \left[\overbrace{((2n+1)a^{2n+1} - (n+1)a^{n+1} + na^n)}^{T_1 :=} (a^{n+1} - a^n) \right. \\
& \left. - \underbrace{(a^{2n+1} - a^{n+1} + a^n - 1)}_{T_2 :=} ((n+1)a^{n+1} - na^n) \right] : [(a^{n+1} - a^n)^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \frac{T_1(a^{n+1} - a^n) - T_2(n(a^{n+1} - a^n) + a^{n+1})}{(a^{n+1} - a^n)^2} \\
&= 2\pi \frac{(a^{n+1} - a^n)(T_1 - nT_2) - a^{n+1}T_2}{(a^{n+1} - a^n)^2} \\
&= 2\pi \frac{(a^{n+1} - a^n)((n+1)a^{2n+1} - a^{n+1} + n) - a^{n+1}(a^{2n+1} - a^{n+1} + a^n - 1)}{(a^{n+1} - a^n)^2} \\
&= 2\pi \frac{(a^{n+1} - a^n)((n+1)a^{2n+1} + n) - (a^{3n+2} - a^{n+1})}{(a^{n+1} - a^n)^2} \\
&= 2\pi \frac{na^{3n+2} - (n+1)a^{3n+1} + (n+1)a^{n+1} - na^n}{a^{2n}(a-1)^2} \\
&= 2\pi \frac{na^{2n+2} - (n+1)a^{2n+1} + (n+1)a - n}{a^{2n}(a-1)^2} .
\end{aligned}$$

Die zweite Ableitung ermittelt man analog und erhält:

$$\begin{aligned}
&g_n'' \\
&= 2\pi [(n \cdot (2n+2)a^{2n+1}a' - (n+1)(2n+1)a^{2n}a' + (n+1)a')(a^{n+2} - 2a^{n+1} + a^n) \\
&\quad - (na^{2n+2} - (n+1)a^{2n+1} + (n+1)a - n)((n+2)a^{n+1}a' - 2(n+1)a^n a' + na^{n-1}a')] \\
&\quad : [a^{2n}(a-1)^4] \\
&= 4\pi^2 [(n \cdot (2n+2)a^{2n+2} - (n+1)(2n+1)a^{2n+1} + (n+1)a)(a^{n+2} - 2a^{n+1} + a^n) \\
&\quad - (na^{2n+2} - (n+1)a^{2n+1} + (n+1)a - n)((n+2)a^{n+2} - 2(n+1)a^{n+1} + na^n)] \\
&\quad : [a^{2n}(a-1)^4] \\
&= 4\pi^2 [(2n^2 + 2n)a^{3n+4} - (2n^2 + 3n + 1)a^{3n+3} + (n+1)a^{n+3} - (4n^2 + 4n)a^{3n+3} \\
&\quad + (4n^2 + 6n + 2)a^{3n+2} - 2(n+1)a^{n+2} + (2n^2 + 2n)a^{3n+2} - (2n^2 + 3n + 1)a^{3n+1} \\
&\quad + (n+1)a^{n+1} - (n^2 + 2n)a^{3n+4} + (n^2 + 3n + 2)a^{3n+3} - (n^2 + 3n + 2)a^{n+3} \\
&\quad + (n^2 + 2n)a^{n+2} + (2n^2 + 2n)a^{3n+3} - 2(n^2 + 2n + 1)a^{3n+2} + 2(n^2 + 2n + 1)a^{n+2} \\
&\quad - (2n^2 + 2n)a^{n+1} - n^2a^{3n+2} + (n^2 + n)a^{3n+1} - (n^2 + n)a^{n+1} + n^2a^n] : [a^{2n}(a-1)^4] \\
&= 4\pi^2 [n^2a^{3n+4} - (3n^2 + 2n - 1)a^{3n+3} + (3n^2 + 4n)a^{3n+2} - (n^2 + 2n + 1)a^{3n+1} \\
&\quad - (n^2 + 2n + 1)a^{n+3} + (3n^2 + 4n)a^{n+2} - (3n^2 + 2n - 1)a^{n+1} + n^2a^n] : [a^{2n}(a-1)^4] \\
&= 4\pi^2 [n^2a^{2n+4} - n^2a^{2n+3} - (2n^2 + 2n - 1)a^{2n+3} + (2n^2 + 2n - 1)a^{2n+2} \\
&\quad + (n^2 + 2n + 1)a^{2n+2} - (n^2 + 2n + 1)a^{2n+1} - (n+1)^2a^3 + (n+1)^2a^2 \\
&\quad + (2n^2 + 2n - 1)a^2 - (2n^2 + 2n - 1)a - n^2a + n^2] : [a^n(a-1)^4] \\
&= 4\pi^2 [n^2a^{2n+3} - (2n^2 + 2n - 1)a^{2n+2} + (n+1)^2a^{2n+1} - (n+1)^2a^2 \\
&\quad + (2n^2 + 2n - 1)a - n^2] : [a^n(a-1)^3] .
\end{aligned}$$

Nun kann man auch die letzte behauptete Beziehung durch Einsetzen der vorangegangenen Ergebnisse und Nachrechnen bestätigen:

$$\begin{aligned}
& \frac{g_n'' g_n - (g_n')^2}{g_n^2} \\
= & \frac{4\pi^2}{a^{2n}(a-1)^4 \cdot \left(\frac{a^{2n+1} - a^{n+1} + a^n - 1}{a^n(a-1)} - 2n \right)^2} \\
& \cdot \left[(n^2 a^{2n+3} - (2n^2 + 2n - 1)a^{2n+2} + (n+1)^2 a^{2n+1} - (n+1)^2 a^2 + (2n^2 + 2n + 1)a - n^2) \right. \\
& \left. (a^{2n+1} - a^{n+1} + a^n - 1 - 2na^{n+1} + 2na^n) - (na^{2n+2} - (n+1)a^{2n+1} + (n+1)a - n)^2 \right] \\
= & \frac{4\pi^2}{(a-1)^2(a^{2n+1} - a^{n+1} + a^n - 1 - 2na^{n+1} + 2na^n)^2} \\
& \cdot \left[n^2 a^{4n+4} - (2n^2 + 2n - 1)a^{4n+3} + (n+1)^2 a^{4n+2} - (n+1)^2 a^{2n+3} \right. \\
& + (2n^2 + 2n - 1)a^{2n+2} - n^2 a^{2n+1} - n^2 a^{3n+4} + (2n^2 + 2n - 1)a^{3n+3} - (n+1)^2 a^{3n+2} \\
& + (n+1)^2 a^{n+3} - (2n^2 + 2n - 1)a^{n+2} + n^2 a^{n+1} + n^2 a^{3n+3} - (2n^2 + 2n - 1)a^{3n+2} \\
& + (n+1)^2 a^{3n+1} - (n+1)^2 a^{n+2} + (2n^2 + 2n - 1)a^{n+1} - n^2 a^n - n^2 a^{2n+3} \\
& + (2n^2 + 2n - 1)a^{2n+2} - (n+1)^2 a^{2n+1} + (n+1)^2 a^2 - (2n^2 + 2n - 1)a + n^2 - 2n^3 a^{3n+4} \\
& + (4n^3 + 4n^2 - 2n)a^{3n+3} - (2n^3 + 4n^2 + 2n)a^{3n+2} + (2n^3 + 4n^2 + 2n)a^{n+3} \\
& - (4n^3 + 4n^2 - 2n)a^{n+2} + 2n^3 a^{n+1} + 2n^3 a^{3n+3} - (4n^3 + 4n^2 - 2n)a^{3n+2} \\
& + (2n^3 + 4n^2 + 2n)a^{3n+1} - (2n^3 + 4n^2 + 2n)a^{n+2} + (4n^3 + 4n^2 - 2n)a^{n+1} \\
& - 2n^3 a^n - n^2 a^{4n+4} - (n+1)^2 a^{4n+2} - (n+1)^2 a^2 - n^2 + (2n^2 + 2n)a^{4n+3} \\
& \left. - (2n^2 + 2n)a^{2n+3} + 2n^2 a^{2n+2} + (2n^2 + 4n + 2)a^{2n+2} - (2n^2 + 2n)a^{2n+1} + (2n^2 + 2n)a \right] \\
= & \frac{4\pi^2}{((a-1)(a^{2n+1} - a^{n+1} + a^n - 1 - 2na^{n+1} + 2na^n))^2} \\
& \cdot \left(a^{4n+3} - (2n^3 + n^2)a^{3n+4} + (6n^3 + 7n^2 - 1)a^{3n+3} - (6n^3 + 11n^2 + 4n)a^{3n+2} \right. \\
& + (2n^3 + 5n^2 + 4n + 1)a^{3n+1} - (4n^2 + 4n + 1)a^{2n+3} + (8n^2 + 8n)a^{2n+2} \\
& - (4n^2 + 4n + 1)a^{2n+1} + (2n^3 + 5n^2 + 4n + 1)a^{n+3} - (6n^3 + 11n^2 + 4n)a^{n+2} \\
& \left. + (6n^3 + 7n^2 - 1)a^{n+1} - (2n^3 + n^2)a^n + a \right)
\end{aligned}$$

Damit ist für den Zähler die gewünschte Form erreicht und für den Nenner gilt:

$$\begin{aligned}
& ((a-1)(a^{2n+1} - a^{n+1} + a^n - 1 - 2na^{n+1} + 2na^n))^2 \\
= & (a^{2n+2} - a^{2n+1} - a^{n+2} + a^{n+1} + a^{n+1} - a^n - a + 1 - 2na^{n+2} + 2na^{n+1} + 2na^{n+1})^2 \\
= & (a^{2n+2} - a^{2n+1} - (2n+1)a^{n+2} + (4n+2)a^{n+1} - (2n+1)a^n - a + 1)^2 \\
= & a^{4n+4} + a^{4n+2} + (4n^2 + 4n + 1)a^{2n+4} + (16n^2 + 16n + 4)a^{2n+2} + (4n^2 + 4n + 1)a^{2n} \\
& + a^2 + 1 - 2a^{4n+3} - (4n+2)a^{3n+4} + (8n+4)a^{3n+3} - (4n+2)a^{3n+2} - 2a^{2n+3} \\
& + 2a^{2n+2} + (4n+2)a^{3n+3} - (8n+4)a^{3n+2} + (4n+2)a^{3n+1} + 2a^{2n+2} - 2a^{2n+1} \\
& - (16n^2 + 16n + 4)a^{2n+3} + (8n^2 + 8n + 2)a^{2n+2} + (4n+2)a^{n+3} - (4n+2)a^{n+2} \\
& + (4n+2)a^{n+1} - (4n+2)a^n - 2a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^{4n+4} - 2a^{4n+3} + a^{4n+2} - (4n+2)a^{3n+4} + (12n+6)a^{3n+3} - (12n+6)a^{3n+2} \\
&\quad + (4n+2)a^{3n+1} + (4n^2+4n+1)a^{2n+4} - (16n^2+16n+6)a^{2n+3} \\
&\quad + (24n^2+24n+10)a^{2n+2} - (16n^2+16n+6)a^{2n+1} + (4n^2+4n+1)a^{2n} + (4n+2)a^{n+3} \\
&\quad - (12n+6)a^{n+2} + (12n+6)a^{n+1} - (4n+2)a^n + a^2 - 2a + 1,
\end{aligned}$$

womit die gewünschte Darstellung von $\frac{g_n''g_n - (g_n')^2}{g_n^2}$ bewiesen ist. Um die behauptete Grenzwertaussage zu zeigen, dividiert man im Zähler und im Nenner dieser Darstellung jeweils durch a^{4n+4} . Im Zähler entsteht dadurch ein Ausdruck der Form

$$4\pi^2 \left(a^{-1} + \sum_{i=1}^{12} p^{(i)}(n)a^{\mu_i} \right),$$

und der Nenner hat die Gestalt

$$1 - 2a^{-1} + a^{-2} + \sum_{j=1}^{16} q^{(j)}(n)a^{\nu_j},$$

wobei die $p^{(i)}(n)$, $i = 1, \dots, 12$, $q^{(j)}(n)$, $j = 1, \dots, 16$ Polynome in n sind und die Exponenten $\mu_i, \nu_j \in \mathbb{Z}$ für alle $i \in \{1, \dots, 12\}$ beziehungsweise $j \in \{1, \dots, 16\}$ die Ungleichungen

$$\mu_i \leq -n \quad (\implies \forall i \in \{1, \dots, 12\} \exists k_i \in \mathbb{N}_0 \quad -\mu_i = n + k_i)$$

beziehungsweise

$$\nu_j \leq -n \quad (\implies \forall j \in \{1, \dots, 16\} \exists l_j \in \mathbb{N}_0 \quad -\nu_j = n + l_j)$$

erfüllen. Mit Hilfe von Lemma 4.1.10 (c) folgt daher, daß für alle $i \in \{1, \dots, 12\}$ beziehungsweise $j \in \{1, \dots, 16\}$ die Funktionen $p^{(i)}(n)a^{\mu_i}$ und die Funktionen $q^{(j)}(n)a^{\nu_j}$ für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall $[y_0, r_{max}]$ gegen die Nullfunktion konvergieren. Wegen Teil (b) desselben Lemmas gilt eine entsprechende gleichmäßige Konvergenz gegen die Nullfunktion auch für die Summen $\sum_{i=1}^{12} p^{(i)}(n)a^{\mu_i}$ und $\sum_{j=1}^{16} q^{(j)}(n)a^{\nu_j}$. Nun wendet man Lemma 4.1.10 (d) an und erhält somit die gleichmäßige Konvergenz von $\frac{g_n''g_n - (g_n')^2}{g_n^2}$ gegen

$$\frac{4\pi^2 a^{-1}}{1 - 2a^{-1} + a^{-2}} = 4\pi^2 \frac{a}{(a-1)^2} \quad .$$

Zu (c):

Man differenziert $F_n(y)$ nach den bekannten Ableitungsregeln und zeigt so mühelos die behaupteten Darstellungen für

$$\begin{aligned}
&F_n'(y) \\
&\stackrel{\text{Lemma 4.1.11 (a)}}{=} (-\ln(4) - 2\ln(y) + \ln(g_n(y)))' \\
&= -\frac{2}{y} + \frac{g_n'(y)}{g_n(y)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & F_n''(y) \\ &= \frac{2}{y^2} + \frac{g_n''(y)g_n(y) - (g_n'(y))^2}{g_n(y)^2} . \end{aligned}$$

Die Aussage über die gleichmäßige Konvergenz folgt jetzt unmittelbar aus Lemma 4.1.11 (b). \square

Bemerkung 4.1.12 Die vorangegangene Untersuchung zeigt für den Spezialfall, daß alle Koeffizienten in der Reihendarstellung (4.2) identisch gleich eins sind, die gleichmäßige Konvergenz der Folge der zweiten Ableitungen der logarithmierten Partialsummen gegen einen positiven Wert. In diesem Fall konvergiert die Reihendarstellung der Lösung zwar nicht, wie schon oben bemerkt, es ergibt sich jedoch eine asymptotische Darstellung von $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y)$ in dem Sinne, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F_n(y) - G_n(y)) = 0 ,$$

wobei G_n durch

$$G_n(y) := 2\pi yn - \ln \left(4y^2 \left(1 - \frac{1}{a} \right) \right) \quad (4.10)$$

erklärt ist. Dies zeigt man mittels

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (F_n(y) - G_n(y)) \\ \stackrel{\text{Lemma 4.1.11 (a)}}{=} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\ln(4) - 2\ln(y) + \ln(g_n) - 2\pi yn + \ln(4) + 2\ln(y) + \ln \left(1 - \frac{1}{a} \right) \right) \\ = & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln(g_n) - \underbrace{2\pi yn}_{=\ln(a^n)} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{a} \right) \\ = & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \left(\frac{a^{2n+1} - a^{n+1} + a^n - 1}{a^{n+1} - a^n} - 2n \right) \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{a} \right) \\ = & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \left(\frac{a^{2n+1} - (2n+1)a^{n+1} + (2n+1)a^n - 1}{a^n(a^{n+1} - a^n)} \right) \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{a} \right) \\ = & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \left(\frac{a^{2n+1} - (2n+1)a^{n+1} + (2n+1)a^n - 1}{a^{2n+1} \left(1 - \frac{1}{a} \right)} \right) \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{a} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \left(1 - (2n+1)a^{-n} + (2n+1)a^{-(n+1)} - a^{-(2n+1)} \right) - \ln \left(1 - \frac{1}{a} \right) \right) \\
&\quad + \ln \left(1 - \frac{1}{a} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \left(1 - \underbrace{(2n+1)a^{-n}}_{\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)} + \underbrace{(2n+1)a^{-(n+1)}}_{\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)} - \underbrace{a^{-(2n+1)}}_{\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)} \right) \right) \\
&\stackrel{\text{Lemma 4.1.10 (c)}}{=} 0,
\end{aligned}$$

wobei man im letzten Schritt noch die Stetigkeit des \ln verwendet. Man hat somit gezeigt, daß sich F_n für große n und festes y im wesentlichen wie die Funktion $G_n(y)$ verhält, die als Funktion von n betrachtet affin linear ist (siehe dazu (4.10)). Wie man weiter leicht nachrechnet, hat man für G_n die Darstellung

$$G_n(y) = 2\pi y n - \ln(4) - 2 \ln(y) + 2\pi y - \ln(a-1),$$

die man in dieser Form mühelos zweimal nach y differenziert und so für alle $n \in \mathbb{N}$

$$G_n''(y) = 4\pi^2 \frac{a}{(a-1)^2} + \frac{2}{y^2} \stackrel{\text{Lemma 4.1.11 (c)}}{=} \lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\nu''(y)$$

erhält.

4.1.4 Logarithmische Konvexität von F im allgemeinen Fall

Die folgenden Untersuchungen werden sich nun mit dem allgemeineren und technisch schwieriger zu behandelnden Fall allgemeiner Koeffizienten a_k in der Reihendarstellung (4.2) befassen und unter bestimmten Voraussetzungen werden wir die logarithmische Konvexität der schon für den oben genannten Spezialfall betrachteten Funktion $\frac{N(y)}{y^2}$ zeigen können. Die genaue Kenntnis spezieller Eigenschaften von \sinh und \cosh ist für die folgenden Untersuchungen vonnöten, wir stellen daher das nachfolgende Lemma an den Beginn derselben.

Lemma 4.1.13 *Es gelten folgende Gleichungen:*

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) \quad (4.11)$$

$$\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x) \quad (4.12)$$

$$2 \cosh^2(x) = \cosh(2x) + 1 \quad (4.13)$$

$$2 \sinh^2(x) = \cosh(2x) - 1 \quad (4.14)$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad (4.15)$$

Darüberhinaus hat man für nichtnegative $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$x \leq \sinh(x) \quad (4.16)$$

und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$1 \leq \cosh(x) \quad . \quad (4.17)$$

Schließlich kann man noch für nichtnegative $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzungen

$$\cosh(x) - 1 \leq \sinh(x) \leq \frac{\exp(x)}{2} \leq \cosh(x) \leq \sinh(x) + 1 \leq \exp(x) \quad (4.18)$$

sowie die für beliebiges positives x gültige Ungleichung

$$\frac{\sinh^2(x)}{x^2} \leq \exp(2x) \quad (4.19)$$

zeigen.

Beweis:

Wir zeigen nacheinander die behaupteten Gleichungen:

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \cosh^2(x) + \sinh^2(x) \\ = & \frac{(\exp(x) + \exp(-x))^2 + (\exp(x) - \exp(-x))^2}{4} \\ = & \frac{(\exp(x))^2 + 2\exp(x)\exp(-x) + (\exp(-x))^2}{4} \\ & + \frac{(\exp(x))^2 - 2\exp(x)\exp(-x) + (\exp(-x))^2}{4} \\ = & \frac{\exp(2x) + \exp(-2x)}{2} \\ = & \cosh(2x), \end{aligned}$$

womit (4.11) gezeigt ist. Gleichung (4.12) sieht man mittels

$$\begin{aligned} & 2 \sinh(x) \cosh(x) \\ = & \frac{(\exp(x) - \exp(-x))(\exp(x) + \exp(-x))}{2} \\ = & \frac{\exp(2x) - \exp(-2x)}{2} \\ = & \sinh(2x) \end{aligned}$$

ein. Zum Beweis der Beziehungen (4.13) und (4.14) schreibt man

$$\begin{aligned} & 2 \begin{cases} \cosh^2(x) \\ \sinh^2(x) \end{cases} \\ = & \frac{(\exp(x) \pm \exp(-x))^2}{2} \\ = & \frac{\exp(2x) + \exp(-2x) \pm 2 \overbrace{\exp(x)\exp(-x)}{=1}}{2} \\ = & \cosh(2x) \pm 1 \end{aligned}$$

hin und Gleichung (4.15) folgt nach Subtraktion der Gleichung (4.14) von (4.13) und anschließender Division durch 2, womit alle Gleichungen gezeigt sind. Die Ungleichungen (4.16) und (4.17) ergeben sich unmittelbar aus den Reihenentwicklungen des sinus hyperbolicus beziehungsweise des cosinus hyperbolicus

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ \cosh(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,\end{aligned}$$

die man leicht mit Hilfe der Exponentialreihe gewinnt. Die erste Ungleichung in (4.18) ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned}\frac{\exp(x) + \exp(-x) - 2}{2} &\leq \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \exp(-x) &\leq 2 \\ \Leftrightarrow \exp(-x) &\leq 1 \quad (w),\end{aligned}$$

die zweite Ungleichung bedeutet nichts anderes als

$$\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \leq \frac{\exp(x)}{2},$$

was ebenso wie die dritte Ungleichung, die

$$\frac{\exp(x)}{2} \leq \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

bedeutet, auf der Hand liegt. Die vierte Ungleichung führt auf

$$\begin{aligned}\frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} &\leq \frac{\exp(x) - \exp(-x) + 2}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \exp(-x) &\leq 2 \\ \Leftrightarrow \exp(-x) &\leq 1 \quad (w),\end{aligned}$$

und die fünfte Ungleichung ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned}\frac{\exp(x) - \exp(-x) + 2}{2} &\leq \exp(x) \\ \Leftrightarrow 2 - \exp(-x) &\leq \exp(x) \\ \Leftrightarrow 1 &\leq \cosh(x) \quad (w) \text{ nach (4.17)}.\end{aligned}$$

Der Beweis von (4.19) ergibt sich aus

$$\begin{aligned}&\sinh^2(x) \\ &\stackrel{(3.3)}{\leq} x^2 \cosh^2(x) \\ &\stackrel{(4.18)}{\leq} x^2 \exp^2(x) \\ &= x^2 \exp(2x)\end{aligned}$$

nach Division durch x^2 . Damit sind alle Behauptungen des Lemmas bewiesen. □

Bevor wir nun den zentralen Satz über die gleichmäßige Konvergenz der zur Diskussion stehenden Funktionenreihen angeben und beweisen, benötigen wir noch eine "Doppelreihenversion" des Weierstraßschen Majorantenkriteriums:

Lemma 4.1.14 *Gegeben seien Funktionen $f_{k,l} : [y_0, r_{max}] \mapsto \mathbb{R}$, $k, l \in \mathbb{N}$ und es gelte $|f_{k,l}(y)| \leq \alpha_k \beta_l \quad \forall y \in [y_0, r_{max}]$. Sind dann die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ und $\sum_{l=1}^{\infty} \beta_l$ absolut konvergent, so konvergiert*

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} f_{k,l}(y)$$

(absolut) und gleichmäßig auf $[y_0, r_{max}]$.

Beweis:

Definiere $s_n := \sum_{k,l=1}^n f_{k,l}(y)$. Nach dem Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz von Reihen (siehe zum Beispiel [Heu01] Satz 105.1) hat man zu zeigen, daß

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq m \geq N \quad \|s_n - s_m\|_{\infty} < \varepsilon \tag{4.20}$$

gilt. Da die beiden gegebenen Zahlenreihen (absolut) konvergieren, konvergiert auch die Doppelreihe

$$\sum_{k,l=1}^n \alpha_k \beta_l$$

und mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums für Zahlenreihen hat man die Existenz eines $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq m \geq N$ die Ungleichung

$$\left| \sum_{k,l=m+1}^n \alpha_k \beta_l \right| = \sum_{k,l=m+1}^n \alpha_k \beta_l < \varepsilon$$

gilt. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und $n \geq m \geq N$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} & \|s_n - s_m\|_{\infty} \\ &= \left\| \sum_{k,l=m+1}^n f_{k,l}(y) \right\|_{\infty} \\ &\leq \sum_{k,l=m+1}^n \|f_{k,l}(y)\|_{\infty} \\ &\stackrel{\text{Voraussetzung}}{\leq} \sum_{k,l=m+1}^n \alpha_k \beta_l \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Satz 4.1.15 Auf dem kompakten Intervall $[y_0, r_{max}]$, $0 < y_0 < r_{max}$ seien die Funktionen

$$f_k(y) = \frac{\sinh^2(k\pi y)}{y^2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$s_n(y) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{(k\pi)^2} f_k(y), \quad n \in \mathbb{N}$$

und

$$F_n(y) = \ln(s_n(y))$$

definiert, wobei die Koeffizienten a_k so (klein) gewählt seien, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \exp(2k\pi r_{max}) \quad (4.21)$$

(absolut) gegen $S \geq 0$ konvergiert. Dann gilt:

(a) Man hat für $F_n''(y) = \frac{d^2}{dy^2} F_n(y)$ die Darstellung

$$\begin{aligned} & F_n''(y) \\ = & 4 \left(\sum_{k,l=1}^n \left(\frac{a_k a_l}{kl} \right)^2 \left[k^2 \pi^2 \cosh(2k\pi y) (\cosh(2l\pi y) - 1) - kl \pi^2 \sinh(2k\pi y) \sinh(2l\pi y) \right. \right. \\ & \left. \left. - k\pi \sinh(2k\pi y) (\cosh(2l\pi y) - 1) y^{-1} + l\pi (\cosh(2k\pi y) - 1) \sinh(2l\pi y) y^{-1} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} (\cosh(2k\pi y) - 1) (\cosh(2l\pi y) - 1) y^{-2} \right] \right) \\ : & \left(\sum_{k,l=1}^n \left(\frac{a_k a_l}{kl} \right)^2 (\cosh(2k\pi y) - 1) (\cosh(2l\pi y) - 1) \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

und bei Benutzung der Abkürzung $a = a(y) := \exp(2\pi y)$ die zusätzliche Gleichung

$$\begin{aligned}
F_n''(y) &= 4 \left(\sum_{k,l=1}^n \left(\frac{a_k a_l}{kl} \right)^2 \left[\left((k^2 - kl)\pi^2 + (-k\pi + l\pi)y^{-1} + \frac{1}{2}y^{-2} \right) a^{k+l} \right. \right. \\
&+ \left((k^2 + kl)\pi^2 + (-k\pi - l\pi)y^{-1} + \frac{1}{2}y^{-2} \right) a^{k-l} \\
&+ \left((k^2 + kl)\pi^2 + (k\pi + l\pi)y^{-1} + \frac{1}{2}y^{-2} \right) a^{-k+l} \\
&+ \left. \left((k^2 - kl)\pi^2 + (k\pi - l\pi)y^{-1} + \frac{1}{2}y^{-2} \right) a^{-k-l} \right. \\
&+ (-2k^2\pi^2 + 2k\pi y^{-1} - y^{-2}) a^k + (-2l\pi y^{-1} - y^{-2}) a^l + (2l\pi y^{-1} - y^{-2}) a^{-l} \\
&+ \left. \left. (-2k^2\pi^2 - 2k\pi y^{-1} - y^{-2}) a^{-k} + 2y^{-2} \right] \right) \quad (4.23) \\
&: \left(\sum_{k,l=1}^n \left(\frac{a_k a_l}{kl} \right)^2 (a^{k+l} - 2(a^k + a^l) + a^{k-l} + 4 + a^{l-k} - 2(a^{-k} + a^{-l}) + a^{-k-l}) \right) .
\end{aligned}$$

(b) $(F_n'')_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf $[y_0, r_{\max}]$.

(c) Die Funktionenfolgen $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(F_n')_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren gleichmäßig (und daher erst recht punktweise) auf $[y_0, r_{\max}]$.

Beweis:

Zu (a):

Man leitet zunächst die folgende allgemeine Darstellung von F_n'' her:

$$\begin{aligned}
&F_n''(y) \\
&= \left(\ln \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{(k\pi)^2} f_k(y) \right) \right)'' \\
&= \left(\frac{\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{(k\pi)^2} f_k'(y)}{\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{(k\pi)^2} f_k(y)} \right)'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{(k\pi)^2} f_k''(y)\right) \cdot \left(\sum_{l=1}^n \frac{a_l^2}{(l\pi)^2} f_l(y)\right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{(k\pi)^2} f_k'(y)\right) \cdot \left(\sum_{l=1}^n \frac{a_l^2}{(l\pi)^2} f_l'(y)\right)}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{(k\pi)^2} f_k(y)\right) \cdot \left(\sum_{l=1}^n \frac{a_l^2}{(l\pi)^2} f_l(y)\right)} \\
&= \frac{\sum_{k,l=1}^n \left(\frac{a_k a_l}{kl}\right)^2 (f_k''(y) f_l(y) - f_k'(y) f_l'(y))}{\sum_{k,l=1}^n \left(\frac{a_k a_l}{kl}\right)^2 f_k(y) f_l(y)} \tag{4.24}
\end{aligned}$$

Die Bestimmung der ersten beiden Ableitungen von f_k , $k \in \mathbb{N}$ ist somit der nächste erforderliche Schritt. Er ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&f_k'(y) \\
&= (\sinh^2(k\pi y) y^{-2})' \\
&= 2k\pi \sinh(k\pi y) \cosh(k\pi y) y^{-2} - 2 \sinh^2(k\pi y) y^{-3} \\
&\stackrel{(4.12), (4.14)}{=} k\pi \sinh(2k\pi y) y^{-2} - (\cosh(2k\pi y) - 1) y^{-3} \tag{4.25}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} (k\pi (a^k - a^{-k}) y^{-2} - (a^k + a^{-k} - 2) y^{-3}) \tag{4.26}$$

und

$$\begin{aligned}
&f_k''(y) \\
&\stackrel{(4.25)}{=} k\pi (2k\pi \cosh(2k\pi y) y^{-2} - 2 \sinh(2k\pi y) y^{-3}) - (2k\pi \sinh(2k\pi y) y^{-3} \\
&\quad - 3(\cosh(2k\pi y) - 1) y^{-4}) \\
&= 2k^2 \pi^2 \cosh(2k\pi y) y^{-2} - 4k\pi \sinh(2k\pi y) y^{-3} \\
&\quad + 3(\cosh(2k\pi y) - 1) y^{-4} \tag{4.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k^2 \pi^2 (a^k + a^{-k}) y^{-2} - 2k\pi (a^k - a^{-k}) y^{-3} \\
&\quad + \frac{3}{2} (a^k + a^{-k} - 2) y^{-4} \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Man hat nun (4.25) und (4.27) in (4.24) einzusetzen, wobei wir der Übersichtlichkeit halber Zähler und Nenner getrennt behandeln und jeweils nur die entscheidenden hinteren Terme unter der jeweiligen Summe betrachten (beachte außerdem noch $f_k(y) \stackrel{(4.14)}{=} \frac{1}{2} (\cosh(2k\pi y) - 1) y^{-2}$):

$$\begin{aligned}
&f_k''(y) f_l(y) - f_k'(y) f_l'(y) \\
&\stackrel{(4.25), (4.27)}{=} (2k^2 \pi^2 \cosh(2k\pi y) y^{-2} - 4k\pi \sinh(2k\pi y) y^{-3} + 3(\cosh(2k\pi y) - 1) y^{-4}) \\
&\quad \cdot \frac{1}{2} (\cosh(2l\pi y) - 1) y^{-2} \\
&\quad - (k\pi \sinh(2k\pi y) y^{-2} - (\cosh(2k\pi y) - 1) y^{-3}) \\
&\quad \cdot (l\pi \sinh(2l\pi y) y^{-2} - (\cosh(2l\pi y) - 1) y^{-3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k^2\pi^2 \cosh(2k\pi y)(\cosh(2l\pi y) - 1)y^{-4} - 2k\pi \sinh(2k\pi y)(\cosh(2l\pi y) - 1)y^{-5} \\
&\quad + \frac{3}{2}(\cosh(2k\pi y) - 1)(\cosh(2l\pi y) - 1)y^{-6} - kl\pi^2 \sinh(2k\pi y) \sinh(2l\pi y)y^{-4} \\
&\quad + l\pi(\cosh(2k\pi y) - 1) \sinh(2l\pi y)y^{-5} + k\pi \sinh(2k\pi y)(\cosh(2l\pi y) - 1)y^{-5} \\
&\quad - (\cosh(2k\pi y) - 1)(\cosh(2l\pi y) - 1)y^{-6} \\
&= k^2\pi^2 \cosh(2k\pi y)(\cosh(2l\pi y) - 1)y^{-4} - kl\pi^2 \sinh(2k\pi y) \sinh(2l\pi y)y^{-4} \\
&\quad - k\pi \sinh(2k\pi y)(\cosh(2l\pi y) - 1)y^{-5} + l\pi(\cosh(2k\pi y) - 1) \sinh(2l\pi y)y^{-5} \\
&\quad + \frac{1}{2}(\cosh(2k\pi y) - 1)(\cosh(2l\pi y) - 1)y^{-6} \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Den Nenner bringt man leicht auf die behauptete Form, indem man

$$\begin{aligned}
&f_k(y)f_l(y) \\
&\stackrel{(4.14)}{=} \frac{1}{2}(\cosh(2k\pi y) - 1)y^{-2} \cdot \frac{1}{2}(\cosh(2l\pi y) - 1)y^{-2} \\
&= \frac{1}{4}(\cosh(2k\pi y) - 1)(\cosh(2l\pi y) - 1)y^{-4}
\end{aligned}$$

hinschreibt. Dividiert man nun Zähler und Nenner durch $\frac{1}{4}y^{-4}$, so gewinnt man die behauptete erste Darstellung von $F_n''(y)$.

Um die zweite Darstellung zu beweisen, setzt man (4.26) und (4.28) in (4.24) ein und betrachtet wiederum die relevanten Teile von Zähler und Nenner getrennt. Im Zähler ergibt sich (beachte $f_k(y) = \frac{1}{4}(a^k - 2 + a^{-k})y^{-2}$)

$$\begin{aligned}
&f_k''(y)f_l(y) - f_k'(y)f_l'(y) \\
&\stackrel{(4.26),(4.28)}{=} \left(k^2\pi^2(a^k + a^{-k})y^{-2} - 2k\pi(a^k - a^{-k})y^{-3} + \frac{3}{2}(a^k + a^{-k} - 2)y^{-4} \right) \\
&\quad \cdot \frac{1}{4}(a^l - 2 + a^{-l})y^{-2} \\
&\quad - \frac{1}{2}(k\pi(a^k - a^{-k})y^{-2} - (a^k + a^{-k} - 2)y^{-3}) \\
&\quad \cdot \frac{1}{2}(l\pi(a^l - a^{-l})y^{-2} - (a^l + a^{-l} - 2)y^{-3}) \\
&= \frac{1}{4} \left[k^2\pi^2 y^{-4} (a^{k+l} + a^{-k+l} - 2a^k - 2a^{-k} + a^{k-l} + a^{-k-l}) \right. \\
&\quad - 2k\pi y^{-5} (a^{k+l} - a^{-k+l} - 2a^k + 2a^{-k} + a^{k-l} - a^{-k-l}) \\
&\quad + \frac{3}{2} y^{-6} (a^{k+l} - 2a^k + a^{k-l} + a^{-k+l} - 2a^{-k} + a^{-k-l} - 2a^l + 4 - 2a^{-l}) \\
&\quad - (kl\pi^2 y^{-4} (a^{k+l} - a^{k-l} - a^{-k+l} + a^{-k-l}) \\
&\quad - k\pi y^{-5} (a^{k+l} + a^{k-l} - 2a^k - a^{-k+l} - a^{-k-l} + 2a^{-k}) \\
&\quad - l\pi y^{-5} (a^{l+k} + a^{l-k} - 2a^l - a^{-l+k} - a^{-l-k} + 2a^{-l}) \\
&\quad \left. + y^{-6} (a^{k+l} + a^{k-l} - 2a^k + a^{-k+l} + a^{-k-l} - 2a^{-k} - 2a^l - 2a^{-l} + 4) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left[\left((k^2 - kl)\pi^2 y^{-4} + (-k\pi + l\pi)y^{-5} + \frac{1}{2}y^{-6} \right) a^{k+l} \right. \\
&\quad + \left((k^2 + kl)\pi^2 y^{-4} + (-k\pi - l\pi)y^{-5} + \frac{1}{2}y^{-6} \right) a^{k-l} \\
&\quad + \left((k^2 + kl)\pi^2 y^{-4} + (k\pi + l\pi)y^{-5} + \frac{1}{2}y^{-6} \right) a^{-k+l} \\
&\quad + \left((k^2 - kl)\pi^2 y^{-4} + (k\pi - l\pi)y^{-5} + \frac{1}{2}y^{-6} \right) a^{-k-l} \\
&\quad + (-2k^2\pi^2 y^{-4} + 2k\pi y^{-5} - y^{-6}) a^k + (-2l\pi y^{-5} - y^{-6}) a^l + (2l\pi y^{-5} - y^{-6}) a^{-l} \\
&\quad \left. + (-2k^2\pi^2 y^{-4} - 2k\pi y^{-5} - y^{-6}) a^{-k} + 2y^{-6} \right]
\end{aligned}$$

und für den hinteren Teil des Nenners errechnet man

$$\begin{aligned}
&f_k(y) \cdot f_l(y) \\
&= \frac{1}{16} (a^k - 2 + a^{-k}) \cdot (a^l - 2 + a^{-l}) y^{-4} \\
&= \frac{1}{16} (a^{k+l} - 2a^k + a^{k-l} - 2a^l + 4 - 2a^{-l} + a^{-k+l} - 2a^{-k} + a^{-k-l}) y^{-4} \quad .
\end{aligned}$$

Multiplikation des Zählers und Nenners mit $16y^4$ liefert nun die behauptete zweite Darstellung von $F_n''(y)$.

Zu (b):

In Anlehnung an die Argumentation von M. M. Lavrentiev (siehe [Lav56] Seite 827f) zeigen wir nun zunächst

$$F_n''(y) \geq 0 \quad \forall y \in [y_0, r_{max}] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad . \quad (4.30)$$

Setzt man nämlich in (4.29) $k = l$, so erhält man

$$\begin{aligned}
&f_k''(y) f_k - (f_k'(y))^2 \\
\stackrel{(4.29)}{=} &k^2 \pi^2 (\cosh(2k\pi y) (\cosh(2k\pi y) - 1) - \sinh^2(2k\pi y)) y^{-4} + \frac{1}{2} (\cosh(2k\pi y) - 1)^2 y^{-6} \\
\stackrel{(4.15)}{=} &k^2 \pi^2 (1 - \cosh(2k\pi y)) y^{-4} + \frac{1}{2} (\cosh(2k\pi y) - 1)^2 y^{-6} \\
\stackrel{(4.14)}{=} &-2k^2 \pi^2 \sinh^2(k\pi y) y^{-4} + 2 \sinh^4(k\pi y) y^{-6} \\
&= 2 \sinh^2(k\pi y) y^{-6} (\sinh^2(k\pi y) - (k\pi y)^2) \\
\stackrel{(4.16)}{\geq} &0, \quad (4.31)
\end{aligned}$$

also die logarithmische Konvexität von f_k , $k \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe von Lemma 4.1.8 (c) hat man somit auch die logarithmische Konvexität von

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{(k\pi)^2} f_k \quad .$$

Dies ist aber nach Lemma 4.1.6 gleichbedeutend mit der behaupteten Ungleichung (4.30). Betrachtet man unter Verwendung dieses Ergebnisses die Darstellung (4.22), so sieht man leicht ein, daß der Nenner wegen (4.17) positiv ist und somit der Zähler ebenfalls nichtnegativ ist.

Im Folgenden bezeichne $G_n(y) = \sum_{k,l=1}^n g_{k,l}(y)$ den Zähler von $F_n''(y)$ und $H_n(y) = \sum_{k,l=1}^n h_{k,l}$ den zugehörigen Nenner. Offenbar kann man $|g_{k,l}|$ wie folgt nach oben abschätzen:

$$\begin{aligned}
& |g_{k,l}(y)| \\
\stackrel{(a)}{=} & \left| 4 \left(\frac{a_k a_l}{kl} \right)^2 \left[k^2 \pi^2 \cosh(2k\pi y) (\cosh(2l\pi y) - 1) - kl\pi^2 \sinh(2k\pi y) \sinh(2l\pi y) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - k\pi \sinh(2k\pi y) (\cosh(2l\pi y) - 1) y^{-1} + l\pi (\cosh(2k\pi y) - 1) \sinh(2l\pi y) y^{-1} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2} (\cosh(2k\pi y) - 1) (\cosh(2l\pi y) - 1) y^{-2} \right] \right| \\
\leq & 4 \left(\frac{a_k a_l}{kl} \right)^2 \left[k^2 \pi^2 \cosh(2k\pi y) (\cosh(2l\pi y) - 1) + kl\pi^2 \sinh(2k\pi y) \sinh(2l\pi y) \right. \\
& \quad \left. + k\pi \sinh(2k\pi y) (\cosh(2l\pi y) - 1) y^{-1} + l\pi (\cosh(2k\pi y) - 1) \sinh(2l\pi y) y^{-1} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} (\cosh(2k\pi y) - 1) (\cosh(2l\pi y) - 1) y^{-2} \right] \\
\stackrel{(4.18)}{\leq} & 4 \left(\frac{a_k a_l}{kl} \right)^2 \left(k^2 \pi^2 + kl\pi^2 + k\pi y^{-1} + l\pi y^{-1} + \frac{1}{2} y^{-2} \right) \exp(2k\pi y) \exp(2l\pi y) \\
\stackrel{r_{max} \geq y \geq y_0}{\leq} & 4 \left(\frac{a_k a_l}{kl} \right)^2 \left(k^2 \pi^2 + kl\pi^2 + k\pi y_0^{-1} + l\pi y_0^{-1} + \frac{1}{2} y_0^{-2} \right) \exp(2k\pi r_{max}) \exp(2l\pi r_{max}) \\
\leq & 4 \left(\frac{a_k a_l}{kl} \right)^2 k^2 l^2 \left(\pi^2 + \pi^2 + \pi y_0^{-1} + \pi y_0^{-1} + \frac{1}{2} y_0^{-2} \right) \exp(2k\pi r_{max}) \exp(2l\pi r_{max}) \\
= & 4 \left(2\pi^2 + 2\pi y_0^{-1} + \frac{1}{2} y_0^{-2} \right) (a_k a_l)^2 \exp(2k\pi r_{max}) \exp(2l\pi r_{max})
\end{aligned}$$

Definiert man nun

$$\alpha_k := 4 \left(2\pi^2 + 2\pi y_0^{-1} + \frac{1}{2} y_0^{-2} \right) a_k^2 \exp(2k\pi r_{max}), \quad k \in \mathbb{N}$$

und

$$\beta_l := a_l^2 \exp(2l\pi r_{max}), \quad l \in \mathbb{N},$$

so folgt aus der Voraussetzung des Satzes, daß die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ beziehungsweise $\sum_{l=1}^{\infty} \beta_l$ (absolut) gegen $4 \left(2\pi^2 + 2\pi y_0^{-1} + \frac{1}{2} y_0^{-2} \right) S$ beziehungsweise S konvergieren. Nach Lemma 4.1.14 konvergiert daher G_n gleichmäßig auf $[y_0, r_{max}]$ und darüberhinaus ist $|G_n|$ gleichmäßig nach oben beschränkt, denn durch Verwendung der eben gezeigten Abschätzung für $|g_{k,l}(y)|$ erhält

man:

$$\begin{aligned}
& |G_n(y)| \\
&= \left| \sum_{k,l=1}^n g_{k,l}(y) \right| \\
&\leq 4 \left(2\pi^2 + 2\pi y_0^{-1} + \frac{1}{2} y_0^{-2} \right) \sum_{k,l=1}^n (a_k a_l)^2 \exp(2k\pi r_{max}) \exp(2l\pi r_{max}) \\
&= 4 \left(2\pi^2 + 2\pi y_0^{-1} + \frac{1}{2} y_0^{-2} \right) \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \exp(2k\pi r_{max}) \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^n a_l^2 \exp(2l\pi r_{max}) \right) \\
&= 4 \left(2\pi^2 + 2\pi y_0^{-1} + \frac{1}{2} y_0^{-2} \right) \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \exp(2k\pi r_{max}) \right)^2 \\
&\leq 4 \left(2\pi^2 + 2\pi y_0^{-1} + \frac{1}{2} y_0^{-2} \right) S^2 \\
&=: m_2
\end{aligned}$$

Eine analoge Behandlung des Nenners sichert zunächst die gleichmäßige Konvergenz auf $[y_0, r_{max}]$ mit Hilfe der Abschätzung

$$\begin{aligned}
& |h_{k,l}(y)| \\
&\stackrel{(a)}{=} \left(\frac{a_k a_l}{kl} \right)^2 (\cosh(2k\pi y) - 1)(\cosh(2l\pi y) - 1) \\
&\leq (a_k a_l)^2 \exp(2k\pi r_{max}) \exp(2l\pi r_{max})
\end{aligned}$$

und einer völlig identische Argumentation wie oben auf der Grundlage von Lemma 4.1.14. Weiter sieht man leicht mit Hilfe der Reihenentwicklung des cosinus hyperbolicus ($\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$) ein, daß

$$\begin{aligned}
& \cosh(2k\pi y) - 1 \\
&\geq \cosh(2k\pi y_0) - 1 \\
&\geq \frac{(2k\pi y_0)^2}{2} \\
&= 2(k\pi y_0)^2
\end{aligned} \tag{4.32}$$

gilt, was man ausnutzt, um

$$\begin{aligned}
& |h_{k,l}(y)| \\
&\stackrel{(a)}{=} \left(\frac{a_k a_l}{kl} \right)^2 (\cosh(2k\pi y) - 1)(\cosh(2l\pi y) - 1) \\
&\geq 4 \left(\frac{a_k a_l}{kl} \right)^2 (k\pi y_0^2)(l\pi y_0^2) \\
&= 4(\pi y_0)^4 (a_k a_l)^2
\end{aligned}$$

hinzuschreiben und den Nenner mittels

$$\begin{aligned} & |H_n(y)| \\ &= \sum_{k,l=1}^n |h_{k,l}(y)| \\ &\geq 4(\pi y_0)^4 \sum_{k,l=1}^n (a_k a_l)^2 \end{aligned}$$

nach unten abzuschätzen. Falls alle a_k , $k \in \mathbb{N}$ verschwinden, so hat man den (nicht weiter interessanten) Trivialfall vorliegen. Im anderen Fall verschwindet etwa a_{k_0} für ein $k_0 \in \mathbb{N}$ nicht, so daß die obige Abschätzung (o.B.d.A. sei $n \geq k_0$, da es auf endlich viele Folgenglieder zu Beginn nicht ankommt) durch

$$\begin{aligned} & |H_n(y)| \\ &\geq 4(\pi y_0 a_{k_0})^4 \\ &=: \mu_1 > 0 \end{aligned}$$

fortgeführt werden kann. Nun hat man damit aber insgesamt die Voraussetzungen von Lemma 4.1.10 (e) gezeigt, woraus dann die behauptete gleichmäßige Konvergenz von $F_n''(y)$ auf $[y_0, r_{max}]$ folgt.

Zu (c):

Offenbar folgt mit Hilfe des Weierstraßschen Majorantenkriteriums und der Voraussetzung des Satzes aus

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_k^2 \sinh^2(k\pi y)}{(k\pi y)^2} \right| \\ & \stackrel{y_0 \leq y \leq r_{max}}{\leq} a_k^2 \sinh^2(k\pi r_{max}) y_0^{-2} \\ & \stackrel{(4.18)}{\leq} y_0^{-2} a_k^2 \exp(2k\pi r_{max}) \end{aligned}$$

die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine Funktion s für $n \rightarrow \infty$. Damit hat man aber auch wegen der Stetigkeit des Logarithmus zunächst die punktweise Konvergenz von $F_n(y) = \ln(s_n(y))$ gegen $\ln(s(y)) =: F(y)$ und weiter wegen der gleichmäßigen Stetigkeit des \ln auf $[y_0, r_{max}]$

$$|F_n(y) - F(y)| = |\ln(s_n(y)) - \ln(s(y))| < \varepsilon,$$

falls $|s_n(y) - s(y)| < \delta(\varepsilon)$. Letztere Bedingung sichert man für $n \geq N$ wegen der gleichmäßigen Konvergenz von s_n unabhängig von der betrachteten Stelle y . Somit hat man die gleichmäßige Konvergenz von F_n gegen F gezeigt.

Bei der Betrachtung von F_n' stellt man zunächst fest, daß

$$F_n'(y) = \frac{s_n'(y)}{s_n(y)}$$

gilt. Die gleichmäßige Konvergenz des Nenners wurde schon gezeigt. Dieser ist außerdem wegen (wie im Beweis zu (b) sei etwa $a_{k_0} \neq 0$, $\mathbb{N} \ni k_0 \leq n$)

$$\begin{aligned}
& |s_n(y)| \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2 \sinh^2(k\pi y)}{(k\pi y)^2} \\
&\geq \frac{a_{k_0}^2 \sinh^2(k_0\pi y)}{(k_0\pi y)^2} \\
&\stackrel{r_{max} \geq y \geq y_0}{\geq} \frac{a_{k_0}^2 \sinh^2(k_0\pi y_0)}{(k_0\pi r_{max})^2} \\
&=: \mu_1 > 0
\end{aligned}$$

nach unten durch eine positive Zahl beschränkt. Die im Zähler aufsummierten Funktionen kann man durch

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{a_k^2}{(k\pi)^2} f'_k(y) \right| \\
(4.25) \quad &= \frac{a_k^2}{(k\pi)^2} |k\pi \sinh(2k\pi y) y^{-2} - (\cosh(2k\pi y) - 1) y^{-3}| \\
&\leq \frac{a_k^2}{(k\pi)^2} (k\pi \sinh(2k\pi y) y^{-2} + (\cosh(2k\pi y) - 1) y^{-3}) \\
(4.18) \quad &\leq \frac{a_k^2}{(k\pi)^2} (k\pi y^{-2} + y^{-3}) \exp(2k\pi y) \\
&\leq \frac{a_k^2}{(k\pi)^2} k^2 \pi^2 (y^{-2} + y^{-3}) \exp(2k\pi y) \\
&= a_k^2 (y^{-2} + y^{-3}) \exp(2k\pi y) \\
&\stackrel{r_{max} \geq y \geq y_0}{\leq} (y_0^{-2} + y_0^{-3}) a_k^2 \exp(2k\pi r_{max})
\end{aligned}$$

nach oben abschätzen und hat somit nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium auch die gleichmäßige Konvergenz des Zählers bewiesen. Da selbiger (unter Verwendung der eben gezeigten Abschätzung) wegen

$$\begin{aligned}
& |s'_n(y)| \\
&= \left| \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{(k\pi)^2} f'_k(y) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{a_k^2}{(k\pi)^2} f'_k(y) \right| \\
&\leq (y_0^{-2} + y_0^{-3}) \sum_{k=1}^n a_k^2 \exp(2k\pi r_{max}) \\
&\leq (y_0^{-2} + y_0^{-3}) S
\end{aligned}$$

auch nach oben beschränkt ist, folgt aus Lemma 4.1.10 (e) insgesamt die gleichmäßige Konvergenz von $(F'_n)_{n \in \mathbb{N}}$. □

Bemerkung 4.1.16 Die vorausgesetzte Konvergenzbedingung für

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \exp(2k\pi r_{\max}) \quad (4.33)$$

ist in dem Sinne notwendig, daß bei ihrem Verletztsein die gleichmäßige Konvergenz (ja sogar die Konvergenz überhaupt) der Folge F''_n verloren gehen kann, wie das folgende Beispiel zeigen wird:

Es sei

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k} \exp(k\pi r_{\max})}, \quad k \in \mathbb{N} \quad . \quad (4.34)$$

Dann hat man offenbar wegen

$$\left| a_k \left(\sqrt{2} \cdot \sin(k\pi x) \right) \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{\underbrace{\sqrt{k} \exp(k\pi r_{\max})}_{\geq \frac{(k\pi r_{\max})^2}{2}}} \leq \frac{2\sqrt{2}}{(\pi r_{\max})^2} \cdot \frac{1}{k^{\frac{5}{2}}}$$

nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (der Daten)

$$\phi_1(x) := \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left(\sqrt{2} \cdot \sin(l\pi x) \right)$$

und es gilt daher

$$\begin{aligned} & \sqrt{2}(\phi_1(\cdot), \sin(k\pi \cdot))_{L_2} \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 \sum_{l=1}^{\infty} a_l (\sqrt{2} \cdot \sin(l\pi x)) \cdot \sin(k\pi x) \, dx \\ &= 2 \sum_{l=1}^{\infty} a_l \underbrace{\int_0^1 \sin(l\pi x) \cdot \sin(k\pi x) \, dx}_{=\frac{1}{2}\delta_{k,l}} \\ &= a_k \quad . \end{aligned}$$

Somit ist nach (4.1) auch

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k\pi} (\sqrt{2} \cdot \sin(k\pi x)) \sinh(k\pi y)$$

die Darstellung der Lösung des zu den Daten ϕ_1 gehörigen Cauchy-Problems für die Laplace-Gleichung. Diese Lösungsdarstellung konvergiert (ebenfalls aufgrund des Weierstraßschen Majorantenkriteriums) wegen

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{a_k}{k\pi} (\sqrt{2} \cdot \sin(k\pi x)) \sinh(k\pi y) \right| \\
 & \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sinh(k\pi y)}{k^{\frac{3}{2}} \exp(k\pi r_{max})} \\
 & \stackrel{y \leq r_{max}}{\leq} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sinh(k\pi r_{max})}{k^{\frac{3}{2}} \exp(k\pi r_{max})} \\
 & \stackrel{(4.18)}{\leq} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\exp(k\pi r_{max})}{k^{\frac{3}{2}} \exp(k\pi r_{max})} \\
 & = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

gleichmäßig in x und y . Weiter konvergiert nach Lemma 4.1.3 dann offenbar auch die Reihendarstellung (4.2) von $N(y)$. Allerdings ist die von uns geforderte Konvergenzbedingung für die Reihe (4.33) wegen

$$a_k^2 \exp(2k\pi r_{max}) = \frac{1}{k}$$

offenbar nicht erfüllt (harmonische Reihe!). Wir werden nun zeigen, daß die Folge $F_n''(y)$ (in der Darstellung nach (4.22)) für $y = r_{max}$ nicht (und damit erst recht nicht gleichmäßig auf $[y_0, r_{max}]$) konvergiert. Dazu beweisen wir mehrere Teilbehauptungen:

1. Behauptung:

$$\sum_{k,l=1}^n \left(\frac{a_k a_l}{kl} \right)^2 k^2 \pi^2 \cosh(2k\pi r_{max}) (\cosh(2l\pi r_{max}) - 1)$$

divergiert für $n \rightarrow \infty$.

Beweis:

Es gilt

$$\left(\frac{a_k a_l}{kl} \right)^2 = \frac{1}{k^3 l^3 \exp(2k\pi r_{max}) \exp(2l\pi r_{max})} \quad (4.35)$$

und damit hat man

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k,l=1}^n \left(\frac{a_k a_l}{kl} \right)^2 k^2 \pi^2 \cosh(2k\pi r_{max}) (\cosh(2l\pi r_{max}) - 1) \\
 & = \pi^2 \sum_{k,l=1}^n \frac{1}{k} \frac{\cosh(2k\pi r_{max})}{\exp(2k\pi r_{max})} \cdot \frac{1}{l^3} \frac{\cosh(2l\pi r_{max}) - 1}{\exp(2l\pi r_{max})} \\
 & = \pi^2 \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{\cosh(2k\pi r_{max})}{\exp(2k\pi r_{max})} \right)}_{s_n :=} \cdot \underbrace{\left(\sum_{l=1}^n \frac{1}{l^3} \frac{\cosh(2l\pi r_{max}) - 1}{\exp(2l\pi r_{max})} \right)}_{t_n :=}
 \end{aligned}$$

Offenbar folgt aus (4.18)

$$\begin{aligned} \frac{\cosh(2k\pi r_{max})}{\exp(2k\pi r_{max})} &\geq \frac{1}{2} \\ \implies s_n &\geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

und weiter besteht t_n nur aus positiven Summanden, so daß die Abschätzung

$$t_n \geq t_1 = \frac{\cosh(2\pi r_{max}) - 1}{\exp(2\pi r_{max})}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ Gültigkeit besitzt. Kombiniert man nun die Abschätzungen für s_n und t_n , so erhält man in Fortsetzung obiger Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} &\sum_{k,l=1}^n \left(\frac{a_k a_l}{kl} \right)^2 k^2 \pi^2 \cosh(2k\pi r_{max}) (\cosh(2l\pi r_{max}) - 1) \\ &\geq \frac{1}{2} \pi^2 t_1 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &\rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

woraus die erste Behauptung folgt.

2. Behauptung:

Der Rest des Zählers in (4.22) (im Folgenden auch mit $R_n(y) := \sum_{k,l=1}^n r_{k,l}(y)$ bezeichnet), also

$$\begin{aligned} R_n(y) &= \sum_{k,l=1}^n \left(\frac{a_k a_l}{kl} \right)^2 \left[-kl\pi^2 \sinh(2k\pi y) \sinh(2l\pi y) - k\pi \sinh(2k\pi y) (\cosh(2l\pi y) - 1) y^{-1} \right. \\ &\quad \left. + l\pi (\cosh(2k\pi y) - 1) \sinh(2l\pi y) y^{-1} + \frac{1}{2} (\cosh(2k\pi y) - 1) (\cosh(2l\pi y) - 1) y^{-2} \right] \end{aligned}$$

konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig in $[y_0, r_{max}]$, also erst recht punktweise in r_{max} .

Beweis:

Man hat die Abschätzung (o.B.d.A. sei $y_0 < 1$ ($\implies y_0^{-2} > y_0^{-1} > 1$)):

$$\begin{aligned} &\left| -kl\pi^2 \sinh(2k\pi y) \sinh(2l\pi y) - k\pi \sinh(2k\pi y) (\cosh(2l\pi y) - 1) y^{-1} \right. \\ &\quad \left. + l\pi (\cosh(2k\pi y) - 1) \sinh(2l\pi y) y^{-1} + \frac{1}{2} (\cosh(2k\pi y) - 1) (\cosh(2l\pi y) - 1) y^{-2} \right| \\ &\leq \left| kl\pi^2 \sinh(2k\pi y) \sinh(2l\pi y) \right| + \left| k\pi \sinh(2k\pi y) (\cosh(2l\pi y) - 1) y^{-1} \right| \\ &\quad + \left| l\pi (\cosh(2k\pi y) - 1) \sinh(2l\pi y) y^{-1} \right| + \left| \frac{1}{2} (\cosh(2k\pi y) - 1) (\cosh(2l\pi y) - 1) y^{-2} \right| \\ &\stackrel{(4.18)}{\leq} 4kl\pi^2 y_0^{-2} \exp(2k\pi r_{max}) \exp(2l\pi r_{max}) \end{aligned}$$

Daraus folgt in Verbindung mit (4.35)

$$\begin{aligned} & |r_{k,l}(y)| \\ & \leq \frac{1}{k^3 l^3 \exp(2k\pi r_{max}) \exp(2l\pi r_{max})} \cdot 4kl\pi^2 y_0^{-2} \exp(2k\pi r_{max}) \exp(2l\pi r_{max}) \\ & = 4\pi^2 y_0^{-2} \frac{1}{k^2} \frac{1}{l^2} \end{aligned}$$

und hieraus mittels der Doppelreihenversion des Weierstraßschen Majorantenkriteriums (Lemma 4.1.14) die 2. Behauptung.

3. Behauptung:

Der Zähler in (4.22) divergiert bei $y = r_{max}$ für $n \rightarrow \infty$.

Beweis:

Die Annahme, daß oben genannter Zähler bei $y = r_{max}$ konvergent sei, führt mittels 2. Behauptung auch darauf, daß die Differenz dieses Zählers und der Reste $R_n(r_{max})$ konvergent sein müßte. Dies steht aber im Widerspruch zur ersten Behauptung. Anders und allgemeiner ausgedrückt: Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, so ist immer $\sum_{k=1}^{\infty} a_k + b_k$ divergent,

denn aus der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k + b_k$ würde in Verbindung mit der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} -b_k$ auch die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) - b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ im Widerspruch zur Voraussetzung folgen.

4. Behauptung:

Der Nenner in (4.22) konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf $[y_0, r_{max}]$, also erst recht punktweise bei $y = r_{max}$.

Beweis:

Die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{a_k a_l}{kl} \right)^2 (\cosh(2k\pi y) - 1)(\cosh(2l\pi y) - 1) \right| \\ & \stackrel{(4.18)}{\leq} \left| \left(\frac{a_k a_l}{kl} \right)^2 \exp(2k\pi r_{max}) \exp(2l\pi r_{max}) \right| \\ & = \frac{1}{k^3} \cdot \frac{1}{l^3} \end{aligned}$$

liefert in Verbindung mit Lemma 4.1.14 sofort die 4. Behauptung.

5. Behauptung:

$F_n''(r_{max})$ divergiert für $n \rightarrow \infty$.

Beweis:

Wäre $F_n''(r_{max})$ konvergent für $n \rightarrow \infty$, so wäre auch das Produkt von $F_n''(r_{max})$ mit dem Nenner in (4.22), also der Zähler in (4.22) konvergent im Widerspruch zur 3. Behauptung. Damit ist das behandelte Gegenbeispiel abgeschlossen, und gezeigt, daß auf die zusätzliche Voraussetzung der Konvergenz von

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \exp(2k\pi r_{max})$$

nicht ohne weiteres verzichtet werden kann.

Folgerung 4.1.17 (Logar. Konvexität von F auf kompakten Teilintervallen) Mit den Bezeichnungen und unter den Voraussetzungen des vorangegangenen Satzes 4.1.15 gilt

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} \ln \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{(k\pi)^2} \frac{\sinh^2(k\pi y)}{y^2} \right) \right) (y) \geq 0, \quad y \in [y_0, r_{max}],$$

mit anderen Worten: Die Funktion

$$F(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{(k\pi)^2} \frac{\sinh^2(k\pi y)}{y^2}$$

ist logarithmisch konvex auf jedem kompakten Intervall $[y_0, r_{max}]$, $0 < y_0 \leq r_{max}$.

Beweis:

Nach (4.30) ist

$$F_n(y) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{(k\pi)^2} \frac{\sinh^2(k\pi y)}{y^2}$$

logarithmisch konvex und nach Satz 4.1.15 (b) konvergiert F_n'' gleichmäßig auf $[y_0, r_{max}]$. Weiter konvergieren nach Satz 4.1.15 (c) auch F_n und F_n' in jeweils mindestens einem Punkt aus $[y_0, r_{max}]$ (die Konvergenz ist ja sogar gleichmäßig auf dem ganzen Intervall). Nach Lemma 4.1.8 (d) ist daher auch $F = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$ logarithmisch konvex. □

4.1.5 Beweis des Stabilitätssatzes

Bis hierher haben wir die Funktion

$$s(y) = \frac{N(y)}{y^2}$$

(zur Definition von $N(y)$ siehe (4.2)) jeweils auf einem kompakten Intervall $[y_0, r_{max}]$ betrachtet. Um einen Stabilitätssatz für das Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung zu gewinnen, ist nun noch eine Grenzwertbetrachtung für $y_0 \rightarrow 0$ nötig, die wir im folgenden in Angriff nehmen werden. Dabei werden wir implizit alle bisher getroffenen Voraussetzungen als weiterhin gültig ansehen (insbesondere (4.21)), ohne sie jedesmal erneut aufzuzählen. Verschiedene Hilfsergebnisse fassen wir zusammen in dem nachstehenden

Lemma 4.1.18 (a) *Es seien stetige Funktionen*

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\mapsto \mathbb{R}^+ \\ g : [a, b] &\mapsto \mathbb{R} \end{aligned}$$

gegeben. Dann ist $f(x)^{g(x)}$ stetig in $[a, b]$.

(b) Sei $y \in (0, r_{max}]$ fest vorgegeben und $0 < y_0 (< y)$ sei variabel. Dann gilt

$$y = \lambda(y_0)y_0 + (1 - \lambda(y_0))r_{max},$$

mit

$$\lambda(y_0) = \frac{y - r_{max}}{y_0 - r_{max}},$$

wobei die so definierte Funktion

$$\lambda : [0, y) \ni y_0 \mapsto \lambda(y_0)$$

stetig ist.

(c) Es gilt

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{\sinh^2(k\pi y_0)}{(k\pi)^2 y_0^2} = 1 \quad (4.36)$$

und für $s(y_0) = \frac{N(y_0)}{y_0^2}$ bekommt man den Grenzwert

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{N(y_0)}{y_0^2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2. \quad (4.37)$$

Schließlich erhält man die Gleichungen

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \left(\frac{N(y_0)}{y_0^2} \right)^{\lambda(y_0)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \quad (4.38)$$

und

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \left(\frac{N(r_{max})}{r_{max}^2} \right)^{1 - \lambda(y_0)} = \left(\frac{N(r_{max})}{r_{max}^2} \right)^{\frac{y}{r_{max}}}. \quad (4.39)$$

Beweis:

Zu (a):

Es ist offenbar

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x) \ln(f(x)))$$

stetig für alle $x \in [a, b]$, da Produkt und Hintereinanderausführung stetiger Funktionen sowie \ln und \exp stetig sind.

Zu (b):

Man setzt $\lambda(y_0)$ in die behauptete Darstellung von y ein und verifiziert so (beginnend mit der rechten Seite):

$$\begin{aligned} & \frac{y - r_{max}}{y_0 - r_{max}} y_0 + \left(1 - \frac{y - r_{max}}{y_0 - r_{max}} \right) r_{max} \\ &= \frac{(y - r_{max})y_0}{y_0 - r_{max}} + \frac{y_0 - r_{max} - y + r_{max}}{y_0 - r_{max}} r_{max} \\ &= \frac{yy_0 - r_{max}y_0 + y_0r_{max} - yr_{max}}{y_0 - r_{max}} \\ &= \frac{y(y_0 - r_{max})}{y_0 - r_{max}} = y \end{aligned}$$

Die Stetigkeit von λ in Abhängigkeit von y_0 ist trivialerweise wegen $y_0 < y \leq r_{max}$ erfüllt.

Zu (c):

Aus

$$\begin{aligned}
 & \lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{\sinh^2(k\pi y_0)}{y_0^2} \\
 \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} & \lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{2k\pi \sinh(k\pi y_0) \cosh(k\pi y_0)}{2y_0} \\
 \stackrel{(4.12)}{=} & \lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{k\pi \sinh(2k\pi y_0)}{2y_0} \\
 \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} & \lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{2k^2\pi^2 \cosh(2k\pi y_0)}{2} \\
 = & k^2\pi^2
 \end{aligned}$$

folgt nach Division durch $k^2\pi^2$ Gleichung (4.36).

Definiert man weiter

$$g_k(y_0) := a_k^2 \frac{\sinh^2(k\pi y_0)}{(k\pi y_0)^2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

so hat man für $y_0 > 0$ offenbar

$$\frac{N(y_0)}{y_0^2} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(y_0) \quad .$$

Die Funktionen g_k kann man mit Hilfe der Setzung

$$\tilde{g}_k(y_0) := \begin{cases} g_k(y_0) & , \quad 0 < y_0 \leq y \\ a_k^2 & , \quad y_0 = 0 \end{cases}$$

nach (4.36) stetig auf $[0, y]$ fortsetzen. Wegen der für alle $y_0 \in [0, y]$ gültigen Abschätzung

$$\begin{aligned}
 & |\tilde{g}_k(y_0)| \\
 \stackrel{(4.19)}{\leq} & a_k^2 \exp(2k\pi y_0) \\
 \leq & a_k^2 \exp(2k\pi r_{max})
 \end{aligned}$$

und der (absoluten) Konvergenz der Zahlenreihe $\sum_{k=1}^n a_k^2 \exp(2k\pi r_{max})$ (siehe 4.21) folgt nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{g}_k(y_0)$$

auf $[0, y]$ und daraus insbesondere

$$\begin{aligned}
& \lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{N(y_0)}{y_0^2} \\
&= \lim_{y_0 \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} g_k(y_0) \\
&= \lim_{y_0 \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{g}_k(y_0) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{y_0 \rightarrow 0} \tilde{g}_k(y_0) \\
&\stackrel{\tilde{g}_k \text{ stetig}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{g}_k(0) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2,
\end{aligned}$$

also Gleichung (4.37).

Zum Beweis von (4.38) setzt man

$$s : (0, y] \ni y_0 \mapsto s(y_0) = \frac{N(y_0)}{y_0^2}$$

mit Hilfe von (4.37) durch die Setzung

$$\tilde{s}(y_0) := \begin{cases} s(y_0) & , \quad 0 < y_0 \leq y \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 & , \quad y_0 = 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

zu einer stetigen Funktion \tilde{s} auf $[0, y]$ fort und wendet unter Beachtung der in (b) gezeigten Stetigkeit von $\lambda(y_0)$ Teil (a) des vorliegenden Lemmas an. Dies zeigt (4.38).

Durch völlig analoge Überlegungen gewinnt man (4.39), womit der Beweis abgeschlossen ist. \square

Bevor wir nun den entscheidenden Stabilitätssatz für das kontinuierliche Problem formulieren und beweisen, schicken wir, um den Beweis des Satzes eleganter und kompakter gestalten zu können, ein weiteres, dort benötigtes Resultat eher technischer Natur voraus:

Lemma 4.1.19 *Mit den Bezeichnungen $R_0 := \min(1, r_{max})$ und $R_1 := \max(1, r_{max})$ gilt für alle $y \in [0, r_{max}]$*

$$\frac{y}{r_{max}^{\frac{y}{r_{max}}}} \leq \frac{y}{R_0} \leq R_1 \quad .$$

Beweis:

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: $r_{max} < 1$ ($\implies R_1 = 1, R_0 = r_{max}$)

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{y}{r_{max}} < 1 \quad \wedge \quad \ln(r_{max}) < 0 \\ \implies & \frac{y}{r_{max}} \cdot \ln(r_{max}) \geq \ln(r_{max}) \\ \implies & r_{max}^{\frac{y}{r_{max}}} = \exp\left(\frac{y}{r_{max}} \cdot \ln(r_{max})\right) \geq \exp(\ln(r_{max})) = r_{max} = R_0 \\ \implies & \frac{y}{r_{max}^{\frac{y}{r_{max}}}} \leq \frac{y}{R_0} = \frac{y}{r_{max}} \leq \frac{r_{max}}{r_{max}} = 1 = R_1 \quad . \end{aligned}$$

2. Fall:

$r_{max} \geq 1$ ($\implies R_1 = r_{max}, R_0 = 1$)

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{y}{r_{max}} \geq 0 \quad \wedge \quad \ln(r_{max}) \geq 0 \\ \implies & \frac{y}{r_{max}} \cdot \ln(r_{max}) \geq 0 \\ \implies & r_{max}^{\frac{y}{r_{max}}} = \exp\left(\frac{y}{r_{max}} \cdot \ln(r_{max})\right) \geq \exp(0) = 1 = R_0 \\ \implies & \frac{y}{r_{max}^{\frac{y}{r_{max}}}} \leq \frac{y}{R_0} = \frac{y}{1} = y \leq r_{max} = R_1 \quad , \end{aligned}$$

womit alles bewiesen ist. □

Satz 4.1.20 (Stabilitätssatz für das kontinuierliche Problem) Sei $u \in C^2(\text{int}(\Omega)) \cap C(\Omega)$ mit den folgenden Eigenschaften gegeben:

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0 \quad \text{in} \quad \text{int}(\Omega) \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x) &= \phi_1(x) \quad \text{auf} \quad \Sigma_1 \\ \|u\|_{L_2(\Sigma_4)} &\leq E \quad . \end{aligned} \tag{4.41}$$

Hierbei ist E eine feste, nichtnegative, reelle Schranke. Die Lösungsdarstellung (4.1) konvergiere punktweise für jedes $(x, y) \in [0, 1] \times [0, r_{max}]$ und gleichmäßig in x . Dann hat man die Gleichung

$$\|\phi_1\|_{L_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \tag{4.42}$$

wobei die Koeffizienten durch

$$a_k = \sqrt{2}(\phi_1(\cdot), \sin(k\pi\cdot))_{L_2} \quad (4.43)$$

erklärt sind. Erfüllen die Koeffizienten a_k noch die Voraussetzung (4.21), so gilt mit $R_1 := \max(r_{max}, 1)$, $R_0 := \min(r_{max}, 1)$ die Stabilitätsabschätzung

$$\begin{aligned} & \|u(\cdot, y)\|_{L_2} \\ &= \left(\int_0^1 u^2(x, y) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\phi_1\|_{L_2}^{1-\frac{y}{r_{max}}} E^{\frac{y}{r_{max}}} \frac{y}{r_{max}^{\frac{y}{r_{max}}}} \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\leq \frac{y}{R_0} \|\phi_1\|_{L_2}^{1-\frac{y}{r_{max}}} E^{\frac{y}{r_{max}}} \quad (4.45)$$

$$\leq R_1 \|\phi_1\|_{L_2}^{1-\frac{y}{r_{max}}} E^{\frac{y}{r_{max}}} \quad (4.46)$$

für alle $y \in [0, r_{max}]$.

Beweis:

Gleichung (4.42) ist ein Standardergebnis aus der Theorie der Fourierreihen, das unter dem Namen Parsevalsche Gleichung bekannt ist (siehe zum Beispiel Satz 142.1 in [Heu01], Band 2), so daß hierfür nichts mehr zu zeigen ist und wir uns sofort der behaupteten Stabilitätsabschätzung zuwenden können.

Wir betrachten dazu ein beliebiges aber festes y mit $r_{max} \geq y > 0$ und variables y_0 mit $0 < y_0 \leq y$. Dann ist

$$y = \lambda(y_0)y_0 + (1 - \lambda(y_0))r_{max}, \quad \lambda(y_0) \in [0, 1] \quad .$$

Nach Folgerung 4.1.17 ist die Funktion $s(y) = \frac{N(y)}{y^2}$ auf dem kompakten Intervall $[y_0, r_{max}]$ logarithmisch konvex, was nach Folgerung 4.1.5 die Ungleichung

$$\frac{N(y)}{y^2} \leq \left(\frac{N(y_0)}{y_0^2} \right)^{\lambda(y_0)} \cdot \left(\frac{N(r_{max})}{r_{max}^2} \right)^{1-\lambda(y_0)} \quad (4.47)$$

nach sich zieht. Man geht mit Hilfe von (4.38) und (4.39) auf der rechten Seite zum Grenzwert für $y_0 \rightarrow 0$ über und gewinnt, wenn man noch (4.42) berücksichtigt

$$\begin{aligned} & \frac{N(y)}{y^2} \\ &\leq \|\phi_1\|_{L_2}^{2(1-\frac{y}{r_{max}})} \left(\frac{N(r_{max})}{r_{max}^2} \right)^{\frac{y}{r_{max}}} \\ &\stackrel{N(r_{max}) \leq E^2}{\leq} \|\phi_1\|_{L_2}^{2(1-\frac{y}{r_{max}})} \left(\frac{E^2}{r_{max}^2} \right)^{\frac{y}{r_{max}}} \quad . \end{aligned}$$

Multiplikation der Ungleichung mit y^2 und anschließendes Wurzelziehen liefert

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^1 u^2(x, y) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \|\phi_1\|_{L_2}^{1-\frac{y}{r_{max}}} E_{r_{max}}^{\frac{y}{r_{max}}} \frac{y}{r_{max}^{\frac{y}{r_{max}}}}, \end{aligned}$$

also die Behauptung (4.44) für $0 < y \leq r_{max}$. Für $y = 0$ ist (4.44) trivial ($0 \leq 0$). Zum Beweis von (4.45) und (4.46) wendet man schlicht Lemma 4.1.19 an und schließt so den Beweis ab. □

4.2 Fehlerabschätzung und Konvergenzsatz für die Linienmethode

4.2.1 Betrachtung des Projektionsfehlers

Ein wesentliches Hilfsmittel bei der Herleitung der angestrebten Fehlerabschätzung für die Linienmethode für das Cauchy-Problem, die ja eine Datenprojektion in den endlichdimensionalen Raum D_M bzw. D_M^h beinhaltet, ist die Herleitung einer Abschätzung des Fehlers, den diese Projektion hervorruft. Dazu geben wir ein Ergebnis in dem Satz 4.2.3 an, für dessen Beweis wir im nachfolgenden Lemma einige Hilfsresultate bereitstellen wollen.

Lemma 4.2.1 (a) *Es gilt*

$$\forall \alpha > 0 \exists 0 < \beta < \frac{1}{2} \forall k \in \mathbb{N}^{\geq 2} \quad \sinh(k\alpha) \geq \beta \exp(k\alpha) \quad .$$

Das maximale $\beta = \beta_0$, mit dem diese Bedingung erfüllt ist, hat die Gestalt $\beta_0 := \frac{1 - \exp(-4\alpha)}{2}$.

(b) *Sei $M \in \mathbb{N}, \mathbb{R} \ni r_{max} > 0, \gamma > 0$ beliebig. Dann konvergiert die Reihe*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+M)^2}{\exp(2\gamma k \pi r_{max})}$$

und die Reihensumme S läßt sich mit einer positiven, nur von r_{max} abhängigen Konstanten $C_0(r_{max})$ durch $S \leq C_0^2(r_{max})M^2$ nach oben abschätzen. Dabei ist $C_0(r_{max})$ umso größer, je kleiner r_{max} ist. Weiter gilt

$$C_0(r_{max}) \leq \frac{1}{\pi \gamma^2 r_{max}^2} \quad . \tag{4.48}$$

Beweis:

Zu (a):

Sei $\alpha > 0$ beliebig. Definiere $\beta := \frac{1 - \exp(-4\alpha)}{2}$. Dann ist offenbar $\beta \in (0, \frac{1}{2})$ und für alle $k \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ gilt

$$\begin{aligned} & \beta \exp(k\alpha) \\ = & \frac{1}{2}(1 - \exp(-4\alpha)) \exp(k\alpha) \\ = & \frac{1}{2}(\exp(k\alpha) - \exp((k-4)\alpha)) \\ \stackrel{k-4 \geq -k}{\leq} & \frac{1}{2}(\exp(k\alpha) - \exp(-k\alpha)) = \sinh(k\alpha) \quad . \end{aligned}$$

Die Maximaleigenschaft des so definierten $\beta = \beta_0$ folgt aus

$$\begin{aligned} & \beta_1 \exp(2\alpha) \\ > & \beta_0 \exp(2\alpha) \\ = & \sinh(2\alpha) \end{aligned}$$

für jedes $\beta_1 > \beta_0$.

Zu (b):

Zum Beweis der Konvergenz nutzt man aus, daß die Exponentialfunktion schneller als jedes Polynom in k wächst, mithin existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq k_0$ die Ungleichung

$$\exp(2\gamma k \pi r_{max}) \geq (k + M)^4 \quad \implies \quad \frac{1}{(k + M)^2} \geq \frac{(k + M)^2}{\exp(2\gamma k \pi r_{max})}$$

gültig ist und somit nach dem Majorantenkriterium die Konvergenz der vorgelegten Reihe gezeigt ist.

Um die behauptete Abschätzung zu beweisen, zerlegt man die Reihensumme wie folgt:

$$\begin{aligned} & S \\ = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{\exp(2\gamma k \pi r_{max})} + 2M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\exp(2\gamma k \pi r_{max})} + M^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\exp(2\gamma k \pi r_{max})} \\ = & S_1 + 2MS_2 + M^2S_3 \\ \leq & (S_1 + 2S_2 + S_3)M^2 \\ \leq & \underbrace{4 \max(S_1, S_2, S_3)}_{=: C_0^2(r_{max})} M^2 \\ = & C_0^2(r_{max})M^2, \end{aligned}$$

wobei die Konvergenz der einzelnen Reihen jeweils mit zu der obigen analoger Argumentation folgt. Offenbar wird der Wert dieser Reihensummen S_1, S_2, S_3 (und damit die Konstante $C_0(r_{max})$) um so größer, je kleiner r_{max} ist, was man leicht durch gliedweise Abschätzung

einsieht. Man kann diesen Effekt aber, wie oben behauptet, auch quantitativ erfassen. Dazu beachtet man, daß wegen

$$\frac{1}{\exp(2\gamma k\pi r_{max})} \leq \frac{k}{\exp(2\gamma k\pi r_{max})} \leq \frac{k^2}{\exp(2\gamma k\pi r_{max})} \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

auch

$$S_3 \leq S_2 \leq S_1 = \frac{1}{4} C_0^2(r_{max})$$

gilt, so daß offenbar eine Untersuchung der ersten Teilreihe vonnöten ist. Wegen $\exp(2\gamma k\pi r_{max}) \geq \frac{(2\gamma k\pi r_{max})^4}{4!}$ folgt hierfür dann sofort

$$\begin{aligned} & C_0^2(r_{max}) \\ &= 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{\exp(2\gamma k\pi r_{max})} \\ &\leq 4 \frac{4!}{(2\gamma\pi r_{max})^4} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{=\frac{\pi^2}{6}} \\ &= \frac{1}{\pi^2 \gamma^4 r_{max}^4} \end{aligned}$$

also nach einfachem Wurzelziehen die behauptete Abschätzung für $C_0(r_{max})$

□

Bemerkung 4.2.2 *Wir haben Lemma 4.2.1 durch das Einfügen der Konstanten $\gamma > 0$ etwas allgemeiner formuliert, als es der gegenwärtige Kontext erfordert. Dies ermöglicht uns, das Lemma in einem allgemeineren Zusammenhang wiederzuverwenden. Vergleiche dazu Satz 7.4.1, der ein Analogon zu dem in unmittelbarem Anschluß an diese Bemerkung folgenden Satz 4.2.3 darstellt.*

Satz 4.2.3 (Projektionsfehlerabschätzung) *Es seien Cauchy-Daten $\phi_1 \in D$ gegeben (zur Definition von D siehe Definition 3.3.1). Weiter gelte mit $M \in \mathbb{N}$ und den Basisfunktionen \overline{w}_k aus Satz 3.3.3 die Bezeichnung*

$$\phi_1^* := \overline{P}_M(\phi_1) \stackrel{(3.17)}{=} \sum_{k=1}^M (\phi_1, \overline{w}_k)_{L_2(\Sigma_1)} \overline{w}_k \quad (4.49)$$

und die zu den Daten ϕ_1 gehörige Lösung $A\phi_1$ auf Σ_4 (mit dem Lösungsoperator A zum Cauchy-Problem aus Satz 3.6.1) genüge der schon im vorangehenden Satz 4.1.20 formulierten Beschränktheitsbedingung

$$\|A\phi_1\|_{L_2(\Sigma_4)} = \|u\|_{L_2(\Sigma_4)} \leq E \quad . \quad (4.50)$$

Dann läßt sich der Projektionsfehler wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \|\phi_1 - \phi_1^*\|_{L_2(\Sigma_1)} &\leq \frac{2C_0(r_{max})E\pi}{1 - \exp(-4\pi r_{max})} \cdot \frac{M}{\exp(M\pi r_{max})} \\ &\leq \frac{E}{r_{max}^2(1 - \exp(-4\pi r_{max}))} \cdot \frac{M}{\exp(M\pi r_{max})} . \end{aligned}$$

Hierbei ist $C_0(r_{max})$ eine nur von r_{max} abhängige, positive Konstante, die um so größer ausfällt, je kleiner r_{max} ist und durch $\frac{1}{\pi r_{max}^2}$ nach oben abgeschätzt werden kann.

Beweis:

Nach Satz 3.2.5 hat man die Darstellung

$$\phi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (\phi_1, \overline{w_k})_{L_2(\Sigma_1)} \overline{w_k} .$$

Zusammen mit der Definition von ϕ_1^* (siehe 4.49) folgt daraus

$$\phi_1 - \phi_1^* = \sum_{k=M+1}^{\infty} (\phi_1, \overline{w_k})_{L_2(\Sigma_1)} \overline{w_k} , \quad (4.51)$$

und somit hat man, wenn man wiederum die Parsevalsche Gleichung verwendet

$$\|\phi_1 - \phi_1^*\|_{L_2(\Sigma_1)}^2 = \sum_{k=M+1}^{\infty} (\phi_1, \overline{w_k})_{L_2(\Sigma_1)}^2 .$$

Die Beschränktheitsvoraussetzung (4.50) ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} N(r_{max}) &\leq E^2 \\ \stackrel{(4.2)}{\iff} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\phi_1, \overline{w_k})_{L_2(\Sigma_1)}^2}{(k\pi)^2} \sinh^2(k\pi r_{max}) &\leq E^2 . \end{aligned}$$

Da man das Gewicht der Einzelsummanden innerhalb dieser Summe nicht kennt, kann man an dieser Stelle nicht mehr folgern als die Beschränktheit jedes Summanden durch die Schranke für die ganze Summe. So ergibt sich

$$(\phi_1, \overline{w_k})_{L_2(\Sigma_1)}^2 \leq \frac{E^2(k\pi)^2}{\sinh^2(k\pi r_{max})} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

und anschließende Summation liefert

$$\begin{aligned} &\sum_{k=M+1}^{\infty} (\phi_1, \overline{w_k})_{L_2(\Sigma_1)}^2 \\ &\leq \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{E^2(k\pi)^2}{\sinh^2(k\pi r_{max})} \\ &= E^2 \pi^2 \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{k^2}{\sinh^2(k\pi r_{max})} . \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.2.1 (a) existiert zu $\alpha := \pi r_{max} > 0$ eine Konstante $\beta = \beta_0 = \frac{1}{2}(1 - \exp(-4\alpha))$, so daß $\sinh(k\alpha) \geq \beta \exp(k\alpha)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Somit kann man die begonnene Abschätzung fortsetzen durch

$$\begin{aligned}
 & E^2 \pi^2 \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{k^2}{\sinh^2(k\pi r_{max})} \\
 \leq & E^2 \pi^2 \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{k^2}{\beta^2 \exp(2k\pi r_{max})} \\
 = & \frac{E^2 \pi^2}{\beta^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+M)^2}{\exp(2(k+M)\pi r_{max})} \\
 = & \left(\frac{E\pi}{\beta \exp(M\pi r_{max})} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+M)^2}{\exp(2k\pi r_{max})} \\
 \stackrel{\text{Lemma 4.2.1(b), } \gamma=1}{\leq} & \left(\frac{C_0(r_{max})ME\pi}{\beta \exp(M\pi r_{max})} \right)^2 .
 \end{aligned}$$

Durch Radizieren und Einsetzen von β erhält man nun

$$\begin{aligned}
 & \|\phi_1 - \phi_1^*\|_{L_2(\Sigma_1)} \\
 \leq & \frac{2C_0(r_{max})E\pi}{1 - \exp(-4\pi r_{max})} \cdot \frac{M}{\exp(M\pi r_{max})} \\
 \stackrel{(4.48), \gamma=1}{\leq} & \frac{E}{r_{max}^2(1 - \exp(-4\pi r_{max}))} \cdot \frac{M}{\exp(M\pi r_{max})} ,
 \end{aligned}$$

womit alles gezeigt ist, da alle weiteren Aussagen, etwa über $C_0(r_{max})$, unmittelbar aus Lemma 4.2.1 (setze dort immer $\gamma = 1$) übernommen werden können. \square

Bemerkung 4.2.4 (a) *Der Projektionsfehler geht nach der Aussage des vorangegangenen Satzes sehr schnell, nämlich exponentiell, gegen 0, wenn M gegen ∞ strebt.*

(b) *Die Schärfe der Abschätzung zeigt eine interessante Abhängigkeit von r_{max} . Ist nämlich dieser Parameter vergleichsweise klein, so ist die Forderung $\|u\|_{L_2(\Sigma_4)} \leq E$ verhältnismäßig schwach, es liegt daher möglicherweise noch relativ viel Gewicht auf den hohen Frequenzen in den Daten und man benötigt somit ein relativ großes M , um den Projektionsfehler klein werden zu lassen. Ist dagegen r_{max} vergleichsweise groß, so erweist sich die Forderung $\|u\|_{L_2(\Sigma_4)} \leq E$ als vergleichsweise stark und dementsprechend wird der Projektionsfehler in diesem Fall eher klein, was einer relativ geringen Gewichtung hoher Frequenzen in den Daten entspricht.*

4.2.2 Die Hauptergebnisse

Nachdem wir im vorherigen Abschnitt den Projektionsfehler betrachtet haben, können wir nun in diesem Absatz die angestrebte Fehlerabschätzung formulieren und beweisen. Dabei

wird sich herausstellen, daß die Wahl des Projektionsparameters M eine entscheidende Rolle für die Güte des Verfahrens darstellt. Da im folgenden eine ganze Reihe sehr ähnlicher Bezeichnungen für Lösungen des Cauchy-Problems 4.1.1 beziehungsweise der Linienmethode zu verschiedenen Daten verwendet werden, stellen wir in der folgenden Tabelle diese Bezeichnungen in übersichtlicher Form zusammen:

Lösungsbezeichnung	zugehörige Daten	Beschreibung
u	ϕ_1	Lösung des CP zu ungestörten Daten
u^*	ϕ_1^*	Lösung des CP zu ungestörten, nach D_M projizierten Daten
u_ε	$(\phi_1)_\varepsilon$	Lösung des CP zu gestörten Daten
u_ε^*	$(\phi_1)_\varepsilon^*$	Lösung des CP zu gestörten und anschließend nach D_M projizierten Daten
$u_{i,\varepsilon}^*$	$(\Phi_1)_\varepsilon^*$	Lösung der Linienmethode zu gestörten, projizierten und diskretisierten Daten auf der i . Linie

Tabelle 4.1: Lösungsbezeichnungen im Zusammenhang mit der Linienmethode für das Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung

Auch an dieser Stelle werden noch gewisse Hilfsergebnisse benötigt, die wir standardmäßig vorweg im folgenden Lemma präsentieren wollen.

Lemma 4.2.5 (a) Ist $\|u\|_{L_2(\Sigma_4)} \leq E$, so gilt auch $\|u - u^*\|_{L_2(\Sigma_4)} \leq E$.

(b) Es gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} & \|(u - u^*)(\cdot, y)\|_{L_2} \\ & \leq R_1 E \left(\frac{2C_0(r_{max})\pi}{1 - \exp(-4\pi r_{max})} \cdot \frac{M}{\exp(M\pi r_{max})} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$= R_1 (C_1(r_{max}))^{1 - \frac{y}{r_{max}}} E \cdot \left(\frac{M}{\exp(M\pi r_{max})} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \quad (4.53)$$

$$\leq C_2(r_{max}) E \cdot \left(\frac{M}{\exp(M\pi r_{max})} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \quad (4.54)$$

mit den Konstanten $R_1 = \max(1, r_{max})$, $C_1(r_{max}) = \frac{2C_0(r_{max})\pi}{1 - \exp(-4\pi r_{max})}$, $C_2(r_{max}) = R_1 \max(1, C_1(r_{max}))$, wobei $C_0(r_{max})$ sich wie in Lemma 4.2.1 beziehungsweise Satz 4.2.3 ergibt.

(c) Sei $(\phi_1)_\varepsilon(x) = \phi_1(x) + z(x) \cdot \varepsilon$ mit einer (zufälligen) (Störungs-)Funktion $z \in D$, $-1 \leq z(x) \leq 1$. Dann gilt (zur Definition der \overline{w}_k siehe Satz 3.3.3)

$$(\phi_1)_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} (\phi_1(\cdot) + z(\cdot) \cdot \varepsilon, \overline{w}_k(\cdot))_{L_2(\Sigma_1)} \overline{w}_k \quad (4.55)$$

und die zu u_ε^* gehörigen Daten $(\phi_1)_\varepsilon^*$ besitzen die Darstellung

$$(\phi_1)_\varepsilon^* = \sum_{k=1}^M (\phi_1(\cdot) + z(\cdot) \cdot \varepsilon, \overline{w}_k(\cdot))_{L_2(\Sigma_1)} \overline{w}_k \quad (4.56)$$

(d) Es gilt

$$\phi_1^* - (\phi_1)_\varepsilon^* = \sum_{k=1}^M (z(\cdot) \cdot \varepsilon, \overline{w}_k(\cdot))_{L_2(\Sigma_1)} \overline{w}_k \quad (4.57)$$

und für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq M$

$$((\phi_1^* - (\phi_1)_\varepsilon^*)(\cdot), \overline{w}_k(\cdot))_{L_2(\Sigma_1)} = (z(\cdot) \cdot \varepsilon, \overline{w}_k(\cdot))_{L_2(\Sigma_1)} \leq \frac{\sqrt{8}\varepsilon}{\pi} \quad (4.58)$$

(e) Man hat die Abschätzung

$$\|(u^* - u_\varepsilon^*)(\cdot, y)\|_{L_2} \leq C(y) \frac{\sqrt{8}\varepsilon \sinh(M\pi y)}{\pi M} \quad (4.59)$$

mit der von y abhängigen Konstanten $C(y)$.

Beweis:

Zu (a):

Offenbar löst $u - u^*$ das Cauchy-Problem 4.1.1 zu den Neumann-Daten

$$\begin{aligned} & \phi_1 - \phi_1^* \\ \stackrel{(4.51)}{=} & \sum_{k=M+1}^{\infty} (\phi_1, \overline{w}_k)_{L_2(\Sigma_1)} \overline{w}_k \quad . \end{aligned}$$

Da also die ersten M Fourierkoeffizienten der Daten $\phi_1 - \phi_1^*$ verschwinden, folgt aus der Darstellung (4.2) für die Norm der Lösung

$$\begin{aligned} & \|u - u^*\|_{L_2(\Sigma_4)}^2 \\ \stackrel{(4.2)}{=} & \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{(\phi_1, \overline{w}_k)_{L_2(\Sigma_1)}^2}{(k\pi)^2} \sinh^2(k\pi r_{max}) \\ \leq & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\phi_1, \overline{w}_k)_{L_2(\Sigma_1)}^2}{(k\pi)^2} \sinh^2(k\pi r_{max}) \\ \stackrel{(4.2)}{=} & \|u\|_{L_2(\Sigma_4)}^2 \\ \stackrel{\text{Vor.}}{\leq} & E^2 \end{aligned}$$

und hieraus durch Radizieren Behauptung (a).

