

Mehrfache Partonische Wechselwirkungen bei Hadronischen Streuungen

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Dipl.-Phys. Hans-Werner Boschmann

eingereicht bei der
Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
(Fakultät IV)
der Universität Siegen
Siegen 2011

Gutachter der Dissertation: Prof. Dr. Wolfgang Kilian
Prof. Dr. Thorsten Ohl

Datum der Disputation: 28.März 2012

gedruckt auf alterungsbeständigem holz- und säurefreiem Papier

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	2
2. QCD	7
2.1. Phänomenologische Motivation	7
2.2. Feldtheoretische Grundlagen	8
2.2.1. Quantenfelder der QCD	8
2.2.2. Eichtheorie	9
2.2.3. Lie Gruppe der QCD	10
2.2.4. Lagrangedichte der QCD	12
2.3. Feynmangraphen	13
2.3.1. Streumatix	13
2.3.2. Greenfunktion	14
2.3.3. Kontraktionen	16
2.3.4. Feynmanregeln	17
2.4. Renormierung	20
2.4.1. Renormierbarkeitsannahme	20
2.4.2. Regularisierung	21
2.4.3. Dimensionslose Parameter	22
2.4.4. Reparametrisierung	24
2.4.5. Renormierungsgruppe	24
2.5. Phänomenologische Konsequenzen	26
2.5.1. Effektive Theorie	26
2.5.2. QCD vs. QED	28
2.5.3. Konsequenzen für die QCD	29
2.5.4. Fazit	30
3. Parton-Verteilungsfunktionen	32
3.1. Tief-Inelastische Streuung	33
3.1.1. Lepton-Hadron Streuung	33

3.1.2. Faktorisierung	36
3.1.3. Strukturfunktionen	37
3.2. Erweiterungen	38
3.2.1. QCD Korrekturen	38
3.2.2. Hadron-Hadron Streuung	40
3.2.3. Initial State Radiation	41
3.2.4. Fazit	43
4. Mehrfache Wechselwirkungen	46
4.1. Strategien zur Generierung von mehrfachen Wechselwirkungen	48
4.1.1. Eikonaler Ansatz	50
4.1.2. Skalenentwicklungsansatz	52
4.2. Remnant Strukturfunktionen	56
4.2.1. Grundlegende Annahmen	56
4.2.2. Definition der Remnant-Strukturfunktionen	58
4.2.3. Summenregeln	59
4.2.4. Normierungsfaktoren	61
4.3. Simultane Skalenentwicklung	64
4.3.1. Konsequenzen	64
4.3.2. Fazit	66
5. Implementierung	67
5.1. Underlying Event	67
5.1.1. Wirkungsquerschnitte	68
5.1.2. Wahrscheinlichkeit für die n-te Skala	70
5.2. Stratified Sampling der Wirkungsquerschnitte	72
5.2.1. Methode der Generierung der Skalen	73
5.2.2. Definition der Strati	74
5.2.3. Generierung des n-ten Stratus	76
5.2.4. Sampling der Quasivalenzbeiträge	78
5.3. Importance Sampling für die Impulsanteile	80
5.3.1. Das Monte Carlo Prinzip	81
5.3.2. Generation der Feynmangraphen	82
5.4. Der simultane Algorithmus	84
5.4.1. Definition der Skalen	85
5.4.2. Der Algorithmus	86
5.4.3. Remnant	88
5.5. Fazit	90
A. Quasivalenzverteilung	92

B. Berechnung der Wirkungsquerschnitte	93
Literaturverzeichnis	95
Danksagung	98

(Wissenschaft:) Es ist die Methode, kühne Hypothesen aufzustellen und sie der schärfsten Kritik auszusetzen, um herauszufinden, wo wir uns geirrt haben.

(Sir Karl Raimund Popper)

1. Einleitung

Zu allen Zeiten und in allen Kulturen haben Menschen versucht, die Vielzahl von Beobachtungen und die Diversität von Phänomenen in eine natürliche oder göttliche Ordnung zu bringen. Damit haben wir grundlegende geistige Bedürfnisse befriedigt: Einerseits sind wir zu einem Teil einer verlässlichen und vorhersagbaren Welt geworden, in der selbst zufällig erscheinende Ereignisse eine Begründung finden. Andererseits sind wir zu einem Teil einer schönen und ästhetischen Welt geworden, in der auch hässliche Erscheinungen und Unglücke als Aspekte einer vollkommenen und harmonischen Ordnung angesehen werden können.

Die Methoden, mit denen wir nach dieser Ordnung suchen, haben sich im Laufe der Zeit dabei beachtlich gewandelt. Während Aristoteles davon ausgegangen ist, dass wir die unbeweisbaren, grundlegenden und wahren Eigenschaften unserer Welt intuitiv erfassen können und davon ausgehend alle Erscheinungen deduktiv ableiten können, stehen wir heute Eigenschaften gegenüber, die unserer Intuition widersprechen. Wir kommen etwa auf Gebieten wie der Quantenmechanik oder der Gravitationsphysik nicht weiter, wenn wir uns ausschließlich auf intuitive Annahmen verlassen.

Heute gehen wir genau umgekehrt vor: Wir nehmen wir uns die Freiheit, beliebige Annahmen zu treffen, unabhängig davon, ob sie irgendeine Ähnlichkeit zu unseren Beobachtungen haben. Aus diesen Annahmen leiten wir mathematisch deduktiv falsifizierbare Vorhersagen für ein neues Experiment ab und vergleichen die Vorhersagen mit dem Ausgang des Experiments. Finden wir keine Übereinstimmung, dann schließen wir daraus, dass die Annahmen nicht mit tatsächlichen Eigenschaften unserer Welt übereinstimmen.

Der Fortschritt unseres Verständnisses der Welt gleicht dabei weniger einem zielgerichteten Prozess, in dem jede Anstrengung zu einem Schritt in die richtige Richtung führt. Es ist vielmehr ein evolutionärer Prozess: Wir stellen willkürlich physikalische Theorien auf, ohne irgendeinen Anspruch auf Wahrheit oder Realität und gehen zuweilen nach ästhetischen Gesichtspunkten, wie z.B. besonders schönen Symmetrien vor. Mit jedem neuen Experiment werden einige dieser Theorien falsifiziert und aussortiert. Auf diese Weise nähern wir uns allmählich einer mathematischen Beschreibung der wahren Natur unserer Welt an.

Für diesen evolutionären Prozess ist es nicht ausreichend, wenn wir formal falsifizierbare Aussagen treffen. Wir müssen auch in der Lage sein, ein Experiment durchzuführen, das geeignet ist, diese Aussagen mit hinreichender statistischer Signifikanz zu überprüfen. Auf dem Gebiet der Teilchenphysik, genauer gesagt auf dem Gebiet der *Starken Wechselwirkung* stehen wir hier vor einem prinzipiellen Problem.

Die *Starke Wechselwirkung* ist zunächst ein beobachtbares Phänomen und zeigt sich in der Existenz von Neutronen und Protonen, den beiden bekanntesten Vertretern der *Hadronen*. Nach unserem gegenwärtigen Verständnis sind Hadronen selbst keine Elementarteilchen, sondern gebundene Zustände aus Elementarteilchen. Im Wesentlichen sind das Quarks und Gluonen, die Träger der *Farbladung*. Diejenige Wechselwirkung, die Quarks und Gluonen zu Hadronen formt, ist eben die erwähnte *Starke Wechselwirkung*.

Dem Phänomen *Starke Wechselwirkung* steht in Form der *Quantenchromodynamik* (QCD) eine mathematische Beschreibung gegenüber. Die QCD beschreibt aber lediglich freie Teilchen, also insbesondere keine gebundenen Zustände von Quarks und Gluonen. Schlimmer noch: Aus einer grundlegenden Eigenschaft der QCD, dem *Confinement*, folgt, dass Quarks niemals frei sein können sondern immer nur in gebundenen Zuständen auftreten. Daher ist es selbst mit modernen Teilchenbeschleunigern nicht möglich, einzelne freie Quarks zu gewinnen um an ihnen Experimente durchzuführen.

Kurz gesagt besteht unser Dilemma darin, dass wir einerseits nur eine mathematische Beschreibung für freie Quarks, aber nicht für gebundene Quarks haben, andererseits aber nur Experimente an gebundenen Quarks und niemals an freien Quarks durchführen können.

Ein Ausweg aus diesem Dilemma liegt in der Kehrseite des Confinements, der *Asymptotischen Freiheit*. Aus dieser Eigenschaft folgt, dass Wechselwirkungen mit hohem Impulsübertrag zwischen Quarks so stattfinden, als wären die Quarks frei, selbst wenn sie in Hadronen gebunden sind. Wenn wir nun Hadronen beschleunigen und mit hohem relativem Impuls zur Kollision bringen, dann ist die QCD zumindest teilweise anwendbar, um Wechselwirkungen eines Quarks aus einem Hadron mit einem Quark aus einem anderen Hadron zu beschreiben.

Unser Problem ist damit nicht vollständig gelöst, insbesondere haben wir noch keine Aussage über relative Häufigkeiten der Endzustände, also der Teilchen, die aus solchen Wechselwirkungen resultieren. Diese relativen Häufigkeiten gehören aber zu den wichtigsten Observablen, um Theorien mit Streuexperimenten zu vergleichen. Wir können nicht auf deren Quantifizierung verzichten.

Um quantitative Aussagen machen zu können, nutzen wir *Faktorisierungstheoreme*¹, mit deren Hilfe wir den *Wirkungsquerschnitt* σ für ein Streueignis als Produkt

¹Collins u. a. (1989)

von niederenergetischen, messbaren, prozessunabhängigen Termen f und hochenergetischen, berechenbaren, prozessabhängigen Termen $\hat{\sigma}$ schreiben können.

$$\sigma_{k,l \rightarrow X} = f_k(\mu_F^2) f_l(\mu_F^2) \hat{\sigma}_{k,l \rightarrow X}(\mu_F^2) \quad (1.1)$$

Gleichung (1.1) und Abbildung 1.1 (a) zeigen dieses Faktorisierungstheorem in vereinfachter Form. k und l fassen hier alle Eigenschaften der beiden Elementarteilchen im Anfangszustand und X alle Eigenschaften der Elementarteilchen im Endzustand der hochenergetischen Wechselwirkung zusammen. μ_F ist die Faktorisierungsskala, also derjenige Wert für den Impulsbetrag, der hoch- von niederenergetischen Wechselwirkungen diskriminiert. Die gesuchten relativen Wahrscheinlichkeiten lassen sich durch Quotienten dieser Wirkungsquerschnitte ausdrücken.

Die niederenergetischen Terme f sind die Strukturfunktionen des Hadrons. Sie sind proportional zu der Wahrscheinlichkeit, dass ein *Parton*, also ein Elementarteilchen aus dem Inneren des Hadrons, mit den Eigenschaften k bzw. l an einer hochenergetischen Wechselwirkung teilnimmt. Prozessunabhängig bedeutet, dass das Produkt in (1.1) für jedes Wechselwirkungsmodell mit denselben Strukturfunktionen ausgewertet werden kann.

Die Strukturfunktionen können also aus den Daten eines Streuexperiments gewonnen und mit einer beliebigen Beschreibung von hochenergetischen Wechselwirkungen kombiniert werden, um eine quantitative Vorhersage für ein neues Experiment mit einem beliebigen Wechselwirkungsmodell zu machen. Diese Vorgehensweise beschreibt die etablierte Methode für Simulationen von Hadron-Streuexperimenten.

Bei der ursprünglichen Formulierung des Faktorisierungstheorems wurde explizit angenommen, dass genau ein Parton aus jedem Hadron an der hochenergetischen Wechselwirkung teilnimmt. Allerdings zeichnet sich bereits ein neues Problem ab, für das wir bislang lediglich Ansätze, aber keine etablierte Lösung haben, nämlich *Multiple Parton Interactions* (MPI). Das sind solche Wechselwirkungen, an denen mehr als ein Parton eines Hadrons teilnimmt. In Abbildung 1.1 (b) ist ein solches, mehrfaches Streuereignis illustriert.

Dass Mehrfachstreuungen auftreten können, ist nicht neu, bislang war aber die Wahrscheinlichkeit dafür so klein, dass wir sie nicht in unsere Betrachtungen aufnehmen mussten. Mit dem *Large Hadron Collider* LHC hat im Jahr 2010 aber erstmals ein Beschleuniger den Betrieb aufgenommen, bei dem wir MPI nicht länger ignorieren können. Nun stehen wir vor einem neuen Dilemma:

Für eine Auswertung der LHC-Daten benötigen wir mehrfache Strukturfunktionen um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass eine beliebige Kombination von Partonen simultan an einer Wechselwirkung teilnimmt. Die Datenlage aller bisheriger Streuexperimente erlaubt es aber nicht, solche mehrfachen Funktionen zu extrahieren. Wenn wir die Daten des LHC selbst nutzen, um mehrfache Strukturfunktionen zu er-

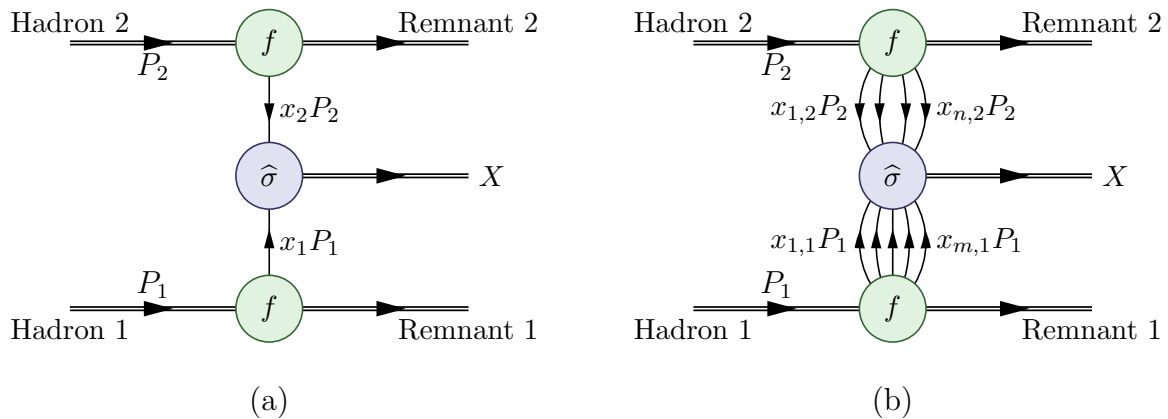


Abbildung 1.1.: Schematische Darstellung von Multiple Parton Interactions. Die horizontale Achse zeigt die zeitliche Entwicklung an, die vertikale Achse hat keine Bedeutung. (a) Einfache Streuung (b) $m+n$ -fache Streuung

stellen, dann bekommen wir ein methodisches Problem, denn die Strukturfunktionen sind dann nicht mehr unabhängig von unseren Vorhersagen für LHC-Streuereignisse. Außerdem ist die Gewinnung von mehrfachen Strukturfunktionen ohne eine theoretische Grundlage nicht möglich.

Dieses Dilemma können wir schließlich auf die eingangs erwähnte Weise lösen: Wir treffen ad hoc Annahmen zur Faktorisierung von MPI. Wenn mehrere Arbeitsgruppen unabhängige Simulationen mit möglichst verschiedenen solcher Annahmen vornehmen, dann können wir durch einen Vergleich mit LHC-Daten Rückschlüsse auf die Gültigkeit dieser Annahmen ziehen. Tatsächlich haben einige Arbeitsgruppen bereits eine Behandlung von MPI in ihre Simulationsprogramme aufgenommen, darunter das Pythia², das Sherpa³ und das Herwig⁴ Projekt. WHIZARD^{5,6} ist ein weiteres Simulationsprogramm für hadronische Streuungen. Zwar ist es konzeptionell für die Simulation von LHC-Streuereignissen ausgelegt. Dennoch enthält die veröffentlichte Version zur Zeit dieses Schreibens noch keine Behandlung von MPI.

Meine Aufgabe im Rahmen meines Promotionsstudiums ist es gewesen, eine Erweiterung von WHIZARD zu implementieren, die das Projekt um Simulationen von mehrfachen Streuungen ergänzt. Dabei wurde Wert darauf gelegt, eine möglichst generische Grundlage zu schaffen, auf der alternative Annahmen für die Simulation

²Sjostrand u. a. (2006)

³Gleisberg u. a. (2009)

⁴Bahr u. a. (2008)

⁵Kilian u. a. (2011b)

⁶Moretti u. a. (2001)

mehrfacher Streuungen umgesetzt werden können.

Die vorliegende Dissertation enthält eine Ausarbeitung verschiedener bekannter Ansätze zur Faktorisierung für beliebig viele partonische Wechselwirkungen mittels Approximation durch einfache Strukturfunktionen und eine Bewertung für deren Eignung als Erweiterung des WHIZARD Projekts. Vertiefend wird ein Verfahren detailliert vorgestellt, dass eine simultane Entwicklung der Faktorisierungsskala von mehrfachen Streuungen sowie von *Initial State Radiation* bei Monte Carlo Simulationen von Streuereignissen erlaubt. Der originäre Teil dieser Dissertation besteht hauptsächlich in einer Ausarbeitung einer möglichen Implementierung dieser simultanen Entwicklung als Monte Carlo Simulation unter Berücksichtigung endlicher Hardware-Ressourcen.

In dem folgenden Kapitel werden wir uns zunächst die Grundlagen der *Quantenchromodynamik* ansehen, um die Probleme in der theoretischen Beschreibung hadronischer Streuungen und die Notwendigkeit von Faktorisierungstheoremen zu verstehen. Im dritten Kapitel werden wir die etablierte Beschreibung von einfachen hadronischen Streuungen durchgehen. Anschließend werden wir die theoretischen Grundlagen verschiedener Modelle von mehrfachen Streuungen vergleichen und das favorisierte Modell vertiefend studieren. Im fünften und letzten Kapitel werden wir schließlich eine Implementierung dieses Modells als *Monte Carlo Generator* ausarbeiten.

Alles ist einfacher, als man denken kann, zugleich
verschränkter, als zu begreifen ist.

(Johann Wolfgang von Goethe)

2. QCD

Wir beginnen mit einer Auswahl feldtheoretischer Grundlagen des Standardmodells der Teilchenphysik. Unser Ziel ist es, tief-inelastische Streuungen von Hadronen so weit zu verstehen, dass wir Änderungen der theoretischen Beschreibung jenseits der etablierten Faktorisierungstheoreme vornehmen können. Wir werden sehen, dass QCD-Wechselwirkungen für niederenergetische Streuungen dominant sind. In der Anwendung auf mehrfache Streuungen in Kapitel 5 werden wir uns deswegen auf QCD-Wechselwirkungen beschränken.

Entsprechend wenden wir uns in diesem Kapitel vornehmlich der Quantenchromodynamik zu. Insbesondere werden wir uns die Dynamik der QCD-Kopplungsstärke α_s ansehen, um am Ende dieses Kapitels die daraus resultierenden Probleme für mathematische Beschreibungen von Hadronen und deren Wechselwirkungen zu verstehen. Daraus wird sich die Notwendigkeit für die erwähnten Faktorisierungstheoreme ergeben, wie wir sie in Kapitel 3 benötigen, um hadronische Streuereignisse beschreiben zu können.

2.1. Phänomenologische Motivation

Bis in die Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts wurden Neutronen und Protonen als Elementarteilchen, also als Objekte ohne innere Struktur angesehen. Sobald man Streuexperimente mit Energien durchführen konnte, die mit etwa einem GeV deutlich über der Skala der *Starken Wechselwirkung* liegen, kamen Zweifel an dieser Annahme auf. Insbesondere der Linearbeschleuniger am *SLAC* (Stanford) zeigte in den Sechzigern und Siebzigern Ergebnisse, die eine innere Struktur aus punktförmigen Teilchen nahelegte¹.

Mit diesem und vielen anderen Streuexperimenten wurde schließlich ein breites Spektrum von Teilchen und Wechselwirkungen beobachtet, die in kein damals bekanntes Schema passten. In dieser Pionierzeit der *Starken Wechselwirkung* wurde das

¹Bjorken und Paschos (1969)

Familie:		I	II	III
geladene Leptonen:	$Q = -1$	e	μ	τ
neutrale Leptonen:	$Q = 0$	ν_e	ν_μ	ν_τ
up-type Quarks:	$Q = \frac{+2}{3}$	u	c	t
down-type Quarks:	$Q = \frac{-1}{3}$	d	s	b

Tabelle 2.1.: Schema der Materieteilchen im Standardmodell der Teilchenphysik.

Partonmodell entwickelt, um Proton-Streuungen durch Streuungen von inneren Teilchen, eben den Partonen zu beschreiben. Zeitgleich wurde mit dem Quarkmodell eine systematische Spektroskopie der neuen Teilchen ermöglicht.

Heute haben wir eine mathematische Beschreibung, die, verglichen mit der Mannigfaltigkeit von experimentellen Befunden, eine einfache Struktur hat. In Anspielung auf die mathematische Ähnlichkeit mit der phänomenologisch deutlich verschiedenen Quantenelektrodynamik wird sie Quantenchromodynamik genannt.

Zwar sind wir bis heute nicht in der Lage alle Eigenschaften von Hadronen aus der QCD abzuleiten, allerdings finden wir Entsprechungen für fundamentale Eigenschaften. So steht der Beobachtung, dass Quarks und Gluonen in Hadronen mit Bindungsenergien von einigen Hundert MeV eingeschlossen sind, die Kopplungsstärke g der QCD gegenüber, die in diesem Energiebereich divergiert. Der Beobachtung, dass wir bei hochenergetischen Streuexperimenten freie Quarks und Gluonen sehen, steht wiederum die asymptotische Freiheit der QCD gegenüber.

2.2. Feldtheoretische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden wir sehen, wie aus der Annahme einer Eichtheorie mit einer Kopplungskonstanten und drei Basisladungszuständen eine mathematische Beschreibung abgeleitet werden kann, die den beobachteten Eigenschaften der *Starken Wechselwirkung* entspricht. Wir orientieren uns dabei an dem *Handbuch der perturbativen QCD*² sowie an „Aspects of quantum chromodynamics“³ für die Eichtheorie.

2.2.1. Quantenfelder der QCD

Das Standardmodell der Teilchenphysik enthält, alle Ladungszustände, Massezustände und Antiteilchen mitgezählt, 48 Basisquantenfelder für Spin-1/2-Teilchen, also 48

²Brock u. a. (1995)

³Pich (1999)

elementare Materieteilchen. In Abbildung 2.1 ist diese beachtliche Zahl von Teilchen in einem einfachen Schema angeordnet.

Das Schema unterteilt die Teilchen in einen Leptonsektor und einen Quarksektor. Diese sehen auf den ersten Blick ähnlich aus, zeigen aber eine grundlegend verschiedene Dynamik. Sowohl im Lepton- als auch im Quarksektor finden wir drei *Familien* mit jeweils zwei Teilchen mit verschiedenen elektrischen Ladungszuständen. Im Leptonsektor sind das die elektrisch geladenen Elektron-ähnlichen Teilchen *Elektron*, *Muon* und *Tauon* ($\{e, \mu, \tau\}$) bzw. die ihnen zugeordneten elektrisch neutralen *Neutrinos* ($\{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau\}$). Im Quarksektor sind das die elektrisch positiven Up-Quark-ähnlichen Teilchen *Up*, *Charm* und *Top* ($\{u, c, t\}$) bzw. die elektrisch negativen, Down-Quark-ähnlichen Teilchen *Down*, *Strange* und *Bottom* ($\{d, s, b\}$). Hinzu kommt noch für jedes Teilchen das ladungskonjugierte Antiteilchen.

Der wesentliche Unterschied dieser Sektoren liegt in einer weiteren Quantenzahl, der *Farbladung*. Nur Quarks sind Farbladungszustände, nicht aber Leptonen. An der *Starken Wechselwirkung* nehmen aber nur Farbladungszustände teil. Der Unterschied in der Dynamik von Leptonen und Quarks liegt also darin, dass Quarks an der *Starken Wechselwirkung* teilnehmen, nicht aber Leptonen.

Sowohl die Theorie der Quantenelektrodynamik zur Beschreibung von Wechselwirkungen elektrisch geladener Teilchen als auch die Theorie der Quantenchromodynamik zur Beschreibung von Wechselwirkungen farbgeladener Teilchen sind als *Yang-Mills-Eichtheorie*⁴ formuliert. Noch präziser formuliert liegt der Unterschied in der Dynamik von Leptonen und Quarks in den zugrunde liegenden Eichsymmetrien.

2.2.2. Eichtheorie

Die grundlegende Annahme einer Eichtheorie ist, dass der konkrete Wert einer Quantenzahl keine Observable ist, sondern nur der relative Wert verglichen mit dem eines anderen Quantenfelds. Bei lokalen Eichtheorien wird angenommen, dass die Dynamik des Systems durch die relativen Werte in jedem Punkt x beeinflusst wird. Um eine solche Eichsymmetrie für die *Starke Wechselwirkung* aufstellen zu können, fassen wir einige zentrale Beobachtungen zusammen:

1. Die *Starke Wechselwirkung* ist unabhängig vom Quarkflavor,
2. das Quarkflavor ist unter der *Starken Wechselwirkung* erhalten,
3. die Eichbosonen γ , W^\pm und Z der *Elektroschwachen Wechselwirkung* koppeln nicht an die Farbladung und
4. Mesonen als $q\bar{q}$ -Zustände und Baryonen als qqq -Zustände sind exakt farbneutral.

⁴Yang und Mills (1954)

Für die QCD folgt insbesondere aus der ersten und der dritten Beobachtung, dass wir die Eichsymmetrie der QCD als reine Symmetrie im N_C -dimensionalen Farbraum unabhängig von den *Elektroschwachen* Eichsymmetrien ansetzen können. Wir übertragen die grundlegende Annahme der Eichtheorie auf die QCD:

Jede Transformation des N_C -dimensionalen Farbraums, die das innere Produkt invariant lässt, muss auch alle Wechselwirkungsquerschnitte invariant lassen.

Die Menge solcher Transformationen lassen sich als Lie-Gruppen darstellen. Durch diese Darstellungen gewinnen wir eine kompakte und übersichtliche Formulierung der wesentlichen Eigenschaften der Eichsymmetrie.

2.2.3. Lie Gruppe der QCD

Die Wahl einer QCD-Lie-Gruppe wird durch weitere Beobachtungen eingeschränkt:

1. Die Dimension des Farbraums liegt mit $N_C = 3$ fest^{5,6}. Die Gruppe muss daher eine $\underline{3}$ -Darstellung für Quarkfelder haben.
2. Quarks und Antiquarks unterscheiden sich in ihren Quantenfeldern. Die Gruppe muss daher weiterhin eine von $\underline{3}$ verschiedene $\underline{3}^*$ -Darstellung haben.
3. Mesonen sind farbneutral, das Produkt $\underline{3} \otimes \underline{3}^*$ muss also eine farbneutrale Darstellung enthalten.
4. Baryonen sind farbneutral, das Produkt $\underline{3} \otimes \underline{3} \otimes \underline{3}$ muss also eine farbneutrale Darstellung enthalten.
5. Sonst sind keine farbneutralen gebundene Quarkzustände bekannt. Andere Produkte, wie z.B. $\underline{3} \otimes \underline{3}$ sollten keine farbneutrale Darstellung enthalten.

Unter allen einfachen, kompakten Lie-Gruppen haben nur vier eine irreduzible dreidimensionale Darstellung, davon sind alle mit Ausnahme von $SU(3)$ reell. Nur die $SU(3)$ kann daher verschiedene Farbladungszustände $\underline{3}$ und $\underline{3}^*$ für Quarks und Antiquarks liefern. Die Bedingungen drei bis fünf sind durch die $SU(3)$ mit

$$\underline{3} \otimes \underline{3}^* = \underline{1} \oplus \underline{8}, \quad (2.1)$$

$$\underline{3} \otimes \underline{3} \otimes \underline{3} = \underline{1} \oplus \underline{8} \oplus \underline{8} \oplus \underline{10}, \quad (2.2)$$

$$\underline{3} \otimes \underline{3} = \underline{3}^* \oplus \underline{6}, \quad (2.3)$$

⁵Bjorken und Paschos (1969)

⁶Greenberg (2010)

ebenfalls erfüllt. In den Gleichungen (2.1) - (2.3) stehen auf den linken Seiten die äußeren Produkte der *fundamentalen Darstellungen* $\mathbf{3}$ bzw. $\underline{\mathbf{3}}$. Auf den rechten Seiten stehen die Zerlegungen in irreduzible Darstellungen dieser Produkte.

Von besonderem Interesse ist das Produkt $\mathbf{3} \otimes \underline{\mathbf{3}}^*$ in (2.1). Es gibt nicht nur gebundene $q\bar{q}$ -Zustände wieder, sondern auch kurzlebige Fluktuationen, wie sie z.B. durch ein Gluonsplitting $g \rightarrow q\bar{q} \rightarrow g$ entstehen können. Dieses Produkt ergibt sich aus der direkten Summe der trivialen Darstellung $\underline{\mathbf{1}}$ und der *adjungierten Darstellung* $\underline{\mathbf{8}}$.

Die triviale Darstellung $\underline{\mathbf{1}}$ ist invariant unter den Transformationen des Farbraums, deswegen assoziieren wir sie mit den gesuchten farbneutralen Zuständen. Wir nennen sie auch *Farb-Singlett-Zustände*. Da wir annehmen, dass Farb-Singlett-Gluonen zu langreichweitigen QCD-Wechselwirkungen führen würden, wir solche aber nie beobachtet haben, gehen wir davon aus, dass die *Farboktett-Zustände* $\underline{\mathbf{8}}$ exakt die Gluonfarbzustände wiedergeben⁷.

Die adjungierte Darstellung ist eine Abbildung auf die Lie-Algebra der linearen Abbildungen auf dem Farbraum. Die Elemente dieser Lie-Algebra sind daher isomorph zu den Ableitungen der Eichtransformationen. Wir wollen diese Tatsache nutzen, um solche Ableitungen in der Lagrangedichte durch die Elemente der adjungierten Darstellung auszudrücken.

Die Lie-Algebra Struktur der adjungierten Darstellung gibt uns ein besonders einfaches, abstraktes Bild unserer Eichgruppe. Den unitären Transformationen des Farbraums stehen hier $N_C^2 - 1$ hermetische Operatoren t^a , $a = 1..8$ gegenüber, den *Generatoren* der Algebra. Die Struktur der Algebra ist durch die Lie-Klammer $[\cdot, \cdot]$ und die reellen Strukturkonstanten f^{abc} vollständig festgelegt:

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c \quad (2.4)$$

Die Generatoren t^a beschreiben infinitesimale Transformationen, demnach schreiben wir beliebige Eichtransformationen $U(x)$ als Exponentialreihe über Linearkombination der Generatoren:

$$U(x) = \exp \left(\sum i\alpha^a(x) t^a \right) \quad (2.5)$$

$\alpha^a(x)$ sind acht reelle Winkel der Eichtransformationen.

Insgesamt haben wir durch die adjungierte Darstellung zum Einen erreicht, dass wir aus dem neundimensionalen Farb-Antifarbraum acht Gluonfelder t^a isoliert haben, die isomorph zu den Ableitungen der Eichtransformationen sind und zum Anderen, dass wir die Struktur des Gluonraums durch acht reelle Konstanten f^{abc} vollständig beschreiben können. Mit dieser Information können wir die Terme der QCD-Lagrangedichte aus den Termen der QED-Lagrangedichte ablesen um daraus später die Dynamik der Quantenfelder zu ermitteln.

⁷Fritzsche u. a. (1973)

Dafür definieren wir die Quarkspinoren $\Psi_{f,\mu,k}$ wie Leptonspinoren $\Psi_{f,\mu}$ mit zusätzlichem fundamentalem Farbindex k . Allen Spinoren gemein sind der Flavorindex f und der Lorentzindex μ . Der eichtransformierte Quarkspinor $\tilde{\Psi}$ nimmt dann folgende Form an:

$$\tilde{\Psi}_{f,\mu,k}(x) = U_{kl}(x)\Psi_{f,\mu,l}(x) \quad (2.6)$$

Gluonfelder bekommen in der fundamentalen Darstellung zwei Farbindizes k und l und in der adjungierten Darstellung einen Farbindex a ,

$$A_\mu(x)_{kl} = \sum_{a=1}^{N_C^2-1} A_{\mu a}(x)(t_a)_{kl} \quad (2.7)$$

$$\tilde{A}_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) + \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^{-1}(x) \quad (2.8)$$

wobei g die *Kopplungskonstante* der QCD ist. Sie ist eine, zunächst beliebige, reelle Konstante und der einzige freie Parameter der QCD, wenn man die Quarkmassen außen vor lässt da sie für die Dynamik der QCD unerheblich sind.

2.2.4. Lagrangedichte der QCD

Eingesetzt in die einfachste, nicht triviale, eichinvariante Form der Lagrangedichte⁸

$$\mathcal{L}_{\text{invar}} = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\Psi} (i\not{D}(A) - m_f) \Psi_f - \frac{1}{4}F^2(A) \quad (2.9)$$

erhalten wir die invariante Lagrangedichte der Quantenchromodynamik:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{invar}}^{\text{QCD}} &= \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{\alpha,\beta=k,l=1}^4 \sum_{a=1}^{N_C} \bar{\Psi}_{f\beta l} (i\gamma_{\beta\alpha}^\mu D_{\mu lk}(A) - m_f \delta_{\beta\alpha} \delta_{lk}) \Psi_{f\alpha k} \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=0}^3 \sum_{a=1}^{N_C^2-1} F_{\mu\nu a}(A) F_a^{\mu\nu}(A) \end{aligned} \quad (2.10)$$

mit der kovarianten Ableitung

$$D_{\mu kl}(A) = \partial_\mu \delta_{kl} + igA_{\mu a} T_{akl} \quad (2.11)$$

und der Feldstärke

$$F_{\mu\nu a}(A) = \partial_\mu A_{\nu a} - \partial_\nu A_{\mu a} - g f_{abc} A_{\mu b} A_{\nu c}. \quad (2.12)$$

⁸Yang und Mills (1954)

In der Feldstärke (2.12) treten Terme der Form $f_{abc}A_{\mu b}A_{\nu c}$ auf, die im Produkt $F \cdot F$ in (2.10) zu Termen mit drei oder vier Einsetzungen des Gluonfelds A führen. Das ist ein qualitativer Unterschied zur Lagrangedichte der QED. Die $U(1)$ Eichgruppe der QED enthält nur einen Generator der trivialerweise mit sich selbst kommutiert, sodass in der QED keine Strukturkonstanten ungleich Null enthält. Deswegen treten in der QED keine Terme mit mehr als zwei Einsetzungen des Photonfelds auf.

Das ist ein wichtiges Zwischenergebnis, aus dem sich grundlegende phänomenologische Konsequenzen ergeben. Wir werden in Abschnitt 2.5.2 darauf zurückkommen.

Die Gleichungen (2.10) bis (2.12) sind die kompakteste vollständige Formulierung für die QCD. Für die Berechnung von Observablen und eine Diskussion der phänomenologischer Eigenschaften eignet sie sich jedoch nicht. Wir schauen uns daher eine besser geeignete Beschreibung von Observablen als Störungsreihen in g und deren Darstellung in Form von Feynmangraphen an.

2.3. Feynmangraphen

Wir wollen die Lagrangedichte nun nutzen, um einen Formalismus zu entwickeln, mit dem wir systematisch Observablen ausrechnen können. Dafür schreiben wir die Zeitentwicklung von Produkten von Quantenfeldern als Störungsreihe in g . Die ungestörte Zeitentwicklung entspricht dann der Zeitentwicklung der freien Theorie ohne Wechselwirkungen. Die einzelnen Terme dieser Störungsreihe bilden wir systematisch auf Graphen ab, die nur die notwendige Information für eine eindeutige Abbildung enthalten. Durch diese Graphen erhalten wir eine effiziente und anschauliche Sprache, in der wir kommunizieren können, welche Terme der Störungsreihe wir für das jeweilige Problem in unsere Betrachtung aufnehmen.

2.3.1. Streumatix

Wir beginnen mit einem Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Zustand $|\alpha_1\rangle$ in den Zustand $|\alpha_2\rangle$ übergeht. Dafür definieren wir die Übergangsamplitude dieser Zustände als Matrixelement \mathcal{M} des Streuoperators S mit

$$\mathcal{M}_{\alpha_1 \rightarrow \alpha_2} = \langle \alpha_2 | S | \alpha_1 \rangle. \quad (2.13)$$

Der Streuoperator S definiert die Dynamik des Systems mithilfe der Lagrangedichte. Für eine genaue Betrachtung dieser Dynamik ist es aber zweckmäßig, diese Übergangsamplitude als Vakuumerwartungswert zu formulieren, indem wir die Zustände $\langle \alpha |$ durch Aufsteigeoperatoren angewandt auf den Vakuumzustand $\langle 0 |$ ausdrücken: Wir definieren zunächst den Aufsteigeoperator a_α^\dagger für freie Teilchen

$$|\alpha\rangle = \sqrt{2E} a_\alpha^\dagger |0\rangle \quad (2.14)$$

und die statischen Quantenfelder ϕ^I im Wechselwirkungsbild

$$\phi_\alpha^I := \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E(p)}} (a_\alpha \exp[-ip \cdot x] + a_\alpha^\dagger \exp[ip \cdot x]). \quad (2.15)$$

Für die Übergangsamplitude benötigen wir noch einen Ausdruck für die Dynamik und Wechselwirkungen der Felder. Wir erhalten diesen Ausdruck durch eine Einsetzung des freien Hamiltonoperators H_0 und des Wechselwirkungs-Hamiltonoperators H_{int} . Im Wechselwirkungsbild erhalten wir

$$H_I(t) = \exp[iH_0(t - t_0)] H_{\text{int}} \exp[-iH_0(t - t_0)]. \quad (2.16)$$

Schließlich können wir den Zeitentwicklungsoperator U

$$U(t, t_0) := T \left\{ \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right] \right\} \quad (2.17)$$

und einen Ausdruck für dynamische Quantenfelder ϕ definieren:

$$\phi_{\alpha_k}(x) := U^\dagger(t, t_0) \phi_{\alpha_k}^I U(t, t_0) \quad (2.18)$$

Die Exponentialreihe ist bezüglich der Reihenfolge der Operatoren in den Produkten nicht eindeutig definiert. Für nichtkommutative Ausdrücke im Exponenten muss die Reihenfolge aber festgelegt werden, damit die Exponentialfunktion wohldefiniert ist. In (2.17) legen wir mit dem zeitgeordneten Produkt $T\{\cdot\}$ die Ordnung fest, es stehen alle Operatoren von links nach rechts mit absteigender Nullkomponente $t = x_0$. Durch diese Wahl erhalten wir eine wohldefinierte Kausalität, die es uns ermöglicht, asymptotische Anfangs- und Endzustände in das Argument von $T\{\cdot\}$ zu nehmen:

$$\langle 0 | \phi_{\alpha_1}^{\text{asympt}} T \{ \phi_{\alpha_3} \cdots \phi_{\alpha_n} \} \phi_{\alpha_2}^{\text{asympt}} | 0 \rangle = \langle 0 | T \{ \phi_{\alpha_1}^{\text{asympt}} \cdot \phi_{\alpha_3} \cdots \phi_{\alpha_n} \cdot \phi_{\alpha_2}^{\text{asympt}} \} | 0 \rangle \quad (2.19)$$

Dabei beschreibt der asymptotische Operator $\phi_\alpha^{\text{asympt}}$ einen Zustand, der in der fernen Vergangenheit erzeugt bzw. in der fernen Zukunft vernichtet wird:

$$\phi_\alpha^{\text{asympt}} := \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_\alpha \quad (2.20)$$

2.3.2. Greenfunktion

Wir können die Übergangsamplituden jetzt durch Vakuumerwartungswerte von zeitgeordneten Feldern ϕ ausdrücken. In der Notation verzichten wir dabei auf die Kennzeichnung asymptotischer Zustände. Allerdings können wir nicht auf eine explizite

Betrachtung der asymptotischen Anfangs- und Endzustände verzichten, denn es sind nicht nur die Felder ϕ der Dynamik des Systems unterworfen, sondern auch die Vakuumzustände $|0\rangle$ selbst. Für einen wohldefinierten, dynamischen Vakuumerwartungswert definieren wir den asymptotischen Vakuumzustand $|\Omega\rangle$ als freien Vakuumzustand der fernen Vergangenheit, der um den Zeitpunkt t_0 entwickelt wird:

$$|\Omega\rangle := \lim_{t \rightarrow \infty} U(t_0, -t)|0\rangle \quad (2.21)$$

Die Norm dieses asymptotischen Vakuumzustands ist

$$\langle\Omega|\Omega\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0|U(t, -t)|0\rangle \neq 1. \quad (2.22)$$

Für eine konsistente Beschreibung normieren wir alle Amplituden auf diesen Wert. Jetzt haben wir alle Größen definiert, um einen Ausdruck für die Übergangsamplitude in Form der Greenfunktion G anzugeben:

$$(2\pi)^4 G_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(p_1, \dots, p_n) = \left(\prod_{k=1}^n \int dx_k \exp[-ip_k \cdot x_k] \right) \frac{\langle\Omega|T\{\phi_{\alpha_1}(x_1) \dots \phi_{\alpha_n}(x_n)\}|\Omega\rangle}{\langle\Omega|\Omega\rangle} \quad (2.23)$$

$$= \left(\prod_{k=1}^n \int dx_k \exp[-ip_k \cdot x_k] \right) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle 0|T\{U(t, -t)\phi_{\alpha_1}(x_1) \dots \phi_{\alpha_n}(x_n)\}|0\rangle}{\langle 0|U(t, -t)|0\rangle} \quad (2.24)$$

Im letzten Schritt können wir die Zeitentwicklungsoperatoren im Nenner zusammenfassen und in das Argument nehmen, da das zeitgeordnete Produkt die Reihenfolge der Terme definiert und der Operator U selbst als zeitgeordnetes Produkt definiert ist. Wir schreiben den Nenner von (2.24) als Exponentialreihe:

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{U(t, -t)\phi_{\alpha_1}(x_1) \dots \phi_{\alpha_n}(x_n)\}|0\rangle &= \\ &= \langle 0|T\left\{\exp\left[-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')\right]\phi_{\alpha_1}(x_1) \dots \phi_{\alpha_n}(x_n)\right\}|0\rangle \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i^n}{n!} \langle 0|T\left\{\prod_{k=1}^n \left[\int_{t_0}^t dt_k H_I(t_k)\right]\phi_{\alpha_1}(x_1) \dots \phi_{\alpha_n}(x_n)\right\}|0\rangle \quad (2.26)$$

Jede Einsetzung eines Wechselwirkungsterms

$$\bar{\Psi}_{f\beta l} (i\gamma_{\beta\alpha}^\mu ig A_{\mu a} T_{akl}(A)) \Psi_{f\alpha k} \quad (2.27)$$

oder

$$\partial^\nu A_a^\mu g C_{abc} A_{\mu b} A_{\nu c} \quad (2.28)$$

aus (2.10) in H_I liefert einen Faktor g . Wenn wir in (2.25) den QCD-Hamiltonoperator H_I^{QCD} verwenden, dann können wir (2.25) also als Störungsreihe in der Kopplungskonstanten g der Quantenchromodynamik auffassen. Für $n = 0$ erhalten wir die ungestörte, Greenfunktion für freie Felder ohne Wechselwirkungen.

Zwar haben wir jetzt systematisch alle Terme erfasst, die zu der Greenfunktion beitragen, wir haben aber immer noch keine systematische Methode zur Auswertung dieser Terme. Außerdem gibt uns das zeitgeordnete Produkt keine Information darüber, welche Kombinationen von Operatoren überhaupt einen von Null verschiedenen Erwartungswert haben.

2.3.3. Kontraktionen

Beide Probleme lösen wir, indem wir von der Zeitordnung $T\{\phi_1 \dots \phi_n\}$ zur Normalordnung $:\phi_1 \dots \phi_n:$ übergehen. Die Normalordnung ist so definiert, dass alle Erzeugungsoperatoren links stehen und alle Vernichtungsoperatoren rechts stehen. Deshalb muss der Erwartungswert jedes normalgeordneten Produkts von Operatoren immer Null sein.

$$\langle 0 | : \phi_1 \dots \phi_n : | 0 \rangle = 0 \quad (2.29)$$

Das zeitgeordnete Produkt von zwei Operatoren kann sich von dem normalgeordneten Produkt nur durch den Kommutator der Operatoren unterscheiden, der selbst kein Operator ist. Wir kennzeichnen den Kommutator durch eine Verbindungslinie über den Operatoren und nennen ihn im Folgenden *Kontraktion*:

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} = G_F(x-y) \quad (2.30)$$

G_F ist der Propagator für freie Felder. Jetzt erkennen wir, dass der Erwartungswert eines zeitgeordneten Produkts zweier Felder durch den Propagator für diese Felder gegeben ist:

$$T\{\phi_1(x)\phi_2(y)\} = :\phi_1(x)\phi_2(y): + \overline{\phi_1(x)\phi_2(y)} \quad (2.31)$$

$$\Rightarrow \langle 0 | T\{\phi(x)\phi(y)\} | 0 \rangle = \langle 0 | :\phi_1(x)\phi_2(y): + \overline{\phi_1(x)\phi_2(y)} | 0 \rangle = G_F(x-y) \quad (2.32)$$

Durch *Wicks Theorem*⁹ kennen wir die Verallgemeinerung dieser Gleichung für beliebig viele Felder:

$$T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} = :\phi(x_1) \dots \phi(x_n): + \text{alle möglichen Kontraktionen} \quad (2.33)$$

⁹Wick (1950)

Da kein normalgeordnetes Produkt von Operatoren einen Beitrag zur Greenfunktion liefert, können wir die Auswertung auf vollständig kontrahierte Terme beschränken. Im Falle eines Produkts aus vier Feldern erhalten wir:

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\}|0\rangle &= G_F(x_1-x_2)G_F(x_3-x_4) \\ &+ G_F(x_1-x_3)G_F(x_2-x_4) \\ &+ G_F(x_1-x_4)G_F(x_2-x_3) \end{aligned} \quad (2.34)$$

2.3.4. Feynmanregeln

Auf diese Weise können wir den Ausdruck (2.25) erheblich vereinfachen. Die einzelnen Terme unterscheiden sich nur noch darin, welche Quantenfelder kontrahiert sind. Es ist naheliegend, diese Terme durch Graphen auszudrücken, die nur diese Information enthalten. In Abbildung 2.1 sind die Kontraktionen aus (2.34) als Graphen dargestellt. Die Regeln, wie Terme der Greenfunktion in Graphen übersetzt werden, wurden mehrfach verfeinert, zuletzt von Richard Feynman. Wir nennen die Regeln in der heutigen Form *Feynmanregeln* und die Graphen entsprechend *Feynmangraphen*. Die *Feynmanregeln* für QCD-Graphen sind in Tabelle 2.2 aufgeführt.

Das Konzept der *Feynmangraphen* ist einfach: Das Graphenpendant eines Felds ϕ aus H_I nennen wir Vertex und stellen es durch einen Punkt dar. Eine Kontraktion zweier Felder aus H_I nennen wir innere Linie und stellen sie durch eine Linie dar, die beide Vertizes verbindet. Kontraktionen mit asymptotischen Feldern nennen wir äußere Linien und tragen sie als Verbindungslinien zwischen einem Vertex und dem Rand des Graphen dar.

Aus den Feynmangraphen erhalten wir die Terme in (2.26), indem wir

- für jeden Vertex die Impulserhaltungsregeln aufstellen,
- jede äußere Linie samt Schleifen entfernen,
- die verbleibenden Linien und Vertizes mittels Feynmanregeln durch Terme ersetzen,
- über jeden nicht festgelegten Impuls integrieren und
- durch den Symmetriefaktor dividieren, der angibt, durch wie viele verschiedene Kontraktionen man denselben Graphen erzeugen kann.

Für jede Kontraktion erhalten wir einen Faktor $\sim g^2$, wir können die Greenfunktion (2.25) also als Reihe in $\alpha_s := \frac{g_s}{4\pi}$ auffassen:

$$G(p_1, \dots, p_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_s^n f_n(p_1, \dots, p_n) \quad (2.35)$$

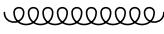

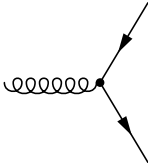
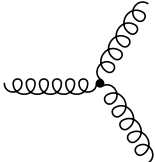
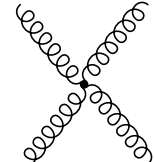
Gluonpropagator:		$-i \frac{\delta_{ba} g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} + \text{Eichterm}$
Quarkpropagator:		$i \frac{\delta_{lk}}{k^2 - m^2 - i\epsilon} (\not{k} + m)_{\beta\alpha}$
Gluonabstrahlung:		$ig(T_c)_{lk}(\gamma_\mu)_{\beta\alpha}$
Drei-Gluon-Vertex:		$-ig C_{a_1 a_2 a_3} \left(\begin{array}{l} g^{\nu_1 \nu_2} (p_1 - p_2) g^{\nu_3} \\ + g^{\nu_2 \nu_3} (p_2 - p_3) g^{\nu_1} \\ + g^{\nu_3 \nu_1} (p_3 - p_1) g^{\nu_2} \end{array} \right)$
Vier-Gluon-Vertex:		$\begin{array}{l} -ig^2 C_{a_0 a_1 a_2} C_{a_0 a_3 a_4} (g^{\nu_1 \nu_3} g^{\nu_2 \nu_4} - g^{\nu_1 \nu_4} g^{\nu_2 \nu_3}) \\ -ig^2 C_{a_0 a_1 a_3} C_{a_0 a_4 a_2} (g^{\nu_1 \nu_4} g^{\nu_3 \nu_2} - g^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_4}) \\ -ig^2 C_{a_0 a_1 a_4} C_{a_0 a_2 a_3} (g^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_4 \nu_3} - g^{\nu_1 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_2}) \end{array}$

Tabelle 2.2.: Feynmanregeln für die Quantenchromodynamik

Wir schauen uns die niedrigsten Ordnungen für QCD-Vierpunktfunktionen an.

f_0 enthält keine Wechselwirkungen und keine vollständig verbundenen Graphen. Dieser Beitrag ist daher von geringem Interesse. Formal ergeben sich die Topologien in Abbildung 2.1.

f_1 ist der Summand mit niedrigster Ordnung in α_s , der vollständig verbundene Graphen enthält. Die Topologien für QCD-Wechselwirkungen sind in Abbildung 2.2 eingetragen. Eine vollständige Übersicht über alle QCD-Vierpunktgraphen ist in Tabelle 5.1 zu sehen. In dieser Ordnung in α_s können keine vollständig verbundenen Graphen mit Schleifen auftreten, es treten also keine Integrale über freie Schleifenimpulse auf.

f_2 hat bereits so viele verschiedene vollständig verbundene Topologien, dass wir sie nicht alle angeben. Bemerkenswert ist aber, dass alle Graphen Schleifen enthalten. Exemplarisch ist ein Graph aus f_2 in Abbildung 2.3 eingetragen. Alle Impulse bis auf den Schleifenimpuls k sind durch die äußeren Impulse p_1 - p_4 festgelegt. Durch die Integration über den freien Impuls k erhalten wir einen Ausdruck der Form:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2(p))} \quad (2.36)$$

M ist eine eine Funktion, die weitere Parameter der Theorie wie z.B Quarkmassen enthält. Integrale, wie in (2.36) divergieren offensichtlich für $k^2 \rightarrow \infty$, demnach sind die Koeffizienten f_2 der Störungsreihe nicht definiert und damit ist die Reihe selbst nicht definiert.

Wir haben nun also eine Störungsreihe, mit der wir Wechselwirkungen als Korrekturterme zu der freien Theorie ohne Wechselwirkung hinzunehmen können. Diese



Abbildung 2.1.: Topologien von Graphen für die nullte Ordnung von Vierpunktfunktionen.

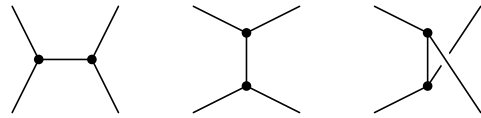


Abbildung 2.2.: Topologien von vollständig verbundenen Graphen für die erste, nicht verschwindende Ordnung von Vierpunktfunktionen.

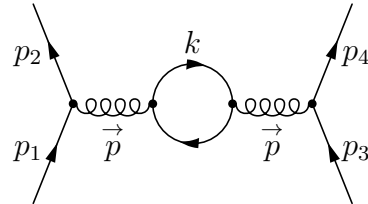


Abbildung 2.3.: Ein Beispiel für einen vollständigen Feynmangraphen für die zweite, nicht verschwindende Ordnung von Vierpunktfunktionen.

Korrekturterme können wir mithilfe von Feynmangraphen abstrahieren und anschaulich darstellen. Aufgrund der divergenten Koeffizienten können wir die Störungsreihe in dieser Form aber nicht verwenden, um Observablen auszurechnen. Um endliche Koeffizienten zu erhalten, müssen wir die Reihe *renormieren*. Im folgenden Abschnitt werden wir diese *Renormierung* durchführen. Wir werden sehen, dass die Form der Störungsreihe dadurch unverändert bleibt, sodass wir alle Ergebnisse dieses Abschnitts, insbesondere die Darstellung der Korrekturterme durch Feynmangraphen, auf die renormierte Reihe übertragen können.

2.4. Renormierung

In Abschnitt 2.3 haben wir eine Störungsreihe

$$G(p_1, \dots, p_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_s^n f_n(p_1, \dots, p_n) \quad (2.37)$$

für die Greenfunktion G definiert, die divergente Ausdrücke wie in (2.36) enthält. Durch das Zusammenspiel von *Regularisierung* und *Renormierung* können wir die Reihe in eine wohldefinierte Reihe mit endlichen Koeffizienten überführen. Der konstante Entwicklungsparameter α_s wird dadurch zu einer Funktion in der Renormierungsskala μ_R . In dieser Skalenabhängigkeit liegt der Schlüssel zu der Phänomenologie der Quantenchromodynamik. Im Anschluss an diesen Abschnitt werden wir die wichtigsten Schlussfolgerungen aus der Skalenabhängigkeit diskutieren. Diese Diskussion ist das eigentliche Ziel dieses Kapitels. Die Zusammenfassung des Konzepts der Renormierung in diesem Kapitel orientieren sich an der Publikation „A hint of renormalization“¹⁰

2.4.1. Renormierbarkeitsannahme

Wenn wir einer formal definierten aber nicht konvergenten Potenzreihe eine Observable zuordnen und diese messen können, dann wissen wir, dass die Divergenzen unphysikalisch sind und nur durch eine ungünstige Wahl des Entwicklungsparameters auftreten. Wir nennen eine formal definierte Potenzreihe mit divergenten Koeffizienten *renormierbar*, wenn wir sie durch eine Redefinition der Entwicklungsparameter durch Observablen eindeutig in eine asymptotische Reihe umschreiben können. Für die folgende Herleitung der Renormierungsgruppe machen wir die *Renormierbarkeitsannahme*:

¹⁰Delamotte (2004)

Um wohldefinierte Störungsreihen mit konvergenten Koeffizienten zu erhalten, ist es hinreichend, wenn wir alle Parameter der Theorie durch Observablen ausdrücken und die Reihe entsprechend umparametrisieren.

Wenn wir die Quarkmassen vernachlässigen, wird diese Annahme für die QCD auf zweifache Weise besonders einfach. Zum einen bleibt als einziger Parameter g^2 bzw. α_s übrig, wir können also die Renormierung der QCD mit nur einer Messung von $f_2|_{p=\mu}$ vollständig durchführen. Zum anderen tragen die zu renormierende Kopplungskonstante g und der äußere Impuls p verschiedene Einheiten, deshalb können wir die Form der Renormierungsgruppengleichung aus einer dimensional Analyse ablesen.

2.4.2. Regularisierung

Zwar nennen wir den Ausdruck in (2.37) eine „formal definierte Reihe“. Da aber einige Koeffizienten divergente Ausdrücke enthalten, wird durch (2.37) streng genommen keine Reihe definiert. Wir müssen diese Divergenzen vorübergehend *regularisieren*, um eine Renormierung durchführen zu können. Für f_2 bedeutet das, dass wir einen Regulator Λ einführen und eine Potenzreihe f_2^Λ definieren, so dass $f_2^\Lambda(p)$ für $\Lambda \neq \Lambda_0$ konvergiert und für $\Lambda \rightarrow \Lambda_0$ formal mit f_2 übereinstimmt. Wenn die Renormierbarkeitsannahme zutrifft, dann muss $\lim_{\Lambda \rightarrow \Lambda_0} f_2^\Lambda(p)$ nach der Reparametrisierung eine wohldefinierte asymptotische Reihe ergeben.

In diesem Fall ist es naheliegend als Regulator eine obere Integrationsgrenze $|k| < \Lambda$ mit $\Lambda_0 = \infty$ zu wählen, allerdings ist es für die Renormierungsgruppengleichung unerheblich, wie f_2 regularisiert wird. In jedem Fall tritt aber ein Regulator mit derselben Einheit wie p auf. Der Einfachheit wegen nehmen wir folgende regularisierte Reihe an:

$$\mathcal{G}_2^\Lambda(p) = \alpha_s + C_2 \alpha_s^2 \int_{k^2 < \Lambda^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2(p))} + \mathcal{O}(\alpha_s^3) \quad (2.38)$$

$$\mathcal{G}_2(p) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} f_1(p) \mathcal{G}_2^\Lambda(p) \quad (2.39)$$

$$F(p) = \alpha + f(p) \alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^3) \quad (2.40)$$

$$F_{\text{reg}}(p, \Lambda) = \alpha + f_{2\text{reg}}(p, \Lambda) \alpha^2 + f_{3\text{reg}}(p, \Lambda) \alpha^3 + \mathcal{O}(\alpha^4) \quad (2.41)$$

Wir führen eine Messung von F bei dem Wert $p = \mu$ durch, messen den Wert α_μ

$$F(\mu) = \alpha_\mu \quad (2.42)$$

und schreiben die Reihe in α als Reihe in α_μ , indem wir α in α_μ entwickeln:

$$\alpha = \alpha_\mu + \alpha_\mu^2 a_{2\mu} + \alpha_\mu^3 a_{3\mu} + \mathcal{O}(\alpha_\mu^4) \quad (2.43)$$

(2.41) wird damit zu:

$$\begin{aligned}
F_{\text{reg}}(p, \Lambda) &= \alpha_\mu \\
&+ \alpha_\mu^2 (a_{2\mu} + f_{2\text{reg}}(p, \Lambda)) \\
&+ \alpha_\mu^3 (a_{3\mu} + 2a_{2\mu}f_{2\text{reg}}(p, \Lambda) + f_{3\text{reg}}(p, \Lambda)) \\
&+ \mathcal{O}(\alpha_\mu^4)
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Wenn wir uns dieses Ergebnis Ordnung für Ordnung ansehen, dann stellen wir fest:

α_μ^2 : $f_{2\text{reg}}(p, \Lambda)$ divergiert für $\Lambda \rightarrow \infty$, nach Voraussetzung muss die Reihe aber wohldefiniert sein. $a_{2\mu}$ muss also den divergenten Anteil von $f_{2\text{reg}}$ kompensieren, sodass die Summe beider Terme für $\Lambda \rightarrow \infty$ endlich ist. $a_{2\mu}$ hängt aber nicht von p ab, somit kann der divergente Anteil von $f_{2\text{reg}}$ ebenfalls nicht von p abhängen. Wir können demnach einen divergenten, p -unabhängigen Anteil $f_{2\text{reg}}^{\text{inf}}$ und einen endlichen, p -abhängigen Anteil $f_{2\text{reg}}^{\text{fin}}$ definieren:

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} (a_{2\mu} + f_{2\text{reg}}(p, \Lambda)) \quad \text{konvergent} \tag{2.45}$$

$$\Rightarrow f_{2\text{reg}}(p, \Lambda) = f_{2\text{reg}}^{\text{inf}}(\Lambda) + f_{2\text{reg}}^{\text{fin}}(p, \Lambda) \tag{2.46}$$

$$\text{mit} \tag{2.47}$$

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} (a_{2\mu} + f_{2\text{reg}}^{\text{inf}}(\Lambda)) = 0 \tag{2.48}$$

α_μ^3 : In dieser Ordnung ist die Sache etwas komplizierter, weil neben $f_{3\text{reg}}$ auch $f_{2\text{reg}}$ involviert ist. Aus der Forderung der Konvergenz können wir aber die Struktur des divergenten Anteils $f_{3\text{reg}}^{\text{inf}}$ ablesen:

$$f_{3\text{reg}}^{\text{inf}} = 2f_{2\text{reg}}^{\text{inf}}(\Lambda)f_{2\text{reg}}^{\text{fin}}(p, \Lambda) + f_3(\Lambda) \tag{2.49}$$

Der divergente Anteil ist in dritter Ordnung zwar nicht mehr unabhängig von p , aber die p -Abhängigkeit ist vollständig durch den endlichen Anteil der zweiten Ordnung festgelegt.

Diese Struktur zieht sich durch alle Ordnungen der Reihenentwicklung: In jeder Ordnung wird durch die Renormierbarkeitsannahme ein Term festgelegt, der wiederum den divergenten Teil der nächsthöheren Ordnung festlegt. Auf diese Weise kann die Reihe Ordnung für Ordnung regularisiert werden.

2.4.3. Dimensionslose Parameter

Wie bereits erwähnt, wird die Renormierung dadurch besonders einfach, dass die Kopplungskonstante α dimensionslos ist, nicht aber der äußere Impuls p . Wir erhalten

demnach in (2.41) dimensionslose Koeffizienten $f_{n\text{reg}}$ mit den Argumenten p und Λ , die Energieeinheiten haben. Das ist nur dann möglich, wenn $f_{n\text{reg}}$ tatsächlich nur von dem dimensionslosen Verhältnis $\frac{p}{\Lambda}$ abhängt. Darin liegt auch der Grund für die oben bereits erwähnte Tatsache, dass der Regularisierungsparameter unbedingt dieselbe Einheit wie p haben muss. Wir bekommen also eine alternative Form für $f_{n\text{reg}}$:

$$f_{n\text{reg}}(p, \Lambda) = \tilde{f}_{n\text{reg}}\left(\frac{p}{\Lambda}\right) \quad (2.50)$$

Andererseits haben wir gesehen, dass die divergenten Anteile der Koeffizienten $f_{n\text{reg}}$ nicht von p abhängen. Mit etwas mehr Mühe lässt sich zeigen, dass sich der p -abhängige Anteil von $f_{2\text{reg}}(p, \Lambda)$ auf eine Form bringen lässt, die nicht von Λ abhängt:

$$f_{2\text{reg}}(p, \Lambda) = f_{2\text{reg}}^{\text{inf}}(\Lambda) + f_{n\text{reg}}^{\text{fin}}(p) \quad (2.51)$$

Es folgt also:

$$\tilde{f}_{2\text{reg}}\left(\frac{p}{\Lambda}\right) = f_{2\text{reg}}^{\text{inf}}(\Lambda) + f_{2\text{reg}}^{\text{fin}}(p) \quad (2.52)$$

Das ist offensichtlich nur möglich, wenn

$$\tilde{f}_{2\text{reg}}\left(\frac{p}{\Lambda}\right) = a \log\left(\frac{p}{\Lambda}\right) \quad (2.53)$$

In dritter Ordnung (2.49) tritt das Produkt der Terme aus zweiter Ordnung auf:

$$f_{3\text{reg}}^{\text{inf}}(\Lambda) f_{3\text{reg}}^{\text{fin}}(p) \quad (2.54)$$

Mit der gleichen dimensional Begründung können wir wieder eine Logarithmusfunktion ansetzen:

$$\tilde{f}_{3\text{reg}}\left(\frac{p}{\Lambda}\right) = \left(a \log\left(\frac{p}{\Lambda}\right)\right)^2 + b \log\left(\frac{p}{\Lambda}\right) \quad (2.55)$$

Tatsächlich zieht sich diese Struktur der Logarithmen durch alle Ordnungen der Entwicklung, wenn auch mit nichttrivialen numerischen Vorfaktoren. Der Reihenkoeffizient von α_μ^n kann also selbst als Reihe bis n über $\log^k\left(\frac{p}{\Lambda}\right)$ aufgefasst werden. In der Reihenentwicklung bis α^4 zeigt sich bereits die Struktur der gesamten Reihe:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\text{reg}}\left(\frac{\Lambda}{p}\right) &= \alpha + \alpha^2 \log\left(\frac{\Lambda}{p}\right) + \alpha^3 \log^2\left(\frac{\Lambda}{p}\right) + \alpha^4 \log^3\left(\frac{\Lambda}{p}\right) + \dots \\ &\quad + \alpha^3 \log\left(\frac{\Lambda}{p}\right) + \alpha^4 \log^2\left(\frac{\Lambda}{p}\right) + \dots \\ &\quad + \alpha^4 \log\left(\frac{\Lambda}{p}\right) + \dots \end{aligned} \quad (2.56)$$

2.4.4. Reparametrisierung

Jetzt können wir die Reparametrisierung schließlich durchführen:

1. Nach Voraussetzung wurde die Entwicklung von α bei einer beliebigen, aber festen Skala μ durchgeführt. Wir werten also (2.44) für $p = \mu$ aus und erhalten Ordnung für Ordnung einen Ausdruck entsprechend (2.48), aus denen wir $a_{n\mu}$ bis auf einen endlichen Anteil durch $f_{n\text{reg}}\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)$ ausdrücken können.
2. Wir nehmen $\Lambda \gg \mu$ an, sodass die endlichen Anteile wie in (2.48) irrelevant sind.
3. Wir setzen diese Koeffizienten in (2.43) ein und erhalten formal eine Funktion $\alpha\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)$.
4. Wir setzen diese Funktion in (2.41) ein und erhalten die renormierte Formulierung F_{ren} für F_{reg} :

$$F_{\text{ren}}\left(\frac{p}{\mu}\right) = \alpha_{\mu} + f_{2\text{reg}}\left(\frac{p}{\mu}\right)\alpha_{\mu}^2 + f_{3\text{reg}}\left(\frac{p}{\mu}\right)\alpha_{\mu}^3 + \mathcal{O}(\alpha_{\mu}^4) \quad (2.57)$$

Zwei Eigenschaften dieser Formulierung fallen sofort auf:

Zum einen ist sie unabhängig von Λ . Das ist kein Zufall, sondern notwendige Folge der Renormierbarkeitsannahme. Die Koeffizienten $a_{n\mu}$ sind so konstruiert, dass Terme der Form

$$\log\left(\frac{p}{\Lambda}\right) + \log\left(\frac{\Lambda}{x}\right) \quad (2.58)$$

bzw. entsprechende Polynome bei höheren Ordnungen aufaddiert werden. Auf diese Weise wird Ordnung für Ordnung die Λ -Abhängigkeit eliminiert.

Zum anderen hat $F_{\text{ren}}\left(\frac{p}{\mu}\right)$ exakt die gleiche Form wie $F_{\text{reg}}\left(\frac{p}{\Lambda}\right)$. Wir können den Übergang von der einen zu der anderen Formulierung also durch eine erstaunlich einfache Weise vollziehen, indem wir $\{\alpha, \Lambda\}$ durch $\{\alpha_{\mu}, \mu\}$ ersetzen.

2.4.5. Renormierungsgruppe

Die Entwicklung von F_{ren} haben wir bei einer beliebigen Skala μ durchgeführt, wir sollten sie also auch bei einer beliebigen anderen Skala μ' durchführen können. Entsprechend würden wir dann eine andere renormierte Kopplungskonstante $\alpha_{\mu'}$ erhalten. Die Menge aller Kombinationen $\{\alpha_{\mu}, \mu\}$, die aus $\{\alpha, \Lambda\}$ abgeleitet werden können, müssen dann zusammen mit der Renormierungsabbildung $\{\alpha', \mu'\} = f(\{\alpha_{\mu}, \mu\}, \alpha')$ die Struktur einer Gruppe ergeben:

$$\{\alpha'', \mu''\} = f(f(\{\alpha_{\mu}, \mu\}, \alpha'), \alpha'') = f(\{\alpha_{\mu}, \mu\}, \alpha'') \quad (2.59)$$

Diese Aussage ist nicht selbstverständlich, wenn wir die Störungsreihe bis zur n -ten Ordnung betrachten. Die naive Betrachtung

$$\alpha_\mu = \alpha + a\alpha^2 \log\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) + \mathcal{O}(\alpha^3) \quad (2.60)$$

$$\alpha_{\mu'} = \alpha + a\alpha^2 \log\left(\frac{\Lambda}{\mu'}\right) + \mathcal{O}(\alpha^3) \quad (2.61)$$

$$\Rightarrow \alpha_{\mu'} = \alpha_\mu + a\alpha_\mu^2 \log\left(\frac{\mu}{\mu'}\right) + \mathcal{O}(\alpha_\mu^3) \quad (2.62)$$

hat zwei Probleme. Einerseits haben wir für den Übergang $\{\alpha, \Lambda\} \rightarrow \{\alpha_\mu, \mu\}$ vorausgesetzt, dass $\frac{\Lambda}{\mu} \gg 1$, sodass die Logarithmen in (2.60) und (2.61) groß werden. Wir müssen die Logarithmen in führender Ordnung, also in der höchsten bis α^n auftretenden Ordnung, in der Reihenentwicklung berücksichtigen, um eine konsistente Gruppenabbildung zu erhalten. Per Konstruktion treten in n -ter Ordnung alle Potenzen der Logarithmen bis $n - 1$ auf.

Andererseits kann auch das Verhältnis $\frac{\mu}{\mu'}$ beliebig groß werden. Die Approximation wird also immer schlechter, je größer der Schritt $\mu \rightarrow \mu'$ ist, also je größer μ/μ' ist.

Die Lösung für das zweite Problem liegt darin, die Gruppenabbildung nicht für große Schritte, sondern für infinitesimale Schritte durchführen. Das bedeutet, dass wir ausgehend von dem Differential

$$\beta(\alpha_\mu) = \mu \left[\frac{\partial \alpha_\mu}{\partial \mu} \right]_{\alpha\Lambda} \quad (2.63)$$

das Differential der Gruppenabbildung f

$$\beta(\alpha_\mu) = - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha_\mu, x) \right]_{x=1} \quad (2.64)$$

mit

$$x = \frac{\mu}{\mu'} \quad (2.65)$$

definieren. Das erste Problem lösen wir, indem wir für f_n einen Doppelreihenansatz in α_μ und x machen:

$$f_n(\alpha_\mu, x) = \alpha + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{n-1} b_{k,l} \alpha_\mu^{k+1} \log^l(x) \quad (2.66)$$

Nach Differenziation und Einsetzung $x = 1$ bleiben offensichtlich nur Beiträge mit $l = 1$ übrig. Daraus können wir die Form von β direkt ablesen:

$$\beta(\alpha_\mu) = b_0 \alpha_\mu^2 + b_1 \alpha_\mu^3 + b_2 \alpha_\mu^4 + \dots \quad (2.67)$$

Es ist bemerkenswert, dass die ersten beiden Koeffizienten b_0 und b_1 universell sind. Für zwei verschiedene Parametrisierungen $\{\alpha, \mu\}$ und $\{\tilde{\alpha}, \mu\}$ sind diese Koeffizienten also identisch. Für alle weiteren Koeffizienten gilt das nicht.

Integrieren wir $\beta(\alpha_\mu)$ mit μ -abhängigem α_μ von μ nach μ' , so erhalten wir:

$$\frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{\alpha} + \frac{b_1}{b_0} \log \left(\frac{\alpha}{\alpha'} \frac{b_0 + b_1 \alpha'}{b_0 + b_1 \alpha} \right) = b_0 \log \frac{\mu'}{\mu} \quad (2.68)$$

Für diese Gleichung gibt es keine triviale Lösung. Im Grenzwert für eine schnell konvergierende Reihe, genauer im Grenzwert

$$\frac{\alpha b_1}{b_0} \rightarrow 0 \quad (2.69)$$

können wir aber eine Lösung angeben:

$$\alpha_{\mu'} = \frac{\alpha_\mu}{1 - \alpha_\mu b_0 \log \frac{\mu}{\mu'} + \frac{b_1}{b_0} \alpha_\mu \log \left(1 - \alpha_\mu \log \frac{\mu}{\mu'} \right)} \quad (2.70)$$

Gleichung (2.70) hilft uns, die eingangs gestellte Frage nach den Unterschieden zwischen der *Starken* und der *Elektroschwachen Wechselwirkung* zu beantworten. Bevor wir uns diesen Unterschieden zuwenden, untersuchen wir aber die Bedeutung der Gleichung selbst.

2.5. Phänomenologische Konsequenzen

Ausgehend vom der konstanten Kopplungsstärke α_s sind wir durch die Reparametrisierung in Abschnitt 2.4 zu der renormierten Kopplungsstärke $\alpha_s(\mu_R)$ übergegangen. Die Renormierungsskala μ_R ist zunächst keine Observable, sondern lediglich eine Hilfsgröße mit der Einheit einer Energie und beliebigem Wert. Dennoch hat die Renormierungsskala phänomenologische Konsequenzen, die für diese Dissertation von Bedeutung sind. In Kapitel 4 werden wir sehen, dass wir die Renormierungsskala konsistent mit anderen Skalen wählen müssen, um partonische Wirkungsquerschnitte zu quantifizieren.

In diesem Abschnitt sehen wir uns an, wie die Renormierung zu einer *effektiven Theorie führt* und welche phänomenologische Bedeutung die Renormierungsskala für die QCD hat.

2.5.1. Effektive Theorie

Wir sind zu Beginn dieses Kapitels von einer Störungsreihe mit Divergenzen der Form (2.36) ausgegangen. Diese Divergenzen treten durch hohe Impulse $|k^2| \rightarrow \infty$ von Teilchen in den Schleifen der Feynmangraphen auf. Unsere nichtrenormierte Beschreibung

der Wechselwirkung ist demnach offensichtlich ungeeignet, um virtuelle Fluktuationen mit hohen Impulsen zu beschreiben.

Aus diesem Grund sind wir zu einer alternativen Beschreibung übergegangen, indem wir den einzigen freien Parameter gemessen und unsere Theorie durch diesen Messwert ausgedrückt haben. Dieser Messwert hängt aber nicht von unserer Wahl der Regularisierung ab und muss somit auch Beiträge durch virtuelle Fluktuationen mit hohen Impulsen enthalten. Auf diese Weise haben wir hochenergetische Beiträge in unsere renormierte Beschreibung aufgenommen, ohne eine explizite Beschreibung solcher Beiträge zu kennen.

In diesem Sinne ist die renormierte QCD eine *effektive Theorie*, denn sie beschreibt solche Effekte explizit, die bei der Energieskala μ_R quantitativ dominieren, während Effekte, die nur bei höheren Energien quantitativ beitragen, in Koeffizienten absorbiert werden, die selbst nicht durch die Theorie beschrieben werden können und gemessen werden müssen.

Warum das funktioniert können wir verstehen, wenn wir einer Wechselwirkung ein Auflösungsvermögen A zuordnen, die der inversen Wechselwirkungsenergie Q entspricht:

$$A = \frac{hc}{|Q|} \quad (2.71)$$

Eine Wechselwirkung mit Energie Q ist nicht sensitiv für Quantenfelder mit sehr viel kleineren Varianzen als dem Auflösungsvermögen, sondern bloß sensitiv für deren Mittelwert über ein Gebiet von der Größenordnung des Auflösungsvermögens. Entsprechend sind sie nicht sensitiv für Effekte bei sehr viel höheren Energieskalen, sondern bloß für deren Mittelwerte.

Der zweite Aspekt ist die Änderung der Kopplungskonstante innerhalb des Gültigkeitsbereichs der Theorie. Dieser Aspekt ist vollkommen unabhängig vom dem ersten. Es ist auch nicht generell notwendig, dass sich die Kopplungskonstanten ändern. Offensichtlich ergeben sich drei verschiedene Fälle:

- $\alpha(\mu)$ ist streng monoton steigend.
- $\alpha(\mu)$ ist streng monoton fallend.
- $\alpha(\mu)$ ist nicht streng monoton.

Im ersten Fall werden Erwartungswerte von Observablen, die als Reihe in α_s ausgedrückt werden, mit zunehmenden räumlichen Dimensionen immer kleiner. Für eine effektive Theorie bei kleineren Energien, also für eine makroskopische effektive Theorie, sind diese Wechselwirkungen marginal. Die Gültigkeit solcher Theorien ist notwendigerweise nach oben beschränkt, bei hohen Energieskalen müssen sie in andere Theorien übergehen.

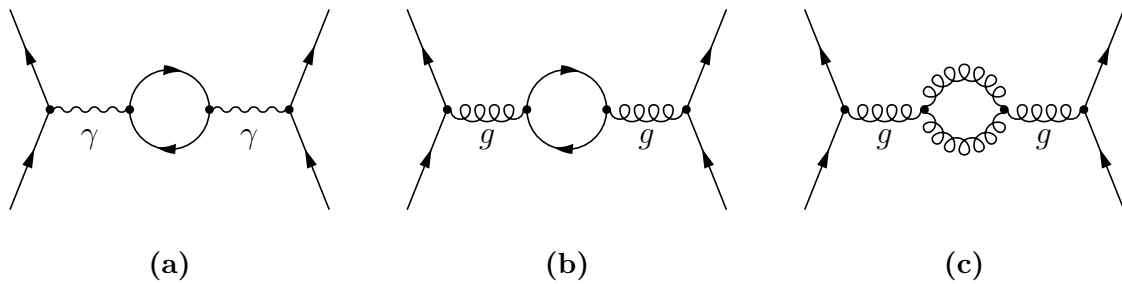


Abbildung 2.4.: Eine Auswahl von Schleifendiagrammen in niedrigster Ordnung der QED bzw. QCD Kopplungskonstanten. (a) QED: Beitrag zur Photon-Selbstenergie. (b) QCD: Beitrag zur Gluon-Selbstenergie. Dieser Beitrag ist die QCD-Entsprechung zu Abbildung (a). (c): Ein weiterer QCD Beitrag zur Gluon-Selbstenergie, zu dem es keine QED-Entsprechung gibt.

Im zweiten Fall werden Erwartungswerte von solchen Observablen mit zunehmenden räumlichen Dimensionen immer größer. Für eine effektive Theorie bei kleineren Energien sind diese Wechselwirkungen gegenüber Wechselwirkungen mit zuerst genanntem Verhalten dominant. Solche Theorien müssen bei hohen Energien nicht notwendigerweise ihre Gültigkeit verlieren, allerdings müssen sie bei kleinen Energien in eine andere effektive Theorie übergehen.

Im letzten Fall ist nicht generell klar, ob die Wechselwirkungen marginal sind oder nicht, es muss von Fall zu Fall entschieden werden.

2.5.2. QCD vs. QED

Wichtiger noch als die exakten Zahlenwerte der Koeffizienten b_n sind deren Vorzeichen. Für die exakte Berechnung aller notwendigen Feynmangraphen für die Quantifizierung der Konstanten b_n verweisen wir auf Publikationen, wie „Aspects of quantum chromodynamics“¹¹ und schauen uns lediglich die wichtigsten Unterschiede zwischen den QCD-Diagrammen und den QED-Diagrammen an.

Die Topologien in Ordnung α_s^2 sind bis auf zusätzliche QCD-Diagramme mit vier-Gluon-Vertex exakt gleich. Um den Unterschied zwischen QCD und QED zu verstehen, reicht es aber aus, sich die Topologien der QED-Schleifendiagramme anzusehen. In Abbildung 2.4 sind die Schleifendiagramme von derselben Topologie abgebildet, wie sie auch in Abbildung 2.3 als Beispiel für divergente Diagramme verwendet wurde.

Abbildung 2.4a und Abbildung 2.4b sind exakt identisch bis auf die Ersetzung von Photonen durch Gluonen, somit ist Abbildung 2.4b die QCD Entsprechung für das QED Diagramm Abbildung 2.4a. Sie liefern mit $2N_F/3$ bzw. $N_F/3$ bis auf einen Faktor

¹¹Pich (1999)

zwei dieselben, positiven Beiträge zu b_0 , wobei N_F die Zahl der Flavorzustände ist, die in dem betrachteten Energiebereich an der Wechselwirkung teilnehmen.

Abbildung 2.4c hat keine QED Entsprechung, da die QED keine Drei-Photon-Vertizes enthält. Wir hatten diesen Aspekt bereits in Abschnitt 2.2.4 angesprochen. An dieser Stelle zeigt sich die Konsequenz aus dem Auftreten von Drei-Gluon-Vertizes. Diagramme dieser Art ergeben einen negativen Beitrag $-11N_C/6$ zu b_0 , wobei N_C die Zahl der Farbbasiszustände ist. Damit wird b_0 für die QCD insgesamt negativ, während b_0 für die QED positiv bleibt.

In erster Näherung für β ergibt sich daraus, dass die Kopplungsstärke der QED $\alpha(\mu_R)$ mit μ_R steigt, während die Kopplungsstärke der QCD $\alpha_s(\mu_R)$ mit μ_R fällt.

2.5.3. Konsequenzen für die QCD

Die Kopplungsstärke $\alpha_s(\mu)$ der QCD fällt streng monoton mit μ , folglich wird $\alpha_s(\mu)$ immer größer, je kleiner wir μ wählen. Bei genauerer Betrachtung stellen wir fest, dass sie bei einem positiven Wert Λ_{QCD} für μ über alle Schranken wächst.

$$\lim_{\mu \rightarrow \Lambda_{\text{QCD}}} \alpha_s(\mu) = \infty, \quad \Lambda_{\text{QCD}} > 0 \quad (2.72)$$

Wir nennen den Wert Λ_{QCD} die *Skala der QCD*. In der Nähe dieses Werts können wir die Störungsreihe in $\alpha_s(\mu)$ nicht verwenden um Wirkungsquerschnitte zu berechnen, da der Fehler einer Abschätzung durch eine Partialsumme mit endlich vielen Summanden nicht beschränkt ist. Das hat unmittelbare Konsequenzen für die Wirkungsquerschnitte von Quarkstreuungen.

Um der Tatsache Rechnung zu tragen, dass das Auflösungsvermögen solcher Wechselwirkungen in etwa durch den Betrag des übertragenen Impulses q gegeben ist, wird nach Konvention die Renormierungsskala mit $\mu^2 = q^2$ diesem Wert gleich gesetzt. Daraus folgt, dass wir in der renormierten Theorie keine QCD-Streuungen mit kleinen Impulsüberträgen $q^2 < \Lambda_{\text{QCD}}^2$ beschreiben können.

Durch die Renormierung haben also Divergenzen bei hohen Impulsen gegen Divergenzen bei niedrigen Impulsen eingetauscht. Das ist ein weiteres wichtiges Zwischenergebnis, das wir in Abschnitt 3.2.1 verwenden werden. Dort werden uns diese niederenergetischen Divergenzen dazu zwingen, mit der Faktorisierungsskala μ_F eine weitere Skala einzuführen, um eben diese Divergenzen von der perturbativen Entwicklung zu trennen und in nichtperturbative Observablen zu absorbieren. Diese neue Skala μ_F wird für die Beschreibung von mehrfachen Streuungen einer wichtigen Rolle zukommen.

Den niederenergetischen Divergenzen steht der experimentelle Befund gegenüber, dass Quarks niemals als freie Teilchen, sondern nur als gebundene Zustände in Form

von Hadronen detektiert werden. Wir nennen diesen Befund *Confinement*. Wir können also keine Streuexperimente aufsetzen, um niederenergetische Streuungen von Quarks zu untersuchen. Es liegt nahe einen Zusammenhang zwischen dem Fehlen von freien Quarks und der Divergenz der Störungsreihe zu vermuten, allerdings gibt es bis heute dafür keinen formalen Beweis. Durch tief-inelastische Streuungen von Hadronen weiß man andererseits, dass bei Streuungen mit Impulsüberträgen von $\lesssim \Lambda_{\text{QCD}}$ keine einzelnen Quarks aufgelöst, sondern ganze Hadronen gestreut werden.

Da es also keine Beobachtungen von niederenergetischen QCD-Streuungen mit $Q^2 \lesssim \Lambda_{\text{QCD}}^2$ gibt, stellt der Zusammenbruch der Störungsreihe bei Λ_{QCD} kein phänomenologisches Problem dar. Allerdings lernen wir daraus, dass wir keine perturbative Beschreibung der inneren Struktur von Hadronen haben können, da die hadronischen Bindungsenergien etwa gleich Λ_{QCD} sind. Das erschwert die theoretische Beschreibung von hadronischen Streuereignissen erheblich und zwingt uns dazu, die Streuung in einen perturbativ berechenbaren und einen nicht perturbativ berechenbaren Term zu faktorisieren. Im nachfolgenden Kapitel werden wir diese Faktorisierung studieren, um uns schließlich dem eigentlichen Gegenstand dieser Dissertation zuwenden zu können, nämlich den Faktorisierungen von mehrfachen Streuungen.

Dass $\alpha_s(\mu)$ streng monoton fällt bedeutet auch, dass sich die Konvergenz der Störungsreihe für große Werte von μ verbessert. Um einen Wirkungsquerschnitt mit einer festen Genauigkeit ϵ zu erhalten, müssen wir also weniger Terme der Störungsreihe auswerten, je höher der Impulsübertrag ist. Für $Q^2 \rightarrow \infty$ konvergiert die Reihe gegen den Term nullter Ordnung in α_s , also gegen den Ausdruck für freie Teilchen ohne Wechselwirkungen. Wir nennen die QCD daher *asymptotisch frei*.

Die *asymptotische Freiheit* bedeutet für uns, dass wir trotz des *Confinements* perturbative Beschreibungen von QCD-Wechselwirkungen verwenden können. Wenn wir Hadronen mit großen relativen Impulsen $\gg \Lambda_{\text{QCD}}$ streuen, dann können die eingeschlossenen Quarks ebenfalls Streuungen mit $\mu^2 = q^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2$ vollziehen. Bei diesen Impulsen können wir die partonischen Streuungen aber perturbativ beschreiben.

2.5.4. Fazit

In diesem Kapitel haben wir gesehen, wie die Annahme von drei Basiszuständen für die Farbladung der Quantenchromodynamik zu Gluon selbstwechselwirkungen führt. Durch Renormierung kommen wir zu einer effektiven Theorie, in der diese Selbstwechselwirkungen Divergenzen bei kleinen Wechselwirkungsenergien $Q^2 < \Lambda_{\text{QCD}}^2$ in den Störungsreihen für Greenfunktionen verursachen. Diese Divergenzen machen eine störungstheoretische Beschreibung von Hadronen unmöglich, sodass wir die niederenergetischen Anteile für eine Beschreibung von hadronischen Wechselwirkungen in nichtperturbativen Observablen absorbieren müssen. Diese Faktorisierung von nieder- und hochenergetischen Beiträgen wird im folgenden Kapitel beschrieben.

Wir gebrauchen unsere Verstandeskräfte dann recht, wenn wir alle Gegenstände (...) nehmen, wie es für unsere Fähigkeiten passend ist, und auf Grundlagen, die wir verstehen können, und wenn wir nicht (...) Gewissheit verlangen, wo nur Wahrscheinlichkeit zu erlangen ist.

(John Locke)

3. Parton-Verteilungsfunktionen

Wir haben jetzt eine renormierte Theorie, die hochenergetische Wechselwirkungen von Quarks und Gluonen beschreibt, können aber aufgrund des Confinements keine Streuexperimente mit freien Quarks und Gluonen durchführen. Andererseits stammen die Messdaten, mit denen wir Modelle für Wechselwirkungen von Elementarteilchen verifizieren oder falsifizieren, fast ausschließlich von Streuexperimenten.

Wenn wir Streuungen mit Quarks und Gluonen durchführen wollen, dann haben wir keine andere Wahl, als gebundene Farb-Singlett Quarkzustände, also Baryonen oder Mesonen, als Streuteilchen zu verwenden. Dadurch gewinnen wir zunächst keine direkte Information über QCD-Wechselwirkungen, weil Zwischenzustände aus virtuellen Quarks und Gluonen zu kurzlebig sind, als dass sie in einem Detektor direkt nachgewiesen werden könnten. Stattdessen werden im Endzustand wieder nur farbneutrale Teilchen, also Leptonen und Hadronen detektiert.

Um Streuungen mit Beteiligung von Quarks oder Gluonen beschreiben zu können, müssen wir hadronische Wechselwirkungen zumindest teilweise verstehen. Dieses teilweise Verständnis können wir erhalten, indem wir den hochenergetischen, perturbativ beschreibbaren Anteil einer solchen Wechselwirkung von dem niederenergetischen, nicht perturbativ beschreibbaren Teil faktorisieren.

Wenn der niederenergetische Teil nicht von dem hochenergetischen teil abhängt, dann erhalten wir eine präskriptive Formulierung. Denn wir können den niederenergetischen Teil durch bestehende Daten aus Streuexperimenten bestimmen und sie mit perturbativen Rechnungen für ein beliebiges Wechselwirkungsmodell kombinieren, um eine Vorhersage für ein neues Streuexperiment zu machen.

Dieses Kapitel enthält eine kurze Übersicht über die notwendigen Schritte, um Strukturfunktionen mit QCD-Korrekturen zu definieren. Die QCD-Korrekturen werden zu einer Abhängigkeit der Strukturfunktionen von der Faktorisierungsskala μ_F führen. Diese Faktorisierungsskala wird von zentraler Bedeutung für die Formulierung mehrfacher Wechselwirkungen in Kapitel 4 sein. Wir folgen in diesem Kapitel weitgehend der Publikation „Structure Functions“¹.

¹De Roeck und Thorne (2011)

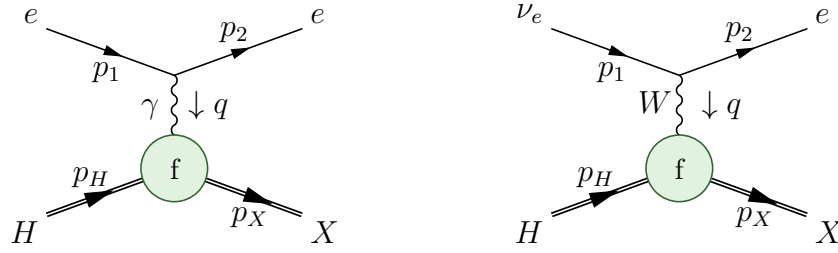


Abbildung 3.1.: Darstellung einer Elektron-Hadron Streuung mittels Photonaustausch und einer Neutrino-Hadron Streuung mittels W-Boson-Austausch.

3.1. Tief-Inelastische Streuung

Unser Ziel ist es Hadron-Hadron Streuungen zu verstehen. Dennoch beginnen wir mit etwas einfacheren Wechselwirkungen, nämlich Lepton-Hadron Streuungen. Diese sind einfacher, weil wir das Lepton als Elementarteilchen ohne innere Struktur ansehen können. Was wir daraus über die innere Struktur von Hadronen lernen, können wir in einem zweiten Schritt auf Hadron-Hadron Streuungen übertragen.

3.1.1. Lepton-Hadron Streuung

Als Beispiel betrachten wir eine inelastische Streuung

$$e(p_1) + H(p_H) \rightarrow e(p_2) + X(p_X) \quad (3.1)$$

eines Hadrons H mit einem Elektron e und einem beliebigen Endzustand X . In erster Näherung wird diese Wechselwirkung durch die QED Amplitude in niedrigster Ordnung beschrieben:

$$i\mathcal{M} = (ie)^2 \bar{u}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) i \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} \langle X, p_X | J_h^\nu | H, p_H \rangle \quad \text{mit} \quad (3.2)$$

$$q = p_1 - p_2 = p_X - p_H$$

Im Ruhssystem des Hadrons definieren wir mit den Impulsvektoren

$$p_H = (m_H, \vec{0}) \quad (3.3)$$

$$p_1 = (E_1, \vec{p}_1) \quad (3.4)$$

$$p_2 = (E_2, \vec{p}_2) \quad (3.5)$$

die Lorentzskalare

$$\nu = p_H \cdot q = m_H(E_1 - E_2) \quad (3.6)$$

$$Q^2 = -q^2 = 2p_1 p_2 \quad (3.7)$$

im Grenzwert verschwindender Elektronmasse. Wir berechnen den Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d^3p_2} = \frac{1}{16(2\pi)^3 E_1 E_2 m_H} \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(q - p_H - p_X) \sum_{e\text{-spins}} |\mathcal{M}|^2 \quad (3.8)$$

mit dem spingemittelten Matrixelement aus (3.2),

$$\sum_{e\text{-spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{(q^2)^4} L_{\mu\nu} \langle H, p_H | J_h^\nu | X, m_X \rangle \langle X, m_X | J_h^\nu | H, m_H \rangle. \quad (3.9)$$

$L_{\mu\nu}$ ist der leptonische Tensor des Matrixelements, den wir wieder im Grenzwert für verschwindende Elektronmasse ausrechnen können:

$$L_{\mu\nu} = 4 (p_{1,\nu} p_{2,\mu} + p_{1,\mu} p_{2,\nu} - g_{\mu\nu} p_1 \cdot p_2) \quad (3.10)$$

Den hadronischen Teil von (3.9) fassen wir zu dem hadronischen Tensor W_H zusammen

$$W_H^{\nu\mu}(q, p_H) = \frac{1}{4\pi} \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(q - p_H - p_X) \langle H, p_H | J_h^\nu | X, m_X \rangle \langle X, m_X | J_h^\mu | H, m_H \rangle \quad (3.11)$$

und erhalten eine etwas übersichtlichere Form des Wirkungsquerschnitts:

$$\frac{d\sigma}{d^3p_2} = \frac{e^4}{8(2\pi)^2 E_1 E_2 m_H (Q^2)^2} L_{\nu\mu} W_H^{\nu\mu} \quad (3.12)$$

Durch die Erhaltung des elektromagnetischen Stroms

$$(p_X - p_H) \langle X, m_X | J_h^\nu | H, m_H \rangle = 0 \quad (3.13)$$

erhalten wir

$$q_\mu W_H^{\nu\mu}(q, p_H) = q_\nu W_H^{\nu\mu}(q, p_H) = 0 \quad (3.14)$$

$$L_{\nu\mu} q^\nu = L_{\nu\mu} q^\mu = 0 \quad (3.15)$$

Damit können wir für W_H einen allgemeinen Ansatz

$$\begin{aligned} W_H^{\nu\mu}(q, p_H) &= \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\nu q^\mu}{q^2} \right) W_1 \\ &+ \left(p_H^\nu - \frac{p_H \cdot q}{q^2} q^\nu \right) \left(p_H^\mu - \frac{p_H \cdot q}{q^2} q^\mu \right) W_2 \\ &+ \left(i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q^\alpha p_H^\beta}{2 p_H \cdot q} \right) W_3 \end{aligned} \quad (3.16)$$

mit den Lorentzskalaren W_i machen. Durch Paritätsinvarianz der $e + H \rightarrow e + X$ Streuung können wir den nicht Paritätsinvarianten ϵ -Term ausschließen. Zusammen mit der Stromerhaltung (3.15) erhalten wir:

$$L_{\nu\mu}W_H^{\nu\mu}(q, p_H) = 4Q^2W_1 + 2m_H^2(4E_1E_2 - Q^2)W_2 \quad (3.17)$$

Nun es es zweckmäßig, im tief-inelastischen Grenzwert $Q^2 \gg P_H^2$, $\nu \gg P_H^2$ zu den dimensionslosen Variablen x und y mit

$$x = \frac{Q^2}{2\nu}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.18)$$

$$y = 1 - \frac{E_2}{E_1}, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (3.19)$$

und

$$F_1(x, Q^2) := W_1 \quad (3.20)$$

$$F_2(x, Q^2) := \nu W_2 \quad (3.21)$$

$$d^3p_2 = dE_2 d\cos(\theta) d\phi = 2\pi E_2 \nu dx dy \quad (3.22)$$

überzugehen. Wir erhalten schließlich den differentiellen Wirkungsquerschnitt in den neuen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dx dy} &= \frac{4\pi\alpha^2}{(Q^2)^2} 2m_H E_1 \cdot \\ &\cdot \left((1-y)F_2(x, Q^2) + xy^2F_1(x, Q^2) \right) \cdot \\ &\cdot \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{m_H^2}{Q^2}\right) \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Die Rechnung für das zweite Diagramm in (3.1) ist analog mit $\frac{1}{8} \rightarrow \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{m_W^2}{m_W^2 + Q^2}$ und mit Berücksichtigung des ϵ -Terms.

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma_{\nu H}}{dx dy} &= \frac{G_F}{2\pi} \frac{m_W^2}{m_W^2 + Q^2} 2m_H E_1 \cdot \\ &\cdot \left((1-y)F_2(x, Q^2) + xy^2F_1(x, Q^2) + xy \left(1 - \frac{1}{2}y \right) F_3(x, Q^2) \right) \cdot \\ &\cdot \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{m_H^2}{Q^2}\right) \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

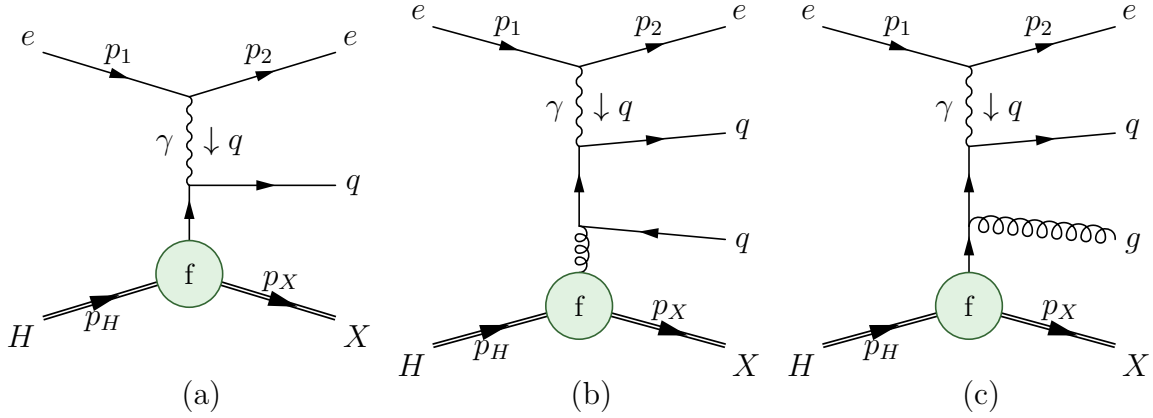


Abbildung 3.2.: Elektron-Parton Streuung. (a): Elektron-Parton Streuung ohne Korrekturterme. (b) - (c): Elektron-Parton Streuung mit Korrekturtermen erster Ordnung.

3.1.2. Faktorisierung

Im letzten Abschnitt haben wir den leptonen Beitrag zum Elektron-Hadron Wirkungsquerschnitt explizit ausgewertet und den hadronischen Beitrag in Strukturfunktionen F_i umgeschrieben. Dadurch haben wir aber noch nicht viel über die Strukturfunktionen selbst erfahren.

Nach Voraussetzung für tief-inelastische-Streuungen ist aber $Q^2 \gg M_H$, also auch $Q^2 \gg \Lambda_{QCD}$. Das bedeutet, dass die Elektron-Hadron Wechselwirkung bei einer viel höheren Energie als der Bindungsenergie $\approx \Lambda_{QCD}$ des Hadrons stattfindet. Das bedeutet, dass die Elektroschwache Wechselwirkung bei viel kleineren Längen und viel kürzeren Zeiten stattfindet, als die starken Wechselwirkungen innerhalb des Hadrons.

Wir können daher annehmen, dass das Photon tatsächlich nicht an dem ganzen Hadron gestreut wird, sondern an einem virtuellen Quark, das temporär durch eine Fluktuation entstanden ist und in dem kurzen Zeitraum $\sim \frac{1}{Q^2}$ keine Wechselwirkungen mit anderen Teilchen aus dem Endzustand macht. Das entspricht Fall (a) aus Abbildung 3.2. Wir ersetzen den Remnant $|X, p_X\rangle$ aus (3.11) durch ein Produkt dieses virtuellen Quarks $|q_f, \tilde{p}_q\rangle$ mit dem Remnant ohne dieses Quark $|\tilde{X}, p_{\tilde{X}}\rangle$, wobei undefinierte Größen Tilden tragen:

$$\begin{aligned}
 W_H^{\nu\mu}(q, p_H) &= \frac{1}{4} \sum_f \sum_{\tilde{X}} (2\pi)^4 \delta^4(q + p_H - p_{\tilde{X}} - \tilde{p}_q) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4\tilde{p}_q \Theta(\tilde{p}_q^0) \delta(\tilde{p}_q^2) \cdot \\
 &\cdot \sum_{q\text{-spins}} Q_f^2 \langle H, p_H | \langle 0 | \bar{q}_f \gamma^\nu q_f | q_f, \tilde{p}_q \rangle | \tilde{X}, p_{\tilde{X}} \rangle \langle \tilde{X}, p_{\tilde{X}} | \langle q_f, \tilde{p}_q | \bar{q}_f \gamma^\mu q_f | 0 \rangle | H, p_H \rangle \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

Den partonischen Teil können wir direkt auswerten

$$W_H^{\nu\mu}(q, p_H) = \frac{1}{4} \sum_f \sum_{\tilde{X}} (2\pi)^4 \delta^4(q + p_H - p_{\tilde{X}} - \tilde{p}_q) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 \tilde{p}_q \Theta(\tilde{p}_q^0) \delta(\tilde{p}_q^2) \cdot Q_f^2 \langle H, p_H | \bar{q}_f | \tilde{X}, p_{\tilde{X}} \rangle \gamma^\nu \tilde{p}_q \cdot \gamma \gamma^\mu \langle \tilde{X}, p_{\tilde{X}} | q_f | H, p_H \rangle \quad (3.26)$$

Wir passen den allgemeinen Ansatz in (3.11) an, indem wir die Quark-Photon-Wechselwirkung W von der hadronischen Wechselwirkung Γ trennen. Unter der Annahme, dass das Quark im Endzustand keine Wechselwirkung mit dem hadronischen Rest X macht, erhalten wir

$$W_H^{\nu\mu}(q, p_H) = \sum_f \int d^4 k \operatorname{tr}(W_f^{\nu\mu}(q, k) \Gamma_{H,f}(p_H, k) + \bar{W}_f^{\nu\mu}(q, k) \bar{\Gamma}_{H,f}(p_H, k)) \quad (3.27)$$

mit

$$W_f^{\nu\mu}(q, k) = \bar{W}_f^{\mu\nu} = \frac{1}{2} Q_f^2 \gamma^\nu \gamma \cdot (k + q) \gamma^\mu \delta((k + q)^2) \Theta((k + q)^0) \quad (3.28)$$

$$\Gamma_{H,f}(p_H, k)_{\beta\alpha} = \sum_{X'} \delta^4(p_H - k - p_{X'}) \langle H, p_H | \bar{q}_{f,\alpha} | X', p_{X'} \rangle \langle X', p_{X'} | q_{f,\beta} | H, p_H \rangle \quad (3.29)$$

$$\bar{\Gamma}_{H,f}(p_H, k)_{\beta\alpha} = \sum_{X'} \delta^4(p_H - k - p_{X'}) \langle H, p_H | q_{f,\beta} | X', p_{X'} \rangle \langle X', p_{X'} | \bar{q}_{f,\alpha} | H, p_H \rangle. \quad (3.30)$$

3.1.3. Strukturfunktionen

Analog zu (3.18) bis (3.22) definieren wir dimensionslose Funktionen F_i . Dazu betrachten wir den kollinearen Grenzfall, in dem das virtuelle Photon kollinear vom Elektron abgestrahlt wird. Wir können also ein Koordinatensystem finden, in dem \vec{P}_X parallel zu \vec{q} ist. Wir erhalten

$$F_1(x, Q^2) = \frac{1}{2} \sum_f Q_f^2 (q_f(x) + \bar{q}_f(x)) \quad (3.31)$$

$$f_2(x, Q^2) = 2x F_1(x, Q^2) = x \sum_f Q_f^2 (q_f(x) + \bar{q}_f(x)) \quad (3.32)$$

mit

$$q_f(x) = \frac{1}{2P} \int d^4 k \delta\left(\frac{k^+}{p_X^+} - x\right) \operatorname{tr}\left(\gamma \Gamma_{H,f}(p_X, k)\right) \quad (3.33)$$

$$\bar{q}_f(x) = \frac{1}{2P} \int d^4 k \delta\left(\frac{k^+}{p_X^+} - x\right) \operatorname{tr}\left(\gamma \bar{\Gamma}_{H,f}(p_X, k)\right) \quad (3.34)$$

und den Lichtkegelimpulsen $p^+ = p^0 + p^3$.

Durch die Annahme einer Wechselwirkung eines kollinearen Photons mit einem freien Quark haben wir ein genaueres Bild der Strukturfunktionen F_i gewonnen. Für jedes Quarkflavor haben wir jetzt eine eigene Verteilungsfunktion q_f , die nur von der dimensionslosen Variable $x = Q^2/2\nu$ abhängt. Im Grenzfall für große Werte von Q^2 können diese Verteilungsfunktionen als Wahrscheinlichkeitsdichte für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Quarks mit Flavor f und longitudinalem Impuls xP_H aufgefasst werden.

Derzeit ist es uns nicht möglich, diese Verteilungsfunktionen direkt auszurechnen, insbesondere nicht mit perturbativen Methoden. Wir nehmen diese Funktionen also als inhärente Größen eines jeden Hadrons an, die wir experimentell bestimmen müssen.

3.2. Erweiterungen

Im letzten Abschnitt haben wir eine punktförmige Wechselwirkung eines virtuellen Photons mit einem freien Quark vorausgesetzt. Zwar wissen wir, dass das Quark als Parton des Hadrons nicht frei ist, im Grenzwert $Q^2 \rightarrow \infty$ ist diese Voraussetzung durch die asymptotische Freiheit aber gerechtfertigt. Nun wollen wir unseren Ansatz um perturbative Korrekturen zu der punktförmigen Wechselwirkung erweitern, um präzisere Strukturfunktionen bei hohen, aber endlichen Impulsen $\Lambda_{\text{QCD}} \ll Q^2 < \infty$ zu erhalten. Daraus gewinnen wir zwei neue Konzepte, die für die Beschreibung von mehrfachen Streuungen im folgenden Kapitel von Bedeutung sein werden, nämlich die Faktorisierungsskala und Partonshower.

3.2.1. QCD Korrekturen

Wir beginnen mit QCD-Korrekturen zu den Strukturfunktionen in niedrigster Ordnung in α_s . Dazu betrachten wir eine beliebige Strukturfunktion $F(x, Q^2)$. Im Grenzwert für hohe Impulse dominieren Beiträge durch Quarks und Gluonen, dennoch berücksichtigen wir jetzt perturbative Korrekturen. Folglich können auch weitere Teilchen im Endzustand der partonischen Wechselwirkung auftreten, als das Photon und das getroffene Quark. In Abbildung 3.2 (b) und (c) sind solche Korrekturen in niedrigster Ordnung abgebildet.

Die punktförmige Wechselwirkung wird jetzt durch die Funktionen $C_l(q, k)$ ersetzt, die alle perturbativen Korrekturen enthält. l ist der Partonindex mit $l \in \{q_f, \bar{q}_f, g\}$ für ein Quark, ein Antiquark oder ein Gluon mit Impuls k , das an den Strom J mit Impuls q koppelt. Im Grenzwert für hohe Impulse $\Lambda_{\text{QCD}} \ll Q^2$ machen wir einen

Ansatz für F als inkohärente Summe über diese Partonbeträge:

$$F(x, Q^2) \sim \sum_{l \in \{q_f, \bar{q}_f, g\}} \int_x^1 \frac{dy}{y} C_l \left(\frac{x}{y}, \frac{Q^2}{\mu_F^2}; \alpha_s \right) f_l(y, \mu_F^2) \quad (3.35)$$

mit

$$f_l = \begin{cases} q_f & \text{für } l = q_f \\ \bar{q}_f & \text{für } l = \bar{q}_f \\ g & \text{für } l = g \end{cases} \quad (3.36)$$

Wir können die Rechnung des vorangegangenen Abschnitts mit dieser Erweiterung fast exakt wiederholen und stellen fest:

- Wir haben jetzt auch einen nichtperturbativen Beitrag für die Streuung mit einem Gluon aus dem Hadron.
- Der Impulsanteil des Partons ist jetzt y während das Photon an einem Teilchen mit Impulsanteil x mit $x \leq y$ gestreut wird. Der Streupartner des Photons kann jetzt durch eine perturbative Wechselwirkung des Partons entstanden sein und teilt sich mit anderen Teilchen im Endzustand den Impulsanteil y .
- Es tritt ein neuer Regulator μ_F auf. Wir benötigen ihn aufgrund infraroter Divergenzen in den Funktionen C_l . Wir haben in Kapitel 2 gesehen, dass die perturbative Beschreibung für kleine Energien ohnehin ungültig ist. Deswegen transportieren wir diese Divergenzen folgerichtig in den nichtperturbativen Teil Γ . Mit dem Regulator μ_F legen wir die Energieskala fest, ab der Wechselwirkungen als Teil der perturbativen Beschreibung C_l angesehen werden. Wir nennen μ_F daher *Faktorisierungsskala*.

Als potentielle Observalbe dürfen die Strukturfunktionen F_l nicht von der Faktorisierungsskala abhängen. Wir hatten ein solches Problem bereits im Zusammenhang der Renormierungsskala μ_R in Kapitel 2.4.5 betrachtet. Analog dazu erhalten wir die DGLAP Gleichungen für die Strukturfunktionen mit den perturbativ berechenbaren *splitting functions* P_{lm} :

$$\mu_F \frac{d}{d\mu_F} C_l \left(x, \frac{Q^2}{\mu_F^2}; \alpha_s \right) = \sum_{m \in \{q_f, \bar{q}_f, g\}} \int_x^1 \frac{dy}{y} C_m \left(y, \frac{Q^2}{\mu_F^2}; \alpha_s \right) P_{lm} \left(\frac{x}{y}; \alpha_s \right) \quad (3.37)$$

$$\mu_F \frac{d}{d\mu_F} f_l(y, \mu_F^2) = \sum_{m \in \{q_f, \bar{q}_f, g\}} \int_y^1 \frac{dz}{z} P_{lm} \left(\frac{y}{z}; \alpha_s \right) f_m(z, \mu_F^2) \quad (3.38)$$

In dieser Beschreibung haben wir die Kopplungsstärke α_S wie eine Konstante behandelt. Wir wissen aber, dass sie tatsächlich von der Renormierungsskala μ_R abhängt. Es sind demnach insgesamt drei Energieskalen in (3.37) und (3.38) beteiligt, nämlich Q^2 , μ_F und μ_R .

Für die folgende Diskussion über mehrfache Streuungen ist es wichtig anzumerken, dass diese Skalen, obwohl sie oft gleich gesetzt werden, vollkommen unabhängig voneinander sind. Die Renormierungsskala μ_R ist ein Regulator für ultraviolette Divergenzen der QCD und ist als solche unabhängig von hadronischen Eigenschaften und kinematischen Variablen eines Streueignisses. Die Faktorisierungsskala μ_F hingegen ist ein Regulator für infrarote Divergenzen und ist ein Parameter unseres Modells hadronischer Streuungen. Als solche ist sie unabhängig von ultravioletten Regularisierungen und ebenfalls unabhängig von kinematischen Variablen eines individuellen Streueignisses. Q ist schließlich eine beobachtbare kinematische Variable eines individuellen Streueignisses und somit notwendigerweise unabhängig von jeder Wechselwirkungstheorie.

Dennoch gibt es gute Gründe, die Skalen gleichzusetzen. Die Begründung für $\mu_R^2 = Q^2$ haben wir bereits in Kapitel 2.5 gesehen, es entspricht der Definition von α_S . Die Wahl $\mu_F^2 = Q^2$ hingegen ist nicht obligatorisch. Sie entspricht der Tatsache, dass wir in dem Ansatz in (3.35) keine Wechselwirkungen bei kleineren Skalen k^2 mit $\Lambda_{\text{QCD}}^2 < k^2 < Q^2$ in die perturbative Beschreibung aufnehmen wollen.

Im Folgenden werden wir, sofern μ_R nicht explizit definiert wird, immer $\mu_R^2 = Q^2$ annehmen, während wir μ_F von Fall zu Fall wählen.

3.2.2. Hadron-Hadron Streuung

Durch die konsequente Trennung von perturbativen und nicht-perturbativen Beiträgen haben wir Strukturfunktionen f_l gewonnen, die unabhängig von der perturbativen Wechselwirkung sind. Wir können sie demnach auf andere Wechselwirkungen übertragen und damit endlich den gesuchten Ausdruck für Hadron-Hadron Streuungen definieren. Dafür müssen wir das Photon durch die Strukturfunktion f_k des zweiten Hadrons ersetzen und die Photonwechselwirkung durch eine zweite perturbative Funktion C_k ersetzen. Wir fassen das Produkt beider Funktionen C_k und C_l als perturbative Beschreibung der gesamten resultierenden harten Wechselwirkung mit C_{kl} auf und erhalten:

$$\sigma^{\text{incl}}(x_1, x_2) = \sum_{k,l \in \{q_f, \bar{q}_f, g\}} \int_{x_1}^1 \frac{dy_1}{y_1} \int_{x_2}^1 \frac{dy_2}{y_2} C_{kl} \left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, Q^2 \right) f_k(y_1; \mu_F) f_l(y_2; \mu_F) \quad (3.39)$$

Für die Monte Carlo-Generation von Streueignissen möchten wir diesen inklusiven Wirkungsquerschnitt durch eine inkohärente Summe über exklusive Wirkungsquer-

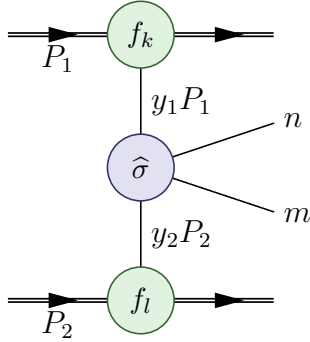


Abbildung 3.3: Hadron-Hadron Streuung in niedrigster Ordnung in α_s . Die nichtperturbativen Beiträge zum Wirkungsquerschnitt werden durch die Strukturfunktionen f_k und f_l aus Abschnitt 3.2.1 dargestellt. Der perturbative Beitrag entsprechend Abbildung 3.2 wird durch den partonischen Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}$ dargestellt. In diesem Graphen wird bei den Partonen und den Teilchen im Endzustand der perturbativen Wechselwirkung nicht zwischen Quarks und Gluonen unterschieden, es sind alle möglichen Kombinationen einzusetzen.

schnitte annähern. Wir setzen für beide Hadronen die perturbativen Wechselwirkungen aus Abbildung 3.2 (b) und (c) und ersetzen die Koeffizientenfunktion C_{kl} durch den exklusiven Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}_{kl \rightarrow mn}$, differenzieren nach y_1 und y_2 . Wir erhalten:

$$\frac{\partial^2 \sigma(y_1, y_2, Q^2)_{mn}}{\partial y_1 \partial y_2} = \sum_{k,l \in \{q_f, \bar{q}_f, g\}} \frac{\partial^2 \hat{\sigma}_{kl \rightarrow mn}(y_1, y_2, Q^2)}{\partial y_1 \partial y_2} \frac{f_k(y_1; \mu_F)}{y_1} \frac{f_l(y_2; \mu_F)}{y_2} \quad (3.40)$$

3.2.3. Initial State Radiation

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir Hadron-Hadron Streuungen mit genau zwei Teilchen m, n im partonischen Endzustand beschrieben. Das entspricht der niedrigsten Ordnung in α_s der perturbativen Entwicklung für solche Streuungen. Da diese Teilchen im Allgemeinen keine Farb-Singlett Zustände sind, ist ihre Lebensdauer im Allgemeinen zu kurz um sie direkt zu detektieren. Im Anschluss an die perturbative, partonische Wechselwirkung und vor dem Eintritt in einen Detektor muss ein Hadronisierungsprozess erfolgen, in dem diese Teilchen in langlebige, farbneutrale Hadronen übergehen.

Den einzelnen Elementarteilchen vor der Hadronisierung stehen dann im Allgemeinen keine einzelnen Hadronen, sondern *Jets* von Hadronen gegenüber. Die Zahl der Hadronen in diesen Jets ist dabei nicht mit der einfachen Betrachtung in niedrigster Ordnung vereinbar. Für eine bessere partonische Entsprechung der Jets müssen wir die perturbative Entwicklung zu höheren Ordnungen fortsetzen, um mehr Teilchen im partonischen Endzustand zu erhalten.

Die Komplexität perturbativer Berechnungen von Wechselwirkungen wächst aber faktoriell mit der Anzahl der äußeren Teilchen, so dass solche Berechnungen für die benötigten Multiplizitäten praktisch unmöglich sind. Stattdessen verwenden wir systematische Näherungen durch Monte Carlo Generatoren mit geringerer Komplexität,

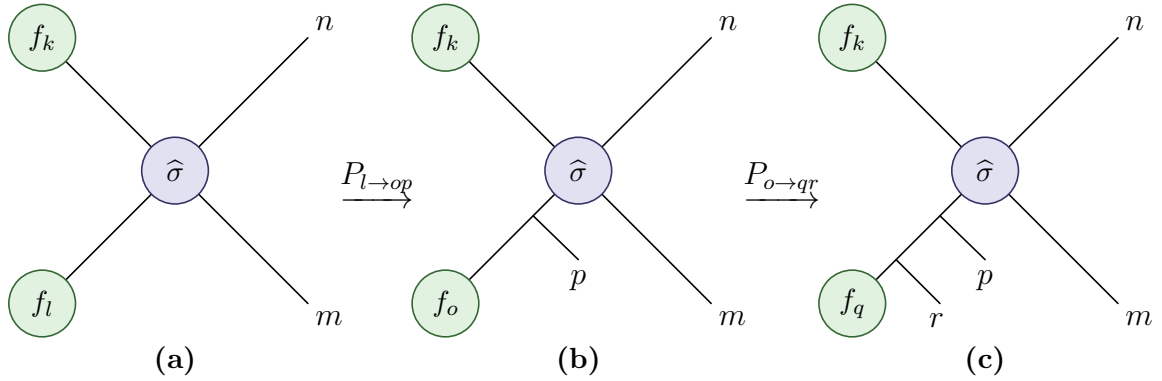


Abbildung 3.4.: *Initial State Radiation: Es sind zwei Iterationen des Initial State Radiation Algorithmus dargestellt. Die Graphen zeigen die Topologien der Feynmangraphen und sind selbst keine Feynmangraphen. (a) Die härteste Wechselwirkung ist vorgegeben. Die Faktorisierungsskala ist gleich der Skala dieser Wechselwirkung $\mu_F = Q$ (b) Ein Splitting $l \rightarrow op$ wird generiert. In der neuen Beschreibung der Wechselwirkung ist das Teilchen l nicht mehr im Eingangszustand, sondern ist ein inneres Teilchen. An seine Stelle ist das Teilchen o getreten. Die Faktorisierungsskala ist jetzt gleich der Splittingskala $\mu_F = t_1$. (c) Ein weiteres Splitting mit $o \rightarrow qr$. Die Faktorisierungsskala ist jetzt $\mu_F = t_2$.*

wie sie zum Beispiel durch analytische Initial State Partonshower² gegeben sind.

Der Algorithmus zur Generierung eines solchen Partonshower geht von einer perturbativen Beschreibung der härtesten Wechselwirkung bei der Wechselwirkungsskala Q^2 aus und fügt den Teilchen im Eingangszustand systematisch $1 \rightarrow 2$ Branchings zu. Die Wechselwirkungsskalen t_i dieser Branchings werden dabei, beginnend bei Q^2 , mit absteigendem Betrag bis zu einer unteren Grenze t_{cut} generiert. Mit der Wechselwirkungsskala t wird auch die Faktorisierungsskala $\mu_F^2 = t$ mitgeführt.

Wenn wir die Entwicklung der Faktorisierungsskala bis zu der Größenordnung der hadronischen Bindungsenergie $t_{\text{cut}} \approx \Lambda_{\text{had}}^2$ fortführen, dann erhalten wir ein konsistenteres Bild des Streueignisses, denn es werden nur Beiträge mit $\lesssim \Lambda_{\text{had}}^2$ in die Strukturfunktion absorbiert, während alle Beiträge bei höheren Skalen $\Lambda_{\text{had}}^2 \lesssim Q^2$ in die perturbative Beschreibung aufgenommen werden. Tatsächlich wird die Entwicklung bei Skalen von etwa 1GeV^2 eingestellt, da die perturbative Beschreibung bei kleineren Energien ihre Gültigkeit verliert. Abbildung 3.4 zeigt exemplarisch die iterative Entwicklung des Eingangszustands.

Die zentrale Größe im Partonshower ist der Sudakov-Faktor. Er gibt die Wahrscheinlichkeit an, zwischen zwei Skalen keine weitere Wechselwirkung aufzulösen. Der

²Kilian u. a. (2011a)

Sudakov-Faktor hat im Allgemeinen die Form

$$\mathcal{P}(t_1, t_2) = \exp \left[\int_{t_1}^{t_2} dt \int dz \frac{\alpha_S}{2\pi t} P(z) \right], \quad (3.41)$$

wobei P die Splittingkernel für $1 \rightarrow 2$ Splittings sind. Wir werden diese Formel in Abschnitt 5.4 verwenden. In Tabelle 5.3 5-12 ist eine Übersicht aller QCD $1 \rightarrow 2$ Splittings aufgeführt.

3.2.4. Fazit

In diesem Kapitel haben wir gesehen, wie die Streuamplitude für hadronische Streueignisse als Produkt von hadronischen, messbaren Strukturfunktionen und partonischen, perturbativ berechenbaren Wirkungsquerschnitten geschrieben werden kann. Mit dem Partonshower haben wir ein Verfahren kennengelernt, mit dem wir die perturbative Entwicklung der partonischen Wechselwirkung systematisch zu einer beliebigen Ordnung in α_S fortsetzen können. In Abbildung 3.5 ist eine solche hadronische Wechselwirkung illustriert.

Für die Faktorisierung des hadronischen und des partonischen Anteils haben wir vorausgesetzt, dass genau ein Parton jedes Hadrons in die partonische Wechselwirkung eingeht. In dem folgenden Kapitel werden wir diese Faktorisierung auf eine beliebige Zahl von Partonen verallgemeinern.

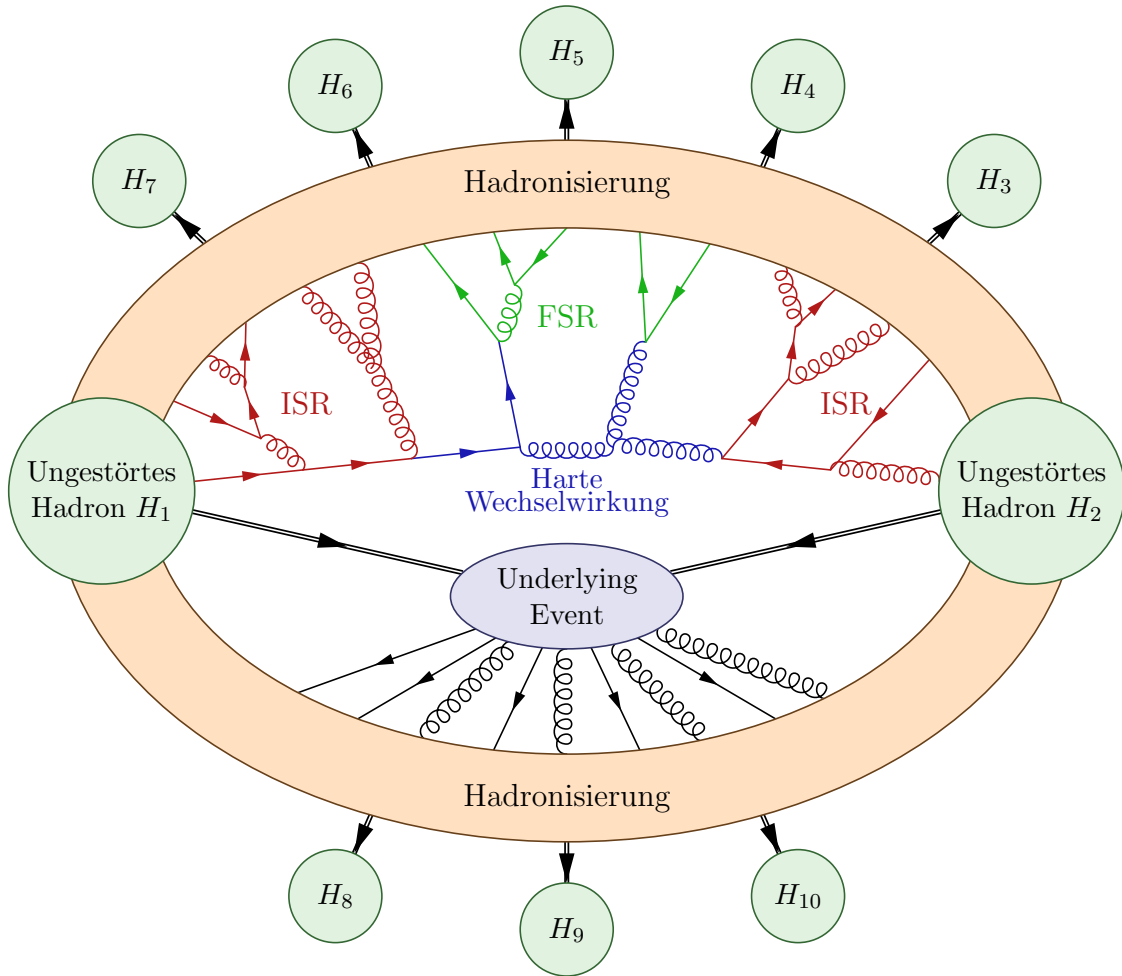


Abbildung 3.5.: Illustration einer tief-inelastischen Hadron-Hadron-Streuung. Im Eingangszustand haben wir die ungestörten Hadronen H_1 und H_2 mit intrinsischen Wechselwirkungen bei Wechselwirkungsskalen von etwa Λ_{QCD} . Die harte Wechselwirkung ist per Definitionem diejenige mit der höchsten Wechselwirkungsskala Q_{hard}^2 . Via Initial State Radiation (ISR) strahlen die Partonen im Eingangszustand der harten Wechselwirkung bei mittleren Wechselwirkungsskalen $\Lambda_{QCD} < Q^2 < Q_{\text{hard}}^2$ weitere Teilchen ab. Via Final State Radiation (FSR) strahlen die Partonen im Endzustand der harten Wechselwirkung bei ebenfalls mittleren Wechselwirkungsskalen $\Lambda_{QCD} < Q^2 < Q_{\text{hard}}^2$ weitere Teilchen ab. Die durch ISR und FSR entstandenen Teilchen haben geringere Virtualitäten als die Teilchen im direkten Ein- und Ausgangszustand der harten Wechselwirkungen und können daher bei Skalen von etwa Λ_{QCD} hadronisieren, also Farb-Singlet-Zustände bilden. Durch die Hadronisierung entsteht schließlich der rein hadronischer Endzustand H_3 - H_{10} der Streuung. Das Underlying Event fasst alle weiteren Wechselwirkungen der Hadron-Remnants zusammen. Eine theoretische Beschreibung dieser Beiträge wird erst im folgenden Kapitel eingeführt, deswegen sind sie hier als Blob dargestellt.

Die Vorbedingung für alles wirkliche Wissen ist ein präzises Unterscheidungsvermögen für die Grenze zwischen dem, was man wirklich weiß, und dem, was man bloß meint.

(Konfuzius)

4. Mehrfache Wechselwirkungen

Einfache Parton-Verteilungsfunktionen, wie wir sie in 3 kennengelernt haben, gehen nunmehr auf eine vierzigjährige Entwicklung zurück. Seitens der theoretischen Physik stehen sie im Einklang mit unserem Verständnis des Standardmodells, seitens der experimentellen Physik wurden sie durch Generationen von Streuexperimenten bestätigt und bilden bis in die Gegenwart das Fundament, auf dem unsere Analysen von hochenergetischen Streuungen aufgebaut sind.

Dennoch zeigen Daten von Proton-Antiproton Streuungen am Tevatron erstmals geringe Abweichungen, die mit unberücksichtigten mehrfachen Wechselwirkungen erklärt werden. Die signifikantesten Abweichungen stammen von Multiziplicitätsanalysen niederenergetischer Wechselwirkungen¹ und $\gamma+3\text{Jet}$ Analysen für Wechselwirkungen mit hohem Transversalimpuls p_{\perp} ².

Einige Monte Carlo Generatoren stellen bereits Algorithmen für mehrfache Streuungen zur Verfügung^{3,4}, die wir mit ersten LHC-Analysen vergleichen können. Tatsächlich scheinen Teilchenmultiplizitäten sowie p_{\perp} -Spektren durch Monte Carlo Generatoren mit Mehrfachwechselwirkungen besser wiedergegeben zu werden, als ohne Mehrfachwechselwirkungen⁵. Es bleibt aber eine Bestätigung durch spätere Analysen mit besserer Statistik abzuwarten.

Für vollständig inklusive Wechselwirkungen stellen Mehrfachwechselwirkungen eine kleine Korrektur zu den einfachen Wechselwirkungen dar. Anders sieht es aus, wenn man einzelne Zerfallskanäle betrachtet. Hier können die Wechselwirkungsraten mehrfacher Wechselwirkungen von gleicher Größenordnung sein, wie Wechselwirkungsraten einfacher Wechselwirkungen mit ähnlicher Signatur im Endzustand. Für Details zu solchen Zerfallskanälen möchten wir den Leser auf Publikationen wie z.B. Berger u. a. (2010) oder Bandurin u. a. (2011) verweisen, da sie nicht zum Kernthema dieser Dissertation gehören. Wir erwähnen sie aber an dieser Stelle, weil Monte Carlo Simula-

¹Dremin und Nechitailo (2011)

²Warburton (2009)

³Corke (2009)

⁴Bahr u. a. (2009)

⁵Dremin und Nechitailo (2011)

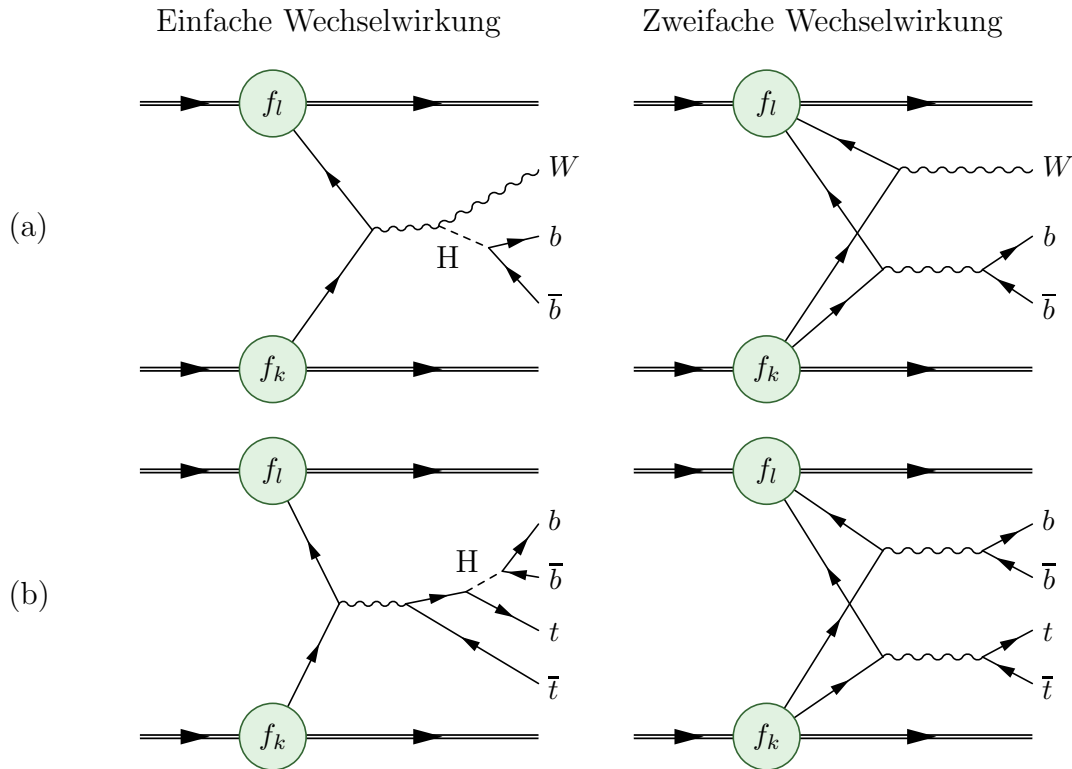


Abbildung 4.1.: *Zusätzlicher Untergrund durch Mehrfachwechselwirkungen für einfache Wechselwirkungen: Gezeigt sind zwei einfache Wechselwirkungen mit Beteiligung eines hypothetischen Higgs-Bosons H aus Berger u. a. (2010) und Bandurin u. a. (2011) in der linken Spalte und deren Entsprechung durch mehrfache Wechselwirkungen in der rechten Spalte. Anhand dieser Wechselwirkungen wird exemplarisch gezeigt, wie mehrfache QCD-Wechselwirkungen zu denselben Endzuständen führen können, wie einfache Wechselwirkungen mit Beteiligung von Wechselwirkungen außerhalb der QCD.*

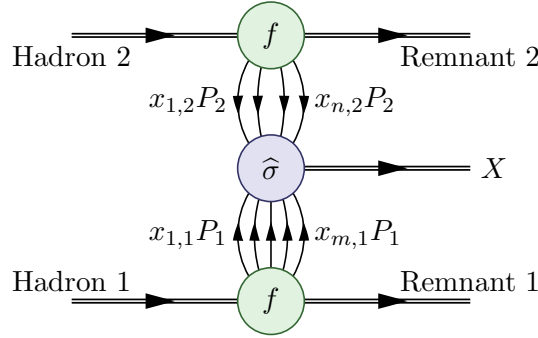


Abbildung 4.2.: Allgemeiner Ansatz einer mehrfachen partonischen Wechselwirkung. Es werden m Partonen mit den Impulsanteilen $x_{1,1}$ bis $x_{m,1}$ des ersten Protons und n Partonen mit den Impulsanteilen $x_{1,2}$ bis $x_{n,2}$ des zweiten Protons aufgelöst. Aus diesem Bild geht keine Information über Partonflavor, Faktorisierungsskalen und über Feynmandiagramme zur harten Wechselwirkung hervor.

tionen von mehrfachen Wechselwirkungen für Analysen von solchen Zerfallskanälen Anwendung finden werden, sobald sie verlässliche Daten produzieren.

In diesem Kapitel werden wir zunächst einen möglichst allgemeinen Ansatz für mehrfache Wechselwirkungen aufstellen und später speziellere Ansätze untersuchen. Anschließend werden wir einen Ansatz auswählen, der sich für eine Implementierung eines generischen Rahmens für verschiedene ad hoc Annahmen für mehrfache Wechselwirkungen eignet und diesen Ansatz vertiefend studieren. Zum Schluss werden wir einen gemeinsamen Ansatz für mehrfache Wechselwirkungen und *Initial State Radiation* vorstellen, der eine simultane Entwicklung der Faktorisierungsskalen ermöglicht.

4.1. Strategien zur Generierung von mehrfachen Wechselwirkungen

Im vorhergehenden Kapitel haben wir angenommen, dass der Eingangszustand der harten Wechselwirkung aus jeweils einem Parton jedes Protons gebildet wird. Entsprechend müssen wir für die Streuung den perturbativen Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}_{2 \rightarrow X}$ auswerten. Wenn wir stattdessen annehmen, dass m Partonen aus dem einen Proton und n Partonen aus dem anderen Proton in den Eingangszustand der harten Wechselwirkung eingehen, dann müssen wir entsprechend einen Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}_{m+n \rightarrow X}$ auswerten, wie in Abbildung 4.2 dargestellt ist. Wir können $\hat{\sigma}_{m+n \rightarrow X}$ im Allgemeinen aber nicht durch eine einzige Energieskala Q^2 charakterisieren, sondern benötigen dafür bis zu $m+n-1$ Skalen. In Abbildung 4.3 ist das exemplarisch für den Fall $m=2$ und $n=1$ dargestellt.

Für die einfache Wechselwirkung hatten wir die Faktorisierungsskala $\mu_F^2 = Q^2$ ge-

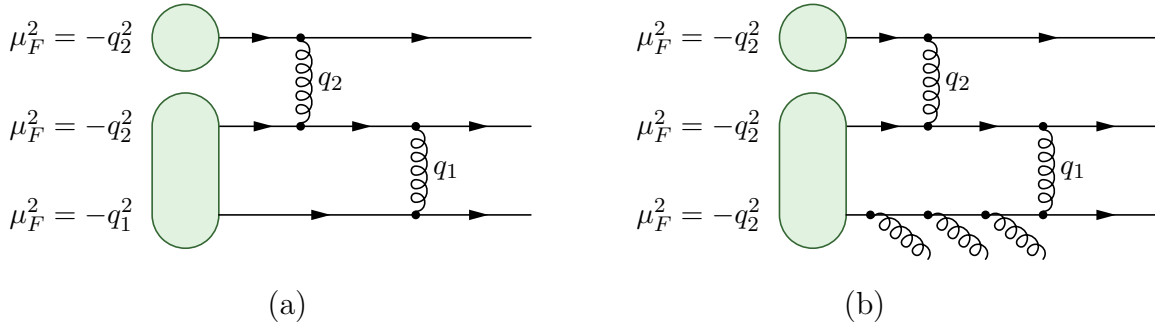


Abbildung 4.3.: Zwei Perspektiven auf dieselbe Wechselwirkung. Ein Proton trägt einfach, das andere zweifach zur harten Wechselwirkung bei. (a) Die Faktorisierungsskala wird der Skala der harten Wechselwirkung des jeweiligen Partons gleichgesetzt. (b) Die Faktorisierungsskala wird auf den Wert der kleinsten Wechselwirkungsskala $-q_2^2 < -q_1^2$ gesetzt. Dann müssen für eine konsistente Beschreibung alle Wechselwirkungen zwischen der Faktorisierungsskala und der Wechselwirkungsskala hinzugenommen werden.

wählt, um der Tatsache Rechnung zu tragen, dass alle Beiträge mit niedrigerer Skala als Teil des Hadrons bzw. dessen Remnants definiert werden. Wenn wir nun jedem Parton eine eigene Faktorisierungsskala zuordnen, bekommen wir ein inkonsistentes Bild unserer Wechselwirkung, da Beiträge bei kleinen Skalen gleichzeitig als Teil der perturbativen Wechselwirkung als auch als Teil der nicht-perturbativen Physik innerhalb des Hadrons beschrieben werden.

Wenn wir andererseits mit $\mu_F^2 = \min(\{Q_k^2\})$ die Faktorisierungsskala auf die kleinste Wechselwirkungsskala setzen, dann bekommen wir zwar eine konsistente Faktorisierung, haben aber mitunter Wechselwirkungsskalen, die viel größer als die Faktorisierungsskala $\mu_F^2 \ll \max(\{Q_k^2\}) = Q_1^2$ sind. Entsprechend müssten wir für eine konsistente perturbative Beschreibung des harten Matrixelements weitere Wechselwirkungen mit $\mu_F^2 < Q^2 < Q_1^2$ berücksichtigen, wie z.B. Gluonabstrahlungen. In Abbildung 4.3 sind diese beiden alternativen Betrachtungsweisen illustriert. Die Menge der Feynmangraphen wächst aber faktoriell mit der Zahl der äußeren Linien. Für eine numerische Auswertung durch Monte Carlo Generatoren bedeutet das ohnehin schon eine Einschränkung auf kleine Werte bis maximal zehn. Wenn wir solche Gluonabstrahlungen berücksichtigen, dann kommen wir kaum über Wechselwirkungen wie in Abbildung 4.3b hinaus. Wir können also keine Wechselwirkungen mit $m + n > 3$ simulieren.

Ein weiteres Problem, das vollkommen unabhängig hiervon ist, ist der Mangel an experimentellen Daten. Für einen Ansatz in dieser Allgemeinheit müssten wir Verteilungsfunktionen für das simultane Auflösen von n Partonen an die Daten bisheriger Streuexperimente fitten. Das ist sicher mit keinem Streuexperiment vor dem LHC möglich. Selbst aus den LHC-Daten können voraussichtlich nur zweifache Ver-

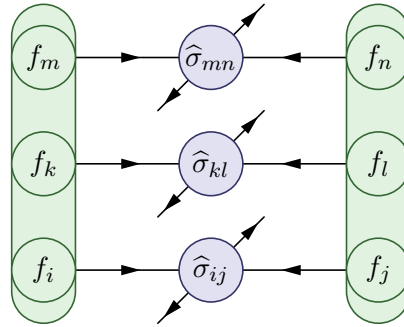


Abbildung 4.4.: Schematische Darstellung einer dreifachen Wechselwirkung im eikonalen Bild. Die Hadronen sind durch Lorentzkontraktion zu zweidimensionalen Objekten entartet. Die Wechselwirkungen $\hat{\sigma}$ werden im Vergleich zu den hadronischen Skalen sowohl räumlich als auch zeitlich als punktförmig und unkorreliert angenommen.

teilungsfunktionen gewonnen werden. Bislang existieren ausschließlich für zweifache Funktionen erste Ansätze, wie z.B. die DPDFs der GS09 Gruppe⁶. Selbst zweifache Wechselwirkungen müssen wir aber durch einfache Verteilungsfunktionen anzunähern, bis zweifache Verteilungsfunktionen etabliert sind. Das bedeutet, dass wir die harte $n + m \rightarrow X$ Wechselwirkung in unabhängige $2 \rightarrow X_n$ Wechselwirkungen aufteilen müssen.

Dafür existieren derzeit im Wesentlichen zwei Ansätze, der *eikonale Ansatz*⁷ und der *Skalenentwicklungsansatz*⁸. Letzterer ist im Englischen unter dem Namen *interleaved evolution* bekannt. Wir schauen uns zunächst kurz das grundlegende Konzept des eikonalen Ansatzes an und begründen, warum wir uns zunächst gegen eine Implementierung entschieden haben. Anschließend wenden uns in vollem Detail dem Skalenentwicklungsansatz und dessen Implementierung in WHIZARD zu.

4.1.1. Eikonaler Ansatz

Der eikonale Ansatz ist bereits in den 1990ern als einfaches Modell für das HERA Experiment diskutiert worden⁹, entsprechend einfach ist das Wechselwirkungsmodell. Es werden simultane partonische Wechselwirkungen betrachtet, in denen Teilchenpaare mit transversalem Impuls $p_t^2 > p_0^2$ erzeugt werden. Solche Wechselwirkungen haben ein typisches räumliches Auflösungsvermögen von $\hbar/(c|p_t^2|)$, während die typische Reichweite partonischer Wechselwirkungen innerhalb der Protonen in der Größenordnung

⁶Gaunt und Stirling (2010)

⁷Butterworth u. a. (1996)

⁸Sjostrand und Skands (2005)

⁹Butterworth u. a. (1996)

des Protonradius $R_P \approx \hbar/(c|Q_H^2|)$ bei typischen Energieskalen $Q_H \approx \Lambda_{\text{QCD}}$ liegen. Daher werden solche simultanen Wechselwirkungen bei hohen Skalen $p_0^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2$ als unkorreliert angenommen.

Weiterhin wird die hadronische Ladungsverteilung im Grenzwert großer Hadronimpulse durch Lorentzkontraktion auf eine zweidimensionale Ladungsverteilung projiziert. Entsprechend wird eine räumliche Partonverteilung A mit zweidimensionalem Stoßparameter b und den modifizierten Besselfunktionen K angesetzt:

$$A(b; \mu_H) = \frac{\mu_H^2}{96\pi} (\mu_H |b|)^3 K_3(\mu_H |b|) \quad (4.1)$$

$$\int d^2b A(b; \mu_H) = 1 \quad (4.2)$$

Durch das Produkt mit dem inklusiven Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{hard}}^{\text{inc}}$ für $2 \rightarrow 2$ Wechselwirkungen mit $p_t^2 > p_0^2$ erhalten wir einen Ausdruck für die mittlere Anzahl von Wechselwirkungen $\langle n \rangle$:

$$\langle n \rangle(b, s; \mu_H, p_0^2) = A(b; \mu_H) \sigma_{\text{hard}}^{\text{inc}}(s; p_0^2) \quad (4.3)$$

Schließlich können wir einen Ausdruck für die totale inelastische Wechselwirkungsrate σ_{inel} angeben, der mehrfache Wechselwirkungen korrekt berücksichtigt:

$$\sigma_{\text{inel}}(s) = \int d^2b \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_k(b, s) = \int d^2b (1 - e^{-\langle n \rangle(b, s)}) \quad (4.4)$$

$$\mathcal{P}_n = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \exp(-\langle n \rangle) \quad (4.5)$$

Grundlage für die Monte Carlo Generation von harten Wechselwirkungen ist aber die Wahrscheinlichkeit P_n für eine Streuung mit genau n harten Wechselwirkungen:

$$P_n(s) = \frac{\int d^2b \mathcal{P}_n(b, s)}{\int d^2b \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_k(b, s)} \quad (4.6)$$

$$\approx \frac{n}{\sigma_{\text{hard}}^{\text{inc}}} \int d^2b \mathcal{P}_n(b, s) \quad (4.7)$$

Die größte Schwäche des eikonalen Ansatzes ist, dass die Wechselwirkungen explizit als unkorreliert angenommen werden. Ohne diese Annahme ist aber die Poissonverteilung 4.5 unhaltbar, auf der alles weitere beruht. Das erschwert es uns, diesen Ansatz zu erweitern um eine allgemeinere Beschreibung von mehrfachen Wechselwirkungen zu erhalten.

Durch eine kurzreichweitige $q\bar{q}$ -Fluktuation innerhalb des Hadrons könnte die Wahrscheinlichkeiten beider Partonen zur Teilnahme an einer harten Wechselwirkung auch

durchaus korreliert sein. Auf diese Weise wären auch Quantenzahlen wie Farbladung oder Spin korreliert. Außerdem macht die hadronische Ladungsverteilung keine direkte Aussage zur räumlichen Gluonverteilung. Es ist daher nicht selbstverständlich, dass die Annahme von wohlseparierten Wechselwirkungen auch für Gluonen gilt.

Eine weitere wesentliche Einschränkung ist die spontane Erzeugung von n Wechselwirkungen. Dadurch wird eine einheitliche Beschreibung der harten Wechselwirkungen und *Initial State Radiation* erschwert. Zwar kann man für jede harte Wechselwirkung im Anschluss einen separaten Shower generieren, eine solche Trennung von harten Wechselwirkungen und *Initial State Radiation* ist aber kaum zu rechtfertigen, zumal der Showeralgorithmus alle Energieskalen beginnend bei der Skala der harten Wechselwirkung bis zu $\approx 1\text{GeV}$ durchläuft, während die Skalen der mehrfachen Wechselwirkungen zu Beginn festgelegt werden.

Durch erste Veröffentlichungen der LHC-Experimente wissen wir heute, dass die Multiplizitäten bei $s = 7\text{TeV}$ von den Monte Carlo Vorhersagen basierend auf dem eikonalen Ansatz signifikant abweichen¹⁰.

4.1.2. Skalenentwicklungsansatz

Um diese Beschränkungen aufzuheben, geben wir die räumliche Separation der Wechselwirkungen auf und machen uns ein Prinzip zunutze, dass wir in Abschnitt 2.5 kennengelernt haben. Es ist das Prinzip, dass Wechselwirkungen bei einer Energieskala Q^2 sensitiv für Wechselwirkungen bei etwa der gleichen Energieskala sind, sensitiv für die Summe aller Wechselwirkungen bei viel höheren Skalen sind und nicht sensitiv für Wechselwirkungen bei sehr viel niedrigeren Skalen sind.

Für unser Problem der Mehrfachwechselwirkungen bedeutet das, dass wir zwei Wechselwirkungen bei der gleichen Energieskala nicht als unabhängig voneinander ansehen können, während wir annehmen können, dass Wechselwirkungen nicht von anderen Wechselwirkungen bei sehr viel kleineren Skalen abhängen. Wenn die erste Wechselwirkung also bei der Skala Q_1 stattfindet und die nächstniedrigere Wechselwirkungsskala Q_2 viel kleiner als Q_1 ist, dann kann die erste Wechselwirkung nicht von der zweiten abhängen. Für $\mu_F = Q_1$ muss sich dann bis auf Terme $\mathcal{O}(Q_2^2/Q_1^2)$ das bekannte Bild der einfachen Streuung (3.40) mit

$$\frac{\partial^3 \sigma_{kl \rightarrow X}(x_1, x_2, Q_1^2)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial Q_1^2} = f_k(x_1, \mu_F) f_l(x_2, \mu_F) \frac{\partial^3 \hat{\sigma}_{kl \rightarrow X}(x_1, x_2, Q_1^2)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial Q_1^2} \Big|_{\mu_F=Q_1} \quad (4.8)$$

ergeben. Andererseits kann bei der Faktorisierungsskala $\mu_F = Q_2$ die zweite Wechselwirkung keinen Einfluss auf die erste haben, was die Möglichkeiten von verbundenen Feynmangraphen stark einschränkt. Graphen wie z.B. in Abbildung 4.3 sind mit

¹⁰Gieseke u. a. (2011)

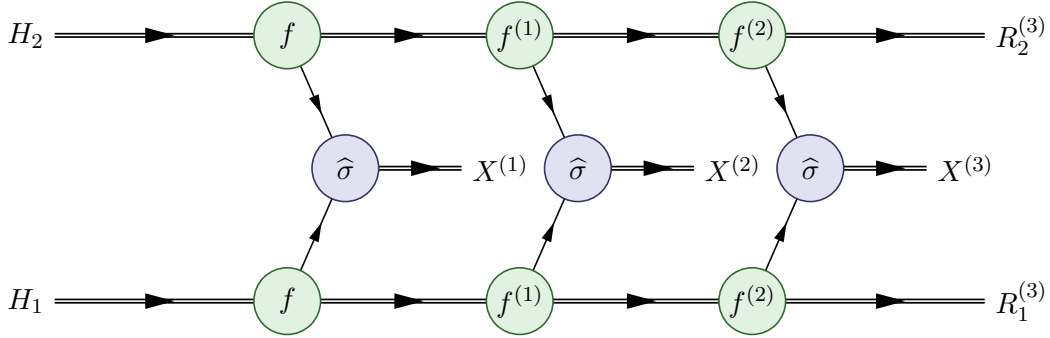


Abbildung 4.5.: Schematische Darstellung einer dreifachen Wechselwirkung mit Skaleneentwicklungsansatz. Die Wechselwirkungen sind von links nach rechts nach ihrer Wechselwirkungsskala absteigend sortiert. Statt simultaner Wechselwirkungen haben wir hier eine Zerfallskette von Remnants.

$\mathcal{O}(Q_2^2/Q_1^2)$ unterdrückt, hier beeinflusst die Wechselwirkung mit der niedrigeren Energieskala den Eingangszustand der Wechselwirkung mit der höheren Energieskala. Für eine erste Annäherung an Mehrfachstreuungen ignorieren wir solche Möglichkeiten und nehmen unverbundene Feynmangraphen für Wechselwirkungen bei verschiedenen Skalen an.

Auf diese Weise können wir annehmen, dass die zweite Wechselwirkung nicht zwischen den Hadronen H , sondern zwischen den *Remnants* R der Hadronen stattfindet. Die hadronischen Remnants der ersten Wechselwirkung $R^{(1)}$ definieren wir dabei so, dass sie gemeinsam mit dem partonischen Endzustand $X^{(1)}$ der ersten Wechselwirkung den Endzustand der hadronischen Streuung für $\mu^2 = Q_1^2$ bilden.

$$|H_1, p_1\rangle |H_2, p_2\rangle \rightarrow |R_1^{(1)}, (1-x_1)p_1\rangle |R_2^{(1)}, (1-x_2)p_2\rangle |X^{(1)}, x_1p_1 + x_2p_2\rangle \quad (4.9)$$

bzw.

$$|H_1, p_1\rangle \rightarrow |R_1^{(1)}, (1-x_1)p_1\rangle |k, x_1p_1\rangle \quad (4.10)$$

$$|H_2, p_2\rangle \rightarrow |R_2^{(1)}, (1-x_2)p_2\rangle |l, x_2p_2\rangle \quad (4.11)$$

Wir fassen diese Remnants als Quasihadronen auf und weisen ihnen Strukturfunktionen $f^{(1)}$ zu, so können wir den Wirkungsquerschnitt der zweiten Wechselwirkung formal wie den der ersten mit der Ersetzung $f \rightarrow f^{(1)}$ notieren:

$$\frac{\partial^3 \sigma_{kl \rightarrow X}(x_1, x_2, Q_2^2)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial Q_2^2} = f_k^{(1)}(x_1, \mu_F) f_l^{(1)}(x_2, \mu_F) \frac{\partial^3 \hat{\sigma}_{kl \rightarrow X}(x_1, x_2, Q_1^2)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial Q_1^2} \Big|_{\mu_F=Q_1} \quad (4.12)$$

Für die zweite Wechselwirkung definieren wir wieder Remnants $R^{(2)}$ und fahren so iterativ für alle Wechselwirkungen fort. Anstatt simultaner Wechselwirkungen wie bei

dem eikonalen Ansatz erhalten wir eine Zerfallskette

$$|H\rangle \rightarrow |R^{(1)}\rangle|k^{(1)}\rangle \rightarrow |R^{(2)}\rangle|k^{(1)}\rangle|k^{(2)}\rangle \rightarrow \dots \rightarrow |R^{(n)}\rangle|k^{(1)}\rangle|k^{(2)}\rangle \dots |k^{(n)}\rangle \quad (4.13)$$

wie in Abbildung 4.5 dargestellt.

Diese Remnants sind offensichtlich keine Hadronen, insbesondere sind sie keine Farb-Singlett-Zustände. Sie können also nicht als asymptotische Zustände betrachtet werden. Da aber nach Voraussetzung alle Prozesse im Remnant, inklusive der noch austretenden harten Wechselwirkungen bei sehr viel kleineren Skalen stattfinden als die in der n -ten Iteration betrachtete Wechselwirkung, kann die Annahme von Quasihadronen gerechtfertigt werden. Insbesondere die Hadronisierung der Remnants, durch die der Endzustand der harten Wechselwirkungen in Farb-Singlett-Zustände überführt wird, findet bei Energieskalen $\approx \Lambda_{\text{QCD}}$ und entsprechend auf Zeitskalen $\approx 1/(\hbar\Lambda_{\text{QCD}})$ statt. Für die kurze Wechselwirkungszeit $\approx 1/(\hbar|Q_n|)$ können wir die Remnants also als statisch annehmen.

Es bleibt noch die Frage offen, inwieweit separate Energieskalen für die harten Wechselwirkungen angenommen werden können. Auf diese Frage können wir aber keine pauschale Antwort geben, denn die Relevanz von entarteten Skalen hängt unter anderem von der Analyse ab, die man machen möchte. Wir schauen uns die beiden Extremfälle an.

Für vollständig inklusive Prozesse hilft uns der schnelle Abfall des differentiellen Wirkungsquerschnitts (4.8) in Q^2 . Je höher die Wechselwirkungsenergie ist, desto stärker sind kleine Werte der Impulsbruchteile x durch den Phasenraum eingeschränkt. Dadurch fällt der Wirkungsquerschnitt für große Q^2 schnell ab und konvergiert bei einer Maximalenergie Q_{max} gegen Null. Bedingt durch diesen schnellen Abfall bekommen wir eine Verteilung für Q_{m+1}^2 , die unabhängig von Q_m^2 ein ausgeprägtes Maximum bei kleinen Skalen ≈ 7 GeV aufweist. Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für $Q_{m+1}^2/Q_m^2 \approx 1$ klein ist, solange $Q_m^2 \gg 7$ GeV ist. In Abbildung 4.6 ist das für drei verschiedene Startwerte Q_1^2 dargestellt. Für inklusive Prozesse ist die Annahme von wohlseparierten Skalen also erfüllt, solange man die Entwicklung der Wechselwirkungsskalen nicht bis zu tiefere Werte ≈ 10 GeV führt.

Anders sieht es aus, wenn man spezielle Zerfallskanäle mit $Q_1^2/Q_2^2 \approx 1$ untersuchen möchte. Solche Analysen sind mit dem hier beschriebenen Algorithmus nicht sinnvoll durchführbar. Es ist aber möglich, solche Fälle mit einem *Matching* separat zu behandeln. Zur Laufzeit können die generierten Wechselwirkungen im Falle $Q_m^2/Q_{m+1}^2 - 1 < \epsilon$ verworfen und durch eine separat implementierte Methode für $4 \rightarrow X$ Wechselwirkungen mit $\mu_F = Q_m = Q_{m+1}$ ersetzt werden. Das wird insbesondere dann interessant, wenn Zweifachverteilungsfunktionen verfügbar werden, da wir dann einen geschlossenen Ausdruck für zweifache Streuungen angeben können.

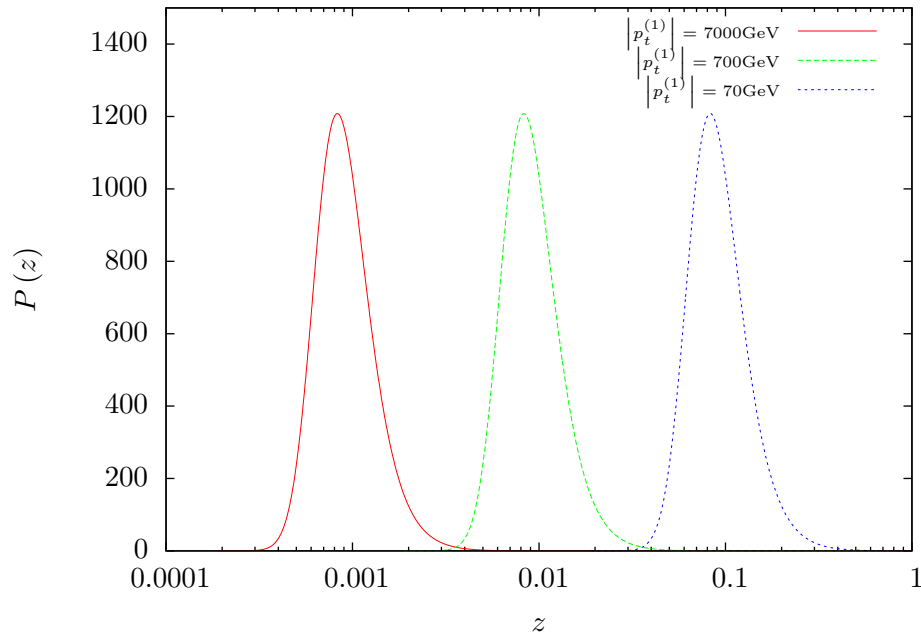


Abbildung 4.6.: *Separation der Skalen: Für verschiedene Startwerte der Wechselwirkungsskala $|Q| := |p_t|$ sind die Wahrscheinlichkeiten aufgetragen, dass die nächste Wechselwirkung bei dem Bruchteil z des Startwerts stattfindet. Parameter: Proton-Proton Streuung bei $s = (14\text{TeV})^2$, $\text{PDFset}=\text{cteq6ll.LHpdf}$, $\sigma_{nd} = 0.5\text{mbarn}$. Für die Plots wurden ausschließlich Proton-Strukturfunktionen, also keine Remnant-Strukturfunktionen verwendet. Grundlage für diese Abbildung ist Gleichung (5.18).*

4.2. Remnant Strukturfunktionen

Durch die Beschreibung von mehrfachen Wechselwirkungen über Remnant-Zerfallsketten haben wir im Gegensatz zu dem eikonalen Ansatz die Möglichkeit, Korrelationen von Impuls, Spin oder Farbladung explizit zu berücksichtigen, indem wir die Remnant-Strukturfunktionen entsprechend anpassen. Gerade Farbkorrelationen stehen im Verdacht¹¹, den Hadronisierungsprozess erheblich zu beeinflussen. Wie genau die Remnant-Strukturfunktionen zu definieren sind, steht dabei nicht von vornherein fest. Da wir innere Wechselwirkungen von Hadronen nicht perturbativ beschreiben können und auch sonst bislang kein mathematisches Modell für die innere Struktur von Hadronen haben, können wir die Struktur der Remnants nicht mathematisch deduktiv ableiten und sind auf ad hoc Annahmen angewiesen, die die Struktur festlegen.

Diese Annahmen sind keineswegs eindeutig, die hier vorgestellten Strukturfunktionen stehen exemplarisch für eine Vielzahl von möglichen Realisierungen. Für die Implementierung in WHIZARD ist es auf lange Sicht vorgesehen, verschiedene alternative Varianten von Remnant-Strukturfunktionen zur Verfügung zu stellen und zu untersuchen, wie sich verschiedene Modelle auf die Ergebnisse auswirken.

4.2.1. Grundlegende Annahmen

Als ersten Ansatz zur Beschreibung von Remnant Strukturfunktionen und um die Erweiterbarkeit des Ansatzes zu testen, haben wir zunächst ein Modell gewählt, dass in wesentlichen Teilen dem Pythia *Interleaved Evolution* Modell¹² entspricht. Die *Ad Hoc* Annahmen sind in diesem Modell:

1. Keine harte Wechselwirkung der perturbativen Endzustände

Es wird angenommen, dass die Teilchen im Endzustand der perturbativen Wechselwirkungen einen hohen Transversalimpuls bekommen, so dass sie sich von der Strahlachse entfernen und nicht an den nachfolgenden Wechselwirkungen teilnehmen. Entsprechend werden sie nicht als Teil der Remnants angesehen.

2. Statische Remnants

Die n -te Wechselwirkung findet in einem viel kürzeren Zeitraum als alle nachfolgenden Wechselwirkungen statt, so dass die Remnants als statisch angenommen werden. Die Remnant-Strukturfunktionen ergeben sich dann aus den $n - 1$ -ten Strukturfunktionen abzüglich des bei der $n - 1$ -ten Wechselwirkung fortgetragenen Impulses und abzüglich eventuell entfernter Valenzquarks.

¹¹Gieseke u. a. (2011)

¹²Sjostrand und Skands (2005)

3. Summenregeln

Remnants haben Impulse und Farb- und Flavour-Quantenzahlen, so dass diese Größen global erhalten sind.

4. Eingeschränktes Konfigurationssample

Hadron-Strukturfunktionen ergeben sich aus dem Mittelwert über alle möglichen Hadronkonfigurationen. Dadurch, dass wir eine Wechselwirkung mit einem Parton mit bestimmten Quantenzahlen auswerten, schränken wir die Konfigurationen auf solche ein, die eben dieses Parton mit den angenommenen Quantenzahlen enthalten. Für die Remnants der folgenden Iteration mitteln wir über die eingeschränkten Konfigurationen.

Der letzten Annahme liegt folgendes Problem zugrunde: Wenn wir z.B ein Down-Valenzquark entfernen, dann muss dessen Impulsanteil x nicht notwendigerweise mit dem Impulserwartungswert $\langle x_{d^v} \rangle$ übereinstimmen, den wir aus der Strukturfunktion f_{d^v} für das Down-Valenzquark errechnen:

$$\langle x_{d^v} \rangle = \int_{x_{\min}}^1 dx' x' f_{d^v}(x', Q^2) \quad (4.14)$$

Wenn nun den f_{d^v} von der Strukturfunktion subtrahieren, dann stimmt der Impulserwartungswert $\langle X \rangle$ des Remnants

$$\langle X \rangle = \sum_k \int_{x_{\min}}^1 dx' x' f_k(x', Q^2) \quad (4.15)$$

nicht mehr mit dem Impuls $1 - x$ des Remnants überein, die Impulssummenregel ist also nicht mehr erfüllt. Die vierte Annahme erlaubt es uns nun diesen Fehlbeitrag durch eine Reskalierung von Strukturfunktionen zu kompensieren. Wir nehmen also an, dass das Valenzquark vor der Streuung durch Wechselwirkungen mit dem Gluon-See überdurchschnittlich viel Impuls bekommen hat, so dass der Gluon-See entsprechend unterdurchschnittlich viel Impuls hat und skalieren die Gluonfunktion f_g soweit herab, dass die Impulssummenregel wieder erfüllt ist.

Noch deutlicher wird es, wenn wir ein Seequark \bar{u} auflösen. Dann nehmen wir an, dass es vorher durch eine Fluktuation aus einem Gluonsplitting $g \rightarrow u\bar{u}$ entstanden ist. Durch Mittelung über alle solche Splittings bekommen wir explizit einen Beitrag des verbleibenden u -Quarks zur Remnant-Strukturfunktion, der dem Valenz-up Beitrag ähnelt. Dieser neue Beitrag entsteht aber nicht durch die harte Wechselwirkung, sondern durch die Einschränkung auf Remnantkonfigurationen die eben ein solches Splitting enthalten.

4.2.2. Definition der Remnant-Strukturfunktionen

In Kapitel 3 haben wir die übliche Notation von Flavor-Verteilungsfunktionen f_k mit $k \in \{\bar{t}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{s}, \bar{u}, \bar{d}, g, d, u, s, c, b, t\}$ eingeführt. Jetzt zerlegen wir diese Funktionen weiter in Seequark-, Valenzquark- und Gluonbeiträge. Für das Proton ergeben sich:

$$f_{d^v}(x, Q^2) = f_d(x, Q^2) - f_{\bar{d}}(x, Q^2) \quad (4.16)$$

$$f_{u^v}(x, Q^2) = f_u(x, Q^2) - f_{\bar{u}}(x, Q^2) \quad (4.17)$$

$$f_{d^s}(x, Q^2) = f_{\bar{d}}(x, Q^2) \quad (4.18)$$

$$f_{u^s}(x, Q^2) = f_{\bar{u}}(x, Q^2) \quad (4.19)$$

Für das Antiproton ergeben sich entsprechend ladungskonjugierte Beiträge. Neu hinzu kommen *Quasivalenz*-Beiträge f_{k^Q} , die sich nicht aus den bekannten Flavorbeiträgen ergeben. Wir müssen diese neuen Beiträge berücksichtigen, um die Erhaltung von Spin, Farbladung und Flavorsumme zu gewährleisten. Jedesmal, wenn wir dem Remnant ein Quark entnehmen, dann fügen wir dem partonischen Endzustand entsprechenden Spin und Farbladung hinzu und ändern dessen Flavorinhalt. Diese Quantenzahlen müssen wir im Remnant kompensieren, indem wir ein Antiquark in den Remnant aufnehmen.

Wir nehmen an, dass beide Quarks vorher durch ein Gluonsplitting $g \rightarrow q^S q^Q$ bei der Splittingskala μ_S entstanden sind. Die Impulsverteilung f_{k^Q} ergibt sich dann aus dem Produkt der Gluonimpulsverteilung $f_g(x_g, \mu_F)$ mit der Wahrscheinlichkeit $P_{g \rightarrow q\bar{q}}(z)$ für ein Gluonsplitting in die Impulsanteile z bzw. $1 - z$. Wir nennen x den Impulsanteil des Quasivalenzquarks und \bar{x} den Impulsanteil des Seequarks und erhalten:

$$x_g = x + \bar{x} \quad (4.20)$$

$$z = \frac{\bar{x}}{x + \bar{x}} \quad (4.21)$$

Mit diesen Einsetzungen erhalten wir schließlich die Impulsverteilung des Quasivalenzquarks als Funktion des Impulsanteils x mit den zusätzlichen Parametern \bar{x} und μ_S :

$$f_{q^Q}(x; \bar{x}, \mu_S) = f_g(x + \bar{x}, \mu_F)|_{\mu_F = \mu_S} P_{g \rightarrow q\bar{q}}\left(\frac{\bar{x}}{x + \bar{x}}\right) \quad (4.22)$$

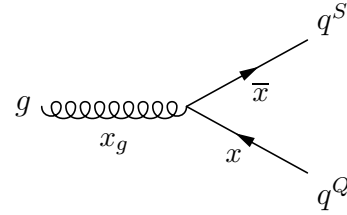


Abbildung 4.7.: Gluonsplittung, aus dem ein Seequark und das zugehörige Quasivalenzquark resultiert.

Da alle Partonen in dieser Betrachtung nur longitudinalen Impuls haben, verwenden wir für $P_{g \rightarrow q\bar{q}}(z)$ den Splittingkernel im kollinearen, masselosen Limit,

$$P_{g \rightarrow q\bar{q}}(z) = \frac{N_f}{2} (z^2 + (1-z)^2). \quad (4.23)$$

Die Splittingskala μ_S stimmt nicht notwendigerweise mit der Faktorisierungsskala μ_F überein. Sie ist eine frei gewählte, feste Skala, bei der das Gluonsplitting stattgefunden hat. Es ist aber möglich, diese Skala in jeder Iteration der aktuellen Faktorisierungsskala gleichzusetzen und so formal die Abhängigkeit $f(x, \mu; \bar{x})$ zu bekommen.

Zusammenfassend schreiben wir noch einmal den vollständigen Übergang der Nomenklatur auf:

$$\sum_{k \in \{\bar{t}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{s}, \bar{u}, \bar{d}, g, d, u, s, c, b, t\}} f_k \rightarrow \sum_{\substack{k \in \{g, q^S, q^V, q^Q\} \\ q \in \{\bar{t}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{s}, \bar{u}, \bar{d}, d, u, s, c, b, t\}}} f_k^{(n)} \quad (4.24)$$

$f_k^{(n)}$ ist die Strukturfunktion nach der n -ten Wechselwirkung und $f_k^{(0)} = f_k$ ist die Strukturfunktion des ungestörten Hadrons.

4.2.3. Summenregeln

Die wesentliche Schlussfolgerung aus der Annahme statischer Remnants ist, dass die oben definierten Beiträge zu den Strukturfunktionen der Remnants forminvariant zu den Strukturfunktionen des Protons sind. Bloß müssen wir das Impulsargument x auf den Impuls des Remnants beziehen und nicht mehr auf den Impuls des Protons. Da wir im n -ten Schritt insgesamt den Impuls

$$X^{(n)} = \sum_{m=1}^{n-1} x^{(m)} \quad (4.25)$$

entfernt haben, machen wir den Ansatz:

$$f_k^{(n)}(x^{(n)}, \mu_F) = W_k^{(n)} \frac{f_k\left(\frac{x^{(n)}}{1-X^{(n)}}, \mu_F\right)}{1-X^{(n)}} \quad (4.26)$$

$$x^{(n)} \in (x_{\min}, 1 - X^{(n)}) \quad (4.27)$$

$$W_k^{(n)} \geq 0 \quad (4.28)$$

$W_k^{(n)}$ ist ein reeller Normierungsfaktor, den wir, wie oben bereits diskutiert, benötigen um die Summenregeln erfüllen zu können.

Wird ein Valenzquark entfernt, dann reduzieren wir den *Valenzinhalt* $N_{q^V}^{(n)}$ um eins. Dabei legen wir den Valenzinhalt für das Proton mit

$$N_{d^V}^{(0)} := 1 \quad (4.29)$$

$$N_{u^V}^{(0)} := 2 \quad (4.30)$$

$$N_{q^V}^{(0)} := 0, \text{ sonst} \quad (4.31)$$

und für das Antiproton mit

$$N_{\bar{d}^V}^{(0)} := 1 \quad (4.32)$$

$$N_{\bar{u}^V}^{(0)} := 2 \quad (4.33)$$

$$N_{q^V}^{(0)} := 0, \text{ sonst} \quad (4.34)$$

fest. Die Valenzbeiträge $f_{q^V}^{(n)}$ zu den Remnants ergeben sich dann zu

$$f_{q^V}^{(n)} = W_{q^V}^{(n)} f_{q^V}^{(0)} \frac{N_{q^V}^{(n)}}{N_{q^V}^{(0)}}. \quad (4.35)$$

Mit diesen Definitionen können wir schließlich die Proton-Summenregeln auf die Remnant-Summenregeln verallgemeinern:

- Proton-Impulssummenregel:

$$\sum_k \int_{x_{\min}}^1 dx x f_k(x, Q^2) = 1 \quad (4.36)$$

- Remnant-Impulssummenregel:

$$\sum_k \int_{x_{\min}}^{1-X_m} dx^{(n)} x^{(n)} \frac{f_k^{(n)}\left(\frac{x^{(n)}}{1-X^{(n)}}, \mu_F\right)}{1-X^{(n)}} = 1 - X^{(n)} \quad (4.37)$$

$$\Rightarrow \sum_k \int_{\xi_{\min}^{(n)}}^1 d\xi^{(n)} \xi^{(n)} f_k^{(n)}(\xi^{(n)}, \mu_F) = 1 \quad (4.38)$$

$$x^{(n)} = \xi^{(n)} (1 - X^{(n)}) \quad (4.39)$$

$$x_{\min}^{(n)} = \xi_{\min}^{(n)} (1 - X^{(n)}) \quad (4.40)$$

- Proton-Valenzsummenregeln:

$$\int_{x_{\min}}^1 dx (f_d(x, Q^2) - f_{\bar{d}}(x, Q^2)) = 1 \quad (4.41)$$

$$\int_{x_{\min}}^1 dx (f_u(x, Q^2) - f_{\bar{u}}(x, Q^2)) = 2 \quad (4.42)$$

- Remnant-Valenzsummenregeln:

$$\int_{\xi_{\min}^{(n)}}^1 d\xi^{(n)} f_{q^V}^{(n)}(\xi^{(n)}, Q^2) = N_{q^V}^{(n)} \quad (4.43)$$

$$\int_{\xi_{\min}^{(n)}}^1 d\xi^{(n)} f_{\bar{q}^V}^{(n)}(\xi^{(n)}, Q^2) = N_{\bar{q}^V}^{(n)} \quad (4.44)$$

$$\int_{\xi_{\min}^{(n)}}^1 d\xi^{(n)} f_{q^Q}^{(n)}(\xi^{(n)}, Q^2) = N_{q^Q}^{(n)} \quad (4.45)$$

$$\int_{\xi_{\min}^{(n)}}^1 d\xi^{(n)} f_{\bar{q}^Q}^{(n)}(\xi^{(n)}, Q^2) = N_{\bar{q}^Q}^{(n)} \quad (4.46)$$

4.2.4. Normierungsfaktoren

Offensichtlich haben wir mehr Normierungsfaktoren als Summenregeln. Bis auf die Valenzfaktoren liegen die Normierungen nicht fest. Für diese folgt aus 4.43 und 4.44:

$$W_{q^V}^{(n)} = W_{\bar{q}^V}^{(n)} = W_{q^Q}^{(n)} = W_{\bar{q}^Q}^{(n)} = 1 \quad (4.47)$$

Für die anderen Normierungsfaktoren müssen wir weitere Einschränkungen definieren. Eine Möglichkeit besteht in der gleichen Normierung für alle Seequarks und Gluonen:

$$W_g^{(n)} = W_{q^S}^{(n)} = W_{\bar{q}^S}^{(n)} = W^{(n)} \quad (4.48)$$

Folglich würden alle Seebeiträge gleichmäßig skaliert, wenn z.B ein See-Up-Quark entfernt wird. Diese Annahme ist durchaus Streitbar, man könnte in diesem Fall auch

nur den See-Up-Beitrag reskalieren. Allerdings ist es von vornherein nicht selbstverständlich, dass niederenergetische See-Beiträge den fehlenden Impuls eines hochenergetischen Seequarks kompensieren. Diese Vorgehensweise der Reskalierung ist also insgesamt schon so pauschal, dass der Nutzen einer Differenzierung der Normierungen nicht evident ist. Wir setzen demnach die einfachste Möglichkeit, also gleiche See-Normierungen an. Aus der Impulssummenregel 4.38 erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
 1 = & \\
 & W^{(n)} \int_{\xi_{\min}^{(n)}}^1 d\xi^{(n)} f_g(\xi^{(n)}, Q^2) + \\
 & + W^{(n)} \sum_q \int_{\xi_{\min}^{(n)}}^1 d\xi^{(n)} f_{q^s}(\xi^{(n)}, Q^2) + \\
 & + \sum_q \frac{N_{q^V}^{(n)}}{N_{q^V}^{(0)}} \int_{\xi_{\min}^{(n)}}^1 d\xi^{(n)} f_q^v(\xi^{(n)}, Q^2) + \\
 & + \sum_q \int_{\xi_{\min}^{(n)}}^1 d\xi^{(n)} f_q^Q(\xi^{(n)}, Q^2)
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\Rightarrow W^{(n)} = \frac{1 - \sum_q \frac{N_{q^V}^{(n)}}{N_{q^V}^{(0)}} \int_{\xi_{\min}^{(n)}}^1 d\xi^{(n)} f_q^v(\xi^{(n)}, Q^2) - \sum_q \int_{\xi_{\min}^{(n)}}^1 d\xi^{(n)} f_q^Q(\xi^{(n)}, Q^2)}{\int_{\xi_{\min}^{(n)}}^1 d\xi^{(n)} f_g(\xi^{(n)}, Q^2) + \sum_q \int_{\xi_{\min}^{(n)}}^1 d\xi^{(n)} f_q^s(\xi^{(n)}, Q^2)} \tag{4.50}$$

Damit liegen alle Normierungen und folglich alle Strukturfunktionen fest. Diese Definition der See-Normierung hat aber noch eine formale Schwachstelle. Wenn wir in jeder Iteration neue Quasi-Valenzquarks erzeugen, dann erhalten wir unweigerlich irgendwann eine negative Normierung.

Allerdings ist dieser Fall äußerst selten. Zum Einem ist die mittlere Anzahl von Wechselwirkungen bei einem Energie-Cutoff von $Q_{\min}^2 \approx (10 \text{ GeV})^2$ mit $\langle n \rangle \approx 2$ so klein, dass nur selten hinreichend viele Wechselwirkungen für einen solchen Fall generiert werden. Zum Anderen werden Quasi-Valenzquarks mit einer Wahrscheinlichkeit entsprechend ihres Gewichts aus dem Remnant entfernt. Je mehr Quasi-Valenzquarks wir haben, desto größer ist also die Wahrscheinlichkeit, dass im nächsten Schritt eins entfernt wird. Der Fall $W < 0$ tritt demnach praktisch nie ein und kann durch ein

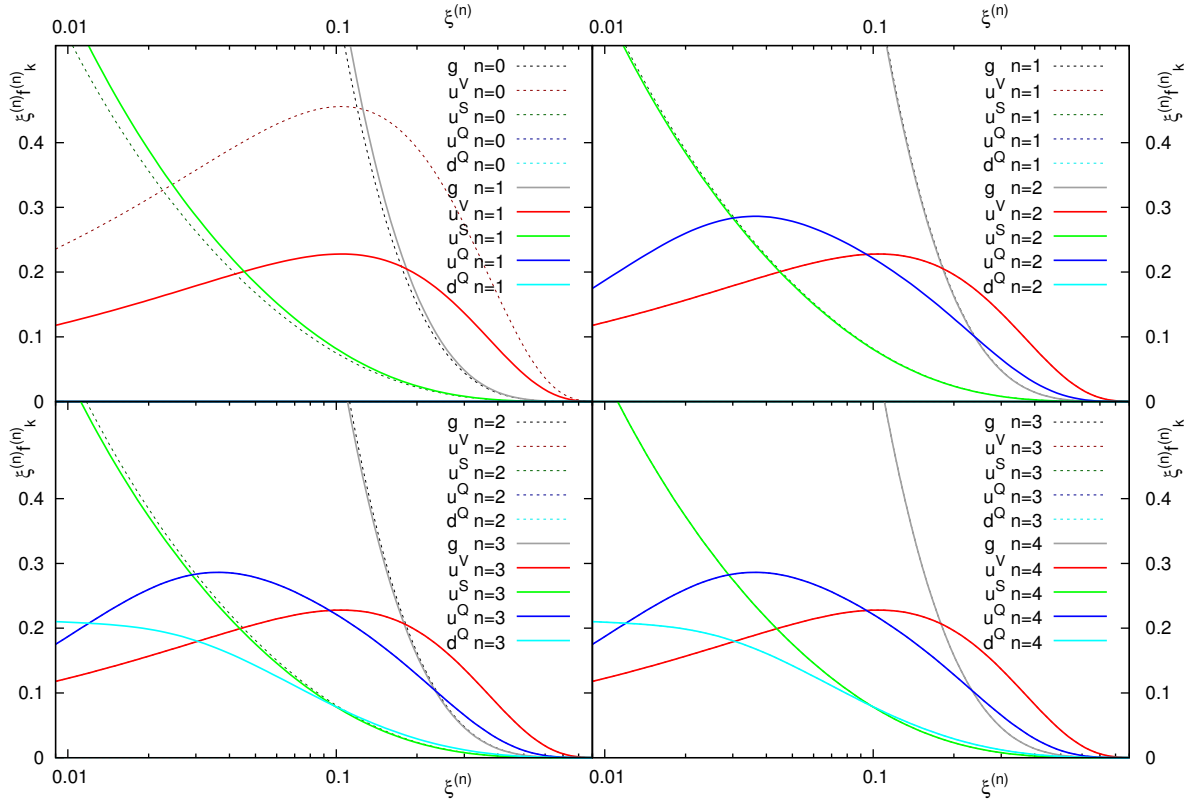


Abbildung 4.8.: Remnant-Impuls-Strukturfunktionen mit voreingestellten Parametern. Eingetragen ist eine Auswahl von Strukturfunktionen für verschiedene Iterationen n . Die entfernten Partonen sind: $n=1$: u -Valenzquark bei $\xi^{(1)} = 0.1$, $n=2$: \bar{u} -Seequark bei $\xi^{(2)} = 0.1$, $n=3$: \bar{d} -Seequark bei $\xi^{(3)} = 0.01$, $n=4$: Gluon bei $\xi^{(4)} = 0.01$. Um die Änderung der Funktionen besser vergleichen zu können sind jeweils die Funktionen der vorhergehenden Iteration mit eingetragen und alle Funktionen bei derselben Faktorisierungsskala $\mu_F = 1 \text{ TeV}$ ausgewertet.

Veto komplett verhindert werden, ohne die Wahrscheinlichkeitsdichte dadurch signifikant zu stören. Dennoch ist diese Möglichkeit ein Indiz dafür, dass die Behandlung von Seequarks in diesem Modell zu pauschal ist.

Wenn wir annehmen, dass das Konzept von Quasi-Valenzquarks bis auf seltene Konstellationen korrekt ist, dann können wir daraus noch etwas lernen: Wenn der Energiecutoff mit $Q_{\min}^2 < 10 \text{ GeV}$ nicht zu klein gewählt wird, dann werden mit hoher Wahrscheinlichkeit beide Partner der angenommenen Gluonsplittings an einer harten Wechselwirkung teilnehmen. Das hat erhebliche Auswirkungen auf Korrelationen der Partonen im Endzustand, insbesondere auf Farbkorrelationen. Hier manifestiert sich einer der größten Unterschiede zu dem einfacheren eikonalen Ansatz.

4.3. Simultane Skalenentwicklung

Wenn wir noch einmal auf den Beginn unserer Diskussion von mehrfachen Wechselwirkungen in Abschnitt 4.1 blicken, dann stellen wir fest, dass wir eines der grundsätzlichen Probleme noch nicht gelöst haben, nämlich eine konsistente Definition der Faktorisierungsskala μ_F . Für jede Wechselwirkung die wir generieren, definieren wir eine Faktorisierungsskala, die mit der Wechselwirkungsskala übereinstimmt. Dann haben wir am Ende für n Wechselwirkungen auch n Faktorisierungsskalen für ein und dieselbe Proton-Streuung. Wenn wir die Protonstreuung mit einer einheitlichen Faktorisierungsskala $\mu_F^2 = Q_{\min}^2$ beschreiben wollen, dann müssen wir in der perturbativen Entwicklung weitere Vertizes mit Skalen $Q_{\min}^2 < Q^2 < Q_n^2$ hinzunehmen.

Wir sind dieses Problem bereits in Abschnitt 3.2.3 für einfache Wechselwirkungen begegnet. Dort haben wir Partonshower verwendet, um die Lücke im Phasenraum zwischen der Skala der harten Wechselwirkung und der hadronischen Skala Λ_{QCD} zu schließen. Der Skalenentwicklungsansatz erlaubt es uns, denselben Mechanismus zu benutzen, um die Lücken zwischen den harten Wechselwirkungen zu schließen.

Wir erreichen das, indem wir jedem Parton jeder Wechselwirkung einen Partonshower zuordnen und die Faktorisierungsskalen μ_{shower} der Partonshower von der letzten Wechselwirkungsskala auf die aktuelle Wechselwirkungsskala entwickeln:

$$\mu_{\text{shower}}^2 = Q_{n-1}^2 \rightarrow \mu_{\text{shower}}^2 = Q_n^2 \quad (4.51)$$

Auf diese Weise erhalten wir in jedem Schritt eine einheitliche Faktorisierungsskala ohne die Notwendigkeit einer einheitlichen Wechselwirkungsskala. Nach Beendigung des Algorithmus haben wir also n verschiedene Wechselwirkungsskalen aber nur eine Faktorisierungsskala.

4.3.1. Konsequenzen

Die simultane Entwicklung hat noch weitere Konsequenzen. Wir können jetzt auch die Splittings der Partonshower mit den Remnant-Strukturfunktionen auswerten und andererseits die Änderungen durch die Splittings auf die Remnant-Strukturfunktionen übertragen. Das einfache Bild einer Remnant-Zerfallskette wie in Abbildung 4.5 wird dadurch komplexer, denn die Shower-Splittings stellen keine Zerfälle der Remnants dar, sondern eine Änderung eines bereits generierten Zerfalls.

Es mag zunächst widersprüchlich aussehen, dass Wechselwirkungen im nachhinein geändert werden. Allerdings liegt der simultanen Skalenentwicklung keine zeitliche Ordnung zugrunde, sondern eine Ordnung nach dem Auflösungsvermögen μ_F . Die Interpretation des simultanen Algorithmus ist also, dass die generierten Interaktionen keine wohldefinierte zeitliche Abfolge haben und sich bloß die Definition, welche Bei-

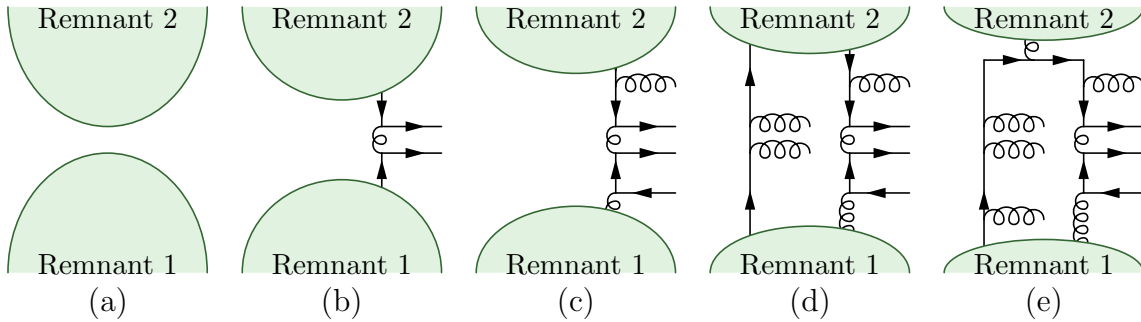


Abbildung 4.9.: Hadronische Streuung mit zweifacher harter partonischer Wechselwirkung mit simultaner Entwicklung von harten Wechselwirkungen und Initial State Radiation bei verschiedenen Faktorisierungsskalen μ_F . (a): $\mu_F^2 \gg Q_1^2$ Alle Wechselwirkungen sind per Definitionem weich, in diese Betrachtung gibt es keine perturbative Entwicklung. (b): $\mu_F = Q_1$ Es wird genau eine harte Wechselwirkung aufgelöst. (c): $Q_2^1 < \mu_F^2 < Q_1^2$ Initial State Radiation: Es werden weitere Wechselwirkungen aufgelöst, bei denen Teilchen im Eingangszustand der harten Wechselwirkungen abgestrahlt werden. (d) $\mu_F = Q_2$ Es wird eine zweite harte Wechselwirkung aufgelöst. (e) $\mu_F < Q_2$ Bei dieser Skala wird sichtbar, dass beide harte Wechselwirkungen korreliert sind, zwei Partonen sind durch ein Gluonsplitting verbunden.

träge zu der hadronischen Streuung als hart angesehen und perturbativ ausgewertet werden, in jedem Schritt ändert.

Jetzt können wir auch eine weitere Vereinfachung aufgeben, die wir zu Beginn gemacht haben. Wir hatten unverbundene Feynmandiagramme in der perturbativen Entwicklung angenommen, weil die Wechselwirkungsskalen Q_n in der Regel nicht von derselben Größenordnung sind. Bei den Partonshowern ist das anders, hier wird die Wechselwirkungsskala wie auch die Faktorisierungsskala in vielen kleinen Schritten entwickelt, so dass wir Interaktionen zwischen den zunächst unverbundenen Feynmandiagrammen zulassen können. In Abbildung 4.9 ist im letzten Schritt eine solche Interaktion illustriert. In diesem Beispiel gehen zwei Partonen von zwei verschiedenen harten Wechselwirkungen auf dasselbe Gluonsplitting zurück.

Für den simultanen Algorithmus ist das eine triviale Option, denn solche Gluonsplittings werden explizit bei jedem Auftreten eines Seequarks angenommen und das entsprechende zweite Quark steht folgenden Wechselwirkungen ohnehin in Form des Quasi-Valenz-Beitrags zur Verfügung. Es sind aber auch andere Topologien von verbundenen Feynmangraphen als Erweiterung zu dem hier vorgestellten Algorithmus möglich. Insbesondere sind bei einer zusätzlichen simultanen Entwicklung von *Final State Radiation* auch Wechselwirkungen mit den partonischen Endzuständen

möglich¹³.

4.3.2. Fazit

Der Skalenentwicklungsansatz bietet uns die Möglichkeit einer konsistenten Beschreibung der Faktorisierungsskala über mehrere Größenordnungen von auftretenden Wechselwirkungsskalen und eine einheitliche Beschreibung von mehrfachen Wechselwirkungen und Partonshowern. Mit diesem Ansatz können wir eine saubere Trennung zwischen einem physikalisch gut begründeten Rahmenwerk und ad hoc Annahmen zur Faktorisierung mehrfacher Streuungen vollziehen.

Das Rahmenwerk besteht aus dem Skalenentwicklungsansatz selbst, bei dem vernachlässigte Wechselwirkungen mit dem Faktor $\hat{p}_\perp^{(n)}/\hat{p}_\perp^{(n+1)}$ unterdrückt sind, während sich Annahmen zur Faktorisierung mehrfacher Wechselwirkungen in den Definitionen der Remnant-Strukturfunktionen wiederfinden. Der Skalenentwicklungsansatz schränkt dabei die Form der Remnant-Strukturfunktionen nicht ein, so können wir eine große Bandbreite verschiedener Annahmen mit demselben Ansatz realisieren und sie mit Daten von Streuexperimenten vergleichen. Auf diese Weise können wir experimentell Beschreibungen von Remnants ausschließen und somit Schlussfolgerungen über Eigenschaften der Remnants selbst ziehen.

Durch die Hinzunahme einer optionalen Beschreibung von simultanen Wechselwirkungen bei gleicher Wechselwirkungsskala können wir schließlich ein generisches Grundgerüst für die Simulation von Mehrfachstreuungen erhalten.

¹³Corke und Sjostrand (2010)

Schreiben ist leicht. Man muss nur die falschen Wörter weglassen.

(Mark Twain)

5. Implementierung

In Kapitel 4 haben wir die theoretischen Grundlagen für mehrfache Wechselwirkungen mit Skalenentwicklungsansatz kennengelernt. Nun wollen wir genauer sehen, wie mehrfache Wechselwirkungen in Form eines Monte Carlo Generators implementiert werden können. Wir beschränken uns dabei auf die Simulation des *underlying Events* einer hadronischen Wechselwirkung.

Im ersten Abschnitt werden wir die Abgrenzung des *underlying Events* von dem vollständigen Streuereignis definieren und festlegen, welche Wechselwirkungen dafür berücksichtigt werden. Anschließend werden wir uns zwei Schritten in der Implementierung zuwenden, die entscheidend für die Laufzeit der Simulation sind. Das sind zum einen die numerischen Integrationen, die für jede Wechselwirkung ausgewertet werden müssen und zum anderen die eigentliche Monte Carlo Generation der Feynmandiagramme. Dabei werden wir sehen, wie die Dimensionen der auftretenden Integrale durch ein *Stratified Sampling* reduziert werden können und trotzdem ein gemeinsames *Importance Sampling* für alle Strati durchgeführt werden kann. Schließlich werden wir im vierten Abschnitt einen Algorithmus für die simultane Entwicklung der Faktorisierungsskalen und für die Behandlung der Remnant-Strukturfunktionen vorstellen.

5.1. Underlying Event

Als Grundlage für die Simulation von mehrfachen Wechselwirkungen verwenden wir den universellen Event-Generator WHIZARD^{1,2} für Streuereignisse. Universell bedeutet, dass WHIZARD nicht nur Wechselwirkungen aus vorgegebenen Wechselwirkungsmodellen generieren kann, sondern es dem Nutzer erlaubt, Vertizes aus einer großen Klasse von Wechselwirkungen selbst zu definieren. Bislang generiert WHIZARD für jedes Streuereignis dabei genau eine harte Wechselwirkung. Weitere Wechselwirkungen

¹Kilian u. a. (2011b)

²Moretti u. a. (2001)

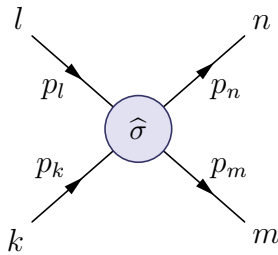
der Hadron-*Remnants*, zusammenfassend als *Underlying Event* bezeichnet, werden bislang nicht weiter behandelt.

Wir möchten nun eine Behandlung dieses *Underlying Events* in Form von weiteren partonischen Streuungen hinzufügen. Daher nehmen wir an, dass die Wechselwirkung bei der größten Skala Q_0^2 durch den bestehenden Algorithmus von WHIZARD vorgegeben wird und alle anderen Wechselwirkungen bei kleineren Skalen $Q_n^2 < Q_1^2$, $0 < n$ durch den hier beschriebenen Algorithmus simuliert werden.

5.1.1. Wirkungsquerschnitte

Für eine solche Korrektur zur härtesten Wechselwirkung ist es nicht unbedingt sinnvoll, das *Underlying Event* mit der größtmöglichen Universalität zu beschreiben. Da QCD-Wechselwirkungen bei niedrigen Skalen dominant sind, betrachten wir als erste Annäherung an eine vollständige Beschreibung des *Underlying Events* ausschließlich QCD-Wechselwirkungen in niedrigster Ordnung in α_s . In Tabelle 5.1 sind alle berücksichtigten Feynmandiagramme und deren partonische Wirkungsquerschnitte $\hat{\sigma}$ dargestellt.

Basierend auf dieser Auswahl werden wir nun zunächst die differentiellen Wirkungsquerschnitte für hadronische Wechselwirkungen bei der Skala Q^2 mit genau einer dieser partonischen Wechselwirkungen aufstellen. Anschließend werden wir daraus die Wahrscheinlichkeitsfunktion für mehrfache Wechselwirkungen ableiten. Um hadronische von partonischen Wechselwirkungen zu unterscheiden, werden wir alle Größen, die sich auf das partonische Subsystem einer harten Wechselwirkung beziehen, mit einem Hut $\hat{}$ kennzeichnen. Entsprechend notieren wir die Mandelstamvariablen für eine partonische Wechselwirkung $kl \rightarrow mn$



$$\hat{s} = (p_k + p_l)^2 = (p_m + p_n)^2, \quad (5.1)$$

$$\hat{t} = (p_m - p_k)^2 = (p_n - p_l)^2, \quad (5.2)$$

$$\hat{u} = (p_m - p_l)^2 = (p_n - p_k)^2, \quad (5.3)$$

$$\hat{p}_\perp = \frac{\hat{t} \hat{u}}{\hat{s}}, \quad (5.4)$$

$$p_k = x_1 P_1, \quad (5.5)$$

$$p_l = x_2 P_2. \quad (5.6)$$

P_1 und P_2 sind die Impulse der ungestörten Hadronen. Im Grenzwert für kleine Quark-

Nr.	Typ	Prozess	Feynmangraphen	Wirkungsquerschnitt $\cdot \frac{\hat{s}^2}{\pi\alpha_s^2}$
1	1	$q_1 q_2 \rightarrow q_1 q_2$	$\left \begin{array}{c} i \rightarrow k \\ \text{---} \\ j \rightarrow l \end{array} \right ^2$	$\frac{4}{9} \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2}$
2	1	$q_1 \bar{q}_2 \rightarrow q_1 \bar{q}_2$	$\left \begin{array}{c} i \rightarrow k \\ \text{---} \\ j \rightarrow l \end{array} \right ^2$	$\frac{4}{9} \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2}$
3	2	$q_1 q_1 \rightarrow q_1 q_1$	$\left \begin{array}{c} i \rightarrow k \quad i \rightarrow k \\ \text{---} \quad \text{---} \\ j \rightarrow l \quad j \rightarrow l \end{array} \right ^2$	$\frac{4}{9} \left(\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{s}^2 + \hat{t}^2}{\hat{u}^2} \right) - \frac{8}{27} \frac{\hat{s}^2}{\hat{u}\hat{t}}$
4	3	$q_1 \bar{q}_1 \rightarrow q_2 \bar{q}_2$	$\left \begin{array}{c} i \rightarrow k \\ \text{---} \\ j \rightarrow l \end{array} \right ^2$	$\frac{4}{9} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}$
5	3	$q_1 \bar{q}_1 \rightarrow q_1 \bar{q}_1$	$\left \begin{array}{c} i \rightarrow k \quad i \rightarrow k \\ \text{---} \quad \text{---} \\ j \rightarrow l \quad j \rightarrow l \end{array} \right ^2$	$\frac{4}{9} \left(\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2} \right) - \frac{8}{27} \frac{\hat{u}^2}{\hat{s}\hat{t}}$
6	3	$q_1 \bar{q}_1 \rightarrow gg$	$\left \begin{array}{c} i \rightarrow k \quad i \rightarrow k \\ \text{---} \quad \text{---} \\ j \rightarrow l \quad j \rightarrow l \end{array} \right ^2$	$\frac{32}{27} \frac{\hat{u}^2 + \hat{t}^2}{\hat{u}\hat{t}} - \frac{8}{3} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}$
7	4	$gg \rightarrow q_1 \bar{q}_1$	$\left \begin{array}{c} i \rightarrow k \quad i \rightarrow k \\ \text{---} \quad \text{---} \\ j \rightarrow l \quad j \rightarrow l \end{array} \right ^2$	$\frac{1}{6} \frac{\hat{u}^2 + \hat{t}^2}{\hat{u}\hat{t}} - \frac{3}{8} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}$
8	5	$qg \rightarrow qg$	$\left \begin{array}{c} i \rightarrow k \quad i \rightarrow k \\ \text{---} \quad \text{---} \\ j \rightarrow l \quad j \rightarrow l \end{array} \right ^2$	$\frac{-4}{9} \frac{\hat{u}^2 + \hat{s}^2}{\hat{u}\hat{s}} + \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2}$
9	4	$gg \rightarrow gg$	$\left \begin{array}{c} i \rightarrow k \quad i \rightarrow k \quad i \rightarrow k \quad i \rightarrow k \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ j \rightarrow l \quad j \rightarrow l \quad j \rightarrow l \quad j \rightarrow l \end{array} \right ^2$	$\frac{9}{2} \left(3 - \frac{\hat{u}\hat{t}}{\hat{s}^2} - \frac{\hat{u}\hat{s}}{\hat{t}^2} - \frac{\hat{s}\hat{t}}{\hat{u}^2} \right)$

Tabelle 5.1.: Feynmangraphen und Wirkungsquerschnitte, die für die Generierung harter Wechselwirkungen des Underlying Events berücksichtigt werden. Quarks q , beziehungsweise Antiquarks \bar{q} haben mit gleichem Index dasselbe Flavor und mit ungleichem Index verschiedenes Flavor. Nicht eingetragen sind Diagramme, die sich aus Vertauschung von Partonen im Eingangszustand $i \leftrightarrow j$ oder Ausgangszustand $k \leftrightarrow l$ oder globaler Konjugation $q \leftrightarrow \bar{q}$ ergeben.

massen $m_q \rightarrow 0$ gilt außerdem

$$\widehat{s} = x_1 x_2 s \quad (5.7)$$

$$\sum_{q \in \{k, l, m, n\}} m_q^2 = \widehat{s}^2 + \widehat{t}^2 + \widehat{u}^2 = 0 \quad (5.8)$$

wobei s die Schwerpunktennergie des hadronischen Systems ist. Als Entwicklungsparameter wählen wir den Transversalimpuls \widehat{p}_\perp :

$$Q^2 := \widehat{p}_\perp = \frac{\widehat{t} \widehat{u}}{\widehat{s}} \quad (5.9)$$

\widehat{p}_\perp hat im Gegensatz zu \widehat{s} den Vorteil, dass wir kollineare Divergenzen vermeiden. Da kollinear abgestrahlte Teilchen bei Collider-Experimenten ohnehin nicht detektiert werden können, ist es sinnvoll, solche Ereignisse durch die Wahl des Entwicklungsparameters von vornherein zu vermeiden.

Der Wirkungsquerschnitt für harte Wechselwirkungen hat mit diesen Definitionen die Form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \sigma_{kl \rightarrow mn}^{\text{hard}}(x_1, x_2, \widehat{p}_\perp; s)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial \widehat{p}_\perp} &= f_k(x_1, \widehat{p}_\perp) f_l(x_2, \widehat{p}_\perp) \cdot \\ &\cdot \int d\widehat{s} \int d\widehat{t} \int d\widehat{u} \frac{\partial^3 \widehat{\sigma}_{kl \rightarrow mn}(\widehat{s}, \widehat{t}, \widehat{u})}{\partial \widehat{s} \partial \widehat{t} \partial \widehat{u}} \delta_{\widehat{u}}(\widehat{s} + \widehat{t} + \widehat{u}) \delta_{\widehat{t}}\left(\widehat{p}_\perp - \frac{\widehat{t} \widehat{u}}{\widehat{s}}\right) \delta_{\widehat{s}}(\widehat{s} - x_1 x_2 s) \end{aligned} \quad (5.10)$$

5.1.2. Wahrscheinlichkeit für die n -te Skala

Nun wollen wir die Wahrscheinlichkeitsfunktion für die n -te Wechselwirkung bei der Skala $\widehat{p}_\perp^{(n)}$ aufstellen. Wir beginnen mit einem Ausdruck $\mathcal{P}_{\text{next}}$ für die erste Wechselwirkung bei der Skala $\widehat{p}_\perp^{(1)}$ und verallgemeinern diesen Ausdruck später auf $\mathcal{P}_{\text{next}}^{(n)}$.

Die Dichte der Wahrscheinlichkeitsfunktion $\mathcal{P}_{\text{next}}$ ist gegeben durch die Dichte der Wahrscheinlichkeitsfunktion $\mathcal{P}_{\text{hard}}$ für eine Wechselwirkung bei der Skala $\widehat{p}_\perp^{(1)}$ multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit \mathcal{P}_{no} dafür, dass keine Wechselwirkung bei höheren Skalen $\widehat{p}_\perp^{(1)} < \widehat{p}_\perp < \widehat{p}_\perp^{\text{max}}$ stattfindet. Wir erhalten $\mathcal{P}_{\text{hard}}$ aus σ^{hard} , indem wir die Wirkungsquerschnitte auf die Summe aller inelastischer Wirkungsquerschnitte σ_{nd} normieren. σ_{nd} bleibt dabei zunächst ein freier Parameter der Simulation.

Wir unterscheiden im Argument der Funktionen durch ein Semikolon wieder zwischen kinematischen Variablen und fest gewählten Parametern wie $\widehat{p}_\perp^{\text{max}}$. Die Abhängigkeit von diesen Parametern ist im Folgenden von Bedeutung und muss daher in der Notation mitgeführt werden.

Mit diesen Einsetzungen ist $\mathcal{P}_{\text{next}}$ also gegeben durch

$$\frac{d\mathcal{P}_{\text{next}}(\widehat{p}_\perp^{(1)}; \widehat{p}_\perp^{\text{max}}, s)}{d\widehat{p}_\perp^{(1)}} = \frac{d\mathcal{P}_{\text{hard}}(\widehat{p}_\perp^{(1)}; s)}{d\widehat{p}_\perp^{(1)}} \mathcal{P}_{\text{no}}(\widehat{p}_\perp^{(1)}; \widehat{p}_\perp^{\text{max}}, s) \quad (5.11)$$

mit

$$\frac{d\mathcal{P}_{\text{hard}}(\widehat{p}_\perp; s)}{d\widehat{p}_\perp} = \frac{1}{\sigma_{\text{nd}}} \sum_{klmn} \int_{x_{\text{min}}}^1 dx_1 \int_{x_{\text{min}}}^1 dx_2 \frac{\partial^3 \sigma_{kl \rightarrow mn}^{\text{hard}}(x_1, x_2, \widehat{p}_\perp; s)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial \widehat{p}_\perp} \quad (5.12)$$

und

$$\mathcal{P}_{\text{no}}(\widehat{p}_\perp^{(1)}; \widehat{p}_\perp^{\text{max}}, s) = \exp \left[- \int_{\widehat{p}_\perp^{(1)}}^{\widehat{p}_\perp^{\text{max}}} d\widehat{p}_\perp \frac{d\mathcal{P}_{\text{hard}}(\widehat{p}_\perp; s)}{d\widehat{p}_\perp} \right]. \quad (5.13)$$

In der ersten Iteration sind die ungestörten hadronischen Strukturfunktionen f einzusetzen. In allen weiteren sind die Remnant-Strukturfunktionen $f^{(n)}$ einzusetzen. Für die Verallgemeinerung auf die n -te Wechselwirkung gehen wir wie in Abschnitt 4.2.3 auch hier wieder von den Impulsanteilen x_i der Hadronimpulse P_i zu den Impulsanteilen ξ_i der Remnantimpulse $P_i^{(n)}$ über

$$\xi_1^{(n)} P_1^{(n)} = x_1^{(n)} P_1 \quad (5.14)$$

$$\xi_2^{(n)} P_2^{(n)} = x_2^{(n)} P_2 \quad (5.15)$$

$$\xi_1^{(n)} \xi_2^{(n)} s^{(n)} = x_1^{(n)} x_2^{(n)} s \quad (5.16)$$

und setzen die Remnant-Strukturfunktionen $f^{(n)}$ in den Wirkungsquerschnitt ein:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \sigma_{kl \rightarrow mn}^{\text{hard},(n)}(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \widehat{p}_\perp; s^{(n)})}{\partial \xi_1^{(n)} \partial \xi_2^{(n)} \partial \widehat{p}_\perp} &= f_k^{(n)}(\xi_1^{(n)}, \widehat{p}_\perp) f_l^{(n)}(\xi_2^{(n)}, \widehat{p}_\perp) \cdot \\ &\cdot \int d\widehat{s} \int d\widehat{t} \int d\widehat{u} \frac{\partial^3 \widehat{\sigma}_{kl \rightarrow mn}(\widehat{s}, \widehat{t}, \widehat{u})}{\partial \widehat{s} \partial \widehat{t} \partial \widehat{u}} \delta_{\widehat{u}}(\widehat{s} + \widehat{t} + \widehat{u}) \delta_{\widehat{t}}\left(\widehat{p}_\perp - \frac{\widehat{t} \widehat{u}}{\widehat{s}}\right) \delta_{\widehat{s}}\left(\widehat{s} - \xi_1^{(n)} \xi_2^{(n)} s^{(n)}\right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Wir erhalten daraus die Dichte der Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}_{\text{next}}^{(n)}$ dafür, dass die n -te Wechselwirkung bei der Skala $\widehat{p}_{\perp}^{(n)} < \widehat{p}_{\perp}^{(n-1)}$ stattfindet,

$$\frac{d\mathcal{P}_{\text{next}}^{(n)}(\widehat{p}_{\perp}^{(n)}; \widehat{p}_{\perp}^{(n-1)}, s^{(n)})}{d\widehat{p}_{\perp}^{(n)}} = \frac{d\mathcal{P}_{\text{hard}}^{(n)}(\widehat{p}_{\perp}^{(n)}; s^{(n)})}{d\widehat{p}_{\perp}^{(n)}} \mathcal{P}_{\text{no}}^{(n)}(\widehat{p}_{\perp}^{(n)}; \widehat{p}_{\perp}^{(n-1)}, s^{(n)}), \quad (5.18)$$

mit

$$\frac{d\mathcal{P}_{\text{hard}}^{(n)}(\widehat{p}_{\perp}; s^{(n)})}{d\widehat{p}_{\perp}} = \frac{1}{\sigma_{\text{nd}}} \sum_{klmn} \int_{\xi_{\text{min}}^{(n)}}^1 d\xi_1^{(n)} \int_{\xi_{\text{min}}^{(n)}}^1 d\xi_2^{(n)} \frac{\partial^3 \sigma_{kl \rightarrow mn}^{\text{hard},(n)}(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \widehat{p}_{\perp}; s^{(n)})}{\partial \xi_1^{(n)} \partial \xi_2^{(n)} \partial \widehat{p}_{\perp}} \quad (5.19)$$

und

$$\mathcal{P}_{\text{no}}^{(n)}(\widehat{p}_{\perp}^{(n)}; \widehat{p}_{\perp}^{(n-1)}, s^{(n)}) = \exp \left[- \int_{\widehat{p}_{\perp}^{(n)}}^{\widehat{p}_{\perp}^{(n-1)}} d\widehat{p}_{\perp} \frac{d\mathcal{P}_{\text{hard}}^{(n)}(\widehat{p}_{\perp}; s^{(n)})}{d\widehat{p}_{\perp}} \right]. \quad (5.20)$$

Auf diese Weise haben wir eine Wahrscheinlichkeitsdichte für die nächste Skala, beginnend bei einer beliebigen Startskala $\widehat{p}_{\perp}^{(n-1)}$ erhalten. Gleichung (5.18) ist auch die Grundlage für Abbildung 4.6.

5.2. Stratified Sampling der Wirkungsquerschnitte

Wir können nun (5.18) nutzen, um zufällig Wechselwirkungsskalen zu generieren. Dafür müssen notwendigerweise die Integrationen in (5.19) und, je nach Wahl der Generationsmethode, auch die Integration in (5.20) durchgeführt werden. Diese Integrationen sind maßgeblich für die Laufzeit des Generators. In diesem Abschnitt werden wir untersuchen, inwieweit es möglich ist, diese Integrationen ein für alle Mal auszuwerten und für den Generator integrierte Wirkungsquerschnitte zu verwenden. Dazu werden wir ein *Stratified Sampling*³ der Wirkungsquerschnitte durchführen.

³Im Deutschen wird hierfür auch der Begriff „geschichtete Zufallsstichprobe“ verwendet. Im Zusammenhang mit computergestützter numerischer Integration oder Monte Carlo Simulationen ist aber die englische Bezeichnung üblicher. Gemeint ist eine Einteilung der Ergebnismenge in disjunkte Untermengen mit jeweils einem gemeinsamen Merkmal. Eine *Schicht* bzw. ein *Stratum* ist eine solche Untermenge.

5.2.1. Methode der Generierung der Skalen

Wir benötigen unbedingt eine geordnete Liste

$$\widehat{p}_\perp^{(1)} > \widehat{p}_\perp^{(2)} > \dots > \widehat{p}_\perp^{(n)} \quad (5.21)$$

von Skalen in absteigender Reihenfolge. Daher ist die Monte Carlo Methode von Versuch und Irrtum hier nicht praktikabel. Stattdessen verwenden wir die Methode der inversen Wahrscheinlichkeitsfunktion, indem wir die Gleichung

$$z = \mathcal{P}_{\text{next}}^{(n)} \left(\widehat{p}_\perp^{(n)}; \widehat{p}_\perp^{(n-1)}, s^{(n)} \right), \quad (5.22)$$

nach $\widehat{p}_\perp^{(n)}$ auflösen und ein zufällig generiertes z mit

$$z \in (0, 1] \subset \mathbb{R} \text{ zufällig und gleichverteilt.} \quad (5.23)$$

einsetzen. Dafür benötigen wir noch einen Ausdruck für $\mathcal{P}_{\text{next}}^{(n)}$, bisher haben wir nur dessen Dichte definiert. Man kann aber leicht überprüfen, dass

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{\text{next}}^{(n)}}{\partial \widehat{p}_\perp^{(n)}} \equiv \frac{\partial \mathcal{P}_{\text{no}}^{(n)}}{\partial \widehat{p}_\perp^{(n)}}. \quad (5.24)$$

gilt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeitsfunktion ist demnach bis auf eine additive Konstante gleich \mathcal{P}_{no} . Da die Normierungsbedingung

$$\lim_{\widehat{p}_\perp^{(n)} \rightarrow \widehat{p}_\perp^{(n-1)}} \mathcal{P}_{\text{no}}^{(n)} \left(\widehat{p}_\perp^{(n)}, \widehat{p}_\perp^{(n-1)}, s^{(n)} \right) = 1 \quad (5.25)$$

erfüllt ist, ist \mathcal{P}_{no} tatsächlich identisch gleich der gesuchten Wahrscheinlichkeitsfunktion.

$$\mathcal{P}_{\text{no}} \equiv \mathcal{P}_{\text{next}} \quad (5.26)$$

Nun müssen wir noch ein Verfahren wählen, um Gleichung (5.22) auszuwerten. Wir können z.B ein beliebiges Verfahren zur numerischen Berechnung von Nullstellen auf die Gleichung

$$0 = \ln(z) + \int_{\widehat{p}_\perp^{(n)}}^{\widehat{p}_\perp^{(n-1)}} d\widehat{p}_\perp \frac{d\mathcal{P}_{\text{hard}}^{(n)}(\widehat{p}_\perp; s^{(n)})}{d\widehat{p}_\perp} \quad (5.27)$$

anwenden, die wir mit $z = \mathcal{P}_{\text{no}}$ aus (5.20) gewinnen. Unabhängig von der konkreten Wahl des Verfahrens müssten wir dann mehrmals die Integration nach \widehat{p}_\perp auswerten. Dafür müssen wir jedesmal auch die Integrationen nach ξ_1 und ξ_2 aus (5.19) auswerten.

Nr	Art	Inhalt
1	Gluon	$S_1 = \{g\}$
2	Seequark	$S_2 = \{q^S, \bar{q}^S \mid q \in \{d, u, s, c, b, t\}\}$
3	Valenz-down-Quark	$S_3 = \{d^V\}$
4	Valenz-up-Quark	$S_4 = \{u^V\}$
5	Quasivalenzquarks	$S_5 = \{q^Q, \bar{q}^Q \mid q \in \{d, u, s, c, b, t\}\}$

Tabelle 5.2.: Die einfachen Strati

Auf meinem Testsystem⁴ benötigt jede Auswertung von (5.20) etwa 100 ms. Angenommen, die Nullstelle wird mit etwa fünf Iterationen des Newton-Verfahrens gefunden und es werden, Partonshower eingeschlossen, etwa 20 Wechselwirkungsskalen pro Streuereignis generiert, dann liegt der Zeitaufwand T für die Generation der Wechselwirkungsskalen für ein Streuereignis bei etwa

$$T \approx 20 \cdot 5 \cdot 0.1\text{s} = 10\text{s}. \quad (5.28)$$

Das übertrifft die Laufzeit für ein ungewichtetes WHIZARD-Event⁵ von etwa 1ms auf demselben System um vier Größenordnungen. Mit diesem Verfahren würden wir die Laufzeit für WHIZARD-Events signifikant verlängern. Daher werden wir untersuchen, ob diese Integrationen vorgeneriert werden können.

Erschwerend für die Vorgenerierung ist, dass sich die Strukturfunktionen in jeder Iteration ändern und sich damit auch $\mathcal{P}_{\text{hard}}$ jedesmal ändert. Um dieses Problem zu lösen definieren wir Strati von Wechselwirkungen, die wir jeweils vorgenerieren und für jede Iteration verwenden können.

5.2.2. Definition der Strati

Wir definieren einfache Strati S_i , so dass alle Vertreter eines Stratus einen gemeinsamen Gewichtungsfaktor W_i haben. Diese einfachen Strati sind in Tabelle 5.2 zusammengestellt, sie stimmen mit den Anteilen der Strukturfunktionen aus (4.24) überein.

In (4.49) hatten wir uns auf genau einen Gewichtungsfaktor beschränkt, nun haben wir für jede Sorte von Beiträgen ein eigenes Gewicht. Im Falle der Valenzquarks ist der Grund dafür rein pragmatischer Natur. In Abschnitt 4.2.3 hatten wir gesehen, dass

⁴AMD PhenomII 970 Prozessor, Strukturfunktionen aus cteq6ll.LHpdf, Integration mit dem DIVONNE Algorithmus aus der CubaLibrary mit relativem Fehler von 10^{-6} , compiliert mit nagfor 5.2

⁵cc10.sin aus den WHIZARD Examples

sich die Valenzbeiträge sowohl durch die Gewichtungsfaktoren $W_{q^V}^{(n)}$ als auch durch die Valenzinhalte $N_{q^V}^{(n)}$ ändern können:

$$f_{q^V}^{(n)} = W_{q^V}^{(n)} f_{q^V}^{(0)} \frac{N_{q^V}^{(n)}}{N_{q^V}^{(0)}} \quad (5.29)$$

Für den Monte Carlo Generator ist der Unterschied zwischen einer Änderung der Gewichte und einer Änderung des Valenzinhalts aber irrelevant, deswegen müssen wir auch bei konstanten Gewichten beide Valenzbeiträge separat integrieren. Ebenso ist es bei den Quasivalenzquarks, bei denen sich im Laufe des Algorithmus der Flavorinhalt ändert. Da sich die Anzahl verschiedener Quasivalenzbeiträge ändert, liegt auch die Zahl der Strati für Quasivalenzquarks streng genommen nicht fest. Allerdings können aus der integrierten Wahrscheinlichkeitsfunktion für Quasivalenzquarks alle Beiträge gewonnen werden, wenn wir weitere Parameter einführen, wie wir später noch sehen werden.

Die einzige wirkliche Verallgemeinerung im Vergleich zu (4.49) ist die Aufteilung der Gewichte für Gluonen und Seequarks. Durch diese Definition der Strati behalten wir uns die Möglichkeit vor, etwas feinere Gewichtungen vorzunehmen. Es ist aber ausgeschlossen, innerhalb der Strati verschiedene Gewichtungen einzuführen.

Da in (5.17) Produkte von zwei Strukturfunktionen auftreten, definieren wir die zweifachen Strati S_{ab}

$$S_{ab} := \sum_{k \in S_a} \sum_{l \in S_b} \sum_{m,n} \frac{\partial^3 \sigma_{kl \rightarrow mn}^{\text{hard}}}{\partial x_1 \partial x_2 \partial \hat{p}_\perp} \quad (5.30)$$

als Summen über Beiträge zu dem Wirkungsquerschnitt aus (5.10). Die Strati S_{ab} sind dabei nicht als Funktionswerte, sondern als Funktionen definiert. Wir können jetzt die Strati $S_{ab}^{(n)}$ der n -ten Iteration als Produkt aus den Strati S_{ab} der Nullten Iteration und den Gewichtungsfaktoren $W_i^{(n)}$ der n -ten Iteration schreiben:

$$S_{ab}^{(n)} = S_{ab} W_a^{(n)} W_b^{(n)} \quad (5.31)$$

In diesen Ausdruck gehen nur die Integrale über ungestörte Strukturfunktionen aus (5.12) ein und nicht die Integrale über Remnant-Strukturfunktionen (5.19). Wir können die Integrationen in S_{ab} also zu Beginn der Generation auswerten und daraus ohne erneute Integration die Strati $S_{ab}^{(n)}$ der n -ten Iteration gewinnen, indem wir sie mit den Gewichtungsfunktionen multiplizieren. Damit sind wir unserem Ziel, alle Integrationen vorzugenerieren, einen Schritt näher gekommen.

5.2.3. Generierung des n -ten Stratus

Wir drücken die Wahrscheinlichkeitsfunktion $\mathcal{P}_{\text{next}}^{(n)}$ durch die Strati S_{ab} aus, um eine einfachere Form für $\mathcal{P}_{\text{next}}^{(n)}$ zu erhalten. Dafür setzen wir S_{ab} in (5.19) ein und erhalten

$$\frac{d\mathcal{P}_{\text{hard}}^{(n)}(\widehat{p}_{\perp}; s^{(n)})}{d\widehat{p}_{\perp}} = \frac{1}{\sigma_{\text{nd}}} \sum_a \sum_b W_a^{(n)} W_b^{(n)} \int_{\xi_{\text{min}}^{(n)}}^1 d\xi_1^{(n)} \int_{\xi_{\text{min}}^{(n)}}^1 d\xi_2^{(n)} S_{ab}(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \widehat{p}_{\perp}; s^{(n)}) \quad (5.32)$$

$$= \frac{1}{\sigma_{\text{nd}}} \sum_a \sum_b W_a^{(n)} W_b^{(n)} \overline{S}_{ab}(\widehat{p}_{\perp}; s^{(n)}), \quad (5.33)$$

mit

$$\overline{S}_{ab}(\widehat{p}_{\perp}; s^{(n)}) := \int_{x_{\text{min}}}^1 dx_1 \int_{x_{\text{min}}}^1 dx_2 S_{ab}(x_1, x_2, \widehat{p}_{\perp}; s^{(n)}). \quad (5.34)$$

Die integrierten Strati \overline{S} können wir auch als Mittelwerte der einzelnen Strati S interpretieren, welche wir in Kapitel Abschnitt 5.3 benötigen werden. Um das *Stratified Sampling* abzuschließen wollen wir nun die letzte noch verbleibende Integration in die Definition der Strati absorbieren. Wir schauen uns (5.20) in unserer neuen Notation \overline{S} an. Wir erhalten

$$\mathcal{P}_{\text{next}}^{(n)}(\widehat{p}_{\perp}^{(n)}; \widehat{p}_{\perp}^{(n-1)}, s^{(n)}) = \exp \left[-\frac{1}{\sigma_{\text{nd}}} \sum_a \sum_b W_a^{(n)} W_b^{(n)} \int_{\widehat{p}_{\perp}^{(n)}}^{\widehat{p}_{\perp}^{(n-1)}} d\widehat{p}_{\perp} \overline{S}_{ab}(\widehat{p}_{\perp}; s^{(n)}) \right] \quad (5.35)$$

$$= \exp \left[\frac{1}{\sigma_{\text{nd}}} \sum_a \sum_b W_a^{(n)} W_b^{(n)} \left[\mathcal{S}_{ab}(\widehat{p}_{\perp}^{(n)}; s^{(n)}) - \mathcal{S}_{ab}(\widehat{p}_{\perp}^{(n-1)}; s^{(n)}) \right] \right] \quad (5.36)$$

$$= \prod_a \prod_b \mathcal{P}_{\text{next}, a, b}^{(n)}(\widehat{p}_{\perp}^{(n)}; \widehat{p}_{\perp}^{(n-1)}, s^{(n)}) \quad (5.37)$$

mit den neu definierten Stammstrati \mathcal{S}_{ab}

$$\mathcal{S}_{ab}(\widehat{p}_{\perp}^{(n)}; s^{(n)}) := \int_{\widehat{p}_{\perp}^{\text{max}}}^{\widehat{p}_{\perp}^{(n)}} d\widehat{p}_{\perp} \overline{S}_{ab}(\widehat{p}_{\perp}; s^{(n)}) \quad (5.38)$$

und der Wahrscheinlichkeitsfunktion $\mathcal{P}_{\text{next},a,b}^{(n)}$ dafür, irgendeine Wechselwirkung aus dem Stratus $\{a, b\}$ zu erhalten,

$$\mathcal{P}_{\text{next},a,b}^{(n)}\left(\widehat{p}_{\perp}^{(n)}; \widehat{p}_{\perp}^{(n-1)}, s^{(n)}\right) := \exp\left[\frac{1}{\sigma_{\text{nd}}} W_a^{(n)} W_b^{(n)} \left[\mathcal{S}_{ab}\left(\widehat{p}_{\perp}^{(n)}; s^{(n)}\right) - \mathcal{S}_{ab}\left(\widehat{p}_{\perp}^{(n-1)}; s^{(n)}\right) \right]\right]. \quad (5.39)$$

Wir haben mit (5.36) eine Wahrscheinlichkeitsfunktion gewonnen, die von den ungestörten hadronischen Strukturfunktionen abhängt. Besser noch, es treten keine Integrale mehr auf. Alle Integrationen sind in \mathcal{S}_{ab} inkorporiert und können zu Beginn einmalig ausgewertet und für jede Iteration wiederverwertet werden. Unsere einmalige Vorbereitung zu Beginn der Monte Carlo Generation sieht nun wie folgt aus:

1. Wir werten die beiden Integrationen in (5.34) mit dem Integrationsparameter $s^{(n)}$ aus,
2. Wir werten die Stammfunktion in (5.38) mit dem Integrationsparameter $s^{(n)}$ aus und
3. stellen eine zweidimensionale, numerische Approximation von $\mathcal{S}_{ab}\left(\widehat{p}_{\perp}^{(n)}; s^{(n)}\right)$ sowie deren Umkehrfunktion bereit.
4. $\overline{\mathcal{S}}$ kann zwar leicht aus \mathcal{S} abgeleitet werden, dennoch ist es sinnvoll für das anschließende *Importance Sampling* auch eine Approximation von $\overline{\mathcal{S}}_{ab}\left(\widehat{p}_{\perp}; s^{(n)}\right)$ bereitzustellen.

Mit dieser Vorarbeit können wir schließlich die konkreten Schritte zur Generierung der nächsten Wechselwirkungsskala $\widehat{p}_{\perp}^{(n)}$ angeben:

Wir generieren mithilfe von (5.39) für jedes Stratum eine Skala $\widehat{p}_{\perp,a,b}^{(n)}$, indem wir für jedes Stratum eine Zufallszahl $z_{ab}^{(n)} \in (0, 1]$ generieren und

$$z_{ab}^{(n)} = \mathcal{P}_{\text{next},a,b}^{(n)}\left(\widehat{p}_{\perp}^{(n)}; \widehat{p}_{\perp}^{(n-1)}, s^{(n)}\right) \quad (5.40)$$

$$= \exp\left[\frac{1}{\sigma_{\text{nd}}} W_a^{(n)} W_b^{(n)} \left[\mathcal{S}_{ab}\left(\widehat{p}_{\perp}^{(n)}; s^{(n)}\right) - \mathcal{S}_{ab}\left(\widehat{p}_{\perp}^{(n-1)}; s^{(n)}\right) \right]\right] \quad (5.41)$$

nach \mathcal{S}_{ab} auflösen. Wir erhalten:

$$\zeta_{ab}^{(n)} := \frac{\sigma_{\text{nd}} \ln(z_{ab}^{(n)})}{W_a^{(n)} W_b^{(n)}} + \mathcal{S}_{ab}\left(\widehat{p}_{\perp}^{(n-1)}; s^{(n)}\right) = \mathcal{S}_{ab}\left(\widehat{p}_{\perp}^{(n)}; s^{(n)}\right) \quad (5.42)$$

$$\Rightarrow \widehat{p}_{\perp,a,b}^{(n)} = \mathcal{S}_{ab}^{-1}\left(\cdot; s^{(n)}\right)\left(\zeta_{ab}^{(n)}\right) \quad (5.43)$$

$\zeta_{ab}^{(n)}$ ist eine reelle Zahl, die wir direkt auswerten können und \mathcal{S}_{ab}^{-1} liegt als numerische Approximation vor. Schließlich definieren wir die n -te Skala als das Maximum aller Skalen

$$\hat{p}_{\perp}^{(n)} = \max \left\{ \hat{p}_{\perp,a,b}^{(n)} \mid a \in 1..5, b \in 1..5 \right\} \quad (5.44)$$

und das n -ten Stratum als dasjenige mit der höchsten Skala:

$$\{a^{(n)}, b^{(n)}\} := \{a, b\} : \hat{p}_{\perp,a,b}^{(n)} = \hat{p}_{\perp}^{(n)} \quad (5.45)$$

Wir haben jetzt ein Verfahren angegeben, mit dem wir aufbauend auf den Stammstrati \mathcal{S}_{ab} die Skalen generieren können, ohne weitere Integrationen ausführen zu müssen.

5.2.4. Sampling der Quasivalenzbeiträge

Da die Strati \mathcal{S}_{ab} einmal ausgewertet und für alle folgenden Iterationen wiederverwendet werden sollen, müssen sie offensichtlich gespeichert werden. Es gibt keine triviale Möglichkeit für eine Speicherung dieser Strati, da es sich um Abbildungen handelt. Wir werden hier nicht genauer festlegen, wie Abbildungen gespeichert und wiederhergestellt werden können, nehmen aber an, dass Stützstellen irgendeiner Art definiert werden müssen, an denen die Funktion ausgewertet wird.

Um den Speicherbedarf abzuschätzen nehmen wir weiterhin an, dass sich die Funktion nicht durch Produkte von Funktionen der einzelnen Argumente annähern lässt. Dann können wir die einzelnen Dimensionen nicht separat approximieren und die Zahl der benötigten Stützstellen steigt potenziell mit der Zahl der Dimensionen. Für \mathcal{S}_{ab} sind das, mit Ausnahme der Strati mit Beteiligung von Quasivalenzbeiträgen, zwei Dimensionen, entsprechend (5.38).

Für Strati mit Beteiligung von Quasivalenzbeiträgen kommt nun eine Komplikation hinzu. Wir haben in Abschnitt 4.2.2 gesehen, dass die Strukturfunktionen f_{qQ} nicht dieselben Abhängigkeiten wie die anderen haben. Wir sehen uns noch einmal das Gluonsplitting an, das der Strukturfunktion f_{qQ} zugrunde liegt:

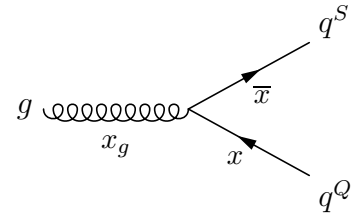


Abbildung 5.1.: *Gluonsplitting, aus dem ein Seequark und das zugehörige Quasivalenzquark resultiert.*

$$f_{qQ}(x; \bar{x}, \mu_S) = f_g(\bar{x} + x, \mu_F) \Big|_{\mu_F = \mu_S} P_{g \rightarrow q\bar{q}} \left(\frac{\bar{x}}{\bar{x} + x} \right) \quad (5.46)$$

μ_S und \bar{x} liegen zu Beginn nicht fest, sondern werden im Laufe des Algorithmus erzeugt. Sie müssen demnach, genau wie $s^{(n)}$, als Integrationsparameter mitgeführt

werden. Im schlimmsten Fall einer Wechselwirkung zwischen zwei Quasivalenzquarks müssten wir dann eine sechsdimensionale Funktion $\mathcal{S}_{55}(\widehat{p}_\perp^{(n)}; s^{(n)}, \bar{x}_1, \mu_1, \bar{x}_2, \mu_2)$ approximieren. Bei einem Gitter mit 100 Knoten in jeder Dimension wären das $100^6 = 10^{12}$ Funktionswerte, die ausgewertet und gespeichert werden müssten, was offensichtlich nicht praktikabel ist.

Um die Dimensionen der Quasivalenz-Strati zu reduzieren könnten wir die Splittingskalen z.B. mit $\mu_1^2 = \mu_2^2 = p_\perp^{(n)}$ dem Transversalimpuls gleichsetzen oder mit $\mu_1^2 = \mu_2^2 = p_\perp^{\min}$ auf einen festen Wert setzen. Wir gehen aber einen anderen Weg, der sich später noch auf andere Weise als hilfreich erweisen wird.

Wir machen den einfachen Ansatz

$$f_g(x, \mu_F) = \frac{(1-x)^n}{Nx^2} \quad (5.47)$$

mit dem Normierungsfaktor N , den wir durch (4.43) bzw. (4.44) festlegen (siehe Anhang A). Wir erhalten eine analytische Form für f_{qQ} , die nur von x und \bar{x} , nicht aber von $s^{(n)}$ abhängt. In Anhang B wird gezeigt, dass wir die $\sigma_{kl \rightarrow nm}^{\text{hard}}$ als Produkt einer Funktion in x_1, x_2, s und \widehat{p}_\perp mit einer Restfunktion R_c in $4\widehat{p}_\perp/s$ und s schreiben können. Der Index $c \in 1..5$ steht für den Wechselwirkungstyp aus Tabelle 5.1. Wir definieren die Zugehörigkeit einer Partonkombination $klmn$ zu einem Stratus ab und einem Diagrammtyp c mit dem Symbol:

$$\delta_{klmn}^{abc} := \begin{cases} 1 : k \in S_a, l \in S_b, abcd \in D_c \\ 0 : \text{sonst} \end{cases} \quad (5.48)$$

D_c steht für die Menge der Partonkombinationen vom Typ c . Für die drei Fälle für die Beteiligung von keinem, einem oder zwei Quasivalenzquarks ergeben sich die Ausdrücke:

$$S_{abc}(x_1, x_2, \widehat{p}_\perp; s^{(n)}) = \sum_{klmn} \delta_{klmn}^{abc} \frac{f_k(x_1, p_\perp) f_l(x_2, p_\perp)}{\sqrt{1 - \frac{4p_\perp}{x_1 x_2 s^{(n)}}}} R_c\left(\frac{4p_\perp}{s^{(n)}}, s^{(n)}\right) \quad (5.49)$$

$$S_{5bc}(x_1, x_2, \widehat{p}_\perp; s^{(n)}, \bar{x}_1) = \sum_{klmn} \delta_{klmn}^{5bc} \frac{f_k(x_1, \bar{x}_1) f_l(x_2, \widehat{p}_\perp)}{\sqrt{1 - \frac{4p_\perp}{x_1 x_2 s^{(n)}}}} R_c\left(\frac{4p_\perp}{s^{(n)}}, s^{(n)}\right) \quad (5.50)$$

$$S_{55c}(x_1, x_2, \widehat{p}_\perp; s^{(n)}, \bar{x}_1, \bar{x}_1) = \sum_{klmn} \delta_{klmn}^{55c} \frac{f_k(x_1, \bar{x}_1) f_l(x_2, \bar{x}_2)}{\sqrt{1 - \frac{4\widehat{p}_\perp}{x_1 x_2 s^{(n)}}}} R_c\left(\frac{4p_\perp}{s^{(n)}}, s^{(n)}\right) \quad (5.51)$$

Wir können also die integrierten Strati schreiben als:

$$\bar{S}_{ab}(\hat{p}_\perp; s^{(n)}) = \sum_c \bar{f}_{abc}(\hat{p}_\perp; s^{(n)}) R_c\left(\frac{4p_\perp}{s^{(n)}}, s^{(n)}\right) \quad (5.52)$$

$$\bar{S}_{5b}(\hat{p}_\perp; s^{(n)}, \bar{x}_1) = \sum_c \bar{f}_{5bc}(\hat{p}_\perp; s^{(n)}, \bar{x}_1) R_c\left(\frac{4p_\perp}{s^{(n)}}, s^{(n)}\right) \quad (5.53)$$

$$\bar{S}_{55}(\hat{p}_\perp; s^{(n)}, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = \sum_c \bar{f}_{55c}(\hat{p}_\perp; \bar{x}_1, \bar{x}_2) R_c\left(\frac{4p_\perp}{s^{(n)}}, s^{(n)}\right) \quad (5.54)$$

Dadurch müssen wir nur noch zwei- oder dreidimensionale Funktionen \bar{f}_{abc} approximieren. Bei 52 von Null verschiedenen Kombinationen von a, b und c und einer angenommenen Auflösung von 100 Stützstellen pro Dimension bedeutet das eine Anforderung von wenigen hundert Megabyte an Speicher. Durch Vermeiden von redundanten Kombinationen kann der Speicherbedarf sogar auf unter einhundert Megabyte reduziert werden. Damit sind diese Approximationen gegenwärtig durchaus auf gewöhnlichen Rechnern durchführbar.

5.3. Importance Sampling für die Impulsanteile

In Kapitel 4 haben wir bereits festgestellt, dass es unser Ziel ist, verschiedene Konzepte von Remnants implementieren und simulieren zu können. Im Allgemeinen wird es dafür notwendig sein, Remnant-Strukturfunktionen zu definieren, die von den herkömmlichen Definitionen aus Kapitel 3 abweichen. Wir haben mit den Quasivalenzquarks bereits ein Beispiel kennengelernt, bei denen nicht einmal die Argumente der Strukturfunktionen mit den gewöhnlichen übereinstimmen.

Durch die Einführung der Strati haben wir eine Möglichkeit gewonnen, später weitere Sorten von Strukturfunktionen hinzuzunehmen, ohne deren Eigenschaften jetzt kennen zu müssen. Dafür müssen wir lediglich bei der Implementierung darauf achten, dass die Strati dynamisch und polymorph angelegt und entfernt werden können. Dann können wir jederzeit weitere Strati für andere Sorten von Remnants definieren.

Für den weiteren Verlauf dieses Monte Carlo Generators bedeutet das eine weitere Herausforderung. Wir wollen nun die Impulsanteile x_1 und x_2 sowie die Teilchenflavor k, l, m und m generieren. Um diesen Prozess zu beschleunigen, möchten wir ein *Importance Sampling* verwenden, das so weit wie möglich auf unsere Wahrscheinlichkeitsfunktionen angepasst ist. Wenn wir das Sampling aber zu stark auf die oben definierten Strati anpassen, dann verlieren wir die Möglichkeit, später andere, strukturell verschiedene Strati hinzunehmen zu können.

In diesem Kapitel werden wir daher ein *Importance Sampling* für die Impulsanteile x_1 und x_2 beschreiben, das unabhängig von den Strukturfunktionen und damit

unabhängig von den Strati funktioniert.

5.3.1. Das Monte Carlo Prinzip

Wir gehen davon aus, dass der Transversalimpuls \hat{p}_\perp und das Stratum $\{a, b\}$ für die nächste Wechselwirkung generiert wurden und generieren nun noch die Flavor k, l, m, n und die Impulsanteile x_1 und x_2 . Dafür verwenden wir (5.34),

$$\bar{S}_{ab}(\hat{p}_\perp; s^{(n)}) = \int_{x_{\min}}^1 dx_1 \int_{x_{\min}}^1 dx_2 S_{ab}(x_1, x_2, \hat{p}_\perp; s^{(n)}). \quad (5.55)$$

S_{ab} ist eine Summe über bekannte Wirkungsquerschnitte, die wir leicht auswerten können, \bar{S}_{ab} ist das Differential von S_{ab} , das uns numerisch approximiert vorliegt und das wir ebenfalls leicht auswerten können. Wir schauen uns noch einmal das allgemeine Prinzip eines Monte Carlo Generators am Beispiel einer beliebigen zweistelligen Wahrscheinlichkeitsdichte f mit Majorante F für zwei Zufallsvariablen $z_1 \in (0, 1]$ und $z_2 \in (0, 1]$ an:

$$\int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 f(z_1, z_2) = 1 \quad (5.56)$$

$$0 < f(z_1, z_2) \leq F \quad \forall z_1 \in (0, 1) \quad \forall z_2 \in (0, 1) \quad (5.57)$$

Wir erhalten f -Verteilte Paare $\{z_1, z_2\}$, indem wir drei gleichverteilte Zufallszahlen z_1, z_2 und z_3 auf dem Einheitsintervall generieren

$$z_i \in (0, 1], z_i \text{ zufällig und gleichverteilt} \quad (5.58)$$

und die Wahrscheinlichkeitsdichte gegen die Majorante testen:

$$z_3 F \stackrel{?}{<} f(z_1, z_2) \quad (5.59)$$

Wir verwerfen das Paar $\{z_1, z_2\}$ und wiederholen das Verfahren, bis die Ungleichung erfüllt ist.

Um dieses Verfahren anwenden zu können, benötigen also noch eine Majorante von S_{ab} . Allerdings enthält der Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}$ für alle Strati einen gemeinsamen divergenten Faktor

$$\hat{\sigma}(x_1, x_2, p_\perp; s) \sim \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4p_\perp}{x_1 x_2 s}}} \quad (5.60)$$

sodass keine Majorante von S_{ab} existiert. Um die Wirkungsquerschnitte in eine beschränkte Form H zu überführen, machen wir eine Koordinatentransformation in ein besser geeignetes Koordinatensystem $\{h_1, h_2, h_3\}$:

$$h_1 := \frac{x_1 x_2 - h_3}{(1 - h_3)^{1/4}} \quad (5.61)$$

$$h_2 := \frac{1 + (x_2^2 - x_1^2)^{1/3}}{2} \quad (5.62)$$

$$h_3 := \frac{4\hat{p}_\perp}{\hat{s}^{(n)}} \quad (5.63)$$

$$x_1 = \sqrt{\sqrt{(h_1^4(1 - h_3) + h_3)^2 + (4(h_2 - 1/2)^3)^2} - 4(h_2 - 1/2)^3} \quad (5.64)$$

$$x_2 = \sqrt{\sqrt{(h_1^4(1 - h_3) + h_3)^2 + (4(h_2 - 1/2)^3)^2} + 4(h_2 - 1/2)^3} \quad (5.65)$$

$$\hat{p}_\perp = \frac{h_3 \hat{s}^{(n)}}{4} \quad (5.66)$$

$$H_{ab}(h_1, h_2, h_3, s^{(n)}) = S_{ab}(x_1, x_2, \hat{p}_\perp, s^{(n)}) \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_1} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} - \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \right) \quad (5.67)$$

Wir können die Wirkungsquerschnitte jetzt durch ein vielfaches der Mittelwerte \bar{S}_{ab} nach oben abschätzen:

$$s \bar{S}_{ab}(\hat{p}_\perp, s^{(n)}) > H_{ab}(h_1, h_2, h_3, s^{(n)}) \quad (5.68)$$

$s \in \mathbb{R}$ ist ein frei gewählter Faktor, sodass $s \bar{S}$ eine Majorante von H ist.

5.3.2. Generation der Feynmangraphen

Auf diese Weise können wir alle Impulse und Quantenzahlen auswerten, bloß ist die Effizienz der Ungleichung

$$z s \bar{S}_{ab}(\hat{p}_\perp, s^{(n)}) \stackrel{?}{<} H_{ab}(h_1, h_2, h_3, s^{(n)}) \quad z \in (0, 1], z \sim 1 \quad (5.69)$$

mit etwa 10^8 Versuchen pro Erfolg zu ineffizient. Wir möchten die transformierte Dichte H noch weiter glätten und schauen uns den x_1 und x_2 anhängigen Teil genauer an. Um zufällig generierte Kandidaten $\{z_1, z_2\}$ von den tatsächlichen Impulsen $\{x_1, x_2\}$ unterscheiden zu können, schreiben wir die Wahrscheinlichkeitsdichte in den Zufallsvariablen $\{z_1, z_2\}$:

$$S_{abc}(z_1, z_2, \hat{p}_\perp, s^{(n)}) dz_1 dz_2 = \sum_{klmn} \delta_{klmn}^{abc} \frac{f_k(z_1, s) f_l(z_2, s)}{\sqrt{1 - \frac{4p_\perp}{z_1 z_2 s}}} dz_1 dz_2 R_c(h_3(p_\perp, s), s) \quad (5.70)$$

Durch die Koordinatentransformationen

$$y_1(z_1; s, f_k) = \int_0^{z_1} dx f_k(x; s) \quad (5.71)$$

$$y_2(z_2; s, f_l) = \int_0^{z_2} dx f_l(x; s) \quad (5.72)$$

erhalten wir:

$$\frac{f_k(z_1, s) f_l(z_2, s)}{\sqrt{1 - \frac{4p_1}{z_1 z_2 s}}} dz_1 dz_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4p_1}{z_1(y_1; s, f_k) z_2(y_2; s, f_l) s}}} dy_1 dy_2 \quad (5.73)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4p_1}{y_1 y_2 s}}} dy_1 dy_2; \quad \text{mit: } \begin{cases} y_1 : f_k\text{-verteilt} \\ y_2 : f_l\text{-verteilt} \end{cases} \quad (5.74)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{h_3}{h_1 h_2}}} \left(\frac{\partial y_1}{\partial h_1} \frac{\partial y_2}{\partial h_2} - \frac{\partial y_1}{\partial h_2} \frac{\partial y_2}{\partial h_1} \right) dh_1 dh_2 \quad (5.75)$$

$$=: H_{\text{reg}}(h_1, h_2, h_3; s, f_k, f_l) \quad (5.76)$$

In (5.74) ersetzen wir in der Wurzel $z_i(y_i)$ durch y_i . Offensichtlich beschreiben (5.73) und (5.74) dadurch nicht dieselbe Funktion, sodass wir kein Gleichheitszeichen verwenden können. Diese Ersetzung ist so zu verstehen, dass wir $f_{k/l}(\cdot, s)$ -verteilte Zufallszahlen $\{y_1, y_2\}$ anstelle der gleichverteilten Zufallszahlen $\{z_1, z_2\}$ für unseren Monte Carlo Generator verwenden. Auf diese Weise beschreiben (5.73) und (5.74) die gleiche Verteilung.

Bei dem Übergang von $H_{ab}(h_1, h_2, h_3, s^{(n)}) \rightarrow H_{\text{reg}}(h_1, h_2, h_3; s, f_k, f_l)$ gehen wir von einer Menge von verschiedenen Funktionen, nämlich für jedes Stratum eine, zu genau einer Funktion H_{reg} über, die für alle Strati gleich ist, die aber in keinem direkten Zusammenhang zu den Funktionen H_{ab} steht. Mit dem zusätzlichen Wissen, welches Stratum $\{a, b\}$ und welchen Vertreter $\{l, k\}$ des Stratums wir verwenden, lassen sich aber beide Darstellungen eindeutig aufeinander abbilden.

Wir gewinnen dadurch die Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeitsdichte noch weiter zu glätten, indem wir für alle Strati ein gemeinsames *Importance Sampling* durchführen. Wir teilen dafür den Phasenraum $\{h_1, h_2, h_3\}$ in disjunkte Regionen r_j mit Flächeninhalt $a_j(h_3)$ in der $h_1 - h_2$ -Ebene. Wenn in jeder Region etwa gleich viele

Ereignisse $h^{(n)} = \{h_1^{(n)}, h_2^{(n)}, h_3^{(n)}\}$ liegen und die Änderung Δ_j

$$\Delta_j := \frac{\max_j (H_{\text{reg}}) - \min_j (H_{\text{reg}})}{\max_j (H_{\text{reg}}) + \min_j (H_{\text{reg}})} \approx 1 \quad (5.77)$$

$$\max_j (H_{\text{reg}}) := \max \{H_{\text{reg}}(h_1, h_2, h_3) \mid \{h_1, h_2, h_3\} \in r_j\} \quad (5.78)$$

$$\min_j (H_{\text{reg}}) := \min \{H_{\text{reg}}(h_1, h_2, h_3) \mid \{h_1, h_2, h_3\} \in r_j\} \quad (5.79)$$

der Wahrscheinlichkeitsdichte auf jeder Region etwa Eins ist, dann bekommen wir eine signifikante Beschleunigung des Generators, wenn wir statt (5.69) die mit dem Flächeninhalt $a_j(h_3)$ gewichtete Gleichung verwenden:

$$z_s \bar{S}_{ab}(\hat{p}_\perp, s^{(n)}) < a_j(h_3) H_{\text{reg}}(h_1, h_2, h_3; s^{(n)}, f_a, f_b) R_{ab}(h_3, s) \quad (5.80)$$

Die vollständige Strategie zur Generierung des Feynmandiagramms und der Impulsanteile $\{y_1, y_2\}$ sieht nun so aus:

1. Wir wählen zufällig das i -te Feynmandiagramm aus dem Stratus $\{a, b\}$.
2. Wir generieren zwei gleichverteilte Zufallszahlen $\{z_1, z_2\}$.
3. Wir transformieren $\{z_1, z_2\}$ mit (5.71) und (5.72) nach $\{y_1, y_2\}$
4. und transformieren $\{y_1, y_2, p_\perp\}$ nach $\{h_1, h_2, h_3\}$.
5. Wir wählen zufällig eine Region r_j mit Flächeninhalt a_j aus.
6. Wenn (5.80) nicht erfüllt ist, dann beginnen wir wieder bei 1.
7. Sonst sind das Feynmandiagramm durch $\{a, b, i\}$ und die Impulse durch $\{y_1, y_2, p_\perp\}$ gegeben.

Wir haben nun also erreicht, dass der Monte Carlo Generator für die Impulsanteile in zwei vollständig unabhängige Teile für die Strukturfunktionen und für eine gemeinsame Restfunktion faktorisiert wird. Dadurch erhalten wir die Möglichkeit, ein generisches Rahmenwerk für die Simulation von Mehrfachstreuungen, unabhängig von der Definition der Remnants zu implementieren.

5.4. Der simultane Algorithmus

Zwar ist es möglich, den Algorithmus so zu verwenden, wie er in den letzten Abschnitten beschrieben wurde. Wegen der in Kapitel 4.3 beschriebenen inkonsistenten

Faktorisierungsskalen sind mehrfache Wechselwirkungen aber nur in Kombination mit einer Beschreibung von *Initial State Radiation* sinnvoll. Wir schauen uns daher einen Algorithmus an, der mehrfache Wechselwirkungen simultan mit der *Analytic Parton Shower*⁶ Erweiterung von WHIZARD generiert. Der *Analytic Parton Shower* übernimmt dabei die Generierung der *Initial State Radiation*.

5.4.1. Definition der Skalen

Der simultane Algorithmus ist möglich, weil beide Algorithmen eine entscheidende Gemeinsamkeit haben, sie starten bei der Wechselwirkungsskala der initialen Wechselwirkung und entwickeln die Wechselwirkungsskala schrittweise zu kleineren Skalen. Beide Algorithmen gehen dabei im Prinzip gleich vor, sie werten die Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}_{\text{hard}}(p_{\perp})$ bzw. $\mathcal{P}_{\text{ISR}}(t)$ aus, dass die nächstniedrigere harte Skala den Wert p_{\perp} annimmt bzw. die nächstniedrigere Showerskala den Wert t annimmt.

Da die harte Skala für $2 \rightarrow 2$ Wechselwirkungen definiert ist, die Showerskala aber für $1 \rightarrow 2$ Wechselwirkungen definiert ist, müssen sich die Definitionen notwendigerweise unterscheiden. Wichtiger als die Wechselwirkungsskalen ist aber die gemeinsame Faktorisierungsskala μ_F^2 , die von jedem der beiden Algorithmen in jedem Schritt der jeweiligen Wechselwirkungsskala gleichgesetzt wird. Streng genommen liegt also keine gemeinsame Entwicklung der Wechselwirkungsskala vor, sondern eine gemeinsame Entwicklung der Faktorisierungsskala.

Im Folgenden führen wir Parameter nicht mehr in den Argumenten mit, da sie für die Beschreibung des simultanen Algorithmus nicht relevant sind. Die Wahrscheinlichkeit für ein Branching \mathcal{P}_{ISR} bekommt hingegen einen zusätzlichen Index (n) , weil der Showeralgorithmus hier ebenfalls die Remnant-Strukturfunktionen $f^{(n)}$ verwendet. Die Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}_{\text{next,sim}}^{(n)}$ im simultanen Algorithmus dafür, dass die nächstniedrigere Skala den Wert p annimmt, ist dann gegeben durch:

$$\mathcal{P}_{\text{next,sim}}^{(n)}(p, p^{(n-1)}) = \exp \left[- \int_p^{p^{(n-1)}} dp' \left(\frac{d\mathcal{P}_{\text{hard}}^{(n)}(p')}{dp'} + \frac{d\mathcal{P}_{\text{ISR}}^{(n)}(p')}{dp'} \right) \right] \quad (5.81)$$

Die Algorithmen für harte Wechselwirkungen und Showerbranchings liegen bereits als separate Erweiterungen für WHIZARD vor, deswegen ist es nicht zweckmäßig (5.81) auszuwerten. Stattdessen ruft WHIZARD die bestehenden Methoden für $\mathcal{P}_{\text{next,hard}}^{(n)}$ und $\mathcal{P}_{\text{next,ISR}}^{(n)}$ auf und legt die nächste Skala auf das Maximum der beiden generierten

⁶Kilian u. a. (2011a)

Skalen fest:

$$\mathcal{P}_{\text{next,hard}}^{(n)}(p_{\perp}, p_{\perp}^{(n-1)}) = \exp \left[- \int_{p_{\perp}}^{p_{\perp}^{(n-1)}} dp'_{\perp} \frac{d\mathcal{P}_{\text{hard}}^{(n)}(p'_{\perp})}{dp'_{\perp}} \right] \quad (5.82)$$

$$\mathcal{P}_{\text{next,ISR}}^{(n)}(t, t^{(n-1)}) = \exp \left[- \int_t^{t^{(n-1)}} dt' \frac{d\mathcal{P}_{\text{ISR}}^{(n)}(t')}{dt'} \right] \quad (5.83)$$

$$p^{(n)} := \max \{ p_{\perp}^{(n)}, t^{(n)} \} \quad (5.84)$$

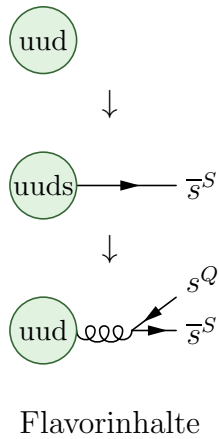
5.4.2. Der Algorithmus

In Abbildung 5.2 ist der vollständige Verlauf des simultanen Algorithmus als UML-Aktivitätsdiagramm dargestellt. Die Schritte sind:

1. Die erste, härteste Wechselwirkung wird mit dem WHIZARD Generator für beliebige Wechselwirkungen und nicht mit dem Algorithmus für mehrfache Wechselwirkungen generiert. Es werden aber die Remnant Strukturfunktionen verwendet.
2. Das Modul für die Remnant Strukturfunktionen passt die Remnants entsprechend der ersten Wechselwirkung an und stellt dem *Initial State Radiation* (ISR)- und dem *Multiple Parton Interaction* (MPI)-Algorithmus die Funktionen $f^{(1)}$ zur Verfügung. Die gemeinsame Faktorisierungsskala wird auf die invariante Masse der partonischen Wechselwirkung gesetzt. $\mu_F^2 \rightarrow \hat{s}$
3. MPI- und ISR-Algorithmus generieren unabhängig voneinander die nächste Wechselwirkungsskala $p_{\perp} \leq \mu_F^2$ bzw. $t \leq \mu_F^2$.
4. Wenn keine der beiden Skalen über der jeweiligen unteren Grenze $p_{\perp\text{min}}$ bzw. t_{min} liegt, dann wird der simultane Algorithmus beendet.
5. Sonst wird die gemeinsame Faktorisierungsskala auf die größere Skala $\mu_F \rightarrow \max\{p_{\perp}^{(n)}, t^{(n)}\}$ gesetzt.
6. Die Methode zur Generierung einer Wechselwirkung desjenigen Algorithmus, der die größere Skala generiert hat, wird aufgerufen. Die Skala der Wechselwirkung liegt dabei fest auf dem zuvor generierten Wert.
7. Die Remnant-Strukturfunktionen werden wieder aktualisiert und der simultane Algorithmus wird bei 3. fortgesetzt

5.4.3. Remnant

Durch eine Wechselwirkung können Flavorinhalt und Impuls der Remnants verändert werden. Während durch die Vorschrift aus Kapitel 4.2 nur Partonen aus den Remnants entnommen werden, können in der simultanen Beschreibung auch Partonen ausgetauscht werden. Um das zu verstehen schauen wir uns ein Beispiel an:

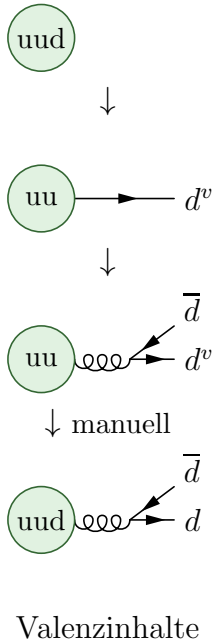


Nehmen wir an, dass einem Proton in der ersten Iteration ein \bar{s} -Quark mit Impulsanteil x_1 entnommen wird. Dem Remnant wird dann die Flavorsumme $uuds$ zugeordnet, damit Remnant und partonischer Endzustand die gleiche Flavorsumme uud wie das Proton haben. Wir erreichen diese Zuordnung, indem wir ein s -Quasivalenzquark in den Remnant aufnehmen.

Wird nun in der zweiten Iteration durch den Showeralgorithmus aufgelöst, dass das \bar{s} Quark der vorigen Iteration aus einem $g \rightarrow s\bar{s}$ Splitting stammt, wird der Showeralgorithmus dieses Splitting dem Event hinzufügen. Die Flavorerhaltung ist damit bereits durch den Showeralgorithmus gewährleistet. Entsprechend müssen wir auch dem Remnant wieder die Protonflavorsumme uud zuweisen. Dafür haben wir zwei verschiedene Möglichkeiten. Ei-

nerseits können wir das s -Quark wieder aus dem Remnant entfernen indem wir annehmen, dass es mit dem neu generierten s -Quark identisch ist. Andererseits können wir aber auch ein weiteres \bar{s} -Quark in den Remnant aufnehmen.

Nun haben wir in der ersten Iteration explizit angenommen, dass das s - und das \bar{s} -Quark aus einem gemeinsamen Gluonsplitting stammen. Wir entscheiden uns daher für die erste Möglichkeit und identifizieren das s -Quark im partonischen Endzustand mit genau dem s -Quark, dass wir in der ersten Iteration hinzugenommen haben. Das gilt auch dann, wenn wir in verschiedenen Iterationen bereits mehrere s -Quarks hinzugenommen haben, wir merken uns also von Vornherein die Zugehörigkeit beider Quarks.



Etwas weniger offensichtlich ist die Situation, wenn in der ersten Iteration ein Valenzquark d entfernt wird und in der zweiten ein $g \rightarrow d\bar{d}$ Splitting generiert wird. Nach der zweiten Iteration erhalten wir auf diese Weise ein Bild, in dem ein Remnant mit Valenzinhalt uu ein Gluon emittiert, das daraufhin in ein \bar{d} -Quark und ein Valenz- d -Quark zerfällt. Das Valenzquark entsteht also durch eine perturbativ beschriebene Wechselwirkung.

Das Problem ist darin begründet, dass wir festlegen, ob ein Quark ein Valenzquark oder ein Seequark ist. Tatsächlich gibt es keinen Unterschied zwischen Valenz- und Seequarks sondern nur zwischen Valenz- und See-Strukturfunktionen. In dem Algorithmus ohne Partonshower führt das zu keinem Problem, weil wir diese Festlegung niemals ändern müssen. Wir können diese Unterscheidung also konsistent durchführen, unabhängig davon, ob sie physikalisch sinnvoll ist.

Erst durch den Shower tritt das Problem auf, weil sich hier der Eingangszustand nachträglich ändern kann. Bei dem Shower ohne mehrfache Wechselwirkung tritt das

Problem ebenfalls nicht auf, weil dann nicht zwischen Valenz- und Seequarks unterschieden wird.

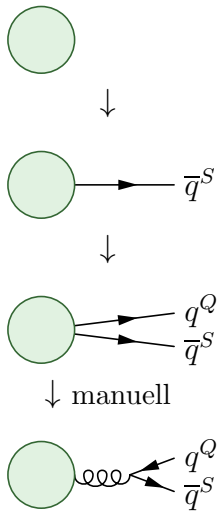
Daraus ergeben sich auch die naheliegenden Lösungsansätze. Zum einen kann man per Veto solche Zustände verwerfen, die zu inkonsistenten Definitionen von Valenzquarks führen, zum anderen kann man die strikte Trennung zwischen Valenz- und Seequarks aufgeben. Letzteres kann man z.B. umsetzen, indem man gemischte Zustände einführt:

$$|q, x\rangle = C_{q^S}(x, Q^2) |q^S, x\rangle + C_{q^V}(x, Q^2) |q^V, x\rangle + C_{q^Q}(x, Q^2) |q^Q, x\rangle \quad (5.85)$$

$$C_a^2 = \frac{f_a(x, Q^2)}{\sum_{b \in \{q^S, q^V, q^Q\}} f_b(x, Q^2)} \quad (5.86)$$

In dem oben beschriebenen Fall könnten wir auf diese Weise verbieten, dass Valenzquarks durch Gluonsplittings entstehen, ohne das gesamte Ereignis verwerfen zu müssen, indem wir die Wahrscheinlichkeit für ein solches Splitting mit $C_{d^S}^2 + C_{d^Q}^2$ multiplizieren.

Gegenwärtig ist nur die einfachste aller Möglichkeiten die Flavorsumme des Remnants zu korrigieren implementiert, nämlich dass der Valenzbeitrag f_{d^V} wiederhergestellt wird. In unserem Beispiel hätte der Remnant nach der zweiten Wechselwirkung also wieder die Strukturfunktion des Protons mit Valenz- und Flavorsumme uud .



Ein letzter Sonderfall tritt ein, wenn ein Seequark \bar{q} an einer harten Wechselwirkung teilnimmt und das zugeordnete Quasivalenzquark q^Q an einer späteren, harten Wechselwirkung teilnimmt, ohne dass das entsprechende Gluonsplitting zwischendurch via *Initial State Radiation* generiert wurde. Beide Teilchen \bar{q} und q^Q sind dann aktive Showerteilchen. Der Showeralgorithmus versucht also, Showerereignisse für diese Teilchen zu generieren. Da durch den *MPI*-Algorithmus bereits alle Quantenzahlen der Showerteilchen festgelegt sind, sind auch alle Eigenschaften dieses Showerereignisses festgelegt.

Aus praktischen Gründen entfernen wir beide Partonen \bar{q} und q^Q sofort aus der Liste der aktiven Showerteilchen und ersetzen sie durch ein passendes Gluon. Deshalb können in Tabelle 5.3 die Fälle 7 und 11 nicht auftreten.

5.5. Fazit

In Kapitel 4 haben wir gesehen, dass uns der Skalenentwicklungsansatz eine saubere Trennung zwischen einem physikalisch gut begründeten Rahmenwerk und ad hoc Annahmen zur Faktorisierung mehrfacher Streuungen erlaubt. In diesem Kapitel haben wir eine effiziente Implementierung beschrieben, die diese Trennung aufrecht erhält, sodass jederzeit weitere Beschreibungen von Remnant-Strukturfunktionen hinzugefügt werden können.

Weiterhin haben wir eine Möglichkeit beschrieben, wie alle auftretenden Integrationen zur Laufzeit des Generators vermieden werden können, indem wir integrierte Matrixelemente verwenden. Dabei haben wir gesehen, dass wir durch ein *Stratified Sampling* der Wirkungsquerschnitte die Dimensionen der Strati soweit reduzieren können, dass eine interne Darstellung mit einem Speicherwand von einigen hundert MB auf einem gewöhnlichen Desktopsystem möglich ist.

Nr. Wechselwirkung : Änderung des Remnants




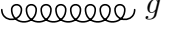
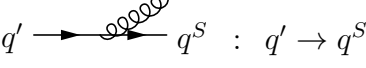
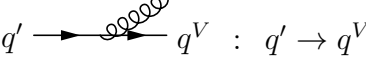
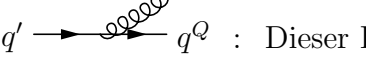
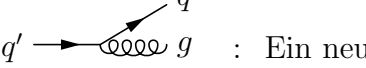
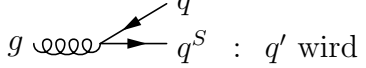
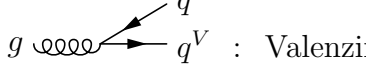
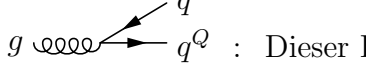
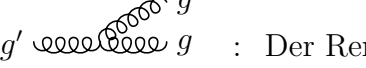
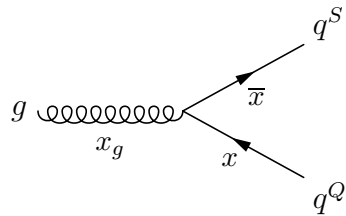
- 1  q^S : Ein Quasivalenzquark \bar{q}^Q wird hinzugenommen.
- 2  q^V : Der Valenzinhalt für q um eins reduziert.
- 3  q^Q : Das Quasivalenzquark q^Q wird entfernt.
- 4  g : Der Remnant wird nicht verändert.
- 5  $q' \rightarrow q^S$: $q' \rightarrow q^S$
- 6  $q' \rightarrow q^V$: $q' \rightarrow q^V$
- 7  $q' \rightarrow q^Q$: Dieser Fall tritt nicht auf.
- 8  $q' \rightarrow q$: Ein neues Quasivalenzquark \bar{q}^Q wird hinzugenommen.
- 9  $g \rightarrow q^S$: q' wird aus dem Remnant entfernt.
- 10  $g \rightarrow q^V$: Valenzinhalt von q^V wird um eins erhöht.
- 11  $g \rightarrow q^Q$: Dieser Fall tritt nicht auf.
- 12  $g' \rightarrow g$: Der Remnant wird nicht verändert.

Tabelle 5.3.: Änderung des Remnants bei einer Wechselwirkung. Einträge 1-4 sind harte Wechselwirkungen mit dem eingetragenen Partonen. Einträge 5-12 sind Shower Branchings. Die Teilchen im Eingangszustand werden bei der aktuellen Faktorisierungsskala emittiert, die unteren Teilchen im Endzustand werden bei einer höheren Faktorisierungsskala emittiert. In diesem Sinne wird z.B. bei Nummer 8 das Gluon durch das Quark q' ersetzt.

A. Quasivalenzverteilung

Wir nehmen eine Verteilung



$$f_{q^Q}(x; \bar{x}) = f_g(x + \bar{x}) * P_{g \rightarrow q\bar{q}}\left(\frac{\bar{x}}{x + \bar{x}}\right) \quad (\text{A.1})$$

mit

$$f_g(y) = \frac{1}{N} \frac{(1-y)^n}{y^2} \quad (\text{A.2})$$

$$P_{g \rightarrow q\bar{q}}(z) = \frac{N_f}{2} (z^2 + (1-z)^2) \quad (\text{A.3})$$

an. n ist ein Parameter für die Gluonfunktion, N_f ist die Zahl der aktiven Quarkflavor und N ist ein Normierungsfaktor mit:

$$N = \int_1^{\bar{x}} dx f_{q^Q}(x, \bar{x}) \quad (\text{A.4})$$

Wir erhalten:

$$f_g(\bar{x}) = \frac{1}{N} \frac{(N_f(x + \bar{x} - 1)4(x^2 + \bar{x}^2))}{2(x + \bar{x})^4} \quad (\text{A.5})$$

$$N = \frac{N_f(\bar{x}(4\bar{x}^3 + 6\bar{x}^2 + 36\bar{x} - 12(\bar{x} + 1)(2\bar{x} + 1)\log(2) + 3) + 1)}{6\bar{x}} \quad (\text{A.6})$$

B. Berechnung der Wirkungsquerschnitte

Wir führen die Integrationen in (5.10) von Innen nach Außen aus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \sigma_{kl \rightarrow mn}^{\text{hard}}(x_1, x_2, \hat{p}_\perp; s)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial \hat{p}_\perp} &= f_k(x_1, \hat{p}_\perp) f_l(x_2, \hat{p}_\perp) \cdot \\ &\cdot \int d\hat{s} \int d\hat{t} \int d\hat{u} \frac{\partial^3 \hat{\sigma}_{kl \rightarrow mn}(\hat{s}, \hat{t}, \hat{u})}{\partial \hat{s} \partial \hat{t} \partial \hat{u}} \delta_{\hat{u}}(\hat{s} + \hat{t} + \hat{u}) \delta_{\hat{t}}\left(\hat{p}_\perp - \frac{\hat{t} \hat{u}}{\hat{s}}\right) \delta_{\hat{s}}(\hat{s} - x_1 x_2 s) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Die Integration über \hat{u} liefert eine Ersetzung $\hat{u} \rightarrow -\hat{t} - \hat{s}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \sigma_{kl \rightarrow mn}^{\text{hard}}(x_1, x_2, \hat{p}_\perp; s)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial \hat{p}_\perp} &= f_k(x_1, \hat{p}_\perp) f_l(x_2, \hat{p}_\perp) \cdot \\ &\cdot \int d\hat{s} \int d\hat{t} \mathcal{M}(\hat{s}, \hat{t}, -\hat{t} - \hat{s}) \delta_{\hat{t}}\left(\hat{p}_\perp + \frac{(\hat{t}^2 + \hat{t}\hat{s})}{\hat{s}}\right) \delta_{\hat{s}}(\hat{s} - x_1 x_2 s) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Das Argument von $\delta_{\hat{t}}$ hat die beiden Nullstellen

$$\hat{t}_1 = \frac{1}{2} \left(-\hat{s} - \sqrt{-4\hat{p}_\perp \hat{s} + \hat{s}^2} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$\hat{t}_2 = \frac{1}{2} \left(-\hat{s} + \sqrt{-4\hat{p}_\perp \hat{s} + \hat{s}^2} \right) \quad (\text{B.4})$$

und das Differential:

$$D(\hat{t}, \hat{s}) = 1 + \frac{2\hat{t}}{\hat{s}} \quad (\text{B.5})$$

Wir erhalten damit:

$$\frac{\partial^3 \sigma_{kl \rightarrow mn}^{\text{hard}}(x_1, x_2, \widehat{p}_\perp; s)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial \widehat{p}_\perp} = f_k(x_1, \widehat{p}_\perp) f_l(x_2, \widehat{p}_\perp) \cdot \sum_{\widehat{t} \in \{\widehat{t}_1, \widehat{t}_2\}} \int d\widehat{s} \frac{\mathcal{M}(\widehat{s}, \widehat{t}, -\widehat{t} - \widehat{s})}{|D(\widehat{t}, \widehat{s})|} \delta_{\widehat{s}}(\widehat{s} - x_1 x_2 s) \quad (\text{B.6})$$

Schließlich führt die Integration über \widehat{s} zu der Ersetzung $\widehat{s} \rightarrow x_1 x_2 s$:

$$\frac{\partial^3 \sigma_{kl \rightarrow mn}^{\text{hard}}(x_1, x_2, \widehat{p}_\perp; s)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial \widehat{p}_\perp} = f_k(x_1, \widehat{p}_\perp) f_l(x_2, \widehat{p}_\perp) \cdot \sum_{\widehat{t} \in \{\widehat{t}_1, \widehat{t}_2\}} \frac{\mathcal{M}(x_1 x_2 s, \widehat{t}, -\widehat{t} - x_1 x_2 s)}{|D(\widehat{t}, x_1 x_2 s)|} \quad (\text{B.7})$$

Wenden wir diese Operationen auf die Matrixelemente in Tabelle 5.1 an, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1/F &= & 2 h_3^2 & -24 h_3 & +32 \\ \mathcal{M}_2/F &= & 2 h_3^2 & -24 h_3 & +32 \\ \mathcal{M}_3/F &= & 4 h_3^2 & -\frac{160}{3} h_3 & +64 \\ \mathcal{M}_4/F &= & -h_3^3 & +2 h_3^2 & \\ \mathcal{M}_5/F &= & -h_3^3 & +2 h_3^2 & -\frac{64}{3} h_3 & +32 \\ \mathcal{M}_6/F &= & 6 h_3^3 & -\frac{100}{3} h_3^2 & +\frac{128}{3} h_3 & \\ \mathcal{M}_7/F &= & \frac{27}{32} h_3^3 & -\frac{75}{16} h_3^2 & +6 h_3 & \\ \mathcal{M}_8/F &= & & -\frac{3}{2} h_3^2 & +26 h_3 & -120 & +128 h_3^{-1} \\ \mathcal{M}_9/F &= & -\frac{81}{16} h_3^3 & +\frac{243}{4} h_3^2 & -243 h_3 & +324 \end{aligned}$$

mit

$$F = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\sigma_{\text{nd}} \widehat{s}^2 h_3^2 \sqrt{1 - \frac{h_3}{x_1 x_2}}} \quad (\text{B.8})$$

$$h_3 = \frac{4\widehat{p}_\perp}{s} \quad (\text{B.9})$$

Literaturverzeichnis

- [Bahr u. a. 2008] BAHR, M. ; GIESEKE, S. ; GIGG, M.A. ; GRELLSCHEID, D. ; HAMILTON, K. u. a.: Herwig++ Physics and Manual. In: *Eur.Phys.J.* C58 (2008), S. 639–707
- [Bahr u. a. 2009] BAHR, Manuel ; BUTTERWORTH, Jonathan M. ; SEYMOUR, Michael H.: The Underlying Event and the Total Cross Section from Tevatron to the LHC. In: *JHEP* 0901 (2009), S. 065
- [Bandurin u. a. 2011] BANDURIN, Dmitry ; GOLOVANOV, Georgy ; SKACHKOV, Nikolai: Double parton interactions as a background to associated HW production at the Tevatron. In: *JHEP* 1104 (2011), S. 054
- [Berger u. a. 2010] BERGER, Edmond L. ; JACKSON, C.B. ; SHAUGHNESSY, Gabe: Characteristics and Estimates of Double Parton Scattering at the Large Hadron Collider. In: *Phys.Rev.* D81 (2010), S. 014014
- [Bjorken und Paschos 1969] BJORKEN, J. D. ; PASCHOS, E. A.: Inelastic Electron-Proton and γ -Proton Scattering and the Structure of the Nucleon. In: *Physical Review* 185 (1969), September, S. 1975–1982
- [Brock u. a. 1995] BROCK, Raymond u. a.: Handbook of perturbative QCD: Version 1.0. In: *Rev.Mod.Phys.* 67 (1995), S. 157–248
- [Butterworth u. a. 1996] BUTTERWORTH, J.M. ; FORSHAW, Jeffrey R. ; SEYMOUR, M.H.: Multiparton interactions in photoproduction at HERA. In: *Z.Phys.* C72 (1996), S. 637–646
- [Collins u. a. 1989] COLLINS, J.C. ; SOPER, D.E. ; STERMAN, G. ; MUELLER, A.H. (Hrsg.): *Perturbative Quantum Chromodynamics*. World Scientific, Singapore, 1989
- [Corke 2009] CORKE, Richard: Multiple Interactions in Pythia 8. (2009), S. 249–259

-
- [Corke und Sjostrand 2010] CORKE, Richard ; SJOSTRAND, Torbjorn: Multiparton Interactions and Rescattering. In: *JHEP* 1001 (2010), S. 035
- [De Roeck und Thorne 2011] DE ROECK, A. ; THORNE, R. S.: Structure Functions. In: *Prog. Part. Nucl. Phys.* 66 (2011), S. 727–781
- [Delamotte 2004] DELAMOTTE, Bertrand: A hint of renormalization. In: *Am. J. Phys.* 72 (2004), S. 170–184
- [Dremin und Nechitailo 2011] DREMIN, I.M. ; NECHITAILO, V.A.: Soft multiple parton interactions as seen in multiplicity distributions at Tevatron and LHC. In: *Phys.Rev.* D84 (2011), S. 034026
- [Fritzsch u. a. 1973] FRITZSCH, H. ; GELL-MANN, Murray ; LEUTWYLER, H.: Advantages of the Color Octet Gluon Picture. In: *Phys.Lett.* B47 (1973), S. 365–368. – Introduces the term 'color'
- [Gaunt und Stirling 2010] GAUNT, Jonathan R. ; STIRLING, W.James: Double Parton Distributions Incorporating Perturbative QCD Evolution and Momentum and Quark Number Sum Rules. In: *JHEP* 1003 (2010), S. 005
- [Gieseke u. a. 2011] GIESEKE, S. ; ROHR, C.A. ; SIODMOK, A.: Multiple Partonic Interaction Developments in Herwig++. (2011)
- [Gleisberg u. a. 2009] GLEISBERG, T. u. a.: Event generation with SHERPA 1.1. In: *JHEP* 02 (2009), S. 007
- [Greenberg 2010] GREENBERG, O.W.: Quarks and quantum statistics. In: *PoS HRMS2010* (2010), S. 024
- [Kilian u. a. 2011a] KILIAN, W. ; REUTER, J. ; SCHMIDT, S. ; WIESLER, D.: An Analytic Initial-State Parton Shower. (2011)
- [Kilian u. a. 2011b] KILIAN, Wolfgang ; OHL, Thorsten ; REUTER, Jurgen: WHIZARD: Simulating Multi-Particle Processes at LHC and ILC. In: *Eur. Phys. J.* C71 (2011), S. 1742
- [Moretti u. a. 2001] MORETTI, Mauro ; OHL, Thorsten ; REUTER, Jurgen: O'Mega: An optimizing matrix element generator. (2001)
- [Pich 1999] PICH, Antonio: Aspects of quantum chromodynamics. (1999)
- [Sjostrand und Skands 2005] SJOSTRAND, T. ; SKANDS, Peter Z.: Transverse-momentum-ordered showers and interleaved multiple interactions. In: *Eur.Phys.J.* C39 (2005), S. 129–154

- [Sjostrand u. a. 2006] SJOSTRAND, Torbjorn ; MRENNNA, Stephen ; SKANDS, Peter Z.: PYTHIA 6.4 Physics and Manual. In: *JHEP* 0605 (2006), S. 026
- [Warburton 2009] WARBURTON, Andreas: QCD Results from the Fermilab Tevatron proton-antiproton Collider. In: *PoS HCP2009* (2009), S. 013
- [Wick 1950] WICK, G. C.: The Evaluation of the Collision Matrix. In: *Phys. Rev.* 80 (1950), Oct, S. 268–272. – URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.80.268>
- [Yang und Mills 1954] YANG, Chen-Ning ; MILLS, Robert L.: Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. In: *Phys. Rev.* 96 (1954), S. 191–195

Danksagung

Ich danke meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Wolfgang Kilian, für die Betreuung meiner Dissertation und die Anregungen ohne die diese Dissertation sicher nicht möglich gewesen wäre. Ebenfalls danke ich Herrn Prof. Dr. Thorsten Ohl dafür, dass er sich als Gutachter zur Verfügung gestellt hat.

Außerdem danke ich den Mitarbeitern des WHIZARD Projekts dafür, dass ich Teil einer Arbeitsgruppe sein durfte, in der ich mich von der ersten Sekunde an willkommen fühlte und in der auch kleine Beiträge wahrgenommen wurden, ohne das gemeinsame Ziel aus den Augen zu verlieren. Es hat Spaß gemacht, einen Beitrag zu einem größeren Werk zu leisten.

Mein Dank gilt auch meinen Kollegen aus der theoretischen Physik der Universität Siegen für die vielen offenherzigen Begegnungen mit den unterschiedlichsten Persönlichkeiten und den anregenden Gesprächen die wir geführt haben. An die Zeit in Siegen werde ich mich noch oft und gerne erinnern.

Weiterhin danke ich den Entwicklern von NAG Fortran und gfortran für den immer freundlichen Kontakt und dafür, dass sie die jeweiligen Fortran Compiler zu meinem Code kompatibel gemacht haben.

Ich danke meinen Eltern und Schwiegereltern dafür, dass sie uns mit Rat und Tat zur Seite standen, wenn wir Hilfe mit unseren eigenen Kindern brauchten. Ohne diese Hilfe hätte ich nicht den Kopf und oftmals nicht einmal die Hand frei gehabt, um meinem Studium nachzugehen.

Einen ganz besonderen Dank möchte ich meiner Frau Qian aussprechen, die mich während meines gesamten Promotionsstudiums unterstützt und zuweilen eigene Bedürfnisse zurückgestellt hat, um mir die Promotion zu ermöglichen.