

# Hadronische Matrixelemente mit schweren Quarks aus QCD-Summenregeln

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors  
der Naturwissenschaften

vorgelegt von

**M.Sc. Patrick Gelhausen**

eingereicht bei der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät  
der Universität Siegen

Siegen  
Juni 2015

Gutachter:

- Prof. Dr. Alexander Khodjamirian
- Prof. Dr. Alexei Pivovarov

Datum der Disputation: 17.07.2015

Prüfungskommission:

- Prof. Dr. Alexander Khodjamirian (Vorsitz)
- Prof. Dr. Alexei Pivovarov
- Prof. Dr. Thomas Mannel
- Prof. Dr. Markus Risse

# Abstract

The search for new physics in weak decays is an important subject of modern Particle Physics. At accelerators, e.g. at the Large Hadron Collider (LHC) at CERN, exclusive decays of heavy hadrons with various final states are extensively studied. In theory, these decays are parameterized by hadronic matrix elements which involve nonperturbative quark-gluon dynamics. The calculation of these matrix elements using the technique of QCD sum rules is the main subject of this thesis.

After a general introduction and a discussion of the sum rule technique, the first part of this work is focussed on the derivation and evaluation of various sum rules for a certain kind of hadronic matrix elements called *decay constants*. In this analysis, for the first time next to leading order corrections to the quark condensate contributions for vector currents are taken into account. In addition to a detailed discussion of uncertainties, the results obtained using the sum rule technique are found to be in good agreement with lattice QCD results.

Furthermore, the previously used QCD sum rules are modified to calculate the decay constants for the first radial excitation of the considered mesons. In the modified sum rule, the hadronic representation of the correlation function is extended to also include the corresponding resonance. Notably, a new fitting procedure is adopted to fix the duality threshold parameter. Despite large uncertainties in the meson masses for the radial excitations, this new procedure provides a satisfactory, and for some channels the first, estimate of the decay constants.

In the last part of the thesis, QCD light-cone sum rules for the calculation of the strong coupling between three mesons, two heavy ones with vector and pseudoscalar spin parity and a pion, are derived. The major purpose of this section is the update and reorganization of the leading order contributions for a smooth implementation in the future next to leading order analysis. Furthermore, the results from the previous sections are used, to provide a first estimate for strong couplings with radial excitations.



# Zusammenfassung

Die Suche nach neuer Physik in schwachen Zerfällen ist ein wichtiges Forschungsgebiet der modernen Teilchenphysik. Viele Experimente an großen Teilchenbeschleunigern, zum Beispiel dem Large Hadron Collider (LHC) am CERN, beschäftigen sich intensiv mit der Untersuchung verschiedener exklusiver Zerfälle von schweren Hadronen. In der Theorie werden solche Zerfälle mit hadronischen Matrixelementen parametrisiert, welche die nichtperturbative Quark-Gluon-Dynamik eines Prozesses beschreiben. Die Berechnung solcher Matrixelemente mit der Technik der QCD-Summenregeln ist zentraler Gegenstand dieser Arbeit.

Nach einer allgemeinen Einführung und der Erläuterung der Summenregelmethodik beschäftigt sich der erste Teil dieser Arbeit mit der Herleitung und Auswertung von verschiedenen Summenregeln für eine bestimmte Klasse von hadronischen Matrixelementen, den *Zerfallskonstanten*. Eine besondere Rolle spielen dabei die erstmals für Vektorströme einbezogenen Korrekturen für das Quarkkondensat in nächstführender Ordnung. Neben einer ausführlichen Diskussion der Unsicherheiten umfasst die Analyse auch einen Vergleich mit Gitter-QCD-Resultaten. Die Ergebnisse dieser Arbeit weisen mit diesen eine gute Übereinstimmung auf.

Im Anschluss werden die hergeleiteten QCD-Summenregeln modifiziert, um die Zerfallskonstanten für die ersten radialen Anregungen der zuvor untersuchten Mesonen zu bestimmen. Dabei wird die hadronische Darstellung der Korrelationsfunktion in der modifizierten Summenregel um die entsprechende Resonanz erweitert. Zur Fixierung des Grenzparameters wird eine neue Anpassungsprozedur verwendet, welche trotz einer vergleichsweise großen Unsicherheit in den Mesonmassen der radialen Anregungen eine gute und für einige Kanäle erstmalige Abschätzung der Zerfallskonstanten ermöglicht.

Im letzten Abschnitt werden QCD-Lichtkegelsummenregeln zur Bestimmung der starken Kopplung zwischen zwei schweren Mesonen mit pseudoskalarer bzw. vektorieller Spinparität und einem Pion hergeleitet. Der Fokus liegt dabei auf der Aktualisierung und Reorganisation der Beiträge in führender Ordnung, so dass diese für eine geplante Analyse unter Einbeziehung der nächstführenden Ordnung verwendet werden können. Zusätzlich werden die Ergebnisse der vorherigen Abschnitte genutzt, um erstmals starke Kopplungen mit radial angeregten Mesonzuständen abzuschätzen.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Zusammenfassung</b>	<b>v</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Überblick . . . . .	1
1.2. Das Standardmodell der Teilchenphysik . . . . .	4
1.3. Elektroschwache Theorie . . . . .	8
1.4. Quantenchromodynamik . . . . .	12
1.5. Motivation und Gliederung . . . . .	20
<b>2. QCD-Summenregeln für schwere Mesonen</b>	<b>23</b>
2.1. Operatorproduktentwicklung . . . . .	23
2.2. Zweipunktsummenregeln . . . . .	24
2.3. Lichtkegelsummenregeln . . . . .	33
<b>3. Zerfallskonstanten von schweren Mesonen</b>	<b>41</b>
3.1. Wilsonkoeffizienten und explizite OPE-Terme . . . . .	41
3.2. Numerische Analyse für $f_H$ und $f_{H^*}$ . . . . .	53
3.3. Auswertung für andere Summenregeln . . . . .	64
3.4. Diskussion der Ergebnisse . . . . .	65
<b>4. Zerfallskonstanten von radial angeregten Zuständen</b>	<b>67</b>
4.1. Radiale Anregungen und Mesonspektroskopie . . . . .	67
4.2. Radiale Anregungen in den Summenregeln . . . . .	68
4.3. Numerische Auswertung . . . . .	70
4.4. Diskussion der Ergebnisse . . . . .	80
<b>5. Starke Kopplungen <math>g_{B^*B\pi}</math> und <math>g_{D^*D\pi}</math></b>	<b>83</b>
5.1. Invariante Amplituden und doppelte Spektraldichte . . . . .	83
5.2. Dualitätsregionen . . . . .	88
5.3. Numerische Analyse für $g_{D^*D\pi}$ und $g_{B^*B\pi}$ . . . . .	89
5.4. Radiale Anregungen in Lichtkegelsummenregeln . . . . .	96
5.5. Diskussion der Ergebnisse . . . . .	99
<b>6. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>101</b>

<b>A. Formelsammlung</b>	<b>105</b>
A.1. Wichtige Integralformeln . . . . .	105
A.2. Dispersionsrelation . . . . .	106
A.3. Herleitung der Fermionselfstenergie . . . . .	107
A.4. Herleitung des Quarkpropagators im externen Gluonfeld . . . . .	108
<b>B. Zweipunktsummenregeln</b>	<b>111</b>
B.1. Herleitung der hadronischen Darstellung für Zweipunktsummenregeln . .	111
B.2. OPE-Terme für Standardsummenregeln schwerer Mesonen . . . . .	114
B.3. Struktur des 4-Quark-Kondensats . . . . .	125
B.4. Explizite Summenregeln . . . . .	127
<b>C. Lichtkegelsummenregeln</b>	<b>131</b>
C.1. Matrixelemente . . . . .	131
C.2. Verteilungsamplituden . . . . .	133
C.3. Doppelte Spektraldichte in führender Ordnung . . . . .	134
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>137</b>



# 1. Einleitung

## 1.1. Überblick

Die Kulturgeschichte ist geprägt vom Streben des Menschen nach Erkenntnis. Sowohl aus purer Neugierde oder ästhetischem Interesse als auch aus praktischen Erwägungen heraus versucht der Mensch, die Gesetzmäßigkeiten seiner Umwelt zu verstehen und das erlangte Wissen für seine Zwecke zu nutzen. Mit naturwissenschaftlich-mathematischen Ansätzen sollen die Mechanismen und Gesetze unseres Universums ergründet werden, wobei im Fortschreiten der Geschichte die wissenschaftliche Methodik die mystisch-subjektiven Erklärungsansätze der Antike nach und nach ersetzt oder modifiziert. Heute verstehen wir die Suche nach Erkenntnis vorrangig als einen Prozess, der unter sorgfältiger Beobachtung von Ereignissen und Durchführung von Experimenten zu einem reproduzierbaren und universell einsehbaren Ergebnis kommt. Die Wissenschaft ist in diesem Sinne konzeptionell eine Einladung an jeden Menschen, sich selbst von der Schlüssigkeit der Sachverhalte zu überzeugen und dabei nicht von interessebehafteter Einflussnahme abhängig zu sein.

Um diesem Anspruch gerecht zu werden, hat die Wissenschaft seit der Etablierung objektiver Methodik im 17. Jahrhundert ihre Beobachtungsfelder über die Jahrhunderte hinweg kontinuierlich weiter ausgedehnt. Von den enormen Größenskalen der Astrophysik einerseits bis hin zur noch vergleichsweise jungen Welt der Quantenmechanik auf der anderen Seite überspannt unser Bild der physikalischen Realität längst Bereiche, die sich nicht mehr intuitiv erfassen lassen. Entsprechend stellt das Vordringen in diese Bereiche eine Herausforderung dar, welche nur durch ein enges Wechselspiel zwischen experimentellen und theoretischen Resultaten bewältigt werden kann.

Dieses Wechselspiel hat auf dem Gebiet der Teilchenphysik zu enormen Fortschritten geführt, die im sog. *Standardmodell der Teilchenphysik* (SM) zusammengefasst werden und dessen Teilgebiet der *Flavourphysik* auch Gegenstand dieser Arbeit ist. Während zu Beginn des 20. Jahrhunderts beispielsweise die Widerlegung der Äthertheorie durch A. A. Michelson und E. Morley [1] oder das Aufkommen der Quantenmechanik zu wesentlichen Paradigmenwechseln in der Physik geführt haben, erweist sich das Standardmodell seit vielen Jahrzehnten als beständig. Mit der Entdeckung des Higgs-Bosons am *Large Hadron Collider* (LHC) in Genf [2] ist der gesamte Teilcheninhalt des Standardmodells experimentell nachgewiesen worden und die Theorie wurde in einem wichtigen Bestandteil bestätigt.

Es gibt gleichwohl eine Reihe von offenen Fragen, die zeigen, dass das Standardmodell nicht komplett ist:

- Im Standardmodell sind alle bekannten Kräfte der Natur formal durch eine entsprechende Eichtheorie eingebunden und beschrieben - mit Ausnahme der Gravitation. Obwohl diese Kraft der Menschheit von allen Kräften am längsten bekannt ist und entsprechend viele Anstrengungen zu ihrer Beschreibung unternommen wurden, ist es bisher nicht gelungen sie im Rahmen einer konsistenten Quantenfeldtheorie zu beschreiben.
- Die Neutrinos wurden im Standardmodell als masselos eingeführt. Im *Homestake-Experiment* von 1970-1994 wurde allerdings zum ersten Mal ein Defizit an solaren Neutrinos im Vergleich zur Vorhersage des kosmologischen Modells festgestellt, welches in der Theorie später durch Oszillationen zwischen verschiedenen Neutrinosorten erklärt wurde. Diese Oszillationen implizieren nun, dass Neutrinos nicht masselos sind. Seitdem haben viele weitere Experimente bestätigt, dass Neutrinos über eine sehr kleine, aber von Null verschiedene Masse verfügen [3]. Ihre genaue Größe und Anordnung (*Massenhierarchie*) ist noch unklar, und viele mögliche Erweiterungen des Standardmodells zur Erklärung dieses Phänomens wurden seitdem formuliert. Experimentelle Beweise für diese Modelle stehen allerdings noch aus.
- Kosmologische Beobachtungen, z.B. bezüglich des Gravitationslinseneffektes [4], legen die Existenz einer bisher nicht direkt beobachteten Art von Masse nahe, welche gravitativ wechselwirkt und bis zu 25% der Masse des Universums ausmachen soll. Sie wird in Abgrenzung zur „sichtbaren“ Materie des Universums *dunkle Materie* genannt, und obwohl diverse Modelle wie WIMPs (engl. *Weak interacting massive particle*) oder MACHOs (engl. *Massive astrophysical compact halo objects*) sich mit möglichen Erklärungsansätzen beschäftigen, fehlt eine bewiesene Einordnung im Rahmen des Standardmodells für dunkle Materie bislang.
- Eine ähnliche Problemstellung ergibt sich aus der Beobachtung der Expansionsgeschwindigkeit unseres Universums, welche von den theoretischen Vorhersagen signifikant abweicht [5, 6]. Ein Erklärungsmodell für diesen Sachverhalt bietet die *dunkle Energie*, welche derzeit ebenfalls nicht experimentell nachgewiesen ist.
- Die Materie-Antimaterie-Asymmetrie in unserem Universum ist auf eine kombinierte Ladungs- und Paritätsverletzung (engl. *Charge-Parity (CP)-Violation*) zurückzuführen. Sie ist im Standardmodell zwar enthalten, jedoch reicht ihre Größe nicht aus, um die beobachtete Asymmetrie zu erklären.

Darüber hinaus weist das Standardmodell noch einige Fragen auf, die zwar keinen Widerspruch im eigentlichen Sinne darstellen, aber doch den Status des Standardmodells als „unfertige Theorie“ untermauern und zu weiteren Forschungen ermutigen:

- Das Standardmodell besitzt bislang 18 freie Parameter (unter Einbeziehung der Neutrinomassen und -mischungswinkel sind es 25). Zwar können die im Standardmodell erklärten physikalischen Effekte auf diese Parameter zurückgeführt werden,

aber die Frage nach ihrem Ursprung bleibt offen: Ihre Anzahl und Größe können zwar experimentell gemessen werden, sind aber nicht durch das Standardmodell selbst festgelegt. Schlussendlich möchte man zur Vereinfachung der Theorie die Anzahl der Parameter so weit wie möglich reduzieren.

- Verwandt mit der vorherigen Fragestellung ist auch der Umstand, dass die bekannte Materie in drei Familien und in einer bestimmten Massenhierarchie gruppiert ist. Das Modell kann derzeit keine Erklärung für dieses Phänomen liefern.
- Ein weiterer Diskussionsgegenstand des Standardmodells ist das sog. *Hierarchieproblem*. Einerseits sollte die Masse des Higgs-Boson durch Strahlungs- und Quantenkorrekturen sehr hoch sein, nämlich etwa in der Region der Planck-Skala ( $\Lambda_p = \mathcal{O}(10^{19} \text{ GeV})$ ) [7]. Da die Higgsmasse jedoch die Energieskala der schwachen Wechselwirkung impliziert, sollte das Higgs-Boson deutlich leichter sein - der experimentelle Nachweis des Higgs-Bosons [2] mit  $m_{\text{Higgs}} = 125.09 \pm 0.21 \text{ (stat.)} \pm 0.11 \text{ (syst.) GeV}$  [8] am *Large Hadron Collider* (LHC) in Genf hat dies bestätigt. Im Prinzip ist dieser Konflikt identisch mit der Frage, wieso die Gravitation viel schwächer ( $\sim 10^{-26}$  Größenordnungen) als die elektroschwache Wechselwirkung ist, bzw. wieso die Skalen der verschiedenen Kräfte im Standardmodell so stark hierarchisch angeordnet sind. Zwar lässt sich dieses Verhalten erklären, dazu ist allerdings ein hohes Maß an Feinabstimmung (engl. *fine-tuning*) der Parameter notwendig.
- Zwar nähern sich die Kopplungskonstanten der Wechselwirkungen im Standardmodell für steigende Energien an, sie können jedoch nicht ohne Weiteres in einem Punkt vereinigt werden. Bei der Konstruktion einer großen vereinheitlichten Theorie (engl. *Grand Unified Theory* (GUT)) wird dies allerdings angestrebt.

Wenngleich das Standardmodell also seit mehreren Jahrzehnten gute Ergebnisse liefert und überraschende Entdeckungen größtenteils ausbleiben, ist die moderne Teilchenphysik dennoch keineswegs an ihren Grenzen angelangt. Die Suche nach Physik jenseits des Standardmodells („Neue Physik“) bleibt eine zentrale Motivation vieler neuer Projekte. Gegenstand dieser Suche sind sowohl theoretische Überlegungen, als auch experimentelle Verifizierung - eine Vielzahl von Erklärungsmodellen für oben genannte Phänomene wartet auf Bestätigung oder Widerlegung von experimenteller Seite. Bei der Suche nach neuer Physik haben sich vor allem zwei Verfahren herauskristallisiert:

- Mit großen *Entdeckungsmaschinen* sollen neue Teilchen und Effekte nachgewiesen werden. Dies zielt sowohl auf den Nachweis einiger von bestimmten Modellen (z.B. der Supersymmetrie) vorhergesagter Teilchen als auch auf die Entdeckung von neuen, unerwarteten Signalen ab. Ein prominentes Beispiel für diese Art von Experiment ist der zuvor erwähnte LHC, wo Protonen mit hoher Energie (bis zu 14 TeV) zur Kollision gebracht werden.
- *Präzisionsmessungen* hingegen sollen Vorhersagen des Standardmodells so genau wie möglich nachprüfen und gegebenenfalls auch durch Quanteneffekte verursachte Abweichungen aufdecken. Als Beispiel sind Elektron-Positron-Beschleuniger zu

nennen. An Experimenten wie *Belle* in Japan oder *BaBar* in den USA werden bzw. wurden mit hoher Präzision die aus vielerlei Hinsicht interessanten Eigenschaften schwerer Mesonen vermessen. Solche Ansätze sind gut geeignet, um die Parameterräume für verschiedene Modelle einzuschränken und diese gegebenenfalls sogar komplett auszuschließen. Diverse zukünftige Projekte wie der *International Linear Collider* (ILC) oder der *Compact Linear Collider* (CLIC) am CERN gehen ebenfalls in diese Richtung.

Für die Zwecke dieser Arbeit ist vor allem letzterer Ansatz von Bedeutung. Die verbesserten Mess- und Analysemethoden auf experimenteller Seite erfordern eine möglichst präzise theoretische Beschreibung der Messgrößen auf der Basis verschiedener Modelle. In dieser Arbeit sollen einige diesen Anforderungen genügende Methoden zur Berechnung diverser hadronischer Matrixelemente vorgestellt und angewandt werden.

## 1.2. Das Standardmodell der Teilchenphysik

Wie im vorherigen Abschnitt dargestellt wurde, bildet das Standardmodell der Teilchenphysik den theoretischen Bezugsrahmen dieser Arbeit. Hier soll es im Folgenden näher erläutert werden, um später den phänomenologischen Bezug zu den anschließenden Berechnungen herzustellen.

Eine Reihe fundamentaler Errungenschaften auf dem Gebiet der Elementarteilchenphysik bilden die Grundpfeiler des Standardmodells. Hier sind vor allem die Vereinigung der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung [9, 10] und der Beweis der asymptotischen Freiheit für die *Quantenchromodynamik* (QCD) [11, 12] zu nennen. Als solche vereint das Standardmodell die Ideen der klassischen Feldtheorie mit den Ansätzen der Quantenmechanik, indem klassische Felder mit Operatoren ausgedrückt werden. Die weitere Einbeziehung lokaler *Eichsymmetrien* implementiert Wechselwirkungen in dieses Modell, und so entsteht eine lorentzinvariante Theorie, welche die Dynamik aller bekannter Teilchen und ihre Wechselwirkung untereinander (mit Ausnahme der Gravitation) beschreibt. Ihre Masse erhalten die Elementarteilchen im Standardmodell durch den *Higgs-Mechanismus*, der eine Wechselwirkung der Teilchen mit einem Hintergrundfeld, dem *Higgs-Feld*, beschreibt. Dieses Feld besitzt einen von Null verschiedenen Vakuumerwartungswert und wechselwirkt in einer solchen Weise mit den Teilchen, dass insbesondere auch die in der Theorie eigentlich masselosen Eichbosonen durch *spontane Symmetriebrechung* (SSB) ihre beobachtete Masse erhalten. Das erwähnte Higgs-Boson ist ein Anregungszustand dieses Feldes.

Diese Arbeit kann keinen Anspruch darauf erheben, das Standardmodell in all seinen Aspekten mit gebührender Detailliertheit zu beleuchten, stattdessen sei an dieser Stelle auf die zahlreiche Literatur zu diesem Thema verwiesen. Einen guten Überblick von theoretischer Seite aus bieten beispielsweise [7, 13, 14, 15], während sich [16, 17, 18] eher einer experimentellen bzw. phänomenologischen Herangehensweise widmen.

### 1.2.1. Teilcheninhalt und Wechselwirkungen

In diesem Abschnitt sollen zunächst der Teilcheninhalt und die Wechselwirkungen des Standardmodells diskutiert werden. Alle Teilchen lassen sich grundsätzlich anhand ihres *Spins* in zwei verschiedene Gruppen einteilen. Diese intrinsische Eigenschaft der Teilchen bestimmt, ob ein Teilchen als *Fermion* (halbzahliger Spin) oder *Boson* (ganzzahliger Spin) bezeichnet wird und sie determiniert das Verhalten der jeweiligen Statistik.

Zunächst werden die Fermionen betrachtet. Für sie gilt die *Fermi-Dirac-Statistik* und im Standardmodell treten zwei Arten von elementaren Fermionen auf, die *Leptonen* (griech. *leptós*: dünn, klein, fein) und die *Quarks*. Sie sind mit ihren grundlegenden Eigenschaften in Tabelle 1.1 aufgelistet, zu jedem dieser Teilchen existiert ein entsprechendes Antiteilchen. Diese werden aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht aufgeführt.

Fermionen des SM						
Gen.	Leptonen			Quarks		
	Flavour	$m$ [MeV]	Ladung $e$	Flavour	$m$ [GeV]	Ladung $e$
1	$\nu_e$	$< 2.2 \cdot 10^{-6}$	0	$u$ up	0.0023	2/3
	$e^-$	0.511	-1	$d$ down	0.0048	-1/3
2	$\nu_\mu$	$< 0.19$	0	$c$ charm	1.275	2/3
	$\mu^-$	105.66	-1	$s$ strange	0.095	-1/3
3	$\nu_\tau$	$< 18.2$	0	$t$ top	173.07	2/3
	$\tau^-$	1777	-1	$b$ bottom	4.18	-1/3

Tabelle 1.1.: Fermionen des Standardmodells, geordnet nach Generationen. Alle Quarkmassen sind im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema [2] und ohne Unsicherheiten angegeben.

Die Symmetrie zwischen den verschiedenen Fermionen wird durch ihre Masse gebrochen - hätten z.B. alle Leptonen die gleiche Masse, wäre ein Elektron nicht von einem Myon zu unterscheiden. Die aus dem Massenunterschied resultierenden verschiedenen „Sorten“ bezeichnet man mit dem englischen Begriff *Flavour*.

Das Standardmodell umfasst jeweils drei Generationen von Leptonen und Quarks. Verschiedene Modelle beschäftigen sich mit der Möglichkeit weiterer Lepton- oder Quarkfamilien, derzeit gibt es diesbezüglich allerdings noch keine experimentelle Indikation. Im Gegenteil schließen Experimente eine vierte leichte Neutrinogeneration sogar aus [19]. Von den bisher nachgewiesenen Teilchen bildet die erste Quarkgeneration zusammen mit dem Elektron die sichtbare, stabile Materie des Universums. Entsprechend waren es auch die Teilchen dieser Generation (bzw. im Falle der Quarks ihre Kompositzustände *Proton* und *Neutron*), welche zuerst theoretisch erfasst und beschrieben wurden.

Das Elektron wurde 1897 durch Thompson experimentell nachgewiesen, 1919 prägte Rutherford bei Versuchen mit Stickstoff und Wasserstoff den Begriff des „Protons“ als Grundbaustein des Atomkerns. Die Entdeckung des Neutrons 1932 durch Chadwick und die Postulierung des Elektron-Neutrinos durch Pauli zur Erklärung von Betazerfällen

1933 komplettierten die Teilchensammlung der ersten Generation. An dieser Stelle sei angemerkt, dass zu diesem Zeitpunkt der Begriff des Quarks noch völlig unbekannt war - der Zusammenhang zwischen Quarks und den entsprechenden *Hadronzuständen* ist nachfolgend etwas ausführlicher dargestellt:

Durch verbesserte experimentelle Methoden wurde Mitte des vorigen Jahrhunderts eine große Zahl neuer Teilchen entdeckt. Die theoretische Einordnung dieses *Teilchenzoos* wurde 1964 durch M. Gell-Mann und G. Zweig im Quarkmodell vorgenommen. Die vergleichsweise schweren und oft instabilen Teilchen, nun *Hadronen* (griech. *hadros*: dick, stark) genannt, wurden dort nicht mehr als elementar angesehen, sondern als Kompositzustände dreier Bausteine, die - an ein Zitat aus James Joyces *Finnegans Wake* angelehnt - als *Quarks* bezeichnet wurden. Gruppentheoretisch in einer  $SU(3)_{\text{Flavour}}$  erfasst, führte die entsprechende Algebra nicht nur zur Einordnung der bisher bekannten Teilchen (engl. *Eightfold Way*), sondern auch zur Vorhersage einiger bis zu diesem Zeitpunkt nicht nachgewiesener Hadronen. Kurze Zeit später erfuhr das Quarkmodell im experimentellen Nachweis des so vorhergesagten  $\Omega^-$ -Teilchens eine erste Bestätigung. Seitdem wurde das Quarkmodell nach Entdeckung immer weiterer Hadronen durch zusätzliche Quarkbausteine erweitert, zuletzt 1995 mit dem Nachweis des Top-Quarks durch die CDF-Collaboration [20] am Tevatron. Zu erwähnen ist allerdings, dass die Quarks noch über eine weitere Quantenzahl verfügen, die *Farbe*. Dies wird in Kapitel 1.4 noch einmal aufgegriffen.

Parallel zur Entwicklung des Quarkmodells lässt sich der Fortschritt im Leptonensektor nachvollziehen. Die Entwicklung im Bereich der Detektionsmethoden hat zur Entdeckung weiterer Leptonen geführt, welche das in Tabelle 1.1 angegebene Bild zuletzt mit dem Nachweis des Tau-Leptons 1975 am *Stanford Linear Collider* [21] komplettieren. Die aufgeführten Neutrinos bilden insbesondere im Bezug auf ihre schwache Wechselwirkung mit Materie und ihrer geringen Masse ein eigenes Feld der Teilchenphysik. Einige aktuelle Experimente in Vorbereitung (z.B. KATRIN in Karlsruhe) beschäftigen sich damit, die in Tabelle 1.1 angegebene Obergrenze für die Neutrinomassen in Zukunft weiter zu verschieben. Der gebräuchlichste Ansatz zur theoretischen Einbindung von Neutrinomassen bedient sich konzeptionell ähnlich zum Quarksektor einer Mischung von Neutrino flavours über die sog. PMNS-Matrix (Nach Pontecorvo, Maki, Nakagawa, Sakata) [22, 23, 24]. Da diese Arbeit allerdings einen anderen thematischen Schwerpunkt hat, sei an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen.

Nachdem die Fermionen des Standardmodells charakterisiert wurden, werden im Folgenden die Wechselwirkungen des Standardmodells kurz behandelt. Die heutige Physik kennt vier fundamentale Wechselwirkungen, von denen drei im Standardmodell erfasst sind. Ihre grundlegenden Eigenschaften und die zugehörigen Eichtheorien sind in Tabelle 1.2 gezeigt.

Wechselwirkungen (WW) des SM			
	El.-mag. WW	Schwache WW	Starke WW
Eichbosonen	Photon $\gamma$	$W^+, W^-, Z^0$	8 Gluonen $g$
Masse	0	$m_{W^\pm} = 80.4 \text{ GeV}$ $m_{Z^0} = 91.2 \text{ GeV}$	0
Ladung	El. Ladung	Schwache Ladung	Farbladung
Eichtheorie	$SU(2) \times U(1)$		$SU(3)$

Tabelle 1.2.: Wechselwirkungen des Standardmodells.

Im Rahmen von Eichtheorien beschriebene Wechselwirkungen werden durch *Eichbosonen* übertragen. Bosonen bilden mit ihrem ganzzahligen Spin neben den Fermionen die zweite große Gruppe der Teilchen im Standardmodell und unterliegen der *Bose-Einstein-Statistik*. Solche Eichbosonen sind in der Theorie aus Gründen der Eichinvarianz eigentlich per Definition masselos, Experimente zeigen allerdings, dass die Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung massebehaftet sind (s. Tabelle 1.2). Dies wird im Standardmodell durch den *Higgs-Mechanismus* erklärt, der den entsprechenden Austauscheteilchen in der schwachen Wechselwirkung durch spontane Symmetriebrechung Masse verleiht (s. Kapitel 1.3). Auf eine ausführliche Behandlung des Higgs-Mechanismus wird an dieser Stelle verzichtet.

Die Eichbosonen der jeweiligen Wechselwirkung koppeln an die zugehörige Ladung der Partikel. Photonen wechselwirken beispielsweise mit allen elektrisch geladenen Teilchen, während Gluonen nur mit solchen Teilchen interagieren, die Farbladung tragen. Einen gemeinsamen Block im Standardmodell bildet die *elektroschwache Theorie*, in der die elektromagnetische und schwache Wechselwirkung vereinheitlicht ist. Sie wird nach ihren Urhebern S. Glashow, A. Salam und S. Weinberg auch *GWS-Theorie* genannt [25, 26, 27]. Das Modell der Wechselwirkungen wird dann durch die *Quantenchromodynamik* (QCD) ergänzt, welche die Theorie der starken Wechselwirkung erfasst. Die mathematische Beschreibung der Eichtheorien auf Grundlage der Gruppentheorie ist Gegenstand des nächsten Abschnittes.

### 1.2.2. Lagrangedichte und Eichtheorie

Zum weiteren Verständnis der behandelten Thematiken ist es notwendig, die mathematische Struktur des Standardmodells als Eichtheorie genauer zu betrachten. Zu diesem Zweck wird die *Lagrangedichte*  $\mathcal{L}$  betrachtet, welche die Dynamik der Teilchen einer jeweiligen Quantenfeldtheorie beschreibt. Drückt man die im letzten Kapitel beschriebenen Fermionen der Theorie durch lokale Felder  $\psi(x)$  aus und die Eichbosonen durch Eichfelder  $A_\mu(x)$ , so kann man die Lagrangedichte einer allgemeinen, nicht-abelschen Feldtheorie schreiben als

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{\psi} \bar{\psi}(x)(iD_\mu\gamma^\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{4}F^{a\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}^a(x), \quad (1.1)$$

mit der Fermionmasse  $m$  und der Diracmatrix  $\gamma^\mu$ . Der in (1.1) eingeführte *Feldstärketensor*  $F^{a\mu\nu}(x)$  ist dabei als eine Kombination der Eichfelder und der *kovarianten Ableitung*  $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T^a$  gegeben:

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + gf^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x), \quad (1.2)$$

in diesem Kontext stellt  $g$  die Kopplung der Eichfelder dar. Gleichung (1.2) enthält zudem die Generatoren der Gruppe  $T^a$ , sowie die Strukturkonstante  $f^{abc}$  der jeweiligen *Liealgebra*. Ein umfangreicher Überblick über die gruppentheoretischen Grundlagen und die zugehörigen Liealgebren findet sich in [28].

Die so eingeführte nichtabelsche Lagrangedichte ist invariant unter verschiedenen Eichtransformationen, welche durch die entsprechende Symmetriegruppe beschrieben werden. So wird in der *Quantenelektrodynamik* (QED) die Transformation  $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$  durch eine entsprechende Eichtransformation der Felder gemäß

$$\psi(x) \rightarrow e^{ie\alpha(x)} \psi(x) \quad (1.3)$$

kompensiert. Diese Transformationen sind dann in der unitären Gruppe  $U(1)$  beschrieben, welche die Symmetriegruppe der QED ist.

Das Standardmodell mit seinen in Kapitel 1.2.1 dargelegten Teilchen und Wechselwirkungen ist eine Kombination solcher Symmetriegruppen:

$$SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1), \quad (1.4)$$

wobei  $C$  die Farbladung und  $Y$  die Hyperladung darstellt. Wegen der Eichfreiheit unter den in diesen Gruppen gefassten Transformationen bezeichnet man die entsprechende Theorie als *Eichtheorie*. Die letzten beiden Gruppen in (1.4) bilden die erwähnte elektroschwache Theorie, während die  $SU_C(3)$  die Symmetriegruppe der QCD repräsentiert. Aufgrund ihrer Bedeutung für diese Arbeit werden die erwähnten Theorien in den folgenden Kapiteln noch einmal aufgegriffen. Der nächste Abschnitt widmet sich zunächst der elektroschwachen Theorie.

### 1.3. Elektroschwache Theorie

Für die Anwendungsgebiete dieser Arbeit spielen schwache Zerfälle eine wesentliche Rolle (s. Kapitel 1.5). Aus diesem Grund sollen die zum Verständnis der Phänomenologie nötigen Aspekte des elektroschwachen Sektors in diesem Kapitel diskutiert werden. Eine umfangreiche Erläuterung vom theoretischen Standpunkt aus bietet [7].

Den Ausgangspunkt für das weitere Vorgehen bildet die in Gleichung (1.4) eingefasste Symmetriegruppe der GWS-Theorie  $SU_L(2) \times U_Y(1)$ . Die Gruppe  $U_Y(1)$  beschreibt dabei die Transformation der Fermionfelder mit der schwachen Hyperladung  $Y$ , die Gruppe  $SU_L(2)$  repräsentiert das Transformationsverhalten der linkshändigen Fermiondoublets (s. 1.2.1) bezüglich des schwachen Isospins  $T$ . Die Hyperladung  $Y$ , die elektrische Ladung



$Q$  und die dritte Komponente des schwachen Isospins sind verknüpft über die Gell-Mann-Nishijima-Relation

$$Q = \frac{Y}{2} + T_3. \quad (1.5)$$

Der schwache Isospin gibt dabei in Analogie zur elektrischen Ladung in der QED an, wie die jeweiligen Teilchen an die Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung koppeln. Für die Fermionen des Standardmodells mit linkshändiger Chiralität ist  $T_3 = \pm\frac{1}{2}$ , während für rechtshändige Fermionen  $T_3 = 0$  ist (s. Tabelle 1.3). Eine schwache Wechselwirkung vermittelt nie zwischen Teilchen mit gleichem Isospin, ein Fermion mit  $T_3 = +\frac{1}{2}$  zerfällt in führender Ordnung stets in einen Zustand mit  $T_3 = -\frac{1}{2}$ .

Fermionen			$T_3$	$Y$	$Q$
$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$
$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	-1 -1	0 -1
$u_R$	$c_R$	$t_R$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
$d_R$	$s_R$	$b_R$	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$e_R^-$	$\mu_R^-$	$\tau_R^-$	0	-2	-1

Tabelle 1.3.: Elektroschwache Quantenzahlen der Fermionen des Standardmodells, geordnet nach linkshändiger ( $L$ ) und rechtshändiger ( $R$ ) Chiralität. Linkshändige Teilchen sind in Dubletts gruppiert, rechtshändige als Singulets. Rechtshändige Neutrinos existieren im Standardmodell nicht.

Die in Abschnitt 1.2.2 angesprochenen Eichfelder werden nun mit  $W_\mu^a(x)$ ,  $a = 1,2,3$  für die  $SU_L(2)$  identifiziert, das Eichfeld der  $U_Y(1)$  wird mit  $B_\mu(x)$  bezeichnet. Die Lagrangedichte der elektroschwachen Theorie ergibt sich dann analog zu (1.1) als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{EW}}(x) = & \sum_{\psi} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \left( i \partial_\mu - \frac{g'}{2} Y_W B_\mu(x) - \frac{g}{2} \sigma_a W_\mu^a(x) \right) \psi(x) - \frac{1}{4} W_a^{\mu\nu}(x) W_{\mu\nu}^a(x) \\ & - \frac{1}{4} B^{\mu\nu}(x) B_{\mu\nu}(x), \end{aligned} \quad (1.6)$$

mit den Paulimatrizen  $\sigma_a$ , die Ortsabhängigkeit wird folgend nicht mehr explizit aufgeführt. Die auftretenden Felder können jedoch nicht direkt mit den experimentell beobachteten Eichbosonen  $W^\pm, Z_0$  und  $\gamma$  der elektroschwachen Theorie identifiziert werden. Während die Bosonen  $W^\pm$  durch die Relation

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \pm i W_\mu^2). \quad (1.7)$$

mit den Feldern in Verbindung gebracht werden können, kann es sich bei  $W_\mu^3$  nicht um das  $Z_0$ -Boson handeln. Für letzteres wurde experimentell nachgewiesen, dass es links- und rechtshändige Zustände miteinander koppelt,  $W_\mu^3$  koppelt jedoch aus Gründen der Isospinerhaltung nur linkshändige Teilchen aneinander.  $B_\mu$  wiederum koppelt anders als das physikalische Photon auch an ladungsneutrale Neutrinos.

Allerdings mischen die beiden Felder  $B_\mu$  und  $W_\mu^3$  miteinander, da sie die selben elektroschwachen Quantenzahlen besitzen. Dadurch ergeben sich die physikalischen Zustände gemäß

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ Z^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^0 \\ W^0 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

mit dem *Weinbergwinkel*  $\theta_W$ . Alle Felder der Eichbosonen einer Quantenfeldtheorie sind nach Definition masselos, da Massenterme die Eichinvarianz der Lagrangefunktion aufheben. Die experimentell nachgewiesenen Massen für  $Z^0$  und  $W^\pm$  werden durch die SSB im *Higgs-Mechanismus* generiert, wobei die Massen von  $Z^0$  und  $W^\pm$  durch

$$M_W = M_Z \cos \theta_W, \quad \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (1.9)$$

verknüpft sind. Für eine ausführliche Diskussion des Higgs-Mechanismus sei an die bereits genannte Fachliteratur verwiesen.

Die Symmetriegruppe wird durch die SSB von  $SU_L(2) \times U_Y(1)$  auf  $U_{\text{em}}(1)$  gebrochen. Da das *Noether-Theorem* jeder Symmetriegruppe eine Erhaltungsgröße zuweist [7], impliziert dieses Ergebnis die elektrische Ladungserhaltung. Das zugehörige Eichboson (Photon) bleibt masselos, da die korrespondierende Gruppe  $U_{\text{em}}(1)$  ungebrochen ist.

Nachdem die Grundlagen der elektroschwachen Theorie in diesem Kapitel dargelegt wurden, sollen folgend Übergänge unter Vermittlung der schwachen Wechselwirkung genauer beleuchtet werden.

### 1.3.1. CKM-Matrix und Unitaritätsdreieck

Eine weitere Eigenschaft der Fermionen im Standardmodell ist ihre Chiralität. Man unterscheidet zwischen linkshändigen und rechtshändigen Fermionen (s. Tabelle 1.3), und mittels Paritätsoperation  $P$  können Teilchen in die jeweils andere Chiralität überführt werden. Im Standardmodell können Quarks beide Chiralitätseinstellungen haben, Neutrinos sind dort jedoch ausschließlich linkshändig. Dies bedeutet, dass das Standardmodell bezüglich Parität nicht symmetrisch ist. Experimentell wurde diese *Paritätsverletzung* zum ersten Mal 1957 von C. Wu bei radioaktiven Betazerfällen [29] nachgewiesen. Betrachtet man mit der Ladungskonjugation  $C$  eine weitere Symmetrieoperation, erhält man in Kombination mit der Paritätstransformation die *CP-Symmetrie*. Diese gibt vor, dass physikalische Prozesse für ein bestimmtes Teilchen genau so realisiert sind, wie die Prozesse für das entsprechende Antiteilchen. Mitte der 60er Jahre wurde allerdings in Kaonzerfällen [30] nachgewiesen, dass auch diese Symmetrie im Standardmodell durch die im vorherigen Abschnitt beschriebene schwache Wechselwirkung verletzt ist (engl. *CP-Violation*).

Die theoretische Einbettung dieser  $CP$ -Verletzung in das Standardmodell wird durch den  $CKM$ -Mechanismus vorgenommen, dessen Bezeichnung auf die Arbeiten von N. Cabibbo [31], sowie M. Kobayashi und T. Maskawa [32] zurückgeht. Zur Erläuterung wird zunächst der aus der *Yukawakopplung* resultierende Massenterm in der Lagrangefunktion betrachtet, welcher durch Kopplung der links- und rechtshändigen Komponenten der Quarkfelder die Quarkmassen im Standardmodell beschreibt:

$$\mathcal{L}_{\text{Masse}} = -(\bar{u}_L M^u u_R + \bar{d}_L M^d d_R + h.c.), \quad (1.10)$$

wobei  $u_{L(R)} = (u_{L(R)}, c_{L(R)}, t_{L(R)})$  und  $d_{L(R)} = (d_{L(R)}, s_{L(R)}, b_{L(R)})$  stellvertretend für die jeweiligen Quarkfamilien stehen. Man bezeichnet erstere als *Up-Typ-Quarks*, letztere als *Down-Typ-Quarks*. Die Elemente der Matrix  $M^{u(d)}$  stellen als Kopplung zwischen links- und rechtshändigen Feldern die Masse des jeweiligen Teilchens dar. Diese Massenmatrizen sind nicht notwendigerweise diagonal, so dass verschiedene Quarkflavour zu einem Massenzustand beitragen. Um die physikalischen Quarkzustände zu erhalten, müssen die Massenmatrizen also diagonalisiert werden. Zu diesem Zweck werden unitäre Transformationsmatrizen  $U^{u(d)}$  eingeführt:

$$\mathcal{L}_{\text{Masse}} = -(\bar{u}_L U_1^{u\dagger} U_1^u M^u U_2^{u\dagger} U_2^u u_R + \bar{d}_L U_1^{d\dagger} U_1^d M^d U_2^{d\dagger} U_2^d d_R + h.c.), \quad (1.11)$$

wobei die Matrixprodukte  $U_1^u M^u U_2^{u\dagger}$  und  $U_1^d M^d U_2^{d\dagger}$  jetzt die diagonalisierten Massenmatrizen darstellen. Da allerdings die Quarks durch ihre schwachen Quantenzahlen auch an der schwachen Wechselwirkung teilnehmen, werden durch diese Transformation nicht nur die Massenterme, sondern auch die Terme der schwachen Wechselwirkung in der Lagrangedichte beeinflusst. Dort besitzen einzig die Wechselwirkungsterme des  $W$ -Bosons eine Kombination aus Quarkfeldern des Up- und Down-Typs, so dass

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W &= \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}_L \gamma^\mu d_L W_\mu^+ + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L W_\mu^-) \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} \left( \bar{u}'_L \gamma^\mu \left( U_1^u U_1^{d\dagger} \right) d'_L W_\mu^+ + \bar{d}'_L \gamma^\mu \left( U_1^d U_1^{u\dagger} \right) u'_L W_\mu^- \right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Das Produkt  $U_1^u U_1^{d\dagger}$  wird nun schließlich als  $CKM$ -Matrix  $V_{CKM}$  bezeichnet. Sie stellt anschaulich den Übergang von Flavour- und Masseneigenzuständen der Quarks dar:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}}_{V_{CKM}} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Das Betragsquadrat der komplexen Matrixelemente bezeichnet die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen Quarks mit unterschiedlichem Isospin mittels schwacher Wechselwirkung. Eine wichtige Eigenschaft der  $CKM$ -Matrix ist ihre Unitarität, d.h.

$$V_{CKM} \cdot V_{CKM}^\dagger = \mathbb{1}. \quad (1.14)$$

Als unitäre  $3 \times 3$ -Matrix besitzt sie neun unabhängige, reellwertige Parameter, von denen sich fünf durch Redefinition der Quarkfelder entfernen lassen. Die übrigen vier Parameter

sind die drei Mischungswinkel der Theorie sowie eine komplexe Phase. Letztere ist im Standardmodell die Ursache für die  $CP$ -Verletzung, denn unter komplexer Konjugation der CKM-Matrix wechselt die Phase ihr Vorzeichen.

Die Größe der jeweiligen Matrixelemente ist nicht durch die Theorie selbst vorgegeben. Experimentelle Ergebnisse zeigen allerdings, dass die CKM-Matrix stark hierarchisiert ist, Mischungen zwischen verschiedenen Quarkfamilien sind also unterdrückt [3]:

$$|V_{\text{CKM}}| = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.97427 & 0.22536 & 0.00355 \\ 0.22522 & 0.97343 & 0.0414 \\ 0.00866 & 0.0405 & 0.99914 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Die Unsicherheiten der Elemente wurden der Übersichtlichkeit halber nicht angegeben und sind in [3] zu finden. Basierend auf dieser Hierarchisierung kann die CKM-Matrix in einem kleinen Parameter  $\lambda$  entwickelt werden, wodurch sich die *Wolfenstein-Parametrisierung* (nach L. Wolfenstein) [33] ergibt:

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & \lambda^3 A(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & \lambda^2 A \\ \lambda^3 A(1 - \rho - i\eta) & -\lambda^2 A & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4), \quad \lambda \approx 0.2. \quad (1.16)$$

Diese Parametrisierung enthält mit der imaginären Größe  $\eta$  und den Mischungswinkeln  $A$ ,  $\rho$  und  $\lambda$  auch die vier angesprochenen unabhängigen Parameter der CKM-Matrix. Um diese Parameter zu ermitteln, konstruiert man ein *Unitaritätsdreieck*. Aus der Unitaritätsbedingung (1.14) lassen sich einige Beziehungen zwischen den Matrixelementen gewinnen. Von diesen besitzt die Relation

$$0 = V_{ub}^* V_{ud} + V_{cb}^* V_{cd} + V_{tb}^* V_{td} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{V_{ub}^* V_{ud}}{V_{cb}^* V_{cd}}}_{=: R_1} + \underbrace{\frac{V_{tb}^* V_{td}}{V_{cb}^* V_{cd}}}_{=: R_2} + 1 = 0 \quad (1.17)$$

bezogen auf die Wolfenstein-Parametrisierung nur Terme von gleicher Ordnung in  $\lambda$ , sie wird daher in der Forschung besonders oft betrachtet. Sie lässt sich als Dreieck in der komplexen Ebene visualisieren, dies ist in Abb. 1.1 gezeigt. Die experimentelle Vermessung der Matrixelemente sowie die dazu notwendige Beschreibung der Theorie sind zentrale Punkte gegenwärtiger Forschungsarbeiten in der Flavourphysik. Auch die in dieser Arbeit vorgestellten Methoden werden in der praktischen Anwendung zur Bestimmung solcher Matrixelemente eingesetzt. Auf diesen Umstand wird in Kapitel 1.5 weiter Bezug genommen.

## 1.4. Quantenchromodynamik

Der zweite große Block in der Symmetriegruppe des Standardmodells basiert auf der  $SU_C(3)$  die *Quantenchromodynamik* (QCD) (griech. *chromos*: Farbe). Als Quantenfeldtheorie der starken Wechselwirkung beschreibt sie die Dynamik zwischen farbgeladenen Teilchen, also Quarks und Gluonen. Für die in dieser Arbeit betrachteten *Hadronen* ist sie daher von wesentlicher Bedeutung. Einen umfangreicheren Überblick bieten [34, 35]

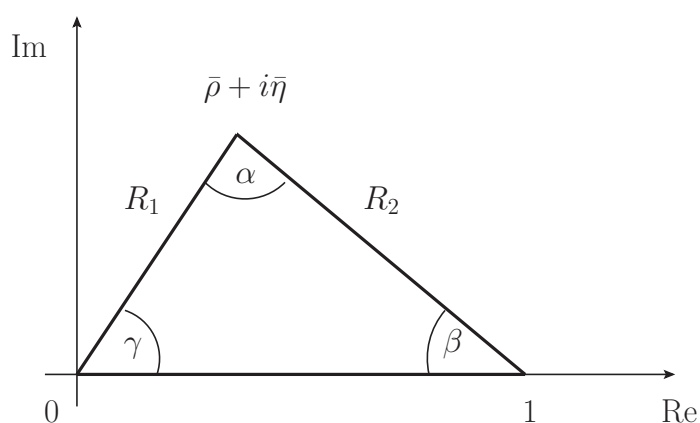


Abbildung 1.1.: Das Unitaritätsdreieck in der komplexen Ebene für Gleichung (1.17) mit  $\bar{\rho} = \rho\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right)$  und  $\bar{\eta} = \eta\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right)$ .

und mit Hinblick auf den hadronischen Schwerpunkt der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Projekte besonders [36].

Historisch gehen die ersten Hinweise auf die Existenz der starken Wechselwirkungen auf die Entdeckung der Nukleonen Anfang des vorigen Jahrhunderts zurück. Während Protonen eine positive elektrische Ladung tragen, sind Neutronen elektrisch neutral. Somit muss die den Atomkern auseinandertreibende elektrische Abstoßung zwischen den Protonen durch eine Kraft zwischen den Kernbausteinen kompensiert werden. H. Yukawa erklärte diese Kernkraft 1935 mit dem Austausch virtueller *Pionen*, die heute als gebundene Quark-Antiquark-Zustände bekannt sind. Dieses Modell wird bis heute zur Beschreibung langreichweitiger Wechselwirkungen zwischen Nukleonen verwendet. Die kurzreichweitige „starke“ Wechselwirkung wird nach heutiger Kenntnis durch *Gluonen* (engl. *glue*: Klebstoff) realisiert.

Die bereits in Abschnitt 1.2.1 dargelegte Entwicklung des Quarkmodells ermöglichte die Einordnung einer Vielzahl neuer Teilchen, dennoch stieß man kurze Zeit später durch die Entdeckung des  $\Omega^-$ -Hadrons auf weitere Probleme. In der Beschreibung des Quarkmodells sollte dieses Teilchen aus drei Strange-Quarks mit der selben Spineinstellung bestehen. Quarks unterliegen als Fermionen allerdings dem Pauliprinzip und somit musste ein weiterer Freiheitsgrad die Unterscheidbarkeit der Konstituentenquarks gewährleisten. Weitere Teilchenfunde bestätigten dieses Problem, und so postulierten M. Han, Y. Nambu [37] und O. Greenberg [38] Mitte der 60er Jahre unabhängig voneinander die Farbe (engl. *colour*) als zusätzliche Quantenzahl, welche wenig später in Wirkungsquerschnitten von  $e^+e^-$ -Streuungen nachgewiesen wurde. Damit ist die Farbladung analog zur elektrischen Ladung als Quantenzahl der starken Wechselwirkung etabliert worden. Der experimentelle Nachweis von Quarks durch tiefinelastische Streuung sowie des Gluons 1979 stellen weitere Erfolge für die Theorie der starken Wechselwirkung dar. Einen Überblick über die einzelnen Schritte dieser Entwicklung bietet [17].

Die QCD besitzt darüber hinaus drei wesentliche Eigenschaften:

- *Confinement* (engl. *Haft, Beschränkung*): Experimente haben gezeigt, dass alle bisher nachgewiesenen Teilchen farbneutral, d.h. Singletts unter  $SU_C(3)$ -Transformationen sind. Die genannten Quarks und Gluonen treten also nur in farbneutralen Bindungszuständen auf und nicht als freie Teilchen.
- *Asymptotische Freiheit*: Obwohl das Confinement aussagt, dass Quarks und Gluonen nicht als freie Teilchen auftreten, ist experimentell beobachtet worden, dass sich Quarks in hadronischen Bindungszuständen bei hohen Energien und kleinen Distanzen wie freie Teilchen verhalten. 1973 gelang es D. Gross, F. Wilczek und von diesen unabhängig D. Politzer dieses Verhalten aus der quantenfeldtheoretischen Struktur der QCD abzuleiten [11, 39]. Sie zeigten, dass die Kopplung  $\alpha_s$  in der QCD im Gegensatz zur Situation in der QED mit wachsender Energie bzw. sinkender Distanz schwächer wird, die Quarks und Gluonen verhalten sich dann wie quasifreie Teilchen. Diese Eigenschaft bildet die Grundlage für perturbative Ansätze im Bereich der QCD. Auf sie wird aufgrund ihrer herausragenden Bedeutung für diese Arbeit in Kapitel 1.4.2 noch einmal Bezug genommen.
- *Spontane Brechung der chiralen Symmetrie*: In der QCD koppeln links- und rechts-händige Quarkfelder im QCD-Vakuum. Der Vakuumerwartungswert eines solchen Quark-Antiquark-Paares  $\langle 0 | \bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L | 0 \rangle$  ist ungleich Null und bricht somit die chirale Symmetrie der Eichgruppe. Die Quark-Antiquarkpaare bilden somit ein *Kondensat* im QCD-Vakuum. Diese Kondensate sind für die späteren Berechnungen dieser Arbeit von großer Bedeutung.

Nachdem zur Einführung grundlegende Eigenschaften der QCD dargestellt wurden, soll folgend der theoretische Hintergrund der QCD als Eichtheorie, sowie die Struktur der für diese Arbeit relevanten hadronischen Zustände etwas genauer beleuchtet werden.

### 1.4.1. Eichtheorie und Hadronen

Der Aufbau der QCD als Eichtheorie folgt den gleichen Prinzipien, die bereits für die elektroschwache Theorie behandelt wurden. Da die QCD für die Berechnung der in dieser Arbeit auftretenden Diagramme eine hohe Relevanz hat, sollen einige Eckpunkte hier auch konkret dargelegt werden. Als Grundlage dient die  $SU_C(3)$ -Symmetriegruppe, welche als spezielle, unitäre Gruppe  $3^2 - 1 = 8$  Generatoren besitzt. Zur Darstellung dieser Generatoren werden oft die Gell-Mann-Matrizen  $\lambda^a$  ( $a = 1 \dots 8$ ) verwendet, konkret sind sie z.B. in [35] dargestellt. Diese Darstellung wird folgend auch in den Berechnungen dieser Arbeit genutzt. Die korrespondierende Liealgebra der Matrizen ergibt sich zu

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2i f^{abc} \lambda_c, \quad (1.18)$$

wobei  $f^{abc}$  als die schon in Kapitel 1.2.2 angesprochene Strukturkonstante zu identifizieren ist. Wie in Kapitel 1.3 erwähnt, korrespondieren die Generatoren dieser Gruppe

zu den Eichbosonen der Theorie, in diesem Fall handelt es sich um die acht Gluonen. Da es sich bei der QCD um eine nicht-abelsche Feldtheorie handelt, ist ihre Lagrange-dichte mit (1.1) gegeben, wobei der allgemeine Feldstärketensor  $F^{a\mu\nu}$  durch den Gluonfeldstärketensor  $G^{a\mu\nu}$  ersetzt wird und die Fermionfelder  $\psi$  nun Quarks mit zusätzlichen Farbindizes  $i, j$  beschreiben.

Man beachte, dass in der nicht-abelschen Struktur ein wesentlicher Unterschied zur QED liegt. Dort ist nur ein Eichboson vorhanden, so dass der Feldstärketensor keinen Term  $\sim f^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$  enthält. In der QCD jedoch tragen Gluonen selbst Farbladung. Dies führt neben der einfachen Gluon-Fermion-Kopplung zu zusätzlichen fundamentalen Vertizes in der Theorie, in der jeweils drei oder auch vier Gluonen miteinander koppeln. Die entsprechenden Diagramme sind mit den zugehörigen Feynmanregeln in [7] zu finden. Bei genauerer theoretischer Betrachtung zeigt sich, dass diese Wechselwirkungen der Gluonen untereinander verantwortlich für das spezifische Verhalten der starken Kopplung bei großen Energien und somit auch für die asymptotische Freiheit sind. Dies sei anhand der Schleifendiagramme in Abb. 1.2 kurz illustriert. Eine Fermionschleife wie in Abb. 1.2 a) bewirkt anschaulich eine effektive Abschwächung der Kopplung auf großer Distanz, da die Vakuumpolarisation eine Ladung im Raum auf diese Weise abschirmt. Die in der QED nicht vorhandenen Diagramme b) und c) jedoch verstärken dagegen die Kopplung mit wachsender Distanz bzw. schwächen sie auf kurzer Distanz und bewirken so das umgekehrte Verhalten der Kopplung und damit die asymptotische Freiheit der QCD (s. Kapitel 1.4.2).

Die hadronischen Bindungszustände der Quarks sind invariant unter  $SU_C(3)$ -Transformationen, so dass sie insgesamt farbneutral sind. Die einfachsten so erlaubten Kombinationen für Quarkfelder  $q^i$  mit Farbladung  $i$  sind der Quark-Antiquark-Zustand  $\bar{q}^i q_i$ , sowie die Drei-Quark- bzw. Drei-Antiquark-Zustände  $\epsilon^{ijk} q_i q_j q_k$  und  $\epsilon_{ijk} \bar{q}^i \bar{q}^j \bar{q}^k$ . Letztere nennt man *Baryonen* (griech. *barýs*: schwer, gewichtig), sie besitzen eine im Vergleich zu den restlichen stabilen Teilchen des Standardmodells hohe Masse. Gebundene Quark-Antiquark-Zustände nennt man *Mesonen* (griech. *tó méson*: das Mittlere), da sie in der Regel zwar schwerer als die stabilen Leptonen sind, aber leichter als die genannten Baryonen. Im Prinzip können alle möglichen Flavours zu entsprechenden Mesonen und Baryonen kombiniert werden. Zu beachten ist allerdings, dass das sehr schwere Top-Quark aufgrund seiner geringen Lebensdauer zerfällt, bevor es hadronisiert.

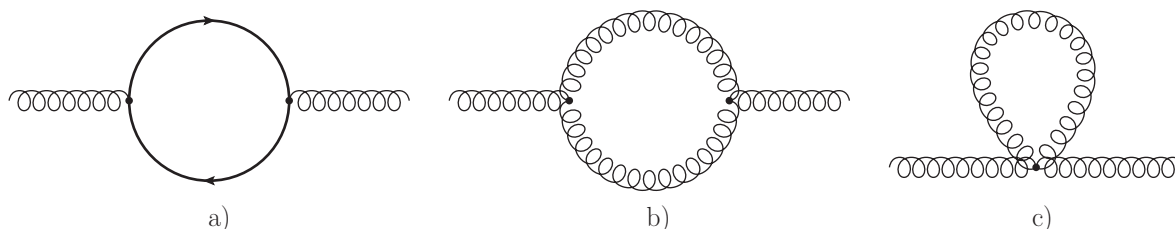


Abbildung 1.2.: Schleifendiagramme für den Gluonpropagator: a) Fermionschleife, b) Gluonselfenergie und c) *Tadpole*-Diagramm.

Von besonderem Interesse für diese Arbeit sind solche Mesonen, die neben einem schweren Quark ( $c, b$ ) auch ein leichtes ( $u, d, s$ ) enthalten (engl. *Heavy-Light-Meson*). Diese Mesonen sind zum einen experimentell an aktuellen Beschleunigern gut zugänglich, enthalten aber ebenso ein für viele Anwendungen (s. Kapitel 1.5) interessantes schweres Quark. Zudem können viele Beiträge wegen  $m_{u,d,s} \ll m_{c,b}$  in Ordnungen der kleinen Quarkmasse entwickelt und ggf. vernachlässigt werden. Am Schluss dieses Kapitels wird die Bedeutung der Mesonen für die Ergebnisse dieser Arbeit noch einmal konkretisiert.

### 1.4.2. Regularisierung und Renormierung

Das Prinzip Quantenfeldtheorie bildet den Kern des Standardmodells. Dazu war zunächst die Lösung einiger Probleme notwendig. Schon bei frühen Berechnungen innerhalb der QED stellte man fest, dass bei der perturbativen Behandlung von Schleifendiagrammen divergente Integrale auftreten. Eine Lösung dieses Problems ist durch die Prozedur der *Renormierung* gegeben. Insbesondere der Beweis zur Renormierbarkeit der QCD [40] stellt einen wesentlichen Erfolg des Standardmodells dar. Im Folgenden sollen in Kürze die vor allem für diese Arbeit relevanten Begriffe und Methoden diskutiert werden, welche dann später in der konkreten Berechnung hadronischer Größen aufgegriffen werden. Für umfassendere Informationen zu diesem Thema sei z.B. auf [7, 41, 42, 43] verwiesen.

*Regularisierung* ist die Prozedur zur Isolierung und Parametrisierung von Divergenzen. In einem physikalischen Kontext rühren diese Divergenzen von Beiträgen in Energieregionen her, in denen die verwendete Theorie keine Gültigkeit besitzt. Eine intuitive Methode diese Divergenzen zu entfernen ist daher die sogenannte *Cut-Off-Regularisierung*. In dieser Regularisierungsmethode wird der problematische Integrationsbereich identifiziert und durch Einführung eines *Cut-Off-Parameters* in den Integrationsgrenzen entfernt. Diese Methode wurde vor allem in der Anfangszeit der QED verwendet, zum Beispiel in [44]. Allerdings birgt die Verwendung dieser Methode auch Probleme: Das Ergebnis ist zwar konvergent, führt aber zu einer Verletzung der Eich- und Translationsinvarianz. Aus diesem Grund wurden weitere Regularisierungsmethoden entwickelt, welche je nach verwendetem Renormierungsschema Vor- und Nachteile aufweisen. Einige dieser Methoden bedienen sich konzeptionell der Modifikation des Integranden durch einen Regularisierungsparameter, als Beispiele seien hier die Regularisierung nach *Pauli-Villars* [45] oder die *analytische Regularisierung* genannt. Wenngleich diese Methoden in der QED ein eich- und lorentzinvariantes Ergebnis liefern und deshalb dort Anwendung finden, verletzen beide in der QCD die Eichinvarianz und werden deshalb hier nicht weiter diskutiert.

In der QCD (und QED) wird in der Regel die *dimensionale Regularisierung* verwendet, welche von C.G. Bollini und J.J. Giambiagi [46] eingeführt wurde. Im Gegensatz zu den bisher genannten Methoden wird bei der dimensional Regularisierung weder die Integrationsgrenze noch der Integrand selbst modifiziert, sondern das Integrationsmaß. So kann ein Integral beispielsweise in  $D = 4$  Dimensionen divergent sein, für  $D \neq 4$  aber dennoch konvergieren. Folgend wird die Integration nun allgemein in  $D$  Dimensionen betrachtet und später  $D \rightarrow 4 - 2\epsilon$  gesetzt. Die Wahl des Regulators  $2\epsilon$  ist willkürlich und geschieht aus praktischen Erwägungen im Bezug auf die späteren Berechnungen. Die



Verallgemeinerung auf  $D$  Dimensionen macht einige Anmerkungen und Ergänzungen notwendig: Zum einen wird eine zusätzliche Skala  $\mu$  eingeführt, welche als Faktor die nun veränderte Massendimension des Integrals kompensieren soll. Diese Skala trennt die „unphysikalischen“ Energieregionen der Theorie vom gültigen Bereich und „normiert“ die Theorie somit auf letzteren. Zum anderen sind durch den Wechsel in den  $D$ -dimensionalen Raum einige Änderungen in der Diracalgebra zu beachten, welche in [7] aufgeführt sind. Nach einer Regularisierung des Integrals sind nun alle divergenten Terme in Form von Polen im Endergebnis isoliert und können so leicht kontrolliert werden. Ein praktischer Vorteil der dimensionalen Regularisierung ist nicht nur der Fakt, dass Eich- und Lorentzinvarianz gewahrt werden, sondern auch, dass infrarot- und ultraviolett-divergente Integrale in gleicher Weise regularisiert werden [34]. Zusätzlich verschwinden skalenlose Integrale in diesem Schema per Definition, was die Anwendung in manchen Näherungen (z.B. im chiralen Limit) erleichtert. Im Folgenden wird in dieser Arbeit stets von der dimensionalen Regularisierung Gebrauch gemacht. Man beachte hierbei, dass die Regularisierung eine rein mathematische Prozedur und somit willkürlich ist. Sie verändert die physikalische Struktur der betrachteten Größen nicht. Ausführlichere Informationen zu diesem Themenkomplex sind in [47, 48] zu finden.

Sind Divergenzen nun in einem Term isoliert, können sie durch Redefinition der Parametern entfernt werden (*Renormierung*). Da schon die Regularisierung ein frei wählbarer Prozess ist, trifft dies auch auf die Renormierung zu. Auch hier muss ein bestimmtes *Renormierungsschema* gewählt und benannt werden. Ähnlich der Vielfalt bei der Wahl des Regularisierungsschemas wurde seit der Etablierung der Quantenfeldtheorien eine Vielzahl verschiedener Renormierungsschemata entwickelt. Während in der QED beispielsweise vor allem die sog. *On-Shell-Renormierung* in Gebrauch ist, wird in der QCD heute meistens das *modified minimal subtraction* ( $\overline{\text{MS}}$ )-Schema [49] verwendet. Dieses Schema ist speziell auf die dimensionale Regularisierung angepasst, denn in dieser treten charakteristisch neben dem divergenten Polterm immer auch einige endliche Konstanten auf. Im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema sind diese

$$\Delta = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi . \quad (1.19)$$

Die  $\overline{\text{MS}}$ -Renormierung entfernt also nicht nur den Polterm, sondern auch die charakteristischen Konstanten. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird - wenn nicht explizit anders benannt - das  $\overline{\text{MS}}$ -Schema verwendet. Als Beispiel zur Entfernung der Divergenzen sei die auch für die Zwecke dieser Arbeit relevante Renormierung des Fermionpropagators genannt. Ein masseloser Quarkpropagator mit dem Impuls  $q$  und einer Schleifenkorrektur kann dargestellt werden als

$$S = -\frac{1}{\not{q}} \frac{1}{1 + K} , \quad (1.20)$$

wobei  $K$  die Gluonkorrektor zum Propagator in führender Ordnung darstellt. Dieser Propagator wird mit einer Konstante  $Z_2$  multipliziert, welche in Ordnungen der Koppelungskonstante  $\alpha_s$  entwickelt wird:

$$Z_2 \cdot S_R = S , \quad Z_2 = 1 - \frac{\alpha_s}{\pi} z_2 + \mathcal{O}(\alpha_s^2) . \quad (1.21)$$

Die Bezeichnung dieser Konstanten - insbesondere die Indizierung - ist historisch begründet. Der *renormierte* Propagator  $S_R$  wird unter geeigneter Wahl von  $Z_2$  endlich. Schließlich liefert die Kombination von (1.21) mit (1.20)

$$S_R = \frac{1}{\not{q}} \frac{1}{1 + \frac{\alpha_s}{\pi} K - \frac{\alpha_s}{\pi} z_2}, \quad (1.22)$$

unter Vernachlässigung von höheren Ordnungen in  $\alpha_s$ . Eine geeignete Wahl von  $z_2$  subtrahiert die Divergenzen in  $K$  - der Propagator  $S_R$  ist dann endlich. Der Subtraktionsterm  $z_2$  wird in der Literatur als *Konterterm* (engl. *Counterterm*) bezeichnet. Formal führt seine Implementierung in der Lagrangedichte zu Termen, welche divergierende Terme „kontern“. Man erhält den gewünschten Faktor  $Z_2$  durch eine Redefinition der betrachteten Quarkfelder. Weitere Divergenzen können analog durch die Redefinition anderer Parameter wie Masse ( $Z_m$ ) und Kopplung ( $Z_g$ ) entfernt werden. Gelingt dies für eine Theorie mit endlich vielen Parametern, so heißt die Theorie *renormierbar*. Man beachte, dass  $Z_2$  auch im Wesentlichen davon abhängt, in welcher Ordnung  $\alpha_s$  die vorliegende Theorie betrachtet wird. In dieser Arbeit werden jedoch höchstens Berechnungen in der Ordnung  $\alpha_s$  auftreten, daher werden später die Renormierungskonstanten auch unter dieser Maßgabe gewählt.

### 1.4.3. Skalenabhängigkeit der Parameter

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass die Renormierung eine Renormierungsskala  $\mu$  impliziert, welche durch die benötigte Redefinition der Parameter auch in diese eingeht. Massen, Kopplungen und Felder sind folglich nun keine konstanten Werte mehr, sondern *skalenabhängig*. Da dieses Verhalten für die späteren Ergebnisse von einiger Wichtigkeit ist, soll diese Skalenabhängigkeit hier behandelt werden.

Man quantifiziert die Skalenabhängigkeit von Parametern innerhalb einer Theorie mit der zugehörigen *Renormierungsgruppengleichung* (RGG). Für das  $\overline{\text{MS}}$ -Schema ist die genaue Herleitung der RGG in [34] dargestellt. Betrachtet man zunächst die Kopplung  $g_s$ , so lautet die RGG

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} g_{s,0}, \quad (1.23)$$

wobei  $g_{s,0}$  die „blanke“, nicht skalenabhängige Kopplung darstellt. Analog zum Vorgehen im letzten Abschnitt kann diese Kopplung nun durch Multiplikation einer entsprechenden Renormierungskonstante redefiniert werden, um Divergenzen zu absorbieren,

$$g_{s,0} = \mu^\epsilon Z_g(\mu) g_{s,R}. \quad (1.24)$$

Der hier auftretende Vorfaktor ist ein Überbleibsel der dimensional Regularisierung, welche den Kopplungen eine für  $\epsilon \rightarrow 0$  verschwindende Massendimension zuweist. Durch Einsetzen von (1.24) in (1.23) erhält man nun die gewünschte Skalenabhängigkeit der Kopplung. Sie wird durch die *Symanziksche Betafunktion*  $\beta(g_{s,R})$  beschrieben,

$$\beta(g_{s,R}) = \mu \frac{dg_{s,R}}{d\mu} = \frac{dg_{s,R}}{d \ln \mu} = -\epsilon g_{s,R} - \mu \frac{g_{s,R}}{Z_g} \frac{dZ_g}{d\mu}. \quad (1.25)$$

Diese Betafunktion ist für die Skalenabhängigkeit von zentraler Bedeutung. Eine Entwicklung in Ordnungen der Kopplung ergibt

$$\beta(g_{s,R}) = -\beta_0 \frac{g_{s,R}^3}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(g_{s,R}^5). \quad (1.26)$$

In dieser Arbeit werden nur Probleme mit Ein-Schleifen-Korrektur betrachtet, daher ist in diesem Kontext nur der führende Koeffizient  $\beta_0$  maßgeblich. Dieser ist unabhängig vom verwendeten Renormierungsschema gegeben als

$$\beta_0 = 11N_C - \frac{2}{3}n_f, \quad (1.27)$$

mit  $N_C$  als der Anzahl der Farben in der  $SU_C(N)$ -Eichtheorie und  $n_f$  als der Anzahl der Flavours. Für eine ausführlichere Herleitung sei wiederum auf [34] verwiesen. Schreibt man die Differentialgleichung (1.23) mit  $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$  und löst diese Gleichung, erhält man das Verhalten der laufenden Kopplung (engl. *running coupling*) in der QCD in führender Ordnung

$$\alpha_s(\mu) = \frac{\alpha_s(\mu_0)}{1 + \frac{\alpha_s(\mu_0)}{4\pi} \beta_0 \ln\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right)}. \quad (1.28)$$

Mehrere Aspekte sind an dieser Stelle anzumerken: Zum einem enthält (1.28) die Referenzskala  $\mu_0$ , welche als die Energieskala zu identifizieren ist, bei der  $\alpha_s$  gemessen wird. Das bedeutet, dass zur Bestimmung der laufenden Kopplung eine experimentelle Messung notwendig ist. Zum anderen zeigt sich in Gleichung (1.28) eine zentrale Eigenschaft der QCD: Da  $\beta_0$  nach (1.27) für die QCD positiv ist, ergibt sich für die gesamte Betafunktion ein negativer Wert, und die Stärke der Kopplung nimmt mit steigender Energie ab. Insbesondere gilt

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \alpha_s(\mu) = 0, \quad (1.29)$$

womit die *asymptotische Freiheit* der QCD gezeigt ist.

Umgekehrt lässt sich mit  $\mu \rightarrow \Lambda_{\text{QCD}}$  die charakteristische QCD-Skala  $\Lambda_{\text{QCD}}$  als Landaupol der Kopplung finden. Sie kennzeichnet den Energiebereich, in dem die Kopplung groß genug wird, so dass die Quarks hadronisieren - eine störungstheoretische Behandlung ist damit nicht mehr möglich. Ihr experimenteller Wert ist mit etwa 200–300 MeV ermittelt [7].

Mit ähnlicher Vorgehensweise kann die Skalenabhängigkeit der Masse und der Felder durch eigene Renormierungsgruppengleichungen bestimmt werden. Durch Lösung dieser RGG können sie von einem experimentell bestimmten Punkt mit der Referenzskala  $\mu_0$  auf einen anderen Skalenpunkt  $\mu$  extrapoliert werden. Der entsprechende Faktor ist  $L(\mu, \mu_0) = \alpha_s(\mu)/\alpha_s(\mu_0)$ . Für die Quarkmasse  $m_Q(\mu)$  ist die Skalenabhängigkeit explizit

$$m_Q(\mu) = m_Q(\mu_0) \cdot L(\mu, \mu_0)^{\frac{2}{\beta}}, \quad (1.30)$$

wobei  $\gamma$  die *anomale Dimension* des Parameters bezeichnet. In für dieser Arbeit relevanter Ordnung erhält man sie aus den RGG zu

$$\gamma = \frac{\mu}{Z_m^{1/2}} \frac{dZ_m^{1/2}}{d\mu}, \quad (1.31)$$

mit  $Z_m$  als der Massenrenormierungskonstanten. Diese ist mit der Renormierungskonstanten des später verwendeten  $\bar{q}q$ -Operators verknüpft durch

$$Z_{\bar{q}q} = Z_m^{-1}, \quad (1.32)$$

so dass beispielsweise die Kombination  $m_q \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle$  keine Skalenabhängigkeit besitzt.

Damit sind die zentralen Punkte der Renormierung für die spätere explizite Verwendung erläutert worden.

## 1.5. Motivation und Gliederung

Wie in den vorherigen Abschnitten dargelegt, bietet der Flavoursektor und insbesondere die CKM-Matrix einige Gebiete zur Prüfung des Standardmodells. Um eine Theorie zu bestätigen oder ggf. Anhaltspunkte für neue Physik zu entdecken, müssen physikalische Größen mit großer Präzision vermessen und mit ihrer theoretischen Vorhersage verglichen werden.

Aus diesem Grund muss die Genauigkeit auf der Theorieseite mit der experimentellen Schritt halten. Ein Beispiel für diesen Sachverhalt ist die  $CP$ -Verletzung (s. Abschnitt 1.3). Gleichung (1.16) impliziert, dass die schweren Quarks der dritten Familie für die  $CP$ -Verletzung im Standardmodell verantwortlich sind, in der Visualisierung des Unitaritätsdreiecks in Abb. 1.1 bedeutet das, dass die  $CP$ -Verletzung mit der Fläche des Dreiecks zusammenhängt. Um die einzelnen Matrixelemente und somit letztendlich die vier freien Parameter der CKM-Matrix zu bestimmen, können daher entsprechende schwache Zerfälle betrachtet werden.

Wie in Kapitel 1.4.1 erwähnt, stellen Heavy-Light-Mesonen für diese Aufgabe aufgrund ihrer guten experimentellen Zugänglichkeit und erleichterter theoretischer Behandlung geeignete Kandidaten dar. Sie bieten außerdem Zugriff auf die aus genannten Gründen besonders interessanten CKM-Matrixelemente wie z.B.  $V_{ub}$ . Ein entsprechender Prozess ist beispielsweise der leptonische Zerfall  $B \rightarrow l\nu_l$ . Seine Zerfallsbreite ist gegeben durch

$$\Gamma(B \rightarrow l\nu_l) = \frac{G_F^2}{8\pi} |V_{ub}|^2 m_B m_l^2 \left(1 - \frac{m_l^2}{m_B^2}\right)^2 f_B^2, \quad (1.33)$$

mit der Fermikonstanten  $G_F$ . Hier ist sowohl das erwähnte Matrixelement  $V_{ub}$  enthalten, als auch die *Zerfallskonstante*  $f_B$ . Dieser hadronische Parameter charakterisiert die Wellenfunktion des  $B$ -Mesons am Ursprung und bietet ein Maß für den Zerfall des Teilchens. Um durch Messung der Zerfallsbreite den Parameter  $V_{ub}$  extrahieren zu können, muss die Zerfallskonstante daher zuvor bestimmt werden. Die praktische Realisierung ist wegen der starken Unterdrückung durch die Leptonmasse schwierig - lediglich der Prozess

$B \rightarrow \bar{\tau}\nu_{\tau}$  ist aufgrund der hohen Masse des  $\tau$ -Leptons derzeit experimentell zugänglich. Perspektivisch soll dies auch für  $B \rightarrow \bar{\mu}\nu_{\mu}$  geschehen. Aufgrund dieser Probleme ist eine genaue Bestimmung der restlichen Parameter umso wichtiger.

Zerfallskonstanten finden allerdings auch auf andere Weise Eingang in wichtige Betrachtungen: Auf der Suche nach neuer Physik sind Flavour-ändernde neutrale Ströme (engl. *flavour changing neutral currents* (FCNC)) ein oft genutztes Untersuchungsfeld, und ein solcher FCNC-Zerfall  $B_s \rightarrow \mu^+\mu^-$  [50] benötigt beispielsweise eine möglichst genaue Kenntnis von  $f_{B_s}$ . Die Größen  $f_{B(D)}$  stellen außerdem wichtige Parameter bei der Beschreibung von hadronischen Zerfällen wie  $B(D) \rightarrow \pi$  durch Formfaktoren  $F_{B\pi}^+$  bzw.  $F_{D\pi}^+$  dar.

Die Zerfallskonstanten für vektorielle Ströme  $f_{B^*}$  und  $f_{D^*}$  sind durch schwache Zerfälle zwar nicht direkt zugänglich, sind aber ein wichtiger Bestandteil der Bestimmung *starker Kopplungen*  $B^*B\pi$  bzw.  $D^*D\pi$  und bieten zudem in Kombination mit ihren pseudoskalaren Gegenstücken  $f_B$  und  $f_D$  eine Testmöglichkeit für die Verletzung der Spinsymmetrie schwerer Flavours.

Solche Zerfallskonstanten können nicht nur für die hadronischen Grundzustände  $H$  bestimmt werden, sondern auch für ihre Anregungszustände  $H'$ . *Radiale Anregungen* sind für leichte Mesonen in einigen Fällen gemessen worden, so gibt es derzeit beispielsweise mindestens sechs nachgewiesene radiale Anregungen für das  $J/\psi$ -Meson, und auch für  $\Upsilon(1S)$  und  $\rho(770)$  sind radiale Anregungen gemessen worden [3]. Aktuelle Experimente haben nun Kandidaten für radiale Anregungen von diversen Charm-Mesonen wie  $D$ ,  $D^*$  und  $D_s^*$  gefunden [51, 52, 53], es gibt zudem auch erste Hinweise auf entsprechende Anregungen für Bottom-Mesonen ( $B'$  und  $B^{*'}\prime$ ) [53, 54]. Vor diesem Hintergrund müssen die entsprechenden hadronischen Matrixelemente von theoretischer Seite aus berechnet werden, um die zugrunde liegende Theorie zu prüfen. In einigen älteren Arbeiten werden solche Resonanzen thematisiert [55, 56], eine Untersuchung im Rahmen von Borelsummenregeln fehlt jedoch bisher.

Auch schwache Zerfälle wie  $B \rightarrow D'l\nu_{\bar{l}}$  sind Gegenstand aktueller Forschungen [57, 58], so dass die Charakteristika der beteiligten Mesonen von Interesse sind. Schließlich kann das Wissen um die Zerfallskonstanten von radialen Anregungen ebenso wie im Fall der Grundzustandszerfallskonstanten zusätzlich genutzt werden, um die Genauigkeit der Berechnungen für starke Kopplungen zu erhöhen.

Diese starken Kopplungen  $g_{H^*H\pi}$  spielen eine wichtige Rolle in der Bestimmung von Formfaktoren wie  $F_{B\pi}^+$  oder  $F_{D\pi}^+$  und gehen somit in die Untersuchung für Zerfälle wie  $D \rightarrow \pi l\nu_{\bar{l}}$  und  $B \rightarrow \pi l\nu_{\bar{l}}$  ein. Die Kopplung  $g_{D^*D\pi}$  ist zusätzlich in Zerfällen wie  $D^* \rightarrow D\pi$  direkt messbar und so können theoretische Vorhersagen für diesen Parameter sofort geprüft werden. Als weiteres Anwendungsgebiet ist die  $H\chi$ PT (engl. *Heavy Chiral Perturbation Theory*) zu nennen, in der die starke Kopplung im Grenzübergang für schwere Quarks (engl. *Heavy Quark Limit*) ein wichtiger Parameter ist.

Die genannten hadronischen Matrixelemente können in der QCD mit verschiedenen Methoden berechnet werden. In dieser Arbeit wird der QCD-Summenregel-Formalismus benutzt, der sich im Prinzip auf die *Quark-Hadron-Dualität* als Approximation zwischen

einem Bereich der asymptotischen Freiheit und der hadronischen Darstellung des Systems stützt. Eine weitere Methode stellt die Gitter-QCD dar, bei der wechselwirkende Felder auf einem diskretisierten Gitter fixiert werden und anschließend in einer numerischen Auswertung per Computersimulation die Pfadintegrale der Eichtheorie berechnet werden. Für ein unendlich großes Gitter und einen infinitesimalen Gitterabstand ist diese Technik identisch mit der kontinuierlichen Eichtheorie. Diese komplementären Ansätze bieten jeweils eine gute Möglichkeit, die bestimmten Größen unabhängig voneinander gegenseitig zu überprüfen.

Die Gliederung dieser Arbeit ist im Weiteren wie folgt: Zunächst werden in Kapitel 2 die Technik der QCD-Summenregel erläutert und entsprechende Summenregeln für die spätere Verwendung hergeleitet. Anschließend wird in Kapitel 3 die Berechnung des hadronischen Matrixelementes  $f_H$  für diverse schwere Mesonen mit Zweipunktsummenregeln durchgeführt. Ein besonderer Fokus liegt dabei auf den nichtperturbativen Beiträgen in führender (LO) und nächstführender (NLO) Ordnung, wobei in der Analyse für vektorielle Ströme erstmals die NLO-Korrektur für das Quarkkondensat einbezogen wird. Das anschließende Kapitel 4 beschäftigt sich darauf aufbauend mit der Bestimmung der Zerfallskonstanten  $f_{H'}$  für angeregte Zustände der bereits genannten schweren Mesonen. Dabei wird von einer neuen Anpassungstechnik für die Fixierung des Grenzparameters  $s_0^{H'}$  Gebrauch gemacht.

Den inhaltlichen Abschluss der Arbeit bildet Kapitel 5, in dem die starke Kopplung  $g_{H^*H\pi}$ ,  $H = \{D, B\}$  unter Verwendung von Lichtkegelsummenregeln untersucht wird. Hier werden die Beiträge in führender Ordnung aktualisiert und eine allgemeine Form zur Behandlung dieser Beiträge hergeleitet. Neben einer Analyse der Kopplungen in führender Ordnung werden zusätzlich auch die Kopplungen an radial angeregte Zustände untersucht. Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse und einer kurzen Diskussion in Kapitel 6.

## 2. QCD-Summenregeln für schwere Mesonen

Die Projekte dieser Arbeit zur Bestimmung hadronischer Matrixelemente stützen sich auf die Methode der *QCD-Summenregeln*. Dabei stehen vor allem die *Zweipunktsummenregeln* zur Bestimmung hadronischer Zerfallskonstanten, sowie die *Lichtkegelsummenregeln* zur Beschreibung starker Kopplungen im Vordergrund. In den folgenden Abschnitten werden Grundlagen, Unterschiede in den Methoden und wichtige Details zur späteren Anwendung diskutiert.

Eine Relation, in der eine Summe von Matrixelementen durch eine Funktion in Abhängigkeit der kinematischen Variablen ausgedrückt werden kann, wird im Allgemeinen als *Summenregel* bezeichnet. Ihre erste Anwendung im Bereich der QCD geht auf die genannten Zweipunktsummenregeln im Jahre 1979 zurück (s. Kapitel 2.2). Konzeptionell orientieren sich beide Summenregeln dabei an gleichen Eckpunkten: Beide Techniken verknüpfen die hadronische Darstellung einer *Korrelationsfunktion* durch die *Quark-Hadron-Dualität* (QHD) mit einer *Operatorproduktentwicklung* (OPE), so dass eine Relation zwischen hadronischen Größen auf der einen Seite und *Wilsonkoeffizienten* in Kombinationen mit Vakuumerwartungswerten von Operatoren auf der anderen Seite entsteht. Dies wird in den folgenden Unterkapiteln näher erläutert.

Weiterführende Literatur zum Thema QCD-Summenregeln findet sich z.B. in [59, 60, 61].

### 2.1. Operatorproduktentwicklung

Die *Operatorproduktentwicklung* stellt für die betrachteten QCD-Summenregeln einen zentralen Bestandteil dar. Zur späteren Anwendung dieser Technik werden die nötigen Grundlagen in diesem Abschnitt behandelt. Literatur zur OPE und ihrer Verwendung im Rahmen der Quantenfeldtheorien findet sich z.B. in [7, 62, 63].

Ein Produkt zweier lokaler Operatoren  $A(x)$  und  $B(0)$  ist für den Grenzübergang  $x \rightarrow 0$  nicht wohldefiniert. Als Beispiel wird der Vakuumerwartungswert für das zeitgeordnete Produkt  $T$  eines massiven Skalarfeldes  $\phi(x)$  betrachtet, welches als Propagator identifiziert wird:

$$\langle 0|T\{\phi(x)\phi(0)\}|0\rangle = i \int \frac{d^4k}{(2\pi^4)} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.1)$$

Dieser Ausdruck ist für  $x \rightarrow 0$  divergent, ebenso das allgemeine Produkt von  $n$  Feldoperatoren  $\phi(x_0)\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)$ . Während dieses Problem für freie Felder durch die

Einführung des sog. *Normalproduktes* [7]

$$: \phi(x)\phi(0) : := \phi(x)\phi(y) - \langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle \quad (2.2)$$

behoben werden kann, muss für wechselwirkende Felder eine andere Lösung gefunden werden. K.G. Wilson schlug 1969 vor, das Produkt der Operatoren  $A(x)$  und  $B(0)$  als eine Linearkombination von lokalen Operatoren  $O$  mit gleichen globalen Quantenzahlen darzustellen [64]

$$A(x)B(0) = \sum_D C_D(x)O_D(0), \quad (2.3)$$

wobei nur die *Wilsonkoeffizienten*  $C_D(x)$  von  $x$  abhängen. Diese Entwicklung ist unabhängig von der Art und der Separation anderer in Kombination mit diesen Operatoren auftretenden Feldern.

Der Vakuumerwartungswert eines zeitgeordneten Produktes mit beliebigen Operatoren  $A(x)$  und  $B(0)$  in Kombination mit weiteren Feldern  $\phi(x)$  kann durch die OPE geschrieben werden als

$$\begin{aligned} & \langle 0|T\{\phi(x_0)\phi(x_1)\cdots A(x)B(0)\cdots\phi(x_{n-1})\phi(x_n)\}|0\rangle \\ &= \sum_D C_D(x)\langle 0|T\{\phi(x_0)\phi(x_1)\cdots O_D(0)\cdots\phi(x_{n-1})\phi(x_n)\}|0\rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Zur Anwendung innerhalb der QCD, in der die Felder  $\phi(x)$  beispielsweise mit Quarkfeldern und die Operatoren  $A(x)$ ,  $B(0)$  mit interpolierenden Strömen  $J(x)$  identifiziert werden, erhält man eine Entwicklung mit unendlich vielen Operatoren  $O_D(0)$  von aufsteigender Massendimension  $D$ . Die Gültigkeit der OPE ist in der Störungstheorie bewiesen, in dieser Arbeit wird sie darüber hinaus auch in nichtperturbativen Anwendungen benutzt.

## 2.2. Zweipunktsummenregeln

In der QCD wurden Summenregeln zum ersten Mal Ende der 70er Jahre in Form der *Zweipunktsummenregeln* zur Untersuchung hadronischer Systeme eingesetzt. M.A. Shifman, A.I. Vainshtein und V.I. Zakharov beschrieben mit ihrer Hilfe 1979 die Eigenschaften von leichten Mesonen ( $\rho, K^*, \phi$ ) und Charmoniumresonanzen [65, 66]. Aus diesem Grunde werden diese Summenregeln wahlweise auch als *SVZ-Summenregeln* bezeichnet.

Die Zweipunktsummenregeln sind für diese Arbeit aus zwei Gründen von hervorgehobener Bedeutung: Sowohl als theoretisches Beispiel, um die grundsätzliche Funktionsweise von QCD-Summenregeln zu verdeutlichen als auch als praktische Technik, um benötigte Quantitäten wie hadronische Matrixelemente zu berechnen. Neben diesen Matrixelementen können auch andere Parameter wie Quarkmasse (s. z.B. [67, 68]) und Vakuumerwartungswerte von Operatoren (s. z.B. [65]) durch Summenregeln bestimmt werden.

Die wichtigsten Punkte ihrer Herleitung werden in den nächsten Unterkapiteln dargelegt.



### 2.2.1. Zweipunktkorrelationsfunktion und Zerfallskonstanten

Zentral für die Methode der QCD-Summenregeln ist die *Korrelationsfunktion*. Für die hier betrachteten schweren Mesonen ist die *Zweipunktkorrelationsfunktion* definiert als das zeitgeordnete Produkt der korrespondierenden Quark-Antiquark-Ströme. Für Pseudoskalar- und Vektorströme erhält man

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(q^2) &= i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | \mathcal{T} \{ J_\mu^{H^*}(x) J_\nu^{H^*\dagger}(0) \} | 0 \rangle = \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) \Pi_T(q^2) + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \Pi_L(q^2), \\ \Pi_5(q^2) &= i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | \mathcal{T} \{ J_5^H(x) J_5^{H\dagger}(0) \} | 0 \rangle,\end{aligned}\quad (2.5)$$

mit den interpolierenden Strömen

$$J_\mu^{H^*} := \bar{q} \gamma_\mu Q, \quad J_5^H := \bar{q} i \gamma_5 Q, \quad (2.6)$$

wobei  $Q$  ( $q$ ) das schwere (leichte) Quarkfeld bezeichnet. Die kinematische Variable  $q^2$  stellt im Minkowskiraum die invariante Masse des jeweiligen Prozesses dar. Sie ist mit dem Impulsübertrag  $Q^2$  der eingehenden und ausgehenden Wechselwirkungspartner über  $-q^2 = Q^2$  verknüpft.

Für den Vektorstrom wurde die Korrelationsfunktion in einen transversalen Anteil  $\Pi_T(q^2)$  und einen longitudinalen Anteil  $\Pi_L(q^2)$  aufgespalten - die gesamte Information für das Vektormeson  $H^*$  ist im transversalen Anteil enthalten, weswegen im weiteren Verlauf dieser an Stelle der kompletten Korrelationsfunktion verwendet wird.

Die Korrelationsfunktion parametrisiert die Dynamik des betrachteten Stromes und enthält Informationen über dessen hadronische Struktur. Gleichzeitig bietet sie, in anderer Darstellung, eine Möglichkeit zur perturbativen Berechnung mittels OPE. Dies wird in den nachfolgenden Kapiteln ausführlicher erläutert.

Die für diese Arbeit zentralen schwachen leptonenischen Zerfälle (s. Kapitel 1.5) werden durch einen Strom mit der Diracstruktur  $\gamma_\mu(1-\gamma_5)$  (auch als *V-A-Strom*  $J_{\mu,5}^H$  bezeichnet) vermittelt. Die sog. *Zerfallskonstanten*  $f_H$  von pseudoskalaren (Spinparität  $J^P = 0^-$ ) und vektoriellen (Spinparität  $J^P = 1^-$ ) Mesonen sind nun über die hadronischen Matrixelemente der Ströme definiert:

$$\langle 0 | J_{\mu,5}^H | H(q) \rangle =: i f_H q_\mu \quad (2.7)$$

und

$$\langle 0 | J_\mu^{H^*} | H^*(q, \lambda) \rangle =: m_{H^*} f_{H^*} \epsilon_\mu(q, \lambda). \quad (2.8)$$

Anstelle des Axialvektorstromes in Gleichung (2.7) kann auch eine andere Parametrisierung verwendet werden, die sich durch die Multiplikation von (2.7) mit dem Viererimpuls  $q^\mu$  ergibt. Dieser entspricht im Ortsraum einer Ableitung  $-i\partial^\mu$ , man erhält durch Anwendung der Diracgleichung

$$\langle 0 | \partial^\mu \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 Q | H(q) \rangle = (m_Q + m_q) \langle 0 | \bar{q} i \gamma_5 Q | H(q) \rangle, \quad (2.9)$$

mit den entsprechenden Quarkmassen  $m_q$  und  $m_Q$ . In dieser Arbeit wird nun weiterhin die Relation

$$(m_Q + m_q)\langle 0|\bar{q}i\gamma_5 Q|H(q)\rangle = f_H m_H^2 \quad (2.10)$$

verwendet. Physikalisch ist die Zerfallskonstante mit der Wellenfunktion des Mesons am Ursprung verknüpft. Sie bietet daher in diesem Kontext ein Maß für den Zerfall des Mesons. Als hadronischer Parameter ist sie für viele weitere Anwendungen in der Flavourphysik von Bedeutung.

Zur Herleitung der Summenregel muss diese Korrelationsfunktion nun in zwei kinematischen Regionen betrachtet werden:

- Für  $q^2 \gtrsim m_Q^2$ : Ist das Impulsquadrat  $q^2$  ausreichend groß, um physikalische Mesonmassen  $m_H$  mit den entsprechenden Quantenzahlen zu bilden, so können hadronische Zwischenzustände produziert werden. Hier tritt die hadronische Zerfallskonstante  $f_H$  als Parametrisierung eines entsprechenden Matrixelementes (s. Gleichung (2.7) und (2.8)) auf. Allerdings ist die Berechnung dieser Konstante aus dieser Darstellung alleine heraus nicht möglich, da die zugehörige Spektraldichte  $\rho^{\text{had}}(s)$  experimentell nicht vollständig bestimmt werden kann und somit als unbekannt angenommen werden muss.
- Für  $q^2 \ll m_Q^2$ : In der Region der *asymptotischen Freiheit* können Quarks als frei propagierende Teilchen behandelt werden. Durch die OPE (s. Abschnitt 2.1) kann die Korrelationsfunktion nun in dimensionsgeordnete Matrixelemente und Wilsonkoeffizienten entwickelt werden. Während die nichtperturbativen Matrixelemente (*Kondensate*) prozessunabhängig sind, können die Wilsonkoeffizienten perturbativ berechnet werden. Da in diesem Impulsbereich keine Hadronisierung stattfindet, kann diese Darstellung alleine nicht zur Berechnung von  $f_H$  herangezogen werden.

Um die hadronischen Matrixelemente aus diesen Darstellungen zu extrahieren, müssen sie folgend in eine ähnliche Form gebracht und mit der Quark-Hadron-Dualität verknüpft werden.

### 2.2.2. Hadronische Darstellung der Korrelationsfunktion

In diesem Abschnitt wird die hadronische Darstellung der Korrelationsfunktion in der Region  $q^2 \gtrsim m_Q^2$  betrachtet. In der Literatur findet man verschiedene Ansätze, in denen ein vollständiger Satz hadronischer Zwischenzustände mit den korrespondierenden Quantenzahlen in die Definition der Korrelationsfunktion (2.5) eingesetzt wird (s. z.B. [69]). Allerdings tritt bei dieser Herleitung der Feynmanpropagator eines Mesons auf, was physikalischer Interpretation bedarf. In dieser Arbeit soll jedoch stattdessen die Unitarität der Streumatrix  $S$  verwendet werden. In vielen Berechnungen hat sich diese Methode als praktikabel und verlässlich erwiesen, die Berechnung von Streumatrixelementen aus der Korrelationsfunktion einer entsprechenden Quantentheorie ist beispielsweise der Inhalt der LSZ-Reduktionsformel [70] (benannt nach H. Lehmann, K. Symanzik and W.

Zimmermann). Das zugrundeliegende Prinzip ist in Anhang B.1 für einen Vektorstrom ausführlich dargelegt.

Die Verknüpfung zwischen der Zerfallskonstante nach Definition (2.7) bzw. (2.10) und der Korrelationsfunktion ergibt sich demnach zu

$$\text{Im}\Pi_{\mu\nu(5)}^{\text{had}}(q) = \overline{\int} \langle 0|J_{\mu(5)}|H\rangle\langle H|J_{\nu(5)}|0\rangle d\tau_H, \quad (2.11)$$

mit dem Phasenraum für ein Ein-Teilchen-System  $d\tau_H$  (s. Gleichung (B.9)). In der Literatur ist die Verwendung einer verwandten Größe üblich, der *hadronischen Spektraldichte*  $\rho(s)$ . Im vektoriellen Fall lautet sie für einen Ein-Teilchen-Zustand

$$\rho^{\mu\nu}(s) = \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\rho(s) = \sum_H 2\pi\delta(m_H^2 - s)\langle 0|J_\mu|H\rangle\langle H|J_\nu|0\rangle, \quad (2.12)$$

wobei die Masse  $m_H$  des Hadrons in diesem Fall durch  $q_H^2 = m_H^2$  gegeben ist, da die Hadronen sich hier auf der Massenschale befinden. Die Aufteilung in einen skalaren Anteil  $\rho(s)$  und die Lorentzstruktur ergibt sich durch Einsetzen der Definition der Zerfallskonstanten (2.8) und Ausführung der Polarisationssumme. Physikalisch ist die Größe  $\rho(s)$  als die Verteilung der Hadronzustände in Relation zur Schwerpunktsenergie  $s$  zu sehen (s. Abb. 2.1).

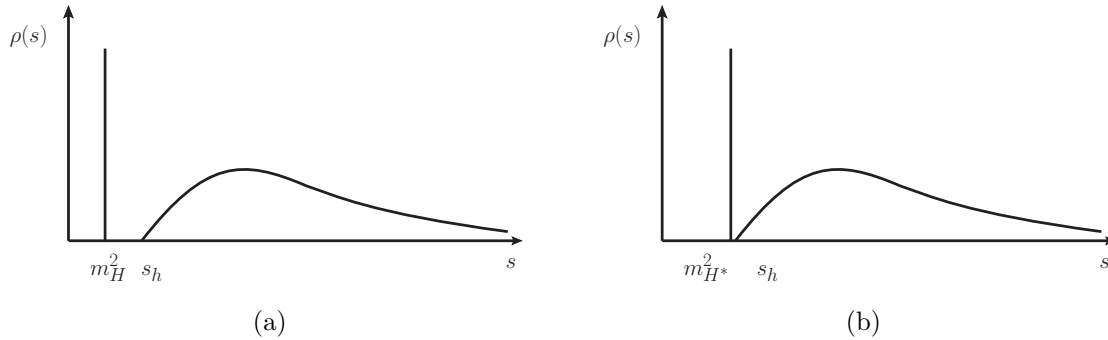


Abbildung 2.1.: Schematische Darstellung der hadronischen Zustandsdichte für einen a) pseudoskalaren Strom und b) vektoriellen Strom mit Grundzustand  $s_{\min} = m_{H^*}^2$ .

Um einen Hadronzustand mit den Quantenzahlen des korrespondierenden Stromes zu erzeugen, muss die Energie mindestens so groß wie die entsprechende Masse sein. Daher ist die Spektraldichte unterhalb der Masse des leichtesten Zustandes Null. Nach diesem Grundzustand bei  $m_{H^*}$  folgt ein Kontinuum von höheren Resonanzen und Mehrteilchenzuständen mit den gleichen Quantenzahlen, dessen Grenzparameter folgend mit  $s_h$  bezeichnet wird.

Im Falle des pseudoskalaren Kanals besteht eine Lücke zwischen Grundzustand und Kontinuum (s. Abb. 2.1), während dies für den vektoriellen Kanal nicht der Fall ist. Hier liegt die Grenze des einsetzenden Kontinuums  $s_h = (m_H + m_P)^2$  sehr nah am Grundzustand  $H^*$ . Mit  $m_P$  wird die Masse des leichtesten pseudoskalaren Mesons ( $\pi$  oder  $K$ )

bezeichnet, welche abhängig vom Quarkinhalt des schweren Mesons gewählt wird. Die durch die großen Zerfallsbreiten überlappenden Zustände erzeugen das oben genannte Kontinuum, höhere Zustände wurden jedoch in Abb. 2.1 nicht eingezeichnet, da diese durch die spätere Kontinuumssubtraktion für diese Rechnung keine Rolle spielen. Außerdem ist der Grundzustand selbst in Form einer scharfen Linie dargestellt, da dieser in den späteren Berechnungen mit einer Deltafunktion modelliert wird. Streng genommen verfügt aber auch der Grundzustand über eine gewisse Breite, die man mit einer Breit-Wigner-Verteilung in die Berechnung einbeziehen kann. Die Approximation per Deltafunktion ist für die Grundzustandszerfallskonstanten allerdings gerechtfertigt, da ihre Breiten tatsächlich sehr klein sind.

Zur Isolierung der Zerfallskonstanten wird der entsprechende Grundzustand mit der erwähnten Deltafunktion modelliert und herausgeschrieben:

$$\begin{aligned}\rho_T(s) &= f_{H^*}^2 m_{H^*}^2 \delta(s - m_{H^*}^2) + \rho_T^{\text{had}}(s) \theta(s - (m_H + m_P)^2), \\ \rho_5(s) &= f_H^2 m_H^4 \delta(s - m_H^2) + \rho_5^{\text{had}}(s) \theta(s - (m_{H^*} + m_P)^2),\end{aligned}\quad (2.13)$$

wobei  $\rho_{T(5)}^{\text{had}}(s)$  die Zustandsdichte des hadronischen Kontinuums bezeichnet. Durch die gleiche Lorentzstruktur korrespondiert  $\rho(s)$  zum transversalen Anteil der Korrelationsfunktion  $\Pi_T^{\text{had}}(q^2)$  gemäß Gleichung (2.5). Also lässt sich dieser mit Hilfe von Dispersionsrelationen (s. A.2) für den transversalen und pseudoskalaren Anteil ausdrücken als

$$\begin{aligned}\Pi_T^{\text{had}}(q^2) &= \frac{f_{H^*}^2 m_{H^*}^2}{m_{H^*}^2 - q^2} + \int_{s_h}^{\infty} \frac{\rho_T^{\text{had}}(s)}{s - q^2} ds, \\ \Pi_5^{\text{had}}(q^2) &= \frac{f_H^2 m_H^4}{m_H^2 - q^2} + \int_{s_h}^{\infty} \frac{\rho_5^{\text{had}}(s)}{s - q^2} ds,\end{aligned}\quad (2.14)$$

wobei  $s_h$  den Grenzparameter kennzeichnet, mit dem jeweils das unbekannte hadronische Kontinuum beginnt.

Die Gleichungen (2.14) enthalten nun die Zerfallskonstante  $f_{H^{(*)}}$ , allerdings auch die unbekannte und für schwere Mesonen nicht messbare spektrale Zustandsdichte  $\rho_{T(5)}^{\text{had}}(s)$ .

### 2.2.3. OPE-Darstellung der Korrelationsfunktion

Die hadronische Darstellung der Korrelationsfunktion wurde im vorherigen Abschnitt diskutiert. Jetzt wird die Korrelationsfunktion  $\Pi^{\text{OPE}}$  im Bereich  $q^2 \ll m_Q^2$  betrachtet. Die OPE der Korrelationsfunktionen aus Gleichung (2.5) ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(q^2) &= i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | \mathcal{T} \{ J_\mu(x) J_\nu^\dagger(0) \} | 0 \rangle = \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) \sum_D C_{D,T}(q^2, \mu) \langle 0 | O_D | 0 \rangle(\mu), \\ \Pi_5(q^2) &= i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | \mathcal{T} \{ J_5(x) J_5^\dagger(0) \} | 0 \rangle = \sum_D C_{D,5}(q^2, \mu) \langle 0 | O_D | 0 \rangle(\mu).\end{aligned}\quad (2.15)$$

Die *Wilsonkoeffizienten*  $C_{D,T(5)}(q^2, \mu)$  hängen vom Impulsquadrat  $q^2$  sowie der Renormierungsskala  $\mu$  ab. Die Vakuumerwartungswerte der Operatoren  $O_D$  sind dagegen prozessunabhängige, nichtperturbative Größen, die sog. (*Vakuum-*)*Kondensate*. Sie stellen

anschaulich gesprochen die Wechselwirkung des korrespondierenden Stromes im QCD-Vakuum dar und können in ausgewählten Prozessen z.B. durch Anpassung (engl. *fit*) an Messergebnisse bestimmt und dann generell verwendet werden.

Die OPE besitzt also die für Anwendungen in der QCD wichtige Eigenschaft, kurzreichweitige Beiträge (Wilsonkoeffizienten) von langreichweitigen, nichtperturbativen Beiträgen (Matrixelemente) zu trennen. Dies impliziert eine Trennungsskala  $\mu_T$ , die in der Regel gleich der Renormierungsskala gewählt wird, so dass  $\mu_T = \mu_R =: \mu$  gilt. In Gleichung (2.15) sind sowohl die Wilsonkoeffizienten als auch die Matrixelemente skalenabhängig, ihr Produkt ist allerdings jeweils skalenunabhängig. Für  $\mu \gg \Lambda_{QCD}$  ist die Berechnung der Wilsonkoeffizienten perturbativ möglich.

Nun werden die Dispersionsrelationen der Korrelationsfunktionen (2.15) gebildet (s. Abschnitt A.2):

$$\Pi_{T(5)}^{\text{OPE}}(q^2) = \int_{(m_Q+m_q)^2}^{\infty} \frac{\rho_{T(5)}^{\text{OPE}}(s)}{s-q^2} ds, \quad (2.16)$$

mit  $\rho_{T(5)}^{\text{OPE}}(s) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \Pi_{T(5)}^{\text{OPE}}(s)$ . Die Integration setzt bei der Masse der Konstituentenquarks  $(m_Q + m_q)^2$  ein und die konkreten Operatoren der OPE ergeben sich aus einer lokalen Entwicklung der Quarkfelder um  $x = 0$ ,

$$\bar{q}(x) = \bar{q}(0) + x^\mu \bar{q}(x) \overleftarrow{\partial}_\mu \Big|_{x=0} + \frac{1}{2} x^\mu x^\nu \bar{q}(x) \overleftarrow{\partial}_\mu \overleftarrow{\partial}_\nu \Big|_{x=0} + \dots \quad (2.17)$$

Diese Entwicklung ist möglich, da in diesem Bereich die kurzreichweitigen Beiträge dominieren [59]. Nach Anwendung des *Wick-Theorems* [71] und Kontraktion der schweren Quarkfelder (zur Ausführung s. Anhang B.2.1 und folgend) erhält man die entsprechenden Matrixelemente. Bis  $D = 6$  lauten sie:

D=0:	$\langle 0   \mathbb{1}   0 \rangle$	Perturbativer Beitrag ,
D=3:	$\langle 0   \bar{q}q   0 \rangle$	Quarkkondensat ,
D=4:	$\langle 0   \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}   0 \rangle$	Gluonkondensat ,
D=5:	$\langle 0   g_s \bar{q} \sigma_{\mu\nu} T^a G^{a\mu\nu} q   0 \rangle$	Quark-Gluon-Kondensat ,
D=6:	$\langle 0   (\bar{q} \Gamma_\alpha q) (\bar{q} \Gamma_\beta q)   0 \rangle$	4-Quark-Kondensat .

Die Dimensionalität der Operatoren ergibt sich durch Abzählen der enthaltenen Quark- und Gluonfelder  $q$  bzw.  $G^{a\mu\nu}$ , wobei zu beachten ist, dass kein farbneutraler, lorentz- und eichinvarianter Operator mit der Dimension  $D = 2$  existiert. In Abb. 2.2 sind die entsprechenden Diagramme auf Baumgraphenniveau abgebildet. Diese Diagramme besitzen Schleifenkorrekturen, welche für die Dimensionen  $D = 0$  und  $D = 3$  von signifikanter Größe sind. Für höhere Dimensionen werden sie dagegen vernachlässigt.

Die Korrelationsfunktion für einen vektoriellen (pseudoskalaren) Strom stellt sich also nach Aufspaltung in die verschiedenen Beiträge gemäß Abb. 2.2 dar als

$$\Pi_{T(5)}^{\text{OPE}}(q^2) = \Pi_{T(5)}^{\text{pert}}(q^2) + \Pi_{T(5)}^{\langle \bar{q}q \rangle}(q^2) + \Pi_{T(5)}^{\langle GG \rangle}(q^2) + \Pi_{T(5)}^{\langle \bar{q}Gq \rangle}(q^2) + \Pi_{T(5)}^{\langle 4q \rangle}(q^2) . \quad (2.18)$$

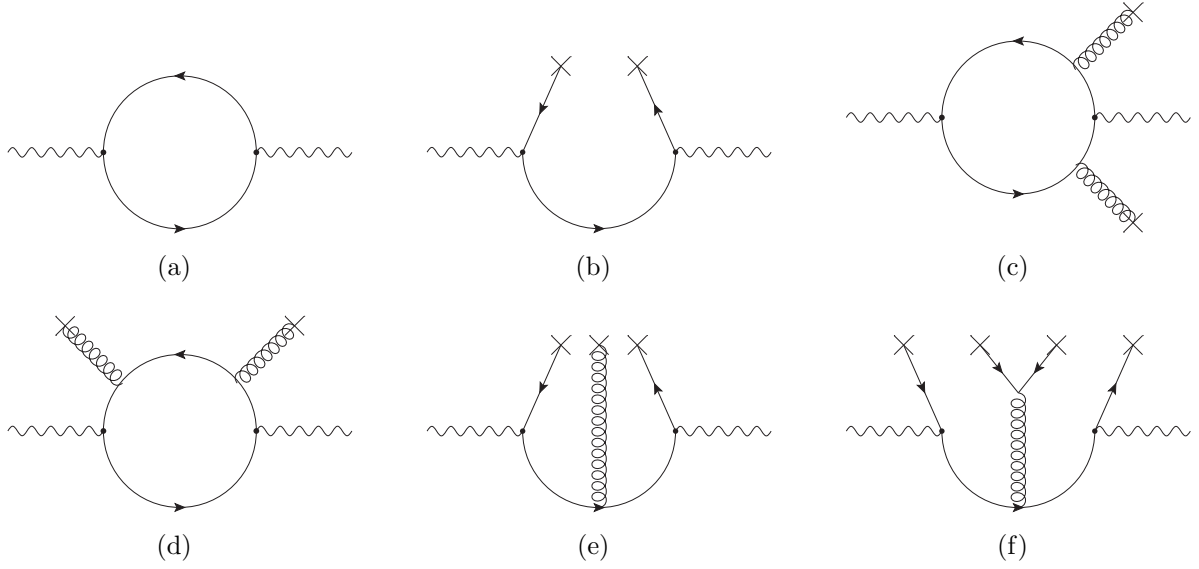


Abbildung 2.2.: Diagramme der Wilson-OPE bis zur Dimension  $D = 6$  in führender Ordnung: (a)  $D = 0$ ; (b)  $D = 3$ ; (c),(d)  $D = 4$ ; (e)  $D = 5$ ; (f)  $D = 6$ .

#### 2.2.4. Verknüpfung durch Quark-Hadron-Dualität

Im vorherigen Kapitel wurde die Berechnung von  $\Pi^{\text{OPE}}$  im Bereich  $q^2 \ll m_Q^2$  erläutert. Allerdings tritt in dieser Darstellung keine Zerfallskonstante auf, wohingegen die hadronische Darstellung das entsprechende Matrixelement enthält, die unbekannte hadronische Spektraldichte  $\rho^{\text{had}}(s)$  jedoch die konkrete Berechnung verhindert. Im nächsten Schritt werden diese beiden Darstellungen mit Hilfe der Quark-Hadron-Dualität verknüpft.

Die QHD ist ein Konzept, welches zuerst von E.C. Poggio, H.R. Quinn und S. Weinberg vorgestellt wurde [72]. Für eine ausführliche Diskussion dieses Sachverhaltes sei auf [73] verwiesen. Die wichtigsten Punkte werden im Folgenden kurz erläutert:

Die *globale* QHD ermöglicht die approximative Verknüpfung der beiden Darstellungen

$$\Pi_{T(5)}^{\text{had}}(q^2) \approx \Pi_{T(5)}^{\text{OPE}}(q^2), \quad q^2 \ll m_Q^2. \quad (2.19)$$

Mit den Darstellungen (2.14) und (2.16) bedeutet dies konkret

$$\begin{aligned} \frac{f_{H^*}^2 m_{H^*}^2}{m_{H^*}^2 - q^2} + \int_{s_h}^{\infty} ds \frac{\rho_T^{\text{had}}(s)}{s - q^2} &= \int_{(m_Q + m_q)^2}^{\infty} ds \frac{\rho_T^{\text{OPE}}(s)}{s - q^2}, \\ \frac{f_H^2 m_H^4}{m_H^2 - q^2} + \int_{s_h}^{\infty} ds \frac{\rho_5^{\text{had}}(s)}{s - q^2} &= \int_{(m_Q + m_q)^2}^{\infty} ds \frac{\rho_5^{\text{OPE}}(s)}{s - q^2}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

wobei die infinitesimale Verschiebung des Nenners nicht explizit ausgeschrieben worden ist. Der Grenzparameter  $s_h$  kennzeichnet wie erwähnt das Einsetzen höherer Resonanzen

und Mehrteilchenzustände in der Spektraldichte, und hängt damit vom betrachteten Strom ab.

Diese Relation beinhaltet nach wie vor die unbekannte hadronische Zustandsdichte  $\rho_{T(5)}^{\text{had}}$ . Daher wird nun die *semi-lokale* QHD angesetzt. Damit ist folgende Näherung bezeichnet:

$$\int_{s_h}^{\infty} ds \frac{\rho_{T(5)}^{\text{had}}(s)}{s - q^2} \approx \int_{s_0}^{\infty} ds \frac{\rho_{T(5)}^{\text{OPE}}(s)}{s - q^2} . \quad (2.21)$$

Konkret bedeutet dies, dass das Integral über das unbekannte hadronische Spektrum mit dem Integral über die OPE-Entwicklung der Korrelationsfunktion ersetzt werden kann, wenn über einen hinreichend großen Energieabschnitt integriert wird. Asymptotisch nähern sich diese beiden Terme und damit bei geeigneter Wahl des Grenzparameters  $s_0$  auch die Fläche unter dem Integral an, schematisch ist dies in Abb. 2.3 dargestellt.

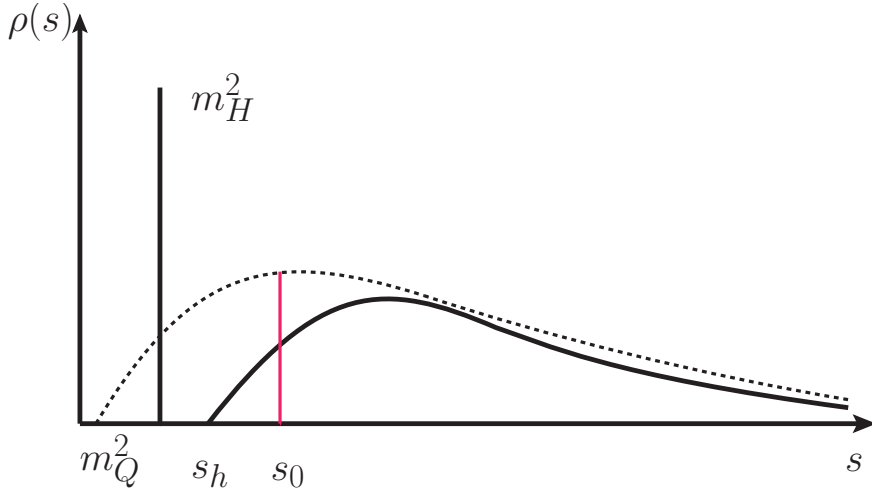


Abbildung 2.3.: Prinzip der semi-lokalen Quark-Hadron-Dualität. Die durchgezogene Linie kennzeichnet die hadronische Spektraldichte, die gestrichelte Linie die Spektraldichte der OPE.

Der Grenzparameter  $s_0$  liegt etwa in der Größenordnung von  $s_h$ . Seine Abschätzung ist für die verschiedenen Anwendungen einer der wesentlichen Arbeitsschritte und implizit mit der Unsicherheit der Methode verknüpft.

Mit der semilokalen QHD ergeben sich aus (2.20) schließlich als Summenregeln

$$\frac{f_{H^*}^2 m_{H^*}^2}{m_{H^*}^2 - q^2} = \int_{(m_Q + m_q)^2}^{s_0^{H^*}} \frac{\rho_T^{\text{OPE}}(s)}{s - q^2} ds , \quad (2.22)$$

$$\frac{f_H^2 m_H^4}{m_H^2 - q^2} = \int_{(m_Q + m_q)^2}^{s_0^H} \frac{\rho_5^{\text{OPE}}(s)}{s - q^2} ds .$$

Man beachte, dass aufgrund der Positivität der Spektraldichte die Grenzwertbildung  $s_0^{H^{(*)}} \rightarrow \infty$  somit eine obere Grenze (engl. *upper bound*) für die Zerfallskonstanten bietet. Bevor die Summenregel ausgewertet werden kann, wird im nächsten Abschnitt noch eine *Boreltransformation* durchgeführt.

### 2.2.5. Boreltransformation und Standardsummenregeln

Mit den Gleichungen (2.22) ist es nun im Prinzip möglich, die Zerfallskonstanten  $f_{H^{(*)}}$  zu bestimmen, da alle sonstigen Größen berechnet bzw. abgeschätzt werden können. Allerdings ist das Ergebnis in seiner Genauigkeit durch die Approximation des unbekanntes Kontinuums limitiert. In der Vergangenheit wurden verschiedene Versuche unternommen, die Genauigkeit der Summenregeln zu verbessern.

In aktuellen Berechnungen ist die Methode der *Boreltransformation* üblich, welche auch in dieser Arbeit hauptsächlich eingesetzt wird. Die Transformation ist definiert als

$$\Pi(M^2) := \mathcal{B}_{M^2} \Pi(q^2) = \lim_{\substack{-q^2, n \rightarrow \infty \\ \frac{-q^2}{n} = M^2}} \frac{(-q^2)^{n+1}}{n!} \left( \frac{d}{dq^2} \right)^n \Pi(q^2), \quad (2.23)$$

mit dem Borelparameter  $M^2$ . Wichtige Spezialfälle sind

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{M^2} \left( \frac{1}{s - q^2} \right)^k &= \frac{1}{(k-1)!} \left( \frac{1}{M^2} \right)^{k-1} e^{-\frac{s}{M^2}}, \\ \mathcal{B}_{M^2} (-q^2)^k &= 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Eine wesentliche Funktion der Boreltransformation ist die Beseitigung von Subtraktionstermen, die benötigt werden, um die Dispersionsintegrale konvergent zu machen (s. Abschnitt A.2). Besonders vorteilhaft ist hier jedoch die exponentielle Unterdrückung der Kontinuumszustände und der damit verbundenen Unsicherheit.

Die Boreltransformation angewandt auf (2.22) liefert schließlich die formalen Zweipunktsummenregeln (*Borelsummenregeln*)

$$\begin{aligned} f_{H^*}^2 m_{H^*}^2 e^{-\frac{m_{H^*}^2}{M^2}} &= \int_{(m_Q+m_q)^2}^{s_0^{H^*}} ds \rho_T^{\text{OPE}}(s) e^{-\frac{s}{M^2}}, \\ f_H^2 m_H^4 e^{-\frac{m_H^2}{M^2}} &= \int_{(m_Q+m_q)^2}^{s_0^H} ds \rho_5^{\text{OPE}}(s) e^{-\frac{s}{M^2}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Man beachte, dass die Einführung der Boreltransformation eine rein mathematische Prozedur ist und die Wahl des Borelparameters im Prinzip keinen Einfluss auf das physikalische Endergebnis haben dürfte. Tatsächlich ist die konkrete Abhängigkeit der Summenregel von  $M^2$ , wie auch der Unterschied zu anderen Summenregeln (s. Abschnitt 3.1.4), eine Folge der QHD-Approximation und des Abbruchs der im Prinzip unendlichen OPE.



Das Ergebnis (2.25) bildet die Grundlage für die numerische Auswertung in Kapitel 3. Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit der Herleitung der Lichtkegelsummenregeln zur Verwendung in Kapitel 5.

## 2.3. Lichtkegelsummenregeln

Die Technik der *Lichtkegelsummenregeln* (engl. *light-cone sum rules* (LCSR)) basiert auf den gleichen Prinzipien wie die zuvor genannten Zweipunktsummenregeln. Ausgehend von einer Korrelationsfunktion wird jeweils eine hadronische Darstellung und eine OPE-Darstellung durch die QHD verknüpft, woraufhin durch perturbative Berechnung von Koeffizienten hadronische Größen bestimmt werden können. Ein wesentlicher konzeptioneller Unterschied besteht dann in der Entwicklung der beteiligten Ströme um  $x^2 = 0$ , also um den *Lichtkegel* herum.

Die LCSR wurden in den 90er Jahren als Alternative zu *Dreipunktsummenregeln* zur Beschreibung von Prozessen mit drei interpolierenden Strömen entwickelt [74, 75, 76, 77]. Sie werden seitdem für verschiedene Zwecke eingesetzt, hauptsächlich zur Beschreibung hadronischer Formfaktoren für Übergänge von schweren zu leichten Mesonen [78, 79, 80, 81], aber auch zur Bestimmung von *starken Kopplungen* [75, 82, 83]. Weitere Anwendungsgebiete umfassen den radiativen Zerfall  $\Sigma \rightarrow p\gamma$  [74] oder die Bestimmung des Pionformfaktors [84, 85].

Ein Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit den erwähnten starken Kopplungen, in den folgenden Unterkapiteln wird die Herleitung der entsprechenden Lichtkegelsummenregeln durchgeführt. Dabei werden besonders solche Aspekte betont, die sich von der Herleitung der Zweipunktsummenregeln unterscheiden.

### 2.3.1. Matrixelement der starken Kopplung und Korrelationsfunktion

Ausgangspunkt zur Aufstellung der LCSR bildet analog zur Technik der Zweipunktsummenregeln die Korrelationsfunktion in Kombination mit einem hadronischen Matrixelement, welches als *starke Kopplung* identifiziert wird.

Die in dieser Arbeit betrachtete starke Kopplung  $g_{H^*HP}$  zwischen zwei schweren ( $H(p+q)$ ,  $H^*(q)$ ) und einem leichten Meson ( $P(p)$ ) ist definiert als

$$\langle H^*(q)P(p)|H(p+q)\rangle = -g_{H^*HP} \cdot p_\mu \epsilon_{H^*}^\mu, \quad (2.26)$$

mit  $p$  ( $q$ ) als dem Impuls des leichten (schweren) Mesons und dem Impulsübertrag ( $p+q$ ), sowie dem Polarisationsvektor des Vektormesons  $\epsilon_{H^*}^\mu$ . In dieser Arbeit stehen die Berechnungen für  $H = \{D, B\}$  im Vordergrund, das korrespondierende leichte pseudoskalare Meson ist dann  $P = \pi$ . An dieser Notation wird im weiteren Verlauf festgehalten.

Die Korrelationsfunktion für einen solchen Prozess unterscheidet sich von der Zweipunktversion (2.5) darin, dass nicht der Vakuumerwartungswert zweier interpolierender Ströme betrachtet wird, sondern die Übergangsamplitude zwischen QCD-Vakuum und einem Pionzustand  $\pi(p)$  auf der Massenschale (engl. *On-Shell*):

$$\begin{aligned} F_\mu(p,q) &= i \int d^4x e^{iqx} \langle \pi(p) | T \{ J_\mu(x) J_5^\dagger(0) \} | 0 \rangle \\ &=: F(q^2, (p+q)^2) p_\mu + \tilde{F}(q^2, (p+q)^2) q_\mu, \end{aligned} \quad (2.27)$$

mit den invarianten Amplituden  $F(q^2, (p+q)^2)$  und  $\tilde{F}(q^2, (p+q)^2)$ . Die Lorentzstruktur von  $F(q^2, (p+q)^2)$  korrespondiert zu derjenigen der starken Kopplung gemäß der Definition (2.26), deshalb wird folgend nur noch  $F(q^2, (p+q)^2)$  anstelle der kompletten Korrelationsfunktion betrachtet.

Der Quarkinhalt der interpolierenden Ströme und des leichten pseudoskalaren Mesons  $P(p)$  hängt wie erwähnt von der betrachteten Kopplung ab. Die diagrammatische Visualisierung der Korrelationsfunktion ist in führender Ordnung in Abb. 2.4 dargestellt.

Die verschiedenen Darstellungen der Korrelationsfunktion werden im nächsten Kapitel behandelt.

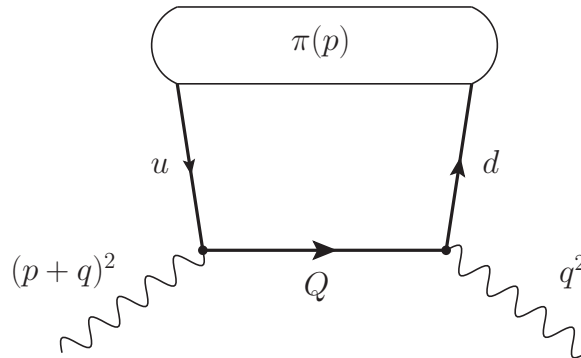


Abbildung 2.4.: Zur Korrelationsfunktion (2.27) korrespondierendes Diagramm in führender Ordnung.  $Q$  bezeichnet das jeweilige schwere Quark.

### 2.3.2. Darstellungen der LCSR-Korrelationsfunktion

Nachdem im letzten Kapitel die Korrelationsfunktion für die LCSR definiert wurde, werden in diesem Abschnitt analog zu Kapitel 2.2.2 und 2.2.3 die Darstellungen der Korrelationsfunktion in verschiedenen Impulsregionen betrachtet.

Die hadronische Darstellung wird nun in Form einer *doppelten Dispersionrelation* geschrieben. Dies geschieht entlang der in Anhang A.2 beschriebenen Vorgehensweise, jeweils getrennt für die mit den externen Impulsen assoziierten Variablen  $s_1$  und  $s_2$ . Isoliert man aus der hadronischen Spektraldichte den Beitrag der starken Kopplung gemäß der

Definition (2.26), erhält man

$$\begin{aligned}
F^{\text{had}}(q^2, (p+q)^2) &= \frac{m_H^2 m_{H^*} f_H f_{H^*} g_{H^* H \pi}}{(q^2 - m_{H^*}^2)((p+q)^2 - m_H^2)} + \int_{s_h^1}^{\infty} \int_{s_h^2}^{\infty} \frac{\rho^{\text{had}}(s_1, s_2) ds_1 ds_2}{(s_1 - q^2)(s_2 - (p+q)^2)} \\
&+ \int \frac{\rho_1^{\text{had}}(s_1)}{s_1 - q^2} ds_1 + \int \frac{\rho_2^{\text{had}}(s_2)}{s_2 - (p+q)^2} ds_2. \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $\rho^{\text{had}}(s_1, s_2)$  das unbekannte Kontinuum aus Resonanzen und Mehrteilchenzuständen mit den gleichen Quantenzahlen. Dabei gilt  $s_{1(2)} \in [s_h^{1(2)}, \infty]$ . Die beiden Beiträge bezüglich  $\rho_1^{\text{had}}(s_1)$  und  $\rho_2^{\text{had}}(s_2)$  sind Subtraktionsterme um die Divergenz des Dispersionsintegrals zu vermeiden (s. Abschnitt A.2). Da sie jeweils nur von einer Impulsvariablen abhängen, werden sie durch die spätere doppelte Boreltransformation entfernt.

Die Herleitung der OPE-Darstellung unterscheidet sich dagegen vom Vorgehen in Kapitel 2.2. Zur Illustration der Vorgehensweise wird die Korrelationsfunktion (2.27) für die vorliegenden Ströme explizit betrachtet. Durch Anwendung des Wick-Theorems wird wie zuvor in Kapitel 2.2.3 das zeitgeordnete Produkt zweier Quarkfelder kontrahiert:

$$\langle 0 | T \{ Q(x) \bar{Q}(0) \} | 0 \rangle = i S_0(k, m_Q) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \frac{(\not{k} + m_Q)}{k^2 - m_Q^2}. \tag{2.29}$$

Somit ergibt sich eingesetzt in Gleichung (2.27) in führender Ordnung

$$\begin{aligned}
F_\mu(p, q) &= i \int d^4 x e^{iqx} \langle \pi(p) | T \{ \bar{q}(x) \gamma_\mu Q(x) m_Q \bar{Q}(0) i \gamma_5 q(0) \} | 0 \rangle \\
&= i m_Q \int \frac{d^4 x d^4 k}{(2\pi)^4 (m_Q^2 - k^2)} e^{i(q-k)x} \\
&\quad \times \left( \underbrace{m_Q \langle \pi(p) | \bar{q}(x) \gamma_\mu \gamma_5 q(0) | 0 \rangle}_{:= A_1} + \underbrace{k^\nu \langle \pi(p) | \bar{q}(x) \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 q(0) | 0 \rangle}_{:= A_2} \right), \tag{2.30}
\end{aligned}$$

mit den beiden Matrixelementen  $A_1$  und  $A_2$ . Eine lokale Entwicklung für das Matrixelement  $A_1$  wie im Falle der Zweipunktsummenregeln gemäß

$$\bar{q}(x) \gamma_\mu \gamma_5 q(0) = \sum_n \frac{1}{n!} \bar{q}(0) (\overleftarrow{D} \cdot x)^n \gamma_\mu \gamma_5 q(0) \tag{2.31}$$

ergibt Matrixelemente  $M_n$  der Form

$$\begin{aligned}
\langle \pi(p) | \bar{q}(0) \overleftarrow{D}_{\alpha_1} \overleftarrow{D}_{\alpha_2} \cdots \overleftarrow{D}_{\alpha_n} \gamma_\mu \gamma_5 u(0) | 0 \rangle &= i^n p_\mu p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_n} M_n \\
&+ i^n p_\mu g_{\alpha_1 \alpha_2} p_{\alpha_3} \cdots p_{\alpha_n} M'_n + \cdots. \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Das Einsetzen dieser Relation in Gleichung (2.30) liefert nach Integration über  $x$  und  $k$  schließlich

$$F_\mu^{A_1}(p, q) = i \frac{m_Q^2}{m_Q^2 - q^2} \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n M_n p_\mu + i \frac{4m_Q^3}{(m_Q^2 - q^2)^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\xi^{n-2}}{n(n-1)} M'_n p_\mu + \cdots, \tag{2.33}$$

mit der eingeführten Größe

$$\xi = \frac{2(p \cdot q)}{m_Q^2 - q^2} = \frac{(p+q)^2 - q^2}{m_Q^2 - q^2}. \quad (2.34)$$

Ist nun  $\mathcal{O}(\xi) = 1$ , dann müssen in Gleichung (2.33) unendlich viele Operatoren gleicher Größenordnung in den jeweiligen Ordnungen von  $(m_Q^2 - q^2)^{-1}$  einbezogen werden. Ein Abbruch der Reihe ist somit nur für  $\xi \rightarrow 0$  möglich, d.h.  $p \rightarrow 0$ . Dies ist im Allgemeinen jedoch nicht der Fall, und so kann die lokale Entwicklung nur für kleine Pionimpulse  $p$  angewandt werden.

Die Entwicklung (2.33) ist jedoch auch in Ordnungen von  $1/q^2$  hierarchisiert. Ist der Pionimpuls  $p$  klein gegenüber dem Impulsübertrag  $Q^2 = -q^2$ , d.h.  $|p^2| \ll |Q^2|$ , so gilt mit Gleichung (2.34) die Näherung  $q_0 \sim Q^2 \xi$ . Damit ergibt sich für das Argument der Exponentialfunktion in (2.30)

$$q \cdot x = q_0 x_0 - q_3 x_3 \sim Q^2 \xi (x_0 - x_3) - \frac{1}{2\xi} x_3. \quad (2.35)$$

Für die dominanten Beiträge in (2.30) gilt  $q \cdot x \simeq 0$ . Daraus und mit (2.35) folgt  $x_3 \sim 2\xi$ , als auch  $x_0 \sim x_3 + 1/(Q^2 \xi)$ . Beides impliziert zusammen

$$x_0^2 \sim \left(x_3 + \frac{1}{Q^2 \xi}\right)^2 \approx x_3^2 + \frac{4}{Q^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Q^4}\right), \quad (2.36)$$

und somit schließlich

$$x^2 \sim \frac{1}{Q^2} \approx 0 \quad (2.37)$$

für Impulsüberträge  $Q^2 \gg p^2$ . Damit ist gezeigt, dass vor allem Beiträge um den Lichtkegel  $x^2 = 0$  herum die Korrelationsfunktion dominieren und die Entwicklung von (2.33) in Ordnungen von  $x^2 \sim 1/q^2$  kann daher nach einigen Termen sicher abgebrochen werden. Diese Entwicklung wird *Lichtkegelentwicklung* genannt. Die so auftretenden Operatoren sind nach sog. *Twists* geordnet. Der Twist ist definiert als die Differenz zwischen Dimension und Spin der enthaltenen Felder. Das Matrixelement  $A_1$  besitzt beispielsweise zwei Quarkfelder mit Dimension  $2 \cdot 2/3$  und wird durch die Diracstruktur  $\gamma_\mu \gamma_5$  zu einem Operator mit Spin 1 gekoppelt, wodurch  $A_1$  den führenden Twist 2 hat.

Die in (2.30) dargestellten Matrixelemente können also in Operatoren mit aufsteigendem Twist entwickelt werden. Sie werden durch prozessunabhängige *Verteilungsamplituden* auf dem Lichtkegel parametrisiert, ähnlich wie die Operatoren der Zweipunktsummenregeln durch Kondensate parametrisiert werden. Dies wird in Kapitel 2.3.3 genauer ausgeführt. Für die Darstellung der invarianten Amplitude  $F^{\text{QCD}}(q^2, (p+q)^2)$  im Bereich  $q^2, (p+q)^2 \ll m_Q^2$  wird die doppelte Dispersionsrelation in Kombination mit einer QCD-Spektraldichte  $\rho^{\text{QCD}}(s_1, s_2)$  gebildet. Dies geschieht in Analogie zu Kapitel 2.2.3,

mit dem Unterschied, dass die entsprechende Spektraldichte nun durch den doppelten Imaginärteil der invarianten Amplitude gegeben ist:

$$\rho^{\text{QCD}}(s_1, s_2) := \frac{1}{\pi^2} \text{Im}_{s_1} [\text{Im}_{s_2} [F^{\text{QCD}}(s_1, s_2)]] . \quad (2.38)$$

Damit ergibt sich die doppelte Dispersionsrelation zu

$$F^{\text{QCD}}(q^2, (p+q)^2) = \iint_{(m_Q+m_q)^2}^{\infty} \frac{\rho^{\text{QCD}}(s_1, s_2) ds_1 ds_2}{(s_1 - q^2)(s_2 - (p+q)^2)} . \quad (2.39)$$

Bevor die beiden Darstellungen (2.28) und (2.39) durch die QHD verknüpft werden, soll im nächsten Abschnitt die Parametrisierung der Matrixelemente genauer dargelegt werden.

### 2.3.3. Lichtkegelverteilungsamplituden

Wie im vorherigen Kapitel erwähnt, werden die Matrixelemente der LCSR-Korrelationsfunktion durch Lichtkegelverteilungsamplituden mit aufsteigendem Twist parametrisiert. Für das in (2.30) auftretende Matrixelement lautet die Parametrisierung beispielsweise

$$\begin{aligned} \langle \pi(p) | \bar{q}(x) \gamma_\mu \gamma_5 W(x, 0) q(0) | 0 \rangle &= -i p_\mu f_\pi \int_0^1 du e^{iupx} (\varphi_\pi(u, \mu) + x^2 g_1(u) + \mathcal{O}(x^4)) \\ &+ f_\pi \left( x_\mu - \frac{x^2 p_\mu}{px} \right) \int_0^1 du e^{iupx} g_2(u) , \end{aligned} \quad (2.40)$$

mit der Pionzerfallskonstante  $f_\pi$ . Dabei stellt  $\varphi_\pi(u, \mu)$  die Verteilungsamplitude mit Twist 2 dar, während  $g_1(u)$  und  $g_2(u)$  die Verteilungsamplituden für den nächsthöheren Twist 4 bezeichnen. Der Faktor  $W(x, 0)$  ist ein Eichfaktor, denn das Matrixelement  $A_1$  ist an sich nicht eichinvariant unter  $q(x) \rightarrow U(x)q(x)$ . Der Eichfaktor transformiert sich folglich als  $W(x, 0) \rightarrow U(x)W(x, 0)U^\dagger(0)$  und ist gegeben als

$$W(x, 0) = \mathcal{P} \cdot \exp \left( ig_s \int_0^1 dt x^\mu A_\mu(tx) \right) , \quad (2.41)$$

mit dem pfadgeordneten Produkt  $\mathcal{P}$ . In der verwendeten *Fock-Schwinger-Eichung*  $x^\mu A_\mu = 0$  gilt  $W(x, 0) = 1$ , der Eichfaktor wird daher in den weiteren Anwendungen dieser Arbeit nicht explizit erwähnt.

In (2.40) wurde die Lichtkegelentwicklung bei  $\mathcal{O}(x^4)$  abgebrochen, da Operatoren mit entsprechendem Twist  $\geq 6$  keinen signifikanten Beitrag zum Ergebnis liefern. Man beachte, dass im Prinzip alle Verteilungsamplituden in (2.40) abhängig von der Renormierungsskala  $\mu$  sind. Explizit aufgeführt ist dies allerdings nur für  $\varphi_\pi(u, \mu)$ , für höhere Twists ist sie gering und wird folgend vernachlässigt.

Die eingeführten Verteilungsamplituden sind ebenso wie die Vakuumkondensate nicht-perturbative, prozessunabhängige Größen, die durch Vergleich mit präzisen Messungen eines experimentell leicht zugänglichen Prozesses bestimmt und dann universell verwendet werden können. Zur Erläuterung ihrer Struktur sei die Twist-2 Verteilungsamplitude  $\varphi_\pi(u, \mu)$  als Beispiel gewählt. Als nichtperturbatives Objekt parametrisiert sie die langreichweitige Wechselwirkungsdynamik des Pions. Für einen bestimmten longitudinalen Pionimpuls beschreibt sie die Verteilung des Impulsbruchteils, der von einem Konstituentenquark getragen wird. Für  $u = 1/2$  etwa tragen Quark und Antiquark des Pions jeweils die Hälfte des Pionimpulses. Für  $x \rightarrow 0$  in Gleichung (2.40) gilt

$$\int_0^1 du \varphi_\pi(u) = 1, \quad (2.42)$$

so dass sich durch diese Normierung die Definition der Pionzerfallskonstanten  $f_\pi$  ergibt. Analog zur Parametrisierung von  $A_1$  kann auch  $A_2$  parametrisiert werden. Das Ergebnis wird dann in der invarianten *Zwei-Teilchen-Amplitude*  $F^{2\text{-Part}}(q^2, (p+q)^2)$  gemäß Definition (2.27) zusammengefasst.

Zusätzlich dazu treten weitere Matrixelemente auf, wenn bei der Wick-Kontraktion in Kapitel 2.3.2 anstelle des freien Propagators der gluonmodifizierte (s. Gleichung (B.28)) verwendet wird. Beiträge, die als Folge dieser Modifikation auftreten, bilden nach Parametrisierung der entsprechenden Matrixelemente die *Drei-Teilchen-Amplitude*  $F^{3\text{-Part}}(q^2, (p+q)^2)$  (s. Abb. 2.5). Die Summe von  $F^{3\text{-Part}}(q^2, (p+q)^2)$  und  $F^{2\text{-Part}}(q^2, (p+q)^2)$  ergibt die invariante Amplitude  $F^{\text{QCD}}(q^2, (p+q)^2)$  aus Gleichung (2.39).

Im nächsten Abschnitt werden die bisherigen Ergebnisse kombiniert, um die Lichtkegelsummenregel zur Bestimmung starker Kopplungen aufzustellen.

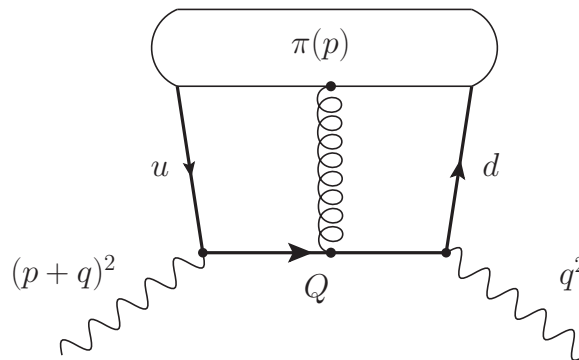


Abbildung 2.5.: Diagramm für die invariante Drei-Teilchen-Amplitude der LCSR-Korrelationsfunktion.

### 2.3.4. Boreltransformation und Ergebnis

In der Darstellung (2.28) tritt die starke Kopplung  $g_{H^*H\pi}$  sowie die unbekannte Spektraldichte  $\rho^{\text{had}}(s_1, s_2)$  auf, während die invariante Amplitude (2.39) durch die Lichtkegelsentwicklung unter Angabe der zugehörigen Twistoperatoren berechnet werden kann, aber keine hadronische Größe enthält. Vor der Verknüpfung der beiden Darstellungen wird die Boreltransformation (s. 2.2.5) in den kinematischen Variablen  $q^2 \rightarrow M_1^2$  und  $(p+q)^2 \rightarrow M_2^2$  angewandt, um Kontinuumszustände zu unterdrücken und Subtraktions-terme zu entfernen:

$$F^{\text{had}}(M_1^2, M_2^2) = m_H^2 m_{H^*} f_H f_{H^*} g_{H^*H\pi} \cdot e^{-\frac{m_{H^*}^2}{M_1^2}} e^{-\frac{m_H^2}{M_2^2}} + \int_{s_h^1}^{\infty} ds_1 \int_{s_h^2}^{\infty} ds_2 e^{-\frac{s_1}{M_1^2}} e^{-\frac{s_2}{M_2^2}} \rho^{\text{had}}(s_1, s_2), \quad (2.43)$$

und

$$F^{\text{QCD}}(M_1^2, M_2^2) = \int_{(m_Q+m_q)^2}^{\infty} ds_1 \int_{(m_Q+m_q)^2}^{\infty} ds_2 \rho^{\text{QCD}}(s_1, s_2) e^{-\frac{s_1}{M_1^2}} e^{-\frac{s_2}{M_2^2}}. \quad (2.44)$$

Die Anwendung der QHD (s. Abschnitt 2.2.4) liefert schließlich die Lichtkegelsummenregel für  $g_{H^*H\pi}$ :

$$g_{H^*H\pi} = \frac{1}{m_H^2 m_{H^*} f_H f_{H^*}} e^{\frac{m_{H^*}^2 + m_H^2}{2M^2}} \iint_{\Sigma} e^{-\frac{s_1 + s_2}{2M^2}} \rho^{\text{QCD}}(s_1, s_2) ds_1 ds_2, \quad (2.45)$$

wobei die Borelparameter  $M_1^2$  und  $M_2^2$  gleich gewählt wurden, so dass gilt  $M_1^2 = M_2^2 =: 2M^2$ . Die Integrationsregion  $\Sigma$  ist abhängig von der jeweiligen Dualitätsapproximation. Während für Zweipunktsummenregeln der Grenzparameter  $s_0$  eindimensional angepasst wird, muss hier aufgrund der *doppelten* Dispersionsrelation eine zweidimensionale Region zur Approximation durch die QHD gewählt werden. Diese ist nicht eindeutig bestimmt, sondern kann verschiedene Formen annehmen. Die Auswertung in Kapitel 5 beschäftigt sich mit dieser Subtilität.

### 2.3.5. Nächsthöhere Ordnung

In den vorherigen Abschnitten wurden die Lichtkegelsummenregeln in führender Ordnung betrachtet. Um die Genauigkeit der Summenregel, insbesondere mit Hinblick auf die Einbeziehung radialer Anregungen, zu verbessern, ist die Implementierung von Korrekturen in nächsthöherer Ordnung (NLO) perspektivisch sinnvoll. Die zuvor eingeführte invariante Amplitude der Korrelationsfunktion ist dann gegeben als

$$F(q^2, (p+q)^2) = F^{\text{LO}}(q^2, (p+q)^2) + \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} F^{\text{NLO}}(q^2, (p+q)^2), \quad (2.46)$$

mit der Amplitude der nächsthöheren Beiträge  $F^{\text{NLO}}(q^2, (p+q)^2)$ . Konzeptionell sollten die numerisch gewichtigsten Beiträge zuerst einbezogen werden, frühere Anwendungen

für Lichtkegelsummenregeln zeigen, dass dies vor allem Twist-2 und Twist-3 Beiträge sind. Die korrespondierenden Diagramme sind in Abb. 2.6 dargestellt.

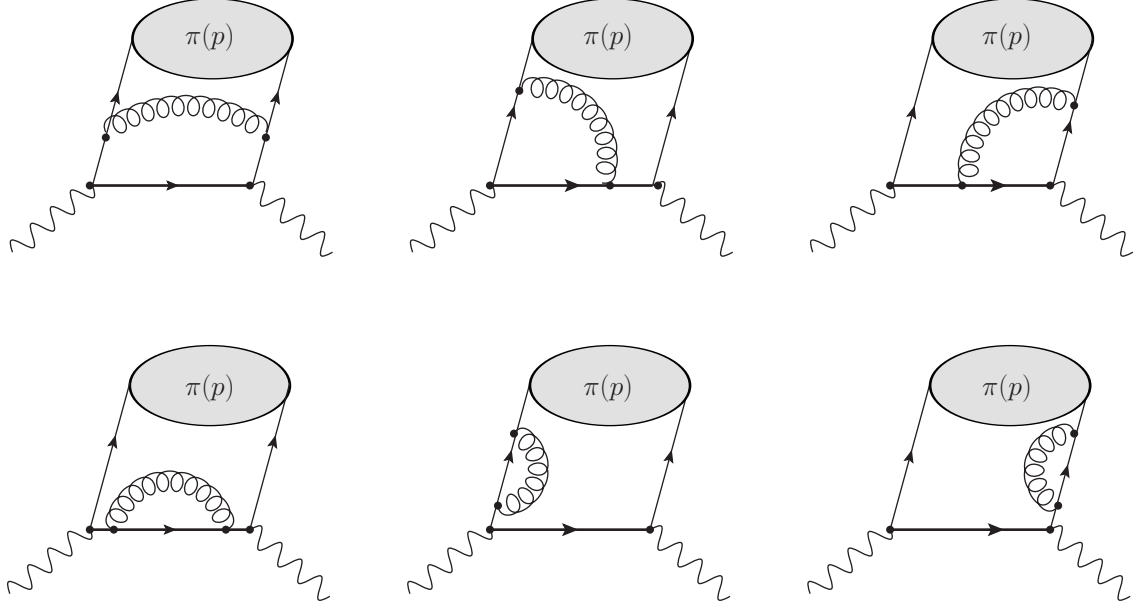


Abbildung 2.6.: Diagramme zur Bestimmung der Twist-2 und Twist-3 Beiträge in nächstführender Ordnung.

Analog zur Berechnung in führender Ordnung werden die radiativen Korrekturen in der Korrelationsfunktion durch Kontraktion der Quarkfelder und Parametrisierung über die entsprechenden Matrixelemente ausgedrückt. Dies führt für Twist-2 und Twist-3 NLO zu

$$F^{\text{NLO}}(q^2, (p+q)^2) = f_\pi \int_0^1 du \left( T(q^2, (p+q)^2, u) \varphi_\pi(u) + \frac{\mu_\pi}{m_Q} \left( T^p(q^2, (p+q)^2, u) \phi_{3\pi}^p(u) + T^\sigma(q^2, (p+q)^2, u) \phi_{3\pi}^\sigma(u) \right) \right), \quad (2.47)$$

mit den bereits vorher verwendeten Verteilungsamplituden  $\varphi_\pi$ ,  $\phi_{3\pi}^p$  und  $\phi_{3\pi}^\sigma$ . Die Funktionen  $T(q^2, (p+q)^2, u)$ ,  $T^p(q^2, (p+q)^2, u)$  und  $T^\sigma(q^2, (p+q)^2, u)$  sind bereits berechnet worden und z.B. in [78] zu finden. Um die Beiträge in Form einer doppelten Dispersionsrelation darzustellen, muss von diesen Funktionen wie zuvor der Imaginärteil bezüglich  $q^2$  und  $(p+q)^2$  extrahiert werden.

Für Twist-2 wurde dies in [83] durchgeführt, für Twist-3 stehen diese Korrekturen bislang nicht zur Verfügung. Da diese beiden Beiträge erwartungsgemäß von etwa vergleichbarer Größenordnung sind (s. Kapitel 5), stellt die Berechnung der Twist-3 Beiträge einen wichtigen Schritt zur konsistenten Behandlung der NLO-Korrekturen dar. Zusammen mit der entsprechenden Abschätzung der Dualitätsregion (s. Kapitel 5.2) ist dies Gegenstand von [86] und wird im Rahmen dieser Arbeit nicht konkret ausgeführt.



# 3. Zerfallskonstanten von schweren Mesonen

In diesem Kapitel werden die Zerfallskonstanten von schweren Mesonen unter Verwendung der Zweipunktsummenregeln, wie sie in Kapitel 2.2 vorgestellt wurden, ermittelt. Zunächst werden die nötigen Terme zur konkreten Berechnung gesammelt und aufgelistet, dann wird eine numerische Untersuchung durchgeführt. Die Vorgehensweise orientiert sich dabei insgesamt an [87].

## 3.1. Wilsonkoeffizienten und explizite OPE-Terme

Zur numerischen Auswertung der Summenregeln (2.25) müssen die Wilsonkoeffizienten für die Spektraldichte  $\rho_{T(5)}^{\text{OPE}}(s)$  berechnet werden. In diesem Kapitel werden die wichtigsten Koeffizienten aufgeführt. Ein besonderer Fokus liegt dabei auf den nichtperturbativen Beiträgen, deren Herleitung in diesem Abschnitt nur anhand der Grundprinzipien angedeutet werden soll. Eine detailliertere Darstellung ist im Anhang B.2 zu finden, für eine ausführlichere Erläuterung der perturbativen Beiträge sei auf [88] verwiesen.

Obwohl sich die Vorgehensweise für perturbative und nichtperturbative Beiträge im Detail unterscheidet, vollziehen sich beide entlang gleicher Prinzipien. Den Ausgangspunkt bietet dabei die Korrelationsfunktion (2.5). Mit Hilfe des *Wick-Theorems* [71] werden die auftretenden Felder kontrahiert und anschließend die Struktur des jeweiligen Operators isoliert. Durch Extraktion des jeweiligen Imaginärteils ergibt sich der gesuchte Wilsonkoeffizient. Besonders erwähnenswert ist dabei der Beitrag des Quarkkondensats für Vektorströme in nächstführender Ordnung, dieser Beitrag wurde zum ersten Mal in [87] in eine Summenregelberechnung einbezogen.

### 3.1.1. Perturbative Beiträge

Der erste Term in der OPE korrespondiert zu dem Operator mit der Dimensionalität  $D = 0$ , so dass wegen Normierung  $\langle 0|1|0\rangle = 1$  für das entsprechende Matrixelement gilt. Die Spektraldichte dieses *perturbativen* Beitrages lässt sich in Ordnungen der starken Kopplung  $\alpha_s$  entwickeln:

$$\rho^{\text{pert}}(s) = \rho^{\text{pert,LO}}(s) + \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right) \rho^{\text{pert,NLO}}(s) + \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 \rho^{\text{pert,NNLO}}(s) + \mathcal{O}(\alpha_s^3). \quad (3.1)$$

In der Literatur werden Terme bis maximal  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  aufgeführt. Diese liefern bereits einen so geringen Beitrag, dass die perturbative Entwicklung nach dieser Ordnung abgebrochen

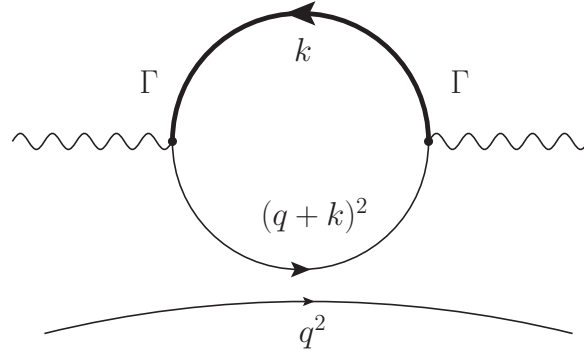


Abbildung 3.1.: Feynmandiagramm für den perturbativen Beitrag in führender Ordnung. Die breitere Linie kennzeichnet das schwere Quark und  $\Gamma$  die korrespondierende Gammastruktur.

werden kann. Die führende Ordnung  $\rho^{\text{pert,LO}}(s)$  ist diagrammatisch als Quark-Antiquark-Schleife darstellbar (s. Abb. 3.1), mit Korrekturen der leichten Masse  $m_q$  ergeben sie sich zu

$$\rho_T^{\text{pert,LO}}(s) = \frac{1}{8\pi^2} \left[ s \cdot \left( 1 - \frac{m_Q}{s} \right) \left( 2 - \frac{m_Q}{s} \right) + 6m_q m_Q \left( 1 - \frac{m_Q}{s} \right) - 3m_q \left( 1 + \left( \frac{m_Q}{s} \right)^2 \right) \right],$$

$$\rho_5^{\text{pert,LO}}(s) = \frac{3}{8\pi^2} (m_Q + m_q)^2 \left[ s \cdot \left( 1 - \frac{m_Q}{s} \right)^2 + 2 \left( 1 - \frac{m_Q}{s} \right) m_Q m_q - 2m_q^2 \right]. \quad (3.2)$$

In nächstführender Ordnung wächst die Anzahl der zu berücksichtigenden Diagramme, s. Abb. 3.2. Die Berechnung der entsprechenden Spektraldichte  $\rho^{\text{pert,NLO}}(s)$  ist detailliert in [88] dargestellt. Das Ergebnis besitzt konzeptionell die Form

$$\rho_{\text{Ges}}^{\text{pert,NLO}}(s) = \rho^{\text{pert,NLO}}(s) + \delta\rho^{\text{pert,NLO}}(s), \quad (3.3)$$

wobei  $\delta\rho^{\text{pert,NLO}}(s)$  die Massenkorrekturen bezeichnet, die durch Entwicklung in der leichten Quarkmasse  $m_q$  gewonnen werden. Aufgrund ihrer Länge sind die expliziten Ausdrücke in Anhang B.4.1 zu finden.

Für die Schleifenkorrekturen in  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  (NNLO) werden in der späteren Numerik die Ergebnisse von [89] benutzt. Sie sind dort allerdings im Polmassen-Renormierungsschema angegeben und müssen in das  $\overline{\text{MS}}$ -Schema umgerechnet werden. Die dazu notwendigen Transformationsterme sind in den Gleichungen (A.48)-(A.51) in [87] angegeben.

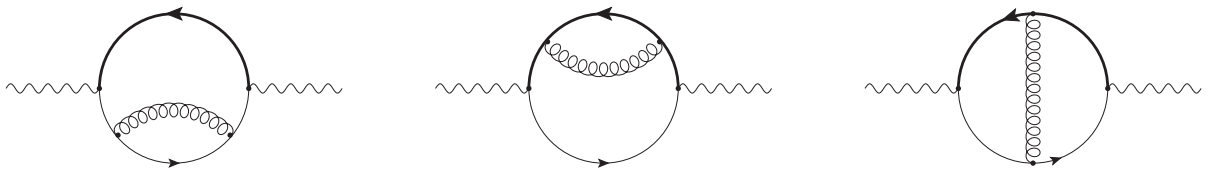


Abbildung 3.2.: Feynmandiagramme für  $\rho^{\text{pert,NLO}}(s)$ .

### 3.1.2. Nichtperturbative Beiträge in führender Ordnung

Als *nichtperturbative* bzw. Kondensatbeiträge werden in der Folge alle OPE-Terme bezeichnet, deren Operator eine Dimensionalität  $D > 0$  besitzt (s. Kapitel 2.2.3). In den folgenden Unterkapiteln werden die Kondensatbeiträge der OPE in führender Ordnung gesammelt.

#### Quarkkondensat in führender Ordnung

Der einfachste nichtperturbative Beitrag ergibt sich für den Operator der Dimension  $D = 3$  in führender Ordnung (LO). Diese sogenannten *Quarkkondensate* beschreiben die Wechselwirkung des leichten Quarkfeldes im Vakuum (s. Abb. 3.3).

Seine Dimensionalität ergibt sich aus den an der Vakuumwechselwirkung beteiligten Feldern: In diesem Fall handelt es sich um zwei Quarkfelder, die jeweils mit der Dimensionalität  $3/2$  eingehen. Das zugehörige Matrixelement ist entsprechend mit  $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle =: \langle\bar{q}q\rangle$  gegeben. Man beachte, dass prinzipiell auch ein anderes Diagramm berücksichtigt werden muss. Dort unterliegt das schwere Quark der Vakuumwechselwirkung, und das leichte Quark propagiert stattdessen. Dieser Beitrag wird hier vernachlässigt, da eine Vakuumwechselwirkung perturbativ mit Ordnungen der schweren Masse unterdrückt wird und er für  $b$ - und  $c$ -Quarks deswegen entsprechend gering ausfällt.

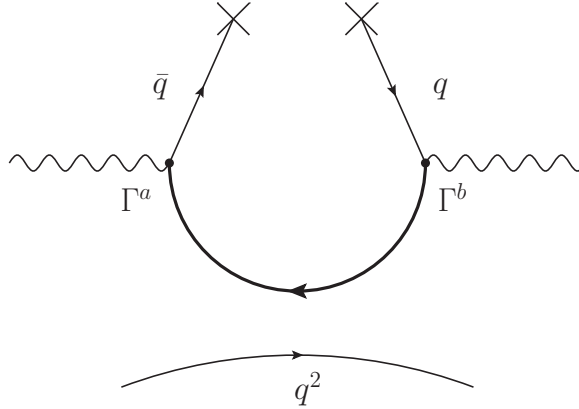


Abbildung 3.3.: Feynmandiagramm für das Quarkkondensat in führender Ordnung. Die breitere Linie kennzeichnet das schwere Quark,  $q^2$  den externen Impuls und  $\Gamma^{a,b}$  die Diracstrukturen des korrespondierenden Stromes.

Nach analogem Vorgehen durch Auswertung der Korrelationsfunktion und einigen Zwischenschritten (s. B.2.1) erhält man für die entsprechenden Terme der OPE

$$\begin{aligned}\Pi_T^{(\bar{q}q),\text{LO}}(M^2) &= -m_Q \langle\bar{q}q\rangle e^{-\frac{m_Q^2}{M^2}} \left(1 - \frac{m_q m_Q}{2M^2}\right), \\ \Pi_5^{(\bar{q}q),\text{LO}}(M^2) &= -(m_Q + m_q)^2 m_Q \langle\bar{q}q\rangle e^{-\frac{m_Q^2}{M^2}} \left(1 - \frac{m_q}{2m_Q} - \frac{m_q m_Q}{2M^2}\right).\end{aligned}\tag{3.4}$$

### Gluonkondensat

Der Beitrag mit Dimension  $D = 4$  in der Entwicklung ist das *Gluonkondensat*

$$\langle GG \rangle := \frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle, \quad (3.5)$$

mit dem Gluonfeldstärketensor  $G^{\mu\nu} := G^{a\mu\nu} T^a$ . Die entsprechenden Feynmandiagramme sind in Abb. 3.4 dargestellt. Zusätzlich muss prinzipiell auch ein Beitrag für zwei mit der leichten Quarklinie wechselwirkende Gluonen einbezogen werden. Dieser ist allerdings proportional zur leichten Quarkmasse  $m_q$  und somit in Kombination mit der Unterdrückung durch die OPE klein genug, um in der Folge vernachlässigt zu werden. Eine zu den bereits angegebenen Beiträgen konzeptionell analoge Berechnung liefert für die Gluonkondensate

$$\begin{aligned} \Pi_T^{(GG)}(M^2) &= -\frac{1}{12} \langle GG \rangle e^{-\frac{m_Q^2}{M^2}}, \\ \Pi_5^{(GG)}(M^2) &= \frac{1}{12} m_Q^2 \langle GG \rangle e^{-\frac{m_Q^2}{M^2}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ausführlich ist dies in B.2.2 gezeigt. Man beachte, dass die Ausdrücke (3.6) keine leichte Quarkmasse  $m_q$  enthalten. Die entsprechenden Beiträge wurden vernachlässigt, da sie numerisch in Kombination mit dem in  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  unterdrückten Gluonkondensat nicht signifikant sind.

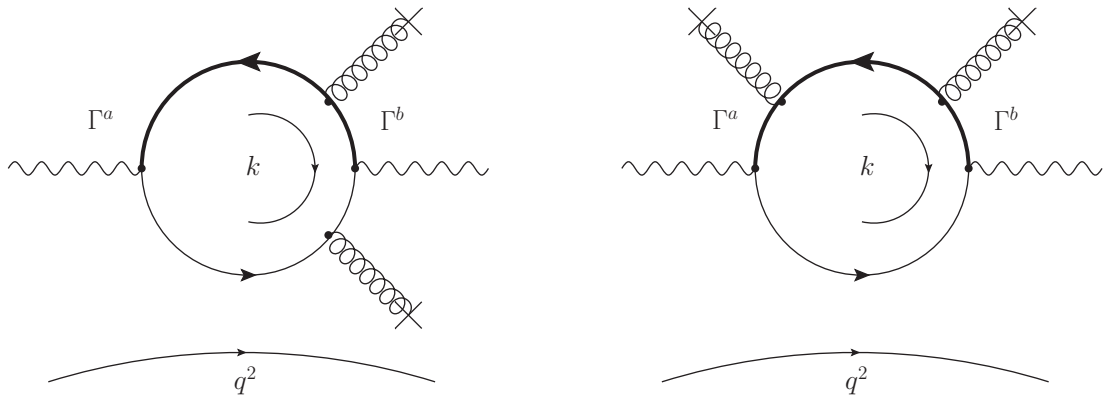


Abbildung 3.4.: Feynmandiagramme für das Gluonkondensat. Die breitere Linie kennzeichnet das schwere Quark,  $q^2$  den externen Impuls und  $\Gamma^{a,b}$  die Diracstrukturen des korrespondierenden Stromes.

### Quark-Gluon-Kondensat

Mit  $D = 5$  folgt das *Quark-Gluon-Kondensat* mit dem Matrixelement

$$\langle \bar{q}Gq \rangle := \langle 0 | \bar{q}_\alpha g_s G_{\tau\lambda}^a(0) T^a(\sigma^{\tau\lambda})_{\alpha\beta} q_\beta | 0 \rangle. \quad (3.7)$$

Diese Relation enthält die Lorentzindizes  $\alpha$  und  $\beta$  sowie den vollständig antisymmetrischen Tensor  $\sigma^{\tau\lambda} = \frac{i}{2}[\gamma^\tau, \gamma^\lambda]$ . In der Literatur (s. z.B. [90]) ist es üblich, das Quark-Gluon-Kondensat durch eine Proportionalitätsrelation mit dem Quarkkondensat auszudrücken:

$$\langle \bar{q}Gq \rangle := m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle. \quad (3.8)$$

Der hier auftretende Parameter  $m_0^2$  ist von der Größenordnung  $1 \text{ GeV}^2$ , im weiteren Verlauf wird nun diese Parametrisierung verwendet.

In führender Ordnung gibt es zwei Beiträge, die eine entsprechende Struktur aufweisen: Ein Beitrag ergibt sich durch den gluonmodifizierten Propagator (s. Abb. 3.5 a)) und wird in der Herleitung (s. Anhang B.2.3) mit  $\Pi^{(\bar{q}Gq),(1)}$  bezeichnet. Der andere Beitrag  $\Pi^{(\bar{q}Gq),(2)}$  (Abb. 3.5 b)) tritt durch die Entwicklung des leichten Quarkfeldes (s. Gleichung (B.11)) auf.

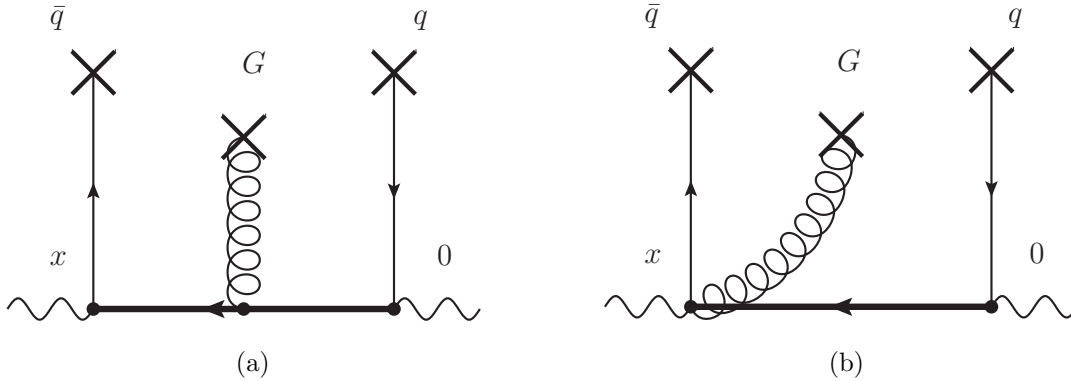


Abbildung 3.5.: Diagramme für das Quark-Gluon-Kondensat. Der durch den gluonmodifizierten Quarkpropagator entstehende Beitrag  $\Pi^{(\bar{q}Gq),(1)}$  ist in a) dargestellt, während  $\Pi^{(\bar{q}Gq),(2)}$  in b) gezeigt ist. Das Gluonfeld wird hier vereinfacht mit  $G$  bezeichnet, die Kopplung des Gluons an den Vertex ist symbolisch aufzufassen.

Das Resultat für das gesamte Quark-Gluon-Kondensat lautet in der Summe  $\Pi^{(\bar{q}Gq)} = \Pi^{(\bar{q}Gq),(1)} + \Pi^{(\bar{q}Gq),(2)}$  und somit erhält man konkret

$$\begin{aligned} \Pi_T^{(\bar{q}Gq)}(M^2) &= m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle \frac{m_Q^3}{4M^2} e^{-\frac{m_Q^2}{M^2}}, \\ \Pi_S^{(\bar{q}Gq)}(M^2) &= -m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle \frac{m_Q^3}{2M^2} \left( 1 - \frac{m_Q^2}{2M^2} \right) e^{-\frac{m_Q^2}{M^2}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Erwähnenswert ist, dass im Falle des vektoriellen Stromes der Anteil  $\Pi_T^{(\bar{q}Gq), (1)}$  verschwindet. Dies ist allerdings im Allgemeinen nicht der Fall. Für pseudoskalare Ströme liefern beide Terme einen Beitrag, was sich in der Struktur von (3.9) zeigt.

Obwohl das Quark-Gluon-Kondensat numerisch eine eher nachgeordnete Rolle spielt, weist seine Struktur eine Besonderheit auf: Die Formeln (3.9) zeigen eine im Vergleich zu den anderen höherdimensionalen Kondensaten größere Abhängigkeit in der schweren Quarkmasse  $m_Q$ . Dies ist darin begründet, dass das Quark-Gluon-Kondensat zum einen in seiner reparametrisierten Form proportional zu  $\langle \bar{q}q \rangle$  (anstatt  $\langle GG \rangle$  oder  $\langle \bar{q}q \rangle^2$ ) ist, zum anderen aber auch im Vergleich zum 4-Quark-Kondensat weniger stark von Ordnungen in  $M^2$  unterdrückt wird. Die dadurch begründete Sensibilität in der Skalenabhängigkeit ist in der späteren Auswertung von Bedeutung.

#### 4-Quark-Kondensat

Der letzte in dieser Arbeit betrachtete Beitrag in führender Ordnung ist das 4-Quark-Kondensat mit der Dimensionalität  $D = 6$ , das entsprechende Diagramm ist in Abb. 3.6 dargestellt. In [90] wird der Beitrag häufig als Quadrat des Quarkkondensats parametrisiert:

$$\langle 4q \rangle := r_{\text{vac}} \langle \bar{q}q \rangle^2 . \quad (3.10)$$

Der Parameter  $r_{\text{vac}}$  gibt dabei die Abweichung von dieser Parametrisierung an und ist von der Größenordnung  $\mathcal{O}(r_{\text{vac}}) = 1$ . Eine ausführlichere Herleitung des Matrixelements ist in Anhang B.3 gegeben. Der Beitrag, in dem das leichte Quarkfeld propagiert, wird aufgrund seiner starken Unterdrückung vernachlässigt. Für das relevante Diagramm folgt (s. Anhang B.2.4)

$$\begin{aligned} \Pi_T^{(4q)}(M^2) &= -\frac{32\pi\alpha_s r_{\text{vac}} \langle \bar{q}q \rangle^2}{81M^2} \left( 1 + \frac{m_Q^2}{M^2} - \frac{m_Q^4}{8M^4} \right) e^{-\frac{m_Q^2}{M^2}} \\ \Pi_5^{(4q)}(M^2) &= -\frac{16\pi\alpha_s r_{\text{vac}} \langle \bar{q}q \rangle^2 m_Q^2}{27M^2} \left( 1 + \frac{m_Q^2}{4M^2} - \frac{m_Q^4}{12M^4} \right) e^{-\frac{m_Q^2}{M^2}} . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Wie die anderen Kondensate mit  $D > 4$  sind die Beiträge von der Größenordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$ , obwohl sie die führende Ordnung in diesen Dimensionen darstellen. Die angesprochene Vernachlässigung der zusätzlichen Diagramme sowie der leichten Massenkorrekturen ist dadurch motiviert.

### 3.1.3. Nichtperturbative Beiträge in nächstführender Ordnung

Nachdem im letzten Abschnitt die nichtperturbativen Beiträge in führender Ordnung vorgestellt wurden, widmet sich dieses Kapitel der Berechnung der nächstführenden Ordnung (NLO). Es zeigt sich, dass insbesondere die Korrektur des Quarkkondensats zu einem signifikanten Beitrag führt, welcher in der Größenordnung etwa gleich mit der Summe der höherdimensionalen Kondensaten  $D = 4, 5$  und  $6$  liegt. Schleifenkorrekturen zu diesen Kondensaten sind wiederum stark unterdrückt und werden aus diesem Grund ebenso

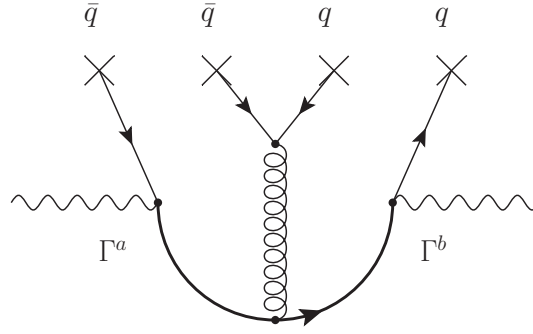


Abbildung 3.6.: Feynmandiagramm für das 4-Quark-Kondensat.  $\Gamma^{a,b}$  kennzeichnet die Diracstrukturen des korrespondierenden Stromes.

wie die leichten Massenkorrekturen  $\mathcal{O}(\alpha_s \cdot m_q)$  in dieser Ordnung vernachlässigt. Dieses Kapitel beschäftigt sich daher mit  $\Pi^{(\bar{q}q),\text{NLO}}(q^2)$ . Während die NLO-Korrekturen des Quarkkondensats für pseudoskalare Ströme in der Literatur bereits aufgegriffen wurden [91], ist dieser Beitrag für vektorielle Ströme zum ersten Mal in [87] einbezogen worden.

In die Berechnung von  $\Pi_{T(5)}^{(\bar{q}q),\text{NLO}}(q^2) = C_{T(5)}^{(\bar{q}q),\text{NLO}}(q^2) \cdot \langle \bar{q}q \rangle$  gehen grundsätzlich drei Beiträge ein, die in Abb. 3.7 dargestellt sind. Die Interaktion des schweren Quarkfeldes im QCD-Vakuum kann wie zuvor vernachlässigt werden. Als Notation für die einzelnen Beiträge wird die Benennung aus Abb. 3.7 verwendet, und es gilt

$$\Pi_{T(5)}^{(\bar{q}q),\text{NLO}}(q^2) = \Pi_S^{\text{NLO}}(q^2) + 2\Pi_V^{\text{NLO}}(q^2) + \Pi_B^{\text{NLO}}(q^2), \quad (3.12)$$

da die Vertexkorrektur aus Symmetriegründen doppelt in das Ergebnis eingeht. Man beachte, dass prinzipiell auch eine Strahlungskorrektur der leichten Quarklinien einzubeziehen ist. Diese Korrektur ist allerdings  $\mathcal{O}(\alpha_s \cdot m_q) \approx 0$  und wird daher nicht weiter verfolgt. Auch ist die Kopplungskonstante  $\alpha_s$  von der Skala  $\mu$  abhängig, im Weiteren wird die Skalenabhängigkeit jedoch nicht mehr explizit ausgeschrieben.

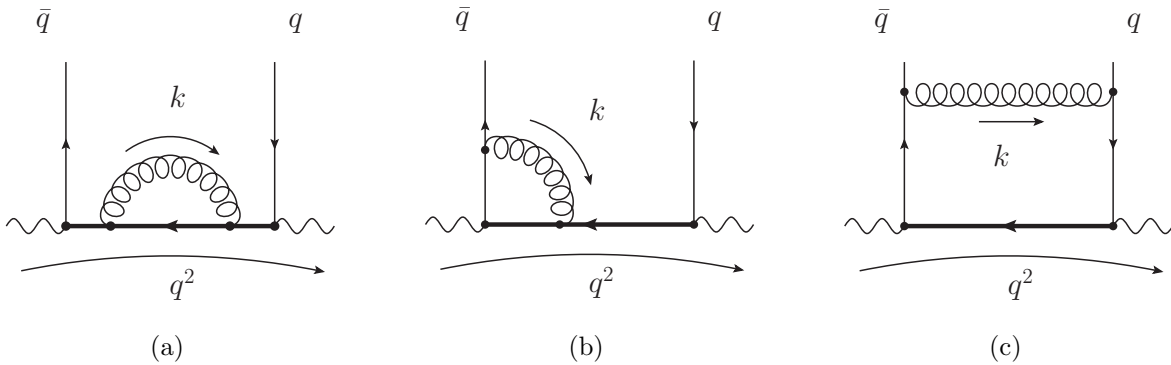


Abbildung 3.7.: Die Diagramme für den Selbstenergiebeitrag  $\Pi_S^{\text{NLO}}(q^2)$  in (a), die Vertexkorrektur  $\Pi_V^{\text{NLO}}(q^2)$  in (b), sowie für die Boxkorrektur  $\Pi_B^{\text{NLO}}(q^2)$  in (c). Der externe Impuls wird mit  $q^2$  und der Schleifenimpuls mit  $k$  bezeichnet. Die breitere Linie repräsentiert das schwere Quark.

Durch die auftretenden Schleifen muss gegenüber den LO-Beiträgen eine Regularisierung und Renormierung durchgeführt werden, um auftretende Divergenzen zu entfernen. Dieser Prozess ist zusammen mit der Herleitung des kompletten Beitrages in Anhang B.2.5 zu finden. Als renormiertes Ergebnis ergibt sich für  $\Pi_{T(5)}^{(\bar{q}q)}(q^2)$  schließlich nach Boreltransformation und inklusive der LO-Terme

$$\begin{aligned}\Pi_T^{(\bar{q}q)}(M^2) &= -m_Q \langle \bar{q}q \rangle e^{-\frac{m_Q^2}{M^2}} \left( 1 - \frac{m_q m_Q}{2M^2} + \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \left[ 1 - 3 \frac{m_Q^2}{M^2} \ln \frac{\mu^2}{m_Q^2} - 4 \frac{m_Q^2}{M^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{m_Q^2}{M^2} \Gamma \left( -1, \frac{m_Q^2}{M^2} \right) e^{\frac{m_Q^2}{M^2}} \right] \right), \\ \Pi_5^{(\bar{q}q)}(M^2) &= -(m_Q + m_q)^2 m_Q \langle \bar{q}q \rangle e^{-\frac{m_Q^2}{M^2}} \left( 1 - \frac{m_q}{2m_Q} - \frac{m_q m_Q}{2M^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \left[ \left( 3 \ln \frac{\mu^2}{m_Q^2} + 4 \right) \frac{m_Q^2}{M^2} - 7 - 3 \ln \frac{\mu^2}{m_Q^2} + 3 \Gamma \left( 0, \frac{m_Q^2}{M^2} \right) e^{\frac{m_Q^2}{M^2}} \right] \right),\end{aligned}\tag{3.13}$$

mit der unvollständigen Gammafunktion  $\Gamma(a, z) = \int_z^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$ .

Zusammen mit den höherdimensionalen Kondensaten (3.6), (3.9) und (3.11) wurden nun alle für diese Arbeit relevanten nichtperturbativen Beiträge hergeleitet und die Ergebnisse können zusammen mit den perturbativen Beiträgen in (2.25) eingesetzt werden.

### 3.1.4. Alternative Summenregeln

Neben den vorgestellten Borelsummenregeln gibt es weitere Möglichkeiten, die Summenregeln zu modifizieren. Sie alle stützen sich im Kern auf die Approximation hadronischer Darstellungen mit einer OPE durch die Quark-Hadron-Dualität. Wie erwähnt besteht der Nachteil dieser Methode darin, dass die Genauigkeit dieser Approximation nicht sicher angegeben werden kann. Eine Möglichkeit, eine Abschätzung auf diese systematische Unsicherheit zu erhalten, bietet daher die Untersuchung weiterer Summenregeln für dieselbe hadronische Größe. Bei gleichen Eingabeparametern ist ein Unterschied im Ergebnis bei verschiedenen Summenregeln somit ein Maß für die Unsicherheit der Methode. Aus diesem Grund werden in diesem Abschnitt noch weitere Summenregeln vorgestellt, die neben der Standardauswertung aus Kapitel 2.2.5 als zusätzliche Prüfung des Ergebnisses zum Einsatz kommen.

#### Hilbertsummenregeln

Ausgehend von Gleichung (2.22) können auch andere Gewichtungen zur Unterdrückung der Kontinuumszustände gewählt werden. Die häufig gewählte Technik der *Hilbertsummenregeln* (engl. auch *power moments*) bedient sich dazu einer Differenzierung der Summenregeln (2.22) nach Potenzen von  $q^2$  in einer Region  $q_0^2 \ll m_Q^2$ . Dadurch erhöht sich die Ordnung von  $q^2$  im Nenner der Dispersionsrelation und Beiträge für große Werte von  $s$  werden unterdrückt. So wird das unbekannte Kontinuum in der Berechnung weniger



gewichtet und die gewünschte Resonanz verstärkt. Auch die auftretenden Subtraktionsterme werden durch die Differentiation entfernt, je nach Anzahl sind  $n$  Differentiationen notwendig. Das  $n$ -te Moment der Summenregel ist somit gegeben als

$$\begin{aligned} \Pi^{(n)}(s_0, q_0^2)_{T(5)} := & \int_{(m_Q+m_q)^2}^{s_0} \frac{ds}{(s-q_0^2)^{n+1}} \rho_{T(5)}^{\text{pert}}(s) \\ & + \left( \frac{d}{dq^2} \right)^n \left[ \rho_{T(5)}^{(\bar{q}q)}(q^2) + \rho_{T(5)}^{(D456)}(q^2) \right] \Big|_{q^2=q_0^2}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

wobei  $\rho_{T(5)}^{(D456)}(q^2)$  die höherdimensionalen Kondensate bezeichnet. Im Fall der vorliegenden Zweipunktsummenregeln sind mindestens zwei Differentiationen notwendig. Man erkennt, dass die Methode der Boreltransformation und der Hilbertmomente für die gemeinsamen Grenzfälle  $n \rightarrow \infty$  und  $q_0 \rightarrow -\infty$  identisch sind.

### Modifizierte Borelsummenregeln

Es ist möglich, statt der Korrelationsfunktion  $\Pi_{T(5)}(q^2)$  eine modifizierte Kombination der Form

$$\Pi_{T(5)}^{\text{mod}}(q^2) = \Pi_{T(5)}(q^2) - \Pi_{T(5)}(0) \quad (3.15)$$

zu betrachten. Der subtrahierte Term hängt nicht von  $q^2$  ab und somit hat  $\Pi_{T(5)}^{\text{mod}}(q^2)$  im Prinzip denselben physikalischen Gehalt wie die Standardkorrelationsfunktion, da der zusätzliche Term nach Boreltransformation verschwindet. Die entsprechende Summenregel ergibt sich dann nach Boreltransformation zu

$$\begin{aligned} \Pi_T^{\text{mod,OPE}}(M^2) &= f_{H^*}^2 e^{-\frac{m_{H^*}^2}{M^2}} + \int_{(m_H+m_P)^2}^{\infty} ds \frac{\rho_T^{\text{had}}(s)}{s} e^{-\frac{s}{M^2}}, \\ \Pi_5^{\text{mod,OPE}}(M^2) &= f_H^2 m_H^2 e^{-\frac{m_H^2}{M^2}} + \int_{(m_{H^*}+m_P)^2}^{\infty} ds \frac{\rho_5^{\text{had}}(s)}{s} e^{-\frac{s}{M^2}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Als Unterschied zu den Standardsummenregeln (2.25) tritt der zusätzliche Faktor  $1/s$  als Gewichtung der Spektraldichte auf, Beiträge werden mit anwachsendem  $s$  zusätzlich unterdrückt. Die spätere Justierung des neuen Grenzparameters  $s_0^{H^*,\text{mod}}$  geschieht analog zur Standardsummenregel (s. Kapitel 3.2.2), auch die Positivität der Spektraldichte bleibt gewährleistet. So bietet diese Modifikation weitere Summenregeln mit Zugriff auf die gleiche hadronische Größe, allerdings mit anderer Gewichtung der Beiträge. Sie können somit zur Abschätzung der systematischen Unsicherheit herangezogen werden.

Analog hierzu können weitere modifizierte Borelsummenregeln konstruiert werden. Um einen zusätzlichen Gewichtungsfaktor von  $s$  für die Spektraldichte zu erhalten, müssen die Summenregeln (2.25) lediglich nach  $-1/M^2$  abgeleitet werden. Die weitere Vorgehensweise zur Auswertung der Summenregel unterscheidet sich wiederum nicht von den anderen Summenregeln.

Auf diese Weise können im Prinzip beliebig viele Summenregeln für die gleiche Zerfallskonstante konstruiert werden. Die Untersuchung in dieser Arbeit beschränkt sich allerdings auf die benachbarten Summenregeln, so dass sich insgesamt ein Satz von  $\{1/s, 1, s\}$  als Gewichtungsfaktoren ergibt.

### Ausschluss der ersten radialen Anregung

Auf den Grundzustand folgen in der Spektraldichte weitere Resonanzen und ein Kontinuum von Mehrteilchenzuständen (s. Abb. 2.1). Einen Teil dieser angeregten Zustände bilden die *radialen Anregungen* (s. Kapitel 4.1). Je mehr Informationen über diese Zustände bekannt sind, desto genauer ist die folgende Approximation per Quark-Hadron-Dualität, weil sich der Anteil des unbekanntes Kontinuums verringert. Aus diesem Grund soll neben dem Grundzustand nun auch der erste radiale Anregungszustand aus der Spektraldichte isoliert werden. Dies bedeutet, die unbekanntes Spektraldichte aus (2.13) wird gemäß

$$\begin{aligned} \rho_T^{\text{had}}(s)\theta(s - (m_H + m_P)^2) &= m_{H^{*'}}^2 f_{H^{*'}}^2 + \rho_T^{\text{OPE}}(s)\theta(s - s_0^{H^{*'}}), \\ \rho_5^{\text{had}}(s)\theta(s - (m_{H^*} + m_P)^2) &= m_{H'}^4 f_{H'}^2 + \rho_5^{\text{OPE}}(s)\theta(s - s_0^{H'}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

modifiziert, wobei das weiterhin unbekanntes hadronische Kontinuum durch sein perturbatives Gegenstück ersetzt wurde. Durch diesen Ansatz werden neue Größen wie die Masse der radialen Anregung  $m_{H^{(*)'}}$ , ihre Zerfallskonstante  $f_{H^{(*)'}}$ , sowie der zugehörige Grenzparameter  $s_0^{H^{(*)'}}$  eingeführt, welche jeweils mit ihren Unsicherheiten die Genauigkeit der Summenregel verringern. Folgend wird die Summenregel deshalb modifiziert, um die erste radiale Anregung aus der Summenregel auszuschließen. Dazu werden die Summenregeln vor Boreltransformation mit einem Faktor von  $(m_{H^{(*)'}}^2 - q^2)$  multipliziert, dies bewirkt eine Unterdrückung im Energiebereich der ersten radialen Anregung. Die zugehörige Zerfallskonstante fällt nach Boreltransformation weg, und man erhält die folgenden Summenregeln

$$\begin{aligned} f_{H^*}^2 m_{H^*}^2 (m_{H^{*'}}^2 - m_{H^*}^2) e^{-\frac{m_{H^*}^2}{M^2}} &= \int_{(m_Q+m_q)^2}^{s_0^{H^{*'}}} ds (m_{H^{*'}}^2 - s) e^{-\frac{s}{M^2}} \rho_T^{\text{OPE}}(s) \\ &+ \left( m_{H^{*'}}^2 - \frac{d}{d(-1/M^2)} \right) \left( \Pi_T^{(\bar{q}q)}(M^2) + \Pi_T^{(D456)}(M^2) \right), \\ f_H^2 m_H^4 (m_{H'}^2 - m_H^2) e^{-\frac{m_H^2}{M^2}} &= \int_{(m_Q+m_q)^2}^{s_0^{H'}} ds (m_{H'}^2 - s) e^{-\frac{s}{M^2}} \rho_5^{\text{OPE}}(s) \\ &+ \left( m_{H'}^2 - \frac{d}{d(-1/M^2)} \right) \left( \Pi_5^{(\bar{q}q)}(M^2) + \Pi_5^{(D456)}(M^2) \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Der Ausschluss der ersten radialen Anregung bietet auf der einen Seite eine verbesserte Genauigkeit der QHD-Approximation, führt auf der anderen Seite allerdings zwei zusätzliche Größen  $m_{H^{(*)'}}$  und  $s_0^{H^{(*)'}}$  mit entsprechenden Unsicherheiten ein. Außerdem

ist der Ansatz (3.17) bezüglich der Breite der radialen Anregung eine Vereinfachung: Während die Approximation durch eine Deltadistribution für den Grundzustand eine gute Näherung ist, muss für die radiale Anregung im Prinzip die Breite mit einem Breit-Wigner-Ansatz berücksichtigt werden.

Da diese alternativen Summenregeln allerdings nur einen systematischen Vergleich zu den Borelsummenregeln bieten sollen, wird hier auf diese Präzisierung verzichtet. Man beachte, dass  $s_0^{H^{(*)}}$  im Prinzip ebenfalls über Massenfixierung gewählt werden kann, dies aber aufgrund der großen Unsicherheiten in den Mesonmassen  $m_{H^{(*)}}$  zu einem entsprechend großen Intervall im Resultat führt [92]. In diesem Fall jedoch bewirkt die Multiplikation mit dem genannten Faktor, dass sich Beiträge unmittelbar über und unter  $s = m_{H^{(*)}}^2$ , teilweise wegheben, wodurch die Summenregeln (3.18) weniger sensitiv auf  $s_0^{H^{(*)}}$  werden.

In Kapitel 4 werden die radialen Anregungen erneut aufgegriffen.

### 3.1.5. Grenzübergang für schwere Quarks

Neben den bisher genannten Techniken zur Bestimmung der Zerfallskonstanten bietet sich weiterhin eine Betrachtung der Summenregeln im Rahmen der effektiven Theorie schwerer Quarks (engl. *Heavy Quark Effective Theory*) (HQET) an. Nachdem E.V. Shuryak zunächst in einer Erweiterung der SVZ-Summenregeln u.a. Massen und Zerfallskonstanten einiger Mesonen mit schweren Quarks durch Entwicklung in dieser schweren Quarkmasse abschätzte [93], folgten viele Veröffentlichungen [94, 95, 96] dieser Methode und betteten den QCD-Summenregel-Formalismus in die HQET ein.

In diesem Abschnitt soll die Bestimmung von  $f_{H^{(*)}}$  durch den Grenzübergang für schwere Quarks (engl. *Heavy Quark Limit*) (HQL) kurz zur späteren Verwendung dargelegt werden. Für eine ausführlichere Diskussion dieser Aspekte sei beispielsweise auf [88, 97, 98] verwiesen. Die Hauptpunkte dieses Abschnittes sind im Wesentlichen auch in [87] zu finden.

Enthält ein physikalisches System mehrere Skalen unterschiedlicher Größenordnung, so kann es sinnvoll sein, das System approximativ zunächst nur auf der dominierenden Skala zu betrachten, und die vernachlässigten Anteile durch Korrekturen in Form einer Entwicklung bezüglich des Skalenparameters (im Prinzip ähnlich einer perturbativen Entwicklung) einzubeziehen. Für die in dieser Arbeit betrachteten schweren Mesonen, bestehend aus einem schweren ( $b, c$ ) und einem leichten ( $u, d, s$ ) Konstituentenquark, kann aus (2.25) das HQL dieser Summenregeln gebildet werden, welches dann folgend den Grenzübergang  $m_Q \rightarrow \infty$  ermöglicht. Dazu ist eine Reskalierung aller Parameter nötig, welche implizit mit der Quarkmasse verknüpft sind:

$$m_{H^{(*)}} = m_Q + \bar{\Lambda}, \quad s_0^{H^{(*)}} = m_Q^2 + 2m_Q\omega_0, \quad M^2 = 2m_Q\tau. \quad (3.19)$$

Man erkennt, dass die wesentlichen Parameter nun in Abhängigkeit von  $m_Q$  ausgedrückt werden, welche dann mit (kleinen) Korrekturen  $\bar{\Lambda}$ ,  $\omega_0$  und  $\tau$  versehen werden. Nach dieser Reskalierung und dem genannten Grenzübergang  $m_Q \rightarrow \infty$  erhält man schließ-

lich den gewünschten HQL-Ausdruck der entsprechenden Summenregel. Eine konkrete Berechnung liefert in führender Ordnung die HQL-Relation

$$f_H = f_{H^*} = \frac{\hat{f}}{\sqrt{m_H}}, \quad (3.20)$$

mit der ebenfalls im Anhang angegebenen reskalierten Zerfallskonstanten  $\hat{f}$ . In diesem Grenzübergang zeigt sich also unter Vernachlässigung der radiativen Korrekturen eine Spinsymmetrie für schwere Quarks, welche durch die in den letzten Kapiteln vorgestellten Methoden geprüft werden kann. Bezieht man die radiativen Korrekturen ein, so erhält man einen Bruch dieser Symmetrie in  $\mathcal{O}(\alpha_s)$ :

$$\left( \frac{f_{H^*}}{f_H} \right)_{\text{HQL}} = 1 - \frac{2\alpha_s}{3\pi}. \quad (3.21)$$

Man beachte, dass sich in diesem Grenzübergang die in den Gleichungen (B.89) und (B.92) dargestellten Logarithmen in  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  herausheben.

Auf Basis von Gleichung (3.21) kann nun ein Vergleich mit den entsprechenden Ergebnissen der HQET angestellt werden. In der HQET werden Felder (und somit Ströme) schon auf der Ebene der Lagrangedichte reskaliert, wodurch man eine Lagrangefunktion  $\mathcal{L}_{\text{HQET}}$  erhält. Diese kann völlig analog zur gewöhnlichen  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  behandelt werden, so dass z.B. auch spezielle Feynmannregeln für die HQET definiert werden. Ein Vergleich der beiden Lagrangedichten ermöglicht eine Bestimmung der entsprechenden Wilsonkoeffizienten in der HQET. Im Grenzübergang  $m_Q \rightarrow \infty$  müssen beide Darstellungen identisch sein. Dies wird bestätigt durch die zu Gleichung (3.21) korrespondierende Relation [97]

$$\left( \frac{f_{H^*}}{f_H} \right)_{\text{HQET}} = \left( 1 - \frac{2\alpha_s}{3\pi} \right) \left( 1 + \frac{\delta}{m_Q} \right). \quad (3.22)$$

In dieser Gleichung wurden alle zur ersten Massenkorrektur proportionalen Terme zu einem gemeinsamen Parameter  $\delta$  zusammengefasst. Unter Vernachlässigung höherer Korrekturen  $\mathcal{O}(1/m_Q^2)$  können nun die Ergebnisse der HQL-Summenregeln mit der HQET verglichen werden. In analoger Weise kann auch die Flavoursymmetrieverletzung für schwere Quarks abgeschätzt werden, indem das Verhältnis der entsprechenden Zerfallskonstanten gebildet wird. In der HQET lautet das entsprechende Verhältnis unter Vernachlässigung der Ordnung  $\mathcal{O}(1/m_Q)$  [97]

$$\left( \frac{f_B}{f_D} \right)_{\text{HQET}} = \sqrt{\frac{m_D}{m_B}} \left( \frac{\alpha_s(m_c)}{\alpha_s(m_b)} \right)^{\frac{6}{25}} \left( 1 + 0.894 \frac{\alpha_s(m_c) - \alpha_s(m_b)}{\pi} \right) \simeq 0.69. \quad (3.23)$$

## 3.2. Numerische Analyse für $f_H$ und $f_{H^*}$

Die Ergebnisse der letzten Kapitel werden nun verwendet, um mittels der Summenregeln (2.25) eine Analyse der hadronischen Zerfallskonstanten  $f_H$  und  $f_{H^*}$  durchzuführen, wobei  $H = \{B, B_s, D, D_s\}$  und  $H^* = \{B^*, B_s^*, D^*, D_s^*\}$ . Dabei wird sowohl eine konsistente Abschätzung der Unsicherheiten mit Vergleich zu modifizierten Summenregeln, als auch eine Betrachtung des Sachverhaltes im Rahmen der HQET durchgeführt. Zusätzlich werden obere Grenzen für die Zerfallskonstanten abgeschätzt und die Verletzung der Spin- und Flavoursymmetrien durch Betrachtung der entsprechenden Verhältnisse untersucht.

Alle numerischen Auswertungen in dieser Arbeit wurden mit dem Programm *Wolfram Mathematica 10* durchgeführt. Es wurde weiterhin das Mathematicapaket *RunDec.m* von K.G. Chetyrkin, J.H. Kühn und M. Steinhauser zur Behandlung von skalenabhängigen Parametern eingesetzt. Alle Größen sind, sofern nicht anders gekennzeichnet, im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema angegeben.

### 3.2.1. Allgemeine Eingabeparameter

Für die Auswertung der Summenregeln und die Angabe der jeweiligen Unsicherheit ist die Wahl der Eingabeparameter von zentraler Bedeutung. Dies betrifft sowohl Größen wie Masse oder Kopplung, welche modellunabhängig aus der Literatur entnommen werden können (s. Tabelle 3.1), als auch solche, die im Rahmen des Modells selbst nach physikalischen Erwägungen ermittelt werden müssen.

Parameter	Werte	Ref.
Quarkmassen	$\overline{m}_b(\overline{m}_b) = 4.18 \pm 0.03 \text{ GeV}$	[3]
	$\overline{m}_c(\overline{m}_c) = 1.275 \pm 0.025 \text{ GeV}$	[3]
	$\overline{m}_s(2 \text{ GeV}) = 95 \pm 10 \text{ MeV}$	[3]
Starke Kopplung	$\alpha_s(M_Z) = 0.1184 \pm 0.0007$	[3]
	$\alpha_s(3 \text{ GeV}) = 0.255 \pm 0.003$	[3]
	$\alpha_s(1.5 \text{ GeV}) = 0.353 \pm 0.006$	[3]
Kondensate	$\langle \bar{q}q \rangle(2 \text{ GeV}) = -(277_{-10}^{+12} \text{ MeV})^3 (ChPT \oplus m_s)$	[99, 3]
	$\langle \bar{s}s \rangle / \langle \bar{q}q \rangle = 0.8 \pm 0.3$	[100]
	$\langle GG \rangle = 0.012_{-0.012}^{+0.006} \text{ GeV}^4$	[100]
	$m_0^2 = 0.8 \pm 0.2 \text{ GeV}^2$	[100]
	$r_{vac} = 1.0$	[100]

Tabelle 3.1.: Summenregelunabhängige Eingabeparameter für die Berechnung von  $f_H$  und  $f_{H^*}$ .

Aus Konsistenzgründen werden in dieser Arbeit Quarkmassen verwendet, die durch (Quarkonium-)Summenregeln bestimmt wurden. Die in Tabelle 3.1 angegebenen Quarkmassen sind aus [3] entnommen, der dort angegebene Durchschnitt liegt für  $m_b$  und  $m_c$  nahe an den Ergebnissen aus QCD-Summenregelberechnungen. Für die Masse des Strange-Quarks  $m_s$  wird der in [3] angegebene Fehler von Gitter-QCD-Resultaten dominiert, die Vorhersagen der Summenregelmethode besitzen dort eine größere Ungenauigkeit. Deshalb wird folgend das dort angegebene Fehlerintervall verdoppelt. Zu beachten ist, dass die Größe  $r_{\text{vac}}$  in [100] eigentlich zwischen 0.1 und 1.0 variiert wird. Allerdings ändert eine Variation in diesem Bereich die späteren Ergebnisse nicht signifikant, daher wird dieser Parameter im weiteren Verlauf der Arbeit auf den Wert  $r_{\text{vac}} = 1.0$  fixiert. Für die genaue Bestimmung des Quarkkondensats durch *Chirale Störungstheorie* (engl. *Chiral Perturbation Theory* (ChPT)) sei z.B. auf [101] verwiesen. Die Skalenabhängigkeit des Quarkkondensats wird zur selben Ordnung in  $\alpha_s$  betrachtet wie die Quarkmasse  $m_Q$ , das Produkt aus beiden ist jedoch skaleninvariant (s. Kapitel 1.4.3). Weiterhin ist die anomale Dimension des Gluonkondensats Null, es ist damit ebenso nicht von  $\mu$  abhängig. Die Parametrisierungen der höherdimensionalen Kondensate  $D = 5$  und  $D = 6$  werden an der Skala  $\mu = 1$  GeV betrachtet, ihre Skalenabhängigkeit ist sehr gering und wird damit im Folgenden vernachlässigt [90].

### 3.2.2. Auswertung für Standardsummenregeln

Zunächst sollen die Standardsummenregeln gemäß (2.25) ausgewertet werden, um  $f_H$  und  $f_{H^*}$  zu berechnen. Die für alle Summenregeln in dieser Arbeit gleichen Parameter sind in Tabelle 3.1 angegeben, allerdings gibt es noch eine Reihe weiterer Größen, die für jeden korrespondierenden Strom individuell angegeben werden müssen. Dies sind im Weiteren die Skala  $\mu$ , der Borelparameter  $M^2$  sowie der Grenzparameter  $s_0$ . Im Prinzip zählt auch die Trennungsskala  $\mu_T$  der OPE dazu (s. Kapitel 2.1), diese wird jedoch in der Regel gleich der Renormierungsskala gewählt.

Für die Wahl von  $\mu$  orientiert man sich an der Skalenrelation

$$\mu \sim \sqrt{m_H^2 - m_Q^2}, \quad (3.24)$$

wobei  $H$  das zu den jeweiligen Quantenzahlen korrespondierende Meson bezeichnet. Außerdem ist es möglich, eine Standardskala für alle Bottom(Charm)-Mesonen zu wählen. Die Abweichungen, die sich bei veränderter Spinparität oder dem Wechsel von  $m_q \rightarrow m_s$  ergeben, sind wesentlich kleiner als der betrachtete Variationsbereich der Skala. Dies ist auch dadurch motiviert, dass die physikalisch messbare Zerfallskonstante nicht stark von einer willkürlichen Renormierungsskala abhängen sollte - in einer optimalen Entwicklung unter Einbeziehung aller Beiträge würde sich die Skalenabhängigkeit ganz wegheben. Als Skalenbereich wird auf Basis dieser Überlegungen  $\mu = 1.5$  GeV als Zentralwert für Mesonen mit Charm-Quark, sowie  $\mu = 3$  GeV für Mesonen mit Bottom-Quark gewählt. Der Variationsbereich ist in Tabelle 3.2 angegeben.

Zur Wahl von  $M^2$  werden mehrere Kriterien herangezogen: Die Größenordnung von  $M^2$  orientiert sich an  $\mathcal{O}(M^2) = \mu^2$ , für die obere und untere Grenze  $M_{\max}^2$  bzw.  $M_{\min}^2$  werden weitere Bedingungen herangezogen. Bezugnehmend auf Kapitel 2.2.5 ist ein wesentlicher Effekt der Boreltransformation die Unterdrückung unbekannter Kontinuumsbeiträge in der Summenregel. Aus diesem Grund sollte der Borelparameter möglichst klein gewählt werden, um die Genauigkeit der Summenregel zu verbessern. Andererseits werden höherdimensionale Beiträge in der OPE (s. Kapitel 2.1) durch Ordnungen von  $1/M^2$  unterdrückt. Deshalb würde ein zu geringer Borelparameter die Konvergenz der OPE stören. Die *Borelfenster* mit Zentralwert in Klammern

$$\begin{aligned} M_{\text{Charm}}^2 &= 1.5 - 2.5 \text{ (2.0) GeV}^2, \\ M_{\text{Bottom}}^2 &= 4.5 - 6.5 \text{ (5.5) GeV}^2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

erfüllen diese Kriterien für alle betrachteten Kanäle hinreichend: Mit der Wahl von  $M_{\min}^2$  wird sichergestellt, dass die höherdimensionalen Kondensatbeiträge ( $D = 4, 5$  und  $6$ ) nur etwa 5% der dominierenden perturbativen Beiträge ausmachen. Für  $M_{\max}^2$  wird wiederum in diesem Fall die relative Größe  $R_{\text{Kont}}$  der Kontinuumsbeiträge im gesamten Variationsbereich stets etwa  $< 50\%$  gehalten. Man erhält diese mit

$$R_{\text{Kont}} = 1 - \frac{\Pi_{T(5)}^{\text{OPE}}(M^2, s_0)}{\Pi_{T(5)}^{\text{OPE}}(M^2, \infty)}. \quad (3.26)$$

Für den Grenzparameter  $s_0$  werden die unten genannten Abschätzungen benutzt. Die Erfüllung der Kriterien für das ausgewählte Borelfenster ist beispielhaft für  $H = B$  in Abb. 3.8 gezeigt.

Weil die Boreltransformation wie dargelegt eine rein mathematische Operation ist, sollte jedes mit einer physikalisch messbaren Größe identifizierbares Ergebnis im Prinzip nicht von diesem Parameter abhängen - eine Summenregel gilt dann als *stabil*, wenn sie unter Variation von  $M^2$  im gewählten Intervall nicht zu stark fluktuiert. Anhand von Abb. 3.9 ist exemplarisch für  $H = B$ ,  $B^*$  die Stabilität der Summenregeln unter Wahl des Borelfensters dargestellt, dies bestätigt die Qualität der Summenregel.

Nun muss noch der effektive Grenzparameter  $s_0^{H^{(*)}}$  bestimmt werden. Dieser Grenzparameter ist wie dargestellt direkt mit der Anwendung der QHD verknüpft. Er soll so gewählt werden, dass die unbekannte hadronische Spektraldichte gut mit der perturbativ berechneten Korrelationsfunktion angenähert werden kann. Allerdings ist die Summenregel sehr sensitiv auf Variationen von  $s_0^{H^{(*)}}$ , und eine direkte quantitative Abschätzung der QHD-Unsicherheit ist aufgrund der unbekanntenen Spektraldichte nicht möglich. Daher ist die Bestimmung von  $s_0^{H^{(*)}}$  nicht trivial. Eine für diesen Zweck geläufige Methode ist es, die Fixierung von  $s_0^{H^{(*)}}$  mit einer messbaren Größe - in diesem Fall die Mesonmasse  $m_{H^{(*)}}$  - zu verknüpfen. Dazu wird die Summenregel (2.25) nach  $-1/M^2$  abgeleitet und anschließend durch die ursprüngliche Summenregel geteilt. So erhält man

$$m_{H^{(*)}}^2 = \frac{\frac{\partial K(M^2, s_0^{H^{(*)}})}{\partial(-1/M^2)}}{K(M^2, s_0^{H^{(*)}})}, \quad (3.27)$$

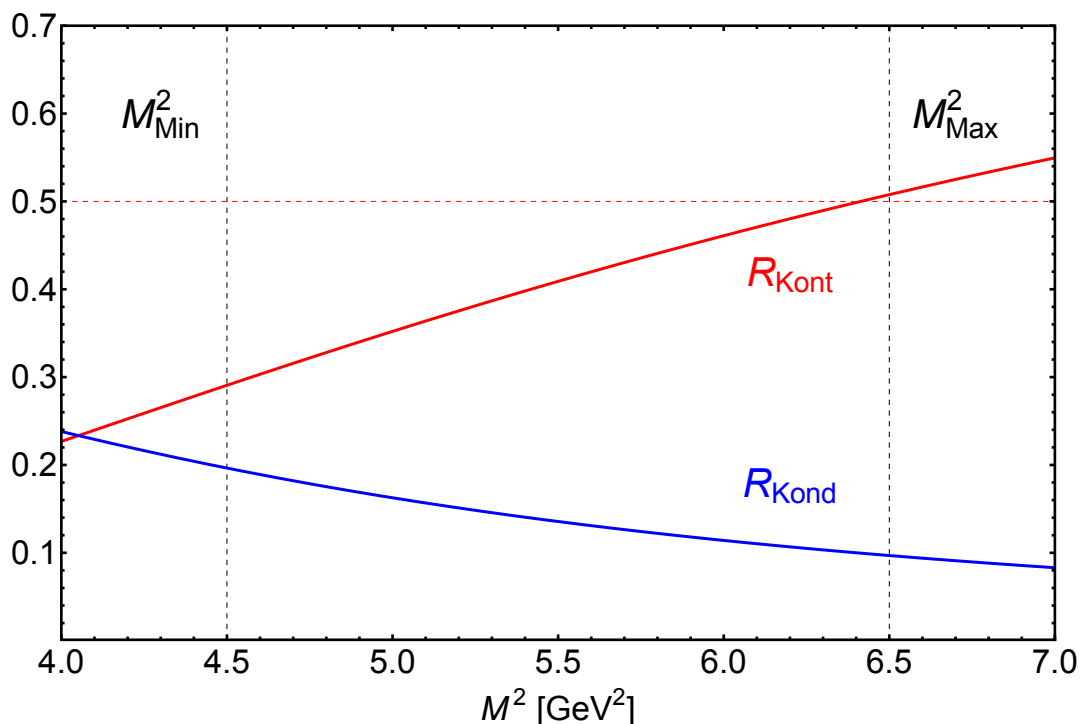


Abbildung 3.8.: Kontinuumsanteil  $R_{\text{Kont}}$  und relative Größe der Kondensatbeiträge  $R_{\text{Kond}}$  in Abhängigkeit des Borelparameters für die Summenregel mit  $H = B$ . Das Borelfenster wird zwischen  $M_{\text{min}}^2 = 4.5 \text{ GeV}^2$  und  $M_{\text{max}}^2 = 6.5 \text{ GeV}^2$  gewählt, die horizontale Linie (gestrichelt, rot) kennzeichnet die angestrebte obere Grenze für  $R_{\text{Kont}}$ . Für Charm-Mesonen ergibt sich ein ähnliches Bild.

mit

$$K(M^2, s_0^{H^{(*)}}) = \int_{(m_Q+m_q)^2}^{s_0^{H^{(*)}}} ds \rho_{T(5)}^{\text{OPE}}(s) e^{-\frac{s}{M^2}}. \quad (3.28)$$

Nun kann  $s_0^{H^{(*)}}$  mit Hilfe der sehr genau gemessenen Mesonmassen (s. Tabelle 3.2) auf diese Weise angepasst werden, als Beispiel ist das Verfahren in Abb. 3.10 anhand der Summenregel für das  $B$ -Meson verdeutlicht. Allerdings ist zu beachten, dass Gleichung (3.27) zusätzlich von  $M^2$  abhängt und die Kriterien zur Wahl von  $M^2$  wiederum durch die Wahl von  $s_0^{H^{(*)}}$  beeinflusst werden. Es wird deutlich, dass  $M^2$  und  $s_0^{H^{(*)}}$  korreliert sind. Grundsätzlich kann das optimale Fenster für diese korrelierten Parameter durch zweidimensionales Abtasten (engl. *scan*) des Parameterraumes bestimmt werden. Da die Schwankung von  $s_0^{H^{(*)}}$  unter Veränderung von  $M^2$  allerdings gering ist, wird im Folgenden durch eine Abschätzung ein Punkt im Parameterraum angesetzt, der alle angeführten Kriterien erfüllt. Die korrelierte Unsicherheit der beiden Größen wird daraufhin durch Variation von  $M^2$  ermittelt.



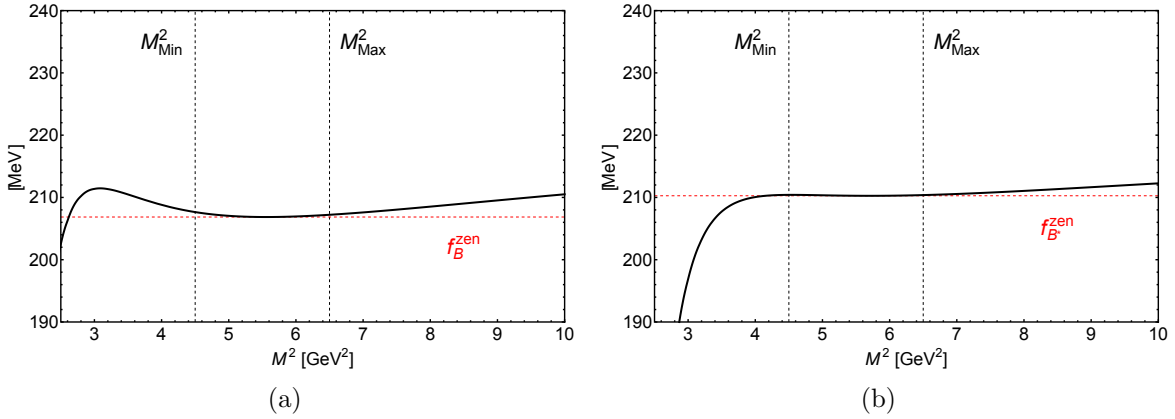


Abbildung 3.9.: Diagramme zur Stabilität der Summenregel unter Variation von  $M^2$  für (a)  $H = B$  und (b)  $H = B^*$ . Die vertikalen Linien zeigen das gewählte Borelfenster zwischen  $M^2_{\text{min}}$  und  $M^2_{\text{max}}$ , die horizontale Linie den Zentralwert der jeweiligen Zerfallskonstanten.

Während  $s_0^{H^{(*)}}$  aufgrund der engen Verknüpfung mit der Mesonmasse für jedes Meson einzeln angegeben wird, wird bezüglich  $M^2$  und  $\mu$  für pseudoskalare und vektorielle Ströme in Anlehnung an die Spinsymmetrie für schwere Quarks (s. Kapitel 3.1.5) ein gemeinsames Intervall gewählt. Dabei bleibt die Einhaltung der oben genannten Kriterien Bedingung. Ein entsprechender Überblick findet sich in Tabelle 3.2, welche auch in [87] dargestellt ist.

Korr.-Fkt.	$\Pi_T^b(M^2)$		$\Pi_5^b(M^2)$		$\Pi_T^c(M^2)$		$\Pi_5^c(M^2)$	
$M^2$ [ $\text{GeV}^2$ ]	5.5 (4.5 – 6.5)				2.0 (1.5 – 2.5)			
$\mu$ [ $\text{GeV}$ ]	3.0 (3.0 – 5.0)				1.5 (1.3 – 3.0)			
Kanal	$f_{B^*}$	$f_{B_s^*}$	$f_B$	$f_{B_s}$	$f_{D^*}$	$f_{D_s^*}$	$f_D$	$f_{D_s}$
$m_H$ [ $\text{GeV}$ ] [3]	5.325	5.415	5.280	5.367	2.010	2.112	1.870	1.968
$s_0^{H^{(*)}}$ [ $\text{GeV}^2$ ]	34.1	36.3	33.9	35.6	6.2	7.4	5.6	6.3
$f_H$ [ $\text{MeV}$ ]	$210_{-12}^{+10}$	$251_{-16}^{+14}$	$207_{-09}^{+17}$	$242_{-12}^{+17}$	$242_{-12}^{+20}$	$293_{-14}^{+19}$	$201_{-13}^{+12}$	$237_{-23}^{+13}$

Tabelle 3.2.: Individuelle Eingabeparameter für die Berechnung von  $f_H$  und  $f_{H^*}$  und Ergebnisse.

Die Auswertung der Standardsummenregeln für diese Inputparameter führt zu den ebenfalls in Tabelle 3.2 dargestellten Ergebnissen. Zur Bestimmung der Unsicherheiten wird konservativ die Unkorreliertheit aller Parameter (mit Ausnahme der oben erwähnten Verknüpfung zwischen  $s_0^{H^{(*)}}$  und  $M^2$ ) angenommen. Die Parameter werden dann in den angegebenen Intervallen einzeln variiert und die entsprechende Änderung als die mit der jeweiligen Größe verbundene Einzelunsicherheit interpretiert, welche zum Schluss qua-

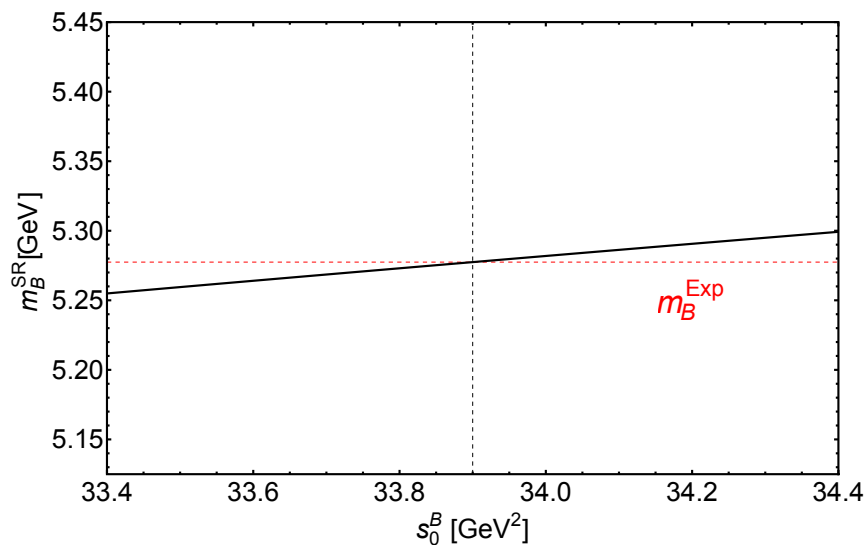


Abbildung 3.10.: Bestimmung von  $s_0^B$  durch Massenfixierung. Die horizontale Linie kennzeichnet die experimentell bestimmte Mesonmasse  $M_B^{\text{Exp}}$ , die schwarze, durchgezogene Kurve die aus der Summenregel rekonstruierte Masse  $m_B^{SR}$  in Abhängigkeit von  $s_0^B$ . Die vertikale, gestrichelte Linie gibt das ermittelte  $s_0^B$  an.

drastisch addiert werden. Diese Vorgehensweise erfasst die Parameterunsicherheiten - die theoretische Unsicherheit der Methode wird dadurch jedoch nicht abgeschätzt. Zugriff auf diese erhält man unter anderem durch die Betrachtung der OPE. Wie dargestellt sollte die Summenregel im Prinzip nicht von der Renormierungsskala  $\mu$  abhängen. Diese Abhängigkeit wird erst durch das Abbrechen der OPE nach einem bestimmten Term (hier: nach  $D = 6$ ) eingeführt. Da die OPE als konvergent angenommen wird und die Größenordnung der vernachlässigten Beiträge somit kleiner oder gleich des letzten einbezogenen Terms sein sollte (s. Abb. 3.11), wird im Folgenden die Summe der Beiträge für  $D = \{4,5,6\}$  als Abschätzung der entsprechenden systematischen Unsicherheit für die OPE angesetzt.

Eine weitere Quelle systematischer Unsicherheit ist die QHD selbst. Sie wird zum einen durch die Wahl des Parameters  $s_0^{H^{(*)}}$  adressiert, aber auch durch die Konstruktion der Summenregel selbst - eine unterschiedliche Wahl der Gewichtungsfunktion für die Spektraldichte führt zu einer anderen Summenregel und somit bei gleichen Parametern zu einem anderen Ergebnis. Auf diesen Sachverhalt wird in Kapitel 3.3 weiter Bezug genommen.

Die Einzelunsicherheiten sind in Tabelle 3.3 dargestellt. Dort erkennt man, dass zum einen die Skalenabhängigkeit der Summenregel sowohl bezüglich  $\mu$  als auch  $M^2$  erwartungsgemäß niedrig ist - die maximale Abweichung vom Zentralwert beträgt für  $\mu$  etwa 7% ( $f_{D^*}$ ) und für  $M^2$  etwa 8% ( $f_{D_s}$ ), wobei hier allerdings für  $\mu$  das stark asymmetrische Parameterfenster zu beachten ist. Dies korrespondiert zu den Abbildungen 3.9.

Weiterhin zeigt Tabelle 3.3, dass die restlichen Parameterunsicherheiten vergleichsweise

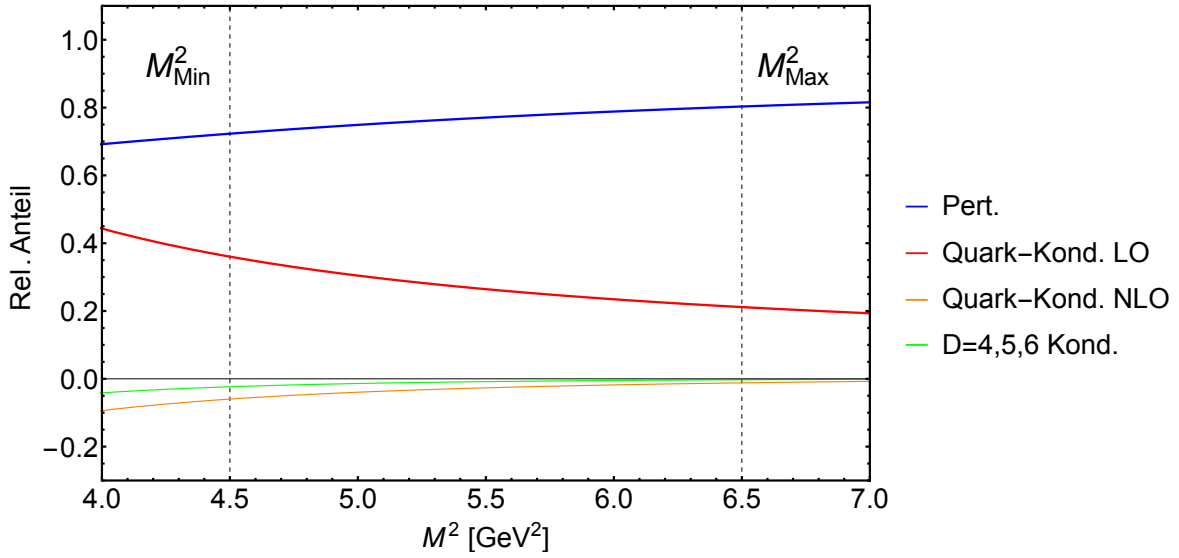


Abbildung 3.11.: Relativer Anteil der einzelnen OPE-Terme an der Gesamtsummenregel für das  $B$ -Meson in Abhängigkeit des Borelparameters  $M^2$ . Die gestrichelten vertikalen Linien geben das Borelfenster an.

gering sind. Die größten Quellen der Unsicherheit sind im Schnitt  $M^2$ ,  $\mu$  und die schwere Quarkmasse  $m_Q$ , für Mesonen mit Strange-Quark auch  $\Delta \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{\langle \bar{s}s \rangle}$ . Bemerkenswert ist zudem, dass die Unsicherheit eines Mesons  $H_s$  gegenüber seines  $SU_{F1}(3)$ -Partners  $H$  nicht nur die zusätzlichen Einzelunsicherheiten  $\Delta m_s$  und  $\Delta \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{\langle \bar{s}s \rangle}$  beinhaltet, sondern darüber hinaus auch die anderen Parameter eine höhere Gesamtunsicherheit haben. Die Summenregeln für Mesonen mit Strange-Quark sind in diesem Sinne insgesamt instabiler. Weiterhin verläuft die Skalenabhängigkeit für vektorielle und pseudoskalare Mesonen in verschiedene Richtungen. Dennoch bewegen sich die Unsicherheiten für vektorielle und pseudoskalare Kanäle in der selben Größenordnung.

Die Betrachtung der Unsicherheit  $\Delta_{OPE}$  zeigt, dass die Summenregeln für pseudoskalare Ströme hinsichtlich der OPE insgesamt stabiler sind, als in vektoriellen Zerfallskanälen. Weiterhin erkennt man an den Abbildungen 3.11 und 3.12, dass die höherdimensionalen Beiträge  $D \geq 4$  für vektorielle Ströme einen gewichtigeren Einfluss haben, als für pseudoskalare. In diesen höherdimensionalen Beiträgen dominiert das Quark-Gluon-Kondensat und seine starke Skalenabhängigkeit (s. Kapitel 3.1.2) wirkt sich für vektorielle Mesonen signifikant auf die Stabilität der Summenregel aus. Insbesondere für Summenregeln vektorieller Ströme kann also durch die Berechnung von NLO-Korrekturen für das Quark-Gluon-Kondensat eine Verringerung der Gesamtunsicherheit erreicht werden.

Tabelle 3.4 zeigt einen Vergleich der Ergebnisse dieser Analyse mit experimentellen Resultaten und anderen Arbeiten. Man beachte, dass für die Ergebnisse dieser Arbeit eine Gleichverteilung innerhalb der Unsicherheitsintervalle vorliegt. Von einer Konsistenz oder Kompatibilität wird daher im Folgenden gesprochen, wenn der zu vergleichende Wert in-

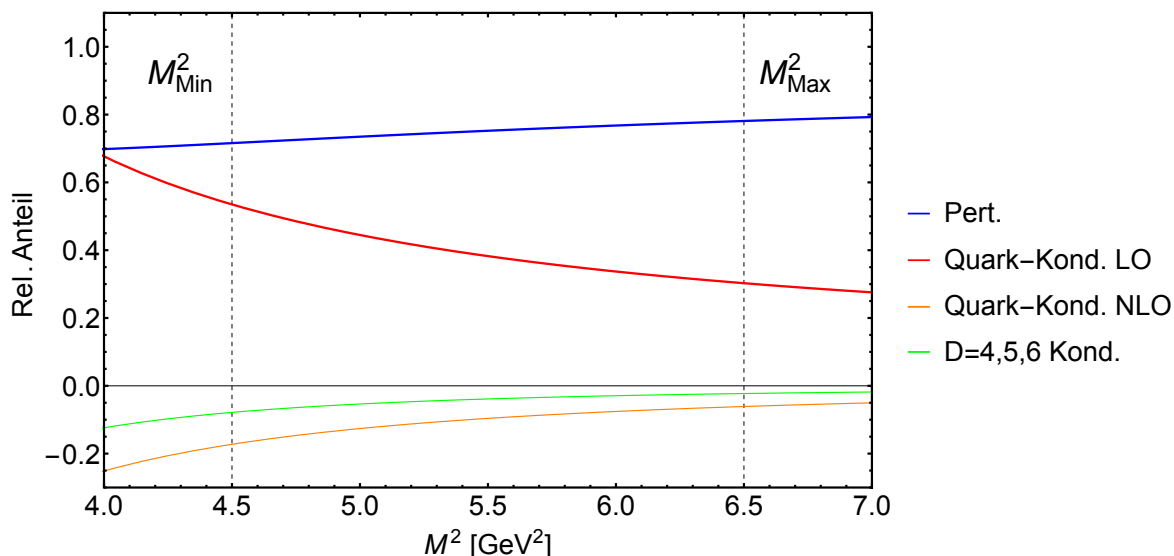


Abbildung 3.12.: Relativer Anteil der einzelnen OPE-Terme an der Gesamtsummenregel für das  $B^*$ -Meson in Abhängigkeit des Borelparameters  $M^2$ . Die gestrichelten vertikalen Linien geben das Borelfenster an.

nerhalb seiner angegebenen Fehler konsistent zu einem Wert innerhalb des erwähnten Unsicherheitsintervalls ist.

Es zeigt sich insgesamt eine gute Übereinstimmung im Rahmen der Unsicherheiten, einzig für vektorielle Bottom-Mesonen ergibt sich gegenüber den Vergleichswerten keine Kompatibilität innerhalb eines Unsicherheitsintervalls. Die experimentellen Ergebnisse sind in einem  $1\sigma$ - ( $D$ ) bzw.  $2\sigma$ -Bereich ( $D_s$ ) konsistent zu den Resultaten dieser Arbeit.

Aus den Summenregeln lassen sich weiterhin verschiedene Verhältnisse der Zerfallskonstanten bilden, um die Verletzung von Spin- und Flavoursymmetrien zu prüfen. Zunächst werden die Verhältnisse zur Untersuchung der Spinsymmetrie zwischen vektoriellen und pseudoskalaren Zerfallskonstanten betrachtet:

$$\begin{aligned} f_{B^*}/f_B &= 1.02^{+0.02}_{-0.09}, & f_{B_s^*}/f_{B_s} &= 1.04^{+0.01}_{-0.08}, \\ f_{D^*}/f_D &= 1.20^{+0.13}_{-0.07}, & f_{D_s^*}/f_{D_s} &= 1.24^{+0.13}_{-0.05}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Die Unsicherheiten dieser Verhältnisse wurden dabei errechnet, indem die jeweiligen Summenregeln durcheinander geteilt und anschließend die Parameter einzeln in den angegebenen Intervallen variiert wurden. Die Differenz zum Zentralwert stellt die jeweilige Einzelunsicherheit dar. Diese wurden anschließend für alle Parameter quadratisch addiert. Für die Variation des Borelparameters wiederum wurde  $s_0^{H^{(*)}}$  stets gemäß der oben genannten Methode neu justiert, da diese beiden Parameter direkt korreliert sind. Diese Vorgehensweise stellt sicher, dass korrelierte Unsicherheiten der beiden betrachteten Summenregeln sich teilweise wegheben und nur die übrigen in die Gesamtunsicherheit voll eingehen. Aus diesem Grund sind die in (3.29) gezeigten Unsicherheiten systematisch kleiner als diejenigen der einzelnen Zerfallskonstanten. Das Ergebnis (3.29) zeigt ebenso, dass die Symmetrieverletzung zwischen pseudoskalarem und vektoriellem Kanal für

Summenregel für	$f_{B^*}$	$f_{B_s^*}$	$f_B$	$f_{B_s}$	$f_{D^*}$	$f_{D_s^*}$	$f_D$	$f_{D_s}$
Zentralwert [MeV]	210.3	251.4	206.7	241.7	241.9	293.3	201.0	237.4
$\Delta M^2$	+0.1 -1.8	+3.8 -5.4	+6.1 -4.5	+8.1 -5.8	+3.6 -5.0	+10.1 -9.5	+10.7 -12.1	+8.6 -19.4
$\Delta\mu$	+0.0 -5.3	+0.0 -8.6	+13.0 -0.0	+10.3 -0.0	+17.3 -3.9	+12.3 -2.3	+1.3 -3.5	+3.5 -9.3
$\Delta m_Q$	+9.0 -8.7	+9.9 -9.7	+7.6 -7.5	+8.2 -8.2	+7.5 -7.5	+8.0 -8.0	+1.6 -1.9	+1.7 -2.1
$\Delta m_s$	-	+1.5 -1.5	-	+1.6 -1.6	-	+2.2 -2.2	-	+3.1 -3.1
$\Delta\langle\bar{q}q\rangle$	+3.2 -3.2	+2.3 -2.4	+2.8 -2.9	+2.1 -2.2	+4.0 -4.0	+2.8 -2.9	+3.0 -3.0	+2.2 -2.2
$\Delta\frac{\langle\bar{q}q\rangle}{\langle\bar{s}s\rangle}$	-	+7.1 -7.3	-	+6.5 -6.7	-	+8.6 -8.9	-	+6.6 -6.9
$\Delta\langle GG\rangle$	+0.4 -0.2	+0.4 -0.2	+0.1 -0.3	+0.1 -0.3	+1.9 -0.9	+1.7 -0.9	+0.4 -0.8	+0.4 -0.8
$\Delta m_0^2$	+0.9 -0.9	+0.7 -0.7	+0.3 -0.3	+0.2 -0.2	+0.7 -0.7	+0.5 -0.5	+0.5 -0.5	+0.4 -0.4
$\Delta_{OPE}$	+4.0 -4.0	+3.2 -3.2	+0.9 -0.9	+0.6 -0.6	+4.6 -4.6	+3.8 -3.8	+2.8 -2.8	+2.5 -2.5

Tabelle 3.3.: Einzelunsicherheiten für  $f_{H^*}$ . Alle Angaben sind in