Zu (b):

Die Funktion $u - u^*$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 4.1.20 zu Daten $\phi_1 - \phi_1^*$, insbesondere gilt nach Teil (a) des vorliegenden Lemmas Ungleichung (4.41). Die Anwendung des zitierten Satzes liefert

$$\begin{aligned}
& \|u - u^*(\cdot, y)\|_{L_2} \\
\stackrel{\text{Satz 4.1.20}}{\leq} & R_1 E^{\frac{y}{r_{max}}} \|\phi - \phi^*\|_{L_2(\Sigma_1)}^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \\
\stackrel{\text{Satz 4.2.3}}{\leq} & R_1 E^{\frac{y}{r_{max}}} \left(\frac{2C_0(r_{max})E\pi}{1 - \exp(-4\pi r_{max})} \cdot \frac{M}{\exp(M\pi r_{max})} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \\
= & R_1 E \left(\underbrace{\frac{2C_0(r_{max})\pi}{1 - \exp(-4\pi r_{max})}}_{=C_1(r_{max})} \cdot \frac{M}{\exp(M\pi r_{max})} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \\
= & R_1 (C_1(r_{max}))^{1 - \frac{y}{r_{max}}} E \cdot \left(\frac{M}{\exp(M\pi r_{max})} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \\
\leq & \underbrace{R_1 \max(1, C_1(r_{max}))}_{=C_2(r_{max})} E \cdot \left(\frac{M}{\exp(M\pi r_{max})} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}},
\end{aligned}$$

womit auch Teil (b) des vorliegenden Lemmas gezeigt ist.

Zu (c):

Zunächst sichert die Voraussetzung (vergleiche auch Bemerkung 4.1.2)

$$(\phi_1)_\varepsilon = \underbrace{\phi_1}_{\in D} + \underbrace{z}_{\in D} \varepsilon \in D$$

und damit folgt aus Satz 3.2.5 die behauptete Darstellung (4.55) und aufgrund der Definition der Projektion \bar{P}_M (siehe (4.49)) ist (4.56) unmittelbar einsichtig.

Zu (d):

Man subtrahiert (4.56) von (4.49) und gewinnt so (4.57). Daraus folgt dann

$$\begin{aligned}
& ((\phi_1^* - (\phi_1)_\varepsilon^*)(\cdot), \overline{w_k}(\cdot))_{L_2(\Sigma_1)} \\
\stackrel{(4.57)}{=} & \left(\sum_{l=1}^M (z(\cdot) \cdot \varepsilon, \overline{w_l}(\cdot))_{L_2(\Sigma_1)} \overline{w_l}(\cdot), \overline{w_k}(\cdot) \right)_{L_2(\Sigma_1)} \\
= & \sum_{l=1}^M (z(\cdot) \cdot \varepsilon, \overline{w_l}(\cdot))_{L_2(\Sigma_1)} \underbrace{(\overline{w_l}(\cdot), \overline{w_k}(\cdot))_{L_2(\Sigma_1)}}_{=\delta_{l,k}} \\
= & (z(\cdot) \cdot \varepsilon, \overline{w_k}(\cdot))_{L_2(\Sigma_1)},
\end{aligned}$$

also die Gleichung in (4.58).

Weiter hat man unter Beachtung der π -Periodizität von $|\sin(u)|$, $u \in \mathbb{R}$ die Integralformel

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 |\sin(k\pi x)| dx &\stackrel{u=k\pi x}{=} \frac{1}{k\pi} \int_0^{k\pi} |\sin(u)| du \\
 &= \frac{1}{k\pi} \sum_{j=0}^{k-1} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\sin(u)| du \\
 &= \frac{k}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin(u) du \\
 &= \frac{1}{\pi} [-\cos(u)]_0^{\pi} \\
 &= \frac{2}{\pi},
 \end{aligned}$$

die man verwendet, um

$$\begin{aligned}
 &(z(\cdot) \cdot \varepsilon, \overline{w_k}(\cdot))_{L_2(\Sigma_1)} \\
 &= \int_0^1 z(x) \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{2} \sin(k\pi x) dx \\
 &\leq \sqrt{2}\varepsilon \int_0^1 \underbrace{|z(x)|}_{\leq 1} \cdot |\sin(k\pi x)| dx \\
 &\leq \sqrt{2}\varepsilon \int_0^1 |\sin(k\pi x)| dx \\
 &= \frac{\sqrt{8}\varepsilon}{\pi},
 \end{aligned}$$

also die in (4.58) behauptete Ungleichung zu zeigen.

Zu (e):

Da nach Teil (d) des vorliegenden Lemmas nur die ersten M Fourierkoeffizienten von $\phi_1^* - (\phi_1)_\varepsilon^*$ von Null verschieden sein können, wird die Summe in (4.2) endlich und es folgt

$$\begin{aligned}
 &\|(u^* - u_\varepsilon^*)(\cdot, y)\|_{L_2}^2 \\
 &\stackrel{(4.2)}{=} \sum_{k=1}^M (z(\cdot) \cdot \varepsilon, \overline{w_k})_{L_2(\Sigma_1)}^2 \frac{\sinh^2(k\pi y)}{(k\pi)^2} \\
 &\stackrel{(4.58)}{\leq} \frac{8\varepsilon^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^M \frac{\sinh^2(k\pi y)}{(k\pi)^2}. \tag{4.60}
 \end{aligned}$$

Nun zeigt man die Zwischenbehauptung

$$\exists C^2(y, \gamma) > 0 \forall M \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^M \frac{\sinh^2(k\gamma\pi y)}{(k\pi)^2} \leq C^2(y, \gamma) \frac{\sinh^2(M\gamma\pi y)}{(M\pi)^2}, \quad (4.61)$$

mit einem zusätzlich eingefügten Faktor $\gamma > 0$, dessen Nutzen erst an späterer Stelle, wo wir (4.61) wiederverwenden werden, deutlich werden wird (vergleiche den Beweis zu Lemma 7.4.3 (e)), indem man zunächst für $M = 1, \dots, M_0 := \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\exp(\gamma\pi y) - 1}} \right\rceil$ Konstanten

$$C_M^2(y, \gamma) := \frac{\sum_{k=1}^M \frac{\sinh^2(k\gamma\pi y)}{(k\pi)^2}}{\frac{\sinh^2(M\gamma\pi y)}{(M\pi)^2}}$$

definiert, so daß die Behauptung für $M = 1, \dots, M_0$ trivialerweise mit $C_0^2(y, \gamma) := \max_{M=1, \dots, M_0} C_M^2(y, \gamma)$, also erst recht mit $C^2(y, \gamma) := \max\left(C_0^2(y, \gamma), \frac{1}{1 - \exp(-\gamma\pi y)}\right)$ gültig ist. Wir zeigen nun für $M \geq M_0$ induktiv die Behauptung. Für den Induktionsanfang ist nichts mehr zu zeigen. Für den Induktionsschluß stellt man als erstes fest, daß wegen

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dM} \left(\frac{\sinh(M\gamma\pi y)}{\sinh((M+1)\gamma\pi y)} \right) \geq 0 \\ \iff & \frac{\gamma\pi y \cosh(M\gamma\pi y) \sinh((M+1)\gamma\pi y) - \gamma\pi y \cosh((M+1)\gamma\pi y) \sinh(M\gamma\pi y)}{\sinh^2((M+1)\gamma\pi y)} \geq 0 \\ \iff & \cosh(M\gamma\pi y) \sinh((M+1)\gamma\pi y) - \cosh((M+1)\gamma\pi y) \sinh(M\gamma\pi y) \geq 0 \\ \iff & \cosh(M\gamma\pi y) \sinh((M+1)\gamma\pi y) \geq \cosh((M+1)\gamma\pi y) \sinh(M\gamma\pi y) \\ \iff & (e^{M\gamma\pi y} + e^{-M\gamma\pi y})(e^{(M+1)\gamma\pi y} - e^{-(M+1)\gamma\pi y}) \\ & \geq (e^{(M+1)\gamma\pi y} + e^{-(M+1)\gamma\pi y})(e^{M\gamma\pi y} - e^{-M\gamma\pi y}) \\ \iff & e^{(2M+1)\gamma\pi y} + e^{\gamma\pi y} - e^{-\gamma\pi y} - e^{-(2M+1)\gamma\pi y} \geq e^{(2M+1)\gamma\pi y} + e^{-\gamma\pi y} - e^{\gamma\pi y} - e^{-(2M+1)\gamma\pi y} \\ \iff & 2(e^{\gamma\pi y} - e^{-\gamma\pi y}) \geq 0 \\ \iff & e^{2\gamma\pi y} \geq 1 \quad (\text{wahre Aussage}) \end{aligned}$$

der Ausdruck

$$\frac{\sinh(M\gamma\pi y)}{\sinh((M+1)\gamma\pi y)}$$

monoton in M wächst und somit durch den Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\sinh(M\gamma\pi y)}{\sinh((M+1)\gamma\pi y)} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{e^{M\gamma\pi y} - e^{-M\gamma\pi y}}{e^{(M+1)\gamma\pi y} - e^{-(M+1)\gamma\pi y}} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1 - \overbrace{e^{-2M\gamma\pi y}}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{e^{\gamma\pi y} - e^{-(2M+1)\gamma\pi y}}_{\rightarrow 0}} \\ &= e^{-\gamma\pi y} \end{aligned}$$

nach oben abgeschätzt werden kann; durch Quadrieren folgt dann:

$$\sinh^2(M\gamma\pi y) \leq e^{-2\gamma\pi y} \sinh^2((M+1)\gamma\pi y) \quad (4.62)$$

Weiter benutzt man

$$\begin{aligned} M &\geq \frac{1}{\sqrt{\exp(\gamma\pi y)} - 1} \\ \implies \frac{1}{M} &\leq \sqrt{\exp(\gamma\pi y)} - 1 \\ \implies 1 + \frac{1}{M} &\leq \sqrt{\exp(\gamma\pi y)} \\ \implies \left(\frac{M+1}{M}\right)^2 &\leq \exp(\gamma\pi y) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} C^2(y) &\geq \frac{1}{1 - \exp(-\gamma\pi y)} \\ \implies C^2(y) - C^2(y) \exp(-\gamma\pi y) &\geq 1 \\ \implies C^2(y) \exp(-\gamma\pi y) + 1 &\leq C^2(y), \end{aligned}$$

um die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{M+1} \frac{\sinh^2(k\gamma\pi y)}{(k\pi)^2} \\ &= \sum_{k=1}^M \frac{\sinh^2(k\pi y)}{(k\pi)^2} + \frac{\sinh^2((M+1)\gamma\pi y)}{((M+1)\pi)^2} \\ &\stackrel{\text{Ind.vor.}}{\leq} C^2(y) \frac{\sinh^2(M\pi y)}{(M\pi)^2} + \frac{\sinh^2((M+1)\gamma\pi y)}{((M+1)\pi)^2} \\ &\stackrel{(4.62)}{\leq} \left(C^2(y) \frac{e^{-2\pi y} (M+1)^2}{M^2} + 1 \right) \frac{\sinh^2((M+1)\gamma\pi y)}{((M+1)\pi)^2} \\ &\leq (C^2(y) e^{-\gamma\pi y} + 1) \frac{\sinh^2((M+1)\gamma\pi y)}{((M+1)\pi)^2} \\ &\leq C^2(y) \frac{\sinh^2((M+1)\gamma\pi y)}{((M+1)\pi)^2} \end{aligned}$$

zu beweisen und den Induktionsschluß somit zu beenden. Einsetzen von (4.61) für $\gamma = 1$ in (4.60) und anschließendes Radizieren liefert nun die gewünschte Ungleichung (4.59) mit $C(y) = C(y, 1)$. □

Mit dem Beweis des obigen Lemmas haben wir die wesentlichen Hilfsmittel für den Hauptsatz dieses Abschnitts zur Verfügung gestellt und können diesen nun wie folgt formulieren:

Satz 4.2.6 (Fehlerabsch. für die Linienmethode im Fall der Laplace-Gleichung)

Mit den Bezeichnungen des laufenden Abschnitts (siehe insbesondere Tabelle 4.1) und den Definitionen

$$\begin{aligned}(U_\varepsilon^*)_h(y) &:= (u_{1,\varepsilon}^*(y), u_{2,\varepsilon}^*(y), \dots, u_{N-1,\varepsilon}^*(y))^T, \quad y \in [0, r_{max}] \\ U_\varepsilon^*(y) &:= (u_\varepsilon^*(jh, y))_{j=1, \dots, N-1}\end{aligned}$$

gilt $(U_\varepsilon^*)_h(y) \in D_M^h$ und $(U_\varepsilon^*)_h(y)$ läßt sich eindeutig zu einer Funktion $\overline{(u_\varepsilon^*)_h}(y) \in D_M$ fortsetzen. Sind dann die Voraussetzungen von Satz 4.1.20, also insbesondere (4.21) und (4.41) erfüllt, so gilt die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned}\|(u - \overline{(u_\varepsilon^*)_h})(\cdot, y)\|_{L_2} &\leq R_1 E \left(\frac{2C_0(r_{max})\pi}{1 - \exp(-4\pi r_{max})} \cdot \frac{M}{\exp(M\pi r_{max})} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \\ &\quad + \frac{\sqrt{8}\varepsilon \sinh(M\pi y)}{\pi^2} \frac{1}{M} + \frac{M^4 \pi^3 y}{12} \exp(M\pi y) \|(\phi_1)_\varepsilon^*\|_{L_1} h^2 \\ &\leq C_2(r_{max}) E \cdot \left(\frac{M}{\exp(M\pi r_{max})} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \\ &\quad + C(y) \frac{\sqrt{8}\varepsilon \sinh(M\pi y)}{\pi^2} \frac{1}{M} + \frac{M^4 \pi^3 y}{12} \exp(M\pi y) \|(\phi_1)_\varepsilon^*\|_{L_1} h^2.\end{aligned}$$

Beweis:

Wegen $(\Phi_1)_\varepsilon^* \in D_M^h$ gilt für $N > k > M$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi) ((\Phi_1)_\varepsilon^*)_j = 0,$$

so daß die Lösungsdarstellung für $u_{i,\varepsilon}^*$ nach (2.8) übergeht in

$$u_{i,\varepsilon}^*(y) = h^2 \sum_{k=1}^M \left(\frac{\sin(ikh\pi)}{\sin(kh\frac{\pi}{2})} \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi) ((\Phi_1)_\varepsilon^*)_j \right). \quad (4.63)$$

Sei weiter $N > k_0 > M$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N-1} \sin(k_0\pi ih) \cdot ((U_\varepsilon^*)_h(y))_i \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \sin(k_0\pi ih) \cdot u_{i,\varepsilon}^*(y) \\ &\stackrel{(4.63)}{=} \sum_{i=1}^{N-1} \sin(k_0\pi ih) h^2 \sum_{k=1}^M \left(\frac{\sin(ikh\pi)}{\sin(kh\frac{\pi}{2})} \sinh(\sqrt{-\lambda_k}y) \sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi) ((\Phi_1)_\varepsilon^*)_j \right) \\ &= \sum_{k=1}^M \left(\sum_{j=1}^{N-1} \sin(kjh\pi) ((\Phi_1)_\varepsilon^*)_j \right) \frac{\sinh(\sqrt{-\lambda_k}y)}{\sin(kh\frac{\pi}{2})} h^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{N-1} \sin(k_0\pi ih) \sin(k\pi ih)}_{=0 \text{ nach Lemma 3.2.2, da } 1 \leq k \leq M < k_0 < N} \\ &= 0\end{aligned}$$

und somit ist nach Definition 3.3.1 $(U_\varepsilon^*)_h(y) \in D_M^h$. Nach Satz 3.3.2 existiert dann eine eindeutige Fortsetzung $\overline{(u_\varepsilon^*)_h}(y) \in D_M$ von $(U_\varepsilon^*)_h(y)$. Darüberhinaus folgt aus der in Satz 3.3.3 bewiesenen Isometrieeigenschaft der dort definierten Abbildung F

$$\begin{aligned}
& \|u_\varepsilon^* - \overline{(u_\varepsilon^*)_h}\|_{L_2}^2 \\
&= (u_\varepsilon^* - \overline{(u_\varepsilon^*)_h}, u_\varepsilon^* - \overline{(u_\varepsilon^*)_h})_{L_2} \\
&= (F(u_\varepsilon^* - \overline{(u_\varepsilon^*)_h}), F(u_\varepsilon^* - \overline{(u_\varepsilon^*)_h}))_e \\
&= (\sqrt{h}(U_\varepsilon^* - (U_\varepsilon^*)_h), \sqrt{h}(U_\varepsilon^* - (U_\varepsilon^*)_h))_e \\
&= h\|U_\varepsilon^* - (U_\varepsilon^*)_h\|_e^2 \\
&\leq \underbrace{h(N-1)}_{\leq 1} \|U_\varepsilon^* - (U_\varepsilon^*)_h\|_\infty^2 \\
&\leq \|U_\varepsilon^* - (U_\varepsilon^*)_h\|_\infty^2,
\end{aligned}$$

also nach dem Ziehen der Wurzel

$$\|u_\varepsilon^* - \overline{(u_\varepsilon^*)_h}\|_{L_2} \leq \|U_\varepsilon^* - (U_\varepsilon^*)_h\|_\infty \stackrel{\text{Satz 3.4.7}}{\leq} \frac{M^4 \pi^3 y}{12} \exp(M\pi y) \|(\phi_1)_\varepsilon^*\|_{L_1} h^2. \quad (4.64)$$

Insgesamt erhält man also

$$\begin{aligned}
& \|(u - \overline{(u_\varepsilon^*)_h})(\cdot, y)\|_{L_2} \\
&\stackrel{\text{Lemma 4.2.5 (b),(e),(4.64)}}{\leq} \|(u - u^*)(\cdot, y)\|_{L_2} + \|(u^* - u_\varepsilon^*)(\cdot, y)\|_{L_2} + \|(u_\varepsilon^* - \overline{(u_\varepsilon^*)_h})(\cdot, y)\|_{L_2} \\
&\stackrel{\text{Lemma 4.2.5 (b),(e),(4.64)}}{\leq} R_1 E \left(\frac{2C_0(r_{max})\pi}{1 - \exp(-4\pi r_{max})} \cdot \frac{M}{\exp(M\pi r_{max})} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \\
&\quad + C(y) \frac{\sqrt{8}\varepsilon \sinh(M\pi y)}{\pi} \frac{M}{M} + \frac{M^4 \pi^3 y}{12} \exp(M\pi y) \|(\phi_1)_\varepsilon^*\|_{L_1} h^2 \\
&\stackrel{(4.54)}{\leq} C_2(r_{max}) E \cdot \left(\frac{M}{\exp(M\pi r_{max})} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \\
&\quad + C(y) \frac{\sqrt{8}\varepsilon \sinh(M\pi y)}{\pi} \frac{M}{M} + \frac{M^4 \pi^3 y}{12} \exp(M\pi y) \|(\phi_1)_\varepsilon^*\|_{L_1} h^2.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.2.7 (Fehleranalyse) Bei der Analyse der eben bewiesenen Fehlerabschätzung werden drei Fehleranteile erkennbar. Den ersten Fehleranteil könnte man als Regularisierungs- oder auch als Projektionsfehler bezeichnen, da er auf die Regularisierung des Problems durch Projektion der Daten in den endlichdimensionalen Raum D_M zurückzuführen ist. Der zweite Fehleranteil hat seine Ursache in der Datenstörung und wird daher Datenfehler genannt. Der dritte Term in der Fehlerabschätzung ist der Diskretisierungsfehler aufgrund der Verwendung der Linienmethode.

Offenbar kann der Diskretisierungsfehler durch geeignete Wahl von h bei festem M beliebig klein gemacht werden, da er quadratisch in h gegen 0 strebt. Eine Betrachtung dieses Fehleranteils kann also unabhängig von den übrigen Anteilen geschehen.

Der Regularisierungsfehler wird um so kleiner, je größer M ist und zwar im wesentlichen exponentiell. Dies ist auch deswegen einleuchtend, weil mit wachsendem M ja die Projektion immer genauer die tatsächlichen Daten approximiert. Der Datenfehler hingegen wächst in der Hauptsache exponentiell mit wachsendem M , was die zunehmende Schlechtgestellttheit des Problems mit größer werdendem M widerspiegelt.

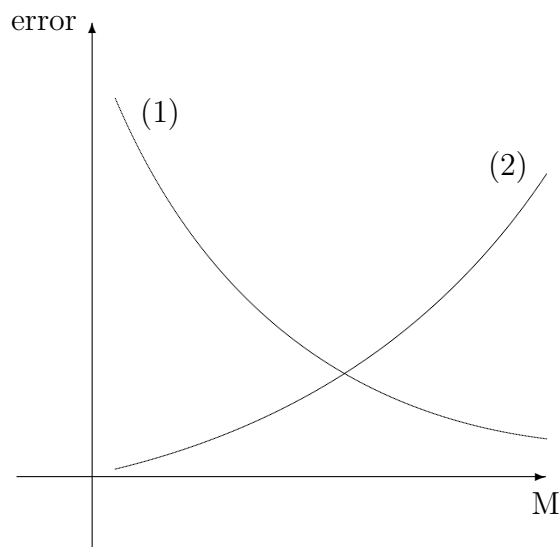


Abbildung 4.1: Darstellung des Regularisierungs- beziehungsweise Projektionsfehlers (1) und des Datenfehlers (2)

Insgesamt ergibt sich also das für die Regularisierung eines schlechtgestellten Problems typische Bild eines wachsenden und eines fallenden Fehleranteils (siehe Abbildung 4.1), so daß sich für die Summe beider Fehleranteile eine optimale Wahl von M ergibt, für die der Gesamtfehler minimal wird. Die Bestimmung dieses optimalen M kann mit Hilfe einer einfachen Nullstellensuche in der Ableitung der Summe aus Regularisierungs- und Datenfehler vorgenommen werden. Allerdings ist dafür die genaue Kenntnis der Konstanten wie etwa $C(y)$, $C_2(r_{max})$ vonnöten, die insbesondere im Falle von $C(y)$ nicht einfach zu erhalten ist. Eine Alternative bietet die in folgendem Konvergenzsatz formulierte Wahl von M und h , die zwar nicht das optimale M liefert, jedoch immerhin zeigt, daß für diese Wahl die Näherungslösung gegen die wahre Lösung konvergiert.

Satz 4.2.8 (Konvergenzsatz für die Linienmethode, Fall der Laplace-Gleichung)

Es seien die Voraussetzungen des Satzes 4.2.6 gegeben. Wählt man dann $M = \left\lceil \frac{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}{\pi r_{max}} \right\rceil$ und $h \leq \sqrt{\varepsilon}$, so konvergiert für jedes $y \in [0, r_{max})$ die Lösung $\overline{(u_\varepsilon^*)}_h$ der Linienmethode gegen die

wahre Lösung u , wenn ε gegen 0 geht. Es gilt die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} & \| (u - \overline{(u_\varepsilon^*)_h})(\cdot, y) \|_{L_2} \\ \leq & C_2(r_{max})E \cdot \left(\frac{\varepsilon \cdot \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\pi r_{max}} + \varepsilon \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} + \sqrt{8}C(y) \exp(\pi y) r_{max} \frac{\varepsilon^{1 - \frac{y}{r_{max}}}}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \\ & + \frac{y}{12\pi} \| (\phi_1)_\varepsilon^* \|_{L_1} \frac{(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \pi r_{max})^4 \cdot \exp(\pi y) \cdot \varepsilon^{1 - \frac{y}{r_{max}}}}{r_{max}^4} . \end{aligned}$$

Beweis:

Bei der angegebenen Wahl von M und h ergibt sich (man beachte $M\pi r_{max} \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\pi r_{max}} \pi r_{max} = \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{M}{\exp(M\pi r_{max})} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \\ \leq & \left(\frac{\left[\frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\pi r_{max}} \right]}{\frac{1}{\varepsilon}} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \\ \leq & \left(\varepsilon \left(\frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\pi r_{max}} + 1 \right) \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \end{aligned}$$

und unter Ausnutzung von $M\pi y \leq \left(\frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\pi r_{max}} + 1 \right) \pi y = \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{y}{r_{max}} + \pi y$

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon \sinh(M\pi y)}{M} \\ \leq & \frac{\varepsilon \exp(M\pi y)}{M} \\ \leq & \frac{\varepsilon \exp\left(\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{y}{r_{max}} + \pi y\right)\right)}{\frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\pi r_{max}}} \\ = & \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon^{-\frac{y}{r_{max}}} \exp(\pi y) \pi r_{max}}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \\ = & \frac{\varepsilon^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \exp(\pi y) \pi r_{max}}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & M^4 \exp(M\pi y) h^2 \\ & \leq \left(\frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\pi r_{max}} + 1 \right)^4 \cdot \varepsilon^{-\frac{y}{r_{max}}} \cdot \exp(\pi y) \cdot \varepsilon \\ & = \frac{\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \pi r_{max}\right)^4 \cdot \exp(\pi y) \cdot \varepsilon^{1-\frac{y}{r_{max}}}}{(\pi r_{max})^4} . \end{aligned}$$

Daraus folgt mit Satz 4.2.6 unmittelbar die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} & \|(u - \overline{(u_\varepsilon^*)_h})(\cdot, y)\|_{L_2} \\ & \leq C_2(r_{max})E \cdot \left(\frac{\varepsilon \cdot \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\pi r_{max}} + \varepsilon \right)^{1-\frac{y}{r_{max}}} + C(y) \frac{\sqrt{8} \varepsilon^{1-\frac{y}{r_{max}}} \exp(\pi y) \pi r_{max}}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \\ & \quad + \frac{\pi^3 y}{12} \|(\phi_1)_\varepsilon^*\|_{L_1} \frac{\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \pi r_{max}\right)^4 \cdot \exp(\pi y) \cdot \varepsilon^{1-\frac{y}{r_{max}}}}{(\pi r_{max})^4} \\ & = C_2(r_{max})E \cdot \left(\frac{\varepsilon \cdot \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\pi r_{max}} + \varepsilon \right)^{1-\frac{y}{r_{max}}} + \sqrt{8}C(y) \exp(\pi y) r_{max} \frac{\varepsilon^{1-\frac{y}{r_{max}}}}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \\ & \quad + \frac{y}{12\pi} \|(\phi_1)_\varepsilon^*\|_{L_1} \frac{\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \pi r_{max}\right)^4 \cdot \exp(\pi y) \cdot \varepsilon^{1-\frac{y}{r_{max}}}}{r_{max}^4} , \end{aligned}$$

wie oben behauptet. Die Konvergenz ist nun klar, da wegen

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\varepsilon \cdot \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right) \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\frac{1}{\varepsilon}} \\ & = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \\ & \stackrel{\text{H\^ospital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \\ & = 0 \end{aligned}$$

auch

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\varepsilon \cdot \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \right)^{1-\frac{y}{r_{max}}} = 0$$

aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion gilt und somit der erste Fehleranteil gegen 0 konvergiert. Auch der zweite Fehlerterm konvergiert gegen 0, da $\varepsilon^{1-\frac{y}{r_{max}}}$ gegen 0 und $\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ gegen ∞ jeweils für $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergiert.

Bei Betrachtung des dritten Fehleranteils macht man sich zuvor klar, daß für beliebige $\alpha, \beta, C > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x) + C)^\alpha}{x^\beta} = 0$$

gilt, denn $\lceil \alpha \rceil$ -fache Anwendung der Regel von l'Hôpital liefert

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x) + C)^\alpha}{x^\beta} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - \lceil \alpha \rceil + 1)(\ln(x) + C)^{\alpha - \lceil \alpha \rceil}}{\beta^{\lceil \alpha \rceil} x^\beta} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Setzt man in diesem Zusammenhang nun $x = \frac{1}{\varepsilon}$, $C = \pi r_{max}$, $\alpha = 4$ und $\beta = 1 - \frac{y}{r_{max}}$, so folgt daraus die Konvergenz des Diskretisierungsfehlers gegen 0 für $\varepsilon \rightarrow 0$, also insgesamt die Konvergenz aller Terme in der Abschätzung gegen 0 und damit die Behauptung. \square

Bemerkung 4.2.9 *Man kann das vorstehende Ergebnis auch dahingehend interpretieren, daß es nur dann Sinn hat, die Dimension M des Raums, in den die Daten projiziert werden, zu erhöhen, wenn die Daten auch entsprechend genau vorliegen, also die Störung ε klein genug ist.*

Teil II

Der Fall einer elliptischen Gleichung mit einem Diffusionskoeffizienten

Kapitel 5

Die Linienmethode für ein allgemeineres elliptisches Problem

5.1 Das Cauchy-Problem für eine PDGL mit Diffusionskoeffizient

Nachdem im bisherigen Kontext ausschließlich Cauchy-Probleme für die Laplace- beziehungsweise Poisson-Gleichung betrachtet wurden (siehe dazu die Problemstellung 2.1.1 in Verbindung mit Bemerkung 2.1.2 und Problem 2.1.3), wollen wir nun die in 2.2 hergeleitete Linienmethode auf etwas allgemeinere elliptische Operatoren ausweiten. Dabei werden wir im folgenden auf dem Gebiet $\Omega := [0, 1] \times [0, r_{max}]$ Gleichungen der Form

$$\operatorname{div}(a(x)\nabla u(x, y)) = f \iff a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\right) = f \quad (5.1)$$

betrachten, wobei wir $u \in C^2(\operatorname{int}(\Omega)) \cap C(\Omega)$ und $a \in C^1([0, 1])$ voraussetzen. Im besonderen wird uns — wie schon zuvor für die Poisson-Gleichung der Spezialfall der Laplace-Gleichung — interessieren, was sich für $f = 0$ ergibt. Aus physikalischer Sicht beschreibt der nur von x abhängige Koeffizient a Inhomogenitäten des betrachteten Mediums in einer Ortsdimension wie zum Beispiel einen Diffusionskoeffizienten (vgl. dazu auch [Str95] S. 319ff). Die Poisson-beziehungsweise Laplace-Gleichung ist offenbar ein Spezialfall dieser elliptischen Differentialgleichung, der sich ergibt, wenn man in 5.1 den Fall $a = \text{const}$ betrachtet. Als wichtige Voraussetzung werden wir im folgenden immer annehmen, daß

$$a(x) \geq r_a > 0 \quad \forall x \in [0, 1] \quad (5.2)$$

gilt, was angesichts der Tatsache, daß es sich um eine meßbare physikalische Größe – wie etwa einen Diffusionskoeffizienten – handelt, auch keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, da man eine solche Größe durch Wahl einer geeigneten Skala immer mit ausschließlich positiven Werten beschreiben kann.

Als Beispiel kann die Temperaturmessung dienen. Prinzipiell benötigt man dazu keine negativen Werte, wie sie etwa auf der Skala nach Celsius vorkommen, was durch die Kelvin-Skala

gezeigt wird. Mathematisch gesehen kann man diese Aussage auch an der Forderung festmachen, daß es sich bei dem betrachteten Differentialoperator um einen gleichförmig elliptischen (engl. "uniformly elliptic") Operator handelt. Hierbei heißt ein Differentialoperator D der Form

$$Du := \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} u + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} u + cu$$

gleichförmig elliptisch, falls es eine Konstante $\delta > 0$ gibt, so daß die Beziehung

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \xi_i \xi_j \geq \delta |\xi|_e^2 \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

gültig ist (vgl. [CL90] S.795). In unserem speziellen Fall bedeutet das wegen

$$a_{i,j} = a(x) \cdot \delta_{i,j} \quad ,$$

daß

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 a(x) \xi_i^2 &\geq \delta |\xi|_e^2 \\ \iff a(x) &\geq \delta > 0 \end{aligned}$$

erfüllt sein muß, also genau Bedingung (5.2).

Ebenso sinnvoll und natürlich erscheint eine Beschränktheitsbedingung nach oben der Form

$$a(x) < R_a \quad \forall x \in [0, 1] \tag{5.3}$$

zu fordern sowie die sich aus der stetigen Differenzierbarkeit von a ergebende Folgerung

$$a'(x) \leq R'_a \tag{5.4}$$

festzustellen; wir werden alle diese Eigenschaften von a in der Tat auch im folgenden benötigen.

Wir gelangen somit zunächst in Analogie zu Problem 2.1.1 zu folgender Formulierung des Cauchy-Problems für den vorgestellten allgemeineren Differentialoperator:

Problem 5.1.1 (Cauchy-Problem für eine verallgemeinerte elliptische PDGL)

Definiere Ω und $\Sigma_i, i = 1, \dots, 4$ wie in Problem 2.1.1.

Gesucht ist dann eine Funktion $u \in C^2(\text{int}(\Omega)) \cap C(\Omega)$ mit

$$a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right) = f \quad \text{in } \text{int}(\Omega),$$

die den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u &= f_1 \text{ auf } \Sigma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \phi_1 \text{ auf } \Sigma_1 \\ u &= f_2 \text{ auf } \Sigma_2 \\ u &= f_3 \text{ auf } \Sigma_3 \end{aligned}$$

genügt. Die Neumann-Daten ϕ_1 bezeichnen wir auch als Cauchy-Daten.

Wie schon angedeutet, werden wir unsere Untersuchungen ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf den Fall eines halbhomogenen Problems beschränken können. Wesentlich erleichtert wird dies durch die Tatsache, daß der betrachtete Differentialoperator linear ist, wie das folgende Ergebnis zeigen wird.

Satz 5.1.2 *Der durch*

$$C^2(\text{int}(\Omega)) \ni u \mapsto L_a(u) = a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \in C(\text{int}(\Omega))$$

definierte Differentialoperator ist linear.

Beweis:

Es gilt für beliebige $u, v \in C^2(\text{int}(\Omega))$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & L_a(\lambda u + \mu v) \\ &= a \frac{\partial^2(\lambda u + \mu v)}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial(\lambda u + \mu v)}{\partial x} \right) \\ &= a \left(\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(a \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ &= \lambda \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + \mu \left(a \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ &= \lambda L_a(u) + \mu L_a(v) \end{aligned}$$

□

Somit können wir als direkte Folgerung aus diesem Satz in Analogie zu Bemerkung 2.1.2 das Folgende festhalten:

Bemerkung 5.1.3 *Man darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß in Problem 5.1.1 homogene Dirichlet-Daten und eine homogene rechte Seite vorliegen, daß also*

$$f = f_1 = f_2 = f_3 = 0$$

gilt. Andernfalls zerlegt man u in die Summe zweier Funktionen v und w , wobei v das Problem

$$\begin{aligned} L_a(v) &= 0 \\ v &= 0 \quad \text{auf } \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \phi_1 - \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{auf } \Sigma_1 \end{aligned}$$

löst und w Lösung des (gutgestellten, direkten) Dirichlet-Problems für $L_a w = f$, das sich zu

$$\begin{aligned} L_a w &= f \quad \text{in } \text{int}(\Omega) \\ w &= f_1 \quad \text{auf } \Sigma_1 \\ w &= f_2 \quad \text{auf } \Sigma_2 \\ w &= f_3 \quad \text{auf } \Sigma_3 \\ w &= (1-x) \cdot f_2(r_{max}) + x \cdot f_3(r_{max}) \quad \text{auf } \Sigma_4 \end{aligned}$$

ergibt, ist. Auch hier ist es wahlweise möglich, einen oder mehrere inhomogene Terme bei der Lösung des Teilproblems von v statt bei der Lösung des Problems für w zu berücksichtigen.

Damit kann das Problem, das wir im folgenden untersuchen werden, wie folgt formuliert werden:

Problem 5.1.4 (Cauchy-Problem mit homogenen Dirichlet-Bedingungen)

Gesucht ist eine Funktion $u \in C^2(\text{int}(\Omega)) \cap C(\Omega)$ mit

$$L_a u = 0 \text{ in } \text{int}(\Omega),$$

die den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u &= 0 \text{ auf } \Sigma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \phi_1 \text{ auf } \Sigma_1 \\ u &= 0 \text{ auf } \Sigma_2 \\ u &= 0 \text{ auf } \Sigma_3 \end{aligned}$$

genügt. Im folgenden sei dabei stets $\phi_1 \in D^a$ vorausgesetzt. Zur Definition von $D^a (= D)$ siehe (6.16) (vergleiche auch Bemerkung 6.2.19). Man beachte auch Bemerkung 4.1.2 in Verbindung mit Satz 6.2.18.

5.2 Herleitung der Linienmethode

5.2.1 Diskretisierung

In diesem Abschnitt werden wir nun die Linienmethode, die wir in Kapitel 2.2 für das Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung erstmals hergeleitet haben, auf das oben dargestellte Problem mit dem Differentialoperator L_a ausweiten. Die Grundidee ist wiederum, zunächst nur in x -Richtung eine Diskretisierung vorzunehmen. Sei also wie in Abschnitt 2.2

$$N \in \mathbb{N}, h = \frac{1}{N}, x_i = ih, i = 0, \dots, N.$$

Wir betrachten nun die Gleichung

$$L_a u = 0 \iff a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

jeweils nur noch an den Punkten $x_i, i = 1, \dots, N-1$ und erhalten bei Verwendung von vorwärts- beziehungsweise rückwärts genommenen Differenzenquotienten erster Ordnung mit der Bezeichnung $a_i = a(x_i), 1 \leq i \leq N-1$ die Approximation

$$\begin{aligned} a_i u_i'' &\approx -\frac{\left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right)(x_{i+1}) - \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right)(x_i)}{h} \\ &\approx -\frac{a_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h}}{h} \\ &= -\frac{1}{h^2} (a_{i+1} u_{i+1} - (a_i + a_{i+1}) u_i + a_i u_{i-1}) \quad . \end{aligned}$$

Hierbei ist u_i als Approximation von $u(x_i, y)$ zu verstehen ($1 \leq i \leq N-1$). In Matrixschreibweise versucht man also das System

$$C_a U'' + A_a U = 0 \iff U'' + \underbrace{((C_a)^{-1} A_a)}_{=: B_a} U = 0$$

zu lösen, wobei die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} U &= (u_1, \dots, u_{N-1}) \\ C_a &= \text{diag}(a_i)_{i=1, \dots, N-1} \end{aligned}$$

und

$$A_a = \frac{1}{h^2} \underbrace{\begin{pmatrix} -(a_1 + a_2) & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & -(a_2 + a_3) & a_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{N-2} & -(a_{N-2} + a_{N-1}) & a_{N-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N-1} & -(a_{N-1} + a_N) \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{N-1, N-1}}$$

Verwendung finden. In Analogie zu Problem 2.2.1 fassen wir nun die bisher formulierte Approximation der Problemstellung 5.1.4 zusammen in

Problem 5.2.1 (AWP für ein gekoppeltes System gew. Differentialgleichungen)

Finde $N-1$ auf $[0, r_{\max}]$ definierte Funktionen u_i , $i = 1, \dots, N-1$, so daß

$$U'' + B_a U = 0 \tag{5.5}$$

gilt und die Anfangsbedingungen.

$$\begin{aligned} U(0) &:= (u_1(0), \dots, u_{N-1}(0)) = 0 \\ U'(0) &:= (u'_1(0), \dots, u'_{N-1}(0)) = (\phi_1(x_1), \dots, \phi_1(x_{N-1})) =: \Phi_1 \end{aligned}$$

erfüllt sind.

5.2.2 Hilfsergebnisse aus der Eigenwerttheorie

Bevor wir mit unserer Untersuchung mit dem Ziel der Entkoppelung des vorliegenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen fortfahren können, wollen wir einige Hilfsergebnisse aus der Eigenwerttheorie angeben und meistens auch beweisen, die im folgenden benötigt werden. Wiewohl man sie in verschiedenen Standardwerken zur linearen Algebra (siehe zum Beispiel [MaM69], [Fis75], [Wal96], [Jae02]) findet, sollen sie trotzdem hier zusammenhängend dargestellt werden, um dem Leser die benötigten Zusammenhänge quasi aus einem Guß und ohne störendes Beiwerk vor Augen zu stellen.

Hilfssatz 5.2.2 Die Matrix $A = (a_{j,k})_{j,k=1,\dots,n}$ sei symmetrisch. Dann sind alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A reell und es existiert eine zugehörige Orthonormalbasis von Eigenvektoren $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}^n$ von A mit $Aw_j = \lambda_j w_j$, $1 \leq j \leq n$.

Beweis:

Siehe zum Beispiel [Fis75] Korollar 6.5.6. □

Hilfssatz 5.2.3 Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 5.2.2 gilt mit der Matrix W , deren Spalten aus den Eigenvektoren w_j , $j = 1, \dots, n$ besteht: W ist orthogonal (das heißt $W^T = W^{-1}$) und man hat $W^T A W = \text{diag}(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$. Weiter erhält man für einen beliebigen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ die folgenden Darstellungen mit Hilfe des euklidischen Skalarprodukts $(\cdot, \cdot)_e$:

$$x = \sum_{j=1}^n (x, w_j)_e w_j \tag{5.6}$$

$$Ax = \sum_{j=1}^n \lambda_j (x, w_j)_e w_j \tag{5.7}$$

$$(x, x)_e = \sum_{j=1}^n (x, w_j)_e^2 \tag{5.8}$$

$$(Ax, x)_e = \sum_{j=1}^n \lambda_j (x, w_j)_e^2 \tag{5.9}$$

$$(A^k x, x)_e = \sum_{j=1}^n \lambda_j^k (x, w_j)_e^2, \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{5.10}$$

Beweis:

Sei die Eigenbasis w_1, \dots, w_n nach Hilfssatz 5.2.2 gegeben. Dann definieren wir die Matrix $W := (w_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ durch

$$w_{i,j} := (w_j)_i \quad .$$

W enthält also die Eigenvektoren als Spalten. Da die w_j , $j = 1, \dots, n$, eine Orthonormalbasis bilden, gilt für $1 \leq j, k \leq n$ beliebig:

$$(w_j, w_k)_e = \delta_{j,k} \iff \sum_{i=1}^n (w_j)_i (w_k)_i = \delta_{j,k} \iff \sum_{i=1}^n w_{i,j} w_{i,k} = (W^T W)_{j,k} = \delta_{j,k}$$

Folglich ist W eine Orthogonalmatrix, d.h. es gilt

$$W^T = W^{-1} \quad , \quad W^T W = W W^T = E \quad .$$

Es folgt hieraus mit Hilfe der Eigenwertgleichung

$$\begin{aligned} AW &= W \text{diag}(\lambda_i)_{i=1,\dots,n} \\ \implies W^T A W &= \text{diag}(\lambda_i)_{i=1,\dots,n} \end{aligned}$$

womit die behaupteten Eigenschaften der Matrix W gezeigt sind. Weiter ergibt sich:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n (x, w_j)_e w_j \right)_i &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_k (w_j)_k (w_j)_i \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \sum_{j=1}^n w_{k,j} w_{i,j} \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \sum_{j=1}^n \underbrace{(WW^T)_{k,i}}_{\delta_{k,i}} \\ &= x_i \end{aligned}$$

und somit Behauptung (5.6). Gleichung (5.7) zeigt man direkt durch:

$$Ax \stackrel{(5.6)}{=} \sum_{j=1}^n (Ax, w_j)_e w_j \stackrel{A \text{ symm.}}{=} \sum_{j=1}^n (x, \underbrace{Aw_j}_e)_e w_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j (x, w_j)_e w_j$$

Ebenfalls aus (5.6) folgt

$$\begin{aligned} (x, x)_e &= \left(\sum_{j=1}^n (x, w_j)_e w_j, \sum_{i=1}^n (x, w_i)_e w_i \right)_e \\ &= \sum_{i,j=1}^n (x, w_i)_e (x, w_j)_e \underbrace{(w_i, w_j)_e}_{\delta_{i,j}} \\ &= \sum_{j=1}^n (x, w_j)_e^2 \quad , \end{aligned}$$

also der Zusammenhang (5.8). Aus (5.7) und (5.6) folgert man durch Einsetzen unmittelbar (5.9), und (5.10) zeigt man schließlich induktiv (Der Induktionsanfang wurde schon in (5.8) und (5.9) gezeigt) durch

$$\begin{aligned} (A^{k+1}x, x)_e &\stackrel{A \text{ symm.}}{=} (A^{k-1}Ax, Ax)_e \stackrel{\text{I.V.}}{=} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{k-1} (Ax, w_j)_e^2 \\ &\stackrel{A \text{ symm.}}{=} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{k+1} (x, w_j)_e^2 \quad . \end{aligned}$$

□

Aus Gleichung (5.9) ergibt sich sofort

Folgerung 5.2.4 *Eine (symmetrische) Matrix ist positiv definit genau dann, wenn ihre Eigenwerte alle positiv sind.*

Beweis:

Setzt man in Gleichung (5.9) für x nacheinander die Eigenvektoren w_1, \dots, w_n ein, so erhält man aus der positiven Definitheit die Positivität der Eigenwerte. Umgekehrt schließt man ebenfalls mit (5.9), daß

$$(Ax, x)_e = \sum_{j=1}^n \lambda_j (x, w_j)_e^2 \geq 0$$

gilt und Gleichheit nur im Fall

$$(x, w_j) = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad \stackrel{(5.6)}{\iff} \quad x = 0$$

möglich ist. □

Eine weitere, für uns im folgenden sehr nützliche äquivalente Charakterisierung positiv definiten Matrizen ergibt sich über das Vorzeichen der sogenannten Hauptminoren, an deren Definition wir kurz erinnern wollen

Definition 5.2.5 Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ gegeben. Dann heißen die Zahlen

$$H_i(A) := \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,i} \end{vmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

Hauptminoren der Matrix A .

Hilfssatz 5.2.6 Eine (symmetrische) Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist positiv definit genau dann, wenn alle ihre Hauptminoren positiv sind.

Beweis:

Sei A zunächst positiv definit. Da A symmetrisch ist, folgt aus Hilfssatz 5.2.2 beziehungsweise 5.2.3 die Existenz einer orthogonalen Matrix W , so daß

$$W^T A W = \text{diag}(\lambda_i)_{i=1, \dots, n} \quad .$$

Der Übergang zu Determinanten liefert mit Hilfe des Determinantenproduktsatzes

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(\text{diag}(\lambda_i)) = \det(W^T A W) = \det(W^T) \det(A) \det(W) = \det(W)^2 \det(A) \quad .$$

Da nach Folgerung 5.2.4 alle Eigenwerte von A positiv sind, ergibt sich

$$\det(A) = \frac{\overbrace{\prod_{i=1}^n \lambda_i}^{>0}}{\underbrace{\det(W)^2}_{>0, \text{ da } W \text{ reg.}}} > 0 \quad .$$

Nun ist mit $A =: A^{(n)}$ auch

$$A^{(j)} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, n-1$$

positiv definit, denn für jeden Vektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^j$ gilt auch $0 \neq \tilde{x} := (x_1, \dots, x_j, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ und

$$(A^{(j)}x, x)_e = \sum_{i,k=1}^j a_{i,k}x_i x_k = \sum_{i,k=1}^n a_{i,k}\tilde{x}_i \tilde{x}_k = (A\tilde{x}, \tilde{x})_e > 0 \quad .$$

Daher folgt mit derselben Schlußweise wie oben die Positivität der Hauptminoren von A . Seien jetzt umgekehrt alle Hauptminoren positiv. Wir zeigen induktiv, daß $A^{(k)}$ auf dem von den ersten k Vektoren der Standardbasis aufgespannten Unterraum $[e_1, \dots, e_k] \cong \mathbb{R}^k$ positiv definit ist, was für $k = n$ die Behauptung zeigt.

Im Fall $k = 1$ sieht man leicht

$$(A^{(1)}x_1e_1, x_1e_1)_e = a_{1,1}x_1^2 = x_1^2 \det(A^{(1)}) > 0 \quad .$$

Gelte nun die Behauptung bis $k-1$. Analog zu oben hat man die Existenz einer orthogonalen Matrix $W^{(k)}$ mit

$$(W^{(k)})^T A^{(k)} W^{(k)} = \text{diag}(\lambda_i^{(k)})_{i=1, \dots, k} \quad . \quad (5.11)$$

Bei Übergang zu Determinanten erhält man mit Hilfe der Voraussetzung $\det(A^{(k)}) > 0$:

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^k \lambda_i^{(k)} \\ &= \det(\text{diag}(\lambda_i^{(k)})) \\ &= \det((W^{(k)})^T A^{(k)} W^{(k)}) \\ &= \det((W^{(k)})^T) \det(A^{(k)}) \det(W^{(k)}) \\ &= \det(W^{(k)})^2 \det(A^{(k)}) \\ &> 0, \end{aligned}$$

das heißt, daß kein $\lambda_i^{(k)}$ verschwindet und eine gerade Anzahl der $\lambda_i^{(k)}$ negativ ist.

Sei nun $0 \neq x = (x_1, \dots, x_{k-1}, 0)$, $y = (W^{(k)})^T x (\implies y \neq 0 \wedge x = W^{(k)}y)$, $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{k-1}) (\implies \tilde{x} \neq 0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^k \lambda_i^{(k)} y_i^2 \\
 &= \left(\text{diag}(\lambda_i^{(k)})_{i=1, \dots, k} y, y \right)_e \\
 &\stackrel{(5.11)}{=} \left((W^{(k)})^T A^{(k)} W^{(k)} y, y \right)_e \\
 &= \left(A^{(k)} W^{(k)} y, W^{(k)} y \right)_e \\
 &= \left(A^{(k)} x, x \right)_e \\
 &= \left(A^{(k-1)} \tilde{x}, \tilde{x} \right)_e \\
 &\stackrel{\text{I.V.}}{>} 0 \quad . \tag{5.12}
 \end{aligned}$$

Wir nehmen nun an, daß nicht alle $\lambda_i^{(k)}$ positiv sind. Dann müssen nach dem eben gezeigten (gerade Anzahl) mindestens zwei der $\lambda_i^{(k)}$ negativ sein. Seien dies etwa $\lambda_r^{(k)}$ und $\lambda_s^{(k)}$ mit $1 \leq r, s \leq k$, $r \neq s$. Setze dann

$$y_i = 0, \quad i \neq r, s, \quad y_r = \begin{cases} 1 & , \quad W_{k,s}^{(k)} \neq 0 \\ 0 & , \quad W_{k,s}^{(k)} = 0 \end{cases}, \quad y_s = \begin{cases} -\frac{W_{k,r}^{(k)}}{W_{k,s}^{(k)}} & , \quad W_{k,s}^{(k)} \neq 0 \\ 1 & , \quad W_{k,s}^{(k)} = 0 \end{cases} .$$

Dann ist $y \neq 0$ und die letzte Koordinate von $x := W^{(k)}y$ offenbar gleich 0 und $y = (W^{(k)})^T x$ erfüllt daher (beachte $y \neq 0 \implies \tilde{x} \neq 0$), wie in (5.12) gezeigt

$$\begin{aligned}
 & 0 \\
 &< \sum_{i=1}^k \lambda_i^{(k)} y_i^2 \\
 &= y_r^2 \lambda_r^{(k)} + y_s^2 \lambda_s^{(k)} \\
 &\stackrel{\text{Annahme}}{\leq} 0,
 \end{aligned}$$

was einen klaren Widerspruch darstellt. In Wirklichkeit müssen also schon alle $\lambda_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, k$ positiv sein und somit nach Folgerung 5.2.4 die Matrix $A^{(k)}$ positiv definit auf $[e_1, \dots, e_k]$. Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Hilfssatz 5.2.7 *Ist λ ein Eigenwert der Matrix A , so ist $-\lambda$ ein Eigenwert der Matrix $-A$.*

Beweis:

Sei λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $v \neq 0$. Dann folgt

$$(-A)v = -(Av) = -\lambda v,$$

womit alles bewiesen ist. □

5.2.3 Entkoppelung des Problems und erste Lösungsdarstellung

Offenbar gilt

$$B_a = ((C_a)^{-1}A_a) = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -\frac{a_1+a_2}{a_1} & \frac{a_2}{a_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{a_2+a_3}{a_2} & \frac{a_3}{a_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\frac{a_{N-2}+a_{N-1}}{a_{N-2}} & \frac{a_{N-1}}{a_{N-2}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\frac{a_{N-1}+a_N}{a_{N-1}} \end{pmatrix} .$$

Die Matrix B_a ist zwar nicht mehr symmetrisch, was aber wegen der besonderen Gestalt dieser Matrix kein Problem darstellt, denn es gilt

Lemma 5.2.8 (a) *Jede Tridiagonalmatrix*

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & d_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-2} & d_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & d_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

mit $b_i, c_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ ist ähnlich zu der symmetrischen Tridiagonalmatrix

$$A^{sym} = \begin{pmatrix} d_1 & \sqrt{b_1 c_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{b_1 c_1} & d_2 & \sqrt{b_2 c_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{b_{n-2} c_{n-2}} & d_{n-1} & \sqrt{b_{n-1} c_{n-1}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{b_{n-1} c_{n-1}} & d_n \end{pmatrix} ,$$

denn es gilt

$$A^{sym} = S^{-1}AS$$

mit

$$S = \text{diag}(s_i)_{i=1, \dots, n} \quad , \quad s_i = \sqrt{\prod_{k=1}^{i-1} \frac{c_k}{b_k}} \quad , \quad i = 1, \dots, n ,$$

wobei dem leeren Produkt der üblichen Konvention nach der Wert 1 zugewiesen wird.

(b) Die Matrix B_a ist ähnlich zu der symmetrischen Matrix

$$B_a^{sym} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -\frac{a_1+a_2}{a_1} & \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} & -\frac{a_2+a_3}{a_2} & \sqrt{\frac{a_3}{a_2}} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{\frac{a_{N-2}}{a_{N-3}}} & -\frac{a_{N-2}+a_{N-1}}{a_{N-2}} & \sqrt{\frac{a_{N-1}}{a_{N-2}}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{\frac{a_{N-1}}{a_{N-2}}} & -\frac{a_{N-1}+a_N}{a_{N-1}} \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$B_a^{sym} = S_a^{-1} B_a S_a$$

mit

$$S_a = \text{diag}((s_a)_i)_{i=1,\dots,n} \quad , \quad (s_a)_i = \sqrt{\prod_{k=1}^{i-1} \frac{a_k}{a_{k+1}}} = \sqrt{\frac{a_1}{a_i}} \quad , \quad i = 1, \dots, N-1 \quad . \quad (5.13)$$

(c) Die Matrix B_a besitzt nur reelle Eigenwerte $\tilde{\lambda}_{i,h}$, $i = 1, \dots, N-1$, die allesamt negativ sind, und es existiert eine Basis $(w_a)_i$, $i = 1, \dots, N-1$ von Eigenvektoren von B_a . Es gilt

$$(w_a)_i = S_a (w_a^{sym})_i \quad , \quad i = 1, \dots, N-1 \quad ,$$

wobei die Vektoren $(w_a^{sym})_i$, $i = 1, \dots, n$ eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von B_a^{sym} ebenfalls zu den Eigenwerten $\tilde{\lambda}_{i,h}$, $i = 1, \dots, N-1$ darstellen.

Beweis:

Zu (a):

Man rechnet nach, daß

$$\begin{aligned} & (S^{-1}AS)_{i,i} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{s_i} \cdot \delta_{i,k} \sum_{l=1}^n A_{k,l} s_l \cdot \delta_{l,i} \\ &= \sum_{k,l=1}^n \delta_{i,k} \delta_{l,i} \frac{1}{s_i} A_{k,l} s_l \\ &= A_{i,i} \\ &= d_i \quad , \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& (S^{-1}AS)_{i,i+1} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{s_i} \cdot \delta_{i,k} \sum_{l=1}^n A_{k,l} s_l \cdot \delta_{l,i+1} \\
&= \sum_{k,l=1}^n \delta_{i,k} \delta_{l,i+1} \frac{1}{s_i} A_{k,l} s_l \\
&= \frac{s_{i+1}}{s_i} A_{i,i+1} \\
&= \frac{\sqrt{\prod_{k=1}^i \frac{c_k}{b_k}}}{\sqrt{\prod_{k=1}^{i-1} \frac{c_k}{b_k}}} b_i \\
&= \sqrt{\frac{c_i}{b_i}} b_i \\
&= \sqrt{c_i b_i}, \quad i = 1, \dots, n-1
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
& (S^{-1}AS)_{i+1,i} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{s_{i+1}} \cdot \delta_{i+1,k} \sum_{l=1}^n A_{k,l} s_l \cdot \delta_{l,i} \\
&= \sum_{k,l=1}^n \delta_{i+1,k} \delta_{l,i} \frac{1}{s_{i+1}} A_{k,l} s_l \\
&= \frac{s_i}{s_{i+1}} A_{i+1,i} \\
&= \frac{\sqrt{\prod_{k=1}^{i-1} \frac{c_k}{b_k}}}{\sqrt{\prod_{k=1}^i \frac{c_k}{b_k}}} c_i \\
&= \sqrt{\frac{b_i}{c_i}} c_i \\
&= \sqrt{c_i b_i}, \quad i = 1, \dots, n-1
\end{aligned}$$

gilt. In allen übrigen Fällen ist

$$\begin{aligned}
 & (S^{-1}AS)_{i,j} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{s_i} \cdot \delta_{i,k} \sum_{l=1}^n A_{k,l} s_l \cdot \delta_{l,j} \\
 &= \sum_{k,l=1}^n \delta_{i,k} \delta_{l,j} \frac{1}{s_i} A_{k,l} s_j \\
 &= \frac{s_j}{s_i} \underbrace{A_{i,j}}_{=0} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

so daß alles gezeigt ist.

Zu (b):

Folgt direkt aus (a) durch Anwendung der dortigen Aussage auf die Matrix B_a .

Zu (c):

Da B_a^{sym} symmetrisch ist, hat B_a^{sym} nach Hilfssatz 5.2.2 nur reelle Eigenwerte $\tilde{\lambda}_{i,h}$, $i = 1, \dots, N-1$, und es existiert eine zugehörige Orthonormalbasis $(w_a^{\text{sym}})_i$, $i = 1, \dots, N-1$ von Eigenvektoren. Nun folgt aus dem Laplace'schen Entwicklungssatz für die Hauptminoren $H_k := H_k(-h^2 B_a^{\text{sym}})$ von $-h^2 B_a^{\text{sym}}$:

$$\begin{aligned}
 & H_k \\
 &= \begin{vmatrix} \frac{a_1+a_2}{a_1} & -\sqrt{\frac{a_2}{a_1}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{a_2}{a_1}} & \frac{a_2+a_3}{a_2} & -\sqrt{\frac{a_3}{a_2}} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -\sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}} & \frac{a_{k-1}+a_k}{a_{k-1}} & -\sqrt{\frac{a_k}{a_{k-1}}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\sqrt{\frac{a_k}{a_{k-1}}} & \frac{a_k+a_{k+1}}{a_k} \end{vmatrix} \\
 & \text{Entw. n. d. k-ten Z.} \quad \frac{a_k + a_{k+1}}{a_k} H_{k-1} \\
 & + \sqrt{\frac{a_k}{a_{k-1}}} \begin{vmatrix} \frac{a_1+a_2}{a_1} & -\sqrt{\frac{a_2}{a_1}} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{a_2}{a_1}} & \frac{a_2+a_3}{a_2} & -\sqrt{\frac{a_3}{a_2}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -\sqrt{\frac{a_{k-3}}{a_{k-4}}} & \frac{a_{k-3}+a_{k-2}}{a_{k-3}} & -\sqrt{\frac{a_{k-2}}{a_{k-3}}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\sqrt{\frac{a_{k-2}}{a_{k-3}}} & \frac{a_{k-2}+a_{k-1}}{a_{k-2}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}} & -\sqrt{\frac{a_k}{a_{k-1}}} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{Entw. n. d. } \underline{\underline{(k-1)\text{-ten Sp.}}} \quad \frac{a_k + a_{k+1}}{a_k} H_{k-1} - \frac{a_k}{a_{k-1}} H_{k-2} \quad , \quad k \geq 3 \quad .$$

Setzt man noch $H_0 := 1$, so ergibt sich die Rekursion

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 \\ H_1 &= 1 + \frac{a_2}{a_1} \\ H_k &= \left(1 + \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) H_{k-1} - \frac{a_k}{a_{k-1}} H_{k-2}, \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

Jetzt zeigt man induktiv

$$H_k = 1 + \sum_{i=1}^k \frac{a_{k+1}}{a_i}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad . \quad (5.14)$$

Für $k = 0, 1$ ist die Behauptung trivial. Gelte nun die Behauptung bis k . Dann hat man

$$\begin{aligned} & H_{k+1} \\ &= \left(1 + \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}\right) H_k - \frac{a_{k+1}}{a_k} H_{k-1} \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{=} \left(1 + \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}\right) \left(1 + \sum_{i=1}^k \frac{a_{k+1}}{a_i}\right) - \frac{a_{k+1}}{a_k} \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_k}{a_i}\right) \\ &= 1 + \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} + \sum_{i=1}^k \frac{a_{k+1}}{a_i} + \sum_{i=1}^k \frac{a_{k+2}}{a_i} - \frac{a_{k+1}}{a_k} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{k+1}}{a_i} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_{k+2}}{a_i} \end{aligned}$$

und somit die Behauptung (5.14) bewiesen. Dies bedeutet aber unter anderem, daß alle Hauptminoren H_k von $-h^2 B_a^{\text{sym}}$ größer als 1, also insbesondere positiv sind. Wegen $H_k(-B_a^{\text{sym}}) = \frac{1}{h^{2k}} H_k(-h^2 B_a^{\text{sym}})$ sind somit auch alle Hauptminoren von $-B_a^{\text{sym}}$ positiv, und folglich ist $-B_a^{\text{sym}}$ nach Hilfssatz 5.2.6 positiv definit, hat also nach Folgerung 5.2.4 nur positive Eigenwerte. Dann hat aber B_a^{sym} selbst nur negative Eigenwerte, denn wäre ein Eigenwert nichtnegativ, so wäre nach Hilfssatz 5.2.7 ein Eigenwert von $-B_a^{\text{sym}}$ nichtpositiv im Widerspruch zum gerade gezeigten.

Mit

$$B_a(S_a(w_a^{\text{sym}})_i) = S_a B_a^{\text{sym}} S_a^{-1} S_a(w_a^{\text{sym}})_i = S_a B_a^{\text{sym}}(w_a^{\text{sym}})_i = S_a \tilde{\lambda}_{i,h}(w_a^{\text{sym}})_i = \tilde{\lambda}_{i,h}(S_a(w_a^{\text{sym}})_i)$$

folgt, daß B_a dieselben reellen Eigenwerte $\tilde{\lambda}_{i,h}$, $i = 1, \dots, N-1$ wie B_a^{sym} besitzt, wobei die zugehörigen Eigenvektoren durch $(w_a)_i := S_a(w_a^{\text{sym}})_i$, $i = 1, \dots, N-1$ gegeben sind. Sie bilden eine Basis, da S_a als reguläre Matrix eine Basis immer auf eine Basis abbildet. \square

- Bemerkung 5.2.9** 1. Die Aussage von Lemma 5.2.8 (a) gilt auch für den Fall $b_i, c_i < 0$, das heißt, auch in diesem Fall ist A ähnlich zu einer symmetrischen Matrix. Der Beweis erfordert hierfür nur unwesentliche Modifikationen, denn sind die Nebendiagonalen von A mit negativen Elementen besetzt, so erfüllt $-A$ die Voraussetzungen des Lemmas, d.h. $(-A)^{\text{sym}} = S^{-1}(-A)S = -S^{-1}AS$ ist symmetrisch, also auch $S^{-1}AS$.
2. In der Literatur findet sich die entsprechende Aussage des Lemmas zum Beispiel in [MM69], wo auf die Originalarbeit von Arscott [Ars61] verwiesen wird. Dort wird auch noch die über unser Lemma hinausgehende Aussage, daß die Eigenwerte paarweise verschieden sind, gezeigt.
3. Das Beispiel der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $2, 2 \pm \sqrt{2}i$ zeigt, daß bei Verzicht auf die Vorzeichenbedingung für die Matrixelemente die Aussage über die Realität der Eigenwerte im allgemeinen nicht mehr gilt.

Das weitere Vorgehen besteht nun konsequenterweise darin, zunächst die Eigenwerte $\tilde{\lambda}_{i,h}$, $i = 1, \dots, N-1$ und eine zugehörige Orthonormalbasis $(w_a^{\text{sym}})_i$, $i = 1, \dots, N-1$ von Eigenvektoren von B_a^{sym} zu bestimmen. Dies muß numerisch geschehen, da die Eigenwerte einer allgemeinen, symmetrischen Tridiagonalmatrix nicht explizit bekannt sind. Man erhält so eine orthogonale Matrix W_a^{sym} mit den Spalten $(w_a^{\text{sym}})_i$, $i = 1, \dots, N-1$, so daß

$$(W_a^{\text{sym}})^{-1} B_a^{\text{sym}} W_a^{\text{sym}} = D_a := \text{diag}(\tilde{\lambda}_{i,h})_{i=1, \dots, N-1}$$

gilt. Daraus folgt mit Lemma 5.2.8 (b) und der Bezeichnung

$$W_a := \frac{1}{\sqrt{ha_1}} S_a W_a^{\text{sym}} \quad (5.15)$$

(den konstante Faktor fügen wir hinzu, damit die Spalten von W_a ein Orthonormalsystem bezüglich eines bestimmten Skalarprodukts werden, wie sich zu einem späteren Zeitpunkt der Untersuchungen herausstellen wird (siehe Folgerung 5.3.7)):

$$\begin{aligned} & (W_a^{\text{sym}})^{-1} S_a^{-1} B_a S_a W_a^{\text{sym}} = D_a \\ \implies & \sqrt{ha_1} (S_a W_a^{\text{sym}})^{-1} B_a \frac{1}{\sqrt{ha_1}} S_a W_a^{\text{sym}} = D_a \\ \implies & W_a^{-1} B_a W_a = D_a \quad . \end{aligned} \quad (5.16)$$

Weiter sind nach Lemma 5.2.8 (c) die Spalten von W_a eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von B_a .

Bemerkung 5.2.10 Ohne Einschränkung dürfen wir uns die Eigenwerte $\tilde{\lambda}_{i,h}$ als in der Sortierung $\tilde{\lambda}_{1,h} \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_{N-1,h}$ gegeben vorstellen. Ist dies nicht der Fall, so sortiert man entsprechend um und vertauscht in gleicher Weise die Spalten der Matrix W_a .

Man multipliziert nun die Gleichung $U'' + B_a U = 0$ aus (5.5) von links mit W_a^{-1} und sieht so deren Äquivalenz zu

$$\begin{aligned} & W_a^{-1}U'' + W_a^{-1}B_a U = 0 \\ \iff & (W_a^{-1}U)'' + W_a^{-1}B_a W_a W_a^{-1}U = 0 \\ \iff & (W_a^{-1}U)'' + D_a(W_a^{-1}U) = 0 \\ \iff & V'' + D_a V = 0 \\ \iff & v_i'' + \tilde{\lambda}_{i,h} v_i = 0, \quad i = 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

mit der Bezeichnung $V := W_a^{-1}U$. Damit hat man auch hier das Ziel einer Entkoppelung des vorliegenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung und somit eine Reduktion auf die Lösung von $N-1$ Anfangswertproblemen für eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung erreicht. Die weiter vereinfachte Problemstellung stellt sich damit zusammenfassend wie folgt dar:

Problem 5.2.11 Finde $N-1$ auf $[0, r_{max}]$ definierte Funktionen V_i , so daß

$$V'' + D_a V = 0 \tag{5.17}$$

gilt und die Randbedingungen

$$\begin{aligned} V(0) &:= (v_1(0), \dots, v_{N-1}(0)) = 0 \\ V'(0) &:= (v_1'(0), \dots, v_{N-1}'(0)) = W_a^{-1}\Phi_1 \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Wir wenden uns nun dem in 5.2.11 vorliegenden Randwertproblem zu und greifen im wesentlichen auf dieselbe Technik der expliziten Lösung zurück, die wir schon in Abschnitt 2.2.3 verwendet haben. Die allgemeine Lösung ergibt sich danach aus dem bekannten Fundamentalsystem der auftretenden Differentialgleichung zweiter Ordnung zu

$$v_i(y) = \xi_i \exp\left(\sqrt{-\tilde{\lambda}_{i,h}} y\right) + \eta_i \exp\left(-\sqrt{-\tilde{\lambda}_{i,h}} y\right) \quad .$$

Auch hier zieht man die Randbedingungen heran, um die variablen Koeffizienten ξ_i, η_i zu bestimmen. Offenbar gilt

$$v_i(0) = \xi_i + \eta_i \quad \text{und} \quad v_i'(0) = (\xi_i - \eta_i) \sqrt{-\tilde{\lambda}_{i,h}} \quad .$$

Die homogene Dirichlet-Randbedingung liefert demnach

$$\xi_i + \eta_i = 0, \quad i = 1, \dots, N-1 \tag{5.18}$$

und die Neumann-Bedingung ist äquivalent zu

$$(\xi_i - \eta_i)\sqrt{-\tilde{\lambda}_{i,h}} = (W_a^{-1}\Phi_1)_i, \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (5.19)$$

Die aus (5.18) unmittelbar folgende Beziehung $\eta_i = -\xi_i$, $i = 1, \dots, N-1$ setzt man in (5.19) ein und erhält so

$$\xi_i = \frac{(W_a^{-1}\Phi_1)_i}{2\sqrt{-\tilde{\lambda}_{i,h}}}, \quad \eta_i = -\frac{(W_a^{-1}\Phi_1)_i}{2\sqrt{-\tilde{\lambda}_{i,h}}}, \quad i = 1, \dots, N-1$$

als Lösung des Gleichungssystems.

Bemerkung 5.2.12 Der Ausdruck $(W_a^{-1}\Phi_1)_i$ ist nach bekannten Ergebnissen der linearen Algebra offenbar die i -te Koordinate des Vektors Φ_1 in der durch die Spalten von W_a gebildeten Eigenbasis.

Somit hat man folgende Lösungsdarstellung in Analogie zu (2.8) gewonnen:

$$\begin{aligned} u_i(y) &= (W_a V)_i(y) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} (W_a)_{i,k} v_k(y) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} (W_a)_{i,k} \left(\xi_k \exp\left(\sqrt{-\tilde{\lambda}_{k,h}} y\right) + \eta_k \exp\left(-\sqrt{-\tilde{\lambda}_{k,h}} y\right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} (W_a)_{i,k} \left(\xi_k \exp\left(\sqrt{-\tilde{\lambda}_{k,h}} y\right) - \xi_k \exp\left(-\sqrt{-\tilde{\lambda}_{k,h}} y\right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} (W_a)_{i,k} 2\xi_k \sinh\left(\sqrt{-\tilde{\lambda}_{k,h}} y\right) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} (W_a)_{i,k} \frac{(W_a^{-1}\Phi_1)_k}{\sqrt{-\tilde{\lambda}_{k,h}}} \sinh\left(\sqrt{-\tilde{\lambda}_{k,h}} y\right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

5.3 Detaillierte Untersuchung der diskreten Eigenwerte

5.3.1 Gitterfunktionen, Differenzenquotienten und Skalarprodukte

Bis zum jetzigen Zeitpunkt haben wir die Eigenwerte der Matrix B_a nur insoweit charakterisiert, daß sie alle reell und negativ sind. Es lassen sich jedoch noch weitergehende Aussagen

treffen, deren Herleitung wir nun in Angriff nehmen wollen. Wir benutzen neben den Bezeichnungen des letzten Abschnitts einige weitere Schreibweisen, die wir zu Beginn klären wollen. Durch die Diskretisierung des Intervalls $[0, 1]$ erhält man offenbar das äquidistante Gitter

$$G_h = [0, 1]_h := \{x_j = jh \mid j = 0, \dots, N\} \quad .$$

Dieses Gitter ist eine Teilmenge von

$$\mathbb{R}^h := \{x_j = jh \mid j \in \mathbb{Z}\} \quad .$$

Im folgenden werden wir Gitterfunktionen aus der Menge

$$\Gamma_h := \{v_h : \mathbb{R}^h \mapsto \mathbb{R} \mid v_h(x_j) \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } j \in \mathbb{Z}\}$$

betrachten. Die Menge

$$\mathcal{G}_h := \{v_h \in \Gamma_h \mid v_h(x_j) = 0 \text{ für } j \notin \{0, \dots, N\}\}$$

kann leicht identifiziert werden mit der Menge der Gitterfunktionen auf G_h . Zusätzlich benötigen wir noch die Bezeichnung

$$\mathcal{G}_{h,0} := \{v_h \in \mathcal{G}_h \mid v_h(x_0) = v_h(x_N) = 0\} \subset \mathcal{G}_h \subset \Gamma_h \quad .$$

Es ist \mathcal{G}_h isomorph zu \mathbb{R}^{N+1} . Ein entsprechender Vektorraumisomorphismus

$$\Psi : \mathcal{G}_h \mapsto \mathbb{R}^{N+1} \tag{5.21}$$

wird offensichtlich durch

$$\mathcal{G}_h \ni v_h \mapsto \Psi(v_h) = (v_h(x_0), \dots, v_h(x_N))^T \tag{5.22}$$

erklärt. In analoger Weise sieht man ein, daß der Raum $\mathcal{G}_{h,0}$ isomorph zu \mathbb{R}^{N-1} ist und ein entsprechender Isomorphismus durch

$$\Psi^0 : \mathcal{G}_{h,0} \ni v_h \mapsto \Psi^0(v_h) = (v_h(x_1), \dots, v_h(x_{N-1}))^T \in \mathbb{R}^{N-1} \tag{5.23}$$

gegeben ist.

Weiter führt man mit Hilfe vorwärts- beziehungsweise rückwärtsgenommener Differenzenquotienten Abbildungen

$$D_1 : \Gamma_h \mapsto \Gamma_h \quad , \quad D_{-1} : \Gamma_h \mapsto \Gamma_h$$

durch die Vorschriften

$$(D_1 v_h)(x_j) = \frac{v_h(x_{j+1}) - v_h(x_j)}{h} \quad , \quad (D_{-1} v_h)(x_j) = \frac{v_h(x_j) - v_h(x_{j-1})}{h} \quad , \quad j \in \mathbb{Z}$$

ein. Diese Abbildungen sind linear, was man exemplarisch für D_1 mit Hilfe der nachfolgenden Überlegung leicht nachrechnet

$$\begin{aligned}
& (D_1(\lambda v_h + \mu w_h))(x_j) \\
= & \frac{(\lambda v_h + \mu w_h)(x_{j+1}) - (\lambda v_h + \mu w_h)(x_j)}{h} \\
= & \lambda \frac{v_h(x_{j+1}) - v_h(x_j)}{h} + \mu \frac{w_h(x_{j+1}) - w_h(x_j)}{h} \\
= & \lambda(D_1 v_h)(x_j) + \mu(D_1 w_h)(x_j), \quad j \in \mathbb{Z} \quad .
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Auf den soeben erklärten diskreten Funktionenräumen läßt sich auf natürliche Weise ein diskretes Gegenstück zum L_2 -Skalarprodukt samt zugehöriger Norm erklären und mittels der obigen Differenzenquotienten ergeben sich entsprechende Gegenstücke auch für die $|\cdot|_{1,2}$ Halbnorm, die ja auf H_0^1 bekanntlich eine Norm ist.

Definition und Satz 5.3.1 *Durch die Zuordnungsvorschrift*

$$(v_h, w_h)_0 = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_h(x_j) w_h(x_j) \quad , \quad v_h, w_h \in \Gamma_h \tag{5.25}$$

wird ein Skalarprodukt auf Γ_h samt zugehöriger Norm, die wir mit $\|\cdot\|_0$ bezeichnen, definiert. Ein weiteres Skalarprodukt inklusive zugehöriger Norm $\|\cdot\|_1$ erhält man aus der Vorschrift

$$(v_h, w_h)_1 = (D_1 v_h, D_1 w_h)_0 \quad , \quad v_h, w_h \in \Gamma_h \quad . \tag{5.26}$$

Schließlich kann man auch über den rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten mittels

$$(v_h, w_h)_{-1} = (D_{-1} v_h, D_{-1} w_h)_0 \quad , \quad v_h, w_h \in \Gamma_h \tag{5.27}$$

ein Skalarprodukt mit zugehöriger Norm $\|\cdot\|_{-1}$ erklären und es gilt

$$(v_h, w_h)_{-1} = (v_h, w_h)_1 \tag{5.28}$$

und somit auch $\|v_h\|_{-1} = \|v_h\|_1$ für alle $v_h, w_h \in \Gamma_h$.

Beweis:

Wir zeigen für $(\cdot, \cdot)_0$ sukzessive die Eigenschaften eines Skalarprodukts. Zunächst ist $(\cdot, \cdot)_0$ wegen

$$(v_h, v_h)_0 = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_h^2(x_j) \geq 0$$

und

$$(v_h, v_h)_0 = 0 \iff h \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_h^2(x_j) = 0 \iff v_h(x_j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

positiv definit. Die Symmetrie liegt wegen

$$(v_h, w_h)_0 = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_h(x_j) w_h(x_j) = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} w_h(x_j) v_h(x_j) = (w_h, v_h)_0$$

auf der Hand und die Linearität ergibt sich genau so leicht mittels

$$\begin{aligned}
& (\lambda v_h + \mu w_h, z_h)_0 \\
= & \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\lambda v_h + \mu w_h)(x_j) z_h(x_j) \\
= & \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\lambda v_h(x_j) z_h(x_j) + \mu w_h(x_j) z_h(x_j)) \\
= & \lambda \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_h(x_j) z_h(x_j) + \mu \sum_{j \in \mathbb{Z}} w_h(x_j) z_h(x_j) \\
= & \lambda (v_h, z_h)_0 + \mu (w_h, z_h)_0 \quad .
\end{aligned}$$

Konvergenzprobleme entstehen hierbei nicht, da alle Summen endlich sind. Die zugehörige Norm $\|\cdot\|_0$ ist nun wie üblich durch

$$\|v_h\|_0 := \sqrt{(v_h, v_h)_0}$$

erklärt.

Die positive Semidefinitheit von (5.26) ergibt sich aus

$$(v_h, v_h)_1 = (D_1 v_h, D_1 v_h)_0 \stackrel{\text{Defin. v. } (\cdot, \cdot)_0}{\geq} 0$$

und die Definitheit hat man wegen

$$\begin{aligned}
& (v_h, v_h)_1 = 0 \\
\iff & (D_1 v_h, D_1 v_h)_0 = 0 \\
\stackrel{\text{Defin. v. } (\cdot, \cdot)_0}{\iff} & (D_1 v_h)(x_j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z} \\
\iff & \frac{v_h(x_{j+1}) - v_h(x_j)}{h} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z} \\
\iff & v_h(x_{j+1}) = v_h(x_j) \quad \forall j \in \mathbb{Z} \\
\stackrel{v_h \in \Gamma_h}{\iff} & v_h(x_j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z} \\
\iff & v_h \equiv 0 \quad .
\end{aligned}$$

Die Symmetrie von (5.26) folgt aus

$$(v_h, w_h)_1 = (D_1 v_h, D_1 w_h)_0 \stackrel{\text{Symmetrie v. } (\cdot, \cdot)_0}{=} (D_1 w_h, D_1 v_h)_0 = (w_h, v_h)_1$$

und die Linearität ist wegen

$$\begin{aligned}
& (\lambda v_h + \mu w_h, z_h)_1 \\
= & (D_1(\lambda v_h + \mu w_h), D_1 z_h)_0 \\
\stackrel{(5.24)}{=} & (\lambda D_1 v_h + \mu D_1 w_h, D_1 z_h)_0 \\
\stackrel{\text{Linearität v. } (\cdot, \cdot)_0}{=} & \lambda (D_1 v_h, D_1 z_h)_0 + \mu (D_1 w_h, D_1 z_h)_0 \\
= & \lambda (v_h, z_h)_1 + \mu (w_h, z_h)_1
\end{aligned}$$

offensichtlich.

Ganz analog zeigt man die Behauptungen über $(\cdot, \cdot)_{-1}$.

Gleichung (5.28) sieht man sofort ein, wenn man sich klarmacht, daß $(D_{-1}v_h)(x_j) = (D_1v_h)(x_{j-1})$, $j \in \mathbb{Z}$ gilt. □

In den folgenden Überlegungen bringt man nun den Koeffizienten a ins Spiel, indem weitere, mit a gewichtete Skalarprodukte definiert werden.

Definition und Satz 5.3.2 *Das mit a gewichtete verallgemeinerte euklidische Skalarprodukt auf \mathbb{R}^{N-1} ist definiert durch*

$$(x, y)_{e,a} = \sum_{i=1}^{N-1} a_i x_i y_i \quad (5.29)$$

und es gilt

$$(x, y)_{e,a} = (C_a x, y)_e = (x, C_a y)_e; \quad (5.30)$$

die zugehörige Norm ergibt sich zu

$$\|x\|_{e,a} = \sqrt{(x, x)_{e,a}} = \left(\sum_{i=1}^{N-1} a_i x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis:

Gleichung (5.30) erhält man durch einfachstes Nachrechnen. Da aber die Matrix C_a als Diagonalmatrix mit positiven Elementen positiv definit ist, wird somit durch (5.29) in der Tat ein Skalarprodukt definiert (siehe auch [SH82], S. 106). □

Damit kann nun auch für Gitterfunktionen der Koeffizient a berücksichtigt werden und Definition und Satz 5.3.1 verallgemeinert werden:

Definition und Satz 5.3.3 *Setzt man rein formal durch die Definition*

$$a_h(x_j) := \begin{cases} a(x_j) = a_j & , \quad 0 \leq j \leq N \\ r_a & , \quad j \in \mathbb{Z}, j < 0 \vee j > N \end{cases}$$

die Werte von a auf G_h zu einer Gitterfunktion a_h auf \mathbb{R}^h fort, so wird durch die Zuordnungsvorschrift

$$(v_h, w_h)_{0,a} = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_h(x_j) v_h(x_j) w_h(x_j) \quad (5.31)$$

ein Skalarprodukt auf Γ_h samt zugehöriger Norm, die wir mit $\|\cdot\|_{0,a}$ bezeichnen, definiert. Für $v_h, w_h \in \mathcal{G}_{h,0}$ gilt

$$(v_h, w_h)_{0,a} = h \sum_{j=1}^{N-1} a_h(x_j) v_h(x_j) w_h(x_j)$$

und

$$(v_h, w_h)_{0,a} = (a_h v_h, w_h)_0 = (v_h, a_h w_h)_0 = h(\Psi^0(a_h v_h), \Psi^0(w_h))_e = h(\Psi^0(v_h), \Psi^0(w_h))_{e,a} . \quad (5.32)$$

Ein weiteres Skalarprodukt auf Γ_h und die zugehörige Norm $\|\cdot\|_{1,a}$ gewinnt man mit Hilfe des vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten aus der Vorschrift

$$(v_h, w_h)_{1,a} = (D_1 v_h, D_1 w_h)_{0,a} . \quad (5.33)$$

Schließlich kann man auch über den rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten mittels

$$(v_h, w_h)_{-1,a} = (D_{-1} v_h, D_{-1} w_h)_{0,a} \quad (5.34)$$

ein Skalarprodukt auf Γ_h mit zugehöriger Norm $\|\cdot\|_{-1,a}$ erklären.

Beweis:

Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 5.3.1. und Gleichung (5.32) erhält man durch schlichtes Einsetzen der Definitionen und Nachrechnen. \square

Interessant ist nun an der weiter oben definierte Matrix W_a , daß $\sqrt{h}W_a$ a -orthogonal ist. Diesen Begriff definieren wir wie folgt:

Definition 5.3.4 Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{N-1, N-1}$ heißt a -orthogonal, wenn ihre Spalten ein Orthonormalsystem bezüglich $(\cdot, \cdot)_{e,a}$ bilden.

Satz 5.3.5 Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{N-1, N-1}$ ist genau dann a -orthogonal, wenn

$$A^T C_a A = E, \quad \text{das heißt } A^{-1} = A^T C_a \quad (5.35)$$

gilt. Äquivalent dazu ist

$$C_a A A^T = E . \quad (5.36)$$

Beweis:

Seien A_1, \dots, A_{N-1} die Spalten von A . Dann gilt

$$\begin{aligned} & A^T C_a A = E \\ \iff & (A^T C_a A)_{i,j} = \delta_{i,j} \quad , \quad i, j = 1, \dots, N-1 \\ \iff & \sum_{\nu=1}^{N-1} (A^T)_{i,\nu} (C_a A)_{\nu,j} = \delta_{i,j} \quad , \quad i, j = 1, \dots, N-1 \\ \iff & \sum_{\nu=1}^{N-1} (A^T)_{i,\nu} a_\nu A_{\nu,j} = \delta_{i,j} \quad , \quad i, j = 1, \dots, N-1 \\ \iff & \sum_{\nu=1}^{N-1} a_\nu (A_i)_\nu (A_j)_\nu = \delta_{i,j} \quad , \quad i, j = 1, \dots, N-1 \\ \iff & (A_i, A_j)_{e,a} = \delta_{i,j} \quad , \quad i, j = 1, \dots, N-1 . \end{aligned}$$

Darüberhinaus hat man

$$\begin{aligned} A^T C_a A &= E \\ \implies C_a A A^T &= C_a A \underbrace{A^T C_a A}_{=E} (C_a A)^{-1} = C_a A A^{-1} C_a^{-1} = E \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} C_a A A^T &= E \\ \implies A^T C_a A &= A^T \underbrace{C_a A A^T}_{=E} (A^T)^{-1} = E, \end{aligned}$$

womit der Beweis abgeschlossen ist. □

Es besteht ein interessanter Zusammenhang zwischen dem Begriff der a -Orthogonalität und dem $(\cdot, \cdot)_{0,a}$ -Skalarprodukt:

Satz 5.3.6 *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{N-1, N-1}$ mit Spalten A_1, \dots, A_{N-1} ist genau dann a -orthogonal, wenn die Gitterfunktionen $(\Psi^0)^{-1} \left((\sqrt{h})^{-1} A_1 \right), \dots, (\Psi^0)^{-1} \left((\sqrt{h})^{-1} A_{N-1} \right)$ eine Orthonormalbasis in $\mathcal{G}_{h,0}$ bezüglich $(\cdot, \cdot)_{0,a}$ bilden.*

Beweis:

Aus (5.32) folgt

$$\left((\Psi^0)^{-1} \left((\sqrt{h})^{-1} A_i \right), (\Psi^0)^{-1} \left((\sqrt{h})^{-1} A_j \right) \right)_{0,a} = (A_i, A_j)_{e,a}$$

und damit die Behauptung, da ein Orthonormalsystem der Länge $N - 1$ in einem $(N - 1)$ -dimensionalen Raum immer eine Basis ist. □

Folgerung 5.3.7 *Gegeben sei die in (5.15) definierte Matrix W_a mit Spalten $(W_a)_1, \dots, (W_a)_{N-1}$. Weiter sei $v_{k,h} := (\Psi^0)^{-1}((W_a)_k) \in \mathcal{G}_{h,0}$, $k = 1, \dots, N - 1$. Dann bilden die Gitterfunktionen $v_{k,h}$, $k = 1, \dots, N - 1$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{G}_{h,0}$ bezüglich $(\cdot, \cdot)_{0,a}$. Weiter gilt*

$$W_a^{-1} = h W_a^T C_a \quad . \quad (5.37)$$

Beweis:

Wegen

$$\begin{aligned} C_a \left(\sqrt{h} W_a \right) \left(\sqrt{h} W_a \right)^T &= \frac{1}{a_1} C_a S_a W_a^{\text{sym}} (S_a W_a^{\text{sym}})^T \\ &= \frac{1}{a_1} C_a S_a \underbrace{W_a^{\text{sym}} (W_a^{\text{sym}})^T}_{=E} S_a^T = \frac{1}{a_1} \underbrace{C_a S_a S_a^T}_{\stackrel{(5.13)}{=} \text{diag}(a_1)}} = E \end{aligned}$$

ist $\sqrt{h}W_a$ nach Satz 5.3.5 a -orthogonal, was nach Satz 5.3.6 bedeutet, daß die Gitterfunktionen

$$(\Psi^0)^{-1} \left((\sqrt{h})^{-1} \sqrt{h}(W_a)_k \right) = (\Psi^0)^{-1}((W_a)_k) = v_{k,h}, \quad k = 1, \dots, N-1$$

eine Orthonormalbasis in $\mathcal{G}_{h,0}$ bilden. Außerdem folgt aus der a -Orthogonalität von $\sqrt{h}W_a$ ebenfalls nach Satz 5.3.5, daß man

$$\begin{aligned} (\sqrt{h}W_a)^{-1} &= (\sqrt{h}W_a)^T C_a \\ \implies (\sqrt{h})^{-1} W_a^{-1} &= \sqrt{h}W_a^T C_a \\ \implies W_a^{-1} &= hW_a^T C_a \end{aligned}$$

schlußfolgern kann und so den Beweis beendet. □

5.3.2 Der Differenzenoperator L_h

Die Approximation für

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

die wir bei der Herleitung der Linienmethode gewonnen haben, nämlich

$$\frac{1}{h^2} (a_{i+1}u_{i+1} - (a_i + a_{i+1})u_i + a_i u_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq N-1$$

kann man nun, wenn man y als einen Parameter betrachtet, den man zunächst einmal festhält, zur Definition eines Differenzenoperators

$$L_h : \mathcal{G}_{h,0} \mapsto \mathcal{G}_{h,0}$$

benutzen, indem man für $i = 1, \dots, N-1$ schlicht

$$(L_h v_h)(x_i) = \frac{1}{h^2} (a_h(x_{i+1})v_h(x_{i+1}) - (a_h(x_i) + a_h(x_{i+1}))v_h(x_i) + a_h(x_i)v_h(x_{i-1}))$$

und in allen übrigen Fällen (also $i \leq 0$ oder $i \geq N$)

$$(L_h v_h)(x_i) = 0$$

setzt.

Der nun folgende Hilfssatz stellt noch gewisse technische Hilfsmittel beim Umgang mit den gerade definierten Skalarprodukten und diesem Differenzenoperator zur Verfügung.

Hilfssatz 5.3.8 *Seien $v_h, w_h \in \mathcal{G}_{h,0}$.*

Dann gilt:

$$(a) \quad (D_1 v_h, w_h)_0 = -(v_h, D_{-1} w_h)_0 \quad (5.38)$$

(b) Der Operator L_h ist linear und erfüllt für $j = 1, \dots, N-1$

$$L_h v_h(x_j) = D_1(a_h \cdot D_{-1} v_h)(x_j) \quad . \quad (5.39)$$

$$(c) \quad (L_h v_h, w_h)_0 = (v_h, L_h w_h)_0 = -(v_h, w_h)_{-1,a} \quad (5.40)$$

und

$$(L_h v_h, v_h)_0 = -\|v_h\|_{-1,a}^2 \quad . \quad (5.41)$$

(d) Mit $V = \Psi^0(v_h)$ besteht der Zusammenhang

$$\Psi^0(L_h v_h) = A_a V \quad \text{und} \quad L_h((\Psi^0)^{-1} V) = (\Psi^0)^{-1}(A_a V) \quad (5.42)$$

und zusätzlich ist noch

$$(\Psi^0)^{-1}(C_a V) = a_h \cdot (\Psi^0)^{-1}(V) = a_h \cdot v_h \quad . \quad (5.43)$$

(e) Für jede Funktion $v \in V_0$ konvergiert der Abschneidefehler $T_h(x_l) := (Lv - L_h v^h)(x_l)$, $l = 1, \dots, N-1$ gleichmäßig gegen 0, wenn h gegen 0 geht. Hierbei ist die Bedeutung der verwendeten Bezeichnungen durch $Lv := (av)'$ und $v^h := v|_{\mathbb{R}^h} \in \mathcal{G}_{h,0}$ erklärt (v stellt man sich dabei trivial auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt vor).

Beweis:

Zu (a):

Man beginnt mit der linken Seite der Behauptung und formt diese mittels

$$\begin{aligned} & (D_1 v_h, w_h)_0 \\ = & h \sum_{j \in \mathbb{Z}} (D_1 v_h)(x_j) w_h(x_j) \\ \stackrel{w_h \in \mathcal{G}_{h,0}}{=} & h \sum_{j=1}^{N-1} \frac{v_h(x_{j+1}) - v_h(x_j)}{h} w_h(x_j) \\ = & \sum_{j=1}^{N-1} v_h(x_{j+1}) w_h(x_j) - \sum_{j=1}^{N-1} v_h(x_j) w_h(x_j) \\ = & \sum_{j=2}^N v_h(x_j) w_h(x_{j-1}) + \underbrace{\left(v(x_1) \underbrace{w_h(x_0)}_{=0} - v_h(x_N) \underbrace{w_h(x_{N-1})}_{=0} \right)}_{=0} - \sum_{j=1}^{N-1} v_h(x_j) w_h(x_j) \\ = & - \sum_{j=1}^{N-1} v_h(x_j) w_h(x_j) + \sum_{j=1}^{N-1} v_h(x_j) w_h(x_{j-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -h \sum_{j=1}^{N-1} v_h(x_j) \frac{w_h(x_j) - w_h(x_{j-1})}{h} \\
&\stackrel{v_h \in \mathcal{G}_{h,0}}{=} -h \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_h(x_j) (D_{-1}w_h)(x_j) \\
&= -(v_h, D_{-1}w_h)_0
\end{aligned}$$

in die rechte Seite um.

Zu (b):

Zum Nachweis der Linearität von L_h zeigt man für $j = 1, \dots, N-1$ (für die übrigen $j \in \mathbb{Z}$ ist die Sachlage trivial):

$$\begin{aligned}
&(L_h(\alpha v_h + \beta w_h))(x_j) \\
&= \frac{1}{h^2} (a_h(x_{j+1})(\alpha v_h + \beta w_h)(x_{j+1}) \\
&\quad - (a_h(x_j) + a_h(x_{j+1}))(\alpha v_h + \beta w_h)(x_j) + a_h(x_j)(\alpha v_h + \beta w_h)(x_{j-1})) \\
&= \alpha \frac{1}{h^2} (a_h(x_{j+1})v_h(x_{j+1}) - (a_h(x_j) + a_h(x_{j+1}))v_h(x_j) + a_h(x_j)v_h(x_{j-1})) \\
&\quad + \beta \frac{1}{h^2} (a_h(x_{j+1})w_h(x_{j+1}) - (a_h(x_j) + a_h(x_{j+1}))w_h(x_j) + a_h(x_j)w_h(x_{j-1})) \\
&= (\alpha L_h v_h + \beta L_h w_h)(x_j) \quad , \quad j = 1, \dots, N-1
\end{aligned}$$

Um den zweiten Teil von (b) zu zeigen, überprüfen wir die behauptete Gleichheit der zwei Gitterfunktionen wie üblich punktweise und beginnen mit der rechten Seite:

$$\begin{aligned}
&(D_1(a_h D_{-1}v_h))(x_j) \\
&= \frac{(a_h D_{-1}v_h)(x_{j+1}) - (a_h D_{-1}v_h)(x_j)}{h} \\
&= \frac{a_h(x_{j+1}) \frac{v_h(x_{j+1}) - v_h(x_j)}{h} - a_h(x_j) \frac{v_h(x_j) - v_h(x_{j-1})}{h}}{h} \\
&= \frac{1}{h^2} (a_h(x_{j+1})v_h(x_{j+1}) - (a_h(x_j) + a_h(x_{j+1}))v_h(x_j) + a_h(x_j)v_h(x_{j-1})) \\
&= (L_h v_h)(x_j) \quad , \quad j = 1, \dots, N-1
\end{aligned}$$

Zu (c):

Man benutzt das bisher in (a) und (b) Gezeigte und erhält so

$$\begin{aligned}
&(L_h v_h, w_h)_0 \\
&\stackrel{(b), w_h \in \mathcal{G}_{h,0}}{=} (D_1 a_h D_{-1} v_h, w_h)_0 \\
&\stackrel{(a)}{=} -(a_h D_{-1} v_h, D_{-1} w_h)_0 \\
&\stackrel{(5.32)}{=} -(D_{-1} v_h, D_{-1} w_h)_{0,a} \\
&\stackrel{(5.34)}{=} -(v_h, w_h)_{-1,a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{(\cdot, \cdot)_{-1,a} \text{ symm.}}{=} && -(w_h, v_h)_{-1,a} \\
 (5.34) & \stackrel{=} && -(D_{-1}w_h, D_{-1}v_h)_{0,a} \\
 (5.32) & \stackrel{=} && -(a_h D_{-1}w_h, D_{-1}v_h)_0 \\
 (a) & \stackrel{=} && (D_1 a_h D_{-1}w_h, v_h)_0 \\
 (b), w_h \in \mathcal{G}_{h,0} & \stackrel{=} && (L_h w_h, v_h)_0 \\
 (\cdot, \cdot)_0 \text{ symm.} & \stackrel{=} && (v_h, L_h w_h)_0 \quad .
 \end{aligned}$$

Es folgt unmittelbar

$$(L_h v_h, v_h)_0 = -(v_h, v_h)_{-1,a} = -\|v_h\|_{-1,a}^2,$$

womit (c) bewiesen ist.

Zu (d):

Der erste Teil von Gleichung (5.42) folgt unmittelbar aus der Definition von L_h beziehungsweise A_a , und der zweite Teil ergibt sich aus dem ersten durch beidseitige Anwendung von $(\Psi^0)^{-1}$. Gleichung (5.43) sieht man mittels

$$((\Psi^0)^{-1}(C_a V))(x_j) = (C_a V)_j = a_j V_j = a_h(x_j)((\Psi^0)^{-1}(\underbrace{V}_{=\Psi^0(v_h)}))(x_j) = a_h(x_j)v_h(x_j)$$

ein ($j = 1, \dots, N - 1$, für die übrigen $j \in \mathbb{Z}$ ist alles trivial).

Zu (e):

Sei $v \in V_0$ beliebig. Dann ist v'' als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall gleichmäßig stetig. Es gilt also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \forall x, y \in [0, 1] : |x - y| < \delta_1 \implies |v''(x) - v''(y)| < \varepsilon$$

Außerdem ist v'' beschränkt, also $|v''(x)| \leq R_{v''} \forall x \in [0, 1]$. Die Taylorformel liefert

$$\begin{aligned}
 v(x_{l-1}) &= v(x_l) - hv'(x_l) + \frac{h^2}{2}v''(\xi_1), \quad x_{l-1} < \xi_1 < x_l \\
 v(x_l) &= v(x_{l+1}) - hv'(x_{l+1}) + \frac{h^2}{2}v''(\xi_2), \quad x_l < \xi_2 < x_{l+1} \quad .
 \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
 a(x_l)\frac{v(x_l) - v(x_{l-1})}{h} - (av')(x_l) &= -a(x_l)\frac{h}{2}v''(\xi_1) \\
 a(x_{l+1})\frac{v(x_{l+1}) - v(x_l)}{h} - (av')(x_{l+1}) &= -a(x_{l+1})\frac{h}{2}v''(\xi_2)
 \end{aligned}$$

und durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten und anschließende Division durch h erhält man

$$\begin{aligned}
 & \frac{(av')(x_{l+1}) - (av')(x_l) - a(x_{l+1})\frac{v(x_{l+1}) - v(x_l)}{h} + a(x_l)\frac{v(x_l) - v(x_{l-1})}{h}}{h} \\
 &= \frac{1}{2}(a(x_{l+1})v''(\xi_2) - a(x_l)v''(\xi_1)) \quad .
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

Weiter ist auch $Lv = (av)'$ als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall gleichmäßig stetig. Es gilt also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \forall x, y \in [0, 1] : |x - y| < \delta_2 \implies |Lv(x) - Lv(y)| < \varepsilon \quad (5.45)$$

Man hat außerdem nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{(av')(x_{l+1}) - (av')(x_l)}{h} = (av')'(\xi_3) = Lv(\xi_3) \quad , \quad x_l < \xi_3 < x_{l+1} \quad . \quad (5.46)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und

$$h \leq h_0 := \min \left(\delta_1 \left(\frac{\varepsilon}{2R_a} \right), \delta_2 \left(\frac{\varepsilon}{4} \right), \frac{\varepsilon}{2R'_a R_{v''}} \right) ,$$

wobei R'_a die Schranke für die Ableitung von $a \in C^1[0, 1]$ nach (5.4) bezeichnet. Dann gilt

$$\begin{aligned} & |(Lv - L_h v^h)(x_l)| \\ = & \left| Lv(x_l) - \frac{a(x_{l+1}) \frac{v(x_{l+1}) - v(x_l)}{h} - a(x_l) \frac{v(x_l) - v(x_{l-1})}{h}}{h} \right| \\ \leq & \left| (av')'(x_l) - \frac{av'(x_{l+1}) - av'(x_l)}{h} \right| \\ & + \left| \frac{av'(x_{l+1}) - av'(x_l)}{h} - \frac{a(x_{l+1}) \frac{v(x_{l+1}) - v(x_l)}{h} - a(x_l) \frac{v(x_l) - v(x_{l-1})}{h}}{h} \right| \\ \stackrel{(5.44), (5.46)}{=} & |Lv(x_l) - Lv(\xi_3)| + \frac{1}{2} |a(x_{l+1})v''(\xi_2) - a(x_l)v''(\xi_1)| \\ \stackrel{(5.45)}{<} & \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{2} \left(a(x_{l+1})|v''(\xi_2) - v''(x_l)| \right. \\ & \left. + \underbrace{|a(x_{l+1}) - a(x_l)|}_{\stackrel{\text{MWS}}{=} ha'(\xi_4)}}{|v''(x_l)|} + a(x_l)|v''(x_l) - v''(\xi_1)| \right) \\ < & \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{2} \left(R_a \frac{\varepsilon}{2R_a} + hR'_a R_{v''} + R_a \frac{\varepsilon}{2R_a} \right) \\ \leq & \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{2} \frac{3}{2} \varepsilon \\ = & \varepsilon , \end{aligned}$$

woraus die behauptete Konvergenz des Abschneidefehlers gegen 0 folgt. Da h_0 nicht von der Stelle x_l abhängt, ist die Konvergenz gleichmäßig. \square

Bemerkung 5.3.9 *Wegen der fehlenden höheren Differenzierbarkeitseigenschaften der Funktionen in V_0 ist es in Teil (e) des vorangegangenen Satzes nicht möglich, für den Abschneidefehler eine bestimmte Konvergenzordnung in h zu erreichen. Sollten höhere Ableitungen vorhanden sein, so beweist man leicht durch fortgesetzte Taylorentwicklung entsprechende Aussagen.*

5.3.3 Diskretes Sturm-Liouvillesches EWP und diskreter Fredholmoperator

Zu dem Operator L_h kann man das zugehörige diskrete Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem folgendermaßen beschreiben:

Problem 5.3.10 *Gesucht ist zu einem Skalar λ_h eine Funktion $0 \neq v_h \in \mathcal{G}_{h,0}$ mit*

$$L_h v_h + \lambda_h a_h v_h = 0 \quad . \quad (5.47)$$

Ist diese Gleichung erfüllt, so heißt λ_h Eigenwert und v_h Eigenfunktion oder Eigenlösung von (5.47).

Die Eigenwerte und Eigenfunktionen hängen unmittelbar mit den Eigenwerten der Matrix B_a und den zugehörigen Eigenvektoren zusammen:

Satz 5.3.11 *Die in Folgerung 5.3.7 gewonnene $(\cdot, \cdot)_{0,a}$ -Orthonormalbasis $v_{1,h}, \dots, v_{N-1,h}$ von $\mathcal{G}_{h,0}$ besteht aus Eigenfunktionen jeweils zu den Eigenwerten $\lambda_{k,h} := -\tilde{\lambda}_{k,h}$, $k = 1, \dots, N - 1$, das heißt, es besteht die Gleichung*

$$L_h v_{k,h} - \tilde{\lambda}_{k,h} a_h v_{k,h} = L_h v_{k,h} + \lambda_{k,h} a_h v_{k,h} = 0, \quad k = 1, \dots, N - 1 \quad . \quad (5.48)$$

Darüberhinaus gilt

$$\|v_{k,h}\|_{-1,a}^2 = \lambda_{k,h} \quad . \quad (5.49)$$

Beweis:

Mittels Hilfssatz 5.3.8 (d) folgt

$$\begin{aligned} & L_h v_{k,h} \\ &= L_h ((\Psi^0)^{-1}((W_a)_k)) \\ &\stackrel{(5.42)}{=} (\Psi^0)^{-1}(A_a(W_a)_k) \\ &= (\Psi^0)^{-1}(C_a B_a(W_a)_k) \\ &= (\Psi^0)^{-1}(C_a \tilde{\lambda}_{k,h}(W_a)_k) \\ &= \tilde{\lambda}_{k,h} (\Psi^0)^{-1}(C_a(W_a)_k) \\ &\stackrel{(5.43)}{=} \tilde{\lambda}_{k,h} a_h v_{k,h} \end{aligned}$$

und damit Behauptung (5.48). Gleichung (5.49) ergibt sich leicht aus

$$\|v_{k,h}\|_{-1,a}^2 \stackrel{(5.41)}{=} (-L_h v_{k,h}, v_{k,h})_0 = \lambda_{k,h} (a_h v_{k,h}, v_{k,h})_0 \stackrel{(5.32)}{=} \lambda_{k,h} \underbrace{(v_{k,h}, v_{k,h})_{0,a}}_{=1} = \lambda_{k,h} \quad .$$

□

Bemerkung 5.3.12 *Anknüpfend an Bemerkung 5.2.10 werden wir im folgenden immer von der Sortierung*

$$\lambda_{1,h} \leq \dots \leq \lambda_{N-1,h} \quad (5.50)$$

ausgehen.

Diskrete Sturmsche Randwertaufgabe und diskrete Greensche Funktion

In Analogie zur Theorie im Kontinuierlichen (siehe Abschnitt 6.2.1) kann man auch für Gitterfunktionen eine diskrete halbhomogene Sturmsche Randwertaufgabe für den Differenzenoperator L_h betrachten und mit Hilfe der diskreten Greenschen Funktion eine Lösung angeben.

Problem 5.3.13 (Diskrete Sturmsche Randwertaufgabe) *Gesucht ist zu gegebenem $w_h \in \mathcal{G}_{h,0}$ eine Funktion $v_h \in \mathcal{G}_{h,0}$ mit*

$$L_h v_h = w_h \quad .$$

Bemerkung 5.3.14 *Die homogenen Randbedingungen hat man in Problem 5.3.13 durch die Wahl des Raums, in dem man die Lösungen sucht, immer erfüllt.*

Satz 5.3.15 (Diskrete Greensche Funktion) *Definiert man mit der Bezeichnung $a_j := a_h(x_j)$, $j = 0, \dots, N$ auf $G_h \times G_h \setminus \{0, 1\}$ die Funktion*

$$F_h : G_h \times G_h \setminus \{0, 1\} \ni (x_j, t_l) = (jh, lh) \mapsto F_h(x_j, t_l) \quad , \quad j = 0, \dots, N, \quad l = 1, \dots, N-1$$

durch

$$F_h(x_j, t_l) := \frac{\left(-h \sum_{r=1}^{\min(j,l)} \frac{1}{a_r} \right) \cdot \left(h \sum_{r=\max(j,l)+1}^N \frac{1}{a_r} \right)}{h \sum_{r=1}^N \frac{1}{a_r}} = \begin{cases} \frac{\left(-h \sum_{r=1}^j \frac{1}{a_r} \right) \cdot \left(h \sum_{r=l+1}^N \frac{1}{a_r} \right)}{h \sum_{r=1}^N \frac{1}{a_r}} & , \quad j \leq l \\ \frac{\left(-h \sum_{r=1}^l \frac{1}{a_r} \right) \cdot \left(h \sum_{r=j+1}^N \frac{1}{a_r} \right)}{h \sum_{r=1}^N \frac{1}{a_r}} & , \quad l \leq j \end{cases} ,$$

wobei wir der bekannten Konvention nach die leere Summe identisch 0 setzen, so ist F_h die diskrete Greensche Funktion zu Problem 5.3.13, das heißt die Lösung von 5.3.13 kann man für jede rechte Seite $w_h \in \mathcal{G}_{h,0}$ in der Form

$$v_h(x_j) = \begin{cases} h \sum_{l=1}^{N-1} F_h(x_j, t_l) w_h(t_l) & , \quad j = 0, \dots, N \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (5.51)$$

erhalten.

Beweis:

Wir verifizieren die behaupteten Eigenschaften der in (5.51) definierten Funktion v_h . Zunächst stellt man fest, daß v_h wegen

$$F_h(x_0, t_l) = \frac{\overbrace{\left(-h \sum_{r=1}^0 \frac{1}{a_r} \right)}^{=0} \cdot \left(h \sum_{r=l+1}^N \frac{1}{a_r} \right)}{h \sum_{r=1}^N \frac{1}{a_r}} = 0 \quad , \quad l = 1, \dots, N-1$$

und

$$F_h(x_N, t_l) = \frac{\left(-h \sum_{r=1}^l \frac{1}{a_r}\right) \cdot \overbrace{\left(h \sum_{r=N+1}^N \frac{1}{a_r}\right)}{=0}}{h \sum_{r=1}^N \frac{1}{a_r}} = 0 \quad , \quad l = 1, \dots, N-1$$

die Randbedingungen

$$v_h(0) = v_h(x_0) = h \sum_{l=1}^{N-1} \underbrace{F_h(x_0, t_l)}_{=0} w_h(t_l) = 0$$

und

$$v_h(1) = v_h(x_N) = h \sum_{l=1}^{N-1} \underbrace{F_h(x_N, t_l)}_{=0} w_h(t_l) = 0$$

erfüllt, mit anderen Worten also $v_h \in \mathcal{G}_{h,0}$ ist, da die Funktion außerhalb von G_h sowieso definitionsgemäß verschwindet.

Sei nun $j \in \{1, \dots, N-1\}$ beliebig (auf dem übrigen Gitter ist wegen $L_h v_h, w_h \in \mathcal{G}_{h,0}$ alles trivial). Dann hat man $L_h v_h(x_j) = w_h(x_j)$ zu zeigen.

Dazu beachtet man, daß für $l = j$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} (a_{j+1} F_h(x_{j+1}, t_l) - (a_j + a_{j+1}) F_h(x_j, t_l) + a_j F_h(x_{j-1}, t_l)) \\ &= \frac{1}{h} (a_{j+1} F_h(x_{j+1}, t_j) - (a_j + a_{j+1}) F_h(x_j, t_j) + a_j F_h(x_{j-1}, t_j)) \\ &= \frac{1}{h^2 \sum_{r=1}^N \frac{1}{a_r}} \cdot \left(a_{j+1} \left(-h \sum_{r=1}^j \frac{1}{a_r} \right) \cdot \left(h \sum_{r=j+2}^N \frac{1}{a_r} \right) \right. \\ & \quad \left. - (a_j + a_{j+1}) \left(-h \sum_{r=1}^j \frac{1}{a_r} \right) \cdot \left(h \sum_{r=j+1}^N \frac{1}{a_r} \right) + a_j \left(-h \sum_{r=1}^{j-1} \frac{1}{a_r} \right) \cdot \left(h \sum_{r=j+1}^N \frac{1}{a_r} \right) \right) \\ &= \frac{1}{h^2 \sum_{r=1}^N \frac{1}{a_r}} \cdot \left(a_{j+1} \left(h \sum_{r=1}^j \frac{1}{a_r} \right) \cdot \left(h \sum_{r=j+1}^N \frac{1}{a_r} - h \sum_{r=j+2}^N \frac{1}{a_r} \right) \right. \\ & \quad \left. + a_j \left(h \sum_{r=j+1}^N \frac{1}{a_r} \right) \cdot \left(h \sum_{r=1}^j \frac{1}{a_r} - h \sum_{r=1}^{j-1} \frac{1}{a_r} \right) \right) \\ &= \frac{1}{h^2 \sum_{r=1}^N \frac{1}{a_r}} \cdot \left(a_{j+1} \left(h \sum_{r=1}^j \frac{1}{a_r} \right) \cdot \frac{h}{a_{j+1}} + a_j \left(h \sum_{r=j+1}^N \frac{1}{a_r} \right) \cdot \frac{h}{a_j} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h^2 \sum_{r=1}^N \frac{1}{a_r}} \cdot \left(h^2 \sum_{r=1}^j \frac{1}{a_r} + h^2 \sum_{r=j+1}^N \frac{1}{a_r} \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

gilt. Im Falle $l < j$ hat man

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h} (a_{j+1} F_h(x_{j+1}, t_l) - (a_j + a_{j+1}) F_h(x_j, t_l) + a_j F_h(x_{j-1}, t_l)) \\
&= \frac{1}{h^2 \sum_{r=1}^N \frac{1}{a_r}} \cdot \left(a_{j+1} \left(-h \sum_{r=1}^l \frac{1}{a_r} \right) \cdot \left(h \sum_{r=j+2}^N \frac{1}{a_r} \right) \right. \\
&\quad \left. - (a_j + a_{j+1}) \left(-h \sum_{r=1}^l \frac{1}{a_r} \right) \cdot \left(h \sum_{r=j+1}^N \frac{1}{a_r} \right) + a_j \left(-h \sum_{r=1}^l \frac{1}{a_r} \right) \cdot \left(h \sum_{r=j}^N \frac{1}{a_r} \right) \right) \\
&= \frac{h \sum_{r=1}^l \frac{1}{a_r}}{h^2 \sum_{r=1}^N \frac{1}{a_r}} \cdot \left(a_{j+1} \left(h \sum_{r=j+1}^N \frac{1}{a_r} - h \sum_{r=j+2}^N \frac{1}{a_r} \right) - a_j \left(h \sum_{r=j}^N \frac{1}{a_r} - h \sum_{r=j+1}^N \frac{1}{a_r} \right) \right) \\
&= \frac{h \sum_{r=1}^l \frac{1}{a_r}}{h^2 \sum_{r=1}^N \frac{1}{a_r}} \cdot \left(a_{j+1} \cdot \frac{h}{a_{j+1}} - a_j \cdot \frac{h}{a_j} \right) \\
&= \frac{h \sum_{r=1}^l \frac{1}{a_r}}{h^2 \sum_{r=1}^N \frac{1}{a_r}} \cdot (h - h) \\
&= 0
\end{aligned}$$

und falls $l > j$ ist, folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h} (a_{j+1} F_h(x_{j+1}, t_l) - (a_j + a_{j+1}) F_h(x_j, t_l) + a_j F_h(x_{j-1}, t_l)) \\
&= \frac{1}{h^2 \sum_{r=1}^N \frac{1}{a_r}} \cdot \left(a_{j+1} \left(-h \sum_{r=1}^{j+1} \frac{1}{a_r} \right) \cdot \left(h \sum_{r=l+1}^N \frac{1}{a_r} \right) \right. \\
&\quad \left. - (a_j + a_{j+1}) \left(-h \sum_{r=1}^j \frac{1}{a_r} \right) \cdot \left(h \sum_{r=l+1}^N \frac{1}{a_r} \right) + a_j \left(-h \sum_{r=1}^{j-1} \frac{1}{a_r} \right) \cdot \left(h \sum_{r=l+1}^N \frac{1}{a_r} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{h \sum_{r=l+1}^N \frac{1}{a_r}}{h^2 \sum_{r=1}^N \frac{1}{a_r}} \cdot \left(a_{j+1} \left(h \sum_{r=1}^j \frac{1}{a_r} - h \sum_{r=1}^{j+1} \frac{1}{a_r} \right) + a_j \left(h \sum_{r=1}^j \frac{1}{a_r} - h \sum_{r=1}^{j-1} \frac{1}{a_r} \right) \right) \\
 &= \frac{h \sum_{r=1}^l \frac{1}{a_r}}{h^2 \sum_{r=1}^N \frac{1}{a_r}} \cdot \left(a_{j+1} \cdot \frac{-h}{a_{j+1}} + a_j \cdot \frac{h}{a_j} \right) \\
 &= \frac{h \sum_{r=1}^l \frac{1}{a_r}}{h^2 \sum_{r=1}^N \frac{1}{a_r}} \cdot (-h + h) \\
 &= 0 \quad .
 \end{aligned}$$

Insgesamt hat man daher

$$\begin{aligned}
 &L_h v_h(x_j) \\
 &= \frac{a_{j+1} v_h(x_{j+1}) - (a_j + a_{j+1}) v_h(x_j) + a_j v_h(x_{j-1}))}{h^2} \\
 &= \frac{1}{h^2} \left(a_{j+1} h \sum_{l=1}^{N-1} F_h(x_{j+1}, t_l) w_h(t_l) \right. \\
 &\quad \left. - (a_j + a_{j+1}) h \sum_{l=1}^{N-1} F_h(x_j, t_l) w_h(t_l) + a_j h \sum_{l=1}^{N-1} F_h(x_{j-1}, t_l) w_h(t_l) \right) \\
 &= \frac{1}{h} \sum_{l=1}^{N-1} (a_{j+1} F_h(x_{j+1}, t_l) - (a_j + a_{j+1}) F_h(x_j, t_l) + a_j F_h(x_{j-1}, t_l)) w_h(t_l) \\
 &= w_h(x_j),
 \end{aligned}$$

womit alles bewiesen ist. □

Der diskrete Fredholmoperator

Wir können nun ein diskretes Analogon zum Fredholmschen Integraloperator (siehe Definition 6.2.5) definieren und so einen entscheidenden Schritt bei der Beschreibung des diskreten Eigenwertproblems vorankommen.

Definition 5.3.16 Sei F_h die in Satz 5.3.15 erklärte diskrete Greensche Funktion zur halbhomogenen diskreten Sturmischen Randwertaufgabe, wie wir sie in Problem 5.3.13 beschrieben

haben. Dann bezeichnen wir die durch

$$\mathcal{G}_{h,0} \ni v_h \mapsto K_h v_h \in \mathcal{G}_{h,0} \quad ,$$

$$K_h v_h(x_j) = \begin{cases} h \sum_{l=1}^{N-1} \underbrace{(-F_h(x_j, t_l) a_h(t_l))}_{k_h(x_j, t_l)} v_h(t_l) & , \quad j = 1, \dots, N-1 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Abbildung als diskreten Fredholmoperator und dementsprechend die Gleichung

$$v_h - \lambda_h K_h v_h = 0 \quad (5.52)$$

als diskrete homogene Fredholmgleichung.

Die wichtigsten Eigenschaften des diskreten Fredholmoperators liefert der folgende

Hilfssatz 5.3.17 *Der diskrete Fredholmoperator ist*

(a) *linear*

(b) *symmetrisch bezüglich des $(\cdot, \cdot)_{0,a}$ -Skalarprodukts, das heißt*

$$\forall u_h, v_h \in \mathcal{G}_h \quad (K_h u_h, v_h)_{0,a} = (u_h, K_h v_h)_{0,a} \quad .$$

(c) *stetig beziehungsweise beschränkt.*

(d) *bijektiv. Der inverse Operator ist gegeben durch*

$$\mathcal{G}_{h,0} \ni v_h \mapsto (K_h)^{-1} v_h = -\frac{1}{a_h} L_h v_h \in \mathcal{G}_{h,0} \quad .$$

Beweis:

Zu (a):

Die Linearität folgt für beliebige Gitterfunktionen $u_h, v_h \in \mathcal{G}_{h,0}$ und Skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ aus

$$\begin{aligned} & (K_h(\alpha u_h + \beta v_h))(x_j) \\ &= h \sum_{l=1}^{N-1} k_h(x_j, t_l) (\alpha u_h + \beta v_h)(t_l) \\ &= \alpha h \sum_{l=1}^{N-1} k_h(x_j, t_l) u_h(t_l) + \beta h \sum_{l=1}^{N-1} k_h(x_j, t_l) v_h(t_l) \\ &= \alpha (K_h u_h)(x_j) + \beta (K_h v_h)(x_j) \quad , \quad j = 1, \dots, N-1 \quad , \end{aligned}$$

da die übrigen Fälle, also $j \leq 0$ oder $j \geq N$ trivial sind.

Zu (b):

Man rechnet auf der Grundlage von

$$\begin{aligned}
 & F_h(x_j, t_l) \\
 = & \frac{\left(-h \sum_{r=1}^{\min(j,l)} \frac{1}{a_r}\right) \cdot \left(h \sum_{r=\max(j,l)+1}^N \frac{1}{a_r}\right)}{h \sum_{r=1}^N \frac{1}{a_r}} \\
 = & F_h(t_l, x_j) \quad , \quad 1 \leq j, l \leq N-1 \quad ,
 \end{aligned}$$

also der Symmetrie der diskreten Greenschen Funktion, die behauptete Symmetriebeziehung

$$\begin{aligned}
 & (K_h u_h, v_h)_{0,a} \\
 = & h \sum_{j \in \mathbb{Z}} (K_h u_h)(x_j) v_h(x_j) a_h(x_j) \\
 = & h \sum_{j=1}^{N-1} (K_h u_h)(x_j) v_h(x_j) a_h(x_j) \\
 = & h^2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{N-1} k_h(x_j, t_l) u_h(t_l) v_h(x_j) a_h(x_j) \\
 = & h^2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{N-1} -F_h(x_j, t_l) a_h(t_l) u_h(t_l) v_h(x_j) a_h(x_j) \\
 = & h \sum_{l=1}^{N-1} h \sum_{j=1}^{N-1} -F_h(t_l, x_j) a_h(t_j) v_h(x_j) u_h(t_l) a_h(t_l) \\
 = & h \sum_{l=1}^{N-1} h \sum_{j=1}^{N-1} k_h(t_l, x_j) v_h(x_j) u_h(t_l) a_h(t_l) \\
 = & h \sum_{l=1}^{N-1} u_h(t_l) K_h(v_h)(t_l) a_h(t_l) \\
 = & h \sum_{l \in \mathbb{Z}} u_h(t_l) K_h(v_h)(t_l) a_h(t_l) \\
 = & (u_h, K_h v_h)_{0,a}
 \end{aligned}$$

nach.

Zu (c):

Dies gilt ganz allgemein für lineare Operatoren zwischen endlichdimensionalen Räumen.

Zu (d):

Die Zusammenhänge

$$\begin{aligned}
 & \left(K_h \left(-\frac{1}{a_h} L_h v_h \right) \right) (x_j) \\
 = & \sum_{l=1}^{N-1} k_h(x_j, t_l) \cdot \left(-\frac{1}{a_h(t_l)} \right) (L_h v_h)(t_l) \\
 = & \sum_{l=1}^{N-1} -F_h(x_j, t_l) a_h(t_l) \cdot \left(-\frac{1}{a_h(t_l)} \right) (L_h v_h)(t_l) \\
 = & \sum_{l=1}^{N-1} F_h(x_j, t_l) (L_h v_h)(t_l) \\
 \stackrel{\text{Satz 5.3.15}}{=} & v_h(x_j), \quad j = 1, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{1}{a_h} L_h \right) (K_h w_h)(x_j) \\
 = & \left(-\frac{1}{a_h} L_h \right) \sum_{l=1}^{N-1} k_h(x_j, t_l) \cdot w_h(t_l) \\
 = & \frac{1}{a_h(x_j)} \cdot L_h \left(\sum_{l=1}^{N-1} F(x_j, t_l) a_h(t_l) w_h(t_l) \right) \\
 \stackrel{\text{Satz 5.3.15}}{=} & \frac{1}{a_h(x_j)} \cdot a_h(x_j) w_h(x_j) \\
 = & w_h(x_j)
 \end{aligned}$$

zeigen sowohl Bijektivität als auch die behauptete Gestalt der Abbildung K_h^{-1} .

Bemerkung: Man hätte sich auch mit einem der obigen Zusammenhänge begnügen können und dann ausnutzen, daß lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Räumen genau dann injektiv sind, wenn sie surjektiv sind. □

Der Zusammenhang mit dem diskreten Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblem ist nun unmittelbar einleuchtend und wird in folgendem Satz charakterisiert.

Satz 5.3.18 *Jede Lösung der diskreten homogenen Fredholmgleichung (5.52) löst auch das diskrete Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem 5.3.10 und umgekehrt.*

Beweis:

Mit Hilfe des vorangegangenen Hilfssatzes reduziert sich der Beweis auf

$$\begin{aligned}
 & v_h \text{ ist Lösung von (5.52)} \\
 \iff & v_h - \lambda_h K_h v_h = 0 \\
 \text{Hilfssatz 5.3.17 (d)} \iff & K_h^{-1}(v_h - \lambda_h K_h v_h) = 0 \\
 \iff & K_h^{-1}v_h - K_h^{-1}(\lambda_h K_h v_h) = 0 \\
 \iff & -\frac{1}{a_h}L_h v_h - \lambda_h v_h = 0 \\
 \iff & L_h v_h + \lambda_h a_h v_h = 0 \quad .
 \end{aligned}$$

□

Die nachfolgende Definition erklärt nun, was wir unter einem Eigenwert des diskreten Fredholmoperators verstehen wollen.

Definition 5.3.19 Eine Zahl μ_h heißt Eigenwert des diskreten Fredholmoperators K_h , wenn eine Funktion $0 \neq v_h \in \mathcal{G}_{h,0}$ – eine sogenannte Eigenfunktion – existiert, so daß

$$K_h v_h = \mu_h v_h$$

gilt.

Die Eigenwerte des diskreten Fredholmoperators und die Eigenwerte von L_h stehen nun in einem sehr engen Zusammenhang:

Satz 5.3.20 Genau dann ist μ_h ein Eigenwert des diskreten Fredholmoperators, wenn $\lambda_h := \frac{1}{\mu_h}$ ein Eigenwert der diskreten Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe ist. Die Eigenfunktion kann dabei jeweils identisch gewählt werden.

Beweis:

Wir finden durch Äquivalenzumformungen:

$$\begin{aligned}
 & v_h \text{ ist Eigenfunktion des diskreten Fredholmoperators zum Eigenwert } \mu_h \\
 \iff & K_h v_h = \mu_h v_h \\
 \iff & \mu_h v_h - K_h v_h = 0 \\
 \iff & v_h - \lambda_h K_h v_h = 0 \\
 \text{Satz 5.3.18} \iff & L_h v_h + \lambda_h a_h v_h = 0 \quad .
 \end{aligned}$$

□

Damit haben wir die wichtige

Folgerung 5.3.21 Sei $v_{k,h}$, $k = 1, \dots, N-1$ das in Satz 5.3.11 als solches identifizierte $(\cdot, \cdot)_{0,a}$ -Orthonormalsystem von Eigenvektoren der diskreten Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe zu den Eigenwerten $\lambda_{k,h}$, $k = 1, \dots, N-1$. Dann hat man in den $v_{k,h}$ auch ein System von Eigenfunktionen des diskreten Fredholmoperators zu den Eigenwerten $\mu_{k,h} := \frac{1}{\lambda_{k,h}}$, $k = 1, \dots, N-1$.

Beweis:

Die Behauptung folgt unmittelbar aus den Sätzen 5.3.11 und 5.3.20. □

5.3.4 Abschätzung der diskreten Eigenwerte und alternative Lösungsdarstellung

Wir wenden uns nun der angestrebten Abschätzung der Eigenwerte von $-B_a$ beziehungsweise L_h (siehe Satz 5.3.11) zu. Von grundlegender Bedeutung ist dabei das sogenannte Minimum-Maximumprinzip von Courant-Weyl:

Satz 5.3.22 (Minimum-Maximumprinzip von Courant-Weyl) Es sei (\cdot, \cdot) ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^{N-1} mit zugehöriger Norm $\|\cdot\|$ und A sei eine Matrix mit

$$(Ax, y) = (y, Ax) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{N-1},$$

das heißt A definiere eine symmetrische Abbildung bezüglich (\cdot, \cdot) . Dann gilt für die Eigenwerte von A in der Anordnung $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{N-1}$ die Darstellung

$$\lambda_j = \min_{\dim M=j} \max_{0 \neq x \in M} \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2}, \quad j = 1, \dots, N-1,$$

wobei das Minimum über alle linearen Teilräume $M \subset \mathbb{R}^{N-1}$ der Dimension j gebildet wird.

Beweis:

Siehe zum Beispiel [SH82], Seite 107f. Man beachte, daß unsere Formulierung sich aus der umgekehrten Sortierung der Eigenwerte ergibt. □

Wir wählen jetzt speziell als Skalarprodukt in \mathbb{R}^{N-1} das in Satz 5.3.2 definierte mit a gewichtete euklidische Skalarprodukt und erhalten

Folgerung 5.3.23 Es gilt für jedes $v_h \in \mathcal{G}_{h,0}$ mit der Bezeichnung $V := \Psi^0(v_h) \in \mathbb{R}^{N-1}$

$$\frac{(-B_a V, V)_{e,a}}{\|V\|_{e,a}^2} = \frac{\|v_h\|_{-1,a}^2}{\|v_h\|_{0,a}^2}. \quad (5.53)$$

Die Eigenwerte $\lambda_{j,h} := -\tilde{\lambda}_{j,h}$, $j = 1, \dots, N-1$ der Matrix $-B_a$ (beziehungsweise von L_h , siehe Satz 5.3.11) besitzen unter der Voraussetzung der aufsteigenden Sortierung $\lambda_{1,h} \leq \dots \leq \lambda_{N-1,h}$ die Darstellung

$$\lambda_{j,h} = \min_{\dim M=j} \max_{0 \neq V \in M} \frac{(-B_a V, V)_{e,a}}{\|V\|_{e,a}^2} = \min_{\dim M_h=j} \max_{0 \neq v_h \in M_h} \frac{\|v_h\|_{-1,a}^2}{\|v_h\|_{0,a}^2}, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (5.54)$$

wobei das Minimum im ersten Fall über alle linearen Teilräume $M \subset \mathbb{R}^{N-1}$ der Dimension j und im zweiten Fall über alle linearen Teilräume $M_h \subset \mathcal{G}_{h,0}$ der Dimension j gebildet wird. Dabei entspricht jedem Teilraum von Vektoren, der beim ersten Minimum berücksichtigt wird, genau ein zu diesem isomorpher Teilraum von Gitterfunktionen, der bei der Bildung des zweiten Minimums eingeht.

Beweis:

Wir zeigen zunächst Gleichung (5.53):

$$\begin{aligned}
 & \frac{(-B_a V, V)_{e,a}}{\|V\|_{e,a}^2} \\
 \stackrel{(5.30)}{=} & \frac{\overbrace{(-C_a B_a V, V)}^{=A_a}_e}{\|V\|_{e,a}^2} \\
 \stackrel{(5.42)}{=} & \frac{(-\Psi^0(L_h v_h), \Psi^0(v_h))_e}{(\Psi^0(v_h), \Psi^0(v_h))_{e,a}} \\
 = & \frac{-h(\Psi^0(L_h v_h), \Psi^0(v_h))_e}{h(\Psi^0(v_h), \Psi^0(v_h))_{e,a}} \\
 \stackrel{(5.32)}{=} & \frac{-(L_h v_h, v_h)_0}{(v_h, v_h)_{0,a}} \\
 \stackrel{(5.41)}{=} & \frac{\|v_h\|_{-1,a}^2}{\|v_h\|_{0,a}^2}
 \end{aligned}$$

Die Behauptung über die Entprechung der Teilräume von \mathbb{R}^{N-1} und $\mathcal{G}_{h,0}$ ergibt sich sofort aus der Tatsache, daß Ψ^0 ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{G}_{h,0}$ und \mathbb{R}^{N-1} ist, so daß sich die Struktur der beiden Räume vollständig entspricht.

Daraus folgt der Rest der Behauptung, wenn man Satz 5.3.22 anwendet. □

In einer weiteren Folgerung rufen wir uns den Spezialfall $a \equiv 1$ in unserem Zusammenhang in Erinnerung:

Folgerung 5.3.24 *Im Fall $a \equiv 1$ gilt für die Eigenwerte $\lambda_{j,h} = -\tilde{\lambda}_{j,h}$, $j = 1, \dots, N-1$ der Matrix $-B_a$ (beziehungsweise von L_h , siehe Satz 5.3.11) in aufsteigender Sortierung $\lambda_{1,h} \leq \dots \leq \lambda_{N-1,h}$ die Gleichung*

$$\frac{4}{h^2} \sin^2 \left(jh \frac{\pi}{2} \right) = \lambda_{j,h} = \min_{\dim M_h = j} \max_{0 \neq v_h \in M_h} \frac{\|v_h\|_{-1}^2}{\|v_h\|_0^2}, \quad j = 1, \dots, N-1 \quad . \quad (5.55)$$

Beweis:

Im Fall $a \equiv 1$ geht die Matrix $-B_a$ über in die in (2.2) definierte Matrix $-D_2$, deren Eigenwerte nach Lemma 2.2.3 in Verbindung mit Hilfssatz 5.2.7 die erste Gleichung in (5.55) erfüllen. Die zweite Gleichung folgt aus Satz 5.3.22, indem man dort zum Fall $a \equiv 1$ übergeht. □

Hilfssatz 5.3.25 *Unter den gegebenen Voraussetzungen an a (siehe auch (5.2), (5.3)), nämlich*

$$0 < r_a \leq a(x) \leq R_a \quad \forall x \in [0, 1],$$

sind auf dem Raum Γ_h die beiden Normen $\|\cdot\|_{-1,a}$ und $\|\cdot\|_{-1}$ beziehungsweise die beiden Normen $\|\cdot\|_{0,a}$ und $\|\cdot\|_0$ jeweils äquivalente Normen, denn es gelten für jedes $v_h \in \Gamma_h$ die beiden zweiseitigen Ungleichungen

$$r_a \|v_h\|_0^2 \leq \|v_h\|_{0,a}^2 \leq R_a \|v_h\|_0^2 \quad (5.56)$$

und

$$r_a \|v_h\|_{-1}^2 \leq \|v_h\|_{-1,a}^2 \leq R_a \|v_h\|_{-1}^2 \quad . \quad (5.57)$$

Beweis:

Sei $v_h \in \Gamma_h$ beliebig. Aus

$$\begin{aligned} & r_a \|v_h\|_0^2 \\ = & r_a (v_h, v_h)_0 \\ = & \sum_{j \in \mathbb{Z}} r_a v_h(x_j)^2 \\ \leq & \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_h(x_j) v_h(x_j)^2 = (v_h, v_h)_{0,a} = \|v_h\|_{0,a}^2 \\ \leq & \sum_{j \in \mathbb{Z}} R_a v_h(x_j)^2 \\ = & R_a (v_h, v_h)_0 \\ = & R_a \|v_h\|_0^2 \end{aligned}$$

folgt zunächst (5.56) und daraus dann mit der durch

$$w_h(x_j) = (D_{-1}v_h)(x_j), \quad j \in \mathbb{Z}$$

definierten Funktion $w_h \in \Gamma_h$

$$\begin{aligned} & r_a \|v_h\|_{-1}^2 = r_a (v_h, v_h)_{-1} = r_a (D_{-1}v_h, D_{-1}v_h)_0 = r_a \|D_{-1}v_h\|_0^2 \\ = & r_a \|w_h\|_0^2 \\ \stackrel{(5.56)}{\leq} & \|w_h\|_{0,a}^2 = \|D_{-1}v_h\|_{0,a}^2 = \|v_h\|_{-1,a}^2 \\ \stackrel{(5.56)}{\leq} & R_a \|w_h\|_0^2 = R_a \|D_{-1}v_h\|_0^2 = R_a \|v_h\|_{-1}^2, \end{aligned}$$

womit die beiden zweiseitigen Ungleichungen bewiesen sind. Daraus folgt sofort die behauptete Normäquivalenz. □

Nun erlauben uns die vorangegangenen Vorbereitungen, die Eigenwerte der Matrix $-B_a$ (beziehungsweise von L_h , siehe Satz 5.3.11) – wie gewünscht – nach oben und nach unten abzuschätzen.

Satz 5.3.26 (Abschätzung der diskreten Eigenwerte) Die Eigenwerte $\lambda_{k,h} = -\tilde{\lambda}_{k,h}$, $k = 1, \dots, N-1$ von $-B_a$ (beziehungsweise von L_h) in aufsteigender Sortierung $\lambda_{1,h} \leq \dots \leq \lambda_{N-1,h}$ erfüllen die beidseitigen Abschätzungen

$$\frac{r_a}{R_a} \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(kh \frac{\pi}{2} \right) \leq \lambda_{k,h} \leq \frac{R_a}{r_a} \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(kh \frac{\pi}{2} \right) \leq \frac{R_a}{r_a} k^2 \pi^2, \quad 1 \leq k \leq N-1 \quad . \quad (5.58)$$

Beweis:

Mit Hilfe der Ungleichungen (5.56) und (5.57) zeigt man für beliebiges $v_h \in \mathcal{G}_{h,0}$

$$\frac{r_a \|v_h\|_{-1}^2}{R_a \|v_h\|_0^2} \leq \frac{\|v_h\|_{-1,a}^2}{\|v_h\|_{0,a}^2} \leq \frac{R_a \|v_h\|_{-1}^2}{r_a \|v_h\|_0^2} \quad . \quad (5.59)$$

Daraus folgt für $k = 1, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} & \frac{r_a}{R_a} \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(kh \frac{\pi}{2} \right) \\ \stackrel{(5.55)}{=} & \frac{r_a}{R_a} \min_{\dim M_h=k} \max_{0 \neq v_h \in M_h} \frac{\|v_h\|_{-1}^2}{\|v_h\|_0^2} \\ = & \min_{\dim M_h=k} \max_{0 \neq v_h \in M_h} \frac{r_a \|v_h\|_{-1}^2}{R_a \|v_h\|_0^2} \\ \stackrel{(5.59)}{\leq} & \min_{\dim M_h=k} \max_{0 \neq v_h \in M_h} \frac{\|v_h\|_{-1,a}^2}{\|v_h\|_{0,a}^2} \stackrel{(5.54)}{=} \lambda_{k,h} \\ \stackrel{(5.59)}{\leq} & \min_{\dim M_h=k} \max_{0 \neq v_h \in M_h} \frac{R_a \|v_h\|_{-1}^2}{r_a \|v_h\|_0^2} \\ = & \frac{R_a}{r_a} \min_{\dim M_h=k} \max_{0 \neq v_h \in M_h} \frac{\|v_h\|_{-1}^2}{\|v_h\|_0^2} \\ \stackrel{(5.55)}{=} & \frac{R_a}{r_a} \sin^2 \left(kh \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

so daß die ersten beiden behaupteten Abschätzungen gezeigt sind.

Die rechte Ungleichung in (5.58) folgt leicht mittels Lemma 3.1.1 (b) aus

$$\frac{4}{h^2} \sin^2 \left(kh \frac{\pi}{2} \right) \leq \frac{4}{h^2} k^2 h^2 \frac{\pi^2}{4} = k^2 \pi^2 \quad .$$

□

Schließlich können wir mit Hilfe der vorangegangenen Überlegungen dieses Abschnitts eine modifizierte Darstellung der Lösung (5.20) der Linienmethode angeben.

Satz 5.3.27 (Alternative Darstellung der Lösung der Linienmethode) Sei $v_{k,h}$, $k = 1, \dots, N-1$ die in Folgerung 5.3.7 gewonnene und nach Satz 5.3.11 aus Eigenvektoren von L_h zu den Eigenwerten $\lambda_{1,h} \leq \dots \leq \lambda_{N-1,h}$, $\lambda_{k,h} = -\tilde{\lambda}_{k,h}$, $k = 1, \dots, N-1$ bestehende

$(\cdot, \cdot)_{0,a}$ Orthonormalbasis von $\mathcal{G}_{h,0}$. Dann kann man die Lösung (5.20) der Linienmethode alternativ in der Darstellung

$$u_i(y) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(\phi_1^h, v_{k,h})_{0,a}}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} v_{k,h}(x_i) \sinh\left(\sqrt{\lambda_{k,h}} y\right), \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (5.60)$$

schreiben.

Beweis:

Man zeigt die Identität der sich jeweils entsprechenden Stücke in (5.20) und (5.60): Klar ist wegen $\lambda_{k,h} = -\tilde{\lambda}_{k,h}$, daß auch

$$\frac{\sinh\left(\sqrt{-\tilde{\lambda}_{k,h}} y\right)}{\sqrt{-\tilde{\lambda}_{k,h}}} = \frac{\sinh\left(\sqrt{\lambda_{k,h}} y\right)}{\sqrt{\lambda_{k,h}}}$$

ist. Darüberhinaus hat man

$$(W_a)_{i,k} = ((W_a)_k)_i = (\Psi^0((\Psi^0)^{-1}((W_a)_k)))_i = (\Psi^0(v_{k,h}))_i = v_{k,h}(x_i)$$

und schließlich folgt noch (man beachte $(\Psi^0)^{-1}(\Phi_1) = \phi_1^h$)

$$\begin{aligned} & (W_a^{-1}\Phi_1)_k \\ \stackrel{(5.37)}{=} & (hW_a^T C_a \Phi_1)_k \\ = & h \sum_{\nu=1}^{N-1} (W_a^T C_a)_{k,\nu} (\Phi_1)_\nu \\ = & h \sum_{\nu=1}^{N-1} \underbrace{\sum_{l=1}^{N-1} (W_a^T)_{k,l} (C_a)_{l,\nu}}_{=a_\nu(W_a^T)_{k,\nu}=a_\nu(W_a)_{\nu,k}} (\Phi_1)_\nu \\ = & h \sum_{\nu=1}^{N-1} a_\nu ((W_a)_k)_\nu (\Phi_1)_\nu \\ = & h((W_a)_k, \Phi_1)_{e,a} \\ \stackrel{(5.32)}{=} & ((\Psi^0)^{-1}((W_a)_k), (\Psi^0)^{-1}(\Phi_1))_{0,a} \\ = & (v_{k,h}, \phi_1^h)_{0,a} \\ = & (\phi_1^h, v_{k,h})_{0,a} \quad . \end{aligned}$$

□

Kapitel 6

Das kontinuierliche Problem

6.1 Separation der Variablen

Wie schon zuvor im Falle der Laplace-Gleichung, ist an dieser Stelle nun eine Untersuchung des kontinuierlichen Problems nötig, bevor man Konvergenzaussagen und Fehlerabschätzungen für die Linienmethode in dem Fall der allgemeineren elliptischen Gleichung, die wir im gegenwärtigen Kontext betrachten, gewinnen kann. Das nötige Instrumentarium für unsere Untersuchungen liegt nun nicht mehr unmittelbar auf der Hand, sondern bedarf einiger tiefergehender Untersuchungen, die sich allerdings weitestgehend auf die klassische Theorie der Sturmischen Randwertaufgaben beziehungsweise der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertprobleme, die im Rahmen der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen behandelt werden, stützen können. Diese Ergebnisse finden sich in praktisch jedem Standardwerk zu gewöhnlichen Differentialgleichungen (siehe unter anderem [CL55], [CH68]), wir lehnen uns im Rahmen dieser Arbeit an das sehr schöne Buch von H. Heuser [Heu95] an und übertragen die dort zu findenden Ergebnisse auf das in unserem Fall konkret vorliegende Problem. Wenn man die in Rede stehende partielle Differentialgleichung (siehe Problem 5.1.4)

$$L_a u = 0 \tag{6.1}$$

mit der üblichen Methode der Trennung der Variablen angeht, das heißt, die Lösung u als ein Produkt

$$u = v(x) \cdot s(y)$$

einer nur von x abhängigen Funktion v und einer nur von y abhängigen Funktion s betrachtet, so führt dies durch einfaches Einsetzen in (6.1) auf (zur Definition von L_a siehe Satz 5.1.2)

$$\begin{aligned} & a \frac{\partial^2(vs)}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial vs}{\partial x} \right) = 0 \\ \iff & av\ddot{s} + s(av')' = 0 \\ \iff & \frac{\ddot{s}}{s} + \frac{(av')'}{av} = 0 \\ \iff & \frac{(av')'}{av} = -\frac{\ddot{s}}{s} = -\lambda \quad . \end{aligned} \tag{6.2}$$

Hierbei bedeutet der Punkt über der Funktion s die Differentiation nach y , der Strich bedeutet jeweils Differentiation nach x . In der Variablen y erhält man somit dieselbe gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung wie auch im Fall des Laplace-Operators, nämlich:

$$\ddot{s} - \lambda s = 0 \quad .$$

Ein Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung ist für nichtnegatives λ (daß das tatsächlich der Fall ist, werden wir noch zeigen) durch $s_1(y) = \exp(\sqrt{\lambda}y)$, $s_2(y) = \exp(-\sqrt{\lambda}y)$ gegeben, die allgemeine Lösung hat somit die Form

$$s(y) = C_1 s_1(y) + C_2 s_2(y) \quad (6.3)$$

mit beliebigen reellen Konstanten C_1, C_2 . Die homogene Dirichlet-Bedingung auf Σ_1 , also die Forderung

$$u(x, y) = v(x)s(y) = 0 \quad \text{auf } \Sigma_1$$

bedeutet nichts anderes als

$$v(x)s(0) = 0 \quad \forall x \in [0, 1],$$

und wenn man die triviale Lösung $u \equiv 0$, die sich aus $v \equiv 0$ ergibt, ausschließt, dann folgt sofort

$$\begin{aligned} s(0) &= 0 \\ \stackrel{(6.3)}{\implies} C_1 + C_2 &= 0 \\ \implies s(y) &= C \sinh(\sqrt{\lambda}y), \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ beliebig.} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Wir wenden uns nun der aufwendigeren Analyse der gewöhnlichen Differentialgleichung, die sich in der Variablen x ergibt, zu; nicht zuletzt, um die Frage zu klären, für welche λ unsere obigen (quasi vorgezogenen) Untersuchungen in der Variablen y überhaupt eine Bedeutung für die Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung besitzen. Nach (6.2) ergibt sich unter Berücksichtigung der homogenen Dirichlet-Randbedingungen auf Σ_2 und Σ_3 ein sogenanntes Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem: Finde eine Funktion $v \in C^2[0, 1]$ mit

$$\begin{aligned} (av')' + \lambda av &= 0 \quad , \quad v(0) = v(1) = 0 \\ \stackrel{Lv := (av')'}{\iff} Lv + \lambda av &= 0 \quad , \quad v(0) = v(1) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (6.5)$$

6.2 Das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem

6.2.1 Die Sturmsche Randwertaufgabe und zugehörige Greensche Funktion

Bevor wir das eigentliche Eigenwertproblem in den Blick nehmen, sollen noch einige grundsätzliche Eigenschaften der zugrundeliegenden sogenannten Sturmschen Randwertaufgabe angegeben und diskutiert werden. Sie stellt sich in unserem Fall wie folgt dar: Gesucht

ist eine Funktion $v \in C^2[0, 1]$ mit

$$Lv = f \iff (av')' = f \quad , \quad v(0) = v(1) = 0 \quad , \quad f \in C[0, 1] \quad . \quad (6.6)$$

Man bestimmt nun zu Beginn ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $Lv = 0$, indem man sich folgenden Zusammenhang klarmacht:

$$\begin{aligned} Lv &= 0 \\ \iff (av')' &= 0 \\ \iff av' &= C_0 = \text{const.} \end{aligned}$$

Ist nun $C_0 = 0$, so folgt $av' = 0 \xrightarrow{a>0} v' = 0 \implies v = C_1 = \text{const.}$ und man wählt etwa $v_1(x) = 1$ als erste Funktion eines Fundamentalsystems. Ist $C_0 \neq 0$, so erhält man

$$\begin{aligned} v' &= \frac{C_0}{a} \\ \xrightarrow{\text{Hauptsatz}} v &= \int_0^x \frac{C_0}{a(r)} dr = C_0 \int_0^x \frac{1}{a(r)} dr \end{aligned}$$

und somit bietet sich $v_2(x) = \int_0^x \frac{1}{a(r)} dr$ als zweite Funktion eines Fundamentalsystems an. Offenbar ist v_2 wegen

$$a(r) > 0 \quad \forall r \in [0, 1] \quad \implies \quad \frac{1}{a(r)} > 0$$

streng monoton wachsend und somit linear unabhängig von der konstanten Funktion v_1 , so daß man tatsächlich ein Fundamentalsystem gefunden hat und alle Lösungen von $Lv = 0$ in der Form

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) = C_1 + C_2 \int_0^x \frac{1}{a(r)} dr \quad (6.7)$$

erhält. Für die homogene Randwertaufgabe

$$Lv = 0 \quad , \quad v(0) = v(1) = 0$$

folgt durch Einsetzen der homogenen Randbedingungen in (6.7)

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 \underbrace{\int_0^0 \frac{1}{a(r)} dr}_{=0} &= 0 \\ \implies C_1 &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\underbrace{C_1}_{=0} + C_2 \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dt}_{>0} = 0$$

$$\implies C_2 = 0,$$

daß sie nur die triviale Lösung besitzt, was man auch an der Determinante

$$\begin{vmatrix} v_1(0) & v_2(0) \\ v_1(1) & v_2(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr \end{vmatrix} = \int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr \neq 0$$

ablesen kann. Somit hat die Randwertaufgabe (6.6) immer eine eindeutige Lösung (siehe Satz 35.2 in [Heu95]).

Klarerweise erhält man aus dem linear unabhängigen Vektorsystem $(v_1, v_2)^T$ bei Multiplikation von links mit einer regulären Matrix $C \in \mathbb{R}^{2,2}$ wieder ein linear unabhängiges Vektorsystem, mithin wiederum ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung $Lv = 0$. Wir wählen speziell

$$C = \begin{pmatrix} v_2(0) & -v_1(0) \\ v_2(1) & -v_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \int_0^1 \frac{1}{a(t)} dt & -1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist C wegen

$$|C| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr & -1 \end{vmatrix} = \int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr \neq 0$$

regulär und als neues Fundamentalsystem erhält man

$$\tilde{v}_1 = 0 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 = - \int_0^x \frac{1}{a(r)} dr$$

$$\tilde{v}_2 = \int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 = \int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr - \int_0^x \frac{1}{a(r)} dr = \int_x^1 \frac{1}{a(r)} dr.$$

Der Grund für die vorgenommene Transformation ist, daß das neue Fundamentalsystem die Eigenschaft

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(0) &= 0 \\ \tilde{v}_2(1) &= 0 \end{aligned}$$

besitzt und daher ergibt sich mit Hilfe der sogenannten Wronski-Determinante

$$\begin{aligned}
 & \tilde{W}(x) \\
 = & \begin{vmatrix} \tilde{v}_1(x) & \tilde{v}_2(x) \\ \tilde{v}'_1(x) & \tilde{v}'_2(x) \end{vmatrix} \\
 = & \tilde{v}_1(x)\tilde{v}'_2(x) - \tilde{v}'_1(x)\tilde{v}_2(x) \\
 = & \left(-\int_0^x \frac{1}{a(r)} dr \right) \cdot \left(-\frac{1}{a(x)} \right) - \left(-\frac{1}{a(x)} \right) \cdot \left(\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr - \int_0^x \frac{1}{a(r)} dr \right) \\
 = & \frac{1}{a(x)} \cdot \int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr
 \end{aligned}$$

und unter Beachtung von

$$a(0) \cdot \tilde{W}(0) = \int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr \neq 0$$

die zum Randwertproblem 6.6 gehörige Greensche Funktion zu

$$\begin{aligned}
 & G(x, t) \\
 = & \begin{cases} \frac{\tilde{v}_1(x)\tilde{v}_2(t)}{a(0)\tilde{W}(0)} & , \quad 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ \frac{\tilde{v}_1(t)\tilde{v}_2(x)}{a(0)\tilde{W}(0)} & , \quad 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases} \\
 = & \begin{cases} \frac{\left(-\int_0^x \frac{1}{a(r)} dr \right) \cdot \left(\int_t^1 \frac{1}{a(r)} dr \right)}{\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr} & , \quad 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ \frac{\left(-\int_0^t \frac{1}{a(r)} dr \right) \cdot \left(\int_x^1 \frac{1}{a(r)} dr \right)}{\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr} & , \quad 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (6.8) \\
 = & \frac{\left(-\int_0^{\min(x,t)} \frac{1}{a(r)} dr \right) \cdot \left(\int_{\max(x,t)}^1 \frac{1}{a(r)} dr \right)}{\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr} \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

Mittels dieser Greenschen Funktion läßt sich die eindeutige Lösung von (6.6) in der Integralform

$$v(x) = \int_0^1 G(x, t) \cdot f(t) dt \quad (6.10)$$

darstellen. Eine genaue Herleitung und einen Beweis der eben genannten Tatsache findet der Leser in Standardwerken zu gewöhnlichen Differentialgleichungen (siehe zum Beispiel [Heu95], Seite 379ff).

6.2.2 Aufstellung des Eigenwertproblems und erste Charakteristika

Wir wollen nun das sich aus der Methode der Separation der Variablen ergebende Rand-Eigenwertproblem für eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Variablen x näher untersuchen, wie es sich aus (6.2) ergibt und wie wir es in (6.5) schon ansatzweise aufgeschrieben haben. Wir fassen dies noch einmal samt aller Voraussetzungen zusammen in

Problem 6.2.1 (Homogenes Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem) *Gesucht ist eine auf $[0, 1]$ zweimal stetig differenzierbare Funktion v mit*

$$Lv + \lambda av = 0 \quad , \quad v(0) = v(1) = 0, \quad (6.11)$$

wobei der Differentialoperator L durch

$$C^2[0, 1] \ni v \mapsto Lv = (av')' = av'' + a'v' \in C[0, 1]$$

definiert ist und $a \in C^1[0, 1]$, $a > 0$ den Koeffizienten aus der partiellen Differentialgleichung (5.1) darstellt. Alle auftretenden Größen seien zudem reell. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt Eigenwert von (6.11), wenn mit einer nichttrivialen Funktion v Gleichung (6.11) erfüllt ist. v heißt in diesem Fall Eigenlösung oder Eigenfunktion zum Eigenwert λ .

Bemerkung 6.2.2 *Die Annahme, daß alle Eigenwerte und Eigenfunktionen reelle Größen seien, bedeutet keine Einschränkung, da man zeigen kann, daß jeder Eigenwert von (6.11) reell ist und man zu jedem Eigenwert immer auch eine reellwertige Eigenfunktion wählen kann (siehe [Heu95] Aufgabe 37.10 Seite 389f).*

Man hat in unserem Fall jedoch nicht nur die Realität der Eigenwerte, sondern sie sind auch alle positiv, wie das folgende Lemma belegt:

Lemma 6.2.3 *Alle Eigenwerte von (6.11) sind positiv.*

Beweis:

Sei λ ein beliebiger Eigenwert und v eine zugehörige Eigenlösung. Dann gilt offenbar

$$-Lv = -(av')' = \lambda av \quad (6.12)$$

und mittels partieller Integration und bei Beachtung der Positivität von a gewinnt man die Beziehung

$$\begin{aligned}
 & \leq \int_0^1 a(x)(v'(x))^2 dx \\
 & = \int_0^1 (a(x)v'(x)) \cdot v'(x) dx \\
 \stackrel{\text{part. Int.}}{=} & [a(x)v'(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 (a(x)v'(x))' \cdot v(x) dx \\
 \stackrel{(6.12)}{=} & [a(x)v'(x)v(x)]_0^1 + \lambda \int_0^1 a(x)v^2(x) dx \\
 \stackrel{v(0)=v(1)=0}{=} & \lambda \int_0^1 a(x)v^2(x) dx,
 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 & \lambda \underbrace{\int_0^1 a(x)v^2(x) dx}_{\geq 0} \geq 0 \\
 \implies & \lambda \geq 0.
 \end{aligned}$$

Weiter kann 0 kein Eigenwert sein, da dies bedeuten würde, daß v eine nichttriviale Lösung der homogenen Sturmischen Randwertaufgabe wäre, was im Widerspruch zu dem stünde, was wir im vorangegangenen Abschnitt über die Sturmische Randwertaufgabe bereits gezeigt haben. Somit hat man den Fall $\lambda = 0$ ausgeschlossen und insgesamt die Positivität aller Eigenwerte von (6.11) bewiesen. □

Bemerkung 6.2.4 *Besitzt eine Eigenwertaufgabe nur positive Eigenwerte, so nennt man sie auch volldefinit. Wir haben also soeben die Volldefinitheit der von uns untersuchten Aufgabe gezeigt.*

6.2.3 Der Fredholmsche Integraloperator

Das im Vorstehenden aufgestellte Eigenwertproblem läßt sich analytisch in vielen Punkten leichter angehen, wenn man es in einer äquivalenten Gestalt als sogenannte Fredholmsche

Integralgleichung betrachtet (benannt nach dem schwedischen Mathematiker Ivar Fredholm (1866-1927), der als erster eine angemessene Lösungstheorie für diesen Gleichungstyp entwickelte). Dazu definiert man zunächst den sogenannten Fredholmschen Integraloperator.

Definition 6.2.5 Sei $G(x, t)$ die Greensche Funktion zur Sturmischen Randwertaufgabe (6.6) und der Funktionenraum V_0 der sogenannten Vergleichs- oder Testfunktionen (die die Randbedingungen erfüllen und daher als Lösungen der Sturmischen Randwertaufgabe in Frage kommen) sei definiert durch

$$V_0 := \{v \in C^2[0, 1] \mid v(0) = v(1) = 0\} \quad . \quad (6.13)$$

Dann heißt die durch

$$C[0, 1] \ni v \mapsto Kv = \left(\int_0^1 \underbrace{(-G(x, t)a(t))}_{=:k(x, t)} \cdot v(t) dt \right) \in V_0$$

erklärte Abbildung Fredholmscher Integraloperator. Die Gleichung

$$v - \lambda Kv = 0 \quad (6.14)$$

heißt homogene Fredholmsche Integralgleichung.

Der Grund für diese Definition und der Zusammenhang zum Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblem wird deutlich in folgendem

Hilfssatz 6.2.6 Jede stetige Lösung der Fredholmschen Integralgleichung (6.14) löst das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem (6.11), ist also insbesondere zweimal stetig differenzierbar. Umgekehrt genügt jede Lösung von (6.11) auch der Fredholmschen Integralgleichung (6.14).

Beweis:

Siehe zum Beispiel [Heu95] Seite 391f. □

Die Definition des Fredholmschen Integraloperators beziehungsweise des dort verwendeten stetigen Kerns $k(x, t)$ legt es nahe, statt des Standard-Skalarprodukts auf $C[0, 1]$ das folgende Skalarprodukt samt zugehöriger Norm zu verwenden:

Hilfssatz 6.2.7 Mit Hilfe der Abbildung

$$C[0, 1] \times C[0, 1] \ni (u, v) \mapsto (u, v)_a = \int_0^1 u(x)v(x)a(x) dx$$

wird ein Skalarprodukt mit der zugehörigen Norm

$$\|v\|_a = (v, v)_a^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 v(x)^2 a(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

auf $C[0, 1]$ erklärt. Wir werden dieses Skalarprodukt im folgenden als a -Skalarprodukt oder Skalarprodukt zur Gewichtsfunktion a bezeichnen und dementsprechend auch von der a -Norm oder Norm zur Gewichtsfunktion a reden. In natürlicher Weise sprechen wir von a -orthogonalen Funktionen u und v , wenn

$$(u, v)_a = 0$$

gilt.

Auch für das a -Skalarprodukt gilt die Schwarzsche Ungleichung

$$|(u, v)_a| \leq \|u\|_a \cdot \|v\|_a,$$

das a -Skalarprodukt ist stetig in beiden Argumenten und aus

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{im Sinne der } a\text{-Norm}$$

folgt demnach

$$(u, v)_a = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k, v) \quad .$$

Beweis:

Siehe zum Beispiel [Heu95] Seite 393ff. □

Von besonderem Nutzen in späteren Untersuchungen wird sich nachfolgender Satz erweisen:

Satz 6.2.8 Die a -Norm ist unter den gegebenen Voraussetzungen an a (siehe auch (5.2), (5.3)), nämlich

$$0 < r_a \leq a(x) \leq R_a \quad \forall x \in [0, 1]$$

äquivalent zur L_2 -Norm. Man hat nämlich die beidseitige Abschätzung

$$r_a \|u\|_{L_2}^2 \leq \|u\|_a^2 \leq R_a \|u\|_{L_2}^2 \quad . \quad (6.15)$$

Beweis:

Es gilt

$$\begin{aligned}
 & r_a \|u\|_{L_2}^2 \\
 = & r_a \int_0^1 u^2(x) dx \\
 \leq & \int_0^1 u^2(x) a(x) dx = \|u\|_a^2 \\
 \leq & R_a \int_0^1 u^2(x) dx \\
 = & R_a \|u\|_{L_2}^2,
 \end{aligned}$$

womit (6.15) gezeigt ist. Durch Radizieren von (6.15) folgt die behauptete Normäquivalenz. \square

Im folgenden werden wir uns dem Raum $C[0, 1]$ immer mit dem a -Skalarprodukt beziehungsweise der a -Norm ausgestattet denken, wenn nichts anderes vermerkt ist. Wir fassen die wichtigsten Eigenschaften des Fredholmschen Integraloperators in folgendem Hilfssatz zusammen:

Hilfssatz 6.2.9 *Der Fredholmsche Integraloperator ist*

(a) *linear,*

(b) *bezüglich des a -Skalarprodukts symmetrisch, das heißt*

$$\forall v_1, v_2 \in C[0, 1] \quad (Kv_1, v_2)_a = (v_1, Kv_2)_a,$$

(c) *kompakt, das heißt, das Bild jeder beschränkten Menge ist relativ kompakt oder anders ausgedrückt: Die Bildfolge jeder bezüglich der a -Norm beschränkten Folge enthält eine bezüglich der a -Norm konvergente Teilfolge;*

(d) *stetig beziehungsweise beschränkt (für lineare Operatoren gleichbedeutende Begriffe). Zusammen mit (c) ist der Fredholmsche Integraloperator also vollstetig.*

(e) *bijektiv. Der inverse Operator ist gegeben durch*

$$V_0 \ni v \mapsto K^{-1}v = -\frac{1}{a}Lv = -\frac{1}{a}(av')' = -v'' - \frac{a'}{a}v' \in C[0, 1] \quad .$$

Beweis:

Siehe zum Beispiel [Heu95] Seite 392–398. \square

6.2.4 Eigenwerte und Eigenfunktionen des Fredholmschen Integraloperators

Für die nachfolgenden Untersuchungen wird es von sehr unmittelbarem Nutzen sein, die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Fredholmschen Integraloperators K zu kennen beziehungsweise deren Existenz zu garantieren. Dabei ist ein Eigenwert beziehungsweise eine Eigenfunktion von K in sehr naheliegender Weise erklärt durch

Definition 6.2.10 Eine Zahl μ heißt Eigenwert des Fredholmschen Integraloperators K , wenn eine Funktion $C[0, 1] \ni v \neq 0$ – eine sogenannte Eigenfunktion (auch Eigenlösung genannt) – existiert, so daß

$$Kv = \mu v$$

gilt.

Ein erstes wichtiges Ergebnis zeigt

Satz 6.2.11 Eigenfunktionen von K zu verschiedenen Eigenwerten sind zueinander *a*-orthogonal.

Beweis:

Siehe zum Beispiel [Heu95] Seite 399. □

Weiter ist es möglich, gewisse Eigenschaften der Eigenwerte und der zugehörigen Eigenfunktionen zu charakterisieren, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 6.2.12 Es existiert eine alle Eigenwerte von K enthaltende Folge μ_n , $n \in \mathbb{N}$ von K und ein zugehöriges *a*-Orthonormalsystem von Eigenfunktionen $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit der Eigenschaft

$$|\mu_n| = \max_{0 \neq v \in E_{n-1}} \frac{|(Kv, v)_a|}{\|v\|_a^2} = \|K_{n-1}\|,$$

wobei K_{n-1} die Einschränkung des Operators K auf den Raum

$$\begin{aligned} & E_{n-1} \\ = & \begin{cases} C[0, 1] & , \quad n = 1 \\ [v_1, \dots, v_{n-1}]^\perp & , \quad n > 1 \end{cases} \\ = & \begin{cases} C[0, 1] & , \quad n = 1 \\ \{v \in C[0, 1] \mid (v, v_k)_a = 0, k = 1, \dots, n-1\} & , \quad n > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

darstellt. Weiter gilt:

(a) $Kv_n = \mu_n v_n$

(b) $|\mu_1| > |\mu_2| > \dots > 0$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$$

(d) Es gilt für jedes $v \in C[0, 1]$ die Entwicklung

$$Kv = \sum_{j=1}^{\infty} (Kv, v_j)_a v_j = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j (v, v_j)_a v_j$$

nach dem a -Orthonormalsystem $\{v_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ der Eigenfunktionen.

Alle Eigenwerte sind demnach paarweise verschieden, mit anderen Worten ist also jeder Eigenwert einfach (alle Eigenräume sind eindimensional).

Beweis:

Siehe zum Beispiel [Heu95] Seite 398ff. □

6.2.5 Eigenwerte und Eigenfunktionen der Sturm-Liouvilleschen Aufgabe sowie Entwicklungssätze

Wie schon angekündigt, ist der wesentliche Teil des Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems mit der Lösung des Eigenwertproblems für den Fredholmschen Integraloperator schon gelöst. Die entscheidende Brücke wird durch den folgenden Satz geschlagen:

Satz 6.2.13 *Genau dann ist μ ein Eigenwert des Fredholmschen Integraloperators K , wenn $\lambda = \frac{1}{\mu}$ ein Eigenwert der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe ist. Die Eigenfunktion kann dabei jeweils identisch gewählt werden.*

Beweis:

Man formt die Eigenschaft, daß μ ein Eigenwert von K mit zugehöriger Eigenfunktion v ist, äquivalent um (beachte $|\mu| \neq 0$) und erhält:

$$\begin{aligned} \exists 0 \neq v \in C[0, 1] \quad & Kv = \mu v \\ \iff v - \frac{1}{\mu} Kv = 0 & \\ \iff v - \lambda Kv = 0 & . \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 6.2.6 bedeutet dies aber nichts anderes, als daß v eine Eigenlösung der Sturm-Liouvilleschen Aufgabe zum Eigenwert λ ist. □

Bemerkung 6.2.14 *Nach dem Ergebnis des letzten Satzes in Verbindung mit Lemma 6.2.3 ist auch klar, daß für das von uns betrachtete Problem alle Eigenwerte der Fredholmschen Integralgleichung positiv sind.*

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, das zentrale Ergebnis über die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe zu formulieren.

Satz 6.2.15 (Eigenwerte und Eigenfunktionen des Sturm-Liouvilleschen EWP)

Es existiert eine alle Eigenwerte von (6.11) enthaltende Folge λ_n , $n \in \mathbb{N}$ und ein zugehöriges a -Orthonormalsystem von Eigenfunktionen $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$(a) \quad Lv_n + \lambda_n av_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(b) \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

$$(c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty, \text{ das heißt, die Eigenwerte divergieren bestimmt gegen } \infty.$$

(d) Alle Eigenwerte sind einfach, das heißt, alle Eigenräume sind eindimensional. Man erhält also alle Eigenvektoren zum Eigenwert λ_n in der Form cv_n , $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Beweis:

Die Behauptung folgt unmittelbar aus den Sätzen 6.2.12 und 6.2.13 (man beachte auch Lemma 6.2.3). □

Von besonderem Interesse für uns sind nun sogenannte Entwicklungssätze, das heißt solche Ergebnisse, die sicherstellen, daß eine bestimmte Klasse von Funktionen sich (in einer quasi verallgemeinerten Fourierreiheentwicklung, vergleiche dazu etwa Satz 3.2.5) nach dem eben gefundenen System von Eigenfunktionen entwickeln lassen. Wir nennen in diesem Zusammenhang drei derartige Ergebnisse, wobei die allgemeinen Voraussetzungen der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe und die vorangegangenen Ergebnisse, insbesondere Satz 6.2.15 immer stillschweigend mit vorausgesetzt werden:

Satz 6.2.16 Jede Funktion $v \in V_0$ (zur Definition von V_0 siehe (6.13)) besitzt eine Entwicklung

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (v, v_n)_a v_n(x)$$

in eine auf $[0, 1]$ gleichmäßig und absolut konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis:

Siehe zum Beispiel [Heu95] Seite 409f. □

Bemerkung 6.2.17 Die Zahlen

$$(v, v_n)_a = \int_0^1 v(x)v_n(x)a(x) dx$$

nennt man naheliegenderweise Fourierkoeffizienten von v bezüglich der a -Orthonormalfolge $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Die Voraussetzungen des Satzes 6.2.16 lassen sich noch erheblich abschwächen, er bleibt auch für nur stückweise stetig differenzierbare Funktionen in Kraft. Wir formulieren eine Variante für stetig differenzierbare Funktionen, ganz in Analogie zu Satz 3.2.5.

Satz 6.2.18 *Jede Funktion $v \in D^a$, wobei D^a gegeben ist durch*

$$D^a := \{v \in C^1[0, 1] \mid v(0) = v(1) = 0\} \quad (6.16)$$

besitzt eine Entwicklung

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (v, v_n)_a v_n(x)$$

in eine auf $[0, 1]$ gleichmäßig und absolut konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis:

Siehe zum Beispiel [Heu95] Seite 410. Vergleiche auch [Kam50].

□

Bemerkung 6.2.19 *Der Funktionenraum D^a ist identisch mit dem in Definition 3.3.1 erklärten Datenraum D für das Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung. Der obere Index a wäre also entbehrlich. Da wir jedoch zum einen den allgemeineren Rahmen der jetzigen Untersuchungen verdeutlichen wollen und zum zweiten wie zuvor endlichdimensionale Teilräume von D^a erklären werden, die von den zuvor definierten endlichdimensionalen Räumen verschieden sind, benutzen wir auch weiterhin den Index a , um diese Tatsachen zu betonen.*

Ein letzter Entwicklungssatz verallgemeinert nochmals die Klasse von Funktionen, die entwickelt werden, allerdings muß dafür auch die Behauptung abgeschwächt werden; man erhält jetzt nur noch Konvergenz im Sinne der L_2 - beziehungsweise der mit a gewichteten L_2 -Norm.

Satz 6.2.20 *Jede Funktion $v \in L_2(0, 1)$ besitzt die bezüglich der L_2 - und der mit a gewichteten L_2 -Norm konvergente Entwicklung*

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (v, v_n)_a v_n(x),$$

das heißt, mit der Bezeichnung

$$s_N(x) = \sum_{n=1}^N (v, v_n)_a v_n(x)$$

gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|v - s_N\|_{L_2(0,1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \|v - s_N\|_a = 0 \quad .$$

Beweis:

Siehe zum Beispiel [Heu95] Seite 411ff. □

Auch die aus der Fourieranalysis bekannte Parsevalsche Gleichung, die für unsere früheren Untersuchungen eine wichtige Rolle gespielt hat (siehe z.B. (4.42)), behält in dem gegenwärtigen allgemeineren Rahmen ihre Gültigkeit:

Satz 6.2.21 (verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung) Sei $v \in L_2(0, 1)$ beliebig. Dann gilt

$$\|v\|_a^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (v, v_n)_a^2$$

oder ausführlich aufgeschrieben

$$\int_0^1 v^2(x)a(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 v(x)v_n(x)a(x) dx \right)^2 .$$

Beweis:

Siehe zum Beispiel [Heu95] Seite 413. □

Abschließend wird es nun noch darum gehen, die Eigenwerte als Vorbereitung für spätere Ergebnisse nach oben und nach unten abzuschätzen. Von besonderer Bedeutung ist dabei ein nach Richard Courant benanntes Extremalprinzip:

Satz 6.2.22 (Courantsches Minimum-Maximumprinzip) Der Eigenwert λ_k , $k \in \mathbb{N}$ der als volldefinit (siehe Bemerkung 6.2.4) vorausgesetzten Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe besitzt die Darstellung

$$\lambda_k = \min_{\dim W=k} \max_{0 \neq v \in W} R(v), \quad (6.17)$$

wobei der Rayleigh-Quotient R erklärt ist durch

$$R(v) := \frac{-(Lv, v)_{L_2}}{\|v\|_a^2}$$

und das Minimum über alle linearen Teilräume $W \subset V_0$ der Dimension k gebildet wird.

Beweis:

Siehe zum Beispiel [Heu95] Seite 432f. □

Folgerung 6.2.23 Der Rayleigh-Quotient R aus Satz 6.2.22 besitzt für jede Funktion $v \in V_0$ die Darstellung

$$R(v) = \frac{\|v'\|_a^2}{\|v\|_a^2}$$

und somit kann man λ_k , $k \in \mathbb{N}$ mittels

$$\lambda_k = \min_{\dim W=k} \max_{0 \neq v \in W} \frac{\|v'\|_a^2}{\|v\|_a^2} \quad (6.18)$$

ausdrücken (W ist jeweils linearer Teilraum von V_0).

Beweis:

Es ist $-(Lv, v)_{L_2} = \|v'\|_a^2$ zu zeigen. Man formt also die linke Seite folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} & -(Lv, v)_{L_2} \\ &= - \int_0^1 (a(x)v'(x))' v(x) dx \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} - \underbrace{[a(x)v'(x)v(x)]_0^1}_{=0} + \int_0^1 (v'(x))^2 a(x) dx \\ &= \|v'\|_a^2 \quad . \end{aligned}$$

Dies zeigt die behauptete Darstellung des Rayleigh-Quotienten. Setzt man diese nun in (6.17) ein, so ist damit auch (6.18) bewiesen. □

Folgerung 6.2.24 *Im Falle $a \equiv 1$ gilt*

$$\lambda_k = k^2 \pi^2 = \min_{\dim W=k} \max_{0 \neq v \in W} \frac{\|v'\|_{L_2}^2}{\|v\|_{L_2}^2}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (6.19)$$

(W ist jeweils linearer Teilraum von V_0).

Beweis:

Im angegebenen Spezialfall vereinfacht sich die Differentialgleichung $Lv + \lambda av = 0$ zu $v'' + \lambda v = 0$ mit den zugehörigen Randbedingungen $v(0) = v(1) = 0$. Ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung ist gegeben durch

$$v_1(x) = \sin(\sqrt{\lambda}x) \quad , \quad v_2(x) = \cos(\sqrt{\lambda}x) \quad ,$$

so daß die allgemeine Lösung die Gestalt

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x)$$

hat. Die Randbedingung $v(0) = 0$ führt sofort auf $C_2 = 0$ und die zweite Randbedingung liefert die Bedingung $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$, also $\sqrt{\lambda} = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ beziehungsweise $\lambda = k^2 \pi^2$, $k \in \mathbb{N}$. Man hat also die paarweise verschiedenen Eigenwerte $k^2 \pi^2$ mit zugehörigen Eigenfunktionen

$\sin(k\pi x)$. Dieses Ergebnis deckt sich mit unseren früheren Untersuchungen zur Laplace-Gleichung (vergleiche zum Beispiel die Lösungsdarstellungen (4.1) und (6.3.1), in denen die Eigenwerte und Eigenfunktionen auftreten). Die Minimum-Maximumdarstellung der Eigenwerte ist eine direkte Folgerung aus (6.18), wenn man beachtet, daß die a -Norm für $a \equiv 1$ in die L_2 -Norm übergeht.

□

Nun folgt für den allgemeinen Fall die angekündigte Abschätzung der Eigenwerte nach oben und nach unten:

Satz 6.2.25 *Unter den allgemeinen Voraussetzungen dieses Kapitels hat man für die Eigenwerte der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe die beidseitige Abschätzung*

$$\frac{r_a}{R_a} k^2 \pi^2 \leq \lambda_k \leq \frac{R_a}{r_a} k^2 \pi^2 \quad , \quad k \in \mathbb{N} \quad . \quad (6.20)$$

Beweis:

Mit Hilfe der Äquivalenz von a -Norm und L_2 -Norm, wie wir sie in Satz 6.2.8 gezeigt haben, zeigt man für beliebiges $v \in L_2(0, 1)$ die Ungleichungen

$$\frac{r_a \|v'\|_{L_2}^2}{R_a \|v\|_{L_2}^2} \leq \frac{\|v'\|_a^2}{\|v\|_a^2} \leq \frac{R_a \|v'\|_{L_2}^2}{r_a \|v\|_{L_2}^2} \quad . \quad (6.21)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} & \frac{r_a}{R_a} k^2 \pi^2 \\ (6.19) \quad & \stackrel{=}{=} \frac{r_a}{R_a} \min_{\dim W=k} \max_{0 \neq v \in W} \frac{\|v'\|_{L_2}^2}{\|v\|_{L_2}^2} \\ & = \min_{\dim W=k} \max_{0 \neq v \in W} \frac{r_a \|v'\|_{L_2}^2}{R_a \|v\|_{L_2}^2} \\ (6.21) \quad & \leq \min_{\dim W=k} \max_{0 \neq v \in W} \frac{\|v'\|_a^2}{\|v\|_a^2} \stackrel{(6.18)}{=} \lambda_k \\ (6.21) \quad & \leq \min_{\dim W=k} \max_{0 \neq v \in W} \frac{R_a \|v'\|_{L_2}^2}{r_a \|v\|_{L_2}^2} \\ & = \frac{R_a}{r_a} \min_{\dim W=k} \max_{0 \neq v \in W} \frac{\|v'\|_{L_2}^2}{\|v\|_{L_2}^2} \\ (6.19) \quad & \stackrel{=}{=} \frac{R_a}{r_a} k^2 \pi^2 \quad , \end{aligned}$$

so daß die Behauptung vollständig bewiesen ist.

□

6.3 Lösungsdarstellung und Stabilitätssatz für das kontinuierliche Problem

6.3.1 Lösungsdarstellung des Cauchy-Problems

Nachdem wir nun das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem in ausreichender Weise beherrschen, können wir uns nun der zu Beginn des laufenden Kapitels 6 begonnenen und dann aufgrund der nötigen Zwischenbetrachtungen unterbrochenen Untersuchungen zur Lösung des Problems 5.1.4 mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen zuwenden.

Wie wir eben festgestellt haben, gibt es abzählbar viele positive Eigenwerte λ_n , $n \in \mathbb{N}$ und ein zugehöriges Orthonormalsystem $\{v_n | n \in \mathbb{N}\}$ von Eigenvektoren zu der Sturm-Liouvilleschen Aufgabe (6.5), bei der wir unsere Untersuchungen vorläufig abgebrochen hatten. In Verbindung mit (6.4) folgt dann sofort, daß

$$C_k u_k(x, y) = C_k v_k(x) \sinh(\sqrt{\lambda_k} y)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Lösung von

$$L_a u_k = 0 \quad , \quad u_k(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq 1 \quad , \quad u_k(0, y) = u_k(1, y) = 0, 0 \leq y \leq r_{max}$$

ist, so daß lediglich noch die Neumann-Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \phi_1(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{6.22}$$

zu erfüllen ist, um eine Lösung von Problem 5.1.4 zu erhalten. Dazu wenden wir das Superpositionsprinzip an, um u in der Form

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k u_k(x, y) \tag{6.23}$$

zu erhalten und passen die bis jetzt noch beliebigen Konstanten C_k , $k \in \mathbb{N}$ so an, daß die Neumann-Randbedingung (6.22) erfüllt wird. Dies führt auf die Forderung

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k u_k(x, y) \right) \Big|_{y=0} = \phi_1(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

und unter der Annahme der Vertauschbarkeit von Summation und Differentiation führt dies auf

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\partial u_k}{\partial y}(x, 0) = \phi_1(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \iff & \sum_{k=1}^{\infty} C_k v_k(x) \underbrace{\sqrt{\lambda_k} \cosh(\sqrt{\lambda_k} \cdot 0)}_{=1} = \phi_1(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \iff & \sum_{k=1}^{\infty} C_k v_k(x) \sqrt{\lambda_k} = \phi_1(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad . \end{aligned}$$

Bildet man nun sukzessive das a -Skalarprodukt von ϕ_1 mit den Eigenfunktionen v_j , $j \in \mathbb{N}$, so folgt

$$\begin{aligned} & (\phi_1, v_j)_a \\ &= \left(\sum_{k=1}^n C_k v_k \sqrt{\lambda_k}, v_j \right)_a \\ &\stackrel{(6.2.7)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sqrt{\lambda_k} \underbrace{(v_k, v_j)_a}_{=\delta_{j,k}} \\ &= C_j \sqrt{\lambda_j} \end{aligned}$$

und daraus nach Division durch $\sqrt{\lambda_j}$ die Forderung

$$C_k = \frac{(\phi_1, v_k)_a}{\sqrt{\lambda_k}}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (6.24)$$

an die Koeffizienten. Nutzt man nun umgekehrt (6.24) zur Definition der C_k , $k \in \mathbb{N}$, so erhält man durch Einsetzen in (6.23) als endgültige Lösungsdarstellung

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\phi_1, v_k)_a}{\sqrt{\lambda_k}} v_k(x) \sinh(\sqrt{\lambda_k} y) \quad . \quad (6.25)$$

Wir halten dieses Ergebnis in dem nachfolgenden Satz fest:

Satz 6.3.1 (Darstellung der exakten Lösung des kontinuierlichen Problems)

Setzt man

$$b_k := (\phi_1, v_k)_a, \quad k \in \mathbb{N},$$

so löst

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}} v_k(x) \sinh(\sqrt{\lambda_k} y)}_{=u_k(x, y)} \quad (6.26)$$

Problem 5.1.4, sofern diese Reihe mindestens zweimal gliedweise nach x und y differenziert werden darf.

Beweis:

Der Beweis erfolgt durch einfaches Nachrechnen. □

6.3.2 Verallgemeinerung des kontinuierlichen Stabilitätssatzes

Die nun folgenden Überlegungen verallgemeinern die Stabilitätsergebnisse, die wir in Kapitel 4 für den Fall der Laplace-Gleichung gewonnen haben, auf die im laufenden Kontext zur

Diskussion stehende Differentialgleichung (5.1) beziehungsweise das entsprechende Cauchy-Problem 5.1.4. Dabei werden sich die bisherigen Erkenntnisse dieses Kapitels insbesondere zu den Eigenwerten und Eigenlösungen der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe und die daraus gewonnene Lösungsdarstellung (6.26) als äußerst hilfreich erweisen.

Zu Beginn gewinnen wir in Analogie zu Lemma 4.1.3 das nachfolgende

Lemma 6.3.2 *Die Reihe (6.26) sei konvergent für alle $(x, y) \in [0, 1] \times [0, r_{max}]$ und gleichmäßig konvergent in der Variablen x , $x \in [0, 1]$. Dann gilt für jedes feste $y \in [0, r_{max}]$ die Gleichung*

$$N_a(y) := \|u(\cdot, y)\|_a^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^2}{\lambda_k} \sinh^2(\sqrt{\lambda_k} y), \quad (6.27)$$

wobei die Bezeichnung $b_k = (\phi_1, v_k)_a$, $k \in \mathbb{N}$ Verwendung findet.

Beweis:

Laut Voraussetzung konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y)$ auf dem gesamten Definitionsbereich punktweise gegen $u(x, y)$. Es gilt also

$$\begin{aligned} & N_a(y) \\ &= \int_0^1 u^2(x, y) a(x) dx \\ &= \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k(x, y) \right)^2 a(x) dx \\ &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n u_k(x, y) \right)^2 a(x) dx \\ &= \int_0^1 \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{b_k b_l}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}} v_k(x) v_l(x) \sinh(\sqrt{\lambda_k} y) \sinh(\sqrt{\lambda_l} y) a(x) dx \quad . \end{aligned}$$

Nun sieht man leicht ein, daß $\tilde{s}_n = \sum_{k=1}^n u_k(x, y) \sqrt{a(x)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ beschränkt ist und weiter konvergiert \tilde{s}_n als Produkt der beschränkten Funktion \sqrt{a} mit der nach Voraussetzung gleichmäßig konvergenten Folge $s_n = \sum_{k=1}^n u_k(x, y)$ ebenfalls gleichmäßig (vergleiche dazu auch [Heu01] Band 1, Aufgabe 103.10, Seite 549) in der Variablen x gegen $u \cdot \sqrt{a}$. Somit folgt mit dem schon in Lemma 4.1.3 zitierten Satz (siehe ebenfalls [Heu01] Band 1, Satz 103.5) die gleichmäßige Konvergenz von $(\tilde{s}_n)^2$ gegen $u^2(x, y) a(x)$, so daß die Reihenfolge von Integration

und Summation auch hier vertauscht werden darf und man weiter hinschreiben kann:

$$\begin{aligned}
 & N(y) \\
 &= \sum_{k,l=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{b_k b_l}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}} v_k(x) v_l(x) \sinh(\sqrt{\lambda_k} y) \sinh(\sqrt{\lambda_l} y) a(x) dx \right) \\
 &= \sum_{k,l=1}^{\infty} \left(\frac{b_k b_l}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}} \sinh(\sqrt{\lambda_k} y) \sinh(\sqrt{\lambda_l} y) \underbrace{\int_0^1 v_k(x) v_l(x) a(x) dx}_{=\delta_{k,l}} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^2}{\lambda_k} \sinh^2(\sqrt{\lambda_k} y),
 \end{aligned}$$

womit der Beweis abgeschlossen ist. □

Nun beginnen wir mit der näheren Untersuchung der Reihe (6.27) und formulieren dabei ein Analogon zu Satz 4.1.15, wobei das wesentliche Ergebnis wieder die gleichmäßige Konvergenz der zweiten Ableitung der logarithmierten Partialsummen der untersuchten Reihe sein wird.

Satz 6.3.3 *Auf dem kompakten Intervall $[y_0, r_{max}]$, $0 < y_0 < r_{max}$ seien die Funktionen*

$$f_k(y) = \frac{\sinh^2(\sqrt{\lambda_k} y)}{y^2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$s_n(y) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k^2}{\lambda_k} f_k(y), \quad n \in \mathbb{N}$$

und

$$F_n(y) = \ln(s_n(y))$$

definiert, wobei die Koeffizienten b_k so (klein) gewählt seien, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \exp(2\sqrt{\lambda_k} r_{max}) \tag{6.28}$$

(absolut) gegen $S \geq 0$ konvergiert. Dann gilt:

(a) Man hat für $F_n''(y) = \frac{d^2}{dy^2} F_n(y)$ die Darstellung

$$\begin{aligned}
& F_n''(y) \\
&= 4 \left(\sum_{k,l=1}^n \frac{(b_k b_l)^2}{\lambda_k \lambda_l} \left[\lambda_k \cosh(2\sqrt{\lambda_k} y) (\cosh(2\sqrt{\lambda_l} y) - 1) \right. \right. \\
&\quad - \sqrt{\lambda_k \lambda_l} \sinh(2\sqrt{\lambda_k} y) \sinh(2\sqrt{\lambda_l} y) \\
&\quad - \sqrt{\lambda_k} \sinh(2\sqrt{\lambda_k} y) (\cosh(2\sqrt{\lambda_l} y) - 1) y^{-1} \\
&\quad + \sqrt{\lambda_l} (\cosh(2\sqrt{\lambda_k} y) - 1) \sinh(2\sqrt{\lambda_l} y) y^{-1} \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (\cosh(2\sqrt{\lambda_k} y) - 1) (\cosh(2\sqrt{\lambda_l} y) - 1) y^{-2} \right] \right) \\
&: \left(\sum_{k,l=1}^n \frac{(b_k b_l)^2}{\lambda_k \lambda_l} (\cosh(2\sqrt{\lambda_k} y) - 1) (\cosh(2\sqrt{\lambda_l} y) - 1) \right) \quad . \quad (6.29)
\end{aligned}$$

(b) $(F_n'')_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf $[y_0, r_{\max}]$.

(c) Die Funktionenfolgen $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(F_n')_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren gleichmäßig (und daher auch punktweise) auf $[y_0, r_{\max}]$.

Beweis:

Zu (a):

Die allgemeine Darstellung von $F_n''(y)$ lautet in Analogie zu (4.24)

$$\begin{aligned}
& F_n''(y) \\
&= \left(\ln \left(\sum_{k=1}^n \frac{b_k^2}{\lambda_k} f_k(y) \right) \right)'' \\
&= \left(\frac{\sum_{k=1}^n \frac{b_k^2}{\lambda_k} f_k'(y)}{\sum_{k=1}^n \frac{b_k^2}{\lambda_k} f_k(y)} \right)' \\
&= \frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{b_k^2}{\lambda_k} f_k''(y) \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^n \frac{b_l^2}{\lambda_l} f_l(y) \right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{b_k^2}{\lambda_k} f_k'(y) \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^n \frac{b_l^2}{\lambda_l} f_l'(y) \right)}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{b_k^2}{\lambda_k} f_k(y) \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^n \frac{b_l^2}{\lambda_l} f_l(y) \right)} \\
&= \frac{\sum_{k,l=1}^n \frac{(b_k b_l)^2}{\lambda_k \lambda_l} (f_k''(y) f_l(y) - f_k'(y) f_l'(y))}{\sum_{k,l=1}^n \frac{(b_k b_l)^2}{\lambda_k \lambda_l} f_k(y) f_l(y)} \quad (6.30)
\end{aligned}$$

und analog zu (4.25) beziehungsweise (4.27) rechnet man

$$\begin{aligned}
& f'_k(y) \\
= & \left(\sinh^2 \left(\sqrt{\lambda_k} y \right) y^{-2} \right)' \\
= & 2\sqrt{\lambda_k} \sinh \left(\sqrt{\lambda_k} y \right) \cosh \left(\sqrt{\lambda_k} y \right) y^{-2} - 2 \sinh^2 \left(\sqrt{\lambda_k} y \right) y^{-3} \\
\stackrel{(4.12),(4.14)}{=} & \sqrt{\lambda_k} \sinh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) y^{-2} - \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) - 1 \right) y^{-3}
\end{aligned} \tag{6.31}$$

und

$$\begin{aligned}
& f''_k(y) \\
\stackrel{(6.31)}{=} & \sqrt{\lambda_k} \left(2\sqrt{\lambda_k} \cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) y^{-2} - 2 \sinh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) y^{-3} \right) \\
& - \left(2\sqrt{\lambda_k} \sinh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) y^{-3} - 3 \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) - 1 \right) y^{-4} \right) \\
= & 2\lambda_k \cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) y^{-2} - 4\sqrt{\lambda_k} \sinh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) y^{-3} \\
& + 3 \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) - 1 \right) y^{-4}
\end{aligned} \tag{6.32}$$

aus.

Die entsprechende Beziehung zu (4.29) ergibt sich durch Einsetzen von (6.31) und (6.32) in (6.30), wobei wir wiederum Zähler und Nenner getrennt sowie nur den jeweils relevanten hinteren Term unter der jeweiligen Summe betrachten. Schließlich berücksichtigt man noch $f_k(y) \stackrel{(4.14)}{=} \frac{1}{2} \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) - 1 \right) y^{-2}$ und wird insgesamt für den Zähler auf

$$\begin{aligned}
& f''_k(y) f_l(y) - f'_k(y) f'_l(y) \\
\stackrel{(6.31),(6.32)}{=} & \left(2\lambda_k \cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) y^{-2} - 4\sqrt{\lambda_k} \sinh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) y^{-3} \right. \\
& \left. + 3 \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) - 1 \right) y^{-4} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_l} y \right) - 1 \right) y^{-2} \\
& - \left(\sqrt{\lambda_k} \sinh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) y^{-2} - \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) - 1 \right) y^{-3} \right) \\
& \cdot \left(\sqrt{\lambda_l} \sinh \left(2\sqrt{\lambda_l} y \right) y^{-2} - \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_l} y \right) - 1 \right) y^{-3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda_k \cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_l} y \right) - 1 \right) y^{-4} \\
&\quad - 2\sqrt{\lambda_k} \sinh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_l} y \right) - 1 \right) y^{-5} \\
&\quad + \frac{3}{2} \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) - 1 \right) \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_l} y \right) - 1 \right) y^{-6} \\
&\quad - \sqrt{\lambda_k \lambda_l} \sinh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) \sinh \left(2\sqrt{\lambda_l} y \right) y^{-4} \\
&\quad + \sqrt{\lambda_l} \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) - 1 \right) \sinh \left(2\sqrt{\lambda_l} y \right) y^{-5} \\
&\quad + \sqrt{\lambda_k} \sinh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_l} y \right) - 1 \right) y^{-5} \\
&\quad - \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) - 1 \right) \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_l} y \right) - 1 \right) y^{-6} \\
&= \lambda_k \cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_l} y \right) - 1 \right) y^{-4} \\
&\quad - \sqrt{\lambda_k \lambda_l} \sinh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) \sinh \left(2\sqrt{\lambda_l} y \right) y^{-4} \\
&\quad - \sqrt{\lambda_k} \sinh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_l} y \right) - 1 \right) y^{-5} \\
&\quad + \sqrt{\lambda_l} \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) - 1 \right) \sinh \left(2\sqrt{\lambda_l} y \right) y^{-5} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) - 1 \right) \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_l} y \right) - 1 \right) y^{-6} \tag{6.33}
\end{aligned}$$

und für den Nenner auf

$$\begin{aligned}
&f_k(y) f_l(y) \\
&\stackrel{(4.14)}{=} \frac{1}{2} \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) - 1 \right) y^{-2} \cdot \frac{1}{2} \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_l} y \right) - 1 \right) y^{-2} \\
&= \frac{1}{4} \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) - 1 \right) \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_l} y \right) - 1 \right) y^{-4}
\end{aligned}$$

geführt. Division von Zähler und Nenner durch $\frac{1}{4}y^{-4}$ beweist nun die in (a) behauptete Darstellung von $F_n''(y)$.

Zu (b):

Man setzt in (6.33) $k = l$ und erhält

$$\begin{aligned}
&f_k''(y) f_k - (f_k'(y))^2 \\
&\stackrel{(6.33)}{=} \lambda_k \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) - 1 \right) - \sinh^2 \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) \right) y^{-4} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) - 1 \right)^2 y^{-6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(4.15)}{=} \lambda_k \left(1 - \cosh \left(2\sqrt{\lambda_k}y\right)\right) y^{-4} + \frac{1}{2} \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_k}y\right) - 1\right)^2 y^{-6} \\
&\stackrel{(4.14)}{=} -2\lambda_k \sinh^2 \left(\sqrt{\lambda_k}y\right) y^{-4} + 2 \sinh^4 \left(\sqrt{\lambda_k}y\right) y^{-6} \\
&= 2 \sinh^2 \left(\sqrt{\lambda_k}y\right) y^{-6} \left(\sinh^2 \left(\sqrt{\lambda_k}y\right) - \left(\sqrt{\lambda_k}y\right)^2\right) \\
&\stackrel{(4.16)}{\geq} 0,
\end{aligned} \tag{6.34}$$

also die logarithmische Konvexität von f_k , $k \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 4.1.8 (c) hat man daher auch die logarithmische Konvexität von

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{b_k^2}{\lambda_k} f_k,$$

was nach Lemma 4.1.6 bedeutet, daß

$$F_n''(y) \geq 0 \quad \forall y \in [y_0, r_{max}] \forall n \in \mathbb{N} \tag{6.35}$$

gilt, so daß auch die zu (4.30) analoge Ungleichung gezeigt ist.

Nun bezeichne wiederum $G_n(y) = \sum_{k,l=1}^n g_{k,l}(y)$ den Zähler und $H_n(y) = \sum_{k,l=1}^n h_{k,l}(y)$ den Nenner in der Darstellung (6.29) von $F_n''(y)$. Man schätzt nun $|g_{k,l}|$ folgendermaßen nach oben ab:

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(6.29)}{=} \left| \frac{|g_{k,l}(y)|}{4 \frac{(b_k b_l)^2}{\lambda_k \lambda_l}} \left[\lambda_k \cosh \left(2\sqrt{\lambda_k}y\right) \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_l}y\right) - 1\right) \right. \right. \\
&\quad - \sqrt{\lambda_k \lambda_l} \sinh \left(2\sqrt{\lambda_k}y\right) \sinh \left(2\sqrt{\lambda_l}y\right) \\
&\quad - \sqrt{\lambda_k} \sinh \left(2\sqrt{\lambda_k}y\right) \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_l}y\right) - 1\right) y^{-1} \\
&\quad + \sqrt{\lambda_l} \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_k}y\right) - 1\right) \sinh \left(2\sqrt{\lambda_l}y\right) y^{-1} \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_k}y\right) - 1\right) \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_l}y\right) - 1\right) y^{-2} \right] \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 4 \frac{(b_k b_l)^2}{\lambda_k \lambda_l} \left[\lambda_k \cosh(2\sqrt{\lambda_k} y) (\cosh(2\sqrt{\lambda_l} y) - 1) \right. \\
&\quad + \sqrt{\lambda_k \lambda_l} \sinh(2\sqrt{\lambda_k} y) \sinh(2\sqrt{\lambda_l} y) \\
&\quad + \sqrt{\lambda_k} \sinh(2\sqrt{\lambda_k} y) (\cosh(2\sqrt{\lambda_l} y) - 1) y^{-1} \\
&\quad + \sqrt{\lambda_l} (\cosh(2\sqrt{\lambda_k} y) - 1) \sinh(2\sqrt{\lambda_l} y) y^{-1} \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\cosh(2\sqrt{\lambda_k} y) - 1) (\cosh(2\sqrt{\lambda_l} y) - 1) y^{-2} \right] \\
&\stackrel{(4.18)}{\leq} 4 \frac{(b_k b_l)^2}{\lambda_k \lambda_l} \left(\lambda_k + \sqrt{\lambda_k \lambda_l} + \sqrt{\lambda_k} y^{-1} + \sqrt{\lambda_l} y^{-1} + \frac{1}{2} y^{-2} \right) \\
&\quad \cdot \exp(2\sqrt{\lambda_k} y) \exp(2\sqrt{\lambda_l} y) \\
&= 4(b_k b_l)^2 \left(\underbrace{\frac{1}{\lambda_l}}_{\leq \frac{1}{\lambda_1}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}}}_{\leq \frac{1}{\lambda_1}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}}}_{\leq \frac{1}{\lambda_1^{\frac{3}{2}}}} y^{-1} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\lambda_l \lambda_k}}}_{\leq \frac{1}{\lambda_1^{\frac{3}{2}}}} y^{-1} + \frac{1}{2} y^{-2} \right) \\
&\quad \cdot \exp(2\sqrt{\lambda_k} y) \exp(2\sqrt{\lambda_l} y) \\
&\stackrel{\text{Satz 6.2.15 (b)}}{\leq} 8(b_k b_l)^2 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^{\frac{3}{2}}} y^{-1} + \frac{1}{4} y^{-2} \right) \cdot \exp(2\sqrt{\lambda_k} y) \exp(2\sqrt{\lambda_l} y) \\
&\stackrel{r_{max} \geq y \geq y_0}{\leq} 8(b_k b_l)^2 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^{\frac{3}{2}}} y_0^{-1} + \frac{1}{4} y_0^{-2} \right) \cdot \exp(2\sqrt{\lambda_k} r_{max}) \exp(2\sqrt{\lambda_l} r_{max})
\end{aligned}$$

Wenn man nun

$$\alpha_k := 8b_k^2 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^{\frac{3}{2}}} y_0^{-1} + \frac{1}{4} y_0^{-2} \right) \cdot \exp(2\sqrt{\lambda_k} r_{max}), \quad k \in \mathbb{N}$$

und

$$\beta_l := b_l^2 \exp(2\sqrt{\lambda_l} r_{max}), \quad l \in \mathbb{N}$$

definiert, so hat man laut Voraussetzung die (absolute) Konvergenz von $\sum_{k=1}^n \alpha_k$ gegen

$8 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^{\frac{3}{2}}} y_0^{-1} + \frac{1}{4} y_0^{-2} \right) S$ und von $\sum_{l=1}^{\infty} \beta_l$ gegen S . Daher ist nach Lemma 4.1.14 G_n gleichmäßig konvergent auf $[y_0, r_{max}]$.

Weiter ist $|G_n|$ auch gleichmäßig nach oben beschränkt, denn wenn man die eben gezeigte

Abschätzung für $|g_{k,l}|$ verwendet, erhält man das Ergebnis

$$\begin{aligned}
& |G_n(y)| \\
&= \left| \sum_{k,l=1}^n g_{k,l}(y) \right| \\
&\leq \sum_{k,l=1}^n |g_{k,l}(y)| \\
&\leq 8 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^{\frac{3}{2}}} y_0^{-1} + \frac{1}{4} y_0^{-2} \right) \sum_{k,l=1}^n (b_k b_l)^2 \exp\left(2\sqrt{\lambda_k} r_{max}\right) \exp\left(2\sqrt{\lambda_l} r_{max}\right) \\
&= 8 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^{\frac{3}{2}}} y_0^{-1} + \frac{1}{4} y_0^{-2} \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \exp\left(2\sqrt{\lambda_k} r_{max}\right) \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^n b_l^2 \exp\left(2\sqrt{\lambda_l} r_{max}\right) \right) \\
&= 8 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^{\frac{3}{2}}} y_0^{-1} + \frac{1}{4} y_0^{-2} \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \exp\left(2\sqrt{\lambda_k} r_{max}\right) \right)^2 \\
&\leq 8 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^{\frac{3}{2}}} y_0^{-1} + \frac{1}{4} y_0^{-2} \right) S^2 \\
&=: m_2
\end{aligned}$$

Die Untersuchung des Nenners bietet nun keine weiteren Schwierigkeiten mehr. Die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& |h_{k,l}(y)| \\
&= \frac{(b_k b_l)^2}{\lambda_k \lambda_l} \left(\cosh\left(2\sqrt{\lambda_k} y\right) - 1 \right) \left(\cosh\left(2\sqrt{\lambda_l} y\right) - 1 \right) \\
&\leq \frac{(b_k b_l)^2}{\lambda_1^2} \exp\left(2\sqrt{\lambda_k} r_{max}\right) \exp\left(2\sqrt{\lambda_l} r_{max}\right)
\end{aligned}$$

sichert, wenn man jetzt $\alpha_k := \frac{b_k^2}{\lambda_1^2} \exp\left(2\sqrt{\lambda_k} r_{max}\right)$, $k \in \mathbb{N}$ und $\beta_l = \exp\left(2\sqrt{\lambda_l} r_{max}\right)$, $l \in \mathbb{N}$ setzt, nach analoger Argumentation wie schon bei Betrachtung des Zählers mit Hilfe von Lemma 4.1.14 die gleichmäßige Konvergenz des Nenners auf $[y_0, r_{max}]$.

Die ebenfalls erforderliche Abschätzung des Nenners nach unten gelingt, wenn man zunächst in Analogie zu (4.32) den Zusammenhang

$$\begin{aligned}
& \cosh\left(2\sqrt{\lambda_k} y\right) - 1 \\
&\geq \cosh\left(2\sqrt{\lambda_k} y_0\right) - 1 \\
&\geq \frac{(2\sqrt{\lambda_k} y_0)^2}{2} \\
&= 2\lambda_k y_0^2
\end{aligned}$$

einsieht, den man einsetzt, um

$$\begin{aligned}
 & |h_{k,l}(y)| \\
 &= \frac{(b_k b_l)^2}{\lambda_k \lambda_l} \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_k} y \right) - 1 \right) \left(\cosh \left(2\sqrt{\lambda_l} y \right) - 1 \right) \\
 &\geq 4 \frac{(b_k b_l)^2}{\lambda_k \lambda_l} \lambda_k \lambda_l y_0^4 \\
 &= 4(b_k b_l)^2 y_0^4
 \end{aligned}$$

zu gewinnen. Nimmt man nun an, daß etwa $b_{k_0} \neq 0$, $n \geq k_0 \in \mathbb{N}$ gilt (vergleiche auch die ausführlicheren Erläuterungen dazu in der entsprechenden Stelle im Beweis von Satz 4.1.15), so folgt leicht für den Nenner

$$\begin{aligned}
 & |H_n(y)| \\
 &= \sum_{k,l=1}^n |h_{k,l}(y)| \\
 &\geq 4y_0^4 \sum_{k,l=1}^n (b_k b_l)^2 \\
 &\geq 4(y_0 b_{k_0})^4 \\
 &=: \mu_1 > 0,
 \end{aligned}$$

womit insgesamt die Voraussetzungen von Lemma 4.1.10 (e) gesichert sind und daraus folgend die gleichmäßige Konvergenz von F_n'' auf $[y_0, r_{max}]$ gezeigt ist.

Zu (c):

Die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge s_n gegen eine Funktion s folgt unmittelbar aus dem Weierstraßschen Majorantenkriterium, nachdem man

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{b_k^2 \sinh^2(\sqrt{\lambda_k} y)}{\lambda_k y^2} \right| \\
 & \stackrel{y_0 \leq y \leq r_{max}}{\leq} \frac{b_k^2}{y_0^2 \lambda_k} \sinh^2(\sqrt{\lambda_k} r_{max}) \\
 & \stackrel{(4.18), \text{ Satz 6.2.15 (b)}}{\leq} \frac{1}{y_0^2 \lambda_1} b_k^2 \exp\left(2\sqrt{\lambda_k} r_{max}\right)
 \end{aligned}$$

gezeigt hat. Die Stetigkeit des \ln liefert dann zunächst die punktweise Konvergenz von $F_n(y) = \ln(s_n(y))$ gegen $F(y) := \ln(s(y))$ und da der Logarithmus auf $[y_0, r_{max}]$ gleichmäßig stetig ist, folgt

$$|F_n(y) - F(y)| = |\ln(s_n(y)) - \ln(s(y))| < \varepsilon,$$

falls $|s_n(y) - s(y)| < \delta(\varepsilon)$. Diese Bedingung gilt jedoch für fast alle $n \in \mathbb{N}$ unabhängig von y wegen der gleichmäßigen Konvergenz von s_n gegen s . Die gleichmäßige Konvergenz von F_n

gegen F ist damit bewiesen, so daß noch die Betrachtung von

$$F'_n(y) = \frac{s'_n(y)}{s_n(y)}$$

als letzter Teil des Beweises erfolgen muß. Die gleichmäßige Konvergenz des Nenners wurde bereits eben gezeigt. Darüberhinaus hat man (wie oben sei ohne Einschränkung $b_{k_0} \neq 0$ für $\mathbb{N} \ni k_0 \leq n$)

$$\begin{aligned} & |s_n(y)| \\ = & \sum_{k=1}^n \frac{b_k^2 \sinh^2(\sqrt{\lambda_k} y)}{\lambda_k y^2} \\ \geq & \frac{b_{k_0}^2 \sinh^2(\sqrt{\lambda_{k_0}} y)}{\lambda_{k_0} y^2} \\ \stackrel{r_{max} > y > y_0}{\geq} & \frac{b_{k_0}^2 \sinh^2(\sqrt{\lambda_{k_0}} y_0)}{\lambda_{k_0} r_{max}^2} \\ =: & \mu_1 > 0, \end{aligned}$$

also die Beschränktheit des Nenners durch eine positive Zahl nach unten.

Nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium konvergiert auch der Zähler wegen

$$\begin{aligned} & \left| \frac{b_k^2}{\lambda_k} f'_k(y) \right| \\ (6.31) \quad & \stackrel{=}{=} \frac{b_k^2}{\lambda_k} \left| \sqrt{\lambda_k} \sinh(2\sqrt{\lambda_k} y) y^{-2} - (\cosh(2\sqrt{\lambda_k} y) - 1) y^{-3} \right| \\ & \leq \frac{b_k^2}{\lambda_k} \left(\sqrt{\lambda_k} \sinh(2\sqrt{\lambda_k} y) y^{-2} + (\cosh(2\sqrt{\lambda_k} y) - 1) y^{-3} \right) \\ (4.18) \quad & \leq \frac{b_k^2}{\lambda_k} \left(\sqrt{\lambda_k} y^{-2} + y^{-3} \right) \exp(2\sqrt{\lambda_k} y) \\ & = b_k^2 \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}}_{\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}} y^{-2} + \underbrace{\frac{1}{\lambda_k}}_{\leq \frac{1}{\lambda_1}} y^{-3} \right) \exp(2\sqrt{\lambda_k} y) \\ \text{Satz 6.2.15 (b)} \quad & \leq b_k^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} y^{-2} + \frac{1}{\lambda_1} y^{-3} \right) \exp(2\sqrt{\lambda_k} y) \\ r_{max} \geq y \geq y_0 \quad & \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} y_0^{-2} + \frac{1}{\lambda_1} y_0^{-3} \right) b_k^2 \exp(2\sqrt{\lambda_k} r_{max}) \end{aligned} \tag{6.36}$$

gleichmäßig auf $[y_0, r_{max}]$ und ist wegen

$$\begin{aligned}
& |s'_n(y)| \\
&= \left| \sum_{k=1}^n \frac{b_k^2}{\lambda_k} f'_k(y) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{b_k^2}{\lambda_k} f'_k(y) \right| \\
&\stackrel{(6.36)}{\leq} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} y_0^{-2} + \frac{1}{\lambda_1} y_0^{-3} \right) \sum_{k=1}^n b_k^2 \exp \left(2\sqrt{\lambda_k} r_{max} \right) \\
&\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} y_0^{-2} + \frac{1}{\lambda_1} y_0^{-3} \right) S
\end{aligned}$$

nach oben beschränkt, so daß mittels Lemma 4.1.10 (e) insgesamt die gleichmäßige Konvergenz von F'_n auf $[y_0, r_{max}]$ folgt, was den Beweis abschließt. \square

Folgerung 6.3.4 *Mit den Bezeichnungen und unter den Voraussetzungen des vorangegangenen Satzes 6.3.3 gilt*

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} \ln \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^2 \sinh^2(\sqrt{\lambda_k} y)}{\lambda_k y^2} \right) \right) (y) \geq 0, \quad y \in [y_0, r_{max}],$$

mit anderen Worten: Die Funktion

$$F(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^2 \sinh^2(\sqrt{\lambda_k} y)}{\lambda_k y^2}$$

ist logarithmisch konvex auf jedem kompakten Intervall $[y_0, r_{max}]$, $0 < y_0 \leq r_{max}$.

Beweis:

Nach (6.35) ist

$$F_n(y) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k^2 \sinh^2(\sqrt{\lambda_k} y)}{\lambda_k y^2}$$

logarithmisch konvex und nach Satz 6.3.3 (b) konvergiert F''_n gleichmäßig auf $[y_0, r_{max}]$. Weiter konvergieren nach Satz 6.3.3 (c) auch F_n und F'_n in jeweils mindestens einem Punkt aus $[y_0, r_{max}]$ (die Konvergenz ist ja sogar gleichmäßig auf dem ganzen Intervall). Nach Lemma 4.1.8 (d) ist daher auch $F = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$ logarithmisch konvex. \square

An diesem Punkt unserer Untersuchungen, deren Ziel ja eine Stabilitätsabschätzung ist, bei der die Daten am unteren Rand Σ_1 eingehen, muß nun wiederum analysiert werden, was beim Grenzübergang $y_0 \rightarrow 0$ mit der Funktion

$$s(y) = \frac{N_a(y)}{y^2}$$

geschieht. Zum Teil können wir die Hilfsergebnisse aus Lemma 4.1.18 einfach übernehmen (Teil (a),(b)), zum Teil müssen auch sie verallgemeinert werden (Teil (c)). Dies leistet das folgende

Lemma 6.3.5 *Es gilt*

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{\sinh^2(\sqrt{\lambda_k} y_0)}{\lambda_k y_0^2} = 1 \quad (6.37)$$

und für $s(y_0) = \frac{N_a(y_0)}{y_0^2}$ hat man den Grenzwert

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{N_a(y_0)}{y_0^2} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \quad . \quad (6.38)$$

Darüberhinaus gelten für jedes feste $y \in (0, r_{max}]$ die Zusammenhänge

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \left(\frac{N_a(y_0)}{y_0^2} \right)^{\lambda(y_0)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \quad (6.39)$$

und

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \left(\frac{N_a(r_{max})}{r_{max}^2} \right)^{1 - \lambda(y_0)} = \left(\frac{N_a(r_{max})}{r_{max}^2} \right)^{\frac{y}{r_{max}}} \quad (6.40)$$

mit (vergleiche auch Lemma 4.1.18 (b))

$$\lambda(y_0) = \frac{y - r_{max}}{y_0 - r_{max}} \quad .$$

Beweis:

Aus

$$\begin{aligned} & \lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{\sinh^2(\sqrt{\lambda_k} y_0)}{y_0^2} \\ \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} & \lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{\lambda_k} \sinh(\sqrt{\lambda_k} y_0) \cosh(\sqrt{\lambda_k} y_0)}{2y_0} \\ \stackrel{(4.12)}{=} & \lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\lambda_k} \sinh(2\sqrt{\lambda_k} y_0)}{2y_0} \\ \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} & \lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{2\lambda_k \cosh(2\sqrt{\lambda_k} y_0)}{2} \\ = & \lambda_k \end{aligned}$$

folgt nach Division durch λ_k Gleichung (6.37).

Zum Beweis der weiteren Gleichungen definiert man

$$g_k(y_0) := b_k^2 \frac{\sinh^2(\sqrt{\lambda_k} y_0)}{\lambda_k y_0^2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

so daß für $y_0 > 0$

$$\frac{N_a(y_0)}{y_0^2} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(y_0)$$

gilt. Weiter setzt man die Funktionen g_k stetig auf $[0, y]$ fort durch die Definition

$$\tilde{g}_k(y_0) := \begin{cases} g_k(y_0) & , \quad 0 < y_0 \leq y \\ b_k^2 & , \quad y_0 = 0 \end{cases} ,$$

wobei die Stetigkeit aus (6.37) folgt.

Die Abschätzung

$$\begin{aligned} & |\tilde{g}_k(y_0)| \\ \stackrel{(4.19)}{\leq} & b_k^2 \exp\left(2\sqrt{\lambda_k} y_0\right) \\ \leq & b_k^2 \exp\left(2\sqrt{\lambda_k} r_{max}\right) \end{aligned}$$

durch die nach Voraussetzung (siehe Satz 6.3.3) (absolut) konvergente Majorante $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \exp(2\sqrt{\lambda_k} r_{max})$ liefert nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium zunächst die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{g}_k(y_0)$ auf $[0, y]$ und daraus resultierend auch die Stetigkeit dieser Reihe auf $[0, y]$, die man verwendet, um

$$\begin{aligned} & \lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{N_a(y_0)}{y_0^2} \\ = & \lim_{y_0 \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} g_k(y_0) \\ = & \lim_{y_0 \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{g}_k(y_0) \\ = & \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{y_0 \rightarrow 0} \tilde{g}_k(y_0) \\ \stackrel{\tilde{g}_k \text{ stetig}}{=} & \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{g}_k(0) \\ = & \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 , \end{aligned}$$

also Gleichung (6.38), einzusehen. Diese Gleichung ermöglicht nun die stetige Fortsetzung der Funktion

$$s : (0, y] \ni y_0 \mapsto s(y_0) = \frac{N_a(y_0)}{y_0^2}$$

zu einer auf $[0, y]$ definierten Funktion

$$\tilde{s} : [0, y] \ni y_0 \mapsto \tilde{s}(y_0) = \begin{cases} s(y_0) & , \quad 0 < y_0 \leq y \\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 & , \quad y_0 = 0 \end{cases} .$$

Anwendung von Lemma 4.1.18 (a),(b) zeigt nun (6.39) und (völlig analog) (6.40). \square

An diesem Punkt sind unsere Untersuchungen und hierbei insbesondere die Verallgemeinerungen der Hilfsergebnisse so weit gediehen, daß wir einen Stabilitätssatz für das verallgemeinerte kontinuierliche Problem (siehe Problem 5.1.4) formulieren können:

Satz 6.3.6 (Stabilitätssatz für das verallgemeinerte kontinuierliche Problem)

Sei $u \in C^2(\text{int}(\Omega)) \cap C(\Omega)$ mit den folgenden Eigenschaften gegeben:

$$\begin{aligned} L_a u(x, y) &= \text{div}(a(x)\nabla u(x, y)) = a(x)\Delta u(x, y) + a'(x)u_x(x, y) = 0 \quad \text{in} \quad \text{int}(\Omega) \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x) &= \phi_1(x) \quad \text{auf} \quad \Sigma_1 \\ \|u\|_{a(\Sigma_4)} &\leq E \quad . \end{aligned} \tag{6.41}$$

Hierbei ist E eine feste, nichtnegative, reelle Schranke. Die Lösungsdarstellung (6.26) konvergiere punktweise für jedes $(x, y) \in [0, 1] \times [0, r_{\max}]$ und gleichmäßig in x . Dann hat man die Gleichung

$$\|\phi_1\|_a^2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2, \tag{6.42}$$

wobei die Koeffizienten durch

$$b_k = (\phi_1(\cdot), v_k)_a \tag{6.43}$$

erklärt sind. Erfüllen die Koeffizienten b_k noch die Voraussetzung (6.28), so gilt mit $R_1 := \max(r_{\max}, 1)$, $R_0 := \min(r_{\max}, 1)$ die Stabilitätsabschätzung

$$\begin{aligned} &\|u(\cdot, y)\|_a \\ &= \left(\int_0^1 u^2(x, y) \cdot a(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\phi_1\|_a^{1-\frac{y}{r_{\max}}} E^{\frac{y}{r_{\max}}} \frac{y}{r_{\max}^{\frac{y}{r_{\max}}}} \end{aligned} \tag{6.44}$$

$$\leq \frac{y}{R_0} \|\phi_1\|_a^{1-\frac{y}{r_{\max}}} E^{\frac{y}{r_{\max}}} \tag{6.45}$$

$$\leq R_1 \|\phi_1\|_a^{1-\frac{y}{r_{\max}}} E^{\frac{y}{r_{\max}}} \tag{6.46}$$

für alle $y \in [0, r_{\max}]$.

Beweis:

Gleichung (6.42) ist schlicht die verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung, wie wir sie in Satz 6.2.21 formuliert haben, so daß hierfür nichts weiter zu zeigen ist.

Zum Beweis von Ungleichung (6.44) betrachten wir ein beliebiges aber festes y mit $r_{max} \geq y > 0$ und variables y_0 mit $0 < y_0 \leq y$. Dann hat man

$$y = \lambda(y_0)y_0 + (1 - \lambda(y_0))r_{max}, \lambda(y_0) \in [0, 1]$$

und nach Folgerung 6.3.4 ist die Funktion $s(y) = \frac{N_a(y)}{y^2}$ auf dem kompakten Intervall $[y_0, r_{max}]$ logarithmisch konvex, woraus man mit Hilfe von Folgerung 4.1.5 die Ungleichung

$$\frac{N_a(y)}{y^2} \leq \left(\frac{N_a(y_0)}{y_0^2} \right)^{\lambda(y_0)} \cdot \left(\frac{N_a(r_{max})}{r_{max}^2} \right)^{1-\lambda(y_0)} \quad (6.47)$$

schlußfolgert. Nun benutzt man die Gleichungen (6.39) und (6.40) aus Lemma 6.3.5, um auf der rechten Seite von (6.47) zum Grenzwert für $y_0 \rightarrow 0$ überzugehen und erhält bei zusätzlicher Anwendung von (6.42):

$$\begin{aligned} & \frac{N_a(y)}{y^2} \\ & \leq \|\phi_1\|_a^{2(1-\frac{y}{r_{max}})} \left(\frac{N_a(r_{max})}{r_{max}^2} \right)^{\frac{y}{r_{max}}} \\ & \stackrel{N_a(r_{max}) \leq E^2}{\leq} \|\phi_1\|_a^{2(1-\frac{y}{r_{max}})} \left(\frac{E^2}{r_{max}^2} \right)^{\frac{y}{r_{max}}}. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren noch mit y^2 , ziehen die Quadratwurzel und werden so auf

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^1 u^2(x, y) a(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \|\phi_1\|_a^{1-\frac{y}{r_{max}}} E^{\frac{y}{r_{max}}} \frac{y}{r_{max}^{\frac{y}{r_{max}}}}, \end{aligned}$$

also die Behauptung (6.44) für $0 < y \leq r_{max}$ geführt. Für $y = 0$ ist (6.44) trivial ($0 \leq 0$).

Die Ungleichungen (6.45) und (6.46) sind wiederum einfache Folgerungen aus Lemma 4.1.19 und somit hat man den Beweis abgeschlossen. □

Kapitel 7

Konvergenz der Linienmethode

7.1 Konvergenz der Eigenwerte und Eigenvektoren

Nachdem der Stabilitätssatz für das kontinuierliche Problem auch im Falle des verallgemeinerten Differentialoperators L_a (zur Definition von L_a siehe Satz 5.1.2) bewiesen werden konnte und somit die Verallgemeinerung ausgehend von der Laplace-Gleichung geglückt ist, liegt es nahe, auch die weiteren für die Laplace-Gleichung erzielten Ergebnisse, also die Fehlerabschätzung und den Konvergenzsatz für die Linienmethode auf den erweiterten Kontext der oben genannten allgemeineren Differentialgleichung zu übertragen. Insbesondere dort, wo zuvor die Eigenwerte, die ja für die Laplace-Gleichung bekannt sind, eingegangen sind, werden dabei umfangreiche zusätzliche Überlegungen nötig werden, so daß es sinnvoll ist, den Gedankengang hier vollständig zu entfalten, insbesondere um deutlich zu machen, wo genau Verallgemeinerungen nötig werden, und wie sie vonstatten gehen.

7.1.1 Konvergenz der Eigenwerte

Das wesentliche Ergebnis dieses Abschnitts ist die Konvergenz der Eigenwerte der diskreten Approximation des Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems gegen die Eigenwerte des zugehörigen kontinuierlichen Problems, wobei wir auch nachweisen können, daß die Konvergenz von der Ordnung $O(h)$ ist. In der Literatur finden sich ähnliche Ergebnisse zum Beispiel in [Hac86], Abschnitt 11, allerdings geht es dort um Differenzenapproximationen elliptischer Differentialoperatoren in zwei Dimensionen, während der von uns betrachtete Operator L_h eine Approximation des zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung gehörigen Operators L ist.

Das von uns vorangestellte Lemma wird im Beweis des entscheidenden Satzes 7.1.2 benötigt. Es wäre auch möglich gewesen, es in den Beweis dieses Satzes zu integrieren, worauf wir aber verzichtet haben, da dieser Beweis sich ohnehin relativ umfangreich darstellt und eine gewisse Übersichtlichkeit erhalten bleiben sollte. Das Lemma erfüllt innerhalb des Beweises die Funktion, eine stetige, stückweise lineare Funktion an den kritischen Stellen (also in der Umgebung der Stützstellen) so zu verändern, daß eine zweimal stetig differenzierbare Funktion entsteht, ohne daß die wesentlichen Eigenschaften einer stetigen, stückweise linearen Funk-

tion, wie zum Beispiel die Exaktheit der Approximation der Ableitung durch den vorwärtsbeziehungsweise rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten erster Ordnung, verloren gehen.

Lemma 7.1.1 *Sei $1 > \varepsilon > 0$ und Zahlen $y_i, y'_i, y''_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ gegeben. Dabei sei nur y_2 von ε abhängig und die übrigen Werte konstant. Dann gibt es auf dem Intervall $[x^{(0)}, x^{(0)} + \varepsilon]$ ein Polynom p_ε fünften Grades, so daß*

$$\begin{aligned} p_\varepsilon(x^{(0)}) &= y_1, \quad p_\varepsilon(x^{(0)} + \varepsilon) = y_2, \quad p'_\varepsilon(x^{(0)}) = y'_1, \quad p'_\varepsilon(x^{(0)} + \varepsilon) = y'_2, \\ p''_\varepsilon(x^{(0)}) &= y''_1, \quad p''_\varepsilon(x^{(0)} + \varepsilon) = y''_2 \end{aligned}$$

erfüllt ist. Falls dann noch eine Konstante C existiert, so daß $|y_1 - y_2| \leq C\varepsilon$ (das heißt y_2 konvergiert für $\varepsilon \rightarrow 0$ mit der Ordnung $O(\varepsilon)$ gegen y_1), so ist p_ε und auch p'_ε gleichmäßig in $\varepsilon > 0$ beschränkt, das heißt, es existieren Konstanten C_0, C_1 , so daß für alle $1 > \varepsilon > 0$ und alle $x \in [x^{(0)}, x^{(0)} + \varepsilon]$

$$|p_\varepsilon(x)| \leq C_0, \quad |p'_\varepsilon(x)| \leq C_1$$

ist. Eine mögliche Konstante C_0 ist dabei

$$C_0 = |y_1| + \tilde{C}, \quad \tilde{C} := 31C + 18|y'_1| + 14|y'_2| + 4|y''_1| + \frac{3}{2}|y''_2|$$

und für C_1 ist

$$C_1 = 120C + 66|y'_1| + 55|y'_2| + 14|y''_1| + 6|y''_2|$$

eine mögliche Wahl.

Beweis:

Wir machen den Ansatz eines Taylorpolynoms mit Entwicklungspunkt $x^{(0)}$, also

$$p_\varepsilon(x) = y_1 + (x - x^{(0)})y'_1 + \frac{(x - x^{(0)})^2}{2}y''_1 + \alpha \frac{(x - x^{(0)})^3}{6} + \beta \frac{(x - x^{(0)})^4}{24} + \gamma \frac{(x - x^{(0)})^5}{120}. \quad (7.1)$$

Wie man leicht nachrechnet, sind dann die drei Bedingungen bei $x^{(0)}$ schon erfüllt und man hat die Koeffizienten α, β, γ so zu bestimmen, daß auch die Bedingungen bei $x^{(0)} + \varepsilon$ gelten. Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} p_\varepsilon(x^{(0)} + \varepsilon) &= y_1 + \varepsilon y'_1 + \frac{\varepsilon^2}{2}y''_1 + \alpha \frac{\varepsilon^3}{6} + \beta \frac{\varepsilon^4}{24} + \gamma \frac{\varepsilon^5}{120} = y_2 \\ p'_\varepsilon(x^{(0)} + \varepsilon) &= y'_1 + \varepsilon y''_1 + \alpha \frac{\varepsilon^2}{2} + \beta \frac{\varepsilon^3}{6} + \gamma \frac{\varepsilon^4}{24} = y'_2 \\ p''_\varepsilon(x^{(0)} + \varepsilon) &= y''_1 + \alpha \varepsilon + \beta \frac{\varepsilon^2}{2} + \gamma \frac{\varepsilon^3}{6} = y''_2 \end{aligned}$$

Es folgt

$$\frac{\varepsilon^3}{6}\alpha + \frac{\varepsilon^4}{24}\beta + \frac{\varepsilon^5}{120}\gamma = y_2 - y_1 - \varepsilon y'_1 - \frac{\varepsilon^2}{2}y''_1 \quad (7.2)$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\alpha + \frac{\varepsilon^3}{6}\beta + \frac{\varepsilon^4}{24}\gamma = y'_2 - y'_1 - \varepsilon y''_1 \quad (7.3)$$

$$\varepsilon\alpha + \frac{\varepsilon^2}{2}\beta + \frac{\varepsilon^3}{6}\gamma = y''_2 - y''_1 \quad (7.4)$$

Man subtrahiert von (7.2) das $\frac{\varepsilon^2}{6}$ -fache von (7.4) und von (7.3) das $\frac{\varepsilon}{2}$ -fache von (7.4) und eliminiert so aus diesen beiden Gleichungen α :

$$-\frac{\varepsilon^4}{24}\beta - \frac{7\varepsilon^5}{360}\gamma = y_2 - y_1 - \varepsilon y'_1 - \frac{\varepsilon^2}{3}y''_1 - \frac{\varepsilon^2}{6}y''_2 \quad (7.5)$$

$$-\frac{\varepsilon^3}{12}\beta - \frac{\varepsilon^4}{24}\gamma = y'_2 - y'_1 - \frac{\varepsilon}{2}y''_1 - \frac{\varepsilon}{2}y''_2 \quad (7.6)$$

Nun subtrahiert man das $\frac{\varepsilon}{2}$ -fache von (7.6) von (7.5):

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^5}{720}\gamma &= y_2 - y_1 - \frac{\varepsilon}{2}y'_1 - \frac{\varepsilon}{2}y'_2 - \frac{\varepsilon^2}{12}y''_1 + \frac{\varepsilon^2}{12}y''_2 \\ \Rightarrow \gamma &= \frac{720}{\varepsilon^5} \left(y_2 - y_1 - \frac{\varepsilon}{2}y'_1 - \frac{\varepsilon}{2}y'_2 - \frac{\varepsilon^2}{12}y''_1 + \frac{\varepsilon^2}{12}y''_2 \right) \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$= \frac{60}{\varepsilon^5} (12y_2 - 12y_1 - 6\varepsilon y'_1 - 6\varepsilon y'_2 - \varepsilon^2 y''_1 + \varepsilon^2 y''_2) \quad (7.8)$$

Das Ergebnis (7.7) setzt man in (7.5) ein und folgert

$$\begin{aligned} &-\frac{\varepsilon^4}{24}\beta \\ &= \frac{7\varepsilon^5}{360} \frac{720}{\varepsilon^5} \left(y_2 - y_1 - \frac{\varepsilon}{2}y'_1 - \frac{\varepsilon}{2}y'_2 - \frac{\varepsilon^2}{12}y''_1 + \frac{\varepsilon^2}{12}y''_2 \right) + y_2 - y_1 - \varepsilon y'_1 - \frac{\varepsilon^2}{3}y''_1 - \frac{\varepsilon^2}{6}y''_2 \\ &= 14 \left(y_2 - y_1 - \frac{\varepsilon}{2}y'_1 - \frac{\varepsilon}{2}y'_2 - \frac{\varepsilon^2}{12}y''_1 + \frac{\varepsilon^2}{12}y''_2 \right) + y_2 - y_1 - \varepsilon y'_1 - \frac{\varepsilon^2}{3}y''_1 - \frac{\varepsilon^2}{6}y''_2 \\ &= 15y_2 - 15y_1 - 8\varepsilon y'_1 - 7\varepsilon y'_2 - \frac{3\varepsilon^2}{2}y''_1 + \varepsilon^2 y''_2, \end{aligned}$$

was nach Division durch $-\frac{\varepsilon^4}{24}$ auf

$$\beta = \frac{12}{\varepsilon^4} (30y_1 - 30y_2 + 16\varepsilon y'_1 + 14\varepsilon y'_2 + 3\varepsilon^2 y''_1 - \varepsilon^2 y''_2) \quad (7.9)$$

führt. Schließlich verschafft man sich α durch Einsetzen von (7.8) und (7.9) in (7.4). Man rechnet

$$\begin{aligned} &\varepsilon\alpha \\ &= -\frac{\varepsilon^2}{2} \frac{12}{\varepsilon^4} (30y_1 - 30y_2 + 16\varepsilon y'_1 + 14\varepsilon y'_2 + 3\varepsilon^2 y''_1 - \varepsilon^2 y''_2) \\ &\quad - \frac{\varepsilon^3}{6} \frac{60}{\varepsilon^5} (12y_2 - 12y_1 - 6\varepsilon y'_1 - 6\varepsilon y'_2 - \varepsilon^2 y''_1 + \varepsilon^2 y''_2) + y''_2 - y''_1 \\ &= -\frac{6}{\varepsilon^2} (30y_1 - 30y_2 + 16\varepsilon y'_1 + 14\varepsilon y'_2 + 3\varepsilon^2 y''_1 - \varepsilon^2 y''_2) \\ &\quad - \frac{10}{\varepsilon^2} (12y_2 - 12y_1 - 6\varepsilon y'_1 - 6\varepsilon y'_2 - \varepsilon^2 y''_1 + \varepsilon^2 y''_2) + y''_2 - y''_1 \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^2} (60y_1 - 60y_2 + 36\varepsilon y'_1 + 24\varepsilon y'_2 + 9\varepsilon^2 y''_1 + 3\varepsilon^2 y''_2) \\ &= \frac{3}{\varepsilon^2} (20y_2 - 20y_1 - 12\varepsilon y'_1 - 8\varepsilon y'_2 - 3\varepsilon^2 y''_1 - \varepsilon^2 y''_2) \end{aligned}$$

aus und wird so auf

$$\alpha = \frac{3}{\varepsilon^3} (20y_2 - 20y_1 - 12\varepsilon y'_1 - 8\varepsilon y'_2 - 3\varepsilon^2 y''_1 - \varepsilon^2 y''_2) \quad (7.10)$$

geführt. Da man im wesentlichen nur eine Gaußsche Vorwärtselemination und anschließendes Rückwärtseinsetzen durchgeführt hat, ist somit tatsächlich eine Lösung des Gleichungssystems (und damit auch der vorgelegten Interpolationsaufgabe) gefunden und es bleiben noch die beiden behaupteten Beschränktheitsbedingungen zu zeigen. Offenbar gilt nach dem Ansatz (7.1) für beliebiges $x \in [x^{(0)}, x^{(0)} + \varepsilon]$

$$\begin{aligned} & |p_\varepsilon(x)| \\ & \stackrel{x-x^{(0)} \leq \varepsilon}{\leq} |y_1| + \varepsilon|y'_1| + \frac{\varepsilon^2}{2}|y''_1| + |\alpha|\frac{\varepsilon^3}{6} + |\beta|\frac{\varepsilon^4}{24} + |\gamma|\frac{\varepsilon^5}{120} \\ & = |y_1| + \varepsilon|y'_1| + \frac{\varepsilon^2}{2}|y''_1| + \frac{1}{2}|20y_2 - 20y_1 - 12\varepsilon y'_1 - 8\varepsilon y'_2 - 3\varepsilon^2 y''_1 - \varepsilon^2 y''_2| \\ & \quad + \frac{1}{2}|30y_1 - 30y_2 + 16\varepsilon y'_1 + 14\varepsilon y'_2 + 3\varepsilon^2 y''_1 - \varepsilon^2 y''_2| \\ & \quad + \frac{1}{2}|12y_2 - 12y_1 - 6\varepsilon y'_1 - 6\varepsilon y'_2 - \varepsilon^2 y''_1 + \varepsilon^2 y''_2| \\ & \leq |y_1| + 31 \underbrace{|y_1 - y_2|}_{\leq C\varepsilon} + 18\varepsilon|y'_1| + 14\varepsilon|y'_2| + 4\varepsilon^2|y''_1| + \frac{3}{2}\varepsilon^2|y''_2| \\ & \leq |y_1| + \underbrace{\left(31C + 18|y'_1| + 14|y'_2| + 4\varepsilon|y''_1| + \frac{3}{2}\varepsilon|y''_2|\right)}_{\leq \tilde{C}} \cdot \varepsilon \\ & = |y_1| + \tilde{C}\varepsilon \\ & \leq |y_1| + \tilde{C} = C_0, \end{aligned}$$

was die gleichmäßige Beschränktheit von p_ε zeigt. Für die Ableitung verfährt man analog und erhält

$$\begin{aligned} & |p'_\varepsilon(x)| \\ & \stackrel{x-x^{(0)} \leq \varepsilon}{\leq} |y'_1| + \varepsilon|y''_1| + \frac{\varepsilon^2}{2}|\alpha| + \frac{\varepsilon^3}{6}|\beta| + \frac{\varepsilon^4}{24}|\gamma| \\ & = |y'_1| + \varepsilon|y''_1| + \frac{3}{2\varepsilon}|20y_2 - 20y_1 - 12\varepsilon y'_1 - 8\varepsilon y'_2 - 3\varepsilon^2 y''_1 - \varepsilon^2 y''_2| \\ & \quad + \frac{2}{\varepsilon}|30y_1 - 30y_2 + 16\varepsilon y'_1 + 14\varepsilon y'_2 + 3\varepsilon^2 y''_1 - \varepsilon^2 y''_2| \\ & \quad + \frac{5}{2\varepsilon}|12y_2 - 12y_1 - 6\varepsilon y'_1 - 6\varepsilon y'_2 - \varepsilon^2 y''_1 + \varepsilon^2 y''_2| \\ & \leq \frac{120}{\varepsilon} \underbrace{|y_1 - y_2|}_{\leq C\varepsilon} + 66|y'_1| + 55|y'_2| + 14|y''_1|\varepsilon + 6|y''_2|\varepsilon \\ & \leq 120C + 66|y'_1| + 55|y'_2| + 14|y''_1| + 6|y''_2| \\ & = C_1, \end{aligned}$$

womit der Beweis des Lemmas abgeschlossen ist. \square

Nun folgt der entscheidende Satz dieses Abschnitts, aus dem dann ohne Mühe die Konvergenz der Eigenwerte folgen wird (siehe Folgerung 7.1.3). Der Beweis ist sehr umfangreich; durch die Aufteilung in verschiedene Teilbehauptungen bleibt dennoch die Übersichtlichkeit gewahrt.

Satz 7.1.2 *Es sei der diskrete Rayleigh-Quotient $Q_h : \mathcal{G}_{h,0} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ durch*

$$Q_h(v_h) := \frac{\|v_h\|_{-1,a}^2}{\|v_h\|_{0,a}^2}$$

und der kontinuierliche Rayleigh-Quotient $Q : V_0 \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ durch

$$Q(v) := \frac{\|v'\|_a^2}{\|v\|_a^2}$$

definiert.

Dann gilt für alle $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\min_{\substack{\dim M_h = j \\ M_h \subset \mathcal{G}_{h,0}}} \max_{0 \neq v_h \in M_h} Q_h(v_h) \right) = \min_{\substack{\dim M = j \\ M \subset V_0}} \max_{0 \neq v \in M} Q(v) \quad .$$

Die Konvergenzgeschwindigkeit ist von der Ordnung $O(h)$, das heißt, es existiert eine Konstante $C^{(6)} > 0$ und ein $h^{(6)} > 0$, so daß für alle $h < h^{(6)}$ die Abschätzung

$$\left| \min_{\substack{\dim M_h = j \\ M_h \subset \mathcal{G}_{h,0}}} \max_{0 \neq v_h \in M_h} Q_h(v_h) - \min_{\substack{\dim M = j \\ M \subset V_0}} \max_{0 \neq v \in M} Q(v) \right| \leq C^{(6)} h \quad (7.11)$$

gilt.

Beweis:

Zunächst einmal ist die Existenz der angegebenen Maxima beziehungsweise Minima eine direkte Folgerung aus dem Minimum-Maximum-Prinzip von Courant-Weyl (vergleiche Satz 6.2.22 in Verbindung mit Folgerung 6.2.23) im diskreten beziehungsweise dem Courantschen Minimum-Maximum-Prinzip (vergleiche Satz 5.3.22 in Verbindung mit Folgerung 5.3.23) im kontinuierlichen Fall. Weiter sei für den ganzen Fortgang des Beweises $j \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest.

Um den Beweis übersichtlicher gestalten zu können, führen wir einige Bezeichnungen und Abkürzungen ein.

Zu jedem j -dimensionalen Raum $M \subset V_0$ sei $\max_{0 \neq v \in M} Q(v) = Q(v_M)$, das Maximum werde also jeweils in $v_M \in M$ angenommen. Wie man leicht einsieht ist der Rayleigh-Quotient wegen

$$Q(\lambda v) = \frac{\|\lambda v'\|_a^2}{\|\lambda v\|_a^2} = \frac{\lambda^2 \|v'\|_a^2}{\lambda^2 \|v\|_a^2} \quad (7.12)$$

konstant bei Multiplikation des Arguments mit einem Skalar (auf jedem eindimensionalen Raum wird also nur ein einziger Wert angenommen). Daher sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit immer $\|v_M\|_a = 1$ (falls dies nicht der Fall ist, dividiert man einfach durch die Norm). Weiter sei M^* der (oder vorsichtiger formuliert: ein) Raum, für den $Q(v_M)$ minimal wird, es gelte also

$$\min_{\substack{\dim M=j \\ M \subset V_0}} Q(v_M) = Q(v_{M^*}) \quad .$$

Analog findet man im diskreten Fall zu jedem j -dimensionalen Raum $M_h \subset \mathcal{G}_{h,0}$ eine Gitterfunktion $(v_{M_h})_h$ mit $\|v_{M_h}\|_{0,a} = 1$, so daß $\max_{0 \neq v_h \in M_h} Q_h(v_h) = Q_h((v_{M_h})_h)$ und M_h^* sei ein Raum, für den $Q_h((v_{M_h})_h)$ minimal wird.

Wir bemerken noch, ohne es hier zu beweisen (wir benötigen es für unseren Beweis auch nicht), daß M^* der von den ersten j Eigenvektoren des Orthonormalsystems zur Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe aufgespannte Raum $[v_1, \dots, v_j]$ ist, und daß $v_{M^*} = cv_j$ gilt, das heißt v_{M^*} ist gerade ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_j . Für Details hierzu studiere man die entsprechenden Beweise des Courantschen Minimum-Maximum-Prinzips (siehe zum Beispiel [Heu95]). Gleiches gilt in analoger Weise für den diskreten Fall.

Wir treffen weiterhin die Konvention, daß zu $v \in V_0$ die Einschränkung $v|_{G_h} \in \mathcal{G}_{h,0}$ mit v^h bezeichnet werden soll. Naheliegenderweise definiert man dann auch zu $M \subset V_0$ den Raum $M^h := \{v^h \mid v \in M\}$.

Wir werden die Behauptung des Satzes in mehrere Teilbehauptungen zerlegen, die aufeinander aufbauen:

Erste Behauptung:

Zu jedem j -dimensionalen ($1 \leq j \leq N-1$) Raum $M_h \subset \mathcal{G}_{h,0}$ kann man einen j -dimensionalen Raum $M \subset V_0$ finden, so daß $M_h = M^h$ gilt. Umgekehrt gibt es zu jedem j -dimensionalen ($j \in \mathbb{N}$) Raum $M \subset V_0$ ein $h_0 > 0$, so daß für alle $h < h_0$ M^h ein j -dimensionaler Teilraum von $\mathcal{G}_{h,0}$ ist.

Beweis der ersten Behauptung:

Sei zunächst ein j -dimensionaler Raum $M_h \subset \mathcal{G}_{h,0}$ gegeben. Dann gilt $M_h = [v_{1,h}, \dots, v_{j,h}]$ mit Basis(gitter-)funktionen $v_{k,h} \in \mathcal{G}_{h,0}$, $k = 1, \dots, j$. Setzt man nun die Basisfunktionen vom Gitter G_h zu einer auf $[0, 1]$ zweimal stetig differenzierbaren Funktion v_k fort (zum Beispiel, indem man für jedes $1 \leq k \leq j$ ein Interpolationspolynom zu den Punkten $(x_i, v_{k,h}(x_i))$, $0 \leq i \leq N$ bestimmt), so sind die Funktionen v_k , $k = 1, \dots, N$ linear unabhängig, denn die Annahme linearer Abhängigkeit liefert einen nichttrivialen Koeffizientenvektor (ξ_1, \dots, ξ_j) , so daß $\sum_{k=1}^j \xi_k v_k = 0$, also insbesondere

$$\sum_{k=1}^j \xi_k v_k(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, N \quad \implies \quad \sum_{k=1}^j \xi_k v_{k,h} \equiv 0$$

und somit ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der $v_{k,h}$, $k = 1, \dots, j$ folgt. Weiter gilt aufgrund der Forsetzungseigenschaft klarerweise $v_k^h = v_{k,h}$, $k = 1, \dots, j$.

Daher ist $M := [v_1, \dots, v_j]$ ein j -dimensionaler Teilraum von V_0 mit der gewünschten Eigenschaft $M_h = M^h$, denn: Sei $v_h \in M_h$ beliebig. Dann folgt

$$v_h = \sum_{k=1}^j \xi_k v_{k,h} = \sum_{k=1}^j \xi_k v_k^h = \left(\sum_{k=1}^j \xi_k v_k \right)^h \in M^h \quad . \quad (7.13)$$

Ist umgekehrt $v^h \in M^h$, so liefert obige Gleichung (7.13) von rechts nach links gelesen $v^h \in M_h$, so daß insgesamt die Gleichheit folgt.

Um den zweiten Teil der ersten Behauptung zu zeigen, gehen wir von einem j -dimensionalen Raum $M \subset V_0$ aus. Mit gewissen Basisfunktionen v_1, \dots, v_j gilt dann trivialerweise $M = [v_1, \dots, v_j]$. Die Funktionen v_k , $k = 1, \dots, j$ besitzen als stetig differenzierbare Funktionen auf $[0, 1]$ jeweils eine beschränkte Ableitung (denn die Ableitung ist als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall beschränkt (siehe zum Beispiel [Wal90] S.120f oder [Heu01], Band 1, Satz 36.3) und sind daher lipschitzstetig (siehe zum Beispiel [Wal90], Seite 256 oder [Heu01] Band 1, Satz 49.4) mit Lipschitzkonstanten L_k , $k = 1, \dots, j$. Mit $L := \max_{k=1, \dots, j} L_k$ gilt also

$$\forall k \in \{1, \dots, j\} \forall x, x' \in [0, 1] \quad |v_k(x) - v_k(x')| \leq L|x - x'| \quad . \quad (7.14)$$

Es reicht nun, zu zeigen:

$$\exists h_0 = \frac{1}{N_0} \geq 0 \forall \frac{1}{N} = h < h_0 : \quad v_1^h, \dots, v_j^h \quad \text{linear unabhängig} \quad . \quad (7.15)$$

Die Annahme des Gegenteils bedeutet

$$\forall N_0 \in \mathbb{N} \exists N > N_0 : \quad v_1^h, \dots, v_j^h \quad \text{linear abhängig} \quad \left(h = \frac{1}{N} \right).$$

Man folgert

$$\forall N_0 \geq 0 \exists N = N(N_0) > N_0 \exists \xi_1^{(N)}, \dots, \xi_j^{(N)} \in \mathbb{R} : \quad \sum_{k=1}^j \xi_k^{(N)} v_k^h = 0 \quad \text{und} \quad \max_{k=1, \dots, j} |\xi_k^{(N)}| > 0. \quad (7.16)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß

$$\max_{k=1, \dots, j} |\xi_k^{(N)}| = 1 \quad (7.17)$$

ist (andernfalls dividiere man die ganze Gleichung durch eben dieses Maximum). Wir wählen nun $(N_0)_1 = 2$ und definieren induktiv $(N_0)_m := N((N_0)_{m-1})$, $m = 2, 3, \dots$. Dann ist $((N_0)_m)_{m \in \mathbb{N}}$ offenbar eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so daß die zugehörigen $(h_0)_m = \frac{1}{(N_0)_m}$, $m \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge bilden. Die nach dem eben gesagten beschränkte Folge $\left(\xi_1^{((N_0)_m)} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ besitzt nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge, das heißt, es existiert $\mathbb{N}'_1 \subset \mathbb{N}$, so daß $\left(\xi_1^{((N_0)_m)} \right)_{m \in \mathbb{N}'_1}$ gegen ein $\xi_1 \in \mathbb{R}$

konvergiert. Die Folge $\left(\xi_2^{((N_0)_m)}\right)_{m \in \mathbb{N}'_1}$ ist wiederum beschränkt, so daß man wieder den Satz von Bolzano-Weierstraß anwenden kann und so (nach insgesamt k -maliger Anwendung dieses Verfahrens) unendliche Mengen natürlicher Zahlen $\mathbb{N}' := \mathbb{N}'_k \subset \mathbb{N}'_{k-1} \subset \dots \subset \mathbb{N}'_1 \subset \mathbb{N}$ und Grenzwerte $\xi_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, j$ erhält, so daß

$$\lim_{m \rightarrow \infty, m \in \mathbb{N}'} \xi_k^{((N_0)_m)} = \xi_k, \quad k = 1, \dots, j \quad (7.18)$$

gilt. Wegen (7.17) können nicht alle ξ_k gleichzeitig verschwinden, da für jedes $m \in \mathbb{N}'$ immer ein $k \in \{1, \dots, j\}$ mit $|\xi_k^{((N_0)_m)}| = 1$ existiert.

Sei nun $x \in [0, 1]$ beliebig. Dann gibt es zu jedem $h > 0$ ein $x_i \in G_h$, so daß $|x - x_i| \leq h$ ist. Das nutzt man aus, um mit Hilfe der Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^j \xi_k^{((N_0)_m)} v_k(x) \right| \\ (7.16) \quad & \stackrel{=}{=} \left| \sum_{k=1}^j \xi_k^{((N_0)_m)} (v_k(x) - v_k^{(h_0)_m}(x_i)) \right| \\ & = \left| \sum_{k=1}^j \xi_k^{((N_0)_m)} (v_k(x) - v_k(x_i)) \right| \\ & \leq \sum_{k=1}^j \underbrace{|\xi_k^{((N_0)_m)}|}_{\leq 1} \cdot |v_k(x) - v_k(x_i)| \\ (7.14) \quad & \leq \sum_{k=1}^j L \underbrace{|x - x_i|}_{\leq (h_0)_m} \\ & \leq jL(h_0)_m \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

die Aussage

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^j \xi_k v_k(x) \\ & = \sum_{k=1}^j \left(\lim_{m \rightarrow \infty, m \in \mathbb{N}'} \xi_k^{((N_0)_m)} \right) \cdot v_k(x) \\ & = \lim_{m \rightarrow \infty, m \in \mathbb{N}'} \left(\sum_{k=1}^j \xi_k^{((N_0)_m)} v_k(x) \right) \\ & = 0, \end{aligned}$$

also (da nicht alle ξ_k , $k = 1, \dots, j$ verschwinden) die lineare Abhängigkeit der v_k , $k = 1, \dots, j$ im Widerspruch zur Voraussetzung zu erhalten.

Zweite Behauptung:

Sei M ein beliebiger j -dimensionaler Teilraum von V_0 . Dann gilt

$$\forall 0 \neq v \in M \lim_{h \rightarrow 0} Q_h(v^h) = Q(v), \quad (7.19)$$

und die Konvergenz ist gleichmäßig in v , mit anderen Worten

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists h_1 > 0 \forall h \leq h_1 \forall v \in M : |Q_h(v^h) - Q(v)| < \varepsilon_1; \quad (7.20)$$

anders ausgedrückt bedeutet dies, daß Q_h eine konsistente Näherung für Q darstellt. Genauer hat man sogar

$$\exists C^{(1)} > 0 \exists h_1 > 0 \forall h \leq h_1 \forall v \in M : |Q_h(v^h) - Q(v)| \leq C^{(1)}h, \quad (7.21)$$

also $Q_h(v^h) - Q(v) = O(h)$.

Beweis der zweiten Behauptung:

Sei $M = [v_1, \dots, v_j]$ ein beliebiger, aber fester j -dimensionaler Teilraum von V_0 . Ohne Einschränkung sei die Basis v_1, \dots, v_j ein Orthonormalsystem bezüglich des Skalarprodukts $(\cdot, \cdot)_{0,a}$. Nach der ersten Behauptung existiert ein $h_0 > 0$, so daß für alle $h < h_0$ $M^h = [v_1^h, \dots, v_j^h]$ ein ebenfalls j -dimensionaler Teilraum von $\mathcal{G}_{h,0}$ ist. Sei weiter $0 \neq v = \sum_{k=1}^j \hat{\xi}_k v_k$

mit $\max_{k=1, \dots, j} |\hat{\xi}_k| = 1$ gegeben (dies bedeutet keine wirkliche Einschränkung an v , wie schon im Beweis der ersten Behauptung gesehen, da man immer im Zähler und im Nenner durch dieses Maximum dividieren kann (vergleiche (7.12))). Offenbar ist dann $v^h = \sum_{k=1}^j \hat{\xi}_k v_k^h$ und für

$h < h_0$ verschwindet die Funktion v^h wegen der linearen Unabhängigkeit der v_k^h , $k = 1, \dots, j$ nicht, so daß $Q_h(v^h)$ für diese h definiert ist und das Argument des betrachteten Grenzwerts für die h , für die es von Interesse ist (nämlich die kleinen), auch zur Verfügung steht.

Wir zeigen nun, daß der Zähler von $Q_h(v^h)$ gegen den Zähler von $Q(v)$ konvergiert sowie eine analoge Behauptung für den Nenner. Wenn es also gelingt, die beiden Behauptungen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v^h\|_{-1,a}^2 = \|v'\|_a^2 \quad (7.22)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v^h\|_{0,a}^2 = \|v\|_a^2 \quad (7.23)$$

gleichmäßig für alle $v \in M$ zu beweisen, so ist die Konvergenzaussage (7.19) beziehungsweise (7.20) damit gezeigt, da aus $v \neq 0$ insbesondere folgt, daß $\|v\|_a^2 \neq 0$ gilt, der Nennergrenzwert also nicht verschwindet.

Behauptung (7.22) bedeutet wegen

$$\|v^h\|_{-1,a}^2 = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_h(x_j) \left(\frac{v^h(x_j) - v^h(x_{j-1})}{h} \right)^2 \stackrel{v^h \in \mathcal{G}_{h,0}}{=} h \sum_{j=1}^N a(x_j) \left(\frac{v(x_j) - v(x_{j-1})}{h} \right)^2$$

ausführlich aufgeschrieben

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(h \sum_{j=1}^N a(x_j) \left(\frac{v(x_j) - v(x_{j-1}))}{h} \right)^2 \right) = \int_0^1 (v'(x))^2 a(x) dx \quad .$$

Bekanntermaßen ist der rückwärtsgenommene Differenzenquotient erster Ordnung für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion v eine $O(h)$ -Approximation von v' , das heißt es gilt

$$\exists C_1 > 0 \forall h > 0 : \left| v'(x_j) - \frac{v(x_j) - v(x_{j-1}))}{h} \right| \leq \tilde{C}_1 h \quad . \quad (7.24)$$

Eine mögliche Konstante \tilde{C}_1 ist hierbei gegeben durch

$$\tilde{C}_1 = \max_{x \in [0,1]} |v''(x)| \leq \max_{x \in [0,1]} \sum_{k=1}^j \underbrace{|\hat{\xi}_k|}_{\leq 1} |v_k''(x)| \leq \sum_{k=1}^j \max_{x \in [0,1]} |v_k''(x)| =: C_1 ,$$

wobei wir mit C_1 nun eine Konstante gewonnen haben, die nicht mehr von der konkreten Wahl von v abhängt, sondern gleichmäßig für alle relevanten $v \in M$ Gültigkeit hat, wenn man in (7.24) \tilde{C}_1 durch C_1 ersetzt.

Weiter ist v' (wie auch die Ableitung der Basisfunktionen v'_k) als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall beschränkt (siehe oben) und die Schranke gilt gleichmäßig für alle betrachteten $v \in M$, das heißt

$$\exists C_2 > 0 \forall v \in M : \max_{k=1, \dots, j} \hat{\xi}_k = 1 \forall x \in [0, 1] : |v'(x)| \leq C_2 \quad . \quad (7.25)$$

Dies sieht man leicht ein, wenn man

$$|v'(x)| \leq \sum_{k=1}^j \underbrace{|\hat{\xi}_k|}_{\leq 1} |v'_k(x)| \leq \sum_{k=1}^j \max_{x \in [0,1]} |v'_k(x)| =: C_2$$

hinschreibt.

Da der rückwärtsgenommene Differenzenquotient, wie in (7.24) gesehen, konvergiert, ist er ebenfalls beschränkt, was leicht aus

$$\begin{aligned} & \left| \frac{v(x_j) - v(x_{j-1}))}{h} \right| \\ & \leq \left| \frac{v(x_j) - v(x_{j-1}))}{h} - v'(x_j) \right| + |v'(x_j)| \\ & \leq C_1 h + C_2 \\ & \stackrel{h = \frac{1}{N} \leq 1}{\leq} C_1 + C_2 =: C_3, \quad x_j \in G_h \end{aligned} \quad (7.26)$$

folgt (beachte, daß auch C_3 nicht von v abhängt). In einem nächsten Schritt schlußfolgert man

$$\begin{aligned}
& \left| (v'(x_j))^2 - \left(\frac{v(x_j) - v(x_{j-1})}{h} \right)^2 \right| \\
&= \left| v'(x_j) - \frac{v(x_j) - v(x_{j-1})}{h} \right| \cdot \left| v'(x_j) + \frac{v(x_j) - v(x_{j-1})}{h} \right| \\
&\stackrel{(7.24)}{\leq} C_1 h \cdot \left(|v'(x_j)| + \left| \frac{v(x_j) - v(x_{j-1})}{h} \right| \right) \\
&\stackrel{(7.25), (7.26)}{\leq} C_1 h (C_2 + C_3) \\
&\stackrel{C_4 := C_1(C_2 + C_3)}{=} C_4 h \quad . \tag{7.27}
\end{aligned}$$

Auch C_4 hängt offenbar nicht von v ab. Der quadrierte Differenzenquotient approximiert also die quadrierte Ableitung ebenfalls mit der Ordnung $O(h)$. Als letztes Hilfsergebnis bemerken wir, daß die summierte Sehntrapezregel das Integral einer stetig differenzierbaren Funktion mit einem Fehlerterm der Größenordnung $O(h)$ annähert. Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ist dies ein Standardergebnis der Numerik (hier hat man sogar $O(h^2)$, siehe zum Beispiel [SH82] Seite 80). Für eine auf $[a, b]$ lediglich einmal stetig differenzierbare Funktion – nennen wir sie f – ist folgende Zusatzüberlegung notwendig:

Die Untersuchung der einfachen Sehntrapezregel auf $[a, b]$ fördert das Folgende zutage: f hat eine beschränkte Ableitung, es gilt also (siehe oben) $|f'(x)| \leq C_5 := \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$. Für das Restglied hat man dann

$$\begin{aligned}
& |E(f)| \\
&= \left| \int_a^b \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) - f(x) \right) dx \right| \\
&\leq \int_a^b \left| f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) - f(x) \right| dx \\
&\leq \int_a^b \left(|f(a) - f(x)| + \frac{|f(b) - f(a)|}{b - a} (x - a) \right) dx \\
&\stackrel{\text{Mittelwertsatz}}{\leq} \int_a^b 2C_5 (x - a) dx \\
&= 2C_5 \underbrace{\int_a^b (x - a) dx}_{= \frac{1}{2}(b-a)^2}
\end{aligned}$$

$$= C_5(b-a)^2 \quad . \quad (7.28)$$

Summiert man nun wie üblich diese Fehlerterme über äquidistante Intervalle $[a_\nu, b_\nu] = [a + (\nu-1)h, a + \nu h] = [x_{\nu-1}, x_\nu]$, $\nu = 1, \dots, N$ auf (vergleiche auch [SH82] Seite 78ff), so erhält man

$$\begin{aligned} & |E(f)| \\ &= \left| \sum_{\nu=1}^{N-1} E_\nu(f) \right| \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{N-1} |E_\nu(f)| \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{N-1} C_5 h^2 \\ &\leq C_5 h, \end{aligned} \quad (7.29)$$

also wie behauptet einen Fehlerterm der Größenordnung $O(h)$ für die summierte Sehnentrapezformel

$$S_h(f) = h \left(\frac{1}{2} f(a) + \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j) + \frac{1}{2} f(b) \right) \quad .$$

Die beiden Randpunkte (wie überhaupt eine feste endliche Anzahl von Punkten) können auch wegfallen oder anders gewichtet werden. Definiert man etwa speziell

$$S_h^0(f) = h \left(\sum_{j=1}^N f(x_j) \right),$$

so gilt

$$\begin{aligned} & |E^0(f)| \\ &:= \left| \int_a^b f(x) dx - S_h^0(f) \right| \\ &\leq \left| \int_a^b f(x) dx - S_h(f) \right| + |S_h(f) - S_h^0(f)| \\ &\stackrel{(7.29)}{\leq} C_5 h + h \underbrace{\frac{|f(a) - f(b)|}{2}}_{=: C_6} \\ &\stackrel{C_7 := C_5 + C_6}{\leq} C_7 h \quad . \end{aligned} \quad (7.30)$$

Man beachtet noch, daß mit $v', a \in C^1[0, 1]$ auch $(v')^2 a$ eine stetig differenzierbare Funktion ist, da die Ableitung $((v')^2 a)' = 2v'v''a + (v')^2 a'$ als Produkt beziehungsweise Summe stetiger Funktionen stetig ist und kann mittels der vorangegangenen Hilfsüberlegungen nun die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^1 (v'(x))^2 a(x) dx - h \sum_{j=1}^N a(x_j) \left(\frac{v(x_j) - v(x_{j-1})}{h} \right)^2 \right| \\
& \leq \left| \int_0^1 (v'(x))^2 a(x) dx - h \sum_{j=1}^N a(x_j) (v'(x_j))^2 \right| \\
& \quad + \left| h \sum_{j=1}^N a(x_j) (v'(x_j))^2 - h \sum_{j=1}^N a(x_j) \left(\frac{v(x_j) - v(x_{j-1})}{h} \right)^2 \right| \\
& \stackrel{(7.30)}{\leq} C_7 h + \left| h \sum_{j=1}^N a(x_j) (v'(x_j))^2 - h \sum_{j=1}^N a(x_j) \left(\frac{v(x_j) - v(x_{j-1})}{h} \right)^2 \right| \\
& = C_7 h + h \sum_{j=1}^N |a(x_j)| \left| (v'(x_j))^2 - \left(\frac{v(x_j) - v(x_{j-1})}{h} \right)^2 \right| \\
& \stackrel{(7.27)}{\leq} C_7 h + h \sum_{j=1}^N |a(x_j)| \cdot C_4 h \\
& \stackrel{(5.3)}{\leq} C_7 h + C_4 h^2 R_a N \\
& \leq C_7 h + C_4 R_a h \\
& \stackrel{C_8 := C_7 + C_4 R_a}{=} C_8 h,
\end{aligned}$$

also die Konvergenz des Zählers von $Q_h(v^h)$ gegen den Zähler von $Q(v)$ mit der Ordnung $O(h)$ und damit Behauptung (7.22) zeigen. Außerdem gilt (beachte $v^2 a \in C^1[0, 1]$)

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^1 v^2(x) a(x) dx - h \sum_{j=1}^N v^2(x_j) a(x_j) \right| \\
& \stackrel{(7.30)}{\leq} C_7 h.
\end{aligned}$$

Somit konvergiert auch der Nenner von $Q_h(v^h)$ gegen den Nenner von $Q(v)$ mit der Ordnung $O(h)$, was Behauptung (7.23) zeigt.

Wir diskutieren nun noch die Abschätzung der aufgetretenen Konstanten C_5, C_6, C_7, C_8 nach oben durch Konstanten, die nicht von v abhängen. C_5 ist definiert als das Maximum der Ableitung der jeweils integrierten Funktion f . In unserem Fall haben wir einmal $v^2 a$ und einmal $(v')^2 a$ integriert. Beide Funktionen besitzen beschränkte Ableitungen, wobei die Schranke jeweils nicht von v abhängt, denn wenn man

$$|v'(x)| \leq C_2, |v''(x)| \leq C_1$$

sowie

$$|v(x)| \leq \sum_{k=1}^j \underbrace{|\hat{\xi}_k|}_{\leq 1} \cdot |v_k(x)| \leq \sum_{k=1}^j \max_{x \in [0,1]} |v_k(x)| =: C_0, \quad a(x) \leq R_a, \quad |a'(x)| \leq R_{a'} \quad \forall x \in [0, 1]$$

beachtet, so folgt ohne Mühe

$$\begin{aligned} |(v^2 a)'| &= |2vv'a + v^2 a'| \leq 2C_0 C_2 R_a + C_0^2 R_{a'}, \\ |((v')^2 a)'| &= |2v'v''a + (v')^2 a'| \leq 2C_2 C_1 R_a + C_2^2 R_{a'} \end{aligned}$$

und damit, daß C_5 in den von uns betrachteten Fällen nicht von v abhängt. Die Konstante C_6 kann nach oben abgeschätzt werden mittels

$$C_6 = \frac{|f(0) - f(1)|}{2} \leq \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \leq \begin{cases} C_0^2 R_a & , \quad f = v^2 a \\ C_2^2 R_a & , \quad f = (v')^2 a \end{cases}$$

und C_7 ist als Summe von C_5 und C_6 ebenfalls leicht durch eine von v unabhängige Konstante zu beschränken. Gleiches gilt für C_8 , so daß alle auftretenden Konstanten ohne Einschränkung als nicht von v abhängig angesehen werden dürfen.

Um schließlich Behauptung (7.21) zu zeigen, überlegt man sich ganz allgemein das Folgende: Setzt man

$$b_h := \|v^h\|_{-1,a}^2, \quad b := \|v'\|_a^2, \quad c_h := \|v^h\|_{0,a}^2, \quad c := \|v\|_a^2,$$

so hat man nach dem bisher Gezeigten zwei konvergente Folgen $b_h \geq 0, c_h \geq 0, h = \frac{1}{N}, N \in \mathbb{N}$ mit Grenzwerten $b, c (c > 0)$ gegeben und existieren Konstanten $h_0 > 0, C_9 > 0$ mit (o.B.d.A.)

$$\begin{aligned} \forall h \leq h_0 : \quad |b_h - b| &\leq C_9 h \\ \forall h \leq h_0 : \quad |c_h - c| &\leq C_9 h \quad . \end{aligned} \tag{7.31}$$

Außerdem ist

$$c = \left\| \sum_{k=1}^j \hat{\xi}_k v_k(x) \right\|_{0,a}^2 \stackrel{v_k \text{ ONB}}{=} \sum_{k=1}^j \hat{\xi}_k^2 \geq 1 \tag{7.32}$$

und für $h \leq \frac{1}{2C_9}$ gilt

$$c_h \stackrel{(7.31)}{\geq} c - C_9 h \geq 1 - C_9 h \geq \frac{1}{2} \quad . \tag{7.33}$$

Weiterhin hat man

$$\begin{aligned}
&= \left\| \sum_{k=1}^j \hat{\xi}_k v'_k(x) \right\|_a^2 \\
&= \sum_{k,\nu=1}^j \hat{\xi}_k \hat{\xi}_\nu (v'_k, v'_\nu)_a \\
&\leq \sum_{k,\nu=1}^j |\hat{\xi}_k| \cdot |\hat{\xi}_\nu| \cdot |(v'_k, v'_\nu)_a| \\
&\stackrel{|\hat{\xi}_k| \leq 1, 1 \leq k \leq j}{\leq} \sum_{k,\nu=1}^j |(v'_k, v'_\nu)_a| \\
&=: C_{10}
\end{aligned} \tag{7.34}$$

und daher folgt insgesamt

$$\begin{aligned}
&|Q_h(v^h) - Q(v)| \\
&= \left| \frac{b_h}{c_h} - \frac{b}{c} \right| \\
&= \frac{|b_h c - b c_h|}{c_h c} \\
&\leq \frac{|b_h - b|c}{c_h c} + \frac{b|c - c_h|}{c_h c} \\
&= \frac{|b_h - b|}{c_h} + \frac{b|c - c_h|}{c c_h} \\
&\stackrel{(7.32), (7.33), (7.34)}{\leq} \frac{1}{2} (|b_h - b| + C_{10}|c - c_h|) \\
&\stackrel{(7.31)}{\leq} \frac{1}{2} (C_9 h + C_{10} C_9 h) \\
&= \frac{C_9 + C_{10} C_9}{2} h \\
&=: C^{(1)} h .
\end{aligned}$$

Dies sichert die Behauptung (7.21).

Wir bemerken noch, daß aus (7.22) und (7.23) auch

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v^h\|_{-1,a} = \|v'\|_a \tag{7.35}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v^h\|_{0,a} = \|v\|_a \tag{7.36}$$

folgt, denn es gilt ganz allgemein:

$$\left(a_n \geq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = a^2 \right) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a .$$

Im Fall $a = 0$ ist nämlich $a_n^2 < \varepsilon$, $n \geq N(\varepsilon)$ und somit $a_n < \varepsilon$, $n \geq N(\varepsilon^2)$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = a$. Ist $a \neq 0 \implies a > 0$, so wähle zu $\varepsilon > 0$ nach der Konvergenzbedingung für a_n^2 ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n^2 - a^2| \leq \varepsilon a$. Dann gilt

$$|a_n - a| = \frac{|a_n^2 - a^2|}{a_n + a} \leq \frac{|a_n^2 - a^2|}{a} \leq \frac{\varepsilon a}{a} = \varepsilon \quad .$$

Dritte Behauptung:

Sei $M \subset V_0$, $\dim(M) = j$ beliebig. Dann gilt

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \exists h_2 > 0 \forall h \leq h_2 : \quad Q_h((v_M)^h) \leq Q_h((v_M^h)_h) \leq Q_h((v_M)^h) + \varepsilon_2 \quad . \quad (7.37)$$

Genauer ist auch hier

$$\exists C^{(2)} \geq 0 \exists h_2 > 0 \forall h \leq h_2 : \quad Q_h((v_M)^h) \leq Q_h((v_M^h)_h) \leq Q_h((v_M)^h) + C^{(2)}h, \quad (7.38)$$

also $Q_h((v_M^h)_h) - Q_h((v_M)^h) = O(h)$.

Beweis der dritten Behauptung:

Sei M irgendein j -dimensionaler Teilraum von V_0 und $\varepsilon_2 > 0$ beliebig. Die linke Ungleichung in (7.37) gilt trivialerweise für alle $h > 0$.

Wir nehmen nun das Gegenteil der rechten behaupteten Ungleichung an, also

$$\exists \varepsilon_2 > 0 \forall h_2 > 0 \exists h \leq h_2 : Q_h((v_M^h)_h) > Q_h((v_M)^h) + \varepsilon_2 \quad . \quad (7.39)$$

Sei nun h_1 nach der zweiten Behauptung so klein gewählt, daß $|Q_h(v^h) - Q(v)| \leq \frac{\varepsilon_2}{2}$ für alle $v \in M$ gilt und weiter sei $h \leq h_2 := h_1$ nach (7.39) gegeben.

Dann folgt bei Beachtung von $(v_M^h)_h \in M^h \implies \exists v(h) \in M : (v_M^h)_h = (v(h))^h$ die Ungleichungskette

$$Q(v_M) + \frac{\varepsilon_2}{2} \leq Q_h((v_M)^h) + \varepsilon_2 \stackrel{(7.39)}{<} Q_h((v_M^h)_h) = Q_h((v(h))^h) \leq Q(v(h)) + \frac{\varepsilon_2}{2} \quad . \quad (7.40)$$

Man subtrahiert $\frac{\varepsilon_2}{2}$ und erhält

$$Q(v_M) < Q(v(h))$$

im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von v_M .

Zum Beweis der rechten Ungleichung in (7.38) geht man analog vor (die linke ist, wie schon bemerkt, trivial). Die Widerspruchsannahme lautet nun

$$\forall C^{(2)} \geq 0 \forall h_2 > 0 \exists h \leq h_2 : \quad Q_h((v_M^h)_h) > Q_h((v_M)^h) + C^{(2)}h \quad . \quad (7.41)$$

Wählt man nun $C^{(2)} = 2C^{(1)}$, dann existiert nach (7.41) zu $h_2 := h_1$ ein $h < h_2$, so daß in Analogie zu (7.40)

$$\begin{aligned} & Q(v_M) + C^{(1)}h \\ &= Q(v_M) + C^{(2)}h - C^{(1)}h \\ &\leq Q_h((v_M)^h) + C^{(2)}h \\ &\stackrel{(7.41)}{<} Q_h((v_M^h)_h) \\ &= Q_h((v(h))^h) \\ &\leq Q(v(h)) + C^{(1)}h \end{aligned}$$

erfüllt ist, was nach Subtraktion von $C^{(1)}h$ auf den gleichen Widerspruch wie zuvor führt.

Vierte Behauptung:

Es gilt

$$\forall M \subset V_0, \dim(M) = j : \lim_{h \rightarrow 0} Q_h((v_{M^h})_h) = Q(v_M)$$

oder ausführlich:

$$\forall \varepsilon_3 > 0 \exists h_3 = h_3(M, \varepsilon_3) > 0 \forall h < h_3 : |Q_h((v_{M^h})_h) - Q(v_M)| < \varepsilon_3 \quad .$$

Auch hier ist die Konvergenzordnung mit $O(h)$ gegeben, das heißt

$$\exists C^{(3)} \exists h_3 \forall h \leq h_3 : |Q_h((v_{M^h})_h) - Q(v_M)| \leq C^{(3)}h \quad . \quad (7.42)$$

Beweis der vierten Behauptung:

Sei $\varepsilon_3 > 0$ beliebig. Wählt man $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_3}{2}$, so folgt aus der zweiten und dritten Behauptung für $h \leq h_3 := \min(h_1, h_2)$ die Abschätzung

$$|Q_h((v_{M^h})_h) - Q(v_M)| \leq |Q_h((v_{M^h})_h) - Q_h((v_M)^h)| + |Q_h((v_M)^h) - Q(v_M)| \leq \frac{\varepsilon_3}{2} + \frac{\varepsilon_3}{2} = \varepsilon_3 ,$$

wodurch die behauptete Konvergenz bewiesen ist. Die Aussage über die Konvergenzordnung ist mit $C^{(3)} := C^{(1)} + C^{(2)}$ unmittelbar klar.

Fünfte Behauptung:

$$\forall \varepsilon_4 > 0 \exists h_4 > 0 \forall h < h_4 : Q_h((v_{M_h^*})_h) \leq Q(v_{M^*}) + \varepsilon_4$$

oder genauer

$$\exists C^{(4)} > 0 \exists h_4 > 0 \forall h < h_4 : Q_h((v_{M_h^*})_h) \leq Q(v_{M^*}) + C^{(4)}h \quad . \quad (7.43)$$

Beweis der fünften Behauptung:

Sei $\varepsilon_4 > 0$ beliebig. Setze nach der vierten Behauptung $h_4 := h_3(M^*, \varepsilon_4)$. Dann folgt für alle $h < h_4$:

$$Q_h((v_{M_h^*})_h) \stackrel{\text{Minimaleig.}}{\leq} Q_h((v_{(M^*)^h})_h) \stackrel{\text{Vierte Beh.}}{\leq} Q(v_{M^*}) + \varepsilon_4 \quad .$$

und mit $C^{(4)} := C^{(3)}(M^*)$ hat man nach (7.42) auch die Gültigkeit von (7.43).

Sechste Behauptung:

Zu jedem j -dimensionalen Raum $M_h = [v_{1,h}, \dots, v_{j,h}] \subset \mathcal{G}_{h,0}$ gibt es einen j -dimensionalen Raum $M = [v_1, \dots, v_j] \subset V_0$ mit $M^h = M_h$ (also quasi eine Fortsetzung) und insbesondere $v_k^h = v_{k,h}$, $k = 1, \dots, j$, so daß für alle Funktionen

$$v = \sum_{k=1}^j \xi_k v_k \quad , \quad w = \sum_{k=1}^j \eta_k v_k$$

aus M und die zugehörigen Gitterfunktionen

$$v^h = \sum_{k=1}^j \xi_k v_{k,h} \quad , \quad w^h = \sum_{k=1}^j \eta_k v_{k,h}$$

aus $M_h = M^h$ unter der Voraussetzung

$$\max\{|\xi_k|, |\eta_k| \mid k = 1, \dots, j\} \leq 1$$

die Ungleichung

$$|(v', w')_a - (v^h, w^h)_{-1,a}| \leq h j^2 \left(1 + R'_a \max_{1 \leq k, \tilde{k} \leq j} (v_{k,h}, v_{\tilde{k},h})_{-1} \right)$$

gilt und daraus folgend im Spezialfall $v = w$

$$\|v'\|_a^2 - \|v^h\|_{-1,a}^2 \leq h j^2 \left(1 + R'_a \max_{1 \leq k \leq j} \|v_{k,h}\|_{-1}^2 \right) \quad (7.44)$$

erfüllt ist.

Zusätzlich hat man

$$|(v, w)_a - (v^h, w^h)_{0,a}| \leq h j^2 \cdot 3072(241R_a + 32R'_a) \max_{k=1, \dots, j} \|v_{k,h}\|_{-1}^2$$

und somit im wiederum Spezialfall $v = w$

$$\|v\|_a^2 - \|v^h\|_{0,a}^2 \leq h j^2 \cdot 3072(241R_a + 32R'_a) \max_{k=1, \dots, j} \|v_{k,h}\|_{-1}^2 \quad . \quad (7.45)$$

Beweis der sechsten Behauptung:

Es sei $M_h = [v_{1,h}, \dots, v_{j,h}]$ ein beliebiger j -dimensionaler Teilraum von $\mathcal{G}_{h,0}$.

Wir werden nun konstruktiv einen Raum M mit den gewünschten Eigenschaften angeben. Wir definieren dazu auf jedem Teilintervall $I_l := [x_l, x_{l+1}]$, $l = 0, \dots, N-1$ durch die Vorschrift

$$\tilde{v}_k(x) := v_{k,h}(x_l) + m_l^{(k)}(x - x_l), \quad m_l^{(k)} := \frac{v_{k,h}(x_{l+1}) - v_{k,h}(x_l)}{h}, \quad x \in I_l$$

eine lineare Funktion; insgesamt also eine stetige und stückweise lineare Fortsetzung von $v_{k,h}$. Allerdings sind die Funktionen \tilde{v}_k , $k = 1, \dots, j$ nicht in V_0 , da sie nicht zweimal stetig differenzierbar sind. Da es jedoch nur endlich viele Unstetigkeitsstellen der ersten bzw. zweiten Ableitung gibt, kann die nachfolgende Konstruktion, die wir nacheinander für alle $k = 1, \dots, j$ durchführen, zum Ziel führen:

Man setzt in Lemma 7.1.1 sukzessive für $l = 0, \dots, N-1$ zu zunächst beliebigem, aber für $l = 0, \dots, N-1$ gleichen $\varepsilon < \min\left(h, \frac{h^2}{R_a(C_1^2 + m^2)}\right)$ (mit der Bezeichnung

$$m := \max_{k=1, \dots, j} \max_{l=1, \dots, N-1} |m_l^{(k)}|)$$

$$\begin{aligned}
x^{(0)} = x^{(0,k,l)} &:= x_l \\
y_1 = y_1^{(k,l)} &:= \tilde{v}_k(x_l) = v_{k,h}(x_l) \\
y_2 = y_2^{(k,l)} &:= \tilde{v}_k(x_l + \varepsilon) = v_{k,h}(x_l) + m_l^{(k)}\varepsilon = y_1^{(l)} + m_l^{(k)}\varepsilon \\
y_1' = (y_1')^{(k,l)} &:= \begin{cases} m_{l-1}^{(k)} & , \quad l \geq 1 \\ 0 =: m_{-1}^{(k)} & , \quad l = 0 \end{cases} \\
y_2' = (y_2')^{(k,l)} &:= m_l^{(k)} \\
y_1'' = (y_1'')^{(k,l)} &:= 0 \\
y_2'' = (y_2'')^{(k,l)} &:= 0
\end{aligned}$$

und erhält so Polynome $p_\varepsilon = p_\varepsilon^{(k,l)} : [x_l, x_l + \varepsilon] \mapsto \mathbb{R}$, deren Ableitung gleichmäßig in ε beschränkt sind. Die jeweils benötigte Konstante $C = C^{(k,l)}$ ist offenbar wegen

$$|y_1 - y_2| = |m_l^{(k)}|\varepsilon$$

jeweils als $|m_l^{(k)}|$ wählbar und kann noch gleichmäßig für alle $k = 1, \dots, j$, $l = 0, \dots, N - 1$ durch m abgeschätzt werden. Weiter lassen sich auch die für die Polynome gefundenen Konstanten $C_0 = C_0^{(k,l)}$ und $C_1 = C_1^{(k,l)}$ wegen

$$\begin{aligned}
&C_0^{(k,l)} \\
&= |y_1^{(k,l)}| + 31C^{(k,l)} + 18|(y_1')^{(k,l)}| + 14|(y_2')^{(k,l)}| + 4\varepsilon|(y_1'')^{(k,l)}| + \frac{3}{2}\varepsilon|(y_2'')^{(k,l)}| \\
&= |v_{k,h}(x_l)| + 31|m_l^{(k)}| + 18|m_{l-1}^{(k)}| + 14|m_l^{(k)}| \\
&= |v_{k,h}(x_l)| + 45|m_l^{(k)}| + 18|m_{l-1}^{(k)}| \\
&\leq \max_{k=1,\dots,j} \max_{l=1,\dots,N-1} |v_{k,h}(x_l)| + 63m
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&C_1^{(k,l)} \\
&= 120C^{(k,l)} + 66|(y_1')^{k,l}| + 55|(y_2')^{k,l}| + 14|(y_1'')^{k,l}| + 6|(y_2'')^{k,l}| \\
&= 120|m_l^{(k)}| + 66|m_{l-1}^{(k)}| + 55|m_l^{(k)}| \\
&= 175|m_l^{(k)}| + 66|m_{l-1}^{(k)}| \\
&\leq 241m
\end{aligned}$$

gleichmäßig für alle $k = 1, \dots, j$, $l = 0, \dots, N - 1$ nach oben beschränken. Die Definition der eigentlichen Basisfunktion wird nun durch

$$v_k(x) = \begin{cases} \tilde{v}_k(x) & , \quad x \in I_l, 0 \leq l \leq N - 1, x - x_l \geq \varepsilon \\ p_\varepsilon^{(l)}(x) & , \quad x \in I_l, 0 \leq l \leq N - 1, x - x_l \leq \varepsilon \end{cases}$$

vorgenommen. Man fügt also in allen Teilintervallen zu Anfang auf einem Intervall der Länge ε ein kleines polynomiales Stück dergestalt ein, daß insgesamt, wie man leicht anhand der Bedingungen für $p_\varepsilon^{(k,l)}$ nachvollzieht, die fortgesetzte Basisfunktion v_k für alle $k = 1, \dots, j$ zweimal stetig differenzierbar auf $[0, 1]$ ist.

Nun untersuchen wir den Quadraturfehler, den man macht, wenn man $(v'_k, v'_k)_a$ durch $(v_{k,h}, v_{\tilde{k},h})_{-1,a}$ approximiert. Hierbei seien $1 \leq k, \tilde{k} \leq j$ beliebig. Dazu nutzt man zunächst aus, daß der rückwärtsgenommene Differenzenquotient die Ableitung der Basisfunktionen v_k , $k = 1, \dots, j$ aufgrund ihrer obigen Konstruktion an allen Stützstellen exakt approximiert, so daß wegen

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^1 v'_k(x) v'_k(x) a(x) dx - h \sum_{l=1}^N a(x_l) \left(\frac{v_k(x_l) - v_k(x_{l-1})}{h} \right) \left(\frac{v_{\tilde{k}}(x_l) - v_{\tilde{k}}(x_{l-1})}{h} \right) \right| \\
& \leq \left| \int_0^1 v'_k(x) v'_k(x) a(x) dx - h \sum_{l=1}^N a(x_l) v'_k(x_l) v'_{\tilde{k}}(x_l) \right| \\
& \quad + \left| h \sum_{l=1}^N a(x_l) \underbrace{v'_k(x_l) v'_{\tilde{k}}(x_l)}_{=m_{l-1}^{(k)} m_{l-1}^{(\tilde{k})}} - h \sum_{l=1}^N a(x_l) \underbrace{\left(\frac{v_k(x_l) - v_k(x_{l-1})}{h} \right)}_{=m_{l-1}^{(k)}} \underbrace{\left(\frac{v_{\tilde{k}}(x_l) - v_{\tilde{k}}(x_{l-1})}{h} \right)}_{=m_{l-1}^{(\tilde{k})}} \right| \\
& = \left| \int_0^1 v'_k(x) v'_k(x) a(x) dx - h \sum_{l=1}^N a(x_l) v'_k(x_l) v'_{\tilde{k}}(x_l) \right| \tag{7.46}
\end{aligned}$$

nur noch der Quadraturfehler bei Approximation des Integrals von $v'_k v'_k a$ durch die obige Summe betrachtet werden muß. Man teilt dazu den Fehler in seine Einzelbestandteile auf den Intervallen $I_l, l = 0, \dots, N - 1$ auf:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^1 v'_k(x) v'_k(x) a(x) dx - h \sum_{l=1}^N a(x_l) v'_k(x_l) v'_{\tilde{k}}(x_l) \right| \\
& = \left| \sum_{l=0}^{N-1} \left(\int_{x_l}^{x_{l+1}} v'_k(x) v'_k(x) a(x) dx - h \cdot a(x_{l+1}) v'_k(x_{l+1}) v'_{\tilde{k}}(x_{l+1}) \right) \right|. \tag{7.47}
\end{aligned}$$

Die nun erforderliche Untersuchung des Quadraturfehlers auf I_l liefert für $0 \leq l \leq N - 1$ unter Anwendung der Formel

$$\int_{x_{l+\varepsilon}}^{x_{l+1}} a(x) dx = \int_{x_{l+\varepsilon}}^{x_{l+1}} \left(a(x_{l+1}) + \int_{x_{l+1}}^x a'(s) ds \right) dx = (h - \varepsilon) a(x_{l+1}) + \int_{x_{l+\varepsilon}}^{x_{l+1}} \int_{x_{l+1}}^x a'(s) ds dx \tag{7.48}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{x_l}^{x_{l+1}} v'_k(x) v'_{\tilde{k}}(x) a(x) dx - h \cdot a(x_{l+1}) \underbrace{v'_k(x_{l+1})}_{=m_l^{(k)}} \underbrace{v'_{\tilde{k}}(x_{l+1})}_{=m_l^{(\tilde{k})}} \right| \\
&= \left| \int_{x_l}^{x_l+\varepsilon} \underbrace{(p_\varepsilon^{(k,l)})'(x)}_{\leq C_1} \underbrace{(p_\varepsilon^{(\tilde{k},l)})'(x)}_{\leq C_1} \underbrace{a(x)}_{\leq R_a} dx - \varepsilon \cdot \underbrace{a(x_{l+1})}_{\leq R_a} \underbrace{m_l^{(k)}}_{\leq m^2} \underbrace{m_l^{(\tilde{k})}}_{\leq m^2} \right. \\
&\quad \left. + \int_{x_l+\varepsilon}^{x_{l+1}} \underbrace{v'_k(x) v'_{\tilde{k}}(x)}_{=m_l^{(k)} m_l^{(\tilde{k})}} a(x) dx - (h - \varepsilon) a(x_{l+1}) m_l^{(k)} m_l^{(\tilde{k})} \right| \\
&\leq \varepsilon (C_1^2 R_a + R_a m^2) + m_l^{(k)} m_l^{(\tilde{k})} \left| \int_{x_l+\varepsilon}^{x_{l+1}} a(x) dx - (h - \varepsilon) a(x_{l+1}) \right| \\
&\stackrel{(7.48)}{\leq} \varepsilon (C_1^2 R_a + R_a m^2) + m_l^{(k)} m_l^{(\tilde{k})} \left| \int_{x_l+\varepsilon}^{x_{l+1}} \int_{x_{l+1}}^x \underbrace{|a'(s)|}_{\leq \max_{x \in [0,1]} |a'(x)| =: R'_a} ds dx \right| \\
&\leq \varepsilon R_a (C_1^2 + m^2) + h^2 m_l^{(k)} m_l^{(\tilde{k})} R'_a \\
&\leq h^2 + h^2 m_l^{(k)} m_l^{(\tilde{k})} R'_a \quad , \tag{7.49}
\end{aligned}$$

die man in (7.47) einsetzt und so

$$\begin{aligned}
& \left| (v'_k, v'_{\tilde{k}})_a - (v_{k,h}, v_{\tilde{k},h})_{-1,a} \right| \\
&\stackrel{(7.46)}{=} \left| \int_0^1 v'_k(x) v'_{\tilde{k}}(x) a(x) dx - h \sum_{l=1}^N a(x_l) v'_k(x_l) v'_{\tilde{k}}(x_l) \right| \\
&\stackrel{(7.49)}{\leq} \sum_{l=0}^{N-1} h^2 + h^2 m_l^{(k)} m_l^{(\tilde{k})} R'_a \\
&= h + R'_a h^2 \sum_{l=0}^{N-1} m_l^{(k)} m_l^{(\tilde{k})} \\
&= h(1 + R'_a (v_{k,h}, v_{\tilde{k},h})_{-1}) \tag{7.50}
\end{aligned}$$

erhält.

Seien nun beliebige Funktionen

$$v = \sum_{k=1}^j \xi_k v_k \quad , \quad w = \sum_{k=1}^j \eta_k v_k$$

aus M und die zugehörigen Gitterfunktionen

$$v^h = \sum_{k=1}^j \xi_k v_{k,h} \quad , \quad w^h = \sum_{k=1}^j \eta_k v_{k,h}$$

aus $M_h = M^h$ mit

$$\max\{|\xi_k|, |\eta_k| \mid k = 1, \dots, j\} \leq 1$$

gegeben. Dann folgt

$$\begin{aligned} & |(v', w')_a - (v^h, w^h)_{-1,a}| \\ &= \left| \sum_{k, \tilde{k}=1}^j \xi_k \eta_{\tilde{k}} ((v'_k, v'_{\tilde{k}})_a - (v_{k,h}, v_{\tilde{k},h})_{-1,a}) \right| \\ &\leq \sum_{k, \tilde{k}=1}^j \underbrace{|\xi_k \eta_{\tilde{k}}|}_{\leq 1} |(v'_k, v'_{\tilde{k}})_a - (v_{k,h}, v_{\tilde{k},h})_{-1,a}| \\ &\stackrel{(7.50)}{\leq} \sum_{k, \tilde{k}=1}^j h(1 + R'_a(v_{k,h}, v_{\tilde{k},h})_{-1}) \\ &\leq h j^2 \left(1 + R'_a \max_{1 \leq k, \tilde{k} \leq j} (v_{k,h}, v_{\tilde{k},h})_{-1} \right) , \end{aligned}$$

was im Spezialfall $v = w$ dann

$$\begin{aligned} & \left| \|v'\|_a^2 - \|v^h\|_{-1,a}^2 \right| \\ &\leq h j^2 \left(1 + R'_a \max_{1 \leq k, \tilde{k} \leq j} (v_{k,h}, v_{\tilde{k},h})_{-1} \right) \\ &\stackrel{\text{Scharzsche Ungl.}}{\leq} h j^2 \left(1 + R'_a \max_{1 \leq k, \tilde{k} \leq j} \|v_{k,h}\|_{-1} \cdot \|v_{\tilde{k},h}\|_{-1} \right) \\ &\leq h j^2 \left(1 + R'_a \max_{1 \leq k \leq j} \|v_{k,h}\|_{-1}^2 \right) \end{aligned}$$

bedeutet. Dies zeigt den ersten Teil der sechsten Behauptung.

Nun betrachtet man den Quadraturfehler, den man macht, wenn man $(v_k, v_{\tilde{k}})_a$ durch $(v_{k,h}, v_{\tilde{k},h})_{0,a}$ approximiert ($1 \leq k, \tilde{k} \leq j$ beliebig), was, wie sich noch zeigen wird, einer Näherung durch die summierte Sehnentrapezformel entspricht. Wir untersuchen dazu zuerst den Fehler auf jedem Teilintervall I_l , $0 \leq l \leq N-1$ gesondert. Zunächst stellt man fest, daß für beliebiges $x \in I_l$ die Ableitung der integrierten Funktion, also $(v_k v_{\tilde{k}} a)'$ beschränkt ist. Um dies zu zeigen, benutzt man (unter Berücksichtigung der Konstruktion von v_k)

$$C_0^{(k,l)} \geq |v_{k,h}(x_l)| + |m_l^{(k)}| \geq |v_{k,h}(x_l)| + |m_l^{(k)}| h \geq |v_{k,h}(x_{l+1})| \quad , \quad C_0^{(k,l)} \geq |v_{k,h}(x_l)|$$

und folgert daraus

$$|v_k(x)| \leq \max(C_0^{(k,l)}, |v_{k,h}(x_l)|, |v_{k,h}(x_{l+1})|) = C_0^{(k,l)}, \quad (7.51)$$

und ebenso schließt man aus

$$C_1^{(k,l)} \geq |m_l^{(k)}|$$

den Zusammenhang

$$|v'_k(x)| \leq \max(C_1^{(k,l)}, |m_l^{(k)}|) = C_1^{(k,l)}. \quad (7.52)$$

Nutzt man noch aus, daß man mittels

$$C_0^{(k,l)} = |v_{k,h}(x_l)| + 45|m_l^{(k)}| + 18|m_{l-1}^{(k)}| \leq 64 \max\left(|v_{k,h}(x_l)|, |m_l^{(k)}|, |m_{l-1}^{(k)}|\right) \quad (7.53)$$

und

$$C_1^{(k,l)} = 175|m_l^{(k)}| + 66|m_{l-1}^{(k)}| \leq 241 \max\left(|v_{k,h}(x_l)|, |m_l^{(k)}|, |m_{l-1}^{(k)}|\right) \quad (7.54)$$

die vorkommenden Konstanten nach oben abschätzen kann, so wird man dadurch auf

$$\begin{aligned} & |(v_k v_{\tilde{k}} a)'(x)| \\ & \leq |v'_k(x)| \cdot |v_{\tilde{k}}(x)| \cdot \underbrace{|a(x)|}_{\leq R_a} + |v_k(x)| \cdot |v'_{\tilde{k}}(x)| \cdot |a(x)| + |v_k(x)| \cdot |v_{\tilde{k}}(x)| \cdot |a'(x)| \\ & \stackrel{(7.51), (7.52)}{\leq} C_0^{(\tilde{k},l)} C_1^{(k,l)} R_a + C_0^{(k,l)} C_1^{(\tilde{k},l)} R_a + C_0^{(k,l)} C_0^{(\tilde{k},l)} R'_a \\ & \stackrel{(7.53), (7.54)}{\leq} (2 \cdot 64 \cdot 241 R_a + 64^2 R'_a) \max\left(|v_{k,h}(x_l)|, |m_l^{(k)}|, |m_{l-1}^{(k)}|\right) \\ & \quad \cdot \max\left(|v_{\tilde{k},h}(x_l)|, |m_l^{(\tilde{k})}|, |m_{l-1}^{(\tilde{k})}|\right) \\ & = 128(241 R_a + 32 R'_a) \max\left(|v_{k,h}(x_l)|, |m_l^{(k)}|, |m_{l-1}^{(k)}|\right) \\ & \quad \cdot \max\left(|v_{\tilde{k},h}(x_l)|, |m_l^{(\tilde{k})}|, |m_{l-1}^{(\tilde{k})}|\right) \\ & \leq 128(241 R_a + 32 R'_a) 2 \max\left(|v_{k,h}(x_l)|^2, |m_l^{(k)}|^2, |m_{l-1}^{(k)}|^2, |v_{\tilde{k},h}(x_l)|^2, |m_l^{(\tilde{k})}|^2, |m_{l-1}^{(\tilde{k})}|^2\right) \end{aligned}$$

geführt, wobei wir im letzten Schritt

$$\begin{aligned} & \max(a, b, c) \cdot \max(d, e, f) \\ & \leq \max(a, b, c)^2 + \max(d, e, f)^2 \\ & = \max(a^2, b^2, c^2) + \max(d^2, e^2, f^2) \\ & \leq 2 \max(a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2), \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \end{aligned}$$

ausgenutzt haben.

Wie wir bereits im Beweis der zweiten Behauptung bemerkt haben, gilt dann für den Fehler, den man macht, wenn man das Integral der Funktion $v_k v_{\bar{k}} a$ über I_l durch die Sehnentrapezformel approximiert, die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_l}^{x_{l+1}} v_k v_{\bar{k}}(x) a(x) dx - h \frac{v_k(x_l) v_{\bar{k}}(x_l) a(x_l) + v_k(x_{l+1}) v_{\bar{k}}(x_{l+1}) a(x_{l+1})}{2} \right| \\ \leq & 256(241R_a + 32R'_a) \\ & \cdot \max \left(|v_{k,h}(x_l)|^2, |m_l^{(k)}|^2, |m_{l-1}^{(k)}|^2, |v_{\bar{k},h}(x_l)|^2, |m_l^{(\bar{k})}|^2, |m_{l-1}^{(\bar{k})}|^2 \right) h^2 \quad . \quad (7.55) \end{aligned}$$

Summiert man nun über alle I_l , $l = 0, \dots, N-1$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left| (v_k, v_{\bar{k}})_a - (v_{k,h}, v_{\bar{k},h})_{0,a} \right| \\ = & \left| \int_0^1 v_k(x) v_{\bar{k}}(x) a(x) dx - h \sum_{l=1}^{N-1} v_k(x_l) v_{\bar{k}}(x_l) a(x_l) \right| \\ = & \left| \int_0^1 v_k(x) v_{\bar{k}}(x) a(x) dx - h \sum_{l=0}^{N-1} \frac{v_k(x_l) v_{\bar{k}}(x_l) a(x_l) + v_k(x_{l+1}) v_{\bar{k}}(x_{l+1}) a(x_{l+1})}{2} \right| \\ = & \left| \sum_{l=0}^{N-1} \int_{x_l}^{x_{l+1}} v_k(x) v_{\bar{k}}(x) a(x) dx - h \frac{v_k(x_l) v_{\bar{k}}(x_l) a(x_l) + v_k(x_{l+1}) v_{\bar{k}}(x_{l+1}) a(x_{l+1})}{2} \right| \\ \leq & \sum_{l=0}^{N-1} \left| \int_{x_l}^{x_{l+1}} v_k(x) v_{\bar{k}}(x) a(x) dx - h \frac{v_k(x_l) v_{\bar{k}}(x_l) a(x_l) + v_k(x_{l+1}) v_{\bar{k}}(x_{l+1}) a(x_{l+1})}{2} \right| \\ \stackrel{(7.55)}{\leq} & \sum_{l=0}^{N-1} 256(241R_a + 32R'_a) \\ & \cdot \max \left(|v_{k,h}(x_l)|^2, |m_l^{(k)}|^2, |m_{l-1}^{(k)}|^2, |v_{\bar{k},h}(x_l)|^2, |m_l^{(\bar{k})}|^2, |m_{l-1}^{(\bar{k})}|^2 \right) h^2 \\ \leq & h \cdot 256(241R_a + 32R'_a) \left(\underbrace{h \sum_{l=0}^{N-1} |v_{k,h}^2(x_l)|}_{=\|v_{k,h}\|_0^2} + 2 \underbrace{h \sum_{l=0}^{N-1} |m_l^{(k)}|^2}_{=\|v_{k,h}\|_{-1}^2} \right. \\ & \left. + \underbrace{h \sum_{l=0}^{N-1} |v_{\bar{k},h}^2(x_l)|}_{=\|v_{\bar{k},h}\|_0^2} + 2 \underbrace{h \sum_{l=0}^{N-1} |m_l^{(\bar{k})}|^2}_{=\|v_{\bar{k},h}\|_{-1}^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\text{diskr. Friedr. Ungl.}}{\leq} h \cdot 256(241R_a + 32R'_a) \left(\underbrace{(1+h)^2}_{\leq 4} \|v_{k,h}\|_{-1}^2 + 2\|v_{k,h}\|_{-1}^2 \right) \\
& \quad + \underbrace{(1+h)^2}_{\leq 4} \|v_{\bar{k},h}\|_{-1}^2 + 2\|v_{\bar{k},h}\|_{-1}^2 \\
& \leq h \cdot 256(241R_a + 32R'_a) \cdot (6\|v_{k,h}\|_{-1}^2 + 6\|v_{\bar{k},h}\|_{-1}^2) \\
& \leq h \cdot 1536(241R_a + 32R'_a) (\|v_{k,h}\|_{-1}^2 + \|v_{\bar{k},h}\|_{-1}^2) \\
& \leq h \cdot 3072(241R_a + 32R'_a) \max_{k=1,\dots,j} \|v_{k,h}\|_{-1}^2 . \tag{7.56}
\end{aligned}$$

Dies setzt man nun ein, um ganz analog zu obigen Ausführungen

$$\begin{aligned}
& |(v, w)_a - (v^h, w^h)_{0,a}| \\
& = \left| \sum_{k, \bar{k}=1}^j \xi_k \eta_{\bar{k}} ((v_k, v_{\bar{k}})_a - (v_{k,h}, v_{\bar{k},h})_{0,a}) \right| \\
& \leq \sum_{k, \bar{k}=1}^j \underbrace{|\xi_k \eta_{\bar{k}}|}_{\leq 1} |(v_k, v_{\bar{k}})_a - (v_{k,h}, v_{\bar{k},h})_{0,a}| \\
& \stackrel{(7.56)}{\leq} h j^2 \cdot 3072(241R_a + 32R'_a) \max_{k=1,\dots,j} \|v_{k,h}\|_{-1}^2
\end{aligned}$$

zu zeigen, was im Spezialfall $v = w$ dann ebenfalls

$$\begin{aligned}
& | \|v\|_a^2 - \|v^h\|_{0,a}^2 | \\
& \leq h j^2 \cdot 3072(241R_a + 32R'_a) \max_{k=1,\dots,j} \|v_{k,h}\|_{-1}^2
\end{aligned}$$

bedeutet.

Siebte Behauptung:

$$\forall \varepsilon_5 > 0 \exists h_5 > 0 \forall h < h_5 \forall M_h \subset \mathcal{G}_{h,0}, \dim(M_h) = j : \quad Q_h((v_{M_h})_h) \geq Q(v_{M^*}) - \varepsilon_5 \tag{7.57}$$

oder genauer:

$$\exists C^{(5)} > 0 \exists h_5 > 0 \forall h < h_5 \forall M_h \subset \mathcal{G}_{h,0}, \dim(M_h) = j : \quad Q_h((v_{M_h})_h) \geq Q(v_{M^*}) - C^{(5)} h . \tag{7.58}$$

Beweis der siebten Behauptung:

Sei $\varepsilon_5 > 0$ beliebig. Man nimmt nun das Gegenteil der Behauptung (7.57) an, also

$$\exists \varepsilon_5 > 0 \forall h_5 > 0 \exists h(h_5) < h_5 \exists M_h \subset \mathcal{G}_{h,0}, \dim(M_h) = j : \quad Q_h((v_{M_h})_h) < Q(v_{M^*}) - \varepsilon_5 .$$

Wählt man nun $h^{(1)} := 1$, $h^{(n+1)} := h(h^{(n)}) < h^{(n)}$, so erhält man (wegen der besonderen Gestalt $h = \frac{1}{N}$, die h immer besitzt) eine Nullfolge $(h^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ sowie eine zugehörige Folge von j -dimensionalen Räumen

$$M_{h^{(n)}} \subset \mathcal{G}_{h^{(n)},0}$$

mit

$$Q_{h^{(n)}}((v_{M_{h^{(n)}}})_{h^{(n)}}) < Q(v_{M^*}) - \varepsilon_5 \quad . \quad (7.59)$$

Wir wählen in dem endlichdimensionalen Raum $M_{h^{(n)}}$ eine Orthonormalbasis $v_{1,h^{(n)}}, \dots, v_{j,h^{(n)}}$ bezüglich des Skalarprodukts $(\cdot, \cdot)_{0,a}$ und setzen die Basisfunktionen nach dem Verfahren der sechsten Behauptung zu Basisfunktionen $v_1^{(n)}, \dots, v_j^{(n)}$ eines j -dimensionalen Raums $M^{(n)} \subset V_0$ fort. Dann folgt aus

$$\begin{aligned} & r_a \|v_{k,h^{(n)}}\|_{-1}^2 \\ (5.57) \quad & \leq \|v_{k,h^{(n)}}\|_{-1,a}^2 \\ \|v_{k,h^{(n)}}\|_{0,a}=1 & = Q_{h^{(n)}}(v_{k,h^{(n)}}) \\ \text{Maximaleigenschaft} & \leq Q_{h^{(n)}}((v_{M_{h^{(n)}}})_{h^{(n)}}) \\ (7.59) & < Q(v_{M^*}) - \varepsilon_5 \\ & \leq Q(v_{M^*}), \end{aligned} \quad (7.60)$$

in Verbindung mit den Abschätzungen der sechsten Behauptung für alle $v = \sum_{k=1}^j \xi_k v_k^{(n)} \in M^{(n)}$ mit $\max_{k=1,\dots,j} |\xi_k| \leq 1$

$$\begin{aligned} & \left| \|v'\|_a^2 - \|v^{h^{(n)}}\|_{-1,a}^2 \right| \\ (7.44) \quad & \leq h j^2 \left(1 + R'_a \max_{1 \leq k \leq j} \|v_{k,h^{(n)}}\|_{-1}^2 \right) \\ & = h^{(n)} \frac{j^2}{r_a} \left(1 + R'_a \max_{1 \leq k \leq j} r_a \|v_{k,h^{(n)}}\|_{-1}^2 \right) \\ (7.60) \quad & \leq h^{(n)} \underbrace{\frac{j^2(1 + R'_a Q(v_{M^*}))}{r_a}}_{=: \tilde{C}_9} \\ & = \tilde{C}_9 h \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& \left| \|v\|_a^2 - \|v^{h^{(n)}}\|_{0,a}^2 \right| \\
& \stackrel{(7.45)}{\leq} h^{(n)} j^2 \cdot 3072(241R_a + 32R'_a) \max_{k=1,\dots,j} \|v_{k,h^{(n)}}\|_{-1}^2 \\
& = h^{(n)} \frac{j^2}{r_a} \cdot 3072(241R_a + 32R'_a) \max_{k=1,\dots,j} r_a \|v_{k,h^{(n)}}\|_{-1}^2 \\
& \stackrel{(7.60)}{\leq} h^{(n)} \underbrace{\frac{3072(241R_a + 32R'_a)j^2 Q(v_{M^*})}{r_a}}_{=: \hat{C}_9} \\
& = \hat{C}_9 h^{(n)},
\end{aligned}$$

also mit $C_9 := \max(\tilde{C}_9, \hat{C}_9)$

$$\left| \|v'\|_a^2 - \|v^h\|_{-1,a}^2 \right| \leq C_9 h^{(n)} \quad (7.61)$$

$$\left| \|v\|_a^2 - \|v^h\|_{0,a}^2 \right| \leq C_9 h^{(n)} \quad (7.62)$$

Wir betrachten nun

$$v_{M^{(n)}} = \sum_{k=1}^j \xi_k v_k^{(n)}$$

und die zugehörige Gitterfunktion

$$v_{M^{(n)}}^{h^{(n)}} = \sum_{k=1}^j \xi_k v_{k,h^{(n)}} \quad .$$

Definiert man noch

$$\tilde{v}_{M^{(n)}} = \sum_{k=1}^j \tilde{\xi}_k v_k^{(n)} \quad , \quad \tilde{\xi}_k := \frac{\xi_k}{\max_{k=1,\dots,j} |\xi_k|} \quad (7.63)$$

und

$$\tilde{v}_{M^{(n)}}^{h^{(n)}} = \sum_{k=1}^j \tilde{\xi}_k v_{k,h^{(n)}} \quad ,$$

so gilt für die Rayleigh-Quotienten

$$\begin{aligned}
& \left| Q(v_{M^{(n)}}) - Q_h(v_{M^{(n)}}^{h^{(n)}}) \right| \\
\stackrel{(7.12)}{=} & \left| Q(\tilde{v}_{M^{(n)}}) - Q_h(\tilde{v}_{M^{(n)}}^{h^{(n)}}) \right| \\
= & \left| \frac{\|(\tilde{v}_{M^{(n)}})'\|_a^2}{\|\tilde{v}_{M^{(n)}}\|_a^2} - \frac{\|\tilde{v}_{M^{(n)}}^{h^{(n)}}\|_{-1,a}^2}{\|\tilde{v}_{M^{(n)}}^{h^{(n)}}\|_{0,a}^2} \right| \\
=: & \left| \frac{b}{c} - \frac{b_{h^{(n)}}}{c_{h^{(n)}}} \right| \\
= & \frac{|bc_{h^{(n)}} - b_{h^{(n)}}c|}{cc_{h^{(n)}}} \\
\leq & \frac{|b - b_{h^{(n)}}|c}{c_{h^{(n)}}c} + \frac{b|c - c_{h^{(n)}}|}{c_{h^{(n)}}c} \\
= & \frac{|b_{h^{(n)}} - b|}{c_{h^{(n)}}} + \frac{b}{c} \frac{|c - c_{h^{(n)}}|}{c_{h^{(n)}}} .
\end{aligned} \tag{7.64}$$

Nun hat man aber

$$\begin{aligned}
& c_{h^{(n)}} \\
= & \|\tilde{v}_{M^{(n)}}^{h^{(n)}}\|_{0,a}^2 \\
= & \left\| \sum_{k=1}^j \tilde{\xi}_k v_{k,h^{(n)}} \right\|_{0,a}^2 \\
= & \sum_{k,\nu=1}^j \tilde{\xi}_k \tilde{\xi}_\nu \underbrace{(v_{k,h^{(n)}}, v_{\nu,h^{(n)}})_{0,a}}_{=\delta_{k,\nu}} \\
= & \sum_{k=1}^j \tilde{\xi}_k^2 \\
\stackrel{(7.63)}{\geq} & 1
\end{aligned} \tag{7.65}$$

und daraus folgend für $h^{(n)} \leq \frac{1}{2C_9}$

$$\begin{aligned}
& c \\
\stackrel{(7.62)}{\geq} & c_{h^{(n)}} - C_9 h^{(n)} \\
\geq & 1 - C_9 h^{(n)} \\
\geq & \frac{1}{2} .
\end{aligned} \tag{7.66}$$

Darüberhinaus ist auch b wegen

$$\begin{aligned}
& \left| \left((v_k^{(n)})', (v_\nu^{(n)})' \right)_a \right| \\
\stackrel{\text{Schwarzsche Ungleichung}}{\leq} & \| (v_k^{(n)})' \|_a \| (v_\nu^{(n)})' \|_a \\
\leq & \max_{k=1, \dots, j} \| (v_k^{(n)})' \|_a^2 \\
\stackrel{(7.50)}{\leq} & \max_{k=1, \dots, j} \left(\| v_{k, h^{(n)}} \|_{-1, a}^2 + h^{(n)} \left(1 + R'_a \| v_{k, h^{(n)}} \|_{-1}^2 \right) \right) \\
\stackrel{(7.60)}{\leq} & Q(v_{M^*}) + h^{(n)} \left(1 + \frac{R'_a}{r_a} Q(v_{M^*}) \right) \\
\stackrel{h^{(n)} \leq 1}{\leq} & Q(v_{M^*}) + \left(1 + \frac{R'_a}{r_a} Q(v_{M^*}) \right), \quad 1 \leq k, \nu \leq j, \quad (7.67)
\end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned}
& b \\
= & \| (\tilde{v}_{M^{(n)}})' \|_a^2 \\
= & \sum_{k, \nu=1}^j \tilde{\xi}_k \tilde{\xi}_\nu \left((v_k^{(n)})', (v_\nu^{(n)})' \right)_a \\
\stackrel{|\tilde{\xi}_k| \leq 1, k=1, \dots, j}{\leq} & \sum_{k, \nu=1}^j \left| \left((v_k^{(n)})', (v_\nu^{(n)})' \right)_a \right| \\
\stackrel{(7.67)}{\leq} & j^2 \left(Q(v_{M^*}) + \left(1 + \frac{R'_a}{r_a} Q(v_{M^*}) \right) \right) \\
=: & \tilde{C}_{10} \quad (7.68)
\end{aligned}$$

folgt, gleichmäßig beschränkt. Damit kann man die in (7.64) begonnene Abschätzung folgendermaßen fortsetzen:

$$\begin{aligned}
& \frac{|b_{h^{(n)}} - b|}{c_{h^{(n)}}} + \frac{b |c - c_{h^{(n)}}|}{c c_{h^{(n)}}} \\
\stackrel{(7.65), (7.66)}{\leq} & |b_{h^{(n)}} - b| + 2b |c - c_{h^{(n)}}| \\
\stackrel{(7.68)}{\leq} & |b_{h^{(n)}} - b| + 2\tilde{C}_{10} |c - c_{h^{(n)}}| \\
\stackrel{(7.61), (7.62)}{\leq} & C_9 h^{(n)} + 2\tilde{C}_{10} C_9 h^{(n)} \\
C_{10} := C_9 + 2\tilde{C}_{10} C_9 & \quad C_{10} h^{(n)}
\end{aligned}$$

Daraus folgt dann schließlich für $h^{(n)} \leq \frac{\varepsilon_5}{C_{10}}$ (beachte $(M^{(n)})^{h^{(n)}} = M_{h^{(n)}}$)

$$\begin{aligned}
& Q(v_{M^{(n)}}) \\
& \leq Q_{h^{(n)}}(v_{M^{(n)}}^{h^{(n)}}) + C_{10}h^{(n)} \\
& \leq Q_{h^{(n)}}(v_{M^{(n)}}^{h^{(n)}}) + \varepsilon_5 \\
& \stackrel{\text{Maximaleigenschaft}}{\leq} Q_{h^{(n)}}((v_{M_{h^{(n)}}})_{h^{(n)}}) + \varepsilon_5 \\
& \stackrel{(7.59)}{<} Q(v_{M^*})
\end{aligned} \tag{7.69}$$

im Widerspruch zur Minimaleigenschaft von $Q(v_{M^*})$. Dies zeigt (7.57). Der Beweis von (7.58) läuft völlig analog zu dem von (7.57). Die Widerspruchsannahme wird zu

$$\forall C^{(5)} > 0 \forall h_5 > 0 \exists h(h_5) < h_5 \exists M_h \subset \mathcal{G}_{h,0}, \dim(M_h) = j : Q_h((v_{M_h})_h) < Q(v_{M^*}) - C^{(5)}h$$

modifiziert und die nachfolgende Konstruktion der Folge von Räumen wird mit $C^{(5)} := C_{10}$ durchgeführt (man beachte dabei, daß C_{10} nicht von $h^{(n)}$ beziehungsweise dem konkreten Raum $M^{(n)}$ abhängt). Man hat folglich

$$Q_{h^{(n)}}((v_{M_{h^{(n)}}})_{h^{(n)}}) < Q(v_{M^*}) - C_{10}h^{(n)} \tag{7.70}$$

und ansonsten bleibt alles völlig identisch. Am Schluß folgt in Analogie zu (7.69)

$$\begin{aligned}
& Q(v_{M^{(n)}}) \\
& \leq Q_{h^{(n)}}(v_{M^{(n)}}^{h^{(n)}}) + C_{10}h^{(n)} \\
& \stackrel{\text{Maximaleigenschaft}}{\leq} Q_{h^{(n)}}((v_{M_{h^{(n)}}})_{h^{(n)}}) + C_{10}h^{(n)} \\
& \stackrel{(7.70)}{<} Q(v_{M^*})
\end{aligned} \tag{7.71}$$

im Widerspruch zur Minimaleigenschaft von $Q(v_{M^*})$. Damit ist die siebte Behauptung vollständig bewiesen.

Achte Behauptung:

Dies ist die eigentliche Behauptung des Satzes, die wir folgendermaßen formulieren:

$$\forall \varepsilon_6 \geq 0 \exists h^{(6)} > 0 \forall h < h^{(6)} : |Q_h((v_{M_h^*})_h) - Q(v_{M^*})| \leq \varepsilon_6 \quad . \tag{7.72}$$

Die Konvergenzordnung ist $O(h)$, das heißt

$$\exists C^{(6)} \exists h^{(6)} > 0 \forall h < h^{(6)} : |Q_h((v_{M_h^*})_h) - Q(v_{M^*})| \leq C^{(6)}h \quad . \tag{7.73}$$

Beweis der achten Behauptung:

Sei $\varepsilon_6 > 0$ beliebig. Wir setzen in der fünften Behauptung $\varepsilon_4 := \varepsilon_6$ und erhalten ein $h_4 > 0$, so daß für alle $h < h_4$

$$Q_h((v_{M_h^*})_h) - Q(v_{M^*}) < \varepsilon_4 = \varepsilon_6 \tag{7.74}$$

gilt. Anschließend setzen wir in der siebten Behauptung $\varepsilon_5 := \varepsilon_6$ und gewinnen ein $h_5 > 0$, so daß für alle $h < h_5$ und alle j -dimensionalen Räume $M_h \subset \mathcal{G}_{h,0}$, also insbesondere für M_h^*

$$Q(v_{M^*}) - Q_h((v_{M_h^*})_h) < \varepsilon_5 = \varepsilon_6 \quad (7.75)$$

erfüllt ist. Setze nun $h^{(6)} := \min(h_4, h_5)$. Dann gilt für alle $h < h^{(6)}$ offenbar aufgrund von (7.74) und (7.75)

$$|Q_h((v_{M_h^*})_h) - Q(v_{M^*})| \leq \varepsilon_6,$$

also Behauptung (7.72). Setzt man nun noch $C^{(6)} = \max(C^{(4)}, C^{(5)})$, so folgt leicht für $h < h^{(6)}$ aus (7.43) und (7.58) Behauptung (7.73), womit der Beweis des Satzes abgeschlossen ist. □

Folgerung 7.1.3 (Konvergenz der disk. gegen die kontinuierlichen Eigenwerte)

Sei $j \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann konvergiert für $h \rightarrow 0$ der in Satz 5.3.11 definierte Eigenwert $\lambda_{j,h}$ von L_h gegen den in Satz 6.2.15 gefundenen Eigenwert λ_j der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe 6.11 und es gilt

$$|\lambda_{j,h} - \lambda_j| = O(h) \quad ,$$

das heißt, es existiert eine Konstante $C^{(6)} > 0$ und ein $h^{(6)} > 0$, so daß für alle $h < h^{(6)}$ die Abschätzung

$$|\lambda_{j,h} - \lambda_j| \leq C^{(6)}h \quad (7.76)$$

gilt.

Beweis:

Die Behauptung folgt aus dem vorangegangenen Satz 7.1.2 in Verbindung mit Folgerung 5.3.23 und Folgerung 6.2.23. □

Eine weitere naheliegende Folgerung überträgt dieses Ergebnis auf die Eigenwerte des Fredholmschen Integraloperators:

Folgerung 7.1.4 Sei $j \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann konvergiert für $h \rightarrow 0$ der in Folgerung 5.3.21 definierte Eigenwert $\mu_{j,h}$ des diskreten Fredholmoperators gegen den in Satz 6.2.12 gefundenen Eigenwert μ_j des Fredholmschen Integraloperators und es gilt

$$|\mu_{j,h} - \mu_j| = O(h) \quad .$$

Beweis:

Sei $j \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach Satz 6.2.13 ist $\mu_j = \frac{1}{\lambda_j}$ und nach Folgerung 5.3.21 gilt $\mu_{j,h} = \frac{1}{\lambda_{j,h}}$, so daß man

$$\exists C_0 > 0 \exists h_0 > 0 \forall h < h_0 : \left| \frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_{j,h}} \right| \leq C_0 h \quad (7.77)$$

zu zeigen hat. Nach Folgerung 7.1.3 hat man nun

$$\exists C_1 > 0 \exists h_1 > 0 \forall h < h_1 : |\lambda_j - \lambda_{j,h}| \leq C_1 h, \quad (7.78)$$

so daß sich mit

$$C_0 := \frac{2C_1 R_a^2}{r_a^2 j^4 \pi^4} \text{ und } h_0 := \min \left(\frac{\lambda_j}{2C_1}, h_1 \right)$$

für $h < h_0$ zunächst

$$\lambda_{j,h} \geq \lambda_j - C_1 h \geq \lambda_j - \frac{\lambda_j}{2} = \frac{\lambda_j}{2} \quad (7.79)$$

und daraus dann

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_{j,h}} \right| \\ &= \left| \frac{\lambda_{j,h} - \lambda_j}{\lambda_j \lambda_{j,h}} \right| \\ &\stackrel{(7.78)}{\leq} C_1 h \frac{1}{\lambda_j \lambda_{j,h}} \\ &\stackrel{(7.79)}{\leq} C_1 h \frac{2}{\lambda_j^2} \\ &\stackrel{(6.20)}{\leq} C_1 h \frac{2R_a^2}{r_a^2 j^4 \pi^4} \\ &= C_0 h \end{aligned}$$

ergibt.

□

7.1.2 Konvergenz der Eigenvektoren

Nachdem die Konvergenzfrage für die Eigenwerte geklärt ist, sind wir nun an der Frage interessiert, wie sich das $(\cdot, \cdot)_{0,a}$ -Orthonormalsystem der diskreten Eigenvektoren $v_{k,h}$, $k = 1, \dots, N-1$ bei kleiner werdendem h verhält. Wir werden im folgenden ein Konvergenzresultat anstreben, das für festes $k \in \mathbb{N}$ die punktweise Konvergenz von $v_{k,h}$ gegen den diskretisierten k -ten Vektor v_k des a -Orthonormalsystems von Eigenvektoren der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe zeigt. Es wird sich herausstellen, daß hierbei die Betrachtung der jeweils äquivalenten Eigenwertprobleme für den diskreten beziehungsweise kontinuierlichen Fredholmoperator vorteilhaft ist.

Auch in diesem Kontext stellen wir einige Hilfsergebnisse voran. Ein erstes Lemma betrifft die Approximationsgüte einer bestimmten Quadraturformel, die wir auch im Beweis der zweiten Behauptung in Satz 7.1.2 schon einmal gestreift haben und nun systematisiert darstellen wollen.

Lemma 7.1.5 Sei $f \in C^1[a, b]$, $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$, $n \geq 1$, $h = \frac{\beta - \alpha}{n}$. Das Integral $I(f) := \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ werde durch die Quadraturformel $Q^0(f) := h \sum_{l=1}^n f(\alpha + lh)$ approximiert (die Null als oberer Index soll daran erinnern, daß der linke Randpunkt nicht berücksichtigt wird). Dann gilt mit einer nur von f abhängigen Konstanten $C > 0$

$$|E(f)| := |I(f) - Q^0(f)| \leq C(\beta - \alpha)h,$$

die Approximation ist also von der Güte $O(h)$.

Beweis:

Als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ ist f' beschränkt, es gilt also $|f'(x)| \leq B \forall x \in [a, b]$.

Es folgt mit $C := \frac{B}{2}$

$$\begin{aligned} & |I(f) - Q^0(f)| \\ = & \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - h \sum_{l=1}^n f(\alpha + lh) \right| \\ = & \left| \sum_{l=1}^n \left(\int_{\alpha + (l-1)h}^{\alpha + lh} f(x) dx - h \cdot f(\alpha + lh) \right) \right| \\ \leq & \sum_{l=1}^n \left| \int_{\alpha + (l-1)h}^{\alpha + lh} f(x) dx - h \cdot f(\alpha + lh) \right| \\ \stackrel{\text{Hs. d. Diff. u. Int.r.}}{=} & \sum_{l=1}^n \left| \int_{\alpha + (l-1)h}^{\alpha + lh} \left(f(\alpha + lh) + \int_{\alpha + lh}^x f'(s) ds \right) dx - h \cdot f(\alpha + lh) \right| \\ = & \sum_{l=1}^n \left| \int_{\alpha + (l-1)h}^{\alpha + lh} \int_{\alpha + lh}^x f'(s) ds dx \right| \\ = & \sum_{l=1}^n \left| \int_{\alpha + (l-1)h}^{\alpha + lh} \int_x^{\alpha + lh} f'(s) ds dx \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{l=1}^n \int_{\alpha+(l-1)h}^{\alpha+lh} \int_x^{\alpha+lh} \underbrace{|f'(s)|}_{\leq B} ds dx \\
&\leq B \sum_{l=1}^n \int_{\alpha+(l-1)h}^{\alpha+lh} (\alpha + lh - x) dx \\
&= B \sum_{l=1}^n \frac{1}{2} h^2 \\
&= \frac{B}{2} h \\
&= Ch
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung des Lemmas. □

Ein weiteres Hilfsergebnis beschäftigt sich mit der Erhaltung der Approximationsgüte bei gewissen Kombinationen von konvergenten Folgen:

Lemma 7.1.6 *Seien $b_h, c_h, d_h, h = \frac{1}{N}$ Folgen reeller Zahlen, die folgende Voraussetzungen erfüllen:*

(i)

$$b_h \rightarrow b, c_h \rightarrow c, d_h \rightarrow d \quad (h \rightarrow 0)$$

(ii) *Alle Folgen konvergieren gegen den jeweiligen Grenzwert mit der Ordnung $O(h)$, das heißt (ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte die entsprechende Abschätzung immer mit derselben Konstanten; andernfalls gehe man zum Maximum über):*

$$\exists C_2 > 0 \exists h_2 > 0 \forall h \leq h_2 : |b - b_h| \leq C_2 h, |c - c_h| \leq C_2 h, |d - d_h| \leq C_2 h$$

(iii)

$$|b| \leq C_0, |c| \leq C_0, \quad |d| \geq C_1 > 0$$

Dann gilt auch

$$\exists C_3 > 0 \exists h_3 > 0 \forall h \leq h_3 : \left| \frac{bc}{d} - \frac{b_h c_h}{d_h} \right| \leq C_3 h,$$

die Approximationsgüte $O(h)$ bleibt also bei der angegebenen Kombination der Folgen erhalten.

Beweis:

Mit

$$C_3 := \frac{2C_0^2 C_2}{C_1^2} + \frac{5C_0 C_2}{C_1} \quad \text{und} \quad h_3 := \min \left(\frac{|d|}{2C_2}, \frac{|c|}{2C_2}, h_2 \right)$$

gilt zunächst

$$|d| - |d_h| \leq |d_h - d| \leq C_2 h \leq \frac{|d|}{2} \implies |d_h| \geq \frac{|d|}{2} \quad \forall h \leq h_3$$

sowie

$$|c_h| \leq |c| + C_2 h \leq |c| + \frac{|c|}{2} = \frac{3}{2}|c|$$

und daraus folgt dann mittels

$$\begin{aligned} & \left| \frac{bc}{d} - \frac{b_h c_h}{d_h} \right| \\ = & \left| \frac{bcd_h - b_h c_h d}{dd_h} \right| \\ = & \left| \frac{bcd_h - bcd + bcd - bc_h d + bc_h d - b_h c_h d}{dd_h} \right| \\ \leq & \frac{|bc| \cdot |d_h - d|}{|dd_h|} + \frac{|b| \cdot |c - c_h|}{|d_h|} + \frac{|c_h| \cdot |b - b_h|}{|d_h|} \\ \leq & \frac{2C_0^2 C_2 h}{C_1^2} + \frac{2C_0 C_2 h}{C_1} + \frac{3C_0 C_2 h}{C_1} \\ = & \left(\frac{2C_0^2 C_2}{C_1^2} + \frac{5C_0 C_2}{C_1} \right) h \\ = & C_3 h \end{aligned}$$

die Behauptung. □

Auf die bisherigen Ergebnisse aufbauend, können wir uns jetzt mit der Approximation der Greenschen Funktion G durch die diskrete Greensche Funktion F_h beschäftigen:

Satz 7.1.7 *Die diskrete Greensche Funktion F_h (zur Definition siehe Satz 5.3.15) approximiert die Greensche Funktion G (definiert in (6.8)) an jedem Gitterpunkt (x_j, t_l) , $j, l = 1, \dots, N - 1$ mit der Approximationsgüte $O(h)$, mit anderen Worten:*

$$\exists C_3 > 0 \exists h_3 > 0 \forall h < h_3 \forall 1 \leq j, l \leq N - 1 : |F_h(x_j, t_l) - G(x_j, t_l)| \leq C_3 h \quad .$$

Beweis:

Definiert man

$$\begin{aligned}
 b_h = b_h(x_j) &:= h \sum_{r=1}^j \frac{1}{a_r} \\
 c_h = c_h(t_l) &:= h \sum_{r=l+1}^N \frac{1}{a_r} \\
 d_h &:= h \sum_{r=1}^N \frac{1}{a_r} \\
 b = b(x_j) &:= \int_0^{x_j} \frac{1}{a(r)} dr \\
 c = c(t_l) &:= \int_{t_l}^1 \frac{1}{a(r)} dr \\
 d &:= \int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr,
 \end{aligned}$$

so erfüllen diese Größen die Voraussetzungen von Lemma 7.1.6, denn die Folgenglieder von b_h, c_h, d_h sind wegen $a_r \geq r_a > 0$ durchweg positiv und darüberhinaus ist nach Lemma 7.1.5 auch

$$b_h \rightarrow b \quad , \quad c_h \rightarrow c \quad , \quad d_h \rightarrow d \quad (h \rightarrow 0)$$

gegeben. Man beachte in diesem Zusammenhang, daß mit $a \in C^1$, $a > r_a > 0$ wegen

$$\left(\frac{1}{a}\right)' = -\frac{a'}{a^2}$$

auch $\frac{1}{a}$ stetig differenzierbar ist. Die Voraussetzung (ii) über die Konvergenzordnung folgt ebenfalls aus Lemma 7.1.5. Dabei kann die Konstante C_2 wegen

$$\frac{1}{2} \max_{x \in [0,1]} \left| \left(\frac{1}{a}\right)'(x) \right| = \frac{1}{2} \max_{x \in [0,1]} \left| -\frac{a'(x)}{a^2(x)} \right| \leq \frac{R'_a}{2r_a^2} =: C_2$$

als für alle drei Folgen gültig angesehen werden und ist darüberhinaus unabhängig von j beziehungsweise l . Schließlich gilt auch Voraussetzung (iii), denn offenbar sind die Abschätzungen

$$b \leq \frac{x_j}{r_a} \leq \frac{1}{r_a} =: C_0 \quad , \quad c \leq \frac{1-t_l}{r_a} \leq \frac{1}{r_a} = C_0$$

und

$$d \geq \frac{1}{R_a} =: C_1$$

richtig. Somit sind alle Voraussetzungen des Lemmas erfüllt und es folgt zunächst nur für den Fall $j \leq l$

$$\begin{aligned}
& |F_h(x_j, t_l) - G(x_j, t_l)| \\
&= \left| \frac{\left(\int_0^{x_j} \frac{1}{a(r)} dr \right) \cdot \left(\int_{t_l}^1 \frac{1}{a(r)} dr \right)}{\left(\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr \right)} - \frac{\left(h \sum_{r=1}^j \frac{1}{a_r} \right) \cdot \left(h \sum_{r=l+1}^N \frac{1}{a_r} \right)}{\left(h \sum_{r=1}^N \frac{1}{a_r} \right)} \right| \\
&= \left| \frac{bc}{d} - \frac{b_h c_h}{d_h} \right| \\
&\stackrel{\text{Lemma 7.1.6}}{\leq} C_3 h,
\end{aligned}$$

für alle $h \leq h_3$, wobei die Konstante

$$C_3 = \frac{2C_0^2 C_2}{C_1^2} + \frac{5C_0 C_2}{C_1} = \frac{R'_a R_a^2}{r_a^4} + \frac{5R'_a R_a}{2r_a^3} = \frac{R_a R'_a}{r_a^3} \left(\frac{R_a}{r_a} + \frac{5}{2} \right)$$

offenbar unabhängig von j, l ist.

Im Fall $j \geq l$ beachtet man die Symmetrie sowohl der diskreten wie auch der kontinuierlichen Greenschen Funktion zur Diagonalen (siehe Satz 5.3.15 beziehungsweise (6.9)) und erhält so auch

$$|F_h(x_j, t_l) - G(x_j, t_l)| = |F_h(x_l, t_j) - G(x_l, t_j)| \stackrel{1. \text{ Fall}}{\leq} C_3 h \quad .$$

□

Ein weiteres Hilfergebnis zur Approximation von Kv_k durch die summierte Sehnentrapezformel liefert

Lemma 7.1.8 *Das Integral $(Kv_k)(x_j)$ wird durch die summierte Sehnentrapezformel mit einem Restglied der Ordnung $O(h^2)$ angenähert, in Zeichen:*

$$\exists C_4 > 0 \exists h_4 > 0 \forall h \leq h_4 : \left| \int_0^1 k(x_j, t) v_k(t) dt - h \sum_{l=1}^{N-1} k(x_j, t_l) v_k^h(t_l) \right| \leq C_4 h^2 \quad .$$

Hierbei hängt die Konstante C_4 nicht von x_j ab.

Beweis:

Die Funktion $k(x, t)v_k(t) = -G(x, t)a(t)v_k(t)$ ist – als Funktion von t bei festem x betrachtet – offenbar in $[0, x]$ und $[x, 1]$ jeweils zweimal stetig differenzierbar (bei $t = x$ treten Unstetigkeiten der Ableitung auf) und ist daher nach einem Standardergebnis der Numerik (siehe [SH82] Seite 80) auf jedem dieser Teilintervalle mit einem Restglied der Ordnung $O(h^2)$

durch die summierte Sehnenrapezformel approximierbar, so daß klarerweise (man beachte $k(x, 0) \underbrace{v_k(0)}_{=0} = 0 = k(x, 1) \underbrace{v_k(1)}_{=0}$)

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^1 k(x_j, t) v_k(t) dt - h \sum_{l=1}^{N-1} k(x_j, t_l) v_k^h(t_l) \right| \\
& \leq \left| \int_0^{x_j} k(x_j, t) v_k(t) dt - h \left(\sum_{l=1}^{j-1} k(x_j, t_l) v_k^h(t_l) + \frac{1}{2} k(x_j, t_j) v_k^h(t_j) \right) \right| \\
& \quad + \left| \int_{x_j}^1 k(x_j, t) v_k(t) dt - h \left(\sum_{l=j+1}^{N-1} k(x_j, t_l) v_k^h(t_l) + \frac{1}{2} k(x_j, t_j) v_k^h(t_j) \right) \right| \\
& \leq C_4^{(1)} h^2 + C_4^{(2)} h^2 \\
& = C_4 h^2, \quad C_4 := C_4^{(1)} + C_4^{(2)}
\end{aligned}$$

mit Konstanten $C_4^{(1)}, C_4^{(2)} > 0$ erfüllt ist. Ausdrücklich weisen wir darauf hin, daß diese beiden Konstanten (und damit auch C_4) unabhängig von x_j sind, denn die zweite Ableitung von $k(x, t)v_k(t)$ nach t kann auf beiden betrachteten Teilintervallen von $[0, 1]$ durch eine von x unabhängige Schranke nach oben abgeschätzt werden. Um dies einzusehen, reicht es, die einzig möglichen Quellen einer Abhängigkeit von x in $(k(x, t)v_k(t))''$, nämlich (Produktregel!) $|G(x, t)|$, $|\frac{\partial G}{\partial t}(x, t)|$, $|\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(x, t)|$ nach oben durch von x unabhängige Konstanten abzuschätzen. Dies zeigt man durch

$$\begin{aligned}
& |G(x, t)| \\
& = \frac{\left(\int_0^{\min(x,t)} \frac{1}{a(r)} dr \right) \cdot \left(\int_{\max(x,t)}^1 \frac{1}{a(r)} dr \right)}{\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr} \\
& \leq \frac{\left(\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr \right) \cdot \left(\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr \right)}{\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr} \\
& = \int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr \leq \frac{1}{r_a}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{\partial G}{\partial t}(x, t) \right| \\
 = & \begin{cases} \frac{\left(-\int_0^x \frac{1}{a(r)} dr\right) \cdot \left(-\frac{1}{a(t)}\right)}{\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr} & , \quad 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ \frac{\frac{1}{a(t)} \cdot \left(\int_x^1 \frac{1}{a(r)} dr\right)}{\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr} & , \quad 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases} \\
 \leq & \begin{cases} \frac{\left(\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr\right) \cdot \frac{1}{a(t)}}{\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr} & , \quad 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ \frac{\frac{1}{a(t)} \cdot \left(\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr\right)}{\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr} & , \quad 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases} \\
 = & \frac{1}{a(t)} \\
 \leq & \frac{1}{r_a}
 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(x, t) \right| \\
 = & \begin{cases} \frac{\left(\int_0^x \frac{1}{a(r)} dr\right) \cdot \frac{1}{a^2(t)}}{\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr} & , \quad 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ \frac{\frac{1}{a^2(t)} \cdot \left(\int_x^1 \frac{1}{a(r)} dr\right)}{\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr} & , \quad 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases} \\
 \leq & \begin{cases} \frac{\left(\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr\right) \cdot \frac{1}{a^2(t)}}{\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr} & , \quad 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ \frac{\frac{1}{a^2(t)} \cdot \left(\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr\right)}{\int_0^1 \frac{1}{a(r)} dr} & , \quad 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases} \\
 = & \frac{1}{a^2(t)} \\
 \leq & \frac{1}{r_a^2} .
 \end{aligned}$$

□

Vorbereitend für das eigentliche Konvergenzresultat betrachtet man nun den sogenannten *Abschneidefehler*

$$T_h^v(x_l) := (Kv - K_h v^h)(x_l), \quad l = 1, \dots, N-1,$$

für diese Operatoren (mit der zu $v \in V_0$ gehörigen diskretisierten Funktion v^h meinen wir hierbei immer die Funktion $v|_{G_h}$, die durch triviale Fortsetzung auf \mathbb{R}^h zu einer Gitterfunktion aus $\mathcal{G}_{h,0}$ wird), über den wir nachfolgendes Ergebnis bereitstellen.

Satz 7.1.9 (Abschneidefehler des diskreten Fredholm-Operators) *Sei $v_k, k \in \mathbb{N}$ das a -Orthonormalsystem von Eigenvektoren des Fredholmschen Integraloperators. Dann existiert eine Konstante $C_5 > 0$ und ein $h_5 > 0$, so daß für alle $h \leq h_5$ der Abschneidefehler der Ungleichung*

$$|T_h^{v_k}(x_j)| \leq C_5 h$$

genügt, wobei C_5 nicht von der Stelle x_j abhängt, sondern gleichmäßig für $j = 1, \dots, N-1$ einsetzbar ist. Darüberhinaus hat man noch mit der Bezeichnung $C_6 := R_a C_5^2$ ebenfalls für alle $h \leq h_5$ die Abschätzung

$$\|T_h^{v_k}\|_{0,a}^2 = \|(Kv_k)^h - K_h(v_k)\|_{0,a}^2 = h \sum_{j=1}^{N-1} (T_h^{v_k})^2(x_j) a(x_j) \leq C_6 h^2 \quad . \quad (7.80)$$

Beweis:

Wir legen die in Satz 7.1.7 und Lemma 7.1.8 definierten Bezeichnungen zugrunde. Dann folgt mit $C_5 := C_4 + R_a C_3$ für alle $h \leq h_5 := \min(h_3, h_4)$

$$\begin{aligned} & |T_h^{v_k}(x_j)| \\ &= \left| \int_0^1 k(x_j, t) v_k(t) dt - h \sum_{l=1}^{N-1} k_h(x_j, t_l) v_k^h(t_l) \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 k(x_j, t) v_k(t) dt - h \sum_{l=1}^{N-1} k(x_j, t_l) v_k^h(t_l) \right| \\ &\quad + \left| h \sum_{l=1}^{N-1} (k(x_j, t_l) - k_h(x_j, t_l)) \right| \\ &\stackrel{\text{Lemma 7.1.8}}{\leq} C_4 h^2 + \left| h \sum_{l=1}^{N-1} \left(\underbrace{-G(x_j, t_l)}_{\leq R_a} \underbrace{a(t_l)}_{\leq R_a} + F_h(x_j, t_l) \underbrace{a_h(t_l)}_{\leq R_a} \right) \right| \\ &\leq C_4 h^2 + R_a h \sum_{l=1}^{N-1} |F_h(x_j, t_l) - G(x_j, t_l)| \\ &\stackrel{\text{Satz 7.1.7}}{\leq} C_4 h^2 + R_a \underbrace{h(N-1) C_3 h}_{\leq 1} \\ &\leq C_4 h^2 + R_a C_3 h \\ &\leq C_5 h \end{aligned}$$

Offensichtlich ist nach den zitierten Ergebnissen die Konstante C_5 nicht von der Stelle x_j abhängig.

Schließlich ergibt sich aus dem eben Gezeigten noch Abschätzung (7.80) (die ersten drei Gleichheitszeichen bemerken lediglich unmittelbar Einleuchtendes) mittels

$$\begin{aligned} & h \sum_{j=1}^{N-1} \underbrace{(T_h^{v_k})^2(x_j)}_{\leq C_5^2 h^2} \underbrace{a(x_j)}_{\leq R_a} \\ & \leq R_a C_5^2 h^2 \underbrace{h(N-1)}_{\leq 1} \\ & \leq C_6 h^2 . \end{aligned}$$

□

Bemerkung 7.1.10 *Eine letzte Anmerkung, die noch vonnöten ist, bevor man sich der Konvergenz der Eigenvektoren zuwenden kann, betrifft das Vorzeichen der $\|\cdot\|_{0,a}$ -normierten Eigenvektoren $v_{k,h}$. Offenbar ist, wenn $v_{1,h}, \dots, v_{k,h}, \dots, v_{N-1,h}$ ein $(\cdot, \cdot)_{0,a}$ -Orthonormalsystem von Eigenvektoren des diskreten Fredholmoperators (beziehungsweise der diskreten Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe) ist, auch $v_{1,h}, \dots, -v_{k,h}, \dots, v_{N-1,h}$ ein Vektorsystem mit dieser Eigenschaft. Man hat also bei der Zusammenstellung des Vektorsystems jeweils die Wahl zwischen zwei Möglichkeiten und kann sich daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit jeweils eine dieser beiden Möglichkeiten herausuchen (beziehungsweise von vorneherein als gewählt denken; vergleiche dazu (5.15), (5.16) und Folgerung 5.3.7, dort insbesondere (5.37)), was wir im Beweis des nachfolgenden Satzes auch tun werden (siehe (7.102)).*

Nach den voranstehenden Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, das zentrale Ergebnis dieses Abschnitts, nämlich eine Aussage über die Konvergenz der diskreten gegen die kontinuierlichen Eigenvektoren, zu beweisen.

Satz 7.1.11 (Konvergenz der diskr. gegen die kontinuierlichen Eigenvektoren)

Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann konvergiert für $h \rightarrow 0$ der normierte k -te Eigenvektor $v_{k,h}$ aus dem (diskreten) $(\cdot, \cdot)_{0,a}$ Orthonormalsystem $v_{l,h}$, $l = 1, \dots, N-1$ gegen den dem (kontinuierlichen) a -Orthonormalsystem v_l , $l \in \mathbb{N}$ entstammenden und anschließend diskretisierten Vektor v_k^h . Die Konvergenz ist gleichmäßig auf G_h und die Konvergenzordnung $O(\sqrt{h})$ in der Maximumnorm und $O(h)$ in der $\|\cdot\|_{0,a}$ Norm. In Zeichen hat man also

$$\exists C^{(7)} > 0, h^{(7)} > 0 \forall h \leq h^{(7)} : \|v_k^h - v_{k,h}\|_\infty \leq C^{(7)} \sqrt{h} \quad (7.81)$$

$$\exists C^{(8)} > 0, h^{(8)} > 0 \forall h \leq h^{(8)} : \|v_k^h - v_{k,h}\|_{0,a} \leq C^{(8)} h \quad (7.82)$$

Beweis:

Da nach Folgerung 7.1.4 der Eigenwert $\mu_{l,h}$ des diskreten Fredholmoperators für festes $l \in \mathbb{N}$ gegen μ_l konvergiert, wenn h gegen 0 geht und weiter die Zahlen μ_l , $l \in \mathbb{N}$ nach Satz 6.2.12 paarweise verschieden sind (und nach Satz 6.2.13 in Verbindung mit Lemma 6.2.3 alle positiv,

so daß man insgesamt $\mu_1 > \mu_2 > \dots > 0$ hat), kann man die Existenz eines $h^* > 0$ folgern, so daß sich für alle $h \leq h^*$ zunächst

$$|\mu_{k,h} - \mu_k| \leq \frac{\min(\mu_{k-1} - \mu_k, \mu_k - \mu_{k+1})}{4} \quad (7.83)$$

$$|\mu_{k-1,h} - \mu_{k-1}| \leq \frac{\mu_{k-1} - \mu_k}{4} \quad (7.84)$$

$$|\mu_{k+1,h} - \mu_{k+1}| \leq \frac{\mu_k - \mu_{k+1}}{4} \quad (7.85)$$

und daraus dann mittels

$$\begin{aligned} & \mu_{k+1,h} \\ (7.85) \quad & \leq \mu_{k+1} + \frac{\mu_k - \mu_{k+1}}{4} \\ & < \mu_{k+1} + \frac{3(\mu_k - \mu_{k+1})}{4} \\ & = \mu_k - \frac{\mu_k - \mu_{k+1}}{4} \\ (7.83) \quad & \leq \mu_{k,h} \\ (7.83) \quad & \leq \mu_k + \frac{\mu_{k-1} - \mu_k}{4} \\ & = \mu_{k-1} - \frac{3(\mu_{k-1} - \mu_k)}{4} \\ & < \mu_{k-1} - \frac{\mu_{k-1} - \mu_k}{4} \\ (7.84) \quad & \leq \mu_{k-1,h} \end{aligned}$$

die paarweise Verschiedenheit von $\mu_{k-1,h}, \mu_{k,h}, \mu_{k+1,h}$ ergibt.

Wir bemerken weiter, daß die Tatsache, daß es sich bei den Funktionen $v_{l,h}$, $l = 1, \dots, N-1$ um eine $(\cdot, \cdot)_{0,a}$ -Orthonormalbasis von $\mathcal{G}_{h,0}$ handelt, für jedes $v_h \in \mathcal{G}_{h,0}$ die Darstellungen

$$v_h = \sum_{l=1}^{N-1} (v_h, v_{l,h})_{0,a} v_{l,h} \quad (7.86)$$

$$\begin{aligned} & = \underbrace{(v_h, v_{k,h})_{0,a} v_{k,h}}_{P_{\mu_{k,h}} v_h} + \underbrace{\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{N-1} (v_h, v_{l,h})_{0,a} v_{l,h}}_{Q_{\mu_{k,h}} v_h} \\ & = P_{\mu_{k,h}} v_h + Q_{\mu_{k,h}} v_h, \quad P_{\mu_{k,h}} v_h \perp Q_{\mu_{k,h}} v_h \end{aligned} \quad (7.87)$$

sowie

$$\|v_h\|_{0,a}^2 = \sum_{l=1}^{N-1} (v_h, v_{l,h})_{0,a}^2 \quad (7.88)$$

und

$$K_h v_h = \sum_{l=1}^{N-1} \mu_{l,h}(v_h, v_{l,h})_{0,a} v_{l,h} \quad (7.89)$$

ermöglicht (siehe auch Hilfssatz 5.2.3 für einen Beweis in analoger Situation), wobei die orthogonale Projektion $P_{\mu_{k,h}}$ auf den zum Eigenwert $\mu_{k,h}$ gehörigen Eigenraum wegen

$$\begin{aligned} & (K_h v_h, v_{k,h})_{0,a} \\ \stackrel{\text{Hilfssatz 5.3.17 (b)}}{=} & (v_h, K_h v_{k,h})_{0,a} \\ \stackrel{\text{Folgerung 5.3.21}}{=} & (v_h, \mu_{k,h} v_{k,h})_{0,a} \\ = & \mu_{k,h} (v_h, v_{k,h})_{0,a} \end{aligned} \quad (7.90)$$

und der daraus resultierenden Gleichung

$$\begin{aligned} & K_h P_{\mu_{k,h}} v_h \\ = & K_h ((v_h, v_{k,h})_{0,a} v_{k,h}) \\ = & (v_h, v_{k,h})_{0,a} K_h v_{k,h} \\ \stackrel{\text{Folgerung 5.3.21}}{=} & \mu_{k,h} (v_h, v_{k,h})_{0,a} v_{k,h} \\ \stackrel{(7.90)}{=} & (K_h v_h, v_{k,h})_{0,a} v_{k,h} \\ = & P_{\mu_{k,h}} K_h v_h \end{aligned} \quad (7.91)$$

mit dem diskreten Fredholmoperator K_h vertauschbar ist.

Wir bemerken noch, daß $\|v_k^h\|_{0,a}^2$ eine $O(h)$ -Approximation von $\|v_k\|_a^2 = 1$ ist, da es sich um eine Approximation durch die summierte Sehnentrapezformel handelt und der Integrand stetig differenzierbar ist (siehe den Beweis der zweiten Behauptung von Satz 7.1.2). Somit gibt es Konstanten $C_7 > 0$ und $h_7 > 0$, so daß für alle $h \leq h_7$

$$1 - C_7 h \leq \|v_k^h\|_{0,a}^2 \leq 1 + C_7 h \leq 1 + C_7 \implies \|v_k^h\|_{0,a} \leq \sqrt{1 + C_7} =: C_8 \quad (7.92)$$

gilt. Die zentrale Größe unserer Betrachtung ist nun der sogenannte *Defekt*

$$d_h := K_h v_k^h - \mu_{k,h} v_k^h \in \mathcal{G}_{h,0} \quad .$$

Einserseits gilt nämlich mit der Bezeichnung Id_h für die identische Abbildung auf $\mathcal{G}_{h,0}$ die

Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \|d_h\|_{0,a}^2 \\
\geq & \|d_h\|_{0,a}^2 - \|P_{\mu_{k,h}} d_h\|_{0,a}^2 \\
\stackrel{\text{Pyth.,(7.87)}}{=} & \|Q_{\mu_{k,h}} d_h\|_{0,a}^2 \\
= & \|d_h - P_{\mu_{k,h}} d_h\|_{0,a}^2 \\
= & \|K_h v_k^h - \mu_{k,h} v_k^h - P_{\mu_{k,h}} K_h v_k^h + P_{\mu_{k,h}} \mu_{k,h} v_k^h\|_{0,a}^2 \\
\stackrel{(7.91)}{=} & \|K_h (v_k^h - P_{\mu_{k,h}} v_k^h) - \mu_{k,h} (v_k^h - P_{\mu_{k,h}} v_k^h)\|_{0,a}^2 \\
= & \|(K_h - \mu_{k,h} \text{Id}_h)(v_k^h - P_{\mu_{k,h}} v_k^h)\|_{0,a}^2 \\
\stackrel{(7.88)}{=} & \sum_{l=1}^{N-1} ((K_h - \mu_{k,h} \text{Id}_h)(v_k^h - P_{\mu_{k,h}} v_k^h), v_{l,h})_{0,a}^2 \\
\stackrel{(7.89)}{=} & \sum_{l=1}^{N-1} \left(\left(\sum_{\nu=1}^{N-1} \mu_{\nu,h} (v_k^h - P_{\mu_{k,h}} v_k^h, v_{\nu,h})_{0,a} v_{\nu,h}, v_{l,h} \right)_{0,a} - \mu_{k,h} (v_k^h - P_{\mu_{k,h}} v_k^h, v_{l,h})_{0,a} \right)^2 \\
= & \sum_{l=1}^{N-1} \left(\sum_{\nu=1}^{N-1} \mu_{\nu,h} (v_k^h - P_{\mu_{k,h}} v_k^h, v_{\nu,h})_{0,a} \underbrace{(v_{\nu,h}, v_{l,h})_{0,a}}_{=\delta_{l,\nu}} - \mu_{k,h} (v_k^h - P_{\mu_{k,h}} v_k^h, v_{l,h})_{0,a} \right)^2 \\
= & \sum_{l=1}^{N-1} (\mu_{l,h} - \mu_{k,h})^2 \underbrace{(v_k^h - P_{\mu_{k,h}} v_k^h, v_{l,h})_{0,a}^2}_{\stackrel{(7.87)}{=} 0, \text{ falls } l=k} \\
\geq & \min((\mu_{k,h} - \mu_{k-1,h})^2, (\mu_{k+1,h} - \mu_{k,h})^2) \sum_{l=1}^{N-1} (v_k^h - P_{\mu_{k,h}} v_k^h, v_{l,h})_{0,a}^2 \\
\stackrel{(7.88)}{=} & \min((\mu_{k,h} - \mu_{k-1,h})^2, (\mu_{k+1,h} - \mu_{k,h})^2) \|v_k^h - P_{\mu_{k,h}} v_k^h\|_{0,a}^2
\end{aligned}$$

nach unten und andererseits hat man für $h \leq \min(h_0, h_5)$ (zur Definition von h_0, h_5 siehe (7.77) und Satz 7.1.9) unter Beachtung von $Kv_k = \mu_k v_k \implies (Kv_k)^h = \mu_k v_k^h$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \|d_h\|_{0,a} \\
= & \|K_h v_k^h - \mu_{k,h} v_k^h\|_{0,a} \\
\leq & \|K_h v_k^h - (Kv_k)^h\|_{0,a} + \|\mu_k v_k^h - \mu_{k,h} v_k^h\|_{0,a} \\
= & \|K_h v_k^h - (Kv_k)^h\|_{0,a} + |\mu_k - \mu_{k,h}| \|v_k^h\|_{0,a} \\
\stackrel{\text{Satz 7.1.9,(7.80)}}{\leq} & C_6 h + |\mu_k - \mu_{k,h}| \cdot \|v_k^h\|_{0,a} \\
\stackrel{\text{Folgerung 7.1.4,(7.77)}}{\leq} & C_6 h + C_0 h \|v_k^h\|_{0,a} \\
\stackrel{(7.92)}{\leq} & C_6 h + C_0 C_8 h \\
= & (C_6 + C_0 C_8) h
\end{aligned}$$

nach oben, was beides zusammengenommen klarerweise

$$\begin{aligned}
& \|v_k^h - P_{\mu_{k,h}} v_k^h\|_{0,a}^2 \\
& \leq \frac{1}{\min((\mu_{k,h} - \mu_{k-1,h})^2, (\mu_{k+1,h} - \mu_{k,h})^2)} \|d_h\|_{0,a}^2 \\
& \leq \frac{(C_6 + C_0 C_8)^2}{\underbrace{\min((\mu_{k,h} - \mu_{k-1,h})^2, (\mu_{k+1,h} - \mu_{k,h})^2)}_{=: C_9^2}} h^2 \\
& = C_9^2 h^2
\end{aligned} \tag{7.93}$$

zur Folge hat.

Benutzt man noch für $v_h \in \Gamma_h$ die Bezeichnung

$$\|v_h\|_\infty = \max_{j \in \mathbb{Z}} |v_h(x_j)|, \tag{7.94}$$

so folgt unmittelbar die nützliche Abschätzung

$$|v_h(x_j)|^2 \leq \|v_h\|_\infty^2 \leq \frac{1}{h} \|v_h\|_0^2 \leq \frac{1}{hr_a} \|v_h\|_{0,a}^2. \tag{7.95}$$

Damit sieht man

$$\begin{aligned}
& | |(P_{\mu_{k,h}} v_k^h)(x_j)| - |v_k^h(x_j)| | \\
& \leq | (P_{\mu_{k,h}} v_k^h)(x_j) - v_k^h(x_j) | \\
& \leq \|P_{\mu_{k,h}} v_k^h - v_k^h\|_\infty \\
& \stackrel{(7.95)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{hr_a}} \|P_{\mu_{k,h}} v_k^h - v_k^h\|_{0,a} \\
& \stackrel{(7.93)}{\leq} \frac{C_9}{\sqrt{r_a}} \sqrt{h}
\end{aligned} \tag{7.96}$$

und sich daraus ergebend

$$| (P_{\mu_{k,h}} v_k^h)(x_j) | \leq |v_k^h(x_j)| + \frac{C_9}{\sqrt{r_a}} \underbrace{\sqrt{h}}_{\leq 1} \leq \|v_k\|_\infty + \frac{C_9}{\sqrt{r_a}}, \tag{7.97}$$

also die gleichmäßige Beschränktheit von $P_{\mu_{k,h}} v_k^h$ ein.

Außerdem kann man

$$\begin{aligned}
& | \|P_{\mu_{k,h}} v_k^h\|_{0,a}^2 - 1 | \\
& \stackrel{\text{Pyth.}}{=} | \|v_k^h\|_{0,a}^2 - \|v_k^h - P_{\mu_{k,h}} v_k^h\|_{0,a}^2 - 1 | \\
& \leq | \|v_k^h\|_{0,a}^2 - 1 | + \|v_k^h - P_{\mu_{k,h}} v_k^h\|_{0,a}^2 \\
& \stackrel{(7.92),(7.93)}{\leq} C_7 h + C_9 h^2 \\
& \leq (C_7 + C_9) h \\
& \stackrel{C_{10} := C_7 + C_9}{=} C_{10} h
\end{aligned} \tag{7.98}$$

und als Konsequenz daraus für $h \leq \frac{1}{2C_{10}}$

$$\|P_{\mu_{k,h}} v_k^h\|_{0,a}^2 \geq 1 - C_{10}h \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (7.99)$$

zeigen. Daran anschließend gilt wegen $h \leq \frac{1}{2C_{10}} < \frac{1}{C_{10}}$ noch

$$(1 - C_{10}h)^2 = 1 - 2C_{10}h + C_{10}^2h^2 \leq 1 - 2C_{10}h + C_{10}^2h \frac{1}{C_{10}} = 1 - C_{10}h$$

und

$$(1 + C_{10}h)^2 = 1 + 2C_{10}h + C_{10}^2h^2 \geq 1 + C_{10}h$$

und daher auch

$$\begin{aligned} (1 - C_{10}h)^2 &\leq 1 - C_{10}h \leq \|P_{\mu_{k,h}} v_k^h\|_{0,a}^2 \leq 1 + C_{10}h \leq (1 + C_{10}h)^2 \\ \implies 1 - C_{10}h &\leq \|P_{\mu_{k,h}} v_k^h\|_{0,a} \leq 1 + C_{10}h \\ \implies \left| \|P_{\mu_{k,h}} v_k^h\|_{0,a} - 1 \right| &\leq C_{10}h \quad . \end{aligned} \quad (7.100)$$

Daraus schließt man

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{\|P_{\mu_{k,h}} v_k^h\|_{0,a}} - 1 \right| \\ &= \frac{\left| \|P_{\mu_{k,h}} v_k^h\|_{0,a} - 1 \right|}{\|P_{\mu_{k,h}} v_k^h\|_{0,a}} \\ &\stackrel{(7.99),(7.100)}{\leq} \sqrt{2}C_{10}h \quad . \end{aligned} \quad (7.101)$$

Ungleichung (7.99) bedeutet insbesondere $P_{\mu_{k,h}} v_k^h \neq 0$, so daß

$$\frac{P_{\mu_{k,h}} v_k^h}{\|P_{\mu_{k,h}} v_k^h\|_{0,a}}$$

ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\mu_{k,h}$ sein muß, was wegen der oben gezeigten Eindimensionalität des Eigenraums zu $\mu_{k,h}$ für $h \leq h^*$, die aus $\mu_{k-1,h} > \mu_{k,h} > \mu_{k+1,h}$ folgt, zwangsläufig

$$\frac{P_{\mu_{k,h}} v_k^h}{\|P_{\mu_{k,h}} v_k^h\|_{0,a}} = v_{k,h} \text{ oder } \frac{P_{\mu_{k,h}} v_k^h}{\|P_{\mu_{k,h}} v_k^h\|_{0,a}} = -v_{k,h}$$

bedeutet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $v_{k,h}$ so gewählt, daß

$$\frac{P_{\mu_{k,h}} v_k^h}{\|P_{\mu_{k,h}} v_k^h\|_{0,a}} = v_{k,h} \quad (7.102)$$

ist (ist dies nicht der Fall, so ersetze in der $(\cdot, \cdot)_{0,a}$ -Orthonormalbasis $v_{k,h}$ durch $\tilde{v}_{k,h} := -v_{k,h}$, siehe auch Bemerkung 7.1.10). Dann gilt schlußendlich bei jedem Gitterpunkt x_j , $j =$

$1, \dots, N-1$ (für die übrigen $j \in \mathbb{Z}$ ist die Aussage trivial) mit der Bezeichnung $C^{(7)} := \frac{C_9}{\sqrt{r_a}} + \sqrt{2}C_{10} \left(\|v_k\|_\infty + \frac{C_9}{\sqrt{r_a}} \right)$

$$\begin{aligned}
& |v_k^h(x_j) - v_{k,h}(x_j)| \\
\leq & |(v_k^h - P_{\mu_k,h} v_k^h)(x_j)| + \left| (P_{\mu_k,h} v_k^h)(x_j) - \frac{(P_{\mu_k,h} v_k^h)(x_j)}{\|P_{\mu_k,h} v_k^h\|_{0,a}} \right| \\
& + \underbrace{\left| \frac{(P_{\mu_k,h} v_k^h)(x_j)}{\|P_{\mu_k,h} v_k^h\|_{0,a}} - v_{k,h}(x_j) \right|}_{(7.102)_0} \\
= & |(v_k^h - P_{\mu_k,h} v_k^h)(x_j)| + \left| 1 - \frac{1}{\|P_{\mu_k,h} v_k^h\|_{0,a}} \right| \cdot |(P_{\mu_k,h} v_k^h)(x_j)| \\
\stackrel{(7.96)}{\leq} & \frac{C_9}{\sqrt{r_a}} \sqrt{h} + \left| 1 - \frac{1}{\|P_{\mu_k,h} v_k^h\|_{0,a}} \right| \cdot |(P_{\mu_k,h} v_k^h)(x_j)| \\
\stackrel{(7.101),(7.97)}{\leq} & \frac{C_9}{\sqrt{r_a}} \sqrt{h} + \sqrt{2}C_{10}h \cdot \left(\|v_k\|_\infty + \frac{C_9}{\sqrt{r_a}} \right) \\
\leq & C^{(7)} \sqrt{h}
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Konvergenzordnung $O(\sqrt{h})$ in der Maximumnorm und in der $\|\cdot\|_{0,a}$ Norm ergibt sich mit $C^{(8)} := C_9 + \sqrt{2}C_{10} (1 + C_{10})$

$$\begin{aligned}
& \|v_k^h - v_{k,h}\|_{0,a} \\
\leq & \|v_k^h - P_{\mu_k,h} v_k^h\|_{0,a} + \left\| P_{\mu_k,h} v_k^h - \frac{P_{\mu_k,h} v_k^h}{\|P_{\mu_k,h} v_k^h\|_{0,a}} \right\|_{0,a} \\
& + \underbrace{\left\| \frac{P_{\mu_k,h} v_k^h}{\|P_{\mu_k,h} v_k^h\|_{0,a}} - v_{k,h} \right\|_{0,a}}_{(7.102)_0} \\
\stackrel{(7.93)}{\leq} & C_9 h + \left| 1 - \frac{1}{\|P_{\mu_k,h} v_k^h\|_{0,a}} \right| \cdot \|P_{\mu_k,h} v_k^h\|_{0,a} \\
\stackrel{(7.100),(7.101)}{\leq} & C_9 h + \sqrt{2}C_{10}h \cdot (1 + C_{10}h) \\
\leq & \left(C_9 + \sqrt{2}C_{10} (1 + C_{10}) \right) h \\
= & C^{(8)} h,
\end{aligned}$$

mithin die behauptete Konvergenzordnung $O(h)$. Selbstredend werden hierbei alle Bedingungen an h , die wir im Laufe des Beweises aufgestellt haben, also $h \leq h^{(7)} = h^{(8)} := \min \left(h^*, h_7, h_0, h_5, \frac{1}{2C_{10}} \right)$ vorausgesetzt und benötigt. \square

7.2 Endlichdimensionale Datenräume

Im Kontext dieses Kapitels bezeichnen wir wie auch bisher mit $v_k, k \in \mathbb{N}$ das $(\cdot, \cdot)_a$ -Orthonormalsystem von Eigenvektoren des Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems zu den Eigenwerten $\lambda_k, k \in \mathbb{N}$ (siehe Satz 6.2.15) und mit $v_{k,h}, k = 1, \dots, N-1$ das $(\cdot, \cdot)_{0,a}$ -Orthogonalsystem von Eigenfunktionen der diskreten Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe zu den Eigenwerten $\lambda_{k,h}, k = 1, \dots, N-1$ (siehe Satz 5.3.11).

Definition 7.2.1 Seien $M, N \in \mathbb{N}, N > M, h = \frac{1}{N}$. Dann kann man zu dem in (6.16) erklärten Datenraum D^a den folgenden M -dimensionalen Teilraum definieren:

$$D_M^a := \{ \phi \in D^a \mid (\phi, v_k)_a = 0, k > M \}$$

Eine diskrete Version dieses Raums erhält man, wenn man

$$D_M^{a,h} := \{ \phi_h \in \mathcal{G}_{h,0} \mid (\phi_h, v_{k,h})_{0,a} = 0, N > k > M \}$$

setzt.

Bemerkung 7.2.2 Im Unterschied zur Situation, wie wir sie als Grundlage für Satz 3.3.2 in dem Spezialfall der Basisfunktionen $v_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$ vorgefunden haben, kann man in dem im gegenwärtigen Kontext untersuchten, allgemeineren Fall nicht mehr davon ausgehen, daß $v_k^h = v_{k,h}$ und daraus resultierend $(v_l^h, v_{k,h})_{0,a} = \delta_{l,k}$ gilt. Damit geht die Eigenschaft verloren, daß die Restriktion einer Funktion aus D_M^a auf G_h ein Element in $D_M^{a,h}$ ist und auch die Eindeutigkeit der Fortsetzung einer Funktion in $D_M^{a,h}$ zu einer Funktion aus D_M^a ist nicht mehr notwendig gegeben.

In Kraft bleibt jedoch ein Analogon zu Satz 3.3.3:

Satz 7.2.3 Sei $N > M$. Dann besitzt der Raum D_M^a die $(\cdot, \cdot)_a$ -Orthonormalbasis v_1, \dots, v_M und der Raum $D_M^{a,h}$ besitzt die $(\cdot, \cdot)_{0,a}$ Orthonormalbasis $v_{1,h}, \dots, v_{M,h}$. Daher sind D_M^a und $D_M^{a,h}$ isomorphe M -dimensionale Vektorräume. Die durch die Eigenschaft $F(v_k) = v_{k,h}, k = 1, \dots, M$ vollständig beschriebene lineare Abbildung $F : (D_M^a, (\cdot, \cdot)_a) \mapsto (D_M^{a,h}, (\cdot, \cdot)_{0,a})$ ist ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis:

Die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $v_k, k = 1, \dots, N-1$ beziehungsweise $v_{k,h}, k = 1, \dots, N-1$ folgt aus der Orthonormaleigenschaft, denn

$$\sum_{l=1}^{N-1} \alpha_l v_l = 0$$

zieht, wenn man sukzessive jeweils das a -Skalarprodukt mit $v_k, k = 1, \dots, N-1$ bildet,

$$0 = (0, v_k)_a = \left(\sum_{l=1}^{N-1} \alpha_l v_l, v_k \right)_a = \sum_{l=1}^{N-1} \alpha_l \underbrace{(v_l, v_k)_a}_{=\delta_{lk}} = \alpha_k, \quad k = 1, \dots, N-1$$

nach sich und für die Funktionen $v_{k,h}$ ersetzt man lediglich $(\cdot, \cdot)_a$ durch $(\cdot, \cdot)_{0,a}$.
Zum Beweis der Erzeugendeneigenschaft sei $v \in D_M^a$ beliebig. Dann gilt nach Satz 6.2.18

$$\begin{aligned} & v \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (v, v_n)_a v_n \\ &\stackrel{v \in D_M^a}{=} \sum_{n=1}^M (v, v_n)_a v_n \end{aligned}$$

und für $v_h \in D_M^{a,h}$ beliebig folgt ganz analog nach Folgerung 5.3.7

$$\begin{aligned} & v_h \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} (v_h, v_{n,h})_{0,a} v_{n,h} \\ &\stackrel{v_h \in D_M^{a,h}}{=} \sum_{n=1}^M (v_h, v_{n,h})_{0,a} v_{n,h} \quad . \end{aligned}$$

Weiter ist eine lineare Abbildung, die eine Basis eines M -dimensionalen Raumes auf die Basis eines anderen M -dimensionalen Raumes abbildet, immer ein Isomorphismus und die Isometrie-eigenschaft folgt sofort mit beliebigen $v = \sum_{n=1}^M \alpha_n v_n$, $w = \sum_{l=1}^M \beta_l v_l \in D_M^a$ aus

$$\begin{aligned} & (F(v), F(w))_{0,a} \\ &= \left(\sum_{n=1}^M \alpha_n F(v_n), \sum_{l=1}^M \beta_l F(v_l) \right)_{0,a} \\ &= \sum_{n,l=1}^M \alpha_n \beta_l (F(v_n), F(v_l))_{0,a} \\ &= \sum_{n,l=1}^M \alpha_n \beta_l \underbrace{(v_{n,h}, v_{l,h})_{0,a}}_{=\delta_{nl}} \\ &= \sum_{n,l=1}^M \alpha_n \beta_l (v_n, v_l)_a \\ &= (v, w)_a \quad . \end{aligned}$$

□

Da man, wie Bemerkung 7.2.2 lehrt, nicht davon ausgehen kann, daß, wenn man Daten $\phi_1 \in D_M^a$ vorliegen hat, auch $\phi_1^h \in D_M^{a,h}$ gilt, und man daher damit rechnen muß, daß die Lösung der Linienmethode sich im Unterschied zu der Situation beim Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung (siehe zum Vergleich den Beweis von Satz 3.4.7) aus mehr als

M Summanden zusammensetzt, benötigt man schon an dieser Stelle den entsprechenden Projektionsoperator (in Analogie zu Lemma 3.6.2), der sicherstellt, daß die diskreten Daten nach der Projektion in $D_M^{a,h}$ liegen.

Lemma 7.2.4 *Erklärt man die Abbildung P_M durch*

$$P_M : \mathcal{G}_{h,0} \ni v_h \mapsto \sum_{l=1}^M (v_h, v_{l,h})_{0,a} v_{l,h} \in D_M^{a,h},$$

so hat P_M folgende Eigenschaften:

(a) P_M ist ein Homomorphismus.

(b) $P_M \phi_h = \phi_h \forall \phi_h \in D_M^{a,h}$

(c) $P_M^2 = P_M$ (Projektionseigenschaft)

(d) $P_M \phi_h \perp (\phi_h - P_M \phi_h)$ (daher orthogonale Projektion)

(e) $\min_{\psi_h \in D_M^{a,h}} \|\phi_h - \psi_h\|_{0,a}^2 = \|\phi_h - P_M \phi_h\|_{0,a}^2 = \|\phi_h\|_{0,a}^2 - \|P_M \phi_h\|_{0,a}^2$

(f) Ist $\varepsilon > 0$ und $\delta_h : \delta_h(x_j) = \delta_j, j = 1, \dots, N-1$ mit $\|\delta_h\|_\infty < \varepsilon$ gegeben (die triviale Fortsetzung $\delta_h(x_j) = 0, j \leq 0 \vee j \geq N$ immer mitgedacht), so folgt mit einer Konstanten $C_0 > 0$

$$\|P_M \delta_h - \delta_h\|_\infty \leq (C_0 M + 1) \varepsilon \quad .$$

Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumnorm auf $\mathcal{G}_{h,0}$ (siehe auch (7.94)).

Beweis:

Die Eigenschaften (a)–(e) sind nach entsprechenden Sätzen der linearen Algebra in jedem euklidischen Raum mit gegebener Orthonormalbasis gültig. Eigenschaft (f) ergibt sich wie folgt:

Klarerweise ist

$$\|v_h\|_{0,a}^2 = h \sum_{l=1}^{N-1} v_h^2(x_j) a(x_j) \leq R_a h \sum_{l=1}^{N-1} v_h^2(x_j) \leq R_a h (N-1) \|v_h\|_\infty^2 \leq R_a \|v_h\|_\infty^2, \quad (7.103)$$

also

$$\|v_h\|_{0,a} \leq \sqrt{R_a} \|v_h\|_\infty \quad (7.104)$$

für alle $v_h \in \mathcal{G}_{h,0}$. Dazu kommt, daß man mittels

$$\begin{aligned}
& \|v_{l,h}\|_\infty \\
(7.81) \quad & \leq \begin{cases} \|v_l^h\|_\infty + C^{(1)}h & , \quad h \leq h^{(1)} \\ \max_{h>h^{(1)}} \|v_{l,h}\|_\infty & , \quad h > h^{(1)} \end{cases} \\
& \leq \underbrace{\max \left(\|v_l\|_\infty + C^{(1)}, \max_{h>h^{(1)}} \|v_{l,h}\|_\infty \right)}_{=: C^{(l)}} \\
& \leq \max_{l=1,\dots,M} C^{(l)} \\
& =: \tilde{C}_0
\end{aligned} \tag{7.105}$$

die Maximumnorm der Basisfunktionen $v_{l,h}$, $l = 1, \dots, M$ gleichmäßig in l und h durch \tilde{C}_0 nach oben beschränken kann (man beachte hierbei, daß wegen der Gestalt $h = \frac{1}{N}$, die h immer besitzt, nur endlich viele $h > h^{(1)}$ existieren, das oben verwendete Maximum also definiert ist).

Damit folgt dann

$$\begin{aligned}
& \|P_M \delta_h - \delta_h\|_\infty \\
& = \left\| \sum_{l=1}^M (\delta_h, v_{l,h})_{0,a} v_{l,h} - \delta_h \right\|_\infty \\
& \leq \sum_{l=1}^M (|(\delta_h, v_{l,h})_{0,a}| \cdot \|v_{l,h}\|_\infty) + \|\delta_h\|_\infty \\
\text{Cauchy-Schwarz} \quad & \leq \underbrace{\|\delta_h\|_{0,a}}_{\stackrel{(7.104)}{\leq} \sqrt{R_a} \|\delta_h\|_\infty} \cdot \underbrace{\|v_{l,h}\|_{0,a}}_{=1} \cdot \underbrace{\|v_{l,h}\|_\infty}_{\stackrel{(7.105)}{\leq} \tilde{C}_0} + \|\delta_h\|_\infty \\
& \leq \underbrace{(\tilde{C}_0 \sqrt{R_a} M + 1)}_{=: C_0} \underbrace{\|\delta_h\|_\infty}_{\leq \varepsilon} \\
& \leq (C_0 M + 1) \varepsilon
\end{aligned}$$

und somit die Behauptung (f). □

Bemerkung 7.2.5 Gelegentlich werden wir auch das kontinuierliche Pendant zu P_M , nämlich die orthogonale Projektion

$$\bar{P}_M : D^a \ni v \mapsto \bar{P}_M(v) = \sum_{k=1}^M (v, v_k)_a v_k \in D_M^a \tag{7.106}$$

einer Funktion v auf den Raum $[v_1, \dots, v_M]$ betrachten, für die klarerweise zu den im vorstehenden Lemma analoge Eigenschaften bewiesen werden können.

Bevor wir den Konvergenzsatz für Daten in D_M^a beweisen, halten wir noch einmal die sich in diesem Fall ergebende exakte Lösung sowie die Lösung der Linienmethode in folgendem Satz fest:

Satz 7.2.6 (Lösungsdarstellungen für frequenzbeschränkte Daten) *Im folgenden sei stets $N > M$ vorausgesetzt.*

(a) *Sei $\phi_1 \in D_M^a$ und $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq r_{max}$. Dann löst die Funktion*

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^M \frac{(\phi_1, v_k)_a}{\sqrt{\lambda_k}} v_k(x) \sinh\left(\sqrt{\lambda_k} y\right) \quad (7.107)$$

Problem 5.1.4.

(b) *Sei $(\phi_1)_h \in D_M^{a,h}$ und $x_i \in G_h$, $0 \leq y \leq r_{max}$. Dann hat die Lösung mittels Linienmethode auf der i -ten Linie die Darstellung*

$$u_i^*(y) = \sum_{k=1}^M \frac{(\phi_1^h, v_{k,h})_{0,a}}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} v_{k,h}(x_i) \sinh\left(\sqrt{\lambda_{k,h}} y\right) \quad (7.108)$$

(c) *Seien allgemeine Daten $\phi_1 \in D^a$ gegeben. Dann löst*

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^M \frac{(\phi_1, v_k)_a}{\sqrt{\lambda_k}} v_k(x) \sinh\left(\sqrt{\lambda_k} y\right) \quad (7.109)$$

Problem 5.1.4 zu Daten $\phi_1^ := \overline{P}_M(\phi_1)$.*

Weiter hat die Lösung der Linienmethode zu diskretisierten und anschließend auf den Raum $D_M^{a,h}$ projizierten Daten $P_M(\phi_1^h)$ auf der i -ten Linie die Darstellung

$$u_i^*(y) = \sum_{k=1}^M \frac{(\phi_1^h, v_{k,h})_{0,a}}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} v_{k,h}(x_i) \sinh\left(\sqrt{\lambda_{k,h}} y\right) \quad (7.110)$$

Beweis:

Zu (a):

Offenbar verschwinden wegen $\phi_1 \in D_M^a$ in (6.26) alle Summanden ab $k = M + 1$, so daß die Darstellung (7.107) gezeigt ist.

Zu (b):

(7.108) folgt analog zu (a) unmittelbar aus (5.60).

Zu (c):

Gleichung (7.109) folgt wegen $\bar{P}_M(\phi_1) \in D_M^a$ aus (a), wenn man noch

$$\begin{aligned} & (\bar{P}_M(\phi_1), v_k)_a \\ &= \left(\sum_{l=1}^M (\phi_1, v_l)_{0,a} v_l, v_k \right)_a \\ &= \sum_{l=1}^M (\phi_1, v_l)_a \cdot \underbrace{(v_l, v_k)_a}_{=\delta_{lk}} \\ &= (\phi_1, v_k)_a \quad , \quad k = 1, \dots, M \end{aligned}$$

beachtet.

Die Behauptung über die Lösung der Linienmethode ergibt sich ebenso wegen $P_M(\phi_1^h) \in D_m^{a,h}$ aus (b), wenn man

$$\begin{aligned} & (P_M(\phi_1^h), v_{k,h})_{0,a} \\ &= \left(\sum_{l=1}^M (\phi_1^h, v_{l,h})_{0,a} v_{l,h}, v_{k,h} \right)_{0,a} \\ &= \sum_{l=1}^M (\phi_1^h, v_{l,h})_{0,a} \cdot \underbrace{(v_{l,h}, v_{k,h})_{0,a}}_{=\delta_{lk}} \\ &= (\phi_1^h, v_{k,h})_{0,a} \quad , \quad k = 1, \dots, M \end{aligned}$$

berücksichtigt.

□

Die in den Lösungsdarstellungen auftretenden Terme, die wir bisher noch nicht im Detail analysiert haben, behandeln wir der Übersichtlichkeit halber in einem eigenen Lemma.

Lemma 7.2.7 (a) *Es existiert eine Konstante $\tilde{C}^{(6)} = \max\left(\frac{C^{(6)}}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}\pi}}, \frac{2C^{(6)}}{\sqrt{\frac{r_a^3}{R_a^3}\pi^3}}\right)$, mit der für alle $h \leq \tilde{h}^{(6)} := \min\left(h^{(6)}, \frac{r_a\pi^2}{2R_a C^{(6)}}\right)$ (zur Erklärung von $C^{(6)}, h^{(6)}$ siehe (7.11) und Folgerung 7.1.3) und alle $k = 1, \dots, M$ die Ungleichungen*

$$\left| \sqrt{\lambda_k} - \sqrt{\lambda_{k,h}} \right| \leq \tilde{C}^{(6)} h \quad (7.111)$$

und

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} \right| \leq \tilde{C}^{(6)} h \quad (7.112)$$

gelten.

(b) Es gibt eine Konstante $C^{(9)} = \exp\left(3\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} M\pi r_{max}\right) \tilde{C}^{(6)} r_{max}$ und ein $h^{(9)} > 0$, so daß für alle $h \leq h^{(9)}$ und alle $k = 1, \dots, M$ die Abschätzung

$$\left| \sinh\left(\sqrt{\lambda_k} y\right) - \sinh\left(\sqrt{\lambda_{k,h}} y\right) \right| \leq C^{(9)} h \quad (7.113)$$

gilt.

(c) Mit einer Konstanten $C^{(10)} > 0$ ist für alle $h \leq h^{(10)}$ und alle $k = 1, \dots, M$ die Abschätzung

$$\left| (\phi_1^h, v_{k,h})_{0,a} - (\phi_1, v_k)_a \right| \leq C^{(10)} h \quad (7.114)$$

gültig.

Beweis:

Ohne Einschränkung sei $C^{(6)}$ die maximale Konstante unter allen $C^{(6)}$, die sich in Folgerung 7.1.3 sukzessive für $k = 1, \dots, M$ ergeben (ansonsten gehe man zum Maximum über) und $h^{(6)}$ das minimale unter allen $h^{(6)}$, die sich in gleicher Weise für $k = 1, \dots, M$ finden. Ist dann $h \leq \tilde{h}^{(6)} \leq h^{(6)}$, so folgt

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{\lambda_k} - \sqrt{\lambda_{k,h}} \right| \\ &= \frac{|\lambda_k - \lambda_{k,h}|}{\sqrt{\lambda_k} + \sqrt{\lambda_{k,h}}} \\ &\leq \frac{|\lambda_k - \lambda_{k,h}|}{\sqrt{\lambda_k}} \\ &\stackrel{\text{Satz 6.2.15}}{\leq} \frac{|\lambda_k - \lambda_{k,h}|}{\sqrt{\lambda_1}} \\ &\stackrel{\text{Satz 6.2.25, (6.20)}}{\leq} \frac{|\lambda_k - \lambda_{k,h}|}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi} \\ &\stackrel{\text{Folgerung 7.1.3}}{\leq} \frac{C^{(6)}}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi} h \\ &\leq \tilde{C}^{(6)} h \end{aligned} \quad (7.115)$$

Damit ist (7.111) gezeigt. Wir setzen dies ein, um zunächst für $h \leq \tilde{h}^{(6)} \leq \frac{r_a \pi^2}{2R_a C^{(6)}}$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\lambda_{k,h}} \\
(7.115) \quad & \geq \sqrt{\lambda_k} - \frac{C^{(6)}}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a} \pi}} h \\
& \geq \sqrt{\lambda_k} - \frac{\sqrt{\frac{r_a}{R_a} \pi}}{2} \\
& \geq \sqrt{\lambda_k} - \frac{\sqrt{\frac{r_a}{R_a} k \pi}}{2} \\
(6.20) \quad & \geq \sqrt{\lambda_k} - \frac{\sqrt{\lambda_k}}{2} \\
& = \frac{\sqrt{\lambda_k}}{2}
\end{aligned} \tag{7.116}$$

zu erhalten und daraus dann

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} \right| \\
& = \frac{|\sqrt{\lambda_k} - \sqrt{\lambda_{k,h}}|}{\sqrt{\lambda_k} \sqrt{\lambda_{k,h}}} \\
(7.116) \quad & \leq \frac{2 |\sqrt{\lambda_k} - \sqrt{\lambda_{k,h}}|}{\lambda_k} \\
(7.115) \quad & \leq \frac{2C^{(6)} h}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a} \pi} \lambda_k} \\
\text{Satz 6.2.15} \quad & \leq \frac{2C^{(6)} h}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a} \pi} \lambda_1} \\
(6.20) \quad & \leq \frac{2C^{(6)}}{\sqrt{\frac{r_a^3}{R_a^3} \pi^3}} h \\
& \leq \tilde{C}^{(6)} h
\end{aligned}$$

zu folgern.

Zum Nachweis von (7.113) sei nun

$$h \leq h^{(9)} := \min \left(h^{(6)}, \frac{2\sqrt{\lambda_1}}{\tilde{C}^{(6)}} \right) \leq \min \left(h^{(6)}, \frac{2\sqrt{\lambda_1}}{\tilde{C}^{(6)}}, \dots, \frac{2\sqrt{\lambda_M}}{\tilde{C}^{(6)}} \right)$$

und $C^{(9)}$ wie in der Behauptung angegeben.

Dann weist man im Fall $\lambda_{k,h} \leq \lambda_k$ die behauptete Abschätzung durch Nachvollziehen von

$$\begin{aligned}
& \left| \sinh \left(\sqrt{\lambda_k} y \right) - \sinh \left(\sqrt{\lambda_{k,h}} y \right) \right| \\
&= \sinh \left(\sqrt{\lambda_k} y \right) - \sinh \left(\sqrt{\lambda_{k,h}} y \right) \\
&\stackrel{(7.111)}{\leq} \sinh \left(\sqrt{\lambda_k} y \right) - \sinh \left(\sqrt{\lambda_k} y - \tilde{C}^{(6)} h y \right) \\
&= \frac{\exp \left(\sqrt{\lambda_k} y \right) - \exp \left(-\sqrt{\lambda_k} y \right)}{2} \\
&\quad - \frac{\exp \left(\sqrt{\lambda_k} y - \tilde{C}^{(6)} h y \right) - \exp \left(-\left(\sqrt{\lambda_k} y - \tilde{C}^{(6)} h y \right) \right)}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left(\exp \left(\sqrt{\lambda_k} y \right) \left(1 - \exp \left(-\tilde{C}^{(6)} h y \right) \right) - \exp \left(-\sqrt{\lambda_k} y \right) \left(1 - \exp \left(\tilde{C}^{(6)} h y \right) \right) \right) \\
&\stackrel{\text{Lemma 3.1.3 (a)}}{\leq} \frac{1}{2} \left(\exp \left(\sqrt{\lambda_k} y \right) \cdot \tilde{C}^{(6)} h y + \exp \left(-\sqrt{\lambda_k} y \right) \cdot \left(\exp \left(\tilde{C}^{(6)} h y \right) - 1 \right) \right) \\
&\stackrel{\text{Lemma 3.1.3 (b)}}{\leq} \frac{1}{2} \left(\exp \left(\sqrt{\lambda_k} y \right) \cdot \tilde{C}^{(6)} h y + \exp \left(-\sqrt{\lambda_k} y \right) \cdot \tilde{C}^{(6)} h y \cdot \exp \left(\overbrace{\tilde{C}^{(6)} h y}^{\leq 2\sqrt{\lambda_k} y} \right) \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\exp \left(\sqrt{\lambda_k} y \right) \tilde{C}^{(6)} h y + \exp \left(\sqrt{\lambda_k} y \right) \tilde{C}^{(6)} h y \right) \\
&= \exp \left(\sqrt{\lambda_k} y \right) \tilde{C}^{(6)} h y \\
&\stackrel{(6.20)}{\leq} \exp \left(3 \sqrt{\frac{R_a}{r_a}} k \pi y \right) \tilde{C}^{(6)} y h \\
&\leq C^{(9)} h
\end{aligned}$$

und im Fall $\lambda_{k,h} > \lambda_k$ ganz analog mittels

$$\begin{aligned}
& \left| \sinh \left(\sqrt{\lambda_k} y \right) - \sinh \left(\sqrt{\lambda_{k,h}} y \right) \right| \\
&= \sinh \left(\sqrt{\lambda_{k,h}} y \right) - \sinh \left(\sqrt{\lambda_k} y \right) \\
&\stackrel{(7.111)}{\leq} \sinh \left(\sqrt{\lambda_k} y + \tilde{C}^{(6)} h y \right) - \sinh \left(\sqrt{\lambda_k} y \right) \\
&= \frac{\exp \left(\sqrt{\lambda_k} y + \tilde{C}^{(6)} h y \right) - \exp \left(-\left(\sqrt{\lambda_k} y + \tilde{C}^{(6)} h y \right) \right)}{2} \\
&\quad - \frac{\exp \left(\sqrt{\lambda_k} y \right) - \exp \left(-\sqrt{\lambda_k} y \right)}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left(\exp \left(\sqrt{\lambda_k} y \right) \left(\exp \left(\tilde{C}^{(6)} h y \right) - 1 \right) - \exp \left(-\sqrt{\lambda_k} y \right) \left(\exp \left(-\tilde{C}^{(6)} h y \right) - 1 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\text{Lemma 3.1.3 (b)}}{\leq} \frac{1}{2} \left(\exp \left(\sqrt{\lambda_k y} \right) \cdot \tilde{C}^{(6)} h y \cdot \exp \left(\tilde{C}^{(6)} h y \right) \right. \\
& \quad \left. + \exp \left(-\sqrt{\lambda_k y} \right) \cdot \left(1 - \exp \left(-\tilde{C}^{(6)} h y \right) \right) \right) \\
& \stackrel{\text{Lemma 3.1.3 (a)}}{\leq} \frac{1}{2} \left(\exp \left(\sqrt{\lambda_k y} \right) \cdot \tilde{C}^{(6)} h y \cdot \underbrace{\exp \left(\tilde{C}^{(6)} h y \right)}_{\leq 2\sqrt{\lambda_k y}} + \exp \left(-\sqrt{\lambda_k y} \right) \cdot \underbrace{\tilde{C}^{(6)} h y}_{\leq 3\sqrt{\lambda_k y}} \right) \\
& \leq \frac{1}{2} \left(\exp \left(3\sqrt{\lambda_k y} \right) \tilde{C}^{(6)} h y + \exp \left(3\sqrt{\lambda_k y} \right) \tilde{C}^{(6)} h y \right) \\
& = \exp \left(3\sqrt{\lambda_k y} \right) \tilde{C}^{(6)} y h \\
& \stackrel{(6.20)}{\leq} \exp \left(3\sqrt{\frac{R_a}{r_a} k \pi y} \right) \tilde{C}^{(6)} y h \\
& \leq C^{(9)} h
\end{aligned}$$

nach.

Abschätzung (7.114) beweist man, indem man sich zuerst klarmacht, daß die summierte Sehnentrapezformel das Integral der Funktion $\phi_1 v_k a \in C^1[0, 1]$ mit einem Restglied der Größenordnung $O(h)$ approximiert (siehe den Beweis der zweiten Behauptung in Satz 7.1.2 für eine ausführliche Erläuterung dieses Sachverhalts; man beachte auch, daß $\phi_1 v_k a$ bei 0 und 1 verschwindet), das heißt, es existieren Konstanten $C_1, h_1 > 0$, so daß für alle $h \leq h_1$ die Ungleichung

$$|(\phi_1, v_k)_a - (\phi_1^h, v_k^h)_{0,a}| \leq C_1 h \quad (7.117)$$

erfüllt ist.

Aus demselben Grund (man berücksichtige auch hier $\phi \in D_M^a \subset D_M \implies \phi_1(0) = \phi_1(1) = 0$, vergleiche Definition 7.2.1 und (6.16)) gibt es Konstanten $C_2, h_2 > 0$, so daß für alle $h \leq h_2$ zunächst

$$|\|\phi_1\|_a^2 - \|\phi_1^h\|_{0,a}^2| \leq C_2 h \quad (7.118)$$

und daraus resultierend

$$|\|\phi_1\|_a - \|\phi_1^h\|_{0,a}| = \frac{|\|\phi_1\|_a^2 - \|\phi_1^h\|_{0,a}^2|}{\|\phi_1\|_a + \|\phi_1^h\|_{0,a}} \leq \frac{|\|\phi_1\|_a^2 - \|\phi_1^h\|_{0,a}^2|}{\|\phi_1\|_a} \stackrel{(7.118)}{\leq} \frac{C_2}{\|\phi_1\|_a} h$$

gilt, was

$$\|\phi_1^h\|_{0,a} \leq \|\phi_1\|_a + \frac{C_2}{\|\phi_1\|_a} h \leq \|\phi_1\|_a + \frac{C_2}{\|\phi_1\|_a} \quad (7.119)$$

zur Folge hat.

Unter Verwendung dieser Ergebnisse und der Bezeichnungen $C^{(10)} := \left(\|\phi_1\|_a + \frac{C_2}{\|\phi_1\|_a} \right) C^{(8)} + C_1$ sowie $h^{(10)} := \min(h_1, h_2)$ bringt man nun den Beweis mittels

$$\begin{aligned}
& |(\phi_1^h, v_{k,h})_{0,a} - (\phi_1, v_k)_a| \\
& \leq |(\phi_1^h, v_{k,h})_{0,a} - (\phi_1^h, v_k^h)_{0,a}| + |(\phi_1, v_k)_a - (\phi_1^h, v_k^h)_{0,a}| \\
& \stackrel{(7.117)}{\leq} |(\phi_1^h, v_{k,h} - v_k^h)_{0,a}| + C_1 h \\
& \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|\phi_1^h\|_{0,a} \cdot \|v_{k,h} - v_k^h\|_{0,a} + C_1 h \\
& \stackrel{\text{Satz 7.1.11, (7.82)}}{\leq} \|\phi_1^h\|_{0,a} C^{(8)} h + C_1 h \\
& \stackrel{(7.119)}{\leq} \left(\left(\|\phi_1\|_a + \frac{C_2}{\|\phi_1\|_a} \right) C^{(8)} + C_1 \right) h \\
& = C^{(10)} h
\end{aligned}$$

zu Ende. □

Damit läßt sich nun der angekündigte Konvergenzsatz formulieren:

Satz 7.2.8 (Konvergenzsatz für Daten in D_M^a) Sei $\phi_1 \in D_M^a$, $M < N$. Dann konvergiert für $h \rightarrow 0$ die nach der Linienmethode zu Daten $P_M(\phi_1^h)$ ermittelte Näherungslösung $u_i^*(y)$ (wie wir sie in (7.110) niedergeschrieben haben) gegen die exakte Lösung auf der i -ten Linie $u(x_i, y)$ (vergleiche (7.107)). Die Konvergenzordnung bezüglich der Maximumnorm ist $O(\sqrt{h})$, das heißt, es existieren Konstanten $C^{(11)} > 0, h^{(11)} > 0$, so daß für alle $h \leq h^{(11)}$ die Fehlerabschätzung

$$|u(x_i, y) - u_i(y)| \leq M C^{(11)} \sqrt{h} \quad (7.120)$$

erfüllt ist. Weiter hat man mit der Bezeichnung (siehe auch (5.23))

$$u_h^*(y) := (\Psi^0)^{-1}(u_1^*(y), \dots, u_{N-1}^*(y)) \in \mathcal{G}_{h,0}$$

die Existenz von Konstanten $C^{(12)} > 0, h^{(12)} > 0$, so daß für alle $h \leq h^{(12)}$ die Fehlerabschätzung

$$\|(u(\cdot, y))^h - u_h^*(y)\|_{0,a} \leq M C^{(12)} h \quad (7.121)$$

gilt. Die Konvergenzordnung bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{0,a}$ ist also $O(h)$.

Beweis:

Nach Satz 7.1.11 existieren zu jedem $k \in \{1, \dots, M\}$ Konstanten $C^{(7)} = C^{(7)}(k), C^{(8)} = C^{(8)}(k), h^{(7)} = h^{(7)}(k), h^{(8)} = h^{(8)}(k)$, so daß die Abschätzungen (7.81) und (7.82) gelten. Setzt man

$$\begin{aligned}
\tilde{C}^{(7)} & := \max_{k=1, \dots, M} C^{(7)}(k) \\
\tilde{C}^{(8)} & := \max_{k=1, \dots, M} C^{(8)}(k) \\
\tilde{h}^{(7)} & := \min_{k=1, \dots, M} h^{(7)}(k) \\
\tilde{h}^{(8)} & := \min_{k=1, \dots, M} h^{(8)}(k),
\end{aligned}$$

so erreicht man, daß (7.81) und (7.82) mit von k unabhängigen Konstanten $\tilde{C}^{(7)}, \tilde{C}^{(8)}, \tilde{h}^{(7)}, \tilde{h}^{(8)}$ Gültigkeit besitzen und daher in Zeichen

$$\exists \tilde{C}^{(7)} > 0, \tilde{h}^{(7)} > 0 \forall h \leq \tilde{h}^{(7)} \forall k = 1, \dots, M : \|v_k^h - v_{k,h}\|_\infty \leq \tilde{C}^{(7)} \sqrt{h} \quad (7.122)$$

$$\exists \tilde{C}^{(8)} > 0, \tilde{h}^{(8)} > 0 \forall h \leq \tilde{h}^{(8)} \forall k = 1, \dots, M : \|v_k^h - v_{k,h}\|_{0,a} \leq \tilde{C}^{(8)} h \quad (7.123)$$

gilt.

Außerdem können wir Lemma 7.1.6 mit

$$\begin{aligned} b_h &= (\phi_1^h, v_{k,h})_{0,a} \\ b &= (\phi_1, v_k)_a \\ c_h &= \sinh\left(\sqrt{\lambda_{k,h}} y\right) \\ c &= \sinh\left(\sqrt{\lambda_k} y\right) \\ d_h &= \sqrt{\lambda_{k,h}} \\ d &= \sqrt{\lambda_k} \\ C_0 &= \max\left(\|\phi_1\|_a, \sinh\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} M \pi r_{max}\right)\right) \\ C_1 &= \sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi \\ C_2 &= \max\left(\tilde{C}^{(6)}, C^{(9)}, C^{(10)}\right) \\ h_2 &= \min\left(\tilde{h}^{(6)}, h^{(9)}, h^{(10)}\right) \end{aligned}$$

anwenden, denn die ersten beiden Voraussetzungen von Lemma 7.1.6 sind aufgrund von Lemma 7.2.7 erfüllt und die dritte Voraussetzung gilt wegen

$$|b| = |(\phi_1, v_k)_a| \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|\phi_1\|_a \cdot \underbrace{\|v_k\|_a}_{=1} = \|\phi_1\|_a \leq C_0 \quad (7.124)$$

und

$$\begin{aligned} &|c| \\ &= \sinh\left(\sqrt{\lambda_k} y\right) \\ &\stackrel{\text{Satz 6.2.15 (b)}}{\leq} \sinh\left(\sqrt{\lambda_M} y\right) \\ &\leq \sinh\left(\sqrt{\lambda_M} r_{max}\right) \\ &\stackrel{(6.20)}{\leq} \sinh\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} M \pi r_{max}\right) \leq C_0 \end{aligned} \quad (7.125)$$

sowie

$$|d| = \sqrt{\lambda_k} \stackrel{\text{Satz 6.2.15 (b)}}{\geq} \sqrt{\lambda_1} \stackrel{(6.20)}{\geq} \sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi = C_1 \quad (7.126)$$

ebenfalls. Das Lemma 7.1.6 liefert somit

$$\exists C_3 > 0 \exists h_3 > 0 \forall h \leq h_3 : \quad \left| \frac{bc}{d} - \frac{b_h c_h}{d_h} \right| \leq C_3 h \quad . \quad (7.127)$$

Definiert man noch

$$C^{(13)} := \max_{k=1, \dots, M} \|v_k\|_\infty \quad (7.128)$$

und

$$C^{(11)} := \frac{C_0^2 \tilde{C}^{(7)}}{C_1} + \left(C^{(13)} + \tilde{C}^{(7)} \right) C_3, \quad (7.129)$$

so kann man weiter schlußfolgern:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(\phi_1, v_k)_a}{\sqrt{\lambda_k}} v_k(x_i) \sinh(\sqrt{\lambda_k} y) - \frac{(\phi_1^h, v_{k,h})_{0,a}}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} v_{k,h}(x_i) \sinh(\sqrt{\lambda_{k,h}} y) \right| \\ &= \left| \frac{bc}{d} v_k(x_i) - \frac{b_h c_h}{d_h} v_{k,h}(x_i) \right| \\ &\leq \left| \frac{bc}{d} v_k(x_i) - \frac{bc}{d} v_{k,h}(x_i) \right| + \left| \frac{bc}{d} v_{k,h}(x_i) - \frac{b_h c_h}{d_h} v_{k,h}(x_i) \right| \\ &= \left| \frac{bc}{d} \right| \cdot |v_k(x_i) - v_{k,h}(x_i)| + |v_{k,h}(x_i)| \cdot \left| \frac{bc}{d} - \frac{b_h c_h}{d_h} \right| \\ &\stackrel{(7.124), (7.125), (7.126)}{\leq} \frac{C_0^2}{C_1} \cdot |v_k(x_i) - v_{k,h}(x_i)| + |v_{k,h}(x_i)| \cdot \left| \frac{bc}{d} - \frac{b_h c_h}{d_h} \right| \\ &\stackrel{(7.122), (7.127)}{\leq} \frac{C_0^2 \tilde{C}^{(7)}}{C_1} \sqrt{h} + \left(|v_k(x_i)| + \tilde{C}^{(7)} \sqrt{h} \right) C_3 h \\ &\stackrel{(7.128)}{\leq} \frac{C_0^2 \tilde{C}^{(7)}}{C_1} \sqrt{h} + \left(C^{(13)} + \tilde{C}^{(7)} \right) C_3 h \\ &\leq \left(\frac{C_0^2 \tilde{C}^{(7)}}{C_1} + \left(C^{(13)} + \tilde{C}^{(7)} \right) C_3 \right) \sqrt{h} \\ &= C^{(11)} \sqrt{h} \quad (7.130) \end{aligned}$$

Wir zeigen nun die Fehlerabschätzung, die dann die Konvergenzbehauptung bezüglich der Maximumnorm impliziert:

$$\begin{aligned} & |u(x_i, y) - u_i^*(y)| \\ &\stackrel{(7.107), (7.110)}{=} \left| \sum_{k=1}^M \left(\frac{(\phi_1, v_k)_a}{\sqrt{\lambda_k}} v_k(x_i) \sinh(\sqrt{\lambda_k} y) - \frac{(\phi_1^h, v_{k,h})_{0,a}}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} v_{k,h}(x_i) \sinh(\sqrt{\lambda_{k,h}} y) \right) \right| \\ &\stackrel{(7.130)}{\leq} MC^{(11)} \sqrt{h} \end{aligned}$$

Fehlerabschätzung und damit auch Konvergenznachweis für die Norm $\|\cdot\|_{0,a}$ gelingt, wenn man mit der Definition

$$C^{(12)} := \frac{C_0^2 \tilde{C}^{(8)}}{C_1} + C_3$$

zunächst in Analogie zu (7.130)

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{(\phi_1, v_k)_a}{\sqrt{\lambda_k}} v_k^h \sinh(\sqrt{\lambda_k} y) - \frac{(\phi_1^h, v_{k,h})_{0,a}}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} v_{k,h} \sinh(\sqrt{\lambda_{k,h}} y) \right\|_{0,a} \\
&= \left\| \frac{bc}{d} v_k^h - \frac{b_h c_h}{d_h} v_{k,h} \right\|_{0,a} \\
&\leq \left\| \frac{bc}{d} v_k^h - \frac{bc}{d} v_{k,h} \right\|_{0,a} + \left\| \frac{bc}{d} v_{k,h} - \frac{b_h c_h}{d_h} v_{k,h} \right\|_{0,a} \\
&= \left| \frac{bc}{d} \right| \cdot \|v_k^h - v_{k,h}\|_{0,a} + \underbrace{\|v_{k,h}\|_{0,a}}_{=1} \cdot \left| \frac{bc}{d} - \frac{b_h c_h}{d_h} \right| \\
&\stackrel{(7.124),(7.125),(7.126)}{\leq} \frac{C_0^2}{C_1} \cdot \|v_k^h - v_{k,h}\|_{0,a} + \left| \frac{bc}{d} - \frac{b_h c_h}{d_h} \right| \\
&\stackrel{(7.123),(7.127)}{\leq} \frac{C_0^2 \tilde{C}^{(8)}}{C_1} h + C_3 h \\
&= C^{(12)} h
\end{aligned} \tag{7.131}$$

schließt und darauf aufbauend die behauptete Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \|(u(\cdot, y))^h - u_h^*(y)\|_{0,a} \\
&\stackrel{(7.107),(7.110)}{=} \left\| \sum_{k=1}^M \left(\frac{(\phi_1, v_k)_a}{\sqrt{\lambda_k}} v_k \sinh(\sqrt{\lambda_k} y) - \frac{(\phi_1^h, v_{k,h})_{0,a}}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} v_{k,h} \sinh(\sqrt{\lambda_{k,h}} y) \right) \right\|_{0,a} \\
&\stackrel{(7.131)}{\leq} MC^{(12)} h
\end{aligned}$$

einsieht. □

7.3 Gestörte Daten und Projektion

Wir können nun auch Satz 3.6.4 auf den allgemeineren Kontext ausweiten.

Satz 7.3.1 *Sei $M < N$ und $\phi_1 \in D_M^a$. Weiter seien gestörte Daten $\phi_{1,\varepsilon}$ mit $\|\phi_1^h - \phi_{1,\varepsilon}^h\|_\infty \leq \varepsilon$ gegeben. Dann konvergiert für $\varepsilon \rightarrow 0$ die mit Hilfe der Linienmethode zu den Daten $P_M(\phi_{1,\varepsilon}^h)$ (also zu zunächst gestörten und anschließend auf den Raum $D_M^{a,h}$ projizierten Daten) ermittelte Näherungslösung $u_{i,\varepsilon}^*$ gegen die Lösung u_i^* der Linienmethode zu ungestörten, auf*

den Raum $D_M^{a,h}$ projizierten Daten $P_M(\phi_1^h)$. Man erhält für hinreichend kleines h die Fehlerabschätzung

$$|u_i^*(y) - u_{i,\varepsilon}^*(y)| \leq C^{(14)}\varepsilon \quad (7.132)$$

mit einer Konstanten $C^{(14)} > 0$, die gleichmäßig für alle $i = 1, \dots, N-1$ Verwendung finden kann, das heißt, die Konvergenzordnung bezüglich der Maximumnorm beträgt $O(\varepsilon)$. Außerdem gilt in der Norm $\|\cdot\|_{0,a}$:

$$\|u_h^*(y) - u_{\varepsilon,h}^*(y)\|_{0,a} \leq \tilde{C}^{(14)}\varepsilon \quad (7.133)$$

mit der Bezeichnung (zur Definition von Ψ^0 siehe (5.23))

$$u_{\varepsilon,h}^*(y) := (\Psi^0)^{-1}(u_{1,\varepsilon}^*(y), \dots, u_{N-1,\varepsilon}^*(y))^T \in \mathcal{G}_{h,0} \quad (7.134)$$

Beweis:

Es gilt nach (7.110)

$$u_i^*(y) = \sum_{k=1}^M \frac{(\phi_1^h, v_{k,h})_{0,a}}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} v_{k,h}(x_i) \sinh(\sqrt{\lambda_{k,h}}y) \quad (7.135)$$

und völlig analog zum Beweis von (7.110) zeigt man auch

$$u_{i,\varepsilon}^*(y) = \sum_{k=1}^M \frac{(\phi_{1,\varepsilon}^h, v_{k,h})_{0,a}}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} v_{k,h}(x_i) \sinh(\sqrt{\lambda_{k,h}}y) \quad (7.136)$$

Subtrahiert man (7.136) von (7.135), so folgt

$$\begin{aligned} & |u_i^*(y) - u_{i,\varepsilon}^*(y)| \\ &= \left| \sum_{k=1}^M \frac{(\phi_1^h - \phi_{1,\varepsilon}^h, v_{k,h})_{0,a}}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} v_{k,h}(x_i) \sinh(\sqrt{\lambda_{k,h}}y) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^M \left| \frac{(\phi_1^h - \phi_{1,\varepsilon}^h, v_{k,h})_{0,a}}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} v_{k,h}(x_i) \sinh(\sqrt{\lambda_{k,h}}y) \right|. \end{aligned} \quad (7.137)$$

Eine Untersuchung der einzelnen Terme in dieser Summe fördert, wenn man noch

$$\left| (\phi_1^h - \phi_{1,\varepsilon}^h, v_{k,h})_{0,a} \right| \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|\phi_1^h - \phi_{1,\varepsilon}^h\|_{0,a} \cdot \underbrace{\|v_{k,h}\|_{0,a}}_{=1} \stackrel{(7.104)}{\leq} \sqrt{R_a} \|\phi_1^h - \phi_{1,\varepsilon}^h\|_\infty \leq \sqrt{R_a}\varepsilon \quad (7.138)$$

einsetzt,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(\phi_1^h - \phi_{1,\varepsilon}^h, v_{k,h})_{0,a}}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} v_{k,h}(x_i) \sinh\left(\sqrt{\lambda_{k,h}y}\right) \right| \\
& \leq \sinh\left(\sqrt{\lambda_{k,h}y}\right) \cdot |v_{k,h}(x_i)| \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} \cdot |(\phi_1^h - \phi_{1,\varepsilon}^h, v_{k,h})_{0,a}| \\
& \stackrel{(7.138)}{\leq} \sinh\left(\sqrt{\lambda_{k,h}y}\right) \cdot |v_{k,h}(x_i)| \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} \cdot \sqrt{R_a}\varepsilon \\
& \stackrel{(7.113),(7.81),(7.112)}{\leq} \left(\sinh\left(\sqrt{\lambda_k y}\right) + C^{(9)}h\right) \cdot (|v_k^h(x_i)| + C^{(7)}\sqrt{h}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} + \tilde{C}^{(6)}h\right) \cdot \sqrt{R_a}\varepsilon \\
& \stackrel{\text{Satz 6.2.15 (b),(7.128)}}{\leq} \left(\sinh\left(\sqrt{\lambda_M y}\right) + C^{(9)}h\right) \cdot (C^{(13)} + C^{(7)}\sqrt{h}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \tilde{C}^{(6)}h\right) \cdot \sqrt{R_a}\varepsilon \\
& \stackrel{y \leq r_{max}, h \leq 1}{\leq} \left(\sinh\left(\sqrt{\lambda_M r_{max}}\right) + C^{(9)}\right) \cdot (C^{(13)} + C^{(7)}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \tilde{C}^{(6)}\right) \cdot \sqrt{R_a}\varepsilon \\
& \stackrel{(6.20)}{\leq} \left(\sinh\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} M \pi r_{max}\right) + C^{(9)}\right) \cdot (C^{(13)} + C^{(7)}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}}\pi} + \tilde{C}^{(6)}\right) \cdot \sqrt{R_a}\varepsilon
\end{aligned}$$

zutage. Wenn man nun $C^{(14)}$ durch

$$C^{(14)} := M \left(\sinh\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} M \pi r_{max}\right) + C^{(9)} \right) \cdot (C^{(13)} + C^{(7)}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}}\pi} + \tilde{C}^{(6)} \right) \cdot \sqrt{R_a}$$

definiert, so läßt sich offenbar die Summe (7.137) durch $C^{(14)}\varepsilon$ nach oben abschätzen. Dies zeigt (7.132) und mit Hilfe einer einfachen Anwendung von (7.104) folgt daraus auch (7.133) mit $\tilde{C}^{(14)} := \sqrt{R_a}C^{(14)}$. \square

Folgerung 7.3.2 *Mit den Bezeichnungen und unter den Voraussetzungen des vorangegangenen Satzes konvergiert für $(\varepsilon, h) \rightarrow 0$ die Funktion $u_{i,\varepsilon}^*$ gegen die wahre Lösung $u(x_i, y)$ des Ausgangsproblems. Es gelten für hinreichend kleines h die Fehlerabschätzungen*

$$|u(x_i, y) - u_{i,\varepsilon}^*(y)| \leq MC^{(11)}\sqrt{h} + C^{(14)}\varepsilon \quad (7.139)$$

und

$$\|(u(\cdot, y))^h - u_{\varepsilon,h}^*(y)\|_{0,a} \leq MC^{(12)}h + \tilde{C}^{(14)}\varepsilon \quad (7.140)$$

Beweis:

Man spaltet den Gesamtfehler nach der Dreiecksungleichung auf und erhält damit unmittelbar nach den Sätzen 7.2.8 und 7.3.1

$$\begin{aligned}
& |u(x_i, y) - u_{i,\varepsilon}^*(y)| \\
& \leq |u(x_i, y) - u_i^*(y)| + |u_i^*(y) - u_{i,\varepsilon}^*(y)| \\
& \stackrel{(7.120),(7.132)}{\leq} MC^{(11)}\sqrt{h} + C^{(14)}\varepsilon
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
& \| (u(\cdot, y))^h - u_{\varepsilon, h}^*(y) \|_{0, a} \\
& \leq \| (u(\cdot, y))^h - u_h^*(y) \|_{0, a} + \| u_h^*(y) - u_{\varepsilon, h}^*(y) \|_{0, a} \\
& \stackrel{(7.121), (7.133)}{\leq} MC^{(12)}h + \tilde{C}^{(14)}\varepsilon \quad .
\end{aligned}$$

□

7.4 Fehlerabschätzung und Konvergenzsatz

7.4.1 Projektionsfehlerabschätzung

Auch in dem Fall der allgemeineren, in den letzten Kapiteln betrachteten Differentialgleichung ist es zum Beweis der Fehlerabschätzung für die Linienmethode erforderlich, zuvor den Projektionsfehler zu betrachten, der dadurch entsteht, daß man die (zuvor unter Umständen gestörten Daten) in den Raum D_M^a projiziert. In Analogie zu Satz 4.2.3 formuliert man den folgenden

Satz 7.4.1 *Sei $M < N$ und Cauchy-Daten $\phi_1 \in D^a$ (zur Definition von D^a siehe (6.16)) gegeben. Darüberhinaus gelte die Beschränktheitsbedingung*

$$N_a(r_{max}) \leq E^2 \quad (7.141)$$

am oberen Rand. Dann gilt mit der Bezeichnung

$$\phi_1^* := \bar{P}_M(\phi_1) \stackrel{(7.106)}{=} \sum_{k=1}^M (\phi_1, v_k)_a v_k \quad (7.142)$$

die Projektionsfehlerabschätzung

$$\|\phi_1 - \phi_1^*\|_a \leq C^{(15)} \frac{EM}{\exp\left(\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} M \pi r_{max}\right)} \quad (7.143)$$

mit der Konstanten

$$C^{(15)} = \sqrt{\frac{R_a^3}{r_a^3}} \cdot \frac{2}{\left(1 - \exp\left(-4\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi r_{max}\right)\right) r_{max}^2} \quad (7.144)$$

Beweis:

Nach Satz 6.2.18 besitzt die Funktion $\phi_1 \in D^a$ die gleichmäßig und absolut konvergente Entwicklung

$$\phi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\phi_1, v_k)_a v_k(x) \quad (7.145)$$

Für die Differenz $\phi_1 - \phi_1^*$ ergibt sich daraus

$$\phi_1 - \phi_1^* = \sum_{k=M+1}^{\infty} (\phi_1, v_k)_a v_k(x) \quad (7.146)$$

und nach der verallgemeinerten Parsevalschen Gleichung (Satz 6.2.21) folgt

$$\|\phi_1 - \phi_1^*\|_a^2 = \sum_{k=M+1}^{\infty} (\phi_1, v_k)_a^2 \quad (7.147)$$

Die Beschränktheitsvoraussetzung (7.141) bedeutet nach (6.27) nichts anderes als

$$N_a(r_{max}) = \|u(\cdot, r_{max})\|_a^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\phi_1, v_k)_a^2}{\lambda_k} \sinh^2(\sqrt{\lambda_k} r_{max}) \leq E^2 \quad .$$

Das Gewicht des einzelnen Summanden innerhalb der Summe ist unbekannt und daher kann man an dieser Stelle nur die Beschränktheit jedes einzelnen Summanden durch die Schranke für die ganze Summe, also

$$\begin{aligned} \frac{(\phi_1, v_k)_a^2}{\lambda_k} \sinh^2(\sqrt{\lambda_k} r_{max}) &\leq E^2 \\ \Rightarrow (\phi_1, v_k)_a^2 &\leq \frac{E^2 \lambda_k}{\sinh^2(\sqrt{\lambda_k} r_{max})} \end{aligned} \quad (7.148)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ schlußfolgern.

Wir setzen nun $\gamma := \sqrt{\frac{r_a}{R_a}} > 0$, $\alpha := \gamma \pi r_{max} > 0$ und wenden Lemma 4.2.1 an. Nach Teil (a) dieses Lemmas existiert zu α eine Konstante $\beta = \beta_0 = \frac{1}{2}(1 - \exp(-4\alpha))$, so daß

$$\sinh(k\alpha) \geq \beta \exp(k\alpha) \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2 \quad (7.149)$$

gilt und nach Teil (b) desselben Lemmas hat man

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+M)^2}{\exp(2\gamma k \pi r_{max})} \leq C_0^2(r_{max}) M^2 \quad (7.150)$$

mit einer Konstanten

$$C_0(r_{max}) \leq \frac{1}{\pi \gamma^2 r_{max}^2} = \frac{R_a}{r_a \pi r_{max}^2} \quad (7.151)$$

Nun können wir ansetzen, um mittels der gerade gezeigten Zusammenhänge

$$\begin{aligned}
& \|\phi_1 - \phi_1^*\|_a^2 \\
(7.147) \quad & \stackrel{=}{=} \sum_{k=M+1}^{\infty} (\phi_1, v_k)_a^2 \\
(7.148) \quad & \leq E^2 \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\sinh^2(\sqrt{\lambda_k} r_{max})} \\
(6.20) \quad & \leq \frac{R_a}{r_a} E^2 \pi^2 \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{k^2}{\sinh^2\left(\underbrace{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} k \pi r_{max}}_{=\gamma}\right)} \\
(7.149) \quad & \leq \frac{R_a}{r_a} \left(\frac{E\pi}{\beta}\right)^2 \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{k^2}{\exp(2\gamma k \pi r_{max})} \\
& = \frac{R_a}{r_a} \left(\frac{E\pi}{\beta \exp(\gamma M \pi r_{max})}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+M)^2}{\exp(2\gamma k \pi r_{max})} \\
(7.150) \quad & \leq \frac{R_a}{r_a} \left(\frac{E\pi C_0(r_{max})M}{\beta \exp(\gamma M \pi r_{max})}\right)^2 \\
(7.151) \quad & \leq \frac{R_a^3}{r_a^3} \left(\frac{EM}{\beta r_{max}^2 \exp(\gamma M \pi r_{max})}\right)^2,
\end{aligned}$$

also nach Radizieren und Einsetzen von α, β, γ die behauptete Projektionsfehlerabschätzung

$$\begin{aligned}
& \|\phi_1 - \phi_1^*\|_a \\
& \leq \sqrt{\frac{R_a^3}{r_a^3} \frac{E}{\beta r_{max}^2}} \cdot \frac{M}{\exp(\gamma M \pi r_{max})} \\
& = \sqrt{\frac{R_a^3}{r_a^3}} \cdot \frac{2E}{\left(1 - \exp\left(-4\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi r_{max}\right)\right) r_{max}^2} \cdot \frac{M}{\exp\left(\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} M \pi r_{max}\right)} \\
& = C^{(15)} \frac{M}{\exp\left(\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} M \pi r_{max}\right)}
\end{aligned}$$

zu beweisen. □

Im folgenden wird es nötig sein, die Ergebnisse, die wir im Diskreten erzielt haben und die im kontinuierlichen bewiesenen Resultate zusammenzuführen.

Lemma 7.4.2 *Zu $v_{k,h}$, $k = 1, \dots, M$ existiert jeweils eine Fortsetzung $\bar{v}_{k,h} \in C^2[0, 1]$ und Konstanten $C^{(18)}, h^{(18)} > 0$, so daß für alle $h \leq h^{(18)}$*

$$\|v_k - \bar{v}_{k,h}\|_a \leq C^{(18)} \sqrt{h} \quad (7.152)$$

gilt. Ohne Einschränkung sind die Konstanten $C^{(18)}$ und $h^{(18)}$ gleichmäßig für $k = 1, \dots, M$ gültig (andernfalls geht man zum Maximum über).

Beweis:

Definiere zu $v_{k,h}$, $k = 1, \dots, M$ die Fortsetzung $\bar{v}_{k,h}$, $k = 1, \dots, M$ nach demselben Verfahren, wie wir es ausführlich im Beweis der sechsten Behauptung innerhalb des Beweises von Satz 5.32 durchgeführt und analysiert haben (vergleiche dazu auch Lemma 7.1.1).

In Analogie zu (7.51) und (7.52) hat man auf $I_l = [x_l, x_{l+1}]$ ($0 \leq l \leq N-1$)

$$|\bar{v}_{k,h}(x)| \leq C_0^{(k,l)}, \quad x \in I_l \quad (7.153)$$

und

$$|\bar{v}'_{k,h}(x)| \leq C_1^{(k,l)}, \quad x \in I_l \quad (7.154)$$

Die Abschätzungen (7.53) und (7.54) bleiben in ihrer Form unverändert.

Daher kann man die Ableitung von $\bar{v}_{k,h}^2 a$ auf I_l mittels

$$\begin{aligned} & |(\bar{v}_{k,h}^2 a)'(x)| \\ \leq & 2|\bar{v}_{k,h}(x)| \cdot |\bar{v}'_{k,h}(x)| \cdot \underbrace{|a(x)|}_{\leq R_a} + |\bar{v}_{k,h}^2(x)| \cdot |a'(x)| \\ \stackrel{(7.153), (7.154)}{\leq} & 2C_0^{k,l} C_1^{(k,l)} R_a + \left(C_0^{(k,l)}\right)^2 R'_a \\ \stackrel{(7.53), (7.54)}{\leq} & (2 \cdot 64 \cdot 241 R_a + 64^2 R'_a) \left(\max \left(|v_{k,h}(x_l)|, |m_l^{(k)}|, |m_{l-1}^{(k)}| \right) \right)^2 \\ = & 128(241 R_a + 32 R'_a) \max \left(|v_{k,h}(x_l)|^2, |m_l^{(k)}|^2, |m_{l-1}^{(k)}|^2 \right), \quad x \in I_l \quad (7.155) \end{aligned}$$

nach oben beschränken.

Analog zu (7.55) folgt dann zunächst durch Approximation des Integrals auf $I_l = [x_l, x_{l+1}]$ durch die Sehnenrapezformel

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_l}^{x_{l+1}} \bar{v}_{k,h}^2(x) a(x) dx - h \frac{\bar{v}_{k,h}^2(x_l) a(x_l) + \bar{v}_{k,h}^2(x_{l+1}) a(x_{l+1})}{2} \right| \\ \leq & 128(241 R_a + 32 R'_a) \max \left(|v_{k,h}(x_l)|^2, |m_l^{(k)}|^2, |m_{l-1}^{(k)}|^2 \right) h^2 \quad (7.156) \end{aligned}$$

und anschließend in Analogie zu (7.56)

$$\begin{aligned} & \left| \|\bar{v}_{k,h}\|_a^2 - 1 \right| \\ = & \left| \|\bar{v}_{k,h}\|_a^2 - \|v_{k,h}\|_{0,a}^2 \right| \\ = & \left| \sum_{l=0}^{N-1} \int_{x_l}^{x_{l+1}} \bar{v}_{k,h}^2(x) a(x) dx - h \frac{\bar{v}_{k,h}^2(x_l) a(x_l) + \bar{v}_{k,h}^2(x_{l+1}) a(x_{l+1})}{2} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{l=0}^{N-1} \left| \int_{x_l}^{x_{l+1}} \bar{v}_{k,h}^2(x) a(x) dx - h \frac{\bar{v}_{k,h}^2(x_l) a(x_l) + \bar{v}_{k,h}^2(x_{l+1}) a(x_{l+1})}{2} \right| \\
(7.156) \quad &\leq \sum_{l=0}^{N-1} 128(241R_a + 32R'_a) \max \left(|v_{k,h}(x_l)|^2, |m_l^{(k)}|^2, |m_{l-1}^{(k)}|^2 \right) h^2 \quad (7.157)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{\text{Vgl. (7.56)}}{\leq} 128(241R_a + 32R'_a) \cdot 6h \|v_{k,h}\|_{-1} \\
(5.57) \quad &\leq \frac{768(241R_a + 32R'_a)}{r_a} h \|v_{k,h}\|_{-1,a}^2 \\
(5.49) \quad &\stackrel{=}{=} \frac{768(241R_a + 32R'_a)}{r_a} h \lambda_{k,h} \\
(5.50) \quad &\leq \frac{768(241R_a + 32R'_a)}{r_a h} h \lambda_{M,h} \\
(5.58) \quad &\leq \underbrace{\frac{768(241R_a + 32R'_a) R_a M^2 \pi^2}{r_a^2}}_{=: C^{(16)}} h \\
&= C^{(16)} h, \quad (7.158)
\end{aligned}$$

also $\lim_{h \rightarrow 0} \|\bar{v}_{k,h}\|_a = 1$ und insbesondere $\|\bar{v}_{k,h}\|_a - 1 = O(h)$.

Als nächstes untersuchen wir auf dieselbe Weise $|(v_k, \bar{v}_{k,h})_a - (v_k^h, v_{k,h})_{0,a}|$. Da man mit derselben Technik wie in (7.155) unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned}
&v_k \in C^2[0, 1] \\
\implies &\exists C_M, C'_M > 0 \forall k = 1, \dots, M \forall x \in [0, 1] : |v_k(x)| \leq C_M, |v'_k(x)| \leq C'_M \quad (7.159)
\end{aligned}$$

die erste Ableitung von $v_k \bar{v}_{k,h} a$ auf I_l mittels

$$\begin{aligned}
&|(v_k \bar{v}_{k,h} a)'(x)| \\
&\leq |v'_k(x)| \cdot |\bar{v}_{k,h}(x)| \cdot |a(x)| + |v_k(x)| \cdot |\bar{v}'_{k,h}(x)| \cdot |a(x)| + |v_k(x)| \cdot |\bar{v}_{k,h}(x)| \cdot |a'(x)| \\
(7.153), (7.154), (7.159) \quad &\leq C'_M C_0^{(k,l)} R_a + C_M C_1^{(k,l)} R_a + C_M C_0^{(k,l)} R'_a \\
(7.53), (7.54) \quad &\leq (64C'_M R_a + 241C_M R_a + 64C_M R'_a) \max \left(|v_{k,h}(x_l)|, |m_l^{(k)}|, |m_{l-1}^{(k)}| \right) \\
\alpha \leq \max(\alpha^2, 1) \quad &\leq (64C'_M R_a + 241C_M R_a + 64C_M R'_a) \max \left(|v_{k,h}(x_l)|^2, |m_l^{(k)}|^2, |m_{l-1}^{(k)}|^2, 1 \right)
\end{aligned}$$

nach oben abschätzen kann, folgt auch hier zunächst für den Quadraturfehler auf I_l bei Approximation durch die Sehnentrapezformel

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{x_l}^{x_{l+1}} v_k(x) \bar{v}_{k,h}(x) a(x) dx - h \frac{v_k(x_l) \bar{v}_{k,h}(x_l) a(x_l) + \bar{v}_{k,h}(x_{l+1}) v_k(x_{l+1}) a(x_{l+1})}{2} \right| \\
&\leq (64C'_M R_a + 241C_M R_a + 64C_M R'_a) \max \left(|v_{k,h}(x_l)|^2, |m_l^{(k)}|^2, |m_{l-1}^{(k)}|^2, 1 \right) h^2 \quad (7.160)
\end{aligned}$$

und anschließende Summation und Abschätzung wie schon zuvor in (7.56) beziehungsweise (7.158) liefert dann

$$\begin{aligned}
& |(v_k, \bar{v}_{k,h})_a - (v_k^h, v_{k,h})_{0,a}| \\
= & \left| \sum_{l=0}^{N-1} \int_{x_l}^{x_{l+1}} v_k(x) \bar{v}_{k,h}(x) a(x) dx - h \frac{v_k(x_l) \bar{v}_{k,h}(x_l) a(x_l) + v_k(x_{l+1}) \bar{v}_{k,h}(x_{l+1}) a(x_{l+1})}{2} \right| \\
\leq & \sum_{l=0}^{N-1} \left| \int_{x_l}^{x_{l+1}} v_k(x) \bar{v}_{k,h}(x) a(x) dx - h \frac{v_k(x_l) \bar{v}_{k,h}(x_l) a(x_l) + v_k(x_{l+1}) \bar{v}_{k,h}(x_{l+1}) a(x_{l+1})}{2} \right| \\
(7.160) \quad \leq & \sum_{l=0}^{N-1} (64C'_M R_a + 241C_M R_a + 64C_M R'_a) \max \left(|v_{k,h}(x_l)|^2, |m_l^{(k)}|^2, |m_{l-1}^{(k)}|^2, 1 \right) h^2 \\
\text{Vgl. (7.56)} \quad \leq & (64C'_M R_a + 241C_M R_a + 64C_M R'_a) \cdot h (6\|v_{k,h}\|_{-1} + 1) \\
(5.57) \quad \leq & \frac{64C'_M R_a + 241C_M R_a + 64C_M R'_a}{r_a} h (\|v_{k,h}\|_{-1,a}^2 + r_a) \\
(5.49) \quad = & \frac{64C'_M R_a + 241C_M R_a + 64C_M R'_a}{r_a} h (\lambda_{k,h} + r_a) \\
(5.50) \quad \leq & \frac{64C'_M R_a + 241C_M R_a + 64C_M R'_a}{r_a} h (\lambda_{M,h} + r_a) \\
(5.58) \quad \leq & \underbrace{\frac{(64C'_M R_a + 241C_M R_a + 64C_M R'_a) \cdot (R_a M^2 \pi^2 + r_a^2)}{r_a^2}}_{=: \tilde{C}^{(17)}} h \\
= & \tilde{C}^{(17)} h, \quad . \tag{7.161}
\end{aligned}$$

Man folgert nun weiter

$$\begin{aligned}
& |(v_k, \bar{v}_{k,h})_a - 1| \\
= & |(v_k, \bar{v}_{k,h})_a - (v_{k,h}, v_{k,h})_{0,a}| \\
\leq & |(v_k, \bar{v}_{k,h})_a - (v_k^h, v_{k,h})_{0,a}| + |(v_k^h, v_{k,h})_{0,a} - (v_{k,h}, v_{k,h})_{0,a}| \\
= & |(v_k, \bar{v}_{k,h})_a - (v_k^h, v_{k,h})_{0,a}| + |(v_k^h - v_{k,h}, v_{k,h})_{0,a}| \\
\text{Cauchy-Schwarz} \quad \leq & |(v_k, \bar{v}_{k,h})_a - (v_k^h, v_{k,h})_{0,a}| + \|v_k^h - v_{k,h}\|_{0,a} \cdot \underbrace{\|v_{k,h}\|_{0,a}}_{=1} \\
(7.161), (7.82) \quad \leq & \tilde{C}^{(17)} h + C^{(8)} h \\
= & \underbrace{(\tilde{C}^{(17)} + C^{(8)})}_{=: C^{(17)}} h \\
= & C^{(17)} h, \tag{7.162}
\end{aligned}$$

also $\lim_{h \rightarrow 0} (v_k, \bar{v}_{k,h})_a = 1$ und insbesondere $(v_k, \bar{v}_{k,h})_a - 1 = O(h)$.

Daraus ergibt sich nahtlos

$$\begin{aligned}
 &= \|v_k - \bar{v}_{k,h}\|_a^2 \\
 &= \underbrace{\|v_k\|_a^2}_{=1} - 2(v_k, \bar{v}_{k,h})_a + \|\bar{v}_{k,h}\|_a^2 \\
 &\stackrel{(7.162), (7.158)}{\leq} 1 - 2(1 - C^{(17)}h) + (1 + C^{(16)}h) \\
 &= \underbrace{(2C^{(17)} + C^{(16)})h}_{=: (C^{(18)})^2}
 \end{aligned}$$

für hinreichend kleines h , womit alles bewiesen ist. □

7.4.2 Formulierung und Beweis der Hauptergebnisse

Wir werden im folgenden weitgehend dieselben Lösungsbezeichnungen, wie wir sie schon für das Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung in der Tabelle 4.1 zusammengestellt haben, verwenden.

In der folgenden Verallgemeinerung von Lemma 4.2.5 muß nun statt der L_2 -Norm die a -Norm verwendet werden und auf die Resultate (insbesondere den Stabilitätssatz), die wir für die allgemeinere elliptische Differentialgleichung (siehe Problem 5.1.4, vergleiche auch (5.1)) hergeleitet haben, zurückgegriffen werden.

Lemma 7.4.3 (a) Aus $\|u(\cdot, r_{max})\|_a \leq E$ folgt auch $\|(u - u^*)(\cdot, r_{max})\|_a \leq E$.

(b) Es gilt die Abschätzung

$$\|(u - u^*)(\cdot, y)\|_a \leq C^{(19)} E \left(\frac{M}{\exp\left(\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} M \pi r_{max}\right)} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \quad (7.163)$$

mit den Konstanten

$$\begin{aligned}
 C^{(19)} &:= R_1 \max(1, C^{(15)}), \\
 C^{(15)} &\stackrel{(7.144)}{=} \sqrt{\frac{R_a^3}{r_a^3}} \cdot \frac{2}{\left(1 - \exp\left(-4\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi r_{max}\right)\right) r_{max}^2}, \\
 R_1 &= \max(1, r_{max}) \quad .
 \end{aligned}$$

(c) Es sei $(\phi_1)_\varepsilon(x) = \phi_1(x) + z(x) \cdot \varepsilon$ mit einer zufälligen (Störungs-)funktion $z \in D^a$, $-1 \leq z(x) \leq 1$. Dann besitzt $(\phi_1)_\varepsilon$ die Darstellung

$$(\phi_1)_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} (\phi_1 + z\varepsilon, v_k)_a v_k \quad (7.164)$$

und die zu u_ε^* gehörigen Daten $(\phi_1)_\varepsilon^*$ lassen sich als

$$(\phi_1)_\varepsilon^* = \sum_{k=1}^M (\phi_1 + z\varepsilon, v_k)_a v_k \quad (7.165)$$

schreiben.

(d) Es besteht die Gleichung

$$\phi_1^* - (\phi_1)_\varepsilon^* = \sum_{k=1}^M (z\varepsilon, v_k)_a v_k \quad (7.166)$$

und für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq M$ die Abschätzung

$$(\phi_1^* - (\phi_1)_\varepsilon^*, v_k)_a \stackrel{(7.166)}{=} (z\varepsilon, v_k)_a \leq R_a \varepsilon \quad . \quad (7.167)$$

(e) Es gilt die Abschätzung

$$\|(u^* - u_\varepsilon^*)(\cdot, y)\|_a \leq \frac{R_a C(y) \sinh\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} M \pi y\right)}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} M \pi} \varepsilon \quad (7.168)$$

mit einer Konstanten $C(y) = C(y, \gamma) = C\left(y, \sqrt{\frac{R_a}{r_a}}\right)$ (siehe Beweis für Details).

Beweis:

Zu (a):

$u - u^*$ löst wegen der Linearität des Operators L_a (siehe Satz 5.1.2) und der Homogenität der Dirichlet-Daten und der rechten Seite (siehe Bemerkung 5.1.3) das Cauchy-Problem 5.1.4 zu den Neumann-Daten

$$\phi_1 - \phi_1^* \stackrel{(7.146)}{=} \sum_{k=M+1}^{\infty} (\phi_1, v_k)_a v_k(x) \quad . \quad (7.169)$$

Da folglich die ersten M verallgemeinerten Fourierkoeffizienten von $\phi_1 - \phi_1^*$ verschwinden und die restlichen mit den entsprechenden Fourierkoeffizienten von ϕ_1 übereinstimmen, folgt für die Norm der Lösung

$$\begin{aligned} & \|(u - u^*)(\cdot, r_{max})\|_a^2 \\ \stackrel{(6.27), (7.169)}{=} & \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{(\phi_1, v_k)_a^2}{\lambda_k} \sinh^2\left(\sqrt{\lambda_k} r_{max}\right) \\ \leq & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\phi_1, v_k)_a^2}{\lambda_k} \sinh^2\left(\sqrt{\lambda_k} r_{max}\right) \\ \stackrel{(6.27)}{=} & \|u(\cdot, r_{max})\|_a^2 \\ \stackrel{\text{Vor.}}{\leq} & E^2 \end{aligned}$$

und daraus durch einfaches Radizieren die Behauptung (a).

Zu (b):

Da die Funktion $u - u^*$ die Voraussetzungen des Stabilitätssatzes 6.3.6 zu Daten $\phi_1 - \phi_1^*$ erfüllt, wobei hier insbesondere nach Teil (a) des vorliegenden Lemmas Ungleichung (6.41) gilt, schließt man durch Anwendung dieses Satzes und des Satzes 7.4.1

$$\begin{aligned}
& \| (u - u^*)(\cdot, y) \|_a \\
(6.46) \quad & \leq R_1 E^{\frac{y}{r_{max}}} \| \phi_1 - \phi_1^* \|_a^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \\
(7.143) \quad & \leq R_1 E^{\frac{y}{r_{max}}} \left(C^{(15)} \frac{EM}{\exp\left(\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} M \pi r_{max}\right)} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \\
& = R_1 E \left(C^{(15)} \frac{M}{\exp\left(\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} M \pi r_{max}\right)} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \\
& = R_1 (C^{(15)})^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \left(\frac{M}{\exp\left(\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} M \pi r_{max}\right)} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \\
& \leq \underbrace{R_1 \max(1, C^{(15)})}_{=C^{(19)}} E \left(\frac{M}{\exp\left(\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} M \pi r_{max}\right)} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}}
\end{aligned}$$

und zeigt so Teil (b) des vorliegenden Lemmas

Zu (c):

Wegen

$$(\phi_1)_\varepsilon = \underbrace{\phi_1}_{\in D^a} + \underbrace{z}_{\in D^a} \varepsilon \in D^a$$

folgt aus Satz 6.2.18 die Gültigkeit der Entwicklung (7.164) und aus (7.106) ist unmittelbar die Behauptung (7.165) ersichtlich.

Zu (d):

Man subtrahiert (7.165) von (7.142) und erhält so (7.166).

Zum Beweis der Abschätzung (7.167) dient

$$\begin{aligned}
& (z\varepsilon, v_k)_a \\
\text{Cauchy-Schwarz} \quad & \leq \|z\varepsilon\|_a \cdot \underbrace{\|v_k\|_a}_{=1} \\
& = \varepsilon \int_0^1 \underbrace{z^2(x)}_{\leq 1} \underbrace{a(x)}_{\leq R_a} dx \\
& \leq R_a \varepsilon \quad .
\end{aligned} \tag{7.170}$$

Zu (e):

Da $u^* - u_\varepsilon^*$ die Lösung des Cauchy-Problems 5.1.4 zu Neumann-Daten $\phi_1^* - (\phi_1)_\varepsilon^*$ ist (vergleiche auch den Beweis zu Teil (a) des vorliegenden Lemmas) und außerdem nach dem eben bewiesenen Teil (d) alle verallgemeinerten Fourierkoeffizienten dieser Daten ab dem $M + 1$ -ten verschwinden, folgt nach (6.27)

$$\begin{aligned}
& \| (u^* - u_\varepsilon^*)(\cdot, y) \|_a^2 \\
&= \sum_{k=1}^M \frac{(z_\varepsilon, v_k)_a^2}{\lambda_k} \sinh^2(\sqrt{\lambda_k} y) \\
&\stackrel{(7.167)}{\leq} R_a^2 \varepsilon^2 \sum_{k=1}^M \frac{\sinh^2(\sqrt{\lambda_k} y)}{\lambda_k} \\
&\stackrel{(6.20)}{\leq} R_a^2 \varepsilon^2 \sum_{k=1}^M \frac{\sinh^2\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} k \pi y\right)}{\frac{r_a}{R_a} k^2 \pi^2} \\
&= \frac{R_a^3}{r_a} \varepsilon^2 \sum_{k=1}^M \frac{\sinh^2\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} k \pi y\right)}{(k \pi)^2} \\
&\stackrel{(4.61), \gamma := \sqrt{\frac{R_a}{r_a}}}{\leq} \frac{R_a^3}{r_a} \varepsilon^2 C^2(y, \gamma) \frac{\sinh^2\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} M \pi y\right)}{(M \pi)^2}
\end{aligned}$$

Man radiziert und erhält wie in (7.168) behauptet

$$\| (u^* - u_\varepsilon^*)(\cdot, y) \|_a \leq \frac{R_a C(y) \sinh\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} M \pi y\right)}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} M \pi} \varepsilon$$

mit $C(y) = C(y, \gamma) = C\left(y, \sqrt{\frac{R_a}{r_a}}\right)$.

□

Damit haben wir auch im Fall der im gegenwärtigen allgemeineren Zusammenhang betrachteten Differentialgleichung mit Diffusionskoeffizienten a die nötigen Hilfsmittel für den Beweis des Hauptsatzes über die Linienmethode zur Verfügung gestellt und formulieren ihn folgendermaßen:

Satz 7.4.4 (Fehlerabschätzung für die Linienmethode, allgemeiner Fall) *Mit den Bezeichnungen des laufenden Abschnitts und den Definitionen (vergleiche auch (7.134), zur Definition von Ψ^0 siehe (5.23))*

$$\begin{aligned}
u_{\varepsilon, h}^*(y) &:= (\Psi^0)^{-1} \left((u_{1, \varepsilon}^*, \dots, u_{N-1, \varepsilon}^*)^T \right) \in \mathcal{G}_{h, 0} \\
(u_\varepsilon^*)^h(y) &:= (\Psi^0)^{-1} \left((u_\varepsilon^*(lh, y))_{l=1, \dots, N-1} \right)
\end{aligned}$$

läßt sich $u_{\varepsilon,h}^*$ so zu einer Funktion $\overline{u_{\varepsilon,h}^*}$ fortsetzen, daß bei Gültigkeit insbesondere der Voraussetzungen (6.28) und (7.141) beziehungsweise (6.41) die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} & \| (u - \overline{u_{\varepsilon,h}^*})(\cdot, y) \|_a \\ & \leq C^{(19)} E \left(\frac{M}{\exp \left(\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} M \pi r_{max} \right)} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \\ & \quad + \frac{R_a C(y)}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi} \frac{\sinh \left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} M \pi y \right)}{M} \varepsilon + C^{(20)}(M) \sqrt{h} \end{aligned} \quad (7.171)$$

mit den Konstanten

$$\begin{aligned} C^{(19)} & \stackrel{\text{Lemma 7.4.3 (b)}}{=} R_1 \max(1, C^{(15)}) \\ C^{(15)} & \stackrel{(7.144)}{=} \sqrt{\frac{R_a^3}{r_a^3}} \cdot \frac{2}{\left(1 - \exp \left(-4 \sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi r_{max} \right) \right) r_{max}^2} \\ R_1 & = \max(1, r_{max}) \\ C(y) & \stackrel{\text{Vgl. Bew. von (4.61)}}{=} \max \left(C_0(y), \sqrt{\frac{1}{1 - \exp \left(-\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} \pi y \right)}} \right) \\ C_0(y) & = \max_{M=1, \dots, M_0} C_M \\ C_M^2(y) & = \frac{\sum_{k=1}^M \frac{\sinh^2 \left(k \sqrt{\frac{R_a}{r_a}} \pi y \right)}{(k\pi)^2}}{\frac{\sinh^2 \left(M \sqrt{\frac{R_a}{r_a}} \pi y \right)}{(M\pi)^2}} \\ M_0 & = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\exp \left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} \pi y \right) - 1}} \right\rceil \\ C^{(20)}(M) & = M \tilde{C}^{(20)}(M) \\ \tilde{C}^{(20)}(M) & = C^{(21)} \cdot \frac{\sinh \left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} M \pi y \right)}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi} + C^{(22)} \end{aligned}$$

gilt.

Beweis:

Nach (7.109) gilt die Darstellung

$$u_{\varepsilon}^*(x, y) = \sum_{k=1}^M \frac{((\phi_1)_{\varepsilon}, v_k)_a}{\sqrt{\lambda_k}} v_k(x) \sinh \left(\sqrt{\lambda_k} y \right) \quad (7.172)$$

für die exakte Lösung zu zunächst gestörten und anschließend in den Raum D_M^a projizierten Daten $(\phi_1)_\varepsilon^*$.

Wir definieren nun

$$\overline{u_{\varepsilon,h}^*}(x, y) := \sum_{k=1}^M \frac{((\phi_1)_\varepsilon^h, v_{k,h})_{0,a}}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} \overline{v}_{k,h}(x) \sinh\left(\sqrt{\lambda_{k,h}}y\right) \quad (7.173)$$

als Fortsetzung (diese Eigenschaft folgt aus (7.110)) der Lösung der Linienmethode zu gestörten, anschließend diskretisierten und schließlich auf $D_M^{a,h}$ projizierten Daten $((\phi_1)_\varepsilon^h)^*$. Dabei sind die Funktionen $\overline{v}_{k,h}$, $k = 1, \dots, N-1$ die nach Lemma 7.4.2 existierenden Fortsetzungen der Basisgitterfunktionen $v_{k,h}$, $k = 1, \dots, N-1$.

Damit gilt dann

$$\begin{aligned} & \| (u_\varepsilon^* - \overline{u_{\varepsilon,h}^*})(\cdot, y) \|_a \\ (7.172), (7.173) \quad & \leq \left\| \sum_{k=1}^M \frac{((\phi_1)_\varepsilon, v_k)_a}{\sqrt{\lambda_k}} v_k(\cdot) \sinh\left(\sqrt{\lambda_k}y\right) - \frac{((\phi_1)_\varepsilon^h, v_{k,h})_{0,a}}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} \overline{v}_{k,h}(\cdot) \sinh\left(\sqrt{\lambda_{k,h}}y\right) \right\|_a \\ & \leq \sum_{k=1}^M \left\| \frac{((\phi_1)_\varepsilon, v_k)_a}{\sqrt{\lambda_k}} v_k(\cdot) \sinh\left(\sqrt{\lambda_k}y\right) - \frac{((\phi_1)_\varepsilon^h, v_{k,h})_{0,a}}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} \overline{v}_{k,h}(\cdot) \sinh\left(\sqrt{\lambda_{k,h}}y\right) \right\|_a \end{aligned} \quad (7.174)$$

Eine Untersuchung der einzelnen Summenterme liefert

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{((\phi_1)_\varepsilon, v_k)_a}{\sqrt{\lambda_k}} v_k(\cdot) \sinh\left(\sqrt{\lambda_k}y\right) - \frac{((\phi_1)_\varepsilon^h, v_{k,h})_{0,a}}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} \overline{v}_{k,h}(\cdot) \sinh\left(\sqrt{\lambda_{k,h}}y\right) \right\|_a \\ & \leq \left\| \frac{((\phi_1)_\varepsilon, v_k)_a}{\sqrt{\lambda_k}} v_k(\cdot) \sinh\left(\sqrt{\lambda_k}y\right) - \frac{((\phi_1)_\varepsilon, v_k)_a}{\sqrt{\lambda_k}} \overline{v}_{k,h}(\cdot) \sinh\left(\sqrt{\lambda_k}y\right) \right\|_a \\ & \quad + \left\| \frac{((\phi_1)_\varepsilon, v_k)_a}{\sqrt{\lambda_k}} \overline{v}_{k,h}(\cdot) \sinh\left(\sqrt{\lambda_k}y\right) - \frac{((\phi_1)_\varepsilon^h, v_{k,h})_{0,a}}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} \overline{v}_{k,h}(\cdot) \sinh\left(\sqrt{\lambda_{k,h}}y\right) \right\|_a \\ & = \left| \frac{((\phi_1)_\varepsilon, v_k)_a}{\sqrt{\lambda_k}} \sinh\left(\sqrt{\lambda_k}y\right) \right| \cdot \|v_k - \overline{v}_{k,h}\|_a \\ & \quad + \left| \frac{((\phi_1)_\varepsilon, v_k)_a}{\sqrt{\lambda_k}} \sinh\left(\sqrt{\lambda_k}y\right) - \frac{((\phi_1)_\varepsilon^h, v_{k,h})_{0,a}}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} \sinh\left(\sqrt{\lambda_{k,h}}y\right) \right| \cdot \|\overline{v}_{k,h}\|_a \end{aligned} \quad (7.175)$$

Nun wenden wir Lemma 7.1.6 mit

$$\begin{aligned}
b_h &= ((\phi_1)_\varepsilon^h, v_{k,h})_{0,a} \\
b &= ((\phi_1)_\varepsilon, v_k)_a \\
c_h &= \sinh\left(\sqrt{\lambda_{k,h}}y\right) \\
c &= \sinh\left(\sqrt{\lambda_k}y\right) \\
d_h &= \sqrt{\lambda_{k,h}} \\
d &= \sqrt{\lambda_k} \\
C_0 &= \max\left(\|(\phi_1)_\varepsilon\|_a, \sinh\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}}M\pi r_{max}\right)\right) \\
C_1 &= \sqrt{\frac{r_a}{R_a}}\pi \\
C_2 &= \max\left(\tilde{C}^{(6)}, C^{(9)}, C^{(10)}\right) \\
h_2 &= \min\left(\tilde{h}^{(6)}, h^{(9)}, h^{(10)}\right)
\end{aligned}$$

an, denn die ersten beiden Voraussetzungen von Lemma 7.1.6 sind aufgrund von Lemma 7.2.7 erfüllt (ersetze dort in Teil (c) lediglich ϕ_1 durch $(\phi_1)_\varepsilon$) und die dritte Voraussetzung gilt wegen

$$|b| = |((\phi_1)_\varepsilon, v_k)_a| \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|(\phi_1)_\varepsilon\|_a \cdot \underbrace{\|v_k\|_a}_{=1} = \|(\phi_1)_\varepsilon\|_a \leq C_0 \quad (7.176)$$

und

$$\begin{aligned}
&|c| \\
&= \sinh\left(\sqrt{\lambda_k}y\right) \\
&\stackrel{\text{Satz 6.2.15 (b)}}{\leq} \sinh\left(\sqrt{\lambda_M}y\right) \\
&\leq \sinh\left(\sqrt{\lambda_M}r_{max}\right) \\
&\stackrel{(6.20)}{\leq} \sinh\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}}M\pi r_{max}\right) \leq C_0
\end{aligned}$$

sowie

$$|d| = \sqrt{\lambda_k} \stackrel{\text{Satz 6.2.15 (b)}}{\geq} \sqrt{\lambda_1} \stackrel{(6.20)}{\geq} \sqrt{\frac{r_a}{R_a}}\pi = C_1$$

ebenfalls. Das Lemma 7.1.6 liefert somit

$$\exists C_3 > 0 \exists h_3 > 0 \forall h \leq h_3 : \left| \frac{bc}{d} - \frac{b_h c_h}{d_h} \right| \leq C_3 h \quad . \quad (7.177)$$

Weiter beachtet man noch, daß wegen

$$\begin{aligned}
& |((\phi_1)_\varepsilon, v_k)_a| \\
&= |(\phi_1 + z\varepsilon, v_k)_a| \\
&\leq |(\phi_1, v_k)_a| + |(z\varepsilon, v_k)_a| \\
&\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|\phi_1\|_a \cdot \underbrace{\|v_k\|_a}_{=1} + \|z\varepsilon\|_a \cdot \|v_k\|_a \\
&\stackrel{(7.170)}{\leq} \|\phi_1\|_a + \varepsilon R_a \quad , \quad k = 1, \dots, M
\end{aligned}$$

und

$$\left| \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_k}y)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \stackrel{\text{Satz 6.2.15 (b)}}{\leq} \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_1}y)}{\sqrt{\lambda_1}} \stackrel{(6.20)}{\leq} \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} M \pi y\right)}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi}, \quad k = 1, \dots, M$$

klarerweise

$$\left| \frac{((\phi_1)_\varepsilon, v_k)_a}{\sqrt{\lambda_k}} \sinh(\sqrt{\lambda_k}y) \right| \leq (\|\phi_1\|_a + \varepsilon R_a) \cdot \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} M \pi y\right)}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi}, \quad k = 1, \dots, M \quad (7.178)$$

gilt, und folgert insgesamt in Fortsetzung der Abschätzung (7.175)

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{((\phi_1)_\varepsilon, v_k)_a}{\sqrt{\lambda_k}} \sinh(\sqrt{\lambda_k}y) \right| \cdot \|v_k - \bar{v}_{k,h}\|_a \\
&+ \left| \frac{((\phi_1)_\varepsilon, v_k)_a}{\sqrt{\lambda_k}} \sinh(\sqrt{\lambda_k}y) - \frac{((\phi_1)_\varepsilon^h, v_{k,h})_{0,a}}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} \sinh(\sqrt{\lambda_{k,h}}y) \right| \cdot \|\bar{v}_{k,h}\|_a \\
&\stackrel{(7.177), (7.178)}{\leq} (\|\phi_1\|_a + \varepsilon R_a) \cdot \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} M \pi y\right)}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi} \cdot \|v_k - \bar{v}_{k,h}\|_a + C_3 h \cdot \|\bar{v}_{k,h}\|_a \\
&\stackrel{(7.152), (7.158)}{\leq} (\|\phi_1\|_a + \varepsilon R_a) \cdot \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} M \pi y\right)}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi} \cdot C^{(18)} \sqrt{h} + C_3 h (1 + C^{(16)}) \\
&\stackrel{\varepsilon, h < 1}{\leq} \underbrace{(\|\phi_1\|_a + R_a) \cdot C^{(18)}}_{=: C^{(21)}} \cdot \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} M \pi y\right)}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi} \sqrt{h} + \sqrt{h} \underbrace{C_3 (1 + C^{(16)})}_{=: C^{(22)}} \\
&= \tilde{C}^{(20)} \sqrt{h}
\end{aligned}$$

mit der Konstanten

$$\tilde{C}^{(20)} = \tilde{C}^{(20)}(M) = C^{(21)} \cdot \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} M \pi y\right)}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi} + C^{(22)} \quad .$$

Dies nutzt man aus, um die in (7.174) begonnene Abschätzung der kompletten Summe mittels

$$\begin{aligned}
& \| (u_\varepsilon^* - \overline{u_{\varepsilon,h}^*})(\cdot, y) \|_a \\
& \leq \sum_{k=1}^M \left\| \frac{((\phi_1)_\varepsilon, v_k)_a}{\sqrt{\lambda_k}} v_k(\cdot) \sinh(\sqrt{\lambda_k} y) - \frac{((\phi_1)_\varepsilon^h, v_{k,h})_{0,a}}{\sqrt{\lambda_{k,h}}} \overline{v_{k,h}}(\cdot) \sinh(\sqrt{\lambda_{k,h}} y) \right\|_a \\
& \leq \underbrace{M \tilde{C}^{(20)}}_{=: C^{(20)} = C^{(20)}(M)} \sqrt{h} \\
& = C^{(20)}(M) \sqrt{h}
\end{aligned} \tag{7.179}$$

zu Ende zu bringen.

Schließlich folgt jetzt durch Betrachtung des Gesamtfehlers und seiner Aufspaltung in die einzelnen Anteile

$$\begin{aligned}
& \| (u - \overline{u_{\varepsilon,h}^*})(\cdot, y) \|_a \\
& \leq \| (u - u^*)(\cdot, y) \|_a + \| (u^* - u_\varepsilon^*)(\cdot, y) \|_a + \| (u_\varepsilon^* - \overline{u_{\varepsilon,h}^*})(\cdot, y) \|_a \\
& \stackrel{\text{Lemma 7.4.3 (b),(e),(7.179)}}{\leq} C^{(19)} E \left(\frac{M}{\exp\left(\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} M \pi r_{max}\right)} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \\
& \quad + \frac{R_a C(y)}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi} \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} M \pi y\right)}{M} \varepsilon + C^{(20)}(M) \sqrt{h}
\end{aligned}$$

die behauptete Fehlerabschätzung. □

Bemerkung 7.4.5 (Fehleranalyse) Die Fehleranteile, die in der Fehlerabschätzung (7.171) erkennbar werden, sind im wesentlichen dieselben, wie wir sie schon für den Fall der Laplace- beziehungsweise Poisson-Gleichung erhalten haben. Unterschiede liegen zum einen in der Verwendung der a -Norm anstelle der L_2 -Norm, veränderten Konstanten und in der schlechteren Konvergenzordnung des Diskretisierungsfehleranteils. Ansonsten bleiben aber die Aussagen, die wir zur Fehleranalyse in Bemerkung 4.2.7 gemacht haben, voll in Kraft. Darüberhinaus kann man, wie der folgende Satz zeigt, auch M wieder so wählen, daß man für $\varepsilon \rightarrow 0$ ein Konvergenzresultat erhält.

Satz 7.4.6 (Konvergenzsatz für die Linienmethode, allgemeiner Fall) Es seien die Voraussetzungen von Satz 7.4.4 gegeben. Wählt man dann $M = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\pi r_{max} \sqrt{\frac{R_a}{r_a}}} \right\rceil$ und $h \leq \varepsilon^2$, so konvergiert für jedes $y \in [0, r_{max})$ die (fortgesetzte) Lösung $\overline{u_{\varepsilon,h}^*}$ der Linienmethode gegen die

wahre Lösung u , wenn ε gegen 0 geht. Es gilt die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} & \|u - \overline{u_{\varepsilon,h}^*}\|_a \\ & \leq C^{(19)} E \left(\frac{\varepsilon^{\frac{r_a}{R_a}} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\pi r_{max} \sqrt{\frac{R_a}{r_a}}} + \varepsilon^{\frac{r_a}{R_a}} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} + \frac{R_a^2 r_{max} C(y) \exp\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} \pi y\right)}{r_a} \cdot \frac{\varepsilon^{1 - \frac{y}{r_{max}}}}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \\ & + C^{(23)} \varepsilon^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) . \end{aligned}$$

Beweis:

Wählt man M und h so wie angegeben, so folgt mit

$$\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} M \pi r_{max} \geq \sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\pi r_{max} \sqrt{\frac{R_a}{r_a}}} \pi r_{max} = \frac{r_a}{R_a} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left(\frac{M}{\exp\left(\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} M \pi r_{max}\right)} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \\ & \leq \left(\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\pi r_{max} \sqrt{\frac{R_a}{r_a}}} + 1 \right) \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{r_a}{R_a} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \\ & = \left(\frac{\varepsilon^{\frac{r_a}{R_a}} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\pi r_{max} \sqrt{\frac{R_a}{r_a}}} + \varepsilon^{\frac{r_a}{R_a}} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \end{aligned}$$

und unter Ausnutzung von

$$\begin{aligned} & \sinh\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} M \pi y\right) \\ & \leq \exp\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} M \pi y\right) \\ & \leq \exp\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} \left(\frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\pi r_{max} \sqrt{\frac{R_a}{r_a}}} + 1\right) \pi y\right) \\ & = \exp\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{y}{r_{max}}\right) \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} \pi y\right) \\ & = \varepsilon^{-\frac{y}{r_{max}}} \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} \pi y\right) \end{aligned}$$

gewinnt man

$$\begin{aligned}
& \frac{\varepsilon \sinh\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} M \pi y\right)}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi M} \\
& \leq \frac{\varepsilon^{1-\frac{y}{r_{max}}} \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} \pi y\right)}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi M} \\
& \leq \frac{\varepsilon^{1-\frac{y}{r_{max}}} \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} \pi y\right)}{\frac{r_a \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{R_a r_{max}}} \\
& = \frac{\varepsilon^{1-\frac{y}{r_{max}}} \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} \pi y\right) R_a r_{max}}{r_a \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}
\end{aligned}$$

sowie (wenn man noch von $\varepsilon \leq \frac{1}{e} \implies 1 \leq \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ ausgeht und $\varepsilon \leq \varepsilon^{1-\frac{y}{r_{max}}}$ ausnutzt)

$$\begin{aligned}
& C^{(20)}(M) \cdot \sqrt{h} \\
& \leq M \tilde{C}^{(20)}(M) \varepsilon \\
& = M \left(C^{(21)} \cdot \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} M \pi y\right)}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi} + C^{(22)} \right) \varepsilon \\
& \leq M C^{(21)} \cdot \frac{\sinh\left(\exp \frac{R_a}{r_a} M \pi y\right)}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi} \varepsilon + M C^{(22)} \varepsilon \\
& \leq \left(\frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\pi r_{max} \sqrt{\frac{R_a}{r_a}}} + \underbrace{1}_{\leq \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right) \left(C^{(21)} \cdot \frac{\varepsilon^{1-\frac{y}{r_{max}}} \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} \pi y\right)}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi} + C^{(22)} \underbrace{\varepsilon}_{\leq \varepsilon^{1-\frac{y}{r_{max}}}} \right) \\
& \leq \varepsilon^{1-\frac{y}{r_{max}}} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \underbrace{\left(\frac{1}{\pi r_{max} \sqrt{\frac{R_a}{r_a}}} + 1 \right) \cdot \left(\frac{C^{(21)} \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} \pi y\right)}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi} + C^{(22)} \right)}_{=: C^{(23)}(y)} \\
& = C^{(23)}(y) \varepsilon^{1-\frac{y}{r_{max}}} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)
\end{aligned}$$

mit der Konstanten

$$C^{(23)} = C^{(23)}(y) := \left(\frac{1}{\pi r_{max} \sqrt{\frac{R_a}{r_a}}} + 1 \right) \cdot \left(\frac{C^{(21)} \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} \pi y\right)}{\sqrt{\frac{r_a}{R_a}} \pi} + C^{(22)} \right).$$

Daraus folgt nun insgesamt mit Satz 7.4.4 (Abschätzung (7.171)) die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned}
& \|u - \overline{u_{\varepsilon,h}^*}\|_a \\
\leq & C^{(19)} E \left(\frac{\varepsilon^{\frac{r_a}{R_a}} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\pi r_{max} \sqrt{\frac{R_a}{r_a}}} + \varepsilon^{\frac{r_a}{R_a}} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} + \frac{R_a^2 r_{max} C(y) \exp\left(\sqrt{\frac{R_a}{r_a}} \pi y\right)}{r_a} \cdot \frac{\varepsilon^{1 - \frac{y}{r_{max}}}}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \\
& + C^{(23)} \varepsilon^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) .
\end{aligned}$$

Die Konvergenz ist nun klar, da alle drei Fehleranteile für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen 0 konvergieren.

Um dies einzusehen, macht man sich zunächst klar, daß für beliebiges $\alpha \in (0, 1]$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \\
= & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^\alpha} \\
= & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} \\
\stackrel{\text{l'Hôpital}}{=} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} \\
= & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha \underbrace{x^\alpha}_{\rightarrow \infty (x \rightarrow \infty)}} \\
= & 0
\end{aligned} \tag{7.180}$$

gilt.

Für den ersten Anteil folgt dann daraus mit $\alpha = \frac{r_a}{R_a}$ zunächst

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\overbrace{\varepsilon^{\frac{r_a}{R_a}} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}^{\rightarrow 0 (\varepsilon \rightarrow 0)}}{\pi r_{max} \sqrt{\frac{R_a}{r_a}}} + \underbrace{\varepsilon^{\frac{r_a}{R_a}}}_{\rightarrow 0 (\varepsilon \rightarrow 0)} \right) = 0$$

und daraus die Konvergenz des gesamten Fehleranteils gegen 0 mit Hilfe der Stetigkeit der

Exponentialfunktion und des Logarithmus, denn es gilt

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{\varepsilon^{\frac{r_a}{R_a}} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\pi r_{max} \sqrt{\frac{R_a}{r_a}}} + \varepsilon^{\frac{r_a}{R_a}}}_{=: f(\varepsilon)} \right)^{1 - \frac{y}{r_{max}}} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp \left(\left(1 - \frac{y}{r_{max}} \right) \ln(f(\varepsilon)) \right) \\
 &= \exp \left(\left(1 - \frac{y}{r_{max}} \right) \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(f(\varepsilon))}_{\rightarrow -\infty (\varepsilon \rightarrow 0)} \right) \\
 &= 0;
 \end{aligned}$$

der zweite Anteil bietet wegen

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\varepsilon^{1 - \frac{y}{r_{max}}}}^{\rightarrow 0 (\varepsilon \rightarrow 0)}}{\underbrace{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}_{\rightarrow \infty (\varepsilon \rightarrow 0)}} = 0$$

keinerlei Schwierigkeiten und für den dritten Anteil schließlich folgt die Konvergenz gegen 0 ebenfalls aus (7.180) (diesmal mit $\alpha = 1 - \frac{y}{r_{max}}$).

□

Teil III

Erprobung der Linienmethode in numerischen Beispielen

Kapitel 8

Numerische Berechnungen und Beispiele

Neben der bis zu diesem Punkt im Vordergrund stehenden theoretischen Analyse der vorgestellten Linienmethode für elliptische partielle Differentialgleichungen haben wir, wie für ein numerisches Verfahren letztlich immer erforderlich, auch praktische Berechnungen anhand verschiedener Beispiele durchgeführt. Vorab kann man dazu bemerken, daß die numerischen Resultate durchweg den theoretischen Erwartungen entprochen haben, insbesondere, was den Einfluß der verschiedenen Parameter — wie etwa der Diskretisierung h , der Störung ε oder des Projektionsparameters M — auf den Fehler angeht.

Alle Programme wurden in der mathematisch orientierten Programmierumgebung MATLAB geschrieben. Die im Rahmen dieses Systems zur Verfügung gestellte graphische Benutzeroberfläche (engl. GUI – graphical user interface) erwies sich dabei als ideales Werkzeug, um interaktiv und komfortabel eine Vielzahl von verschiedenen Testfunktionen und Parameterkonstellationen für die Linienmethode zu studieren. Im Rahmen dieser Arbeit ist es zwar nicht möglich, alle diese Ergebnisse zu präsentieren, es soll jedoch eine Auswahl vorgestellt werden, die die Charakteristika der erzielten Ergebnisse beispielhaft verdeutlicht. Wir werden dabei der Übersichtlichkeit halber so vorgehen, daß in Analogie zum theoretischen Teil der vorliegenden Arbeit zunächst die Beispiele zur Laplace- beziehungsweise Poisson-Gleichung präsentiert werden (Abschnitt 8.1) und anschließend die Numerik der Linienmethode für das Cauchy-Problem für eine Differentialgleichung mit einem zusätzlichen Koeffizienten a diskutiert wird (Abschnitt 8.2). In dem anschließenden, gesonderten Abschnitt 8.3 werden wir dann die Anwendung der Linienmethode auf das Problem der Randidentifizierung und die dabei erzielten Ergebnisse dokumentieren. Innerhalb jedes dieser Abschnitte wird zunächst eine Beschreibung des jeweiligen numerischen Verfahrens vorgelegt, bevor im Anschluß daran die konkreten numerischen Beispiele diskutiert werden. Wir haben durchweg solche Beispiele gewählt, bei denen die exakte Lösung bekannt ist, um eine Möglichkeit zu haben, die Güte des Verfahrens zu beurteilen; letztlich ist natürlich eine Berechnung, bei der lediglich die — in unseren Beispielen künstlich erzeugten — Daten bekannt sind und die unbekannt Lösung bestimmt wird, Sinn und Zweck der Entwicklung der Linienmethode.

8.1 Berechnungen zur Poisson-Gleichung

Wendet man die Linienmethode auf das Cauchy-Problem für die Poisson-Gleichung an, so hat man den entscheidenden Vorteil, daß die Eigenwerte und Eigenvektoren sowohl des kontinuierlichen Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems (siehe dazu Folgerung 6.2.24) als auch der entsprechenden durch die Approximation entstehenden Matrix D_2 (siehe (2.2)) explizit bekannt sind (vergleiche Lemma 2.2.3). Gleichzeitig ist damit allerdings auch klar, daß die Linienmethode in diesem Fall weniger interessant ist, als für eine allgemeinere elliptische Gleichung, da man ja eine explizite analytische Darstellung der exakten Lösung als Reihe vorliegen hat (siehe Satz 3.4.1), auch wenn man bedenken sollte, daß in der Praxis eine solche Reihendarstellung zunächst einmal auch als eine Art Aufgabenstellung zu verstehen ist, da insbesondere wegen auftretender Rundungsfehler und nicht exakt berechenbarer Terme, wie es etwa die Fourierkoeffizienten der Daten sind, die Auswertung der Reihe auf erhebliche Schwierigkeiten stößt.

In der Tat läuft bei genauer Betrachtung die Linienmethode in diesem Fall dementsprechend neben der Diskretisierung in x -Richtung auch darauf hinaus, die entsprechende Lösungsreihe zur Berechnung an einer passenden Stelle (bestimmt durch den Projektionsparameter M) abzuschneiden und die in den einzelnen Summanden auftretenden Integrale geeignet zu approximieren.

8.1.1 Beschreibung des Verfahrens

Nachfolgende Beschreibung ist in einer Mischform aus den Schritten des zur Linienmethode gehörenden Algorithmus und erklärendem Text. Dem kundigen Leser sollte es nicht schwerfallen, daraus in einer beliebigen Programmiersprache ein entsprechendes Programm zu entwickeln.

Daten und Initialisierungen

1. Initialisiere $N, h, M, \varepsilon, (\Phi_1)_\varepsilon, r_{max}$ sowie gegebenenfalls F_1, F_2, F_3, f .

Vom Benutzer vorzugeben ist im wesentlichen der Diskretisierungsparameter N , also die Anzahl der Intervalle in x -Richtung (und damit steht natürlich auch $h = \frac{1}{N}$ zur Verfügung). Weiter ist der Projektionsparameter M (Dimension des Raums, auf den projiziert wird), eine maximale Datenstörung ε sowie ein Datenvektor $(\Phi_1)_\varepsilon$ mit $N - 1$ Komponenten mit den (eventuell gestörten) Neumann-Daten zu erzeugen. Die obere Grenze der y -Werte r_{max} haben wir bis auf eine Ausnahme, die durch das entsprechende Randidentifizierungsproblem bedingt war, durchweg auf $r_{max} = 1$ gesetzt. Zur Diskussion steht hier eine Lösung von Problem 2.1.1, das heißt, daß insbesondere inhomogene Dirichlet-Daten F_i auf Σ_i , $i = 1, 2, 3$ sowie eine inhomogene rechte Seite f vorliegen können.

Ist dies der Fall, so hat man zunächst, wie in Bemerkung 2.1.2 erläutert, ein direktes Problem zu lösen, was wir im folgenden Abschnitt beschreiben werden; andernfalls, wenn also das Cauchy-Problem schon in der halbhomogenen Form 2.1.3 vorliegt, kann man sich direkt der Lösung dieses inversen Problems zuwenden und den Teil des Algorithmus überspringen, der sich mit dem direkten Problem befaßt.

In den von uns betrachteten Beispielen haben wir die Daten grundsätzlich künstlich erzeugt, indem wir die bekannten, zur exakten Lösung gehörigen Neumann-Randdaten ϕ_1 diskretisiert haben (was den Vektor Φ_1 liefert) und anschließend punktweise einen zufälligen Fehler vom Maximalbetrag ε hinzugefügt haben (wodurch $(\Phi_1)_\varepsilon$ erzeugt wurde).

Eventuelle Lösung eines direkten Problems

2. Löse das in Bemerkung 2.1.2 angegebene direkte Problem und erhalte w .

3. Bestimme $\frac{\partial w}{\partial y}(x, 0)$ mittels des vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten.

4. Subtrahiere $\frac{\partial w}{\partial y}(x, 0)$ von $(\Phi_1)_\varepsilon$ und erhalte so den neuen Datenvektor $(\Phi_1)_\varepsilon$ zur Benutzung bei der Lösung des Cauchy-Problems.

Für die Lösung des direkten Problems haben wir in unserem Programm einen eigenen Diskretisierungsparameter \bar{h} eingeführt, da die Genauigkeit der Lösung w dieses Problems einen entscheidenden Einfluß auf die anschließende Lösung des Cauchy-Problems hat. Dies hängt damit zusammen, daß durch den unvermeidbaren Fehler der Größenordnung $O(\bar{h})$, der bei der Approximation der Ableitung von w auf Σ_1 durch den vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten entsteht, eine zusätzliche Datenstörung der Neumann-Daten für das Cauchy-Problem in Kauf genommen werden muß, so daß man \bar{h} so klein wählen sollte, daß diese zusätzliche Störung in ihrer Größenordnung unterhalb von ε bleibt, da ansonsten ε als Parameter seine Aussagekraft verliert.

Lösung des Cauchy-Problems mittels Linienmethode

5. Projiziere die Daten $(\Phi_1)_\varepsilon$ auf den Raum D_M^h und erhalte so die Daten $(\Phi_1)_\varepsilon^*$.

6. Bestimme die Lösung des homogenen Cauchy-Problems mit Hilfe der Linienmethode zu den Daten $(\Phi_1)_\varepsilon^*$ nach (3.39).

7. Wurde im ersten Schritt ein direktes Problem gelöst, so addiere noch die Lösung dieses direkten Problems und die mittels Linienmethode gerade berechnete Lösung des homogenen Cauchy-Problems, um die Lösung des inhomogenen Cauchy-Problems zu erhalten.

Obwohl es theoretisch nicht erforderlich ist, bei der Berechnung von (3.39) die Summe bei M abbrechen zu lassen, da ja alle Terme ab $k = M + 1$ theoretisch verschwinden (wegen $(\Phi_1)_\varepsilon^* \in D_M^h$), ist in der Praxis ebendies aufgrund der unvermeidlichen Rundungsfehler doch vonnöten.

8.1.2 Das Hadamard-Beispiel

Im Zusammenhang der untersuchten Problemklasse bietet sich für numerische Berechnungen das klassische Beispiel für schlecht gestellte Probleme von J. Hadamard an (siehe Satz 1.3.2, vgl. auch [Had23]). Hierbei ist die exakte Lösung u gegeben durch

$$u(x, y) = \frac{\sin(m\pi x) \sinh(m\pi y)}{(m\pi)^2},$$

wobei m eine natürliche Zahl ist. Die Randdaten ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} u(0, y) = u(1, y) &= 0 \quad \forall y \in [0, 1] \\ u(x, 0) &= 0 \quad \forall x \in (0, 1) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) &= \frac{\sin(m\pi x)}{m\pi} =: \phi_1 \end{aligned}$$

In diesem Fall hat man also den Fall homogener Dirichlet-Daten und homogener rechter Seite (Laplace-Gleichung) vorliegen und kann daher, ohne zuvor ein direktes Problem lösen zu müssen, unmittelbar das Cauchy-Problem mittels der Linienmethode angehen (siehe oben). Dementsprechend hat man mit diesem Beispiel auch das ideale Werkzeug in der Hand, um die getroffenen theoretischen Aussagen — wie etwa die Fehlerabschätzung in Satz 4.2.6 und den anschließenden Konvergenzsatz 4.2.8 — ohne störende Nebeneinflüsse zu untersuchen und zu bestätigen. Wir haben daher diesem Beispiel den größten Umfang innerhalb der Dokumentation der numerischen Ergebnisse eingeräumt. Man betrachte dazu Abschnitt A.1.1, den wir im folgenden im einzelnen diskutieren wollen.

Die Abbildungen A.1 und A.2 zeigen für $m = 2$ jeweils die exakten, gestörten und anschließend auf den Raum D_M^h projizierten Neumann-Daten bei $y = 0$; im ersten Fall für $M = 2$, was den Optimalfall bedeutet, da die gestörten Daten auf den Raum projiziert werden, dem die exakten Daten entstammen, nämlich D_2^h . Dies führt dazu, daß selbst bei Zulassung von relativ großen möglichen Datenstörungen, wie wir sie in den in den beiden Abbildungen gezeigten Beispielen zugrundegelegt haben, nämlich Störungen in der Größenordnung der Datenfunktion selbst, die Daten dank der Projektion sehr gut rekonstruiert werden können. Dies verursacht dann auch eine entsprechend gute Qualität der Lösung des Cauchy-Problems (vergleiche dazu Tabelle A.1).

Im zweiten Fall projiziert man auf einen Raum der Dimension 4 und erhält dementsprechend eine etwas schlechtere Rekonstruktion der Daten aus D_2^h , die sich entsprechend auf die Lösung auswirkt (vergleiche Tabelle A.2). Eine ausführliche Diskussion der Wahl von M und ihrer Auswirkungen folgt weiter unten.

Anhand der folgenden Abbildungen A.3–A.14 (Fall $m = 2$) und A.15–A.26 (Fall $m = 4$) kann man nun hervorragend das Auftreten des Diskretisierungs- und des Datenfehlers beobachten (der Projektionsfehler käme erst für $M < m$ ins Spiel), wodurch die theoretischen Erwartungen für diese beiden Fehleranteile eindrucksvoll bestätigt werden können.

So ist in den Abbildungen A.3–A.6 zunächst eine gewisse Dominanz des Datenfehlers aufgrund der vergleichsweise großen Datenstörungen zu beobachten. Dieser Fehleranteil wird, wie man den Abbildungen entnehmen kann, sukzessive kleiner mit kleiner werdendem ε ; ein Effekt, den man auch anhand der Tabelle A.1 studieren kann. Innerhalb des Bereichs von Datenstörungen, der den Abbildungen zugrunde liegt, ist der Diskretisierungsfehler eher vernachlässigbar klein, was sich auch darin äußert, daß die Lösungen für die gröberen Diskretisierungen teilweise besser sind (aufgrund zufälliger besserer Daten) als für die feineren (siehe zum Beispiel Abbildung A.4 oder A.8). Dies ändert sich jedoch außerhalb des für das Auge in Abbildungen wahrnehmbaren Bereichs deutlich, denn für alle $\varepsilon < \varepsilon_0$ (siehe Tabellen A.1–A.6) ändert sich mit kleinerer Datenstörung bei gleichbleibender Diskretisierung der

Gesamtfehler nicht mehr, woraus wir schließen können, daß in diesen Fällen der Diskretisierungsfehler der bestimmende Fehleranteil ist und Verbesserungen nur noch durch feinere Diskretisierungen erreicht werden können. Je nach Wahl von M wird ε_0 , also der Punkt, ab dem der Diskretisierungsfehler dominiert, früher (also für größere ε , siehe Tabelle A.1 beziehungsweise A.4) oder später (also erst für kleinere ε , siehe Tabelle A.3 beziehungsweise A.6) erreicht. Deswegen war es auch nötig, für die vergleichsweise größeren M in den Abbildungen A.7–A.10 ($m = 2, M = 4$), A.11–A.14 ($m = 2, M = 6$), A.19–A.22 ($m = 4, M = 6$) und A.23–A.26 ($m = 4, M = 8$) jeweils kleinere Werte von ε zu wählen, je größer M wurde. Das Prinzip lautet also: Es macht nur dann Sinn, auf einen höherdimensionalen Raum zu projizieren, wenn man entsprechend genaue Daten bereitstellen kann. Dies ist jedoch die lediglich mit anderen Worten formulierte Quintessenz des Satzes 4.2.8, in dem wir ja auch M zu $\left\lceil \frac{\ln(\varepsilon^{-1})}{\pi r_{max}} \right\rceil$ gewählt haben.

8.1.3 Ein inhomogenes Problem

Als Beispiel für ein Problem, das sowohl inhomogene Randbedingungen als auch eine inhomogene rechte Seite aufweist, dient das Polynom

$$u(x, y) = x^{10}y^{10} \quad .$$

Wir zerlegen das Problem, wie in Bemerkung 2.1.2 angegeben und oben diskutiert, so daß man also

$$\begin{aligned} \Delta w &= 90 \cdot (x^8y^{10} + x^{10}y^8) && \text{in } \Omega \\ w(x, y) &= x^{10}y^{10} && \text{auf } \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \\ w(x, y) &= x && \text{auf } \Sigma_4 \end{aligned} \quad (8.1)$$

und

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 && \text{in } \Omega \\ v &= 0 && \text{auf } \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x, 0) &= -\frac{\partial w}{\partial y}(x, 0) && \text{auf } \Sigma_1 \end{aligned} \quad (8.2)$$

mit Hilfe der Linienmethode zu lösen hat.

Der entscheidende zusätzliche Faktor, der bei der Interpretation der numerischen Ergebnisse für dieses inhomogene Problem mitberücksichtigt werden muß, liegt, wie schon weiter oben bemerkt, darin, daß man das direkte Problem (8.1) natürlich auch nur näherungsweise lösen kann (etwa durch ein Differenzenverfahren mit Diskretisierungsparameter \bar{h}) und außerdem bei der Ermittlung der Ableitung $\frac{\partial w}{\partial y}$, die ja die Neumann-Daten für das Cauchy-Problem (8.2) liefert, ein unvermeidlicher Fehler der Größenordnung $O(\bar{h})$ entsteht, der eine zusätzliche Datenstörung bedeutet. Die künstlich hinzugefügte Datenstörung ε ist also nur insoweit von Bedeutung als sie größenordnungsmäßig oberhalb der durch die Lösung des direkten

Problems entstehenden Datenstörung liegt. Von größter Bedeutung ist es somit, das direkte Problem mit einem hinreichend feinen Diskretisierungsparameter \bar{h} lösen zu können. Dies stellt übrigens auch den einzigen laufzeitkritischen Faktor dar, was die Programmierung der Linienmethode angeht (die von uns verwendeten Rechner lieferten in vertretbarer Zeit Ergebnisse bis zu $\bar{h} = \frac{1}{300}$ und $\bar{h} = \frac{1}{100}$ führt zu nahezu unmittelbar verfügbaren Ergebnissen); die Linienmethode zur Lösung des Cauchy-Problems (8.2) selbst dagegen ist dank der verwendeten expliziten Lösungsformeln, die wir im theoretischen Teil dieser Arbeit hergeleitet haben, quasi in Echtzeit zu verwenden und für die Laufzeit ohne Bedeutung.

Betrachtet man nun die numerischen Ergebnisse (siehe Abschnitt A.1.2), so ist zunächst zu den Abbildungen A.27 und A.28 zu bemerken, daß die Kurven der als exakt gekennzeichneten Daten dahingehend interpretiert werden müssen, daß sie lediglich die Daten, die bei der Lösung des direkten Problems ermittelt wurden und die, wie wir ja im letzten Absatz hinlänglich diskutiert haben, schon fehlerbehaftet sind, exakt wiedergeben, während wir die wirklich exakten Daten $\frac{\partial v}{\partial y}(x, 0)$ schlicht nicht zur Verfügung stellen können. Auch bei Betrachtung dieser beiden Abbildungen stellen wir fest, daß das Projektionsergebnis den Ausgangsdaten für $M = 2$ näher kommt als für $M = 4$, was sich auch in der Güte der Lösungen bemerkbar macht. Im Fall $M = 2$ ist nämlich die numerische Lösung nur für $\varepsilon = 10^{-1}$ (man beachte, daß die Daten selbst nur eine Größenordnung von 10^{-4} haben!) relativ schlecht (Abbildung A.29) und schon für $\varepsilon = 10^{-3}$ und erst recht für $\varepsilon = 10^{-5}$ (Abbildungen A.30 und A.31) sind die Ergebnisse erstaunlich gut. Dagegen erreicht man im Fall $M = 4$ erst für $\varepsilon = 10^{-5}$ ein annehmbares Ergebnis (Abbildung A.34), während die Näherungen für $\varepsilon = 10^{-1}$ (Abbildung A.32) und $\varepsilon = 10^{-3}$ (Abbildung A.33) von schlechterer Qualität sind. Die systematische Untersuchung des Fehlers anhand der Tabellen A.7 und A.8 (Fall $\bar{h} = \frac{1}{50}$) sowie A.9 und A.10 (Fall $\bar{h} = \frac{1}{200}$) zeigt, wie schon zuvor im Falle des Hadamard-Beispiels für die großen ε , zunächst das Überwiegen des durch die Datenstörung ε hervorgerufenen Datenfehlers. Für zunehmend kleineres ε stabilisiert sich der Fehler wie schon zuvor bei einem festen Wert, der nicht unterschritten wird. Dieser dann sichtbar werdende Anteil ist allerdings nicht — wie beim zuvor betrachteten Hadamard-Beispiel — der Diskretisierungsfehler, sondern der zusätzliche, durch die Lösung des direkten Problems entstehende Datenfehler, den wir oben diskutiert haben. Ganz deutlich wird diese Tatsache durch den direkten Vergleich der Tabellen A.7 und A.9 beziehungsweise A.8 und A.10, da für $\bar{h} = \frac{1}{200}$ der erreichte Wert, bei dem sich für fallendes ε der Fehler stabilisiert deutlich kleiner ausfällt als für $\bar{h} = \frac{1}{50}$. Was ebenfalls deutlich ins Auge fällt, ist der schon im Zusammenhang mit dem Hadamard-Beispiel ausführlich diskutierte Zusammenhang zwischen M und ε , daß nämlich ein größeres M auch ein kleineres ε erforderlich macht.

8.2 Berechnungen zu einer Gleichung mit Diffusionskoeffizient

8.2.1 Beschreibung des Verfahrens

Daten und Initialisierungen

1. **Initialisiere** $N, h, M, \varepsilon, (\Phi_1)_\varepsilon, a, r_{max}$ sowie gegebenenfalls F_1, F_2, F_3, f .

Die einzige zusätzliche Information, die im Vergleich mit dem Problem für die Poisson-Gleichung noch zur Verfügung gestellt werden muß, ist ein Vektor mit $N + 1$ Komponenten, der die Werte $a(x_j), j = 0, \dots, N$ des nur von x abhängigen Diffusionskoeffizienten a bei den Gitterpunkten beziehungsweise auf den Gitterlinien enthält. Alle anderen Gegebenheiten bleiben unverändert.

Eventuelle Lösung eines direkten Problems

2. **Löse das in Bemerkung 5.1.3 angegebene direkte Problem und erhalte** w .

3. **Bestimme** $\frac{\partial w}{\partial y}(x, 0)$ **mittels des vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten.**

4. **Subtrahiere** $\frac{\partial w}{\partial y}(x, 0)$ **von** $(\Phi_1)_\varepsilon$ **und erhalte so den neuen Datenvektor** $(\Phi_1)_\varepsilon$ **zur Benutzung bei der Lösung des Cauchy-Problems.**

Außer der veränderten Differentialgleichung für das direkte Problem (Gleichung mit Diffusionskoeffizient statt einfacher Laplace- beziehungsweise Poisson-Gleichung) ergeben sich für das direkte Problem keine Unterschiede zu dem Vorgehen in Abschnitt 8.1. Man hat also hier wie dort lediglich auf die geeignete Wahl von \bar{h} zu achten.

Lösung des Cauchy-Problems mittels Linienmethode

5. **Bestimme die Eigenwerte** $\tilde{\lambda}_{k,h}, k = 1, \dots, N - 1$ **der symmetrischen Tridiagonalmatrix** B_a^{sym} **(siehe Lemma 5.2.8 (b),(c)) und ein zugehöriges Orthonormalsystem von Eigenvektoren** $(t_a)_k$, **die man spaltenweise in der Matrix** T_a **speichert.**

6. **Berechne daraus nach (5.15) die Matrix** $W_a = \frac{1}{\sqrt{ha_1}} S_a T_a$, **deren Spalten die Eigenvektoren von** B_a **enthalten, mit der in (5.13) definierten Diagonalmatrix** S_a .

7. **Erhalte die Lösung der Linienmethode zu projizierten Daten** $(\Phi_1)_\varepsilon^*$ **nach der Formel**

$$\sum_{k=1}^M (W_a)_{i,k} \frac{(W_a^{-1}(\Phi_1)_\varepsilon)_k}{\sqrt{-\tilde{\lambda}_{k,h}}} \sinh \left(\sqrt{-\tilde{\lambda}_{k,h}} y \right) .$$

Man vergleiche dazu (5.20), (5.60) samt Beweis und (7.110).

8. **Wurde im ersten Schritt ein direktes Problem gelöst, so addiere noch die Lösung dieses direkten Problems und die mittels Linienmethode gerade berechnete Lösung des homogenen Cauchy-Problems, um die Lösung des inhomogenen Cauchy-Problems zu erhalten.**

Eine Erläuterung ist hier lediglich noch zu Schritt 5. erforderlich: Die Bestimmung der Eigenwerte der symmetrischen Tridiagonalmatrix B_a^{sym} erfolgt am effektivsten unter Ausnutzung der Tatsache, daß die Hauptminoren der Matrix $x E - B_a^{sym}$ als Polynome in x betrachtet eine sogenannte Sturmsche Kette bilden. In diesem Fall läßt sich die Bestimmung der Eigenwerte sehr einfach und wirkungsvoll mit Hilfe eines Bisektionsverfahrens realisieren (siehe [SH82] Abschnitt 10.3, Seite 224–226). Da die hierbei auftretenden Polynome bei großen Einträgen der Matrix B_a^{sym} , wie sie bei kleiner werdenden h auftreten, sehr große Werte annehmen (bis oberhalb der in MATLAB zulässigen Höchstzahl von 10^{308} , der Grund wird offensichtlich bei Betrachtung von (26) in [SH82] S.224), war auch noch eine vorherige Spektralstauchung nötig. Das bedeutet, daß wir zunächst die offenbar zwischen -1 und 1 liegenden Eigenwerte der quasi normierten Matrix

$$\frac{B_a^{sym}}{\|B_a^{sym}\|_\infty}$$

berechnet und anschließend wieder mit $\|B_a^{sym}\|_\infty$ multipliziert haben, um die gewünschten Eigenwerte von B_a^{sym} zu erhalten. Den zu einem Eigenwert λ gehörigen Eigenvektor berechnet man mit Hilfe einer auf die Matrix $B_a^{sym} - \lambda E$ angewandten Vorwärtselimination, der beliebigen nichttrivialen Setzung der letzten Komponente (etwa gleich 1) und anschließendem Rückwärtseinsetzen. Die numerischen Ergebnisse der Eigenwertbestimmung und Eigenvektorberechnung waren in verschiedenen Testläufen für Fälle, in denen die Eigenwerte explizit bekannt sind, äußerst erfolgreich.

8.2.2 Ein polynomiales Beispiel

Als wahre Lösung haben wir das Polynom

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in \Omega$$

und als von x abhängigen Diffusionskoeffizienten die lineare Funktion

$$a(x) = 1 + x, \quad x \in [0, 1]$$

gewählt. Offenbar gilt dann

$$L_a u = \operatorname{div}(a \nabla u) = a \Delta u + a' \frac{\partial u}{\partial x} = (1 + x) \cdot 4 + 1 \cdot 2x = 6x + 4 =: f$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 =: \phi_1(x) \quad .$$

Es liegt also ein inhomogenes Problem vor, das wir somit nach Bemerkung 5.1.3 zerlegen müssen. Das direkte Problem hat die Form

$$\begin{aligned} L_a w &= 6x + 4 && \text{in } \Omega \\ w(x, y) &= x^2 + y^2 && \text{auf } \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \\ w(x, y) &= 1 + x && \text{auf } \Sigma_4 \end{aligned} \tag{8.3}$$

und das zugehörige Cauchy-Problem lautet

$$\begin{aligned} L_a v &= 0 && \text{in } \Omega \\ v &= 0 && \text{auf } \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x, 0) &= -\frac{\partial w}{\partial y}(x, 0) && \text{auf } \Sigma_1 \quad . \end{aligned} \quad (8.4)$$

Die Abbildungen A.35 und A.36 zeigen in schon gewohnter Weise die aus der Lösung des direkten Problems erhaltenen (und nur in diesem Sinne exakten) Cauchy-Daten, ihre Störung und anschließende Projektion auf den Raum $D_M^{a,h}$ für $M = 2$ (Abbildung A.35) beziehungsweise $M = 4$ (Abbildung A.36). Die Daten bewegen sich ihrer Größenordnung nach etwa zwischen 0 und 10^{-1} , was man bei der Interpretation der Fehlertabellen mit berücksichtigen muß (erstaunlich gute Ergebnisse auch für vergleichsweise große Störungen).

Die Abbildungen A.37–A.41 stellen sehr anschaulich den Einfluß der zwei Parameter ε und \bar{h} auf den Gesamt(daten)fehler dar. Jeweils unabhängig voneinander können durch bessere Wahl dieser Parameter (also kleineres \bar{h} beziehungsweise ε) Verbesserungen des Gesamtergebnisses erzielt werden, woraus man schließen kann, daß beide Datenfehleranteile in dem von uns betrachteten Bereich in etwa dieselbe Größenordnung besitzen. Die Tabellen A.11 (Fall $\bar{h} = \frac{1}{50}$) und A.12 zeigen dann auch die Grenzen dieser unabhängigen Verbesserungsmöglichkeit durch Verändern nur eines Parameters auf, denn wie schon zuvor in den anderen betrachteten inhomogenen Beispielen wird wiederum erkennbar, daß nur das gemeinsame, koordinierte Verkleinern beider Parameter dazu führt, daß der Gesamtdatenfehler verkleinert werden kann. Der Diskretisierungsfehleranteil wird in den Tabellen deswegen nicht sichtbar, weil der Datenfehler für alle betrachteten Konstellationen diesen Fehleranteil dominiert.

Bemerkung 8.2.1 *Wir halten fest, daß insgesamt die numerischen Ergebnisse für das Cauchy-Problem, wie die Fehlertabellen zeigen, von sehr guter Qualität sind. Für vernünftige Störungsgrößen und die passende Wahl von M und h sind relative L_2 -Fehler unter einem Prozent die Regel. Wenn es gelingt, für inhomogene Probleme das zugehörige direkte Problem noch laufzeiteffizienter und genauer zu lösen (Verkleinerung von \bar{h} bei gleichzeitiger vertretbarer Laufzeit), ist eine weitere Verbesserung der Ergebnisse in diesem Bereich zu erwarten.*

8.3 Zum Problem der Randidentifizierung

Auch zum Problem der Randidentifizierung haben wir zahlreiche numerische Experimente durchgeführt, die interessante und brauchbare Ergebnisse zutage gefördert haben.

8.3.1 Beschreibung des Verfahrens

Wir setzen voraus, daß die Lösung des (homogenen oder inhomogenen) Cauchy-Problems schon stattgefunden hat und die Lösung $u_{i,\varepsilon}^*(y)$, $i = 1, \dots, N - 1$ der Linienmethode zu gestörten und anschließend projizierten Daten vorliegt. Außerdem hat man den Vektor F_0

der Länge $N - 1$, der die Dirichlet-Randbedingung auf dem unbekanntem Rand Σ_0 enthält, gegeben. Dann führen wir folgendes Verfahren zur Randidentifizierung durch:

1. **Berechne auf jeder Linie** $w_i(y) := u_{i,\varepsilon}^*(y) - (F_0)_i$, $i = 1, \dots, N - 1$.
2. **Diskretisiere** $w_i(y)$, $y \in (0, r_{max}]$ **in y -Richtung mit einem Diskretisierungsparameter** \tilde{h} , $\tilde{h} = \frac{1}{\tilde{N}}$ **und erhalte so auf jeder Linie (also für** $i = 1, \dots, N - 1$) **einen Vektor** $W^{(i)} \in \mathbb{R}^{\tilde{N}}$ **durch die Definition** $W_k^{(i)} := w_i(y_k)$, $y_k = k\tilde{h}$, $k = 1, \dots, \tilde{N} + 1$.
3. **Bestimme** $r_i = r(x_i)$ **durch die Vorschrift**

$$r_i := \min_{k=1, \dots, \tilde{N}+1} |W_k^{(i)}| \quad .$$

Bemerkung 8.3.1 *Zwei Gegebenheiten werden durch das gegenwärtige Vorgehen noch nicht berücksichtigt und stellen einen Gegenstand für mögliche zukünftige Untersuchungen dar. Zum einen ist noch nicht geklärt, ob die Lösung des Randidentifizierungsproblems eindeutig ist beziehungsweise ob die Funktionswerte nicht an verschiedenen Stellen auf einer Linie sehr nahe an den vorgeschriebenen Funktionswert kommen und zum anderen ist noch ein Verfahren zu finden, das die Inhomogenität der Medien auch in y -Richtung bei der Lösung des Cauchy-Problems berücksichtigen kann, also mit einem Diffusionskoeffizienten $a(x, y)$ rechnet (vergleiche Beispiel 1.3.5), was bisher noch nicht der Fall ist, da von uns nur die Poisson-Gleichung beziehungsweise eine Gleichung mit von x abhängigem Koeffizienten $a(x)$ betrachtet wurde.*

Die Bilder zu den numerischen Ergebnissen bezüglich des Randidentifizierungsproblems, die wir im folgenden erörtern wollen, befinden sich in Abschnitt A.3.

8.3.2 Das Hadamard-Beispiel

Für das Hadamard-Beispiel (zur Definition der Lösung des Cauchy-Problems siehe Abschnitt 8.1.2) haben wir zwei verschiedene Randformen betrachtet, nämlich $r(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin(4\pi x)$ und $r(x) = \frac{1}{2} + \sin(\pi x)$. Man beachte, daß im zweiten Fall im Gegensatz zu allen anderen hier gerechneten Beispielen $r_{max} = 1.5$ gesetzt werden muß. Beide Randformen haben wir zunächst im Fall $m = 2$, $M = 2$ für $\varepsilon = 0.1$ (Abbildung A.43 beziehungsweise A.45) und $\varepsilon = 10^{-3}$ (Abbildung A.44 beziehungsweise A.46) untersucht, wobei man feststellen kann, daß die Randidentifizierung hervorragende Ergebnisse liefert, was wegen der direkten Abhängigkeit dieser Ergebnisse von der Lösung des Cauchy-Problems, deren gute Qualität wir ja schon herausgestellt haben, nicht verwundert.

Im Fall $m = 2$, $M = 4$ (siehe die Abbildungen A.47–A.49) für die erste Randform und die Abbildungen A.50–A.52 für die zweite Randform) muß man, um dieselbe Randidentifizierungsqualität zu erhalten, den Störungsparameter ε kleiner wählen, was ebenfalls gut mit der Tatsache harmoniert, daß bei größerem M schon für die Lösung des Cauchy-Problems genauere Daten vonnöten sind, um Ergebnisse von derselben Qualität zu erzielen.

Es wird jedoch noch ein zusätzlicher Aspekt erkennbar, den wir bis jetzt noch nicht diskutiert haben, nämlich die Abhängigkeit des Fehlers von y . Insbesondere die sukzessive Betrachtung

der Abbildungen A.50–A.52 läßt erkennen, daß bei kleiner werdender Störung ε der y -Bereich, in dem die Lösung verläßlich ist und daher eine sichere Randidentifizierung erlaubt, immer größer wird, was vollständig in Übereinstimmung mit der theoretischen Erwartung steht, die nach Satz 4.2.6 einen Datenfehler vorhersagt, der aus den wesentlichen Teilfaktoren $\varepsilon \sinh(M\pi y)$ besteht.

8.3.3 Ein inhomogenes Problem

Eine sehr extreme Testfunktion für das Randidentifizierungsproblem stellt die im inhomogenen Beispiel für die Poisson-Gleichung betrachtete Funktion

$$u(x, y) = x^{10} \cdot y^{10}$$

dar, da sie über weite Teile des Einheitsquadrates (wir betrachten nun die Randform $r(x) = \frac{1}{2}(1 + |\frac{1}{2} - x|)$ mit $r_{max} = 1$) nahezu verschwindet und daher die Aufgabe der Randidentifizierung, wenn man nicht gerade in der Nähe des Punktes $(1, 1)$ ist, wo die Funktion stark ansteigt, in etwa der Aufgabe gleichkommt, in Friesland allein durch Angabe der auf einem Weg vorkommenden Höhenmeter über Normal Null den Weg selber zu identifizieren. Dennoch kann man beobachten, daß durch Verkleinerung der Störung ε die Genauigkeit der Lösung und damit der Bereich, in dem der Rand noch sicher identifiziert werden kann, vergrößert werden kann. Diesen Zusammenhang findet der Leser anschaulich in den Abbildungen A.53–A.55 dargestellt, mit deren Betrachtung wir die Beschreibung der numerischen Ergebnisse beschließen wollen.

Anhang A

Bilder und Tabellen zu den numerischen Ergebnissen

A.1 Beispiele zur Poisson-Gleichung

A.1.1 Das Hadamard-Beispiel

Die Neumann-Daten, ihre Störung und Projektion

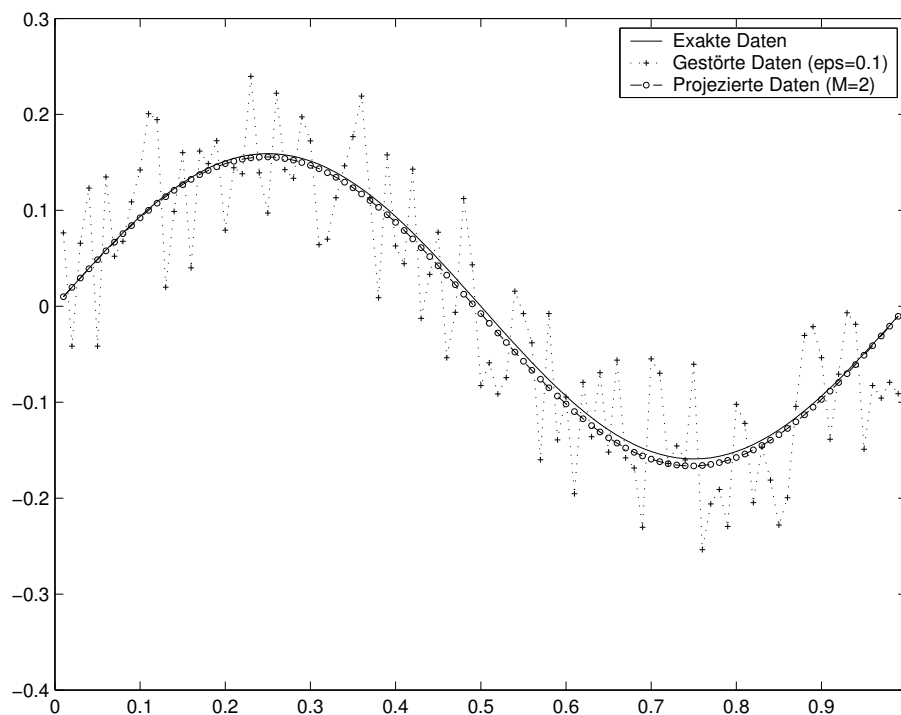


Abbildung A.1: Exakte Daten Φ_1 , gestörte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon$ und projizierte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon^*$ bei $y = 0$ für $m = 2, M = 2, \varepsilon = 0.1, h = \frac{1}{100}$

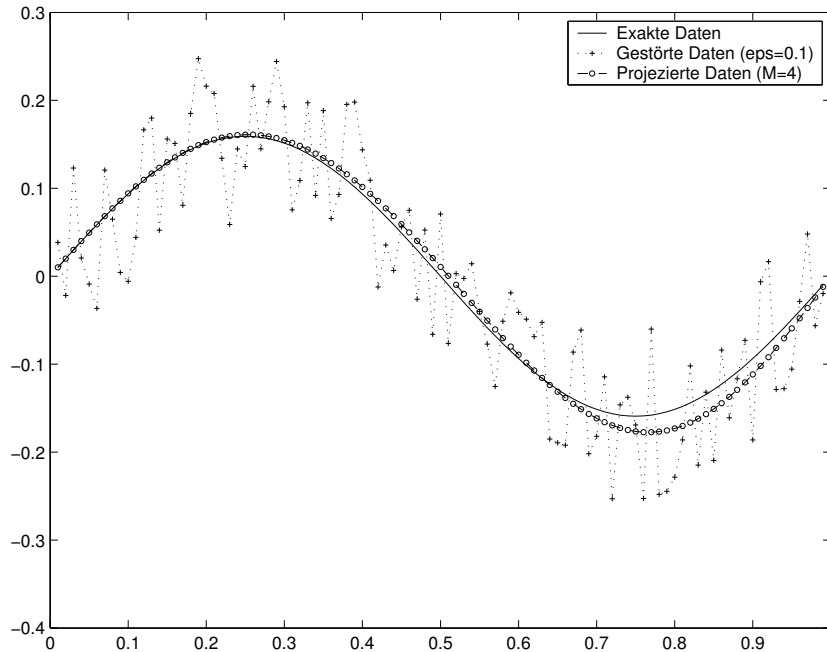


Abbildung A.2: Exakte Daten Φ_1 , gestörte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon$ und projizierte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon^*$ bei $y = 0$ für $m = 2, M = 4, \varepsilon = 0.1, h = \frac{1}{100}$

Lösungsfiguren bei $y = 1$ zu $m = 2, M = 2, 4, 6$ jeweils für verschiedene Störungen ε

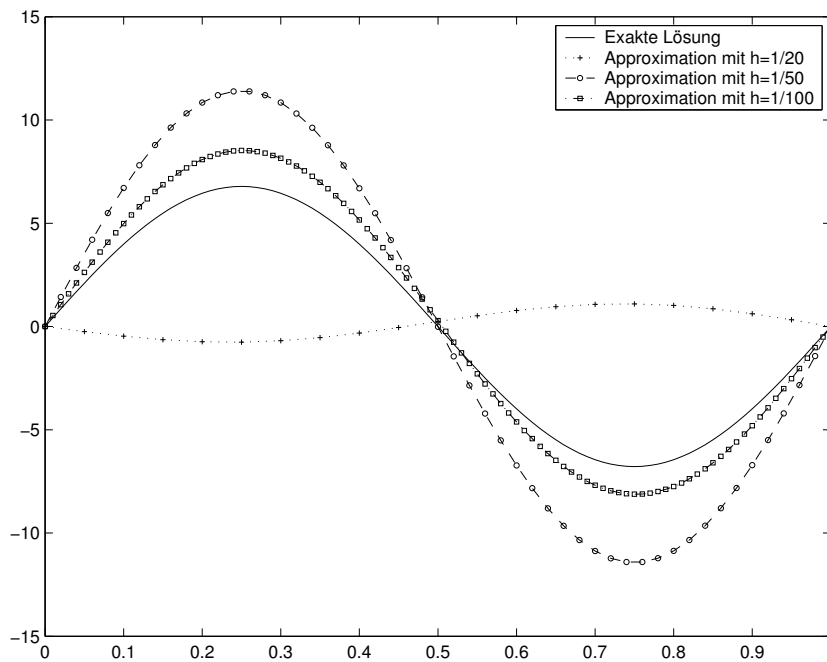


Abbildung A.3: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2, M = 2, \varepsilon = 1, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

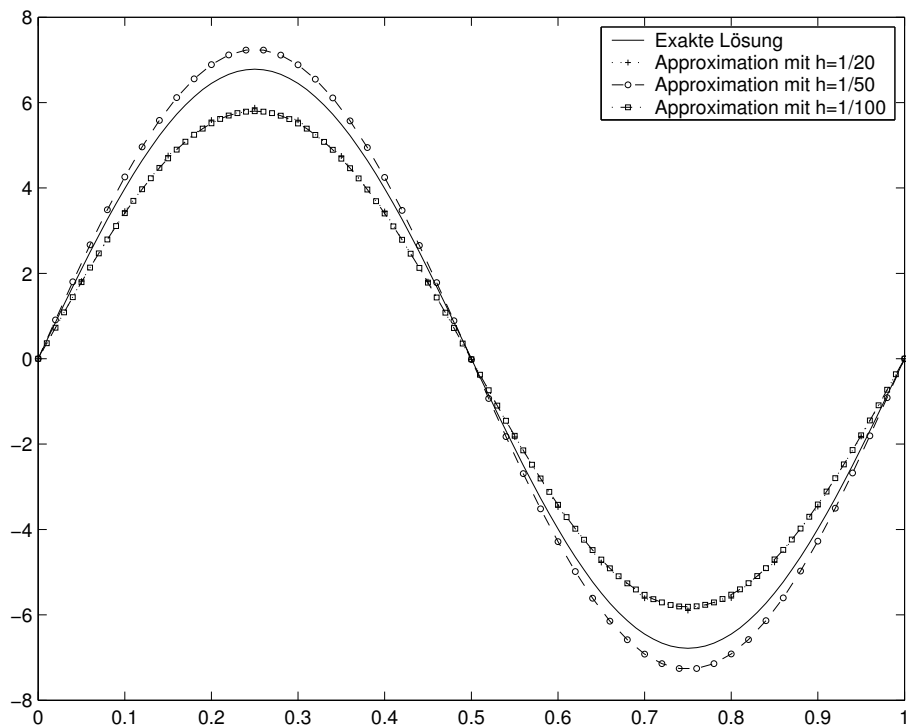


Abbildung A.4: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2$, $M = 2$, $\varepsilon = 10^{-1}$, $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

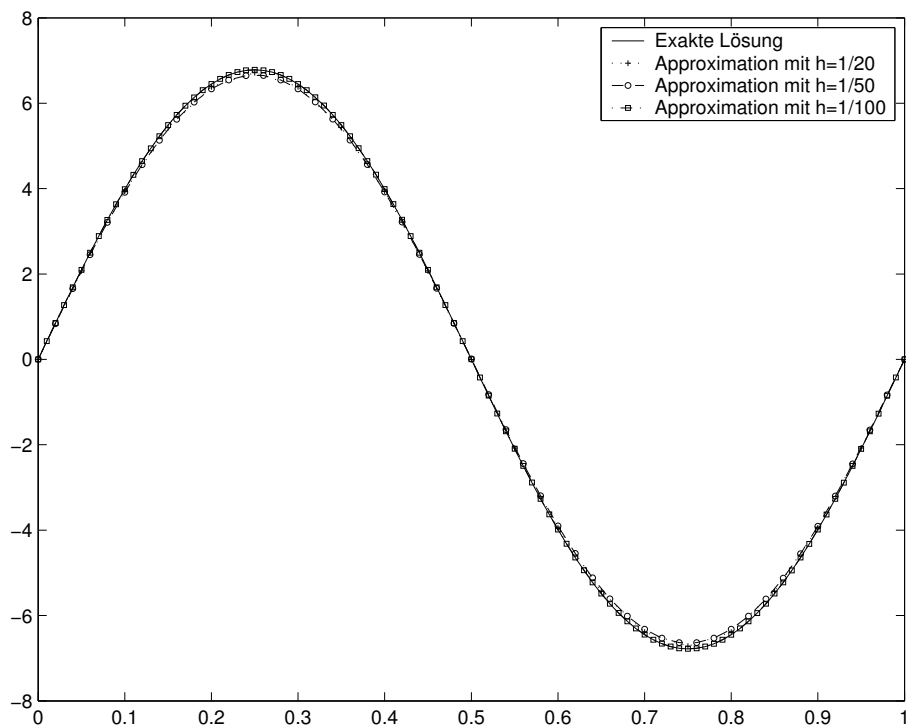


Abbildung A.5: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2$, $M = 2$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

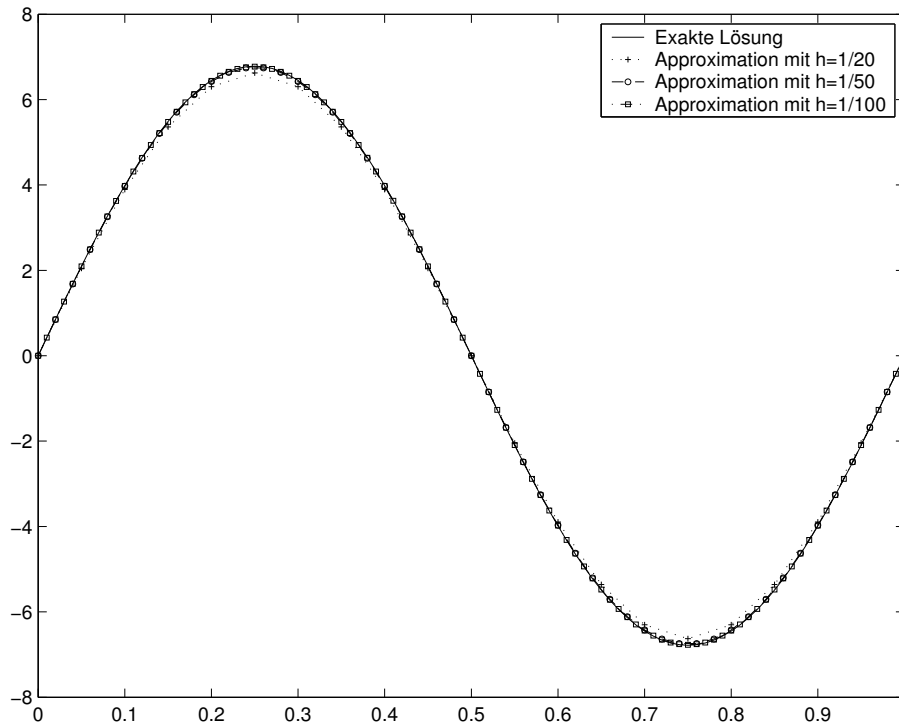


Abbildung A.6: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2, M = 2, \varepsilon = 10^{-3}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

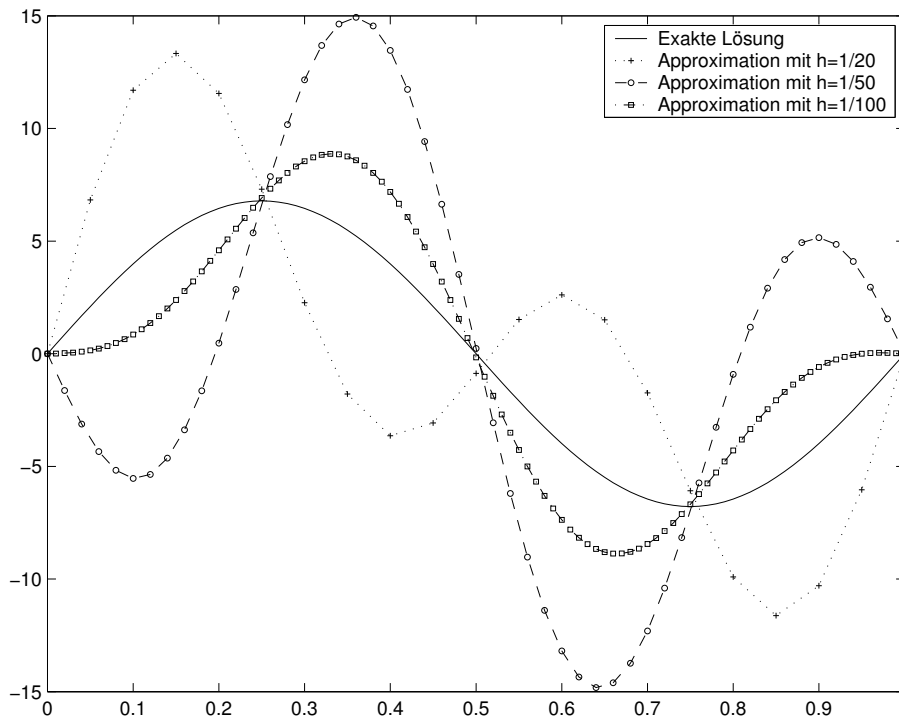


Abbildung A.7: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2, M = 4, \varepsilon = 10^{-2}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

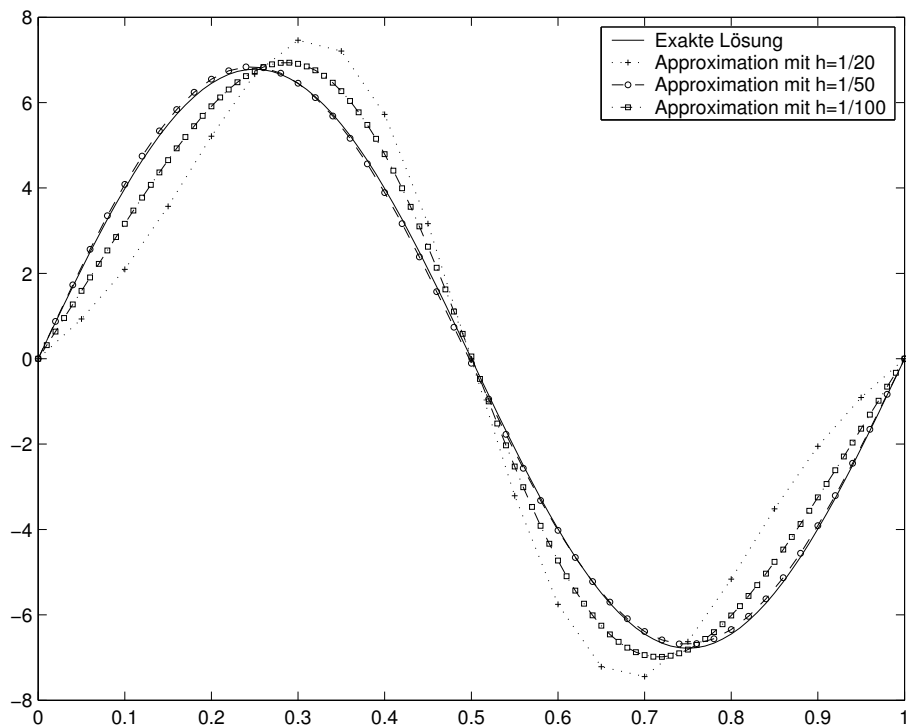


Abbildung A.8: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2$, $M = 4$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

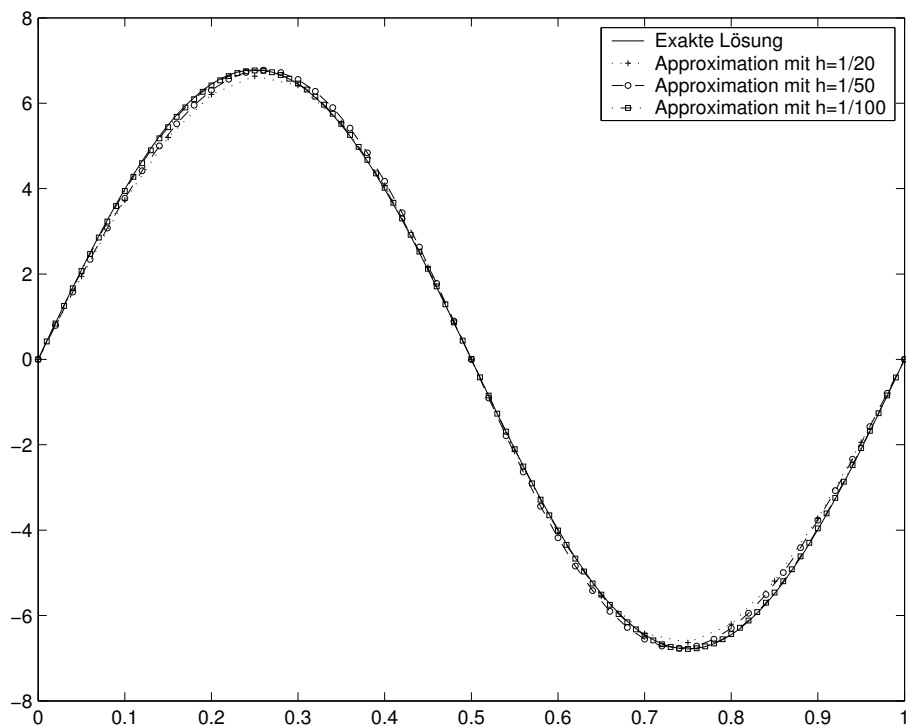


Abbildung A.9: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2$, $M = 4$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

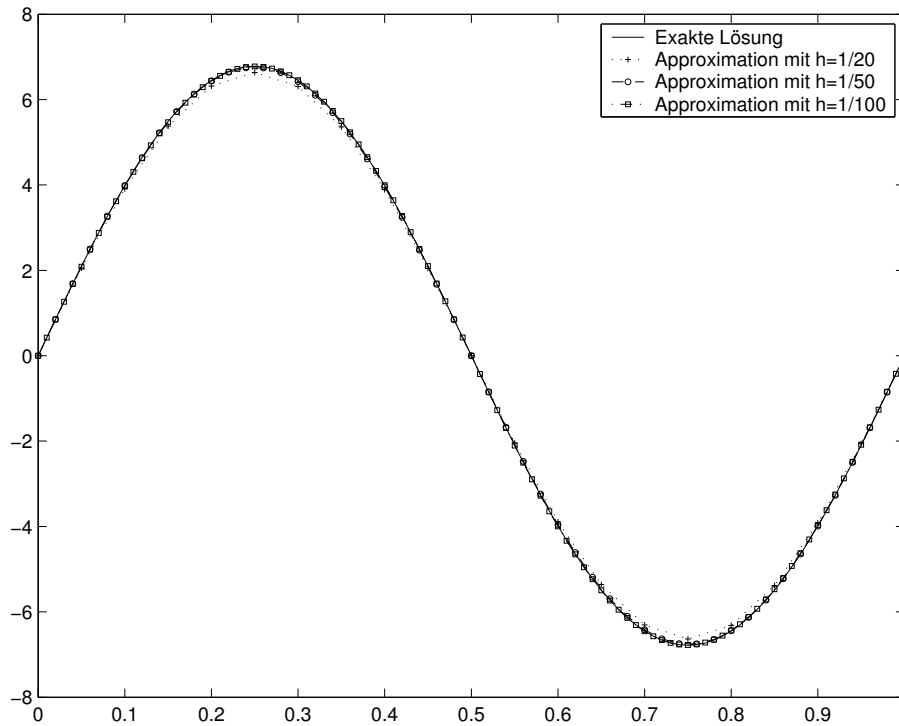


Abbildung A.10: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2, M = 4, \varepsilon = 10^{-5}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

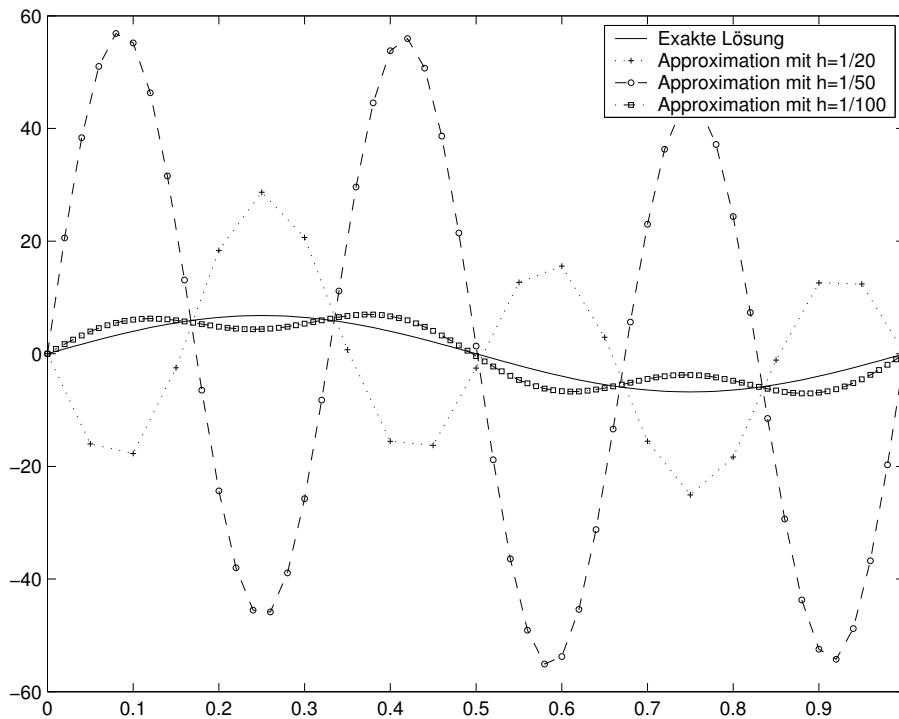


Abbildung A.11: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2, M = 6, \varepsilon = 10^{-4}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

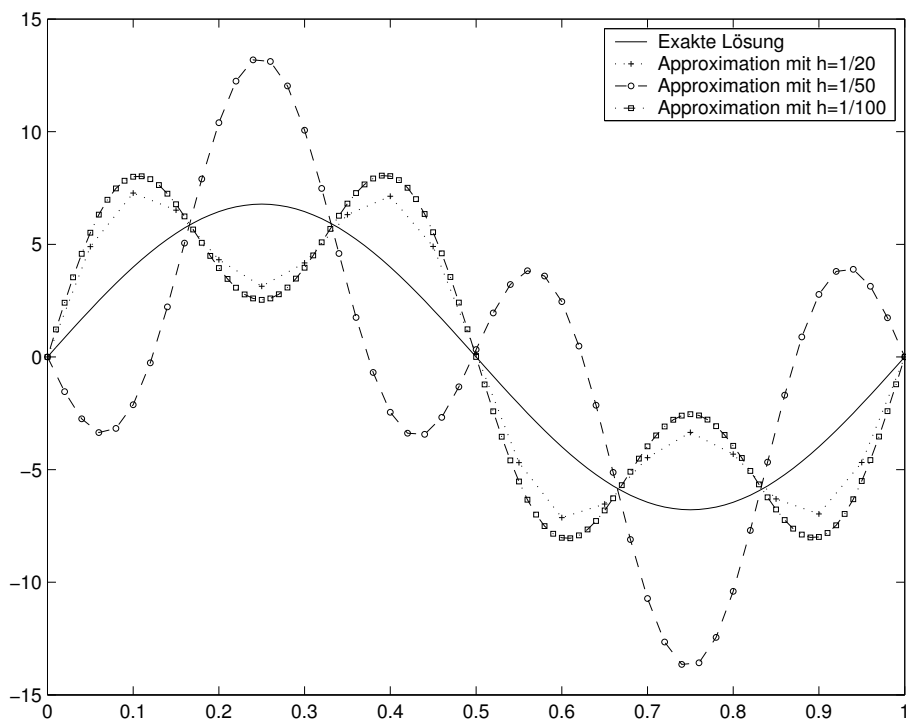


Abbildung A.12: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2, M = 6, \varepsilon = 10^{-5}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

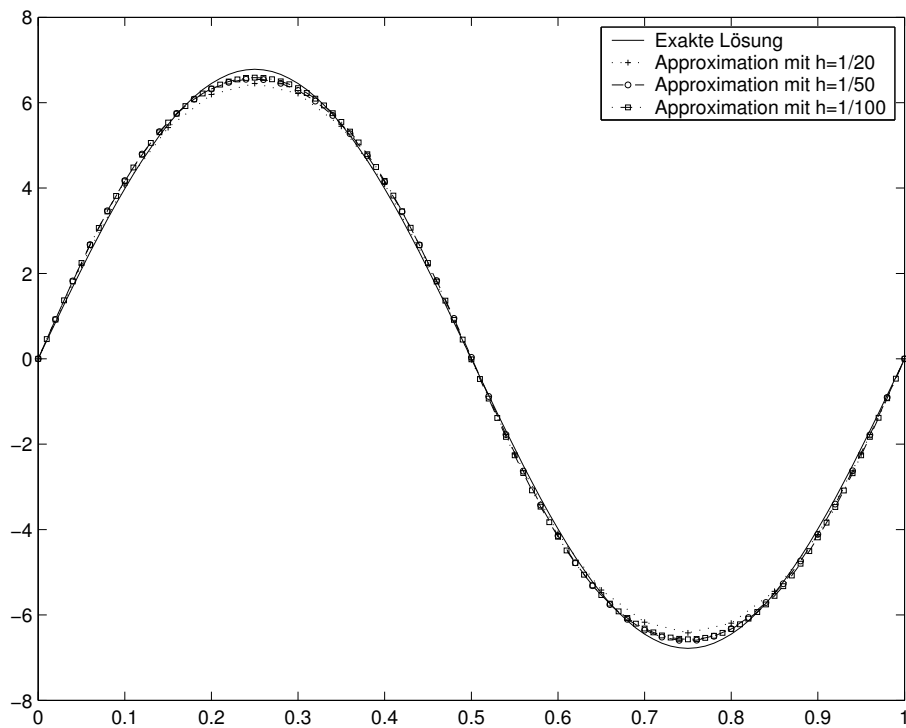


Abbildung A.13: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2, M = 6, \varepsilon = 10^{-6}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

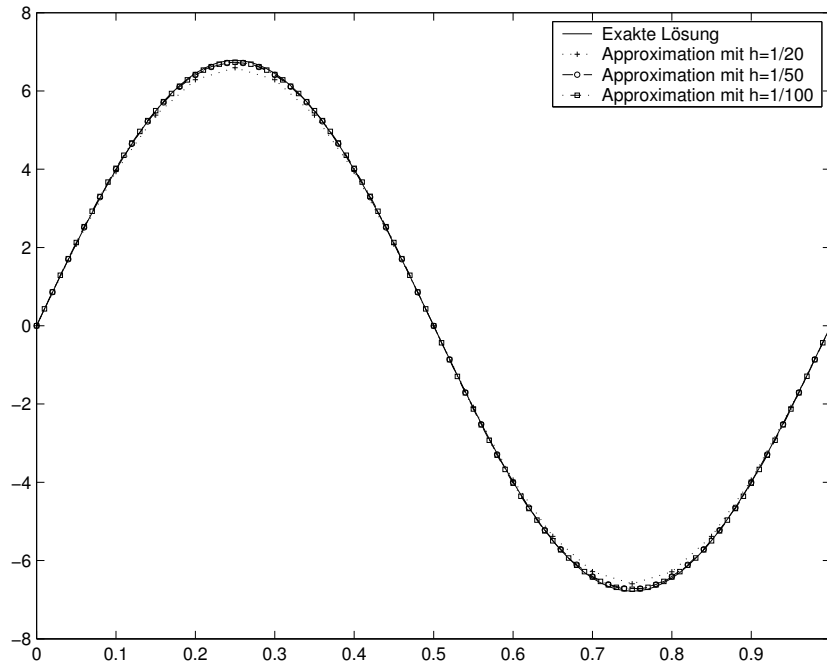


Abbildung A.14: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 2, M = 6, \varepsilon = 10^{-7}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

Lösungsfiguren bei $y = 1$ zu $m = 4, M = 4, 6, 8$ jeweils für verschiedene Störungen ε

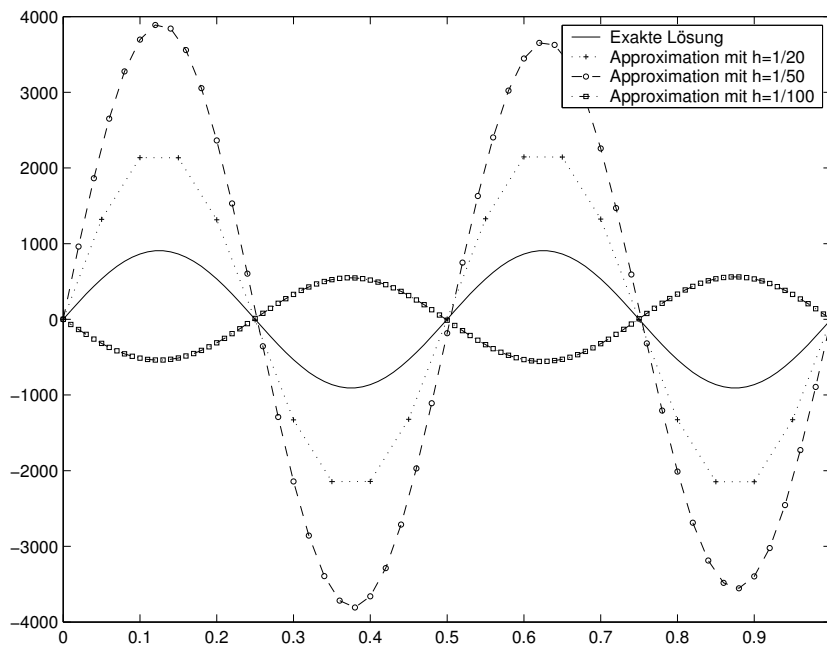


Abbildung A.15: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 4, \varepsilon = 1, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

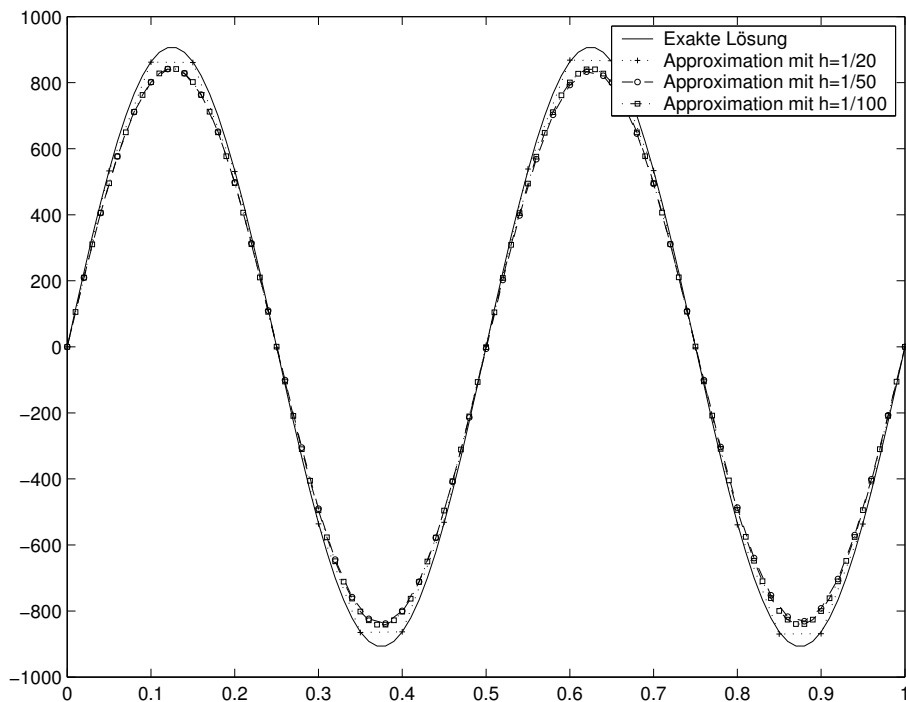


Abbildung A.16: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 4, \varepsilon = 10^{-1}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

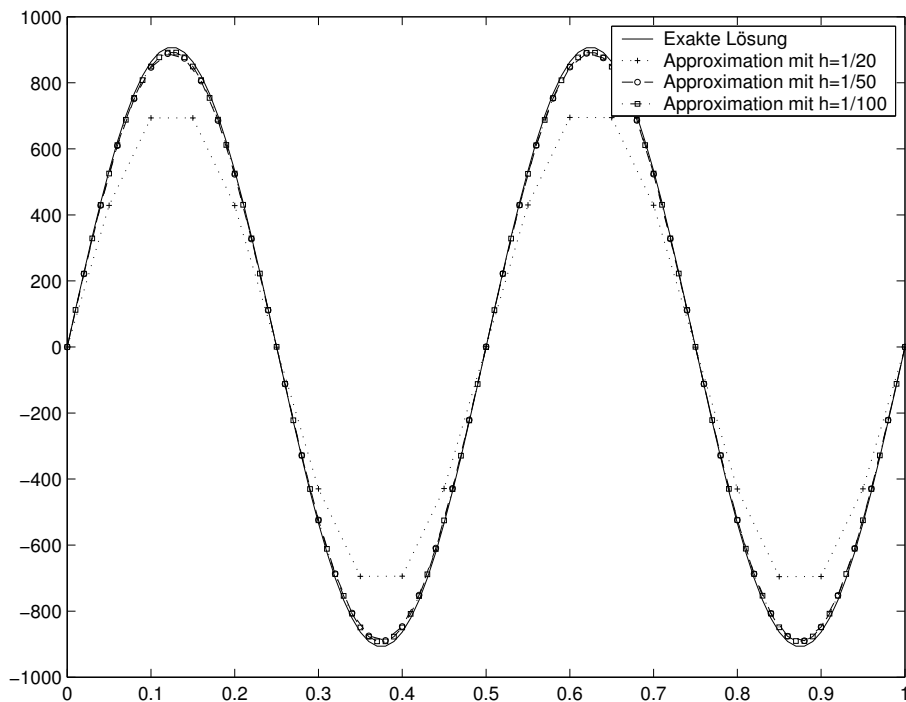


Abbildung A.17: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 4, \varepsilon = 10^{-2}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

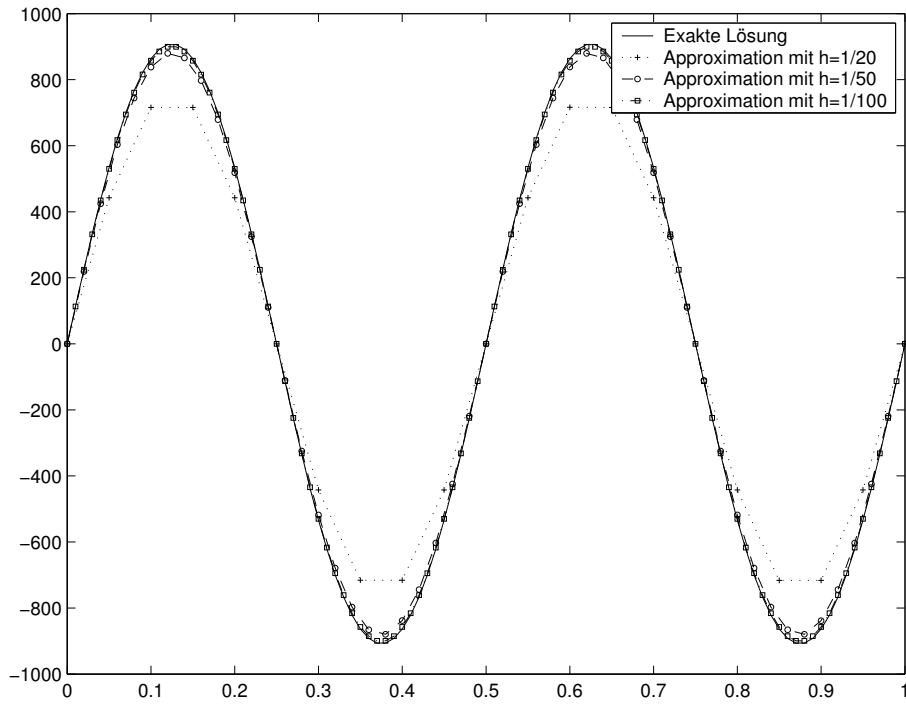


Abbildung A.18: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 4, \varepsilon = 10^{-3}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

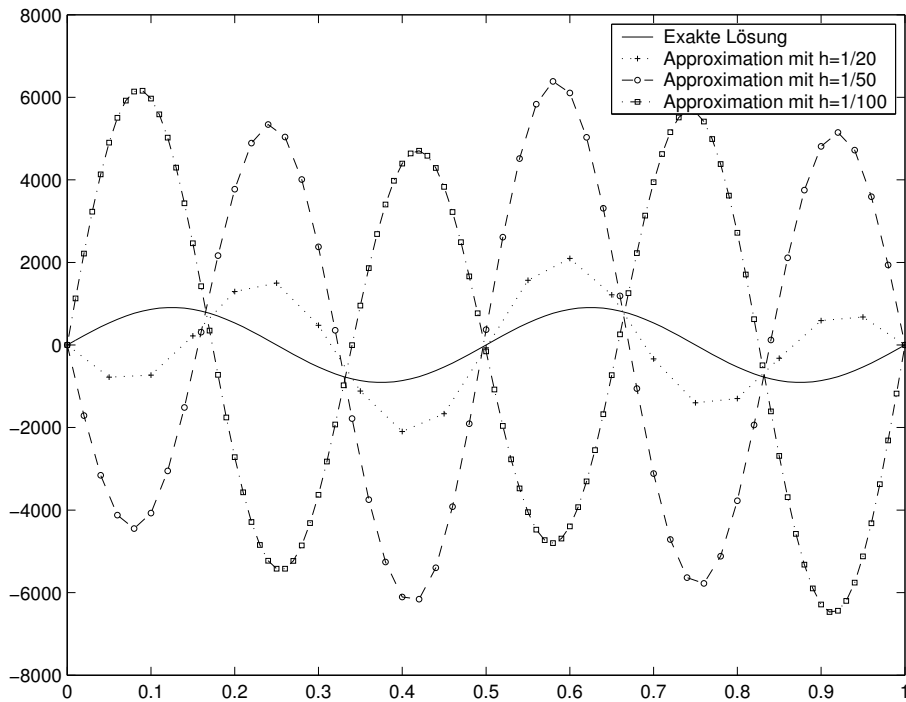


Abbildung A.19: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 6, \varepsilon = 10^{-2}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

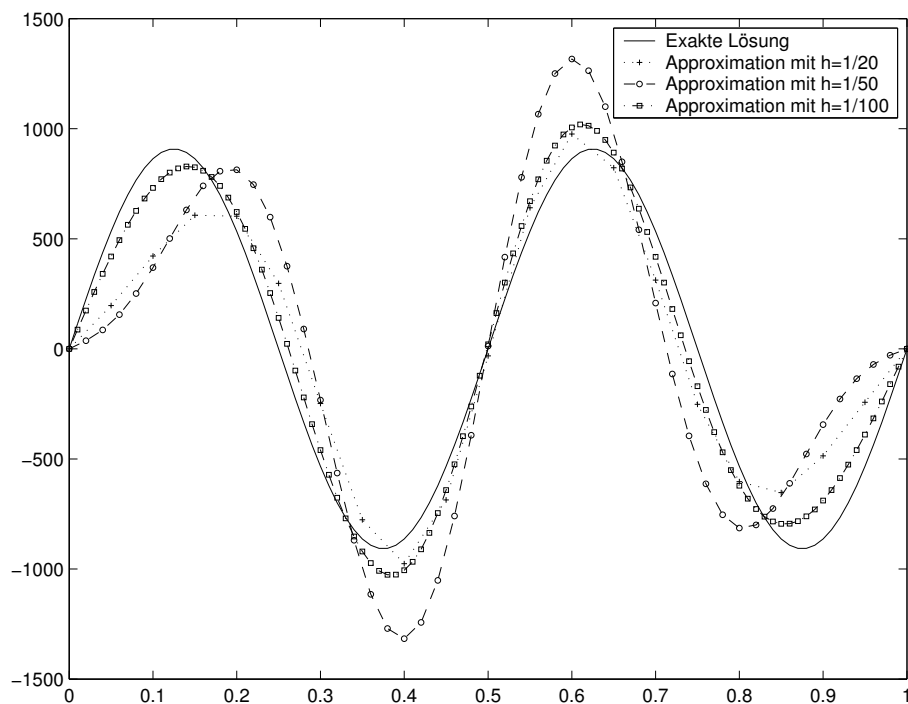


Abbildung A.20: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 6, \varepsilon = 10^{-3}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

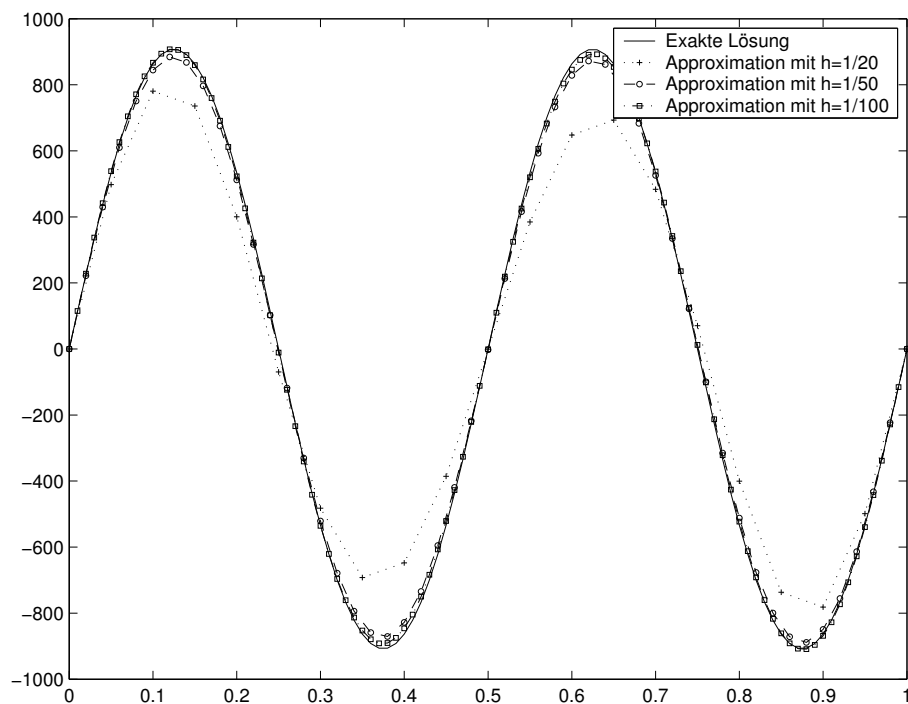


Abbildung A.21: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 6, \varepsilon = 10^{-4}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

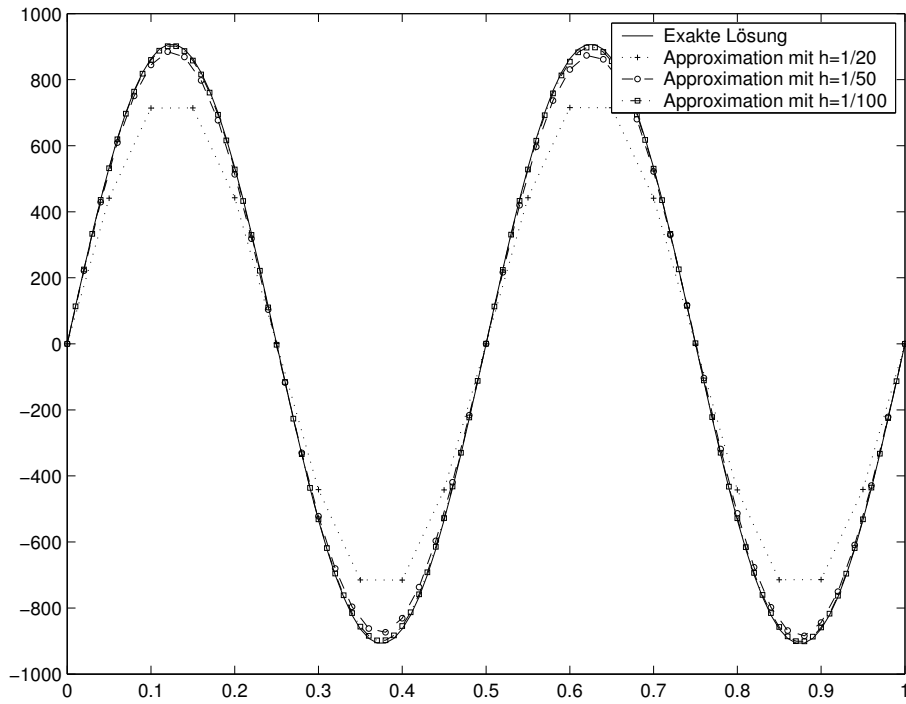


Abbildung A.22: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 6, \varepsilon = 10^{-5}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

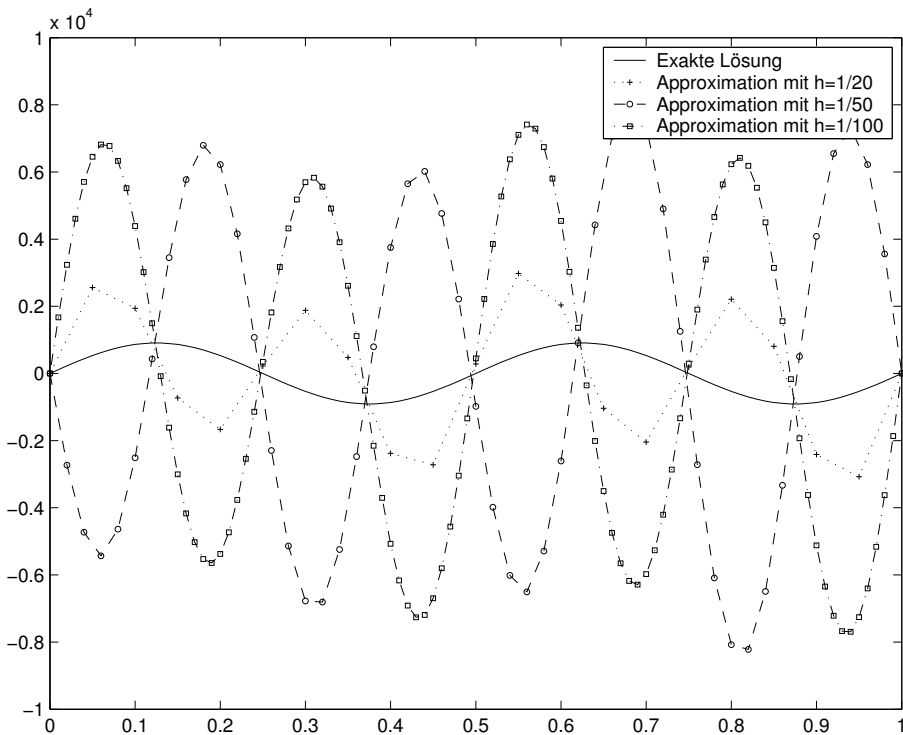


Abbildung A.23: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 8, \varepsilon = 10^{-4}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

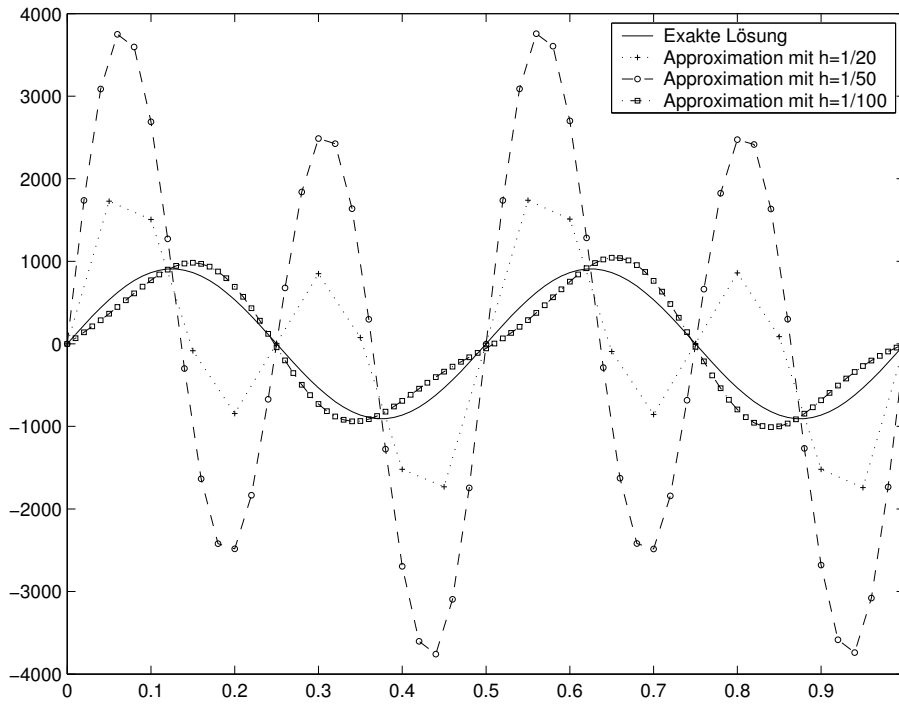


Abbildung A.24: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 8, \varepsilon = 10^{-5}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

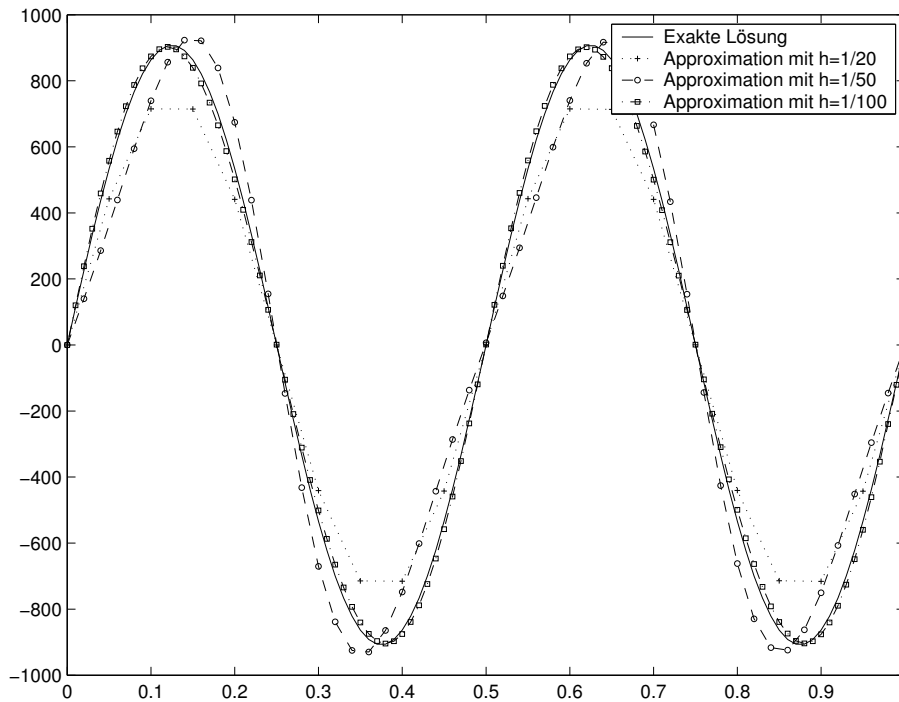


Abbildung A.25: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 8, \varepsilon = 10^{-6}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

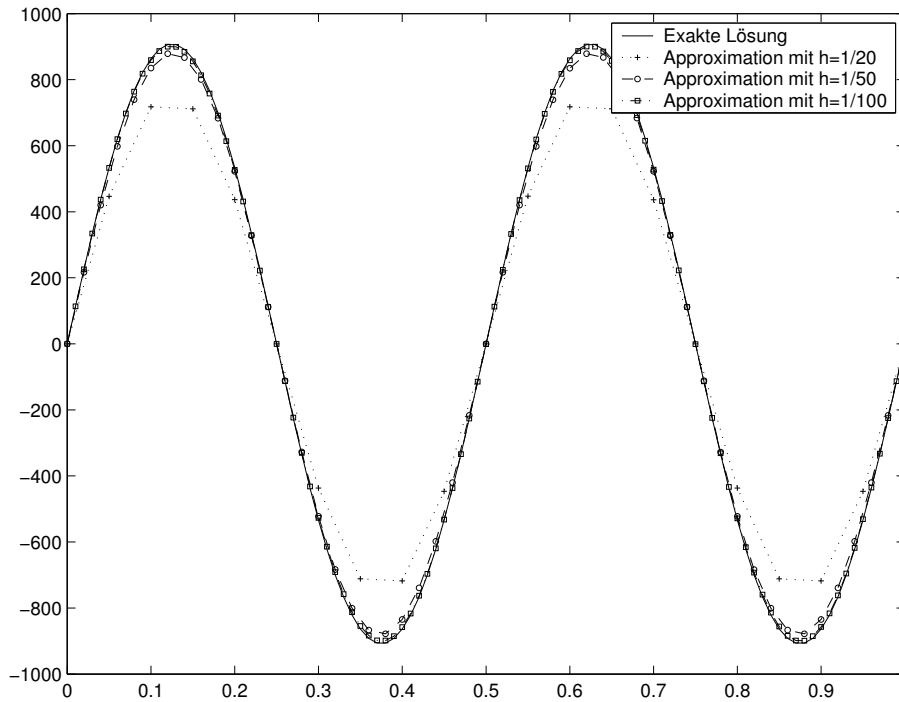


Abbildung A.26: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $m = 4, M = 8, \varepsilon = 10^{-7}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

Tabellen der relativen L_2 Fehler für $m = 2, M = 2, 4, 6$

εh	1/10	1/20	1/50	1/100	1/200
10^{-1}	0.1669	0.0644	0.0636	0.0317	0.0401
10^{-2}	0.1094	0.0184	0.0090	0.0059	0.000298
10^{-3}	0.0830	0.0217	0.0028	0.0010	0.000678
10^{-4}	0.0827	0.0214	0.0035	0.000799	0.000231
10^{-5}	0.0827	0.0214	0.0035	0.000865	0.000217
10^{-6}	0.0827	0.0215	0.0035	0.000868	0.000217
10^{-7}	0.0827	0.0215	0.0035	0.000869	0.000217
10^{-8}	0.0827	0.0215	0.0035	0.000868	0.000217
10^{-9}	0.0827	0.0215	0.0035	0.000868	0.000217

Tabelle A.1: Tabelle der relativen L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $m = 2, M = 2$

ϵh	1/10	1/20	1/50	1/100	1/200
10^{-1}	1.7921	40.5332	23.4700	6.0819	7.2186
10^{-2}	0.4867	3.1379	2.2146	0.1649	1.1912
10^{-3}	0.1072	0.1596	0.2746	0.1839	0.0649
10^{-4}	0.0832	0.0278	0.0410	0.0251	0.0112
10^{-5}	0.0828	0.0215	0.0038	0.000869	0.000717
10^{-6}	0.0827	0.0215	0.0035	0.000869	0.000218
10^{-7}	0.0827	0.0215	0.0035	0.000869	0.000218
10^{-8}	0.0827	0.0215	0.0035	0.000868	0.000217
10^{-9}	0.0827	0.0215	0.0035	0.000868	0.000217

Tabelle A.2: Tabelle der relativen L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $m = 2, M = 4$

ϵh	1/10	1/20	1/50	1/100	1/200
10^{-1}	2755.9	1920.7	5762.6	6970	686.3378
10^{-2}	215.0121	445.4885	203.6338	168.2934	686.3378
10^{-3}	6.3917	37.5976	6.7237	94.8566	16.9782
10^{-4}	2.6422	1.2587	9.7417	2.4154	2.9198
10^{-5}	0.2562	0.3675	0.2819	0.1092	0.0633
10^{-6}	0.0827	0.0313	0.0829	0.0477	0.0332
10^{-7}	0.0827	0.0215	0.0069	0.0011	0.0015
10^{-8}	0.0827	0.0215	0.0035	0.000906	0.000536
10^{-9}	0.0827	0.0215	0.0035	0.000870	0.000218

Tabelle A.3: Tabelle der relativen L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $m = 2, M = 6$

Tabellen der relativen L_2 Fehler für $m = 4$, $M = 4, 6, 8$

ϵh	1/10	1/20	1/50	1/100	1/200
10^{-1}	0.4846	0.1296	0.0239	0.0534	0.0045
10^{-2}	0.5305	0.1736	0.0373	0.0045	0.0123
10^{-3}	0.5247	0.1716	0.0317	0.0077	0.0026
10^{-4}	0.5248	0.1723	0.0301	0.0075	0.0019
10^{-5}	0.5248	0.1724	0.0299	0.0076	0.0019
10^{-6}	0.5248	0.1724	0.0300	0.0076	0.0019
10^{-7}	0.5248	0.1724	0.0300	0.0076	0.0019
10^{-8}	0.5248	0.1724	0.0300	0.0076	0.0019
10^{-9}	0.5248	0.1724	0.0300	0.0076	0.0019

Tabelle A.4: Tabelle der relativen L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $m = 4$, $M = 4$

ϵh	1/10	1/20	1/50	1/100	1/200
10^{-1}	2.8395	2.8837	8.3514	79.0735	34.6211
10^{-2}	0.5236	6.4816	0.3495	8.8031	4.7383
10^{-3}	0.5495	0.2161	0.0341	0.0109	0.2627
10^{-4}	0.5248	0.1803	0.0392	0.0487	0.0146
10^{-5}	0.5248	0.1724	0.0299	0.0097	0.0026
10^{-6}	0.5248	0.1724	0.0300	0.0076	0.0019
10^{-7}	0.5248	0.1724	0.0300	0.0076	0.0019
10^{-8}	0.5248	0.1724	0.0300	0.0076	0.0019
10^{-9}	0.5248	0.1724	0.0300	0.0076	0.0019

Tabelle A.5: Tabelle der relativen L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $m = 4$, $M = 6$

ϵh	1/10	1/20	1/50	1/100	1/200
10^{-1}	74.5841	1635.9	4638.2	11385	11537
10^{-2}	9.9124	247.9661	249.0695	207.3906	147.6746
10^{-3}	1.9868	77.3240	539.5085	97.2035	45.4039
10^{-4}	0.5273	9.2201	11.7567	20.5920	16.5640
10^{-5}	0.5248	1.3331	4.1414	0.9237	1.7288
10^{-6}	0.5248	0.1947	0.1065	0.1800	0.0291
10^{-7}	0.5248	0.1724	0.0327	0.0088	0.0073
10^{-8}	0.5248	0.1724	0.0300	0.0076	0.0019
10^{-9}	0.5248	0.1724	0.0300	0.0076	0.0019

Tabelle A.6: Tabelle der relativen L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $m = 4, M = 8$

A.1.2 Ein inhomogenes Problem

Die Neumann-Daten, ihre Störung und Projektion

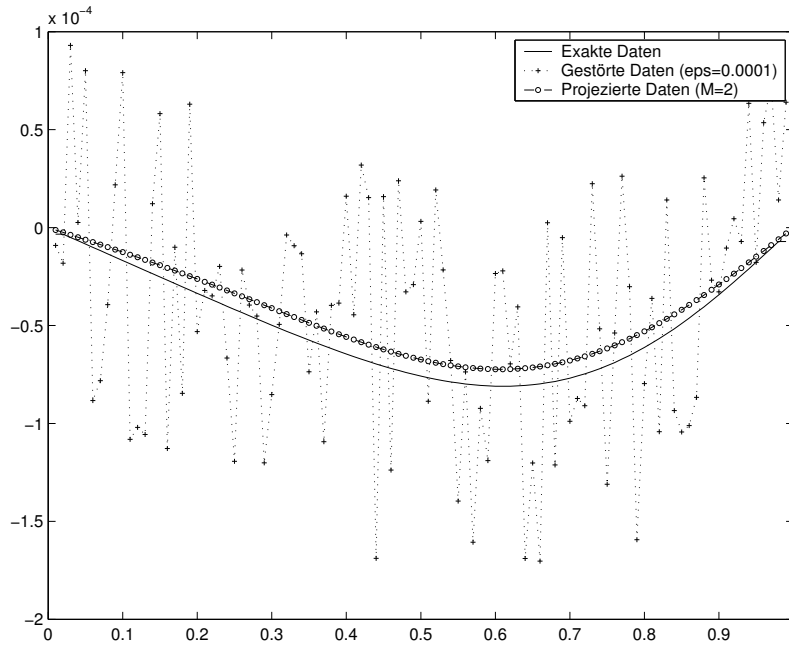


Abbildung A.27: Exakte Daten Φ_1 , gestörte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon$ und projizierte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon^*$ bei $y = 0$ für $M = 2, \varepsilon = 0.0001, h = \frac{1}{100}$

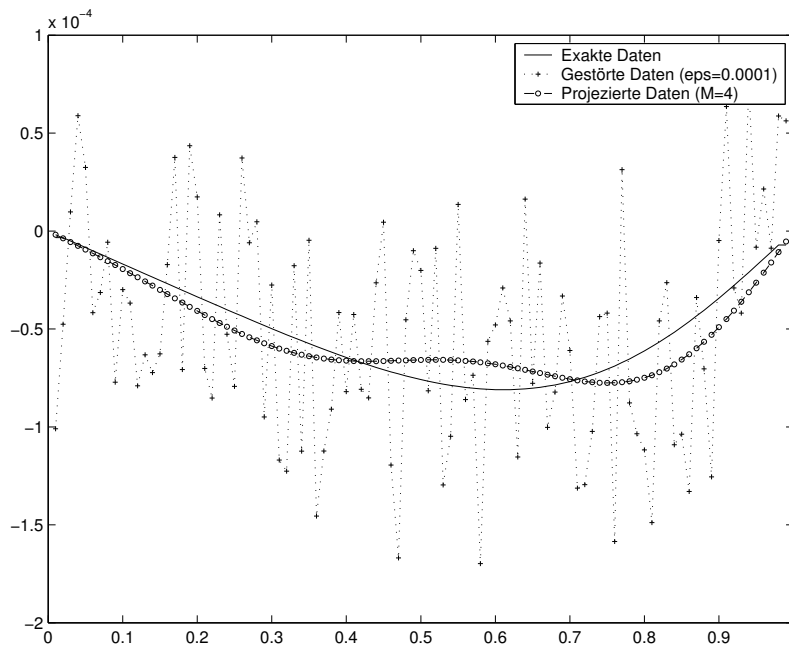


Abbildung A.28: Exakte Daten Φ_1 , gestörte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon$ und projizierte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon^*$ bei $y = 0$ für $M = 4, \varepsilon = 0.0001, h = \frac{1}{100}$

Lösungsfiguren bei $y = 1$ zu $\bar{h} = \frac{1}{50}$, $M = 2$ jeweils für verschiedene Störungen ε

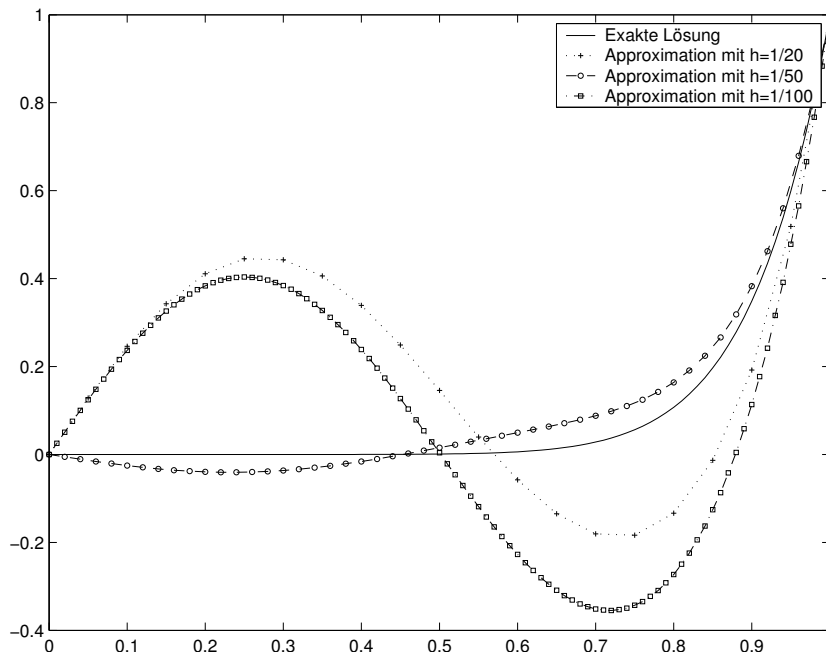


Abbildung A.29: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{50}$, $M = 2$, $\varepsilon = 10^{-1}$, $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

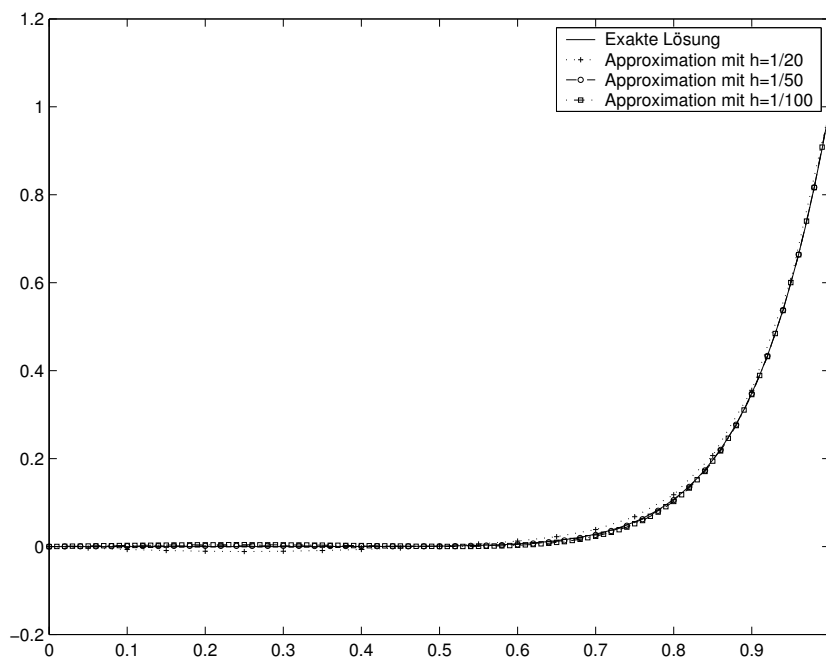


Abbildung A.30: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{50}$, $M = 2$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

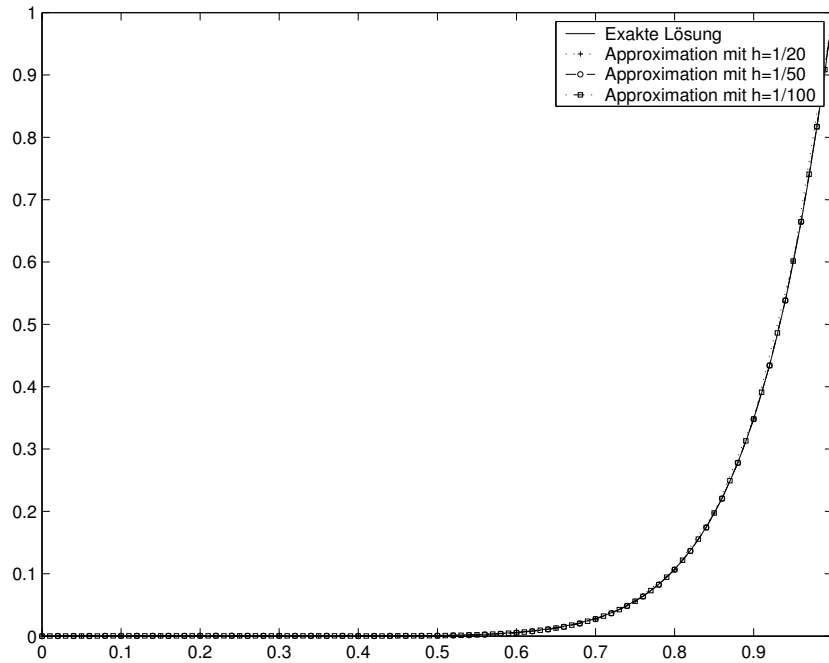


Abbildung A.31: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{50}$, $M = 2$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

Lösungsfiguren bei $y = 1$ zu $\bar{h} = \frac{1}{50}$, $M = 4$ jeweils für verschiedene Störungen ε

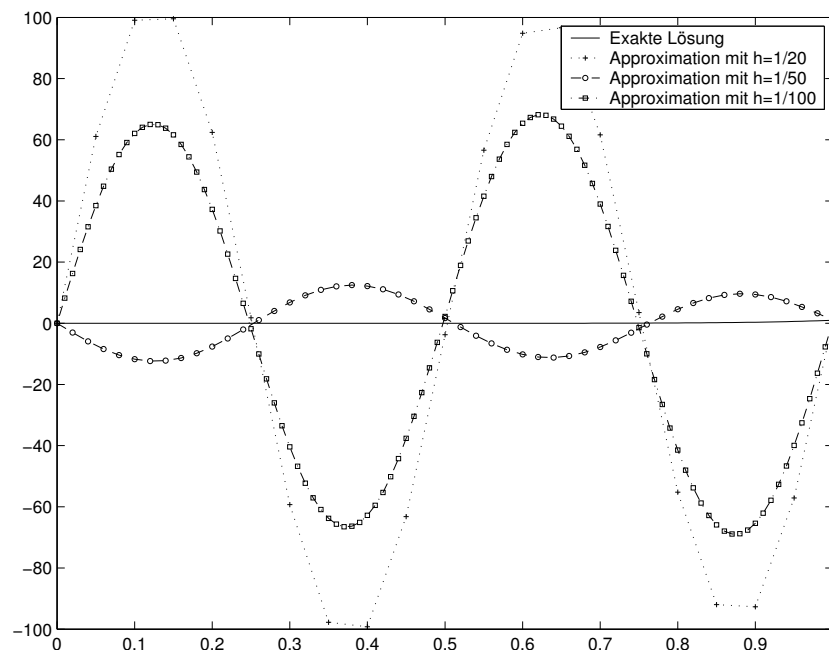


Abbildung A.32: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{50}$, $M = 4$, $\varepsilon = 10^{-1}$, $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

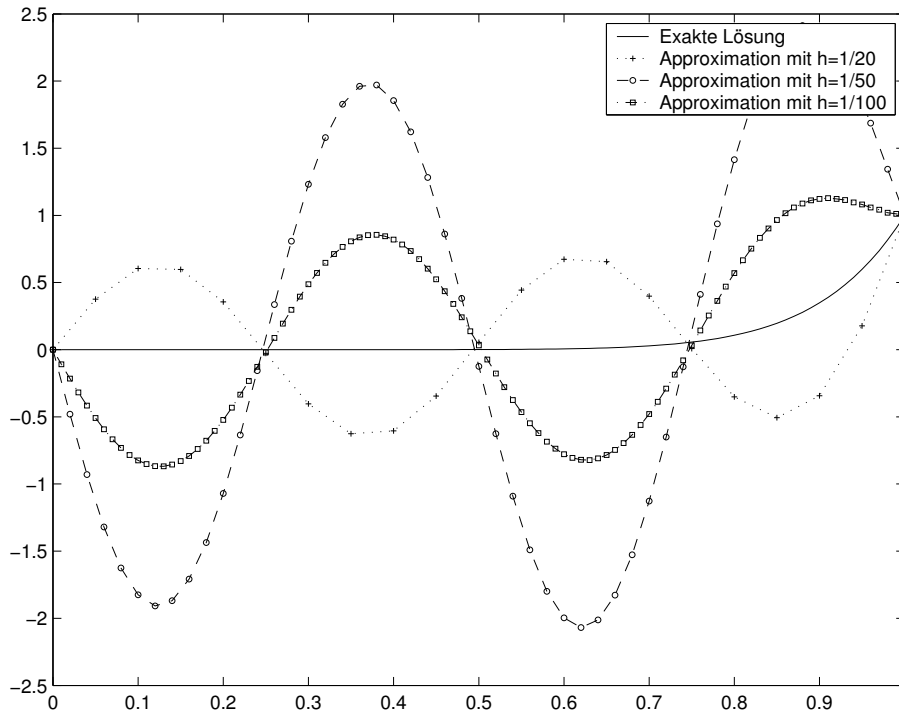


Abbildung A.33: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{50}$, $M = 4$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

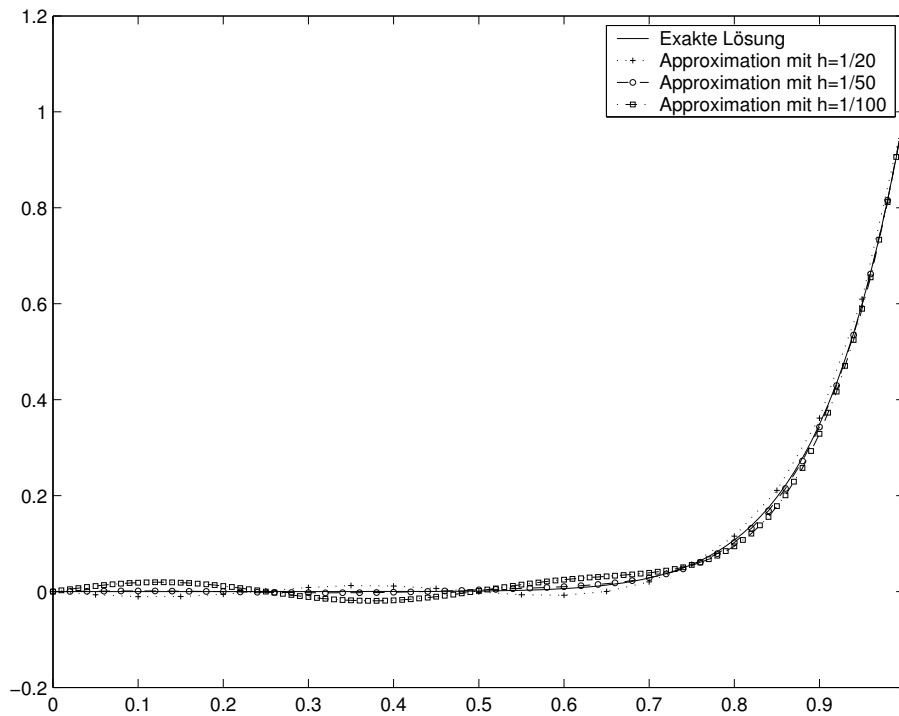


Abbildung A.34: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{50}$, $M = 4$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

Tabellen der relativen L_2 Fehler für $\bar{h} = \frac{1}{50}$, $M = 2, 4$, $\bar{h} = \frac{1}{200}$, $M = 2, 4$

ϵh	1/10	1/20	1/50	1/100	1/200
10^{-1}	0.1676	1.6598	1.3893	0.6377	0.0470
10^{-2}	0.1904	0.0574	0.2270	0.1228	0.0634
10^{-3}	0.0003	0.0050	0.0011	0.0157	0.0042
10^{-4}	0.0016	0.0044	0.0018	0.0042	0.0036
10^{-5}	0.0014	0.0027	0.0022	0.0034	0.0035
10^{-6}	0.0013	0.0027	0.0020	0.0035	0.0035
10^{-7}	0.0013	0.0027	0.0020	0.0035	0.0035
10^{-8}	0.0013	0.0027	0.0020	0.0035	0.0035
10^{-9}	0.0013	0.0027	0.0020	0.0035	0.0035

Tabelle A.7: Tabelle der relativen L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $\bar{h} = \frac{1}{50}$, $M = 2$

ϵh	1/10	1/20	1/50	1/100	1/200
10^{-1}	128.5319	141.6385	461.2240	367.8401	125.0381
10^{-2}	12.2541	35.5654	21.7265	43.2654	10.6683
10^{-3}	3.4099	4.7120	1.2004	1.3798	0.1429
10^{-4}	0.1935	0.1398	0.0666	0.6265	0.4937
10^{-5}	0.0044	0.0064	0.0905	0.0474	0.0120
10^{-6}	0.0042	0.0120	0.0047	0.0139	0.0100
10^{-7}	0.0040	0.0068	0.0100	0.0098	0.0095
10^{-8}	0.0039	0.0067	0.0097	0.0098	0.0099
10^{-9}	0.0039	0.0067	0.0097	0.0099	0.0099

Tabelle A.8: Tabelle der relativen L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $\bar{h} = \frac{1}{50}$, $M = 4$

ϵh	1/10	1/20	1/50	1/100	1/200
10^{-1}	1.9113	0.9841	0.7587	0.5458	0.2573
10^{-2}	0.4450	0.1598	0.0481	0.1449	0.0242
10^{-3}	0.0096	0.0229	0.00025	0.0032	0.0060
10^{-4}	0.0021	0.00028	0.0021	0.00052	0.00063
10^{-5}	0.00003	0.00011	0.00013	0.00012	0.00011
10^{-6}	0.00006	0.00013	0.00013	0.00012	0.00013
10^{-7}	0.00008	0.00010	0.00013	0.000138	0.00013
10^{-8}	0.00008	0.00011	0.00012	0.00013	0.00012
10^{-9}	0.00008	0.00011	0.00012	0.00013	0.00012

Tabelle A.9: Tabelle der relativen L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $\bar{h} = \frac{1}{200}$, $M = 2$

ϵh	1/10	1/20	1/50	1/100	1/200
10^{-1}	482.8794	871.1858	106.5752	119.5399	264.6641
10^{-2}	6.2407	46.2396	33.8862	10.4903	15.4253
10^{-3}	0.8771	3.9691	3.9912	0.6217	3.8853
10^{-4}	0.0588	0.3004	0.2500	0.1904	0.7319
10^{-5}	0.0481	0.0586	0.0016	0.0066	0.0254
10^{-6}	0.00039	0.0035	0.0048	0.00056	0.0053
10^{-7}	0.00037	0.00018	0.00097	0.00061	0.00054
10^{-8}	0.00025	0.00049	0.00051	0.00063	0.00063
10^{-9}	0.00023	0.00045	0.00059	0.00064	0.00065

Tabelle A.10: Tabelle der relativen L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $\bar{h} = \frac{1}{200}$, $M = 4$

A.2 Beispiele zu einer Gleichung mit Diffusionskoeffizient

Die Neumann-Daten, ihre Störung und Projektion

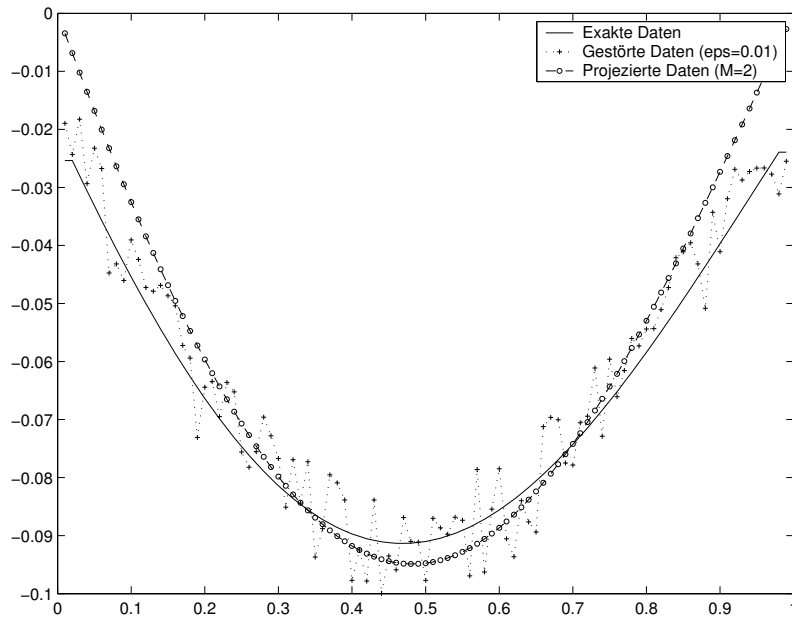


Abbildung A.35: Exakte Daten Φ_1 , gestörte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon$ und projizierte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon^*$ bei $y = 0$ für $M = 2, \varepsilon = 0.01, h = \frac{1}{100}$

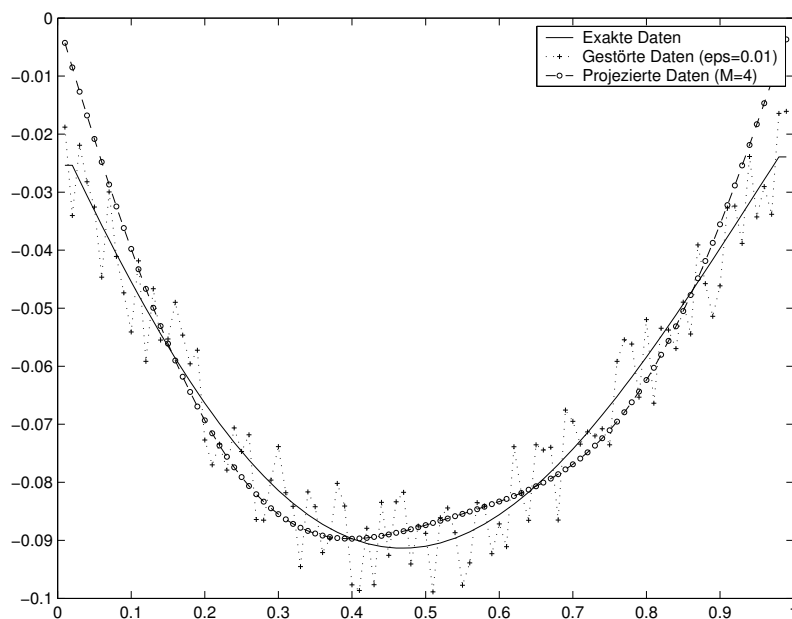


Abbildung A.36: Exakte Daten Φ_1 , gestörte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon$ und projizierte Daten $(\Phi_1)_\varepsilon^*$ bei $y = 0$ für $M = 4, \varepsilon = 0.01, h = \frac{1}{100}$

Lösungsfiguren bei $y = 1$ zu $\bar{h} = \frac{1}{50}, \bar{h} = \frac{1}{200}, M = 2$ für Störungen $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}$

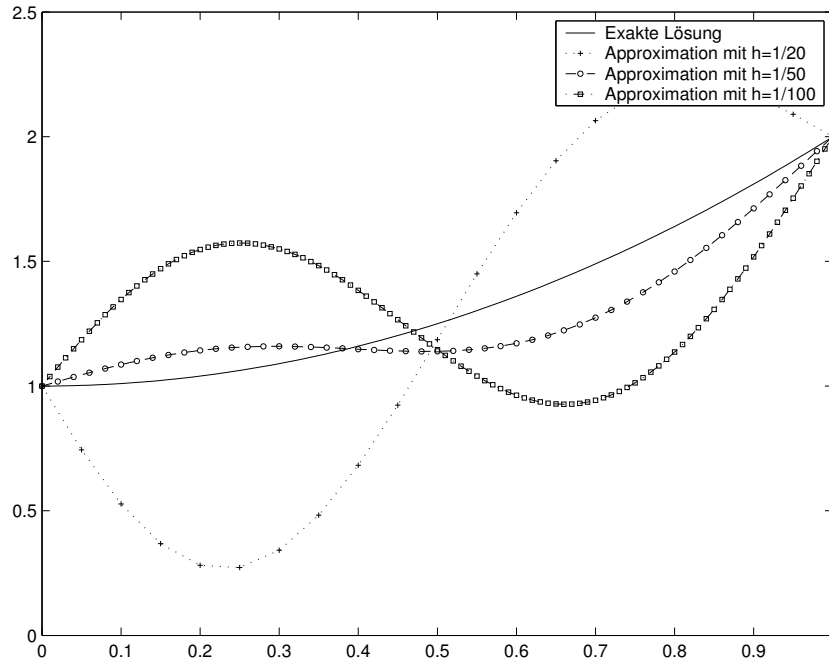


Abbildung A.37: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{50}, M = 2, \varepsilon = 10^{-1}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

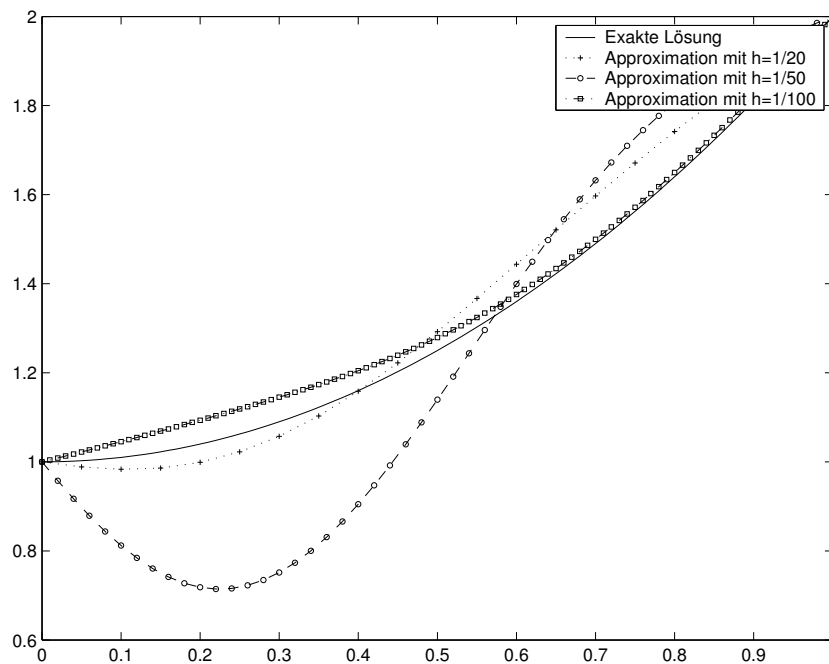


Abbildung A.38: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{200}, M = 2, \varepsilon = 10^{-1}, h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

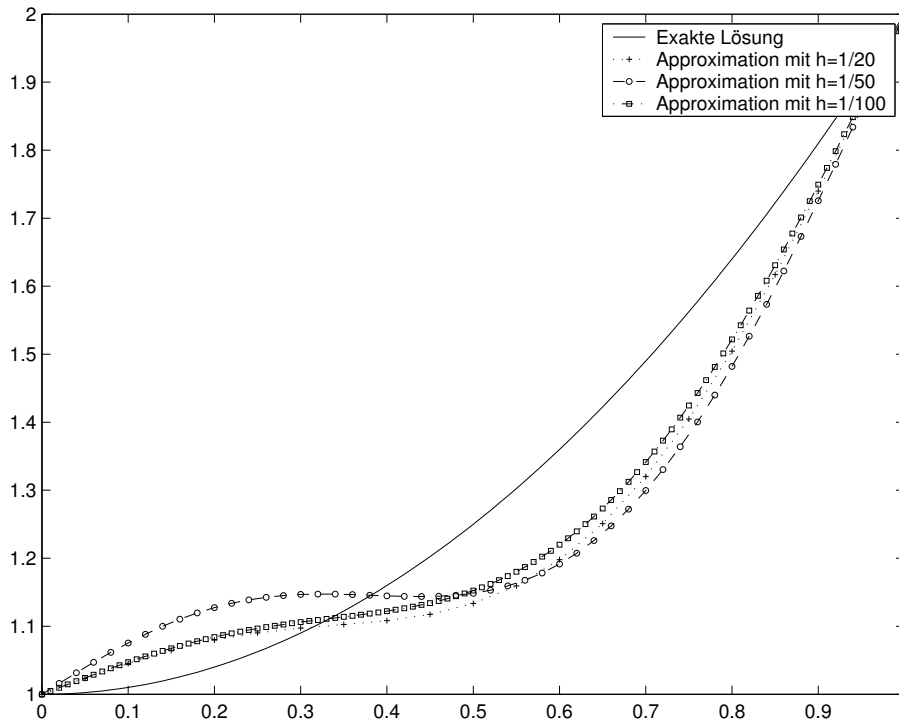


Abbildung A.39: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{50}$, $M = 2$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

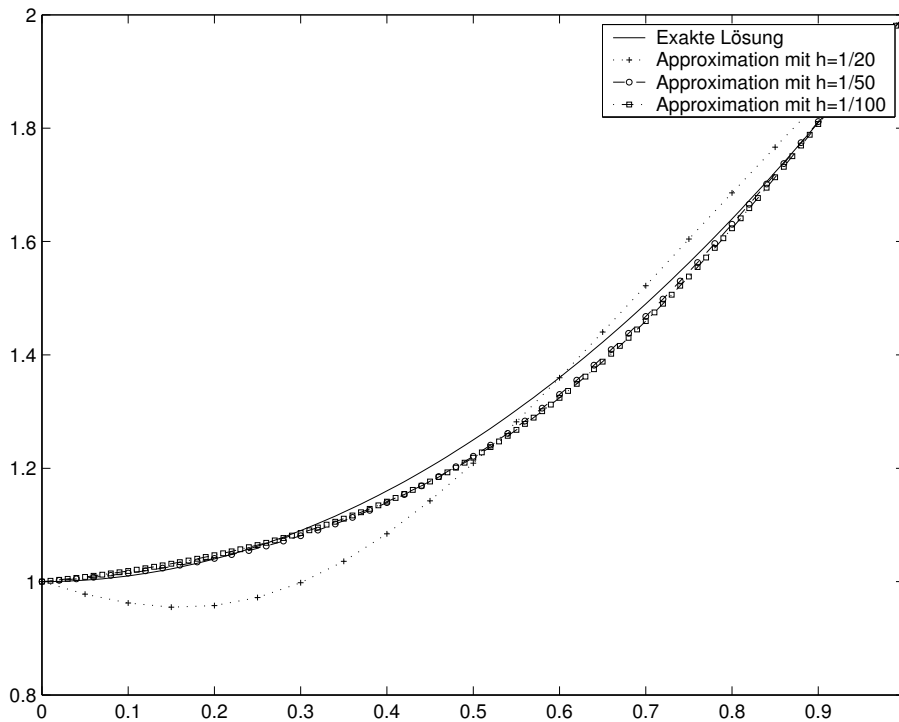


Abbildung A.40: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{200}$, $M = 2$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

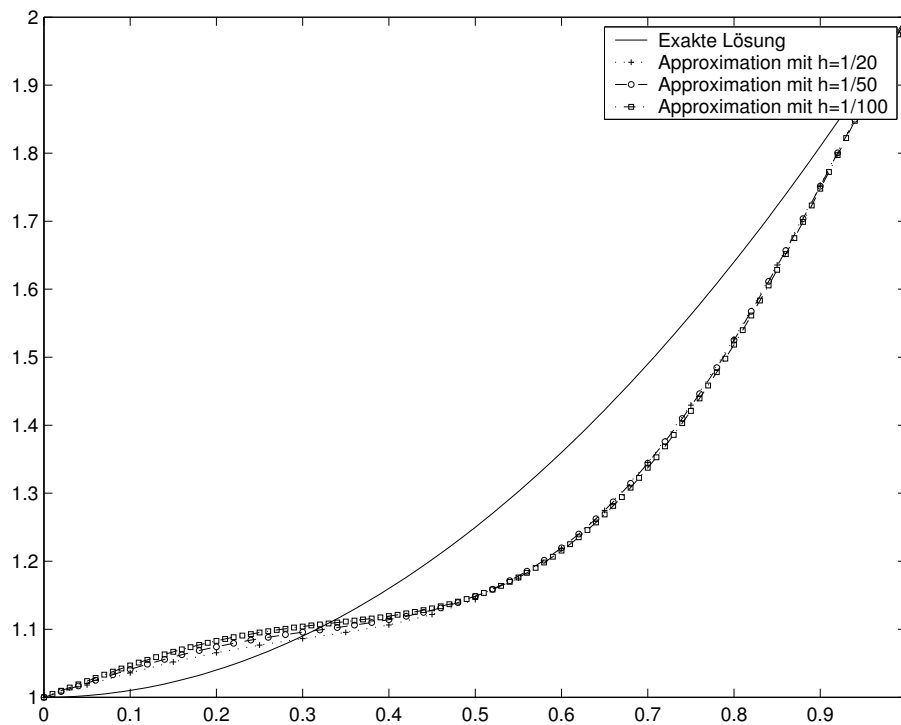


Abbildung A.41: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{50}$, $M = 2$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

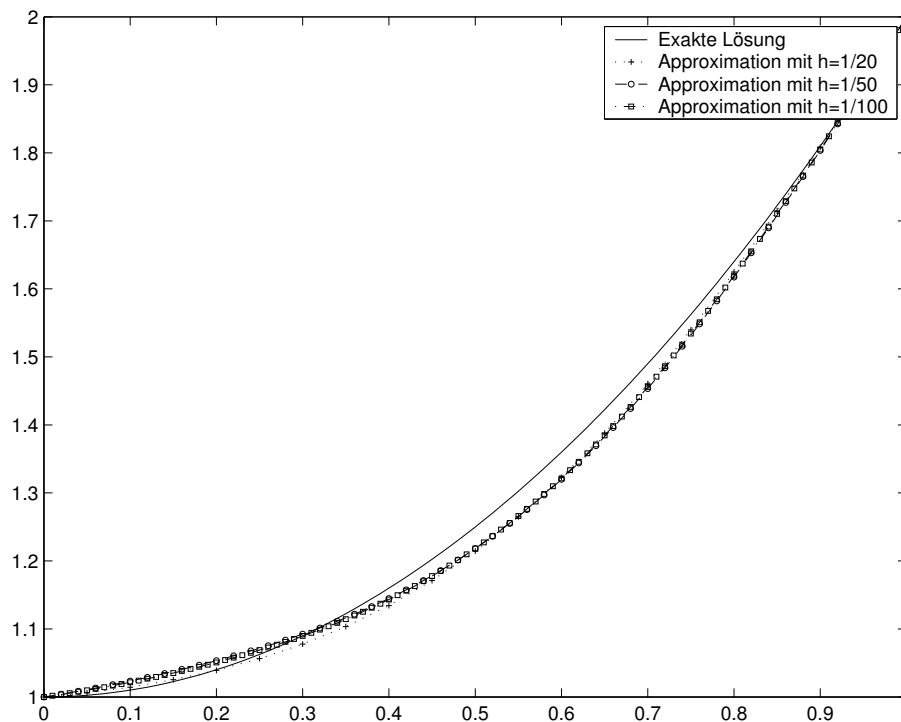


Abbildung A.42: Exakte Lösung u und Näherungslösung der Linienmethode bei $y = 1$ für $\bar{h} = \frac{1}{200}$, $M = 2$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

Tabellen der relativen L_2 Fehler für $\bar{h} = \frac{1}{50}$, $M = 2$ sowie $\bar{h} = \frac{1}{200}$, $M = 2$

ϵh	1/10	1/20	1/50	1/100	1/200
10^{-1}	0.2004	0.1765	0.1332	0.0638	0.1170
10^{-2}	0.0968	0.0479	0.0937	0.0775	0.0708
10^{-3}	0.0583	0.0640	0.0651	0.0653	0.0657
10^{-4}	0.0590	0.0632	0.0642	0.0642	0.0644
10^{-5}	0.0593	0.0628	0.0640	0.0643	0.0643
10^{-6}	0.0593	0.0629	0.0641	0.0643	0.0643
10^{-7}	0.0593	0.0629	0.0641	0.0643	0.0643
10^{-8}	0.0593	0.0629	0.0641	0.0643	0.0643
10^{-9}	0.0593	0.0629	0.0641	0.0643	0.0643

Tabelle A.11: Tabelle der relativen L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $\bar{h} = \frac{1}{50}$, $M = 2$

ϵh	1/10	1/20	1/50	1/100	1/200
10^{-1}	0.3323	0.3368	0.0771	0.1473	0.1938
10^{-2}	0.0641	0.0723	0.0281	0.0139	0.0179
10^{-3}	0.0166	0.0191	0.0179	0.0172	0.0175
10^{-4}	0.0162	0.0164	0.0170	0.0171	0.0167
10^{-5}	0.0164	0.0167	0.0169	0.0170	0.0170
10^{-6}	0.0163	0.0168	0.0169	0.0170	0.0170
10^{-7}	0.0163	0.0167	0.0169	0.0170	0.0170
10^{-8}	0.0163	0.0167	0.0169	0.0170	0.0170
10^{-9}	0.0163	0.0167	0.0169	0.0170	0.0170

Tabelle A.12: Tabelle der relativen L_2 -Fehler für die Linienmethode mit $\bar{h} = \frac{1}{200}$, $M = 2$

A.3 Zum Problem der Randidentifizierung

A.3.1 Das Hadamard-Beispiel

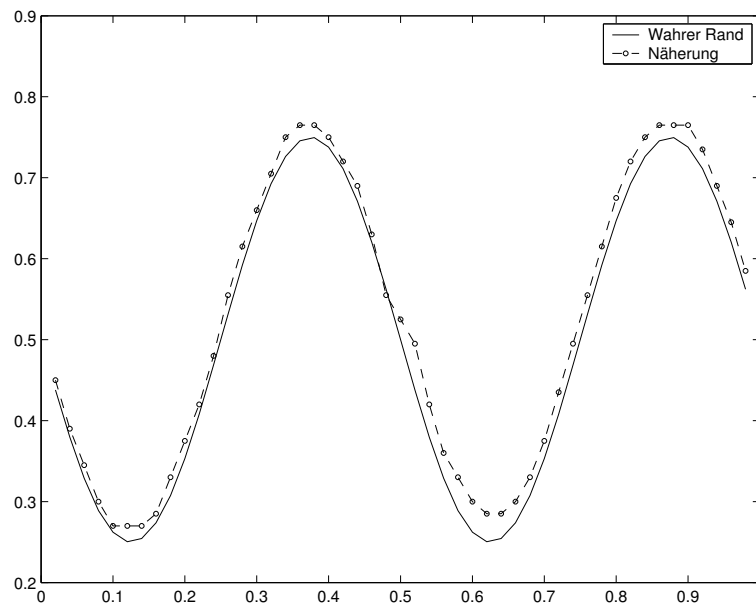


Abbildung A.43: Exakte Randform $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin(4\pi x)$ und Näherung für $m = 2, M = 2, \varepsilon = 10^{-1}, h = \frac{1}{50}$

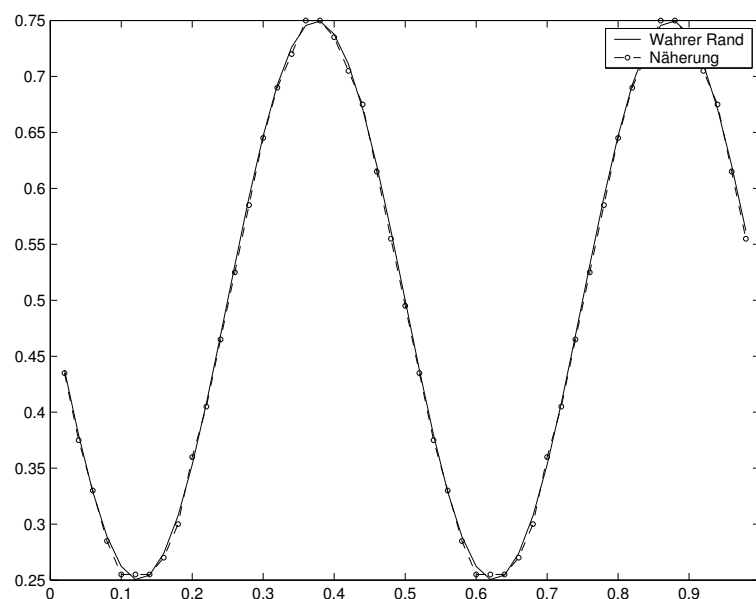


Abbildung A.44: Exakte Randform $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin(4\pi x)$ und Näherung für $m = 2, M = 2, \varepsilon = 10^{-3}, h = \frac{1}{50}$

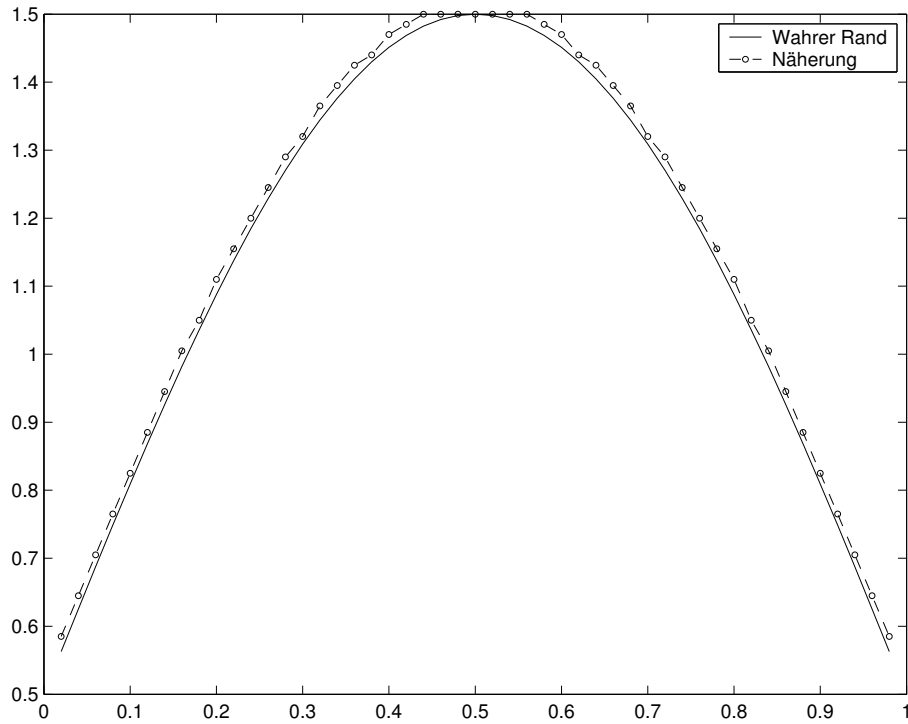


Abbildung A.45: Exakte Randform $\frac{1}{2} + \sin(\pi x)$ und Näherung für $m = 2, M = 2, \varepsilon = 10^{-1}, h = \frac{1}{50}$

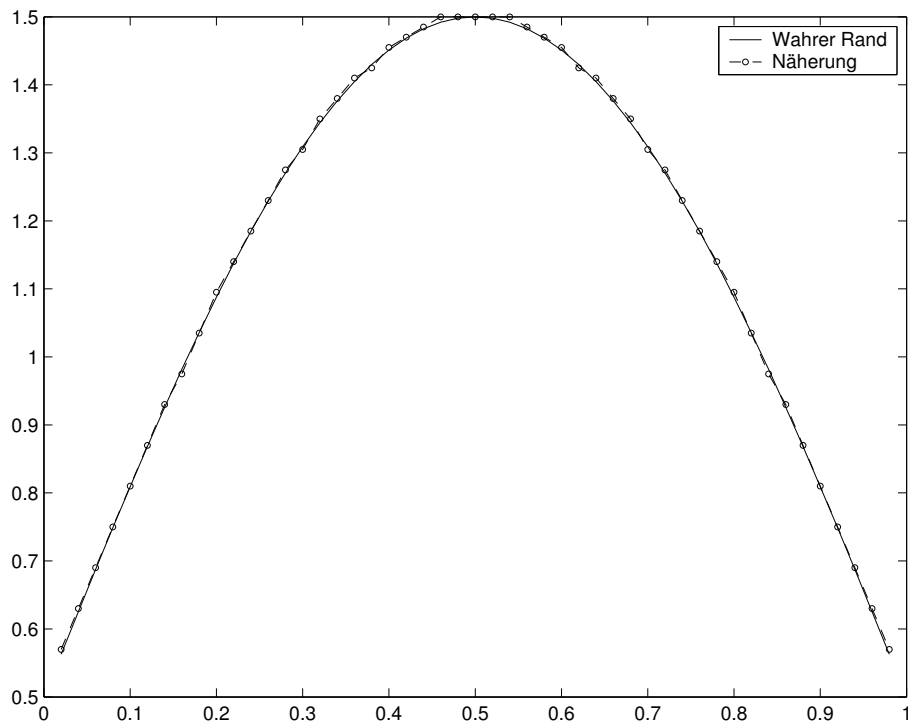


Abbildung A.46: Exakte Randform $\frac{1}{2} + \sin(\pi x)$ und Näherung für $m = 2, M = 2, \varepsilon = 10^{-3}, h = \frac{1}{50}$

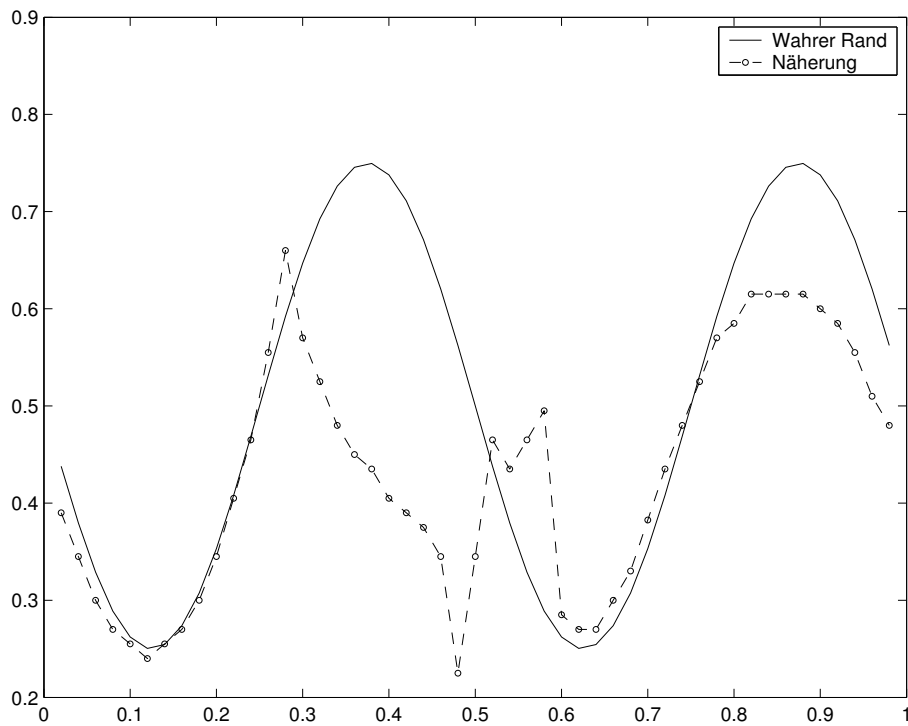


Abbildung A.47: Exakte Randform $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin(4\pi x)$ und Näherung für $m = 2, M = 4, \varepsilon = 10^{-1}, h = \frac{1}{50}$

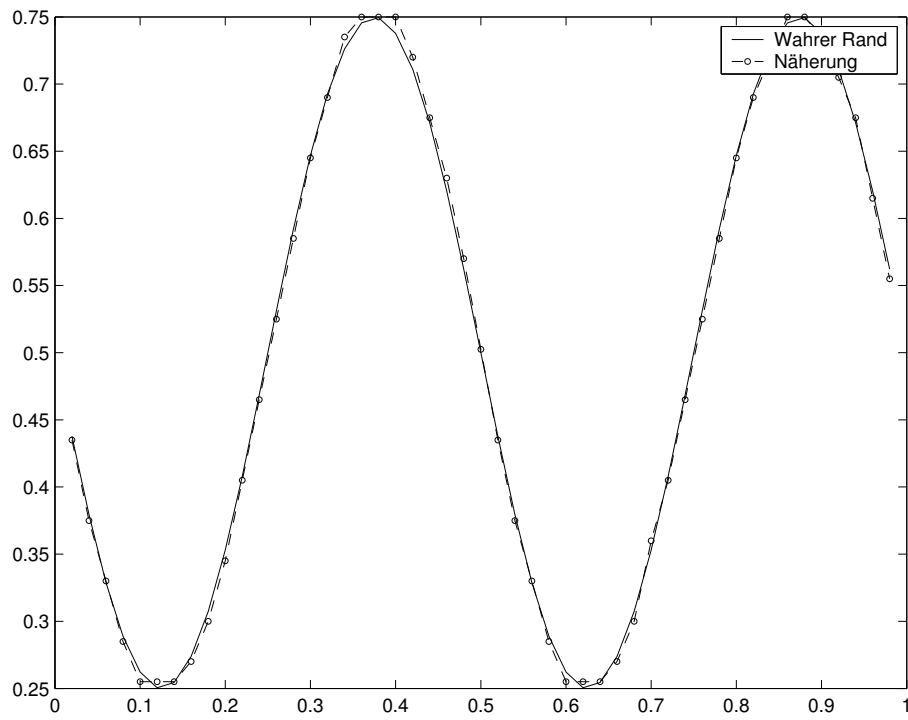


Abbildung A.48: Exakte Randform $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin(4\pi x)$ und Näherung für $m = 2, M = 4, \varepsilon = 10^{-3}, h = \frac{1}{50}$

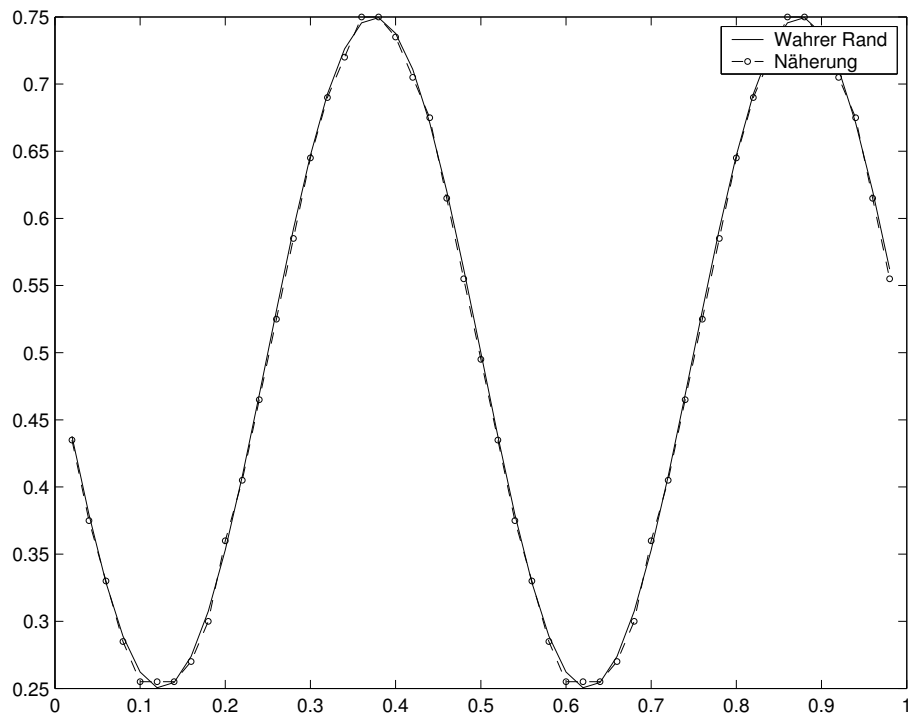


Abbildung A.49: Exakte Randform $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin(4\pi x)$ und Näherung für $m = 2, M = 4, \varepsilon = 10^{-5}, h = \frac{1}{50}$

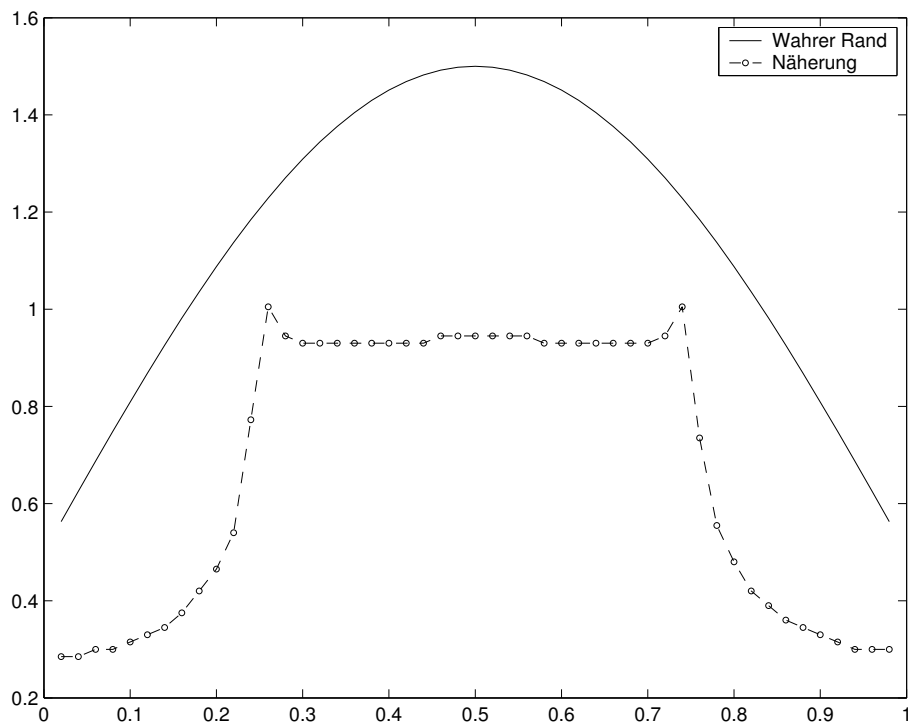


Abbildung A.50: Exakte Randform $\frac{1}{2} + \sin(\pi x)$ und Näherung für $m = 2, M = 4, \varepsilon = 10^{-1}, h = \frac{1}{50}$

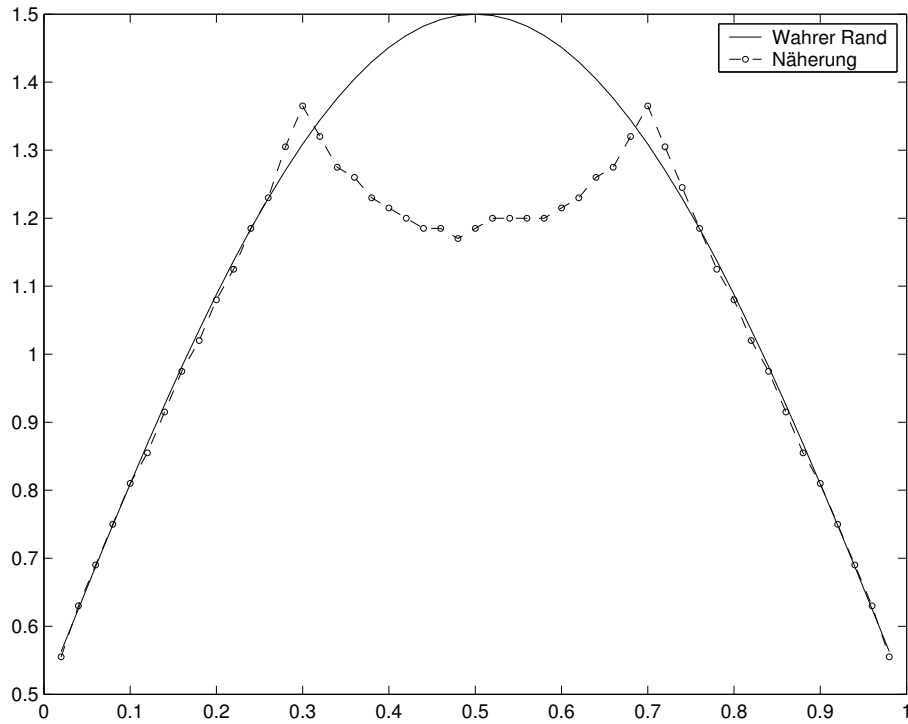


Abbildung A.51: Exakte Randform $\frac{1}{2} + \sin(\pi x)$ und Näherung für $m = 2, M = 4, \varepsilon = 10^{-3}, h = \frac{1}{50}$

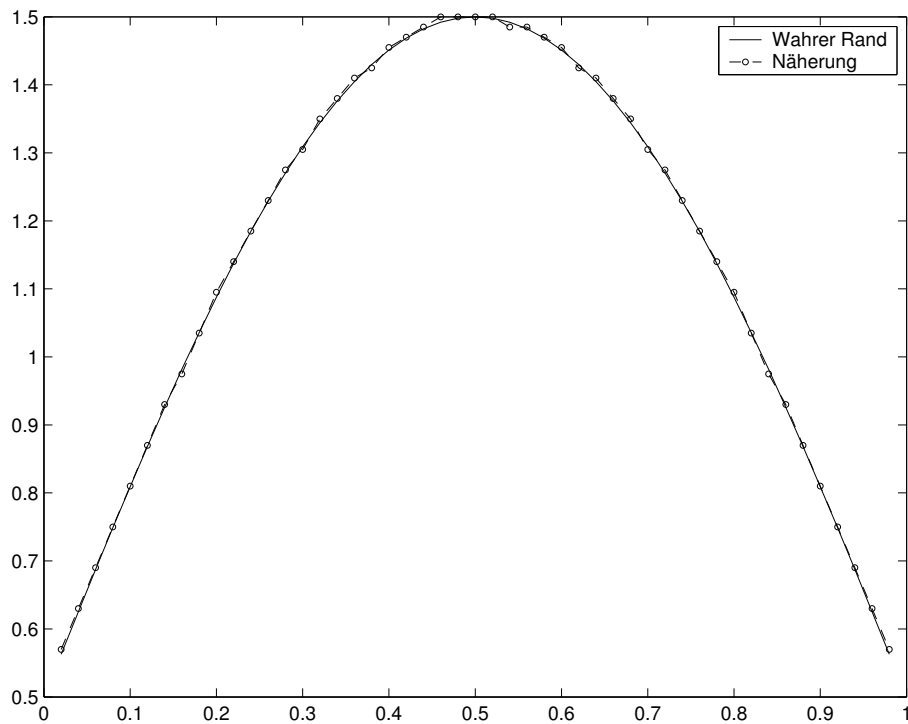


Abbildung A.52: Exakte Randform $\frac{1}{2} + \sin(\pi x)$ und Näherung für $m = 2, M = 4, \varepsilon = 10^{-5}, h = \frac{1}{50}$

A.3.2 Ein inhomogenes Problem

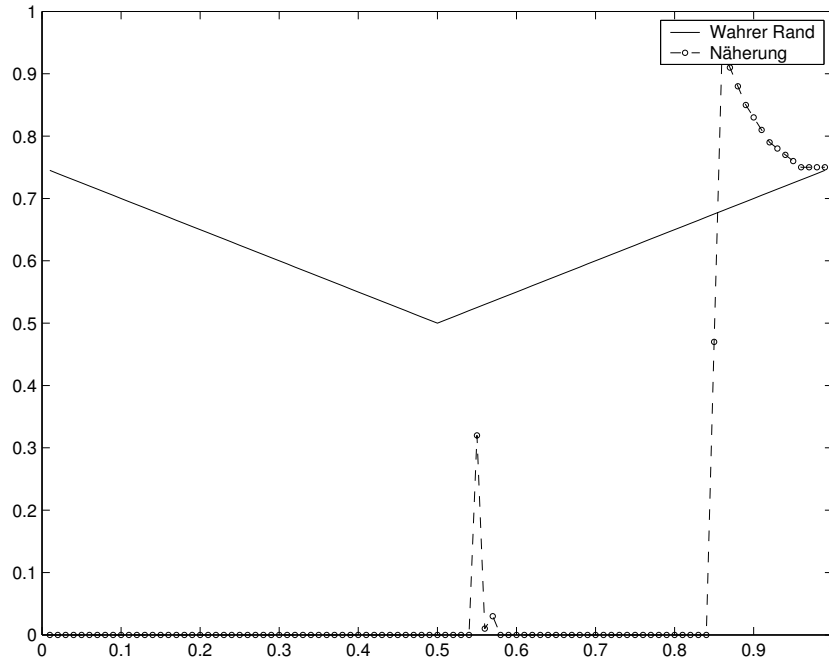


Abbildung A.53: Exakte Randform $\frac{1}{2} (1 + |\frac{1}{2} - x|)$ und Näherung für $\bar{h} = \frac{1}{100}$, $M = 2$, $\varepsilon = 10^{-1}$, $h = \frac{1}{50}$

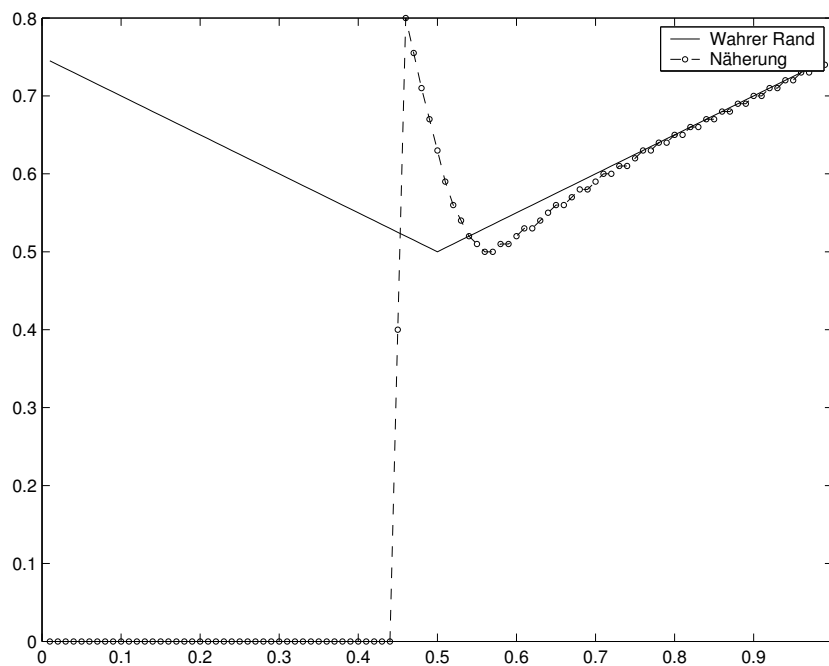


Abbildung A.54: Exakte Randform $\frac{1}{2} (1 + |\frac{1}{2} - x|)$ und Näherung für $\bar{h} = \frac{1}{100}$, $M = 2$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $h = \frac{1}{50}$

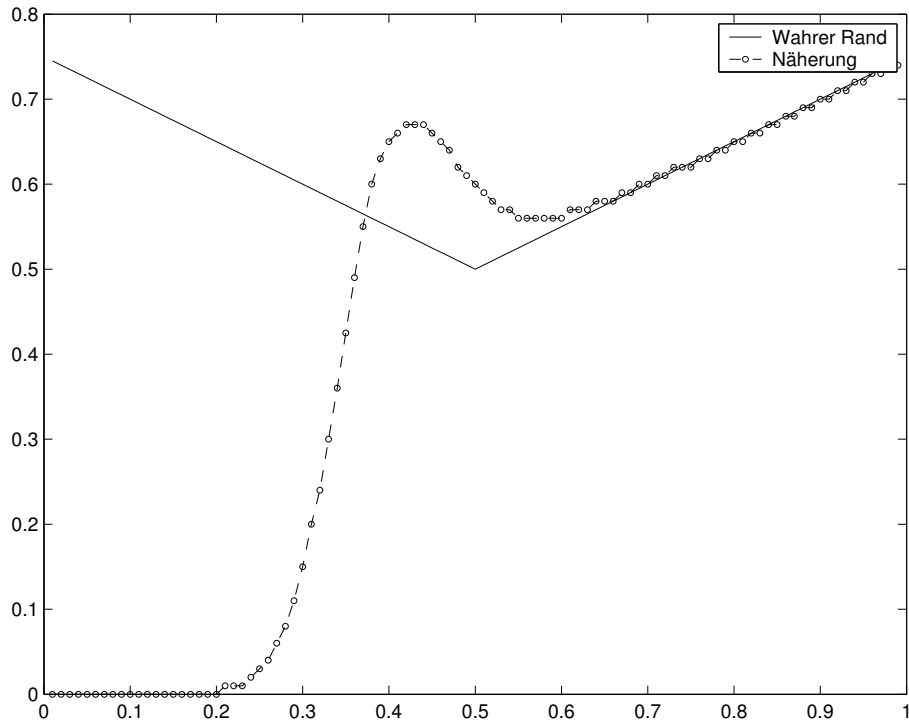


Abbildung A.55: Exakte Randform $\frac{1}{2} (1 + |\frac{1}{2} - x|)$ und Näherung für $\bar{h} = \frac{1}{100}$, $M = 2$, $\varepsilon = 10^{-7}$, $h = \frac{1}{50}$

Literaturverzeichnis

- [AES97] M.S. Agranovich, Y.V. Egorov und M.A. Shubin (Hrsg.). *Partial differential equations IX: Elliptic boundary value problems*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, v.79. Springer, Berlin, 1997.
- [Agm65] S. Agmon. *Lectures on elliptic boundary value problems*. Van Nostrand Mathematical Studies No. 2, 1965.
- [Ale93] G. Alessandrini. *Stable determination of a crack from boundary measurements*. Proc. R. Soc. Edinburgh, v. 123, 1993, pp. 497-516.
- [Ale97] G. Alessandrini. *Examples of instability in inverse boundary value problems*. Inverse Problems, v. 13, 1997, pp. 887-897.
- [Ang90] G. Anger. *Inverse problems in differential equations*. Plenum Press, New York, 1990.
- [AR98] G. Alessandrini, L. Rondi. *Stable determination of a crack in a planar inhomogeneous conductor*. SIAM J. Math. Anal., v. 30, 1998, pp. 326-340.
- [Aro57] N.A. Aronszajn. *A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order*. J. Math. Pures Appl., v. 36, 1957, pp. 235-249.
- [Ars61] F. M. Arscott. *Latent roots of tri-diagonal matrices*. Proc. Edinburgh Math. Soc., v. 12, Edinburgh Math. Notes No. 44, 1961, pp. 5-7.
- [AV95] D. D. Ang, L. K. Vy. *Domain identification for harmonic functions*. Act. App. Math., v. 38, 1995, pp. 217-238.
- [Bau87] J. Baumeister. *Stable solution of inverse problems*. Vieweg, Braunschweig, 1987.
- [BCY99] A. L. Bukhgeim, J. Cheng, M. Yamamoto. *Stability for an inverse boundary problem of determining a part of a boundary*. Inverse Problems, v. 15, 1999, pp. 1021-1032.
- [Ber02] F. Berntsson. *Boundary identification for an elliptic equation*. Inverse Problems, v. 18, 2002, pp.1579-1592.
- [BK00] H. T. Banks, F. Kojima. *Boundary shape identification in two-dimensional electrostatic problems using SQUIDS*. J. Inv. Ill-Posed Problems, v. 8, No. 5, 2000, pp. 487-504.

- [BV98] E. Beretta, S. Vessella. *Stable determination of boundaries from the Cauchy data*. SIAM J. Math. Anal., v. 39., 1998, pp. 220-232.
- [Cal58] A.P. Calderon. *Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations*. Amer. J. Math., v.80, 1958, pp. 16-36.
- [Can64] J.R. Cannon. *Error estimates for some unstable continuation problems*. J. Soc. Indust. Appl. Math., v.12, 1964, pp. 270-284.
- [Car39] T. Carleman. *Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendentes*. Ark. Mat. Astr. Fys., v. 26, No. 17, 1939, pp. 1-9.
- [CD68] J.R. Cannon und J. Douglas, JR. *The approximation of harmonic and parabolic functions on half spaces from interior data*. Numerical Analysis of Partial Differential Equations (C.I.M.E. secondo Ciclo, Ispra, 1967), Editioni Cremonese, Rome, 1968, pp. 193-230.
- [CD77] J.R. Cannon und P. DuChateau. *Approximating the solution to the Cauchy Problem for Laplace's Equation*. SIAM J. Numer. Anal., v.14, 1977, pp. 473-483.
- [CH68] R. Courant und D. Hilbert. *Methoden der mathematischen Physik*. 2 Bände. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1937 und 1968.
- [CK83] D. Colton und R. Kress. *Integral equation methods in scattering theory*. Wiley, New York, 1983.
- [CK92] D. Colton und R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering*. Springer, New York, 1992.
- [CL55] E. Coddington und N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill, New York, 1955.
- [CL90] P. G. Ciarlet und J. L. Lions, Hrsg. *Handbook of numerical analysis. Volume II, Part 1*. North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [CM65] J.R. Cannon und K. Miller. *Some problems in numerical analytic continuation*. SIAM J. Numer. Anal., v.2, 1965, pp.87-98.
- [CRH02] M. Charton, H.-J. Reinhardt, Dinh Nho Hào. *Numerical solution of an elliptic shape optimization problem*. In: D. Petit, D. B. Ingham, Y. Jarny, F. Plourde (Hrsg.): École Nationale Supérieure de Mécanique (ENSMA) (Veranst.): Inverse Problems and Experimental Design in Thermal and Mechanical Engineering (Euro Therm 68, F-Poitiers, 5.-7.3.2001), ENSMA, Poitiers, 2002, pp. 101-107.
- [Dau88] M. Dauge. *Elliptic boundary value problems on corner domains*. Lecture Notes in Mathematics, v. 1341. Springer, Berlin, 1988.
- [Do60] J. Douglas, JR. *A numerical method for analytic continuation*. Boundary Value Problems in Differential Equations, University of Wisconsin Press, 1960, pp. 179-189.

- [Dou60] A. Douglis. *Uniqueness in Cauchy problems for elliptic systems of equations*. Comm. Pure Appl. Math., v. 13, 1960, pp. 593-608.
- [ET76] I. Ekeland und R. Teman. *Convex analysis and variational problems*. American Elsevier, New York, 1976.
- [Fis75] G. Fischer. *Lineare Algebra*. Vieweg, Braunschweig, 1975.
- [FM79] P.C. Franzone und E. Magenes. *On the inverse potential problem of electrocardiology*. Calcolo, v. 16, 1979, pp.459-538.
- [FM86] R.S. Falk und P.B. Monk. *Logarithmic convexity for discrete harmonic functions and the approximation of the Cauchy Problem for Poisson's Equation*. Mathematics of Computation, v.47, 1986, pp. 135-149.
- [FTV85] P.C. Franzone, S. Tentoni, C. Viganotti, S.Baruffi, S. Spaggiari und B. Taccardi. *A mathematical procedure for solving the inverse potential problem of elektrokardiography from in vitro experimental data*. Math. Biosci., v.77, 1985, pp. 353-396
- [Fur90] A.V. Fursikov. *The Cauchy Problem for a second order elliptic equation in a conditionally well-posed formulation*. Trans. Moscow Math. Soc., v.52, 1990, pp. 139-176.
- [GKK70] V.B. Glasko, V.V. Kravtsov und G.N. Kraftsova. *On an inverse problem of gravimetry*. Vestnik Moskov Univ. Ser. III Phys. Astr., v.11, 1970, pp. 174-179. Englische Übersetzung des russischen Originals in: Moscow Univ. Phys. Bull., v.25, 1970.
- [GL88] R.B. Guenther und J.W. Lee. *Partial differential equations of mathematical physics and integral equations*. Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, 1988.
- [Gla73] V.B. Glasko et al. *Solution of the inverse problem of gravimetry for a contact surface using the regularization method*. Izv. Akad. Nauk SSSR Phys. Zemli, 1973, no. 2, pp.30-41. Englische Übersetzung des russischen Originals in: Izv. Akad. Sci. USSR Phys. Solid Earth, 1973.
- [Gri85] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Pitman, New York, 1985.
- [Gro93] C.W. Groetsch. *Inverse problems in mathematical sciences*. Vieweg, Braunschweig, 1993.
- [GT77] D. Gilbarg und N.S.Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, Berlin, 1977.
- [Hac86] W. Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner, Stuttgart, 1986.
- [Had23] J. Hadamard. *Lectures on the Cauchy problem in linear partial differential equations*. Yale University Press, New Haven, 1923.
- [Han82] H. Han. *The finite element method in a family of improperly posed problems*. Mathematics of Computation, v.38, 1982, pp. 55-65.
- [Hen91] E. Hensel. *Inverse theory and applications for engineers*. Prentice Hall, Englewood-Cliffs, 1991.

- [Heu95] H. Heuser. *Gewöhnliche Differentialgleichungen. Einführung in Lehre und Gebrauch*. Dritte, durchgesehene Auflage. Teubner, Stuttgart, 1995.
- [Heu01] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 1 und 2*. 14., durchgesehene Auflage. Teubner, Stuttgart, 2001.
- [HH03] Dinh Nho Hào, Pham Minh Hien. *Stability results for the Cauchy problem for the Laplace equation in a strip*. Inverse Problems, v. 19, 2003, pp. 833-844.
- [Hoe76] L. Hörmander. *Linear partial differential operators*. Springer, Berlin, 1976.
- [Hoe83] L. Hörmander. *Uniqueness theorems for second order elliptic differential equations*. Comm. Partial Differential Equations, v.8, 1983, pp. 21-64.
- [HR97] H. Han und H.J. Reinhardt. *Some stability estimates for Cauchy problems of elliptic equations*. J. Inv. Ill-posed Probl., v.5, 1997, pp. 437-454.
- [HVG92] Dinh Nho Hào, Tran Duc Van und R. Gorenflo. *Towards the Cauchy problem for the Laplace equation*. Banach Center Publications, v.27, 1992, pp. 111-128.
- [Iso90] Y. Iso. *Mathematical foundations for boundary element methods*. Sugaku Expositions, v.3, 1990, pp. 233-252.
- [Jae02] K. Jänich. *Lineare Algebra*. Springer, Berlin, 2002.
- [Joh55] F. John. *A note on "improper" problems in partial differential equations*. Comm. Pure Appl. Math., v.8, 1955, pp. 494-495.
- [Joh60] F. John. *Continuous dependence on the data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound*. Comm. Pure Appl. Math., v.13, 1960, pp. 551-586.
- [Kam50] E. Kamke. *Differentialgleichungen reeller Funktionen*. 2. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1950.
- [Kel76] J.B. Keller. *Inverse problems*. Am. Math. Mon., v.83, 1976, pp. 107-118.
- [Kir96] Andreas Kirsch. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. Springer, New York, 1996.
- [KIT93] M. Kubo, Y. Iso und O. Tanaka. *Numerical analysis for the initial value problem for the Laplace equation*. In: *Boundary Element Methods* (Eds M. Tanaka, Q. Du und T. Honma). Elsevier, New York, 1993.
- [KK95] S.I. Kabanikhin und A.L. Karchevsky. *Optimizational method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation*. J. Inv. Ill-Posed Problems, v.3, No.1, 1995, pp. 21-46.
- [KP79] R.J. Knops und L.E. Payne. *Uniqueness and continuous dependence of the null solution in the Cauchy problem for a nonlinear elliptic system*, In: *Inverse and improperly posed problems in differential equations*. G. Anger (ed.). Akademie-Verlag, Berlin, 1979, pp. 151-160.

- [KS91] M.V. Klibanov und F. Santosa. *A computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace's Equation*. SIAM J. Appl. Math., v.51, No.6, 1991, pp. 1653-1675.
- [Kub94] M. Kubo. *L^2 -conditional stability estimate for the Cauchy problem for the Laplace equation*. J. Inv. Ill-Posed Problems, v.2, No.3, 1994, pp. 253-261.
- [KSV96] P. G. Kaup , F. Santosa, M. Vogelius. *Method for imaging corrosion damage in thin plates from electrostatic data*. Inverse Problems, v. 12, 1996, pp. 279-293.
- [Kum62] H. Kumano-go. *On the uniqueness of the solution of the Cauchy problem and the unique continuation theorem for elliptic equations*. OsakaMath. J., v.14, 1962, pp. 182-212.
- [Lav56] M.M. Lavrentiev. *On the Cauchy problem for the Laplace equation*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., v.20, 1956, pp. 819-842.
- [Lav67] M.M. Lavrentiev. *Some improperly posed problems in mathematical physics*. Springer, New-York, 1967.
- [LL69] R. Lattes und J.L. Lions. *The method of quasi-reversibility: Applications to partial differential equations*. Elsevier, New York, 1969.
- [Lou89] A.K. Louis. *Inverse und schlecht gestellte Probleme*. Teubner, Stuttgart, 1989.
- [LP67] P.D. Lax und R.S. Phillips. *Scattering theory*. Academic Press, New York, 1967.
- [LRS86] M.M. Lavrentiev, V.G. Romanov und S.P. Shishatskii. *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis*. American Mathematical Society, Providence, 1986.
- [LV86] H.A. Levine und S. Vassella. *Estimates and regularization for solutions of some ill-posed problems of elliptic and parabolic type*. Rend. Circ. Mat. Palermo, v.123, 1986, pp. 161-183.
- [MD87] T. Myint-U und L. Debnath. *Partial differential equations for scientists and engineers*. North-Holland, New-York, 1987.
- [Mil64] K. Miller. *Three circles theorem in partial differential equations and applications to improperly posed problems*. Arch. Rat. Mech. Anal., v.16, 1964, pp. 126-154.
- [MK74] V.G. Mazya und V.P. Khavin. *On the solutions of the Cauchy problem for Laplace's equation (solvability, normality, approximation)*. Trans. Moscow math. Soc., v.30, 1974, pp. 65-117.
- [MM69] M. Marcus, H. Minc. *A survey of matrix theory and matrix inequalities*. Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1969.
- [MaM69] M. Marcus, H. Minc. *Introduction to linear algebra*. Macmillan, New York, 1969.
- [Nec67] J. Nečas. *Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques*. Masson, Paris, 1967.

- [Nir57] L. Nirenberg. *Uniqueness in the Cauchy problems for differential equations with constant leading coefficients*. Comm. Pure Appl. Math., v.10, 1957, pp. 89-105.
- [Nir72] L. Nirenberg. *Lectures on linear partial differential equations*. AMS Regional Conf. in Math., No. 17, 1972.
- [Pay60] L.E. Payne. *Bounds in the Cauchy Problem for the Laplace Equation*. Arch. Rational Mech. Anal., v.5, 1960, pp. 35-45.
- [Pay70] L.E. Payne. *On a priori bounds in the Cauchy problem for elliptic equations*. SIAM J. Math. Anal., v.1, 1970, pp. 82-89.
- [Pay75] L.E. Payne. *Improperly Posed Problems in Partial Differential Equations*. SIAM, Philadelphia, Pa., 1975.
- [Pir84] O. Pironneau. *Optimal shape design for elliptic systems*. Springer, New York, 1984.
- [Pow83] M.J.D. Powell. *ZQPCVX, a FORTRAN subroutine for convex programming*. Report DAMTP/1983/NA17, University of Cambridge, England, 1983.
- [Pro60] M.H. Protter. *Unique continuation for elliptic equations*. Trans. Amer. Math. Soc., v.95, 1960, pp. 81-91.
- [PW67] M.H. Protter und H.F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1967.
- [Rau90] G. Raulf. *Randwertprobleme für elliptische Systeme auf Lipschitzgebieten*. Schriftenreihe des mathematischen Instituts der Universität Münster, Serie 3, Heft 2, 1990.
- [Rei85] H.-J. Reinhardt. *A-posteriori estimation for finite element modifications of line methods applied to singularly perturbed partial differential equations*. Applied Numerical Mathematics 1, 1985, pp. 145-176.
- [Rei95] H.-J. Reinhardt. *Einführung in die Funktionalanalysis. Skriptum SS 1995*. Fachbereich Mathematik, Univ.-GH Siegen, 1995.
- [Rei97] H.-J. Reinhardt. *Differenzenapproximation partieller Differentialgleichungen. Vorlesungsskriptum WS 1996/97*. Fachbereich Mathematik, Univ.-GH Siegen, 1997.
- [RF87] A. Romanovich und A.V. Fursikov. *On the question of the solvability of the Cauchy problem for the Laplace operator*. Vestnik Moskov. Gos. Univ. Ser. I Mat. Mekh., 1987, No. 3, pp. 78-80.
- [RHH99] H.-J. Reinhardt, Houde Han und Dinh Nho Hào. *Stability and regularization of a discrete approximation to the Cauchy problem for Laplace's equation*. SIAM J. Numer. Anal., v. 36, No. 3, 1999, pp. 890-905.
- [RW98] E. Radmoser, R. Wincor. *Determining the inner contour of a furnace from temperature measurements*. Technical Report 12/1998. Industrial Mathematics Institute. Johannes Kepler Universität Linz, Linz, 1998.
- [Sch65] P.W. Schäfer. *On the Cauchy problem for an elliptic system*. Arch. Rat. Mech. Anal., v.20, 1965, pp. 391-412.

- [Sch73] P.W. Schäfer. *On uniqueness, stability and pointwise estimates in the Cauchy problem for coupled elliptic equations*. Quart. Appl. Math., v.31, 1973, pp. 321-328.
- [SH82] F. Stummel, K. Hainer. *Praktische Mathematik*. Teubner, Stuttgart, 1982.
- [Sob64] S.L. Sobolev. *Partial differential equations of mathematical physics*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1964.
- [Str95] W.A. Strauss. *Partielle Differentialgleichungen*. Vieweg, 1995.
- [Wal90] W. Walter. *Analysis I*. Springer, Berlin, 1990.
- [Wal96] R. Walter. *Einführung in die lineare Algebra*. Vieweg, Braunschweig, 1996.
- [Wat71] K. Watanabe. *On the uniqueness of the Cauchy problem for certain elliptic equations with triple characteristics*. Tôhoku Math. J., v. 23, No. 2, 1971, pp. 473-490.
- [Zau83] E. Zauderer. *Partial differential equations of applied mathematics*. Wiley, New-York, 1983.
- [ZT86] E.C. Zachmanoglou und D.W. Thoe. *Introduction to partial differential equations with applications*. Dover Pub., New York, 1986.

Index

- Abbildung
 - symmetrische, 201
- Abkühlungsgesetz
 - Newtonsches, 5
- Abschneidefehler
 - für den Operator K_h , 280
 - für den Operator L_h , 188, 191
- Algorithmen
 - zur Linienmethode, 326
- analytische Funktion, 7
- Anfangsbedingung, 4, 7, 9
- Anfangswertproblem, 45
- Ansatzfunktion, 31
- Auswertung eines Polynoms, 17

- bedingt gutgestellt, *siehe* gutgestellt, be-
dingt
- belastete Membran, 15
- Beschränktheitsbedingung, 103, 146, 164,
304
- Brownsche Molekularbewegung, 8, 15

- Cauchy, A.L.
 - Konvergenzkriterium von, 22
- Cauchy-Daten, 67, 78, 146, 164, 333
- Cauchy-Problem
 - für die Laplace-Gleichung, 43, 46, 51,
73, 83, 103, 135, 138, 163, 166, 220,
289
 - für die Poisson-Gleichung, 1, 19–34, 43,
163, 326
 - für einen allgemeineren elliptischen
Operator, 164
 - homogenes, 327, 331
 - inhomogenes, 327, 331
 - Literatur zum, *siehe* Literatur, zum
Cauchy-Problem
- Charakteristik, 10
- cosinus hyperbolicus
 - Eigenschaften des, 121
- Courant
 - R. , 221

- d'Alembert
 - Formel von, 10
- Darstellung
 - der exakten Lösung, 73
 - für Daten aus D_M , 81
 - der Norm der exakten Lösung, 104
- Daten
 - gestörte, 51, 91, 97, 100, 328
 - ungestörte, 51, 100
- Datenfehler, 144, 156, 157, 328–330, 333
- Datenstörung, 83, 89, 91, 156, 160, 326,
327, 330
- Defekt, 283
- Defektminimierung, 31, 32
- Determinantenproduktsatz, 170
- diagonalisierbare Matrix, *siehe* Matrix,
diagonalisierbare
- Differentialgleichung, 2
 - elliptische, 163, 310
 - gewöhnliche, 207, 208
 - homogene, 209, 210
 - partielle, 207, 208
- Differentialoperator
 - L , 212
- Differentiation, 18
 - numerische, 18
- Differenzenoperator, 187, 193

- Differenzenquotient
 - rückwärtsgenommener, 166, 181, 185, 242, 250
 - vorwärtsgenommener, 166, 181, 185, 242, 327, 331
 - zentraler, 45
- Differenzenverfahren, 329
- Diffusion, 5
- Diffusionsgleichng, 8
- Diffusionskoeffizient, 163, 313, 331, 332, 334
- direktes Problem, 16, 19, 32, 326–332
- Dirichlet-Bedingung, 334
 - homogene, 103, 179, 208
- Dirichlet-Daten, 44, 45, 73, 74, 89
 - homogene, 91, 165, 311, 328
 - inhomogene, 99, 101, 326
- Dirichlet-Problem, 15
 - für die Poisson-Gleichung, 19
- Diskretisierung, 73, 166, 181
- Diskretisierungsfehler, 156, 318, 328–330, 333
- Diskretisierungsparameter, 51, 58, 326, 327, 329, 334

- Eigenbasis, 168, 180
- Eigenfunktion, 8, 9, 192, 212, 217
- Eigenraum, 218
- Eigenvektor, 46, 47, 168, 170, 174, 178, 204, 272
- Eigenvektoren
 - Vorzeichen der, 281
- Eigenwert, 8, 46, 47, 169, 172, 174, 177, 178, 180, 192, 201, 202, 204, 212, 217, 272
 - der diskreten Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, 200
 - der Fredholmschen Integralgleichung, 218
 - des diskreten Fredholmoperators, 200
 - des Fredholmschen Integraloperators, 217
 - einer symmetrischen Matrix, 168
- Eigenwerte
 - Abschätzung der diskreten, 204
 - Abschätzung der kontinuierlichen, 223
 - Realität der, 212
 - Sortierung der, 179, 192
- Eigenwertproblem
 - diskretes, 196
 - elliptisches, 7, 8
 - für den Fredholmoperator, 218
 - Sturm-Liouvillesches, 207, 208, 212, 214, 218, 221, 224, 226, 272, 288, 326
 - diskretes, 192, 199–201, 281, 288
- Einflußgebiet, 10
- elektrisches Potential, 14
- Elektrokardiologie
 - inverses Potentialproblem der, 24
- Entkoppelung, 48, 173, 179
- Entwicklungssätze, 219
- Entwicklungssatz
 - Laplacescher, 176
- Erzeugendensystem, 70
- Euler-Fouriersche Formeln, *siehe* Formeln, Euler-Fouriersche
- Exponentialfunktion, 22

- Fehler
 - relativer, 333
- Fehlerabschätzung, 73, 100, 101, 103, 148, 241
 - für die Linienmethode, 144, 154
 - im allgemeinen Fall, 313
- Fehleranalyse, 156, 318
- Fehleranteil, 156, 318, 333
- Folge
 - Bildungsgesetz einer, 17
- Formeln
 - Euler-Fouriersche, 66
- Formel von d’Alembert, 10
- Fourieranalysis, 62, 67, 221
- Fourierentwicklung

- verallgemeinerte, 219
- Fourierkoeffizienten, 65, 72, 110, 150, 152, 219, 311
- Fourierreihe, 65, 66
- Fredholmgleichung
 - diskrete homogene, 197, 199
- Fredholmoperator
 - diskreter, 196, 197, 201, 272, 281, 283
 - kontinuierlicher, 272
- Fredholmsche Integralgleichung, 214, 218
 - homogene, 214
- Fundamentalsystem, 49, 179, 208–210
- Funktion
 - affin lineare, 121
 - harmonische, 74
 - konkave, 95
 - stetige, stückweise lineare, 241, 258
- Funktionen
 - a -orthogonale, 215
- Gebiet, 6
- Geophysik, 24
- Gesamtfehler, 157
- Gewichtsfunktion, 215
- gewöhnliche Differentialgleichung, 8
- Gitter
 - äquidistantes, 181
- Gitterfunktion, 181, 186, 193, 246
- gleichförmig elliptischer Operator, *siehe* Operator, elliptischer, gleichförmig
- Gleichung, 2
 - Parsevalsche, *siehe* Parsevalsche Gleichung
- Gravimeter, 25
- Gravimetrik, 24
- Gravitationspotential, 14
- Greensche Funktion, 209, 211, 214, 275
 - diskrete, 193, 197, 275
 - Symmetrie der, 198, 277
 - Symmetrie der, 277
- gutgestellt
 - bedingt, 51
 - gutgestelltes Problem, 17, 32
- Hadamard, J.
 - Beispiel von, 19, 20, 33, 61, 73, 327, 330
- harmonische Funktion, 6
- harmonische Polynome, 6
- Hauptminor, 170, 171, 176, 177, 332
- Homomorphismus, 94, 290
- I. Fredholm, 214
- Integralformeln
 - einiger trigonometrischer Funktionen, 62
- Integralgleichung
 - Fredholmsche, *siehe* Fredholmsche Integralgleichung
- Integralgleichungen
 - erster Art, 18
- Integraloperator
 - Fredholmscher, 196, 214, 216, 217, 271, 280
 - kompakter, 18
- Intrusion, 25
- inverses Problem, 16–19, 32, 326
- inverses Streuproblem, 17
- inverse Wärmeleitung, 17, 18
- Isomorphismus, 181
 - isometrischer, 69, 288
- Kegelschnitt, 1, 11
- Kern
 - des Fredholmoperators, 214
- kompakter Integraloperator, *siehe* Integraloperator, kompakter
- Konvergenz, 73, 103
 - der diskreten Eigenvektoren, 272–287
 - der diskreten Eigenwerte, 241–272
 - der Linienmethode, 51
 - quadratische, 51, 83, 156
- Konvergenzkriterium
 - Cauchysches, 22
- Konvergenzsatz, 241
 - für $\phi_1, f_1 \in D_M$, 101

- für $\phi_1 \in D_M$, $f_1 = 0$, 99
- für beliebige ungestörte Daten, 79
- für Daten in D_M^a , 298
- für die Linienmethode
 - im Fall der Laplace-Gleichung, 157
 - im Fall einer allgemeineren elliptischen Gleichung, 318
- für ungestörte Daten in D_M , 82
- Konvexität, 105, 106
 - logarithmische, *siehe* logarithmische Konvexität
- Koordinatentransformation, 12
- korrekt gestelltes Problem, *siehe* gutgestelltes Problem
- Kronecker-Symbol, 64

- l'Hôpital, 86
 - Regel von, 54
- Landausches Symbol, 79
- Laplace-Gleichung, 6, 14, 15, 19–34, 45, 61, 163, 207, 241, 318, 325, 331
- Laplace-Operator, 6, 30, 45, 208
- Laufzeit, 330, 333
- Lavrentiev
 - M. M. , 103, 108, 129
- Leibniz-Kriterium, 53, 55
- Linienmethode, 45, 187
 - für einen allgemeineren elliptischen Operator, 163, 166
 - Numerische Beispiele für die, 325–372
- Literatur
 - zu elliptischen Problemen, 14
 - zu inversen Streuproblemen, 17
 - zum Cauchy-Problem, 30–34
 - zur Gravimetrik, 27
 - zur linearen Algebra, 167
 - zur Randidentifizierung, 29–30
 - zu schlecht gestellten Problemen, 18
- Lösung
 - der Linienmethode, 100
- Lösungsdarstellung
 - der exakten Lösung des kontinuierlichen Problems, 225
 - der Linienmethode, 50, 180, 204
- Lösungsdarstellungen
 - für frequenzbeschränkte Daten, 292
- Lösungsoperator
 - stetiger, 91
 - zum Cauchy-Problem, 146
- logarithmische Konvexität, 31, 33, 105, 106, 110, 121, 129, 138, 231, 236
- notwendige und hinreichende Bedingung für, 106

- M
 - optimale Wahl von, 157
- Majorantenkriterium
 - Weierstraßsches, 76, 78, 132–134, 140, 234, 235, 238
 - Doppelreihenversion des, 124, 137
- Mannigfaltigkeit
 - diffeomorphe, 31
- MATLAB, 325, 332
- Matrix
 - a -orthogonale, 185, 186
 - ähnliche, 174, 178
 - diagonalisierbare, 12
 - orthogonale, 12, 168, 170, 178
 - positiv definite, 47, 169, 170, 172, 177, 184
 - reguläre, 177, 210
 - symmetrische, 12, 46, 47, 169, 173, 174, 178, 331
 - tridiagonale, 173, 178, 331
 - mit komplexen Eigenwerten, 178
- Maximumnorm, 94, 290, 298
- Maximumprinzip, 19
- Membran
 - belastete, 15
- Meßfehler, 91
- Methode
 - der Finiten Elemente, 31
 - der konjugierten Gradienten, 32

- der Quasi-Reversibilität, 32
- Minimum-Maximumprinzip
 - Courantsches, 221, 246
 - von Courant-Weyl, 201
- Modell
 - populationsdynamisches, 8
- Modellbeispiel, 84
- Modellproblem, 6, 7
- Näherung
 - konsistente, 249
- Neumann-Daten, 73, 89, 91, 92, 104, 150, 164, 311, 326, 327
 - inhomogene, 101
- Neumann-Problem, 7
- Neumann-Randbedingung, *siehe* Randbedingung, Neumannsche
- Norm
 - L_2 -, 220, 310
 - euklidische, 47, 94
 - Maximum-, *siehe* Maximumnorm
- Normbeschränktheit, 78
- Normen
 - äquivalente, 203, 215
- Nullstellen eines Polynoms, 16
- Operator
 - beschränkter, 216
 - elliptischer, 31, 33
 - gleichförmig, 164
 - kompakter, 216
 - linearer, 4, 9, 165, 199, 216, 311
 - stetiger, 216
 - symmetrischer, 216
 - vollstetiger, 216
- Orthogonalbasis, 46, 47
- orthogonale Matrix, *siehe* Matrix, orthogonale
- Orthonormalbasis, 47, 69, 93, 94, 168, 174, 178, 192
- Orthonormalsystem, 185
 - von Eigenfunktionen, 217
- Parsevalsche Gleichung, 143, 147, 221, 240, 305
- partielle Differentialgleichung, 1–13
 - elliptische, 6–7, 10–15
 - hyperbolische, 9–10, 13
 - in Operatorform, 3
 - lineare, 3
 - homogene, 4, 7
 - inhomogene, 4
 - Lösung einer, 3
 - nichtlineare, 3
 - Ordnung einer, 3
 - parabolische, 7–9, 11, 13
 - physikalische Beispiele, 3
 - ultrahyperbolische, 13
 - zweiter Ordnung, 6
 - Klassifikation, 10
- Payne, L.E., 23
- Poisson-Gleichung, 7, 14, 15, 19–34, 318, 325, 331, 334
- positiv definite Matrix, *siehe* Matrix, positiv definite
- Potential
 - elektrisches, 14
 - Gravitations-, 14
- Potential-Gleichung, 6
- Problem
 - bedingt gutgestelltes, 91
 - gutgestelltes, 103
 - halbhomogenes, 165
 - kontinuierliches, 207
 - schlechtgestelltes, 83, 91, 157
- Produkt
 - leeres, 173
- Projektion
 - orthogonale, 51, 74, 91, 93, 97, 100, 144, 151, 156, 283, 290, 291, 301, 327, 328, 333
- Projektionsfehler, 144, 148, 156, 304
- Projektionsoperator, 290
- Projektionsparameter, 326

- Quadraturformel, 64, 273
 Räume
 endlichdimensionale, 51
 Randbedingung, 5, 7, 9, 30, 74, 179
 Dirichletsche, 5, 32, 33
 homogene, 193, 209
 Neumannsche, 5, 7
 Robinsche, 5, 32
 Randidentifizierung, 325, 326, 333–335
 Randwertaufgabe
 homogene, 209
 Sturmsche, *siehe* Sturmsche Randwertaufgabe
 Raum
 endlichdimensionaler, 67, 156, 199, 220, 288
 euklidischer, 94, 290
 Rayleigh-Quotient, 221, 246
 Darstellung des –en, 221
 diskreter, 245
 kontinuierlicher, 245
 Regularisierung, 156, 157
 Regularisierungsfehler, 156, 157
 Reihe
 harmonische, 135
 Reihenentwicklung
 des Sinus, 53
 des sinus hyperbolicus, 88
 Reihenkonvergenz der Lösungsdarstellung
 Bedingung für die, 75
 Robin-Randbedingung, *siehe* Randbedingung, Robinsche
 Rückwärtseinsetzen, 244, 332
 Rundungsfehler, 18
 Satz
 über Eigenwerte und Eigenfunktionen der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, 219
 von Bolzano-Weierstraß, 247
 von Schwarz, 7, 12
 schlecht gestelltes Problem, 16–18, 327
 Schlechtgestelltheit, 51
 Schwarz
 Satz von, *siehe* Satz, von Schwarz
 Schwarzsche Ungleichung, 215
 schwingende Saite, 5, 9
 Sedimente, 25
 Sehnentrapezformel, 251, 264, 307
 summierte, 64, 65, 262, 277, 283, 297
 für eine einmal stetig differenzierbare Funktion, 251
 Sehnentrapezregel, *siehe* Sehnentrapezformel
 summierte, *siehe* Sehnentrapezformel, summierte
 Separation der Variablen
 Methode der, 8, 9, 73, 207, 212, 224
 sinus hyperbolicus
 Eigenschaften des, 121
 Sinusreihe, 66, 67, 70, 104
 Skalarprodukt
 $(\cdot, \cdot)_0$, 182
 $(\cdot, \cdot)_1$, 182
 $(\cdot, \cdot)_a$, 215, 216
 $(\cdot, \cdot)_{-1,a}$, 184
 $(\cdot, \cdot)_{-1}$, 182
 $(\cdot, \cdot)_{0,a}$, 184, 186, 197, 249
 $(\cdot, \cdot)_{1,a}$, 184
 $(\cdot, \cdot)_{e,a}$, 201
 L_2 -, 69, 182
 euklidisches, 69, 168
 verallgemeinertes euklidisches, *siehe* Skalarprodukt, $(\cdot, \cdot)_{e,a}$
 Spektralradius, 47
 Spektralstauchung, 332
 Splines
 kubische, 32
 Stabilität, 51, 103
 Stabilitätsabschätzung, 105, 143, 236
 Stabilitätsresultat, 91
 Stabilitätssatz, 138, 141, 225, 241, 310
 für das CPLG, 103

- für eine allgemeinere elliptische Differentialgleichung, 239
- stationäre Wärmeleitung, 14
- stationäre Wellen, 14
- Streuproblem
 - inverses, 17
- Strömung
 - inkompressibler Flüssigkeit, 15
- Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem, *siehe* Eigenwertproblem, Sturm-Liouvillesches
- Sturmsche Kette, 332
- Sturmsche Randwertaufgabe, 209, 214
 - diskrete halbhomogene, 193, 197
 - homogene, 213
- Summe
 - leere, 193
- Superpositionsprinzip, 4, 7, 224
 - für Reihen, 9
- Supremum-Norm, 21
- Symbol
 - Landausches, *siehe* Landausches Symbol
- symmetrische Matrix, *siehe* Matrix, symmetrische

- Tabelle
 - der Lösungsbezeichnungen im Zusammenhang mit der Linienmethode, 149, 310
- Taylorentwicklung, 191
- Taylorpolynom, 242
- Testfunktion, 214
- Tridiagonalmatrix, *siehe* Matrix, tridiagonale

- überbestimmtes Problem, 18
- Ungleichung
 - Cauchy-Schwarzsche, 96
 - Schwarzsche, 215
- unterbestimmtes Problem, 18
- Ursache, 16

- Vergleichsfunktion, 214
- Volldefinitheit, 221
 - einer Eigenwertaufgabe, 213
- vollstetig, 216
- Vorwärtselimination, 244, 332

- Wärmeaustausch, 5
- Wärmeleitung
 - inverse, 17, 18
- Wärmeleitungsgleichung, 7, 8, 14, 17
 - Anfangs-Randwertproblem für die, 7, 17
- Wellengleichung, 9
 - Anfangs-Randwertproblem für die, 9
- Wirkung, 16
- Wronski-Determinante, 211

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen, mich bei allen denen zu bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, insbesondere bei

Herr Prof. Dr. Hans-Jürgen Reinhardt für seine hervorragende Betreuung dieser Arbeit sowie wertvolle Hinweise und Verbesserungsvorschläge.

Herrn Prof. Dr. Bernd Dreseler für seine freundliche Bereitschaft, das Zweitgutachten zu erstellen.

Herrn Prof. Dr. Franz-Jürgen Delvos, der sich dankenswerterweise für die Mitarbeit in der Promotionskommission zur Verfügung gestellt hat.

meiner lieben Frau Susan und meiner Tochter Julia für ihre Geduld, wenn ich mal wieder hinter dem Rechner "verschollen" oder aber nur "physikalisch" anwesend war.

meinem Gott und Vater im Himmel, der selbst am besten weiß, warum ich allen Grund habe, diese Arbeit zu beschließen mit: Soli Deo Gloria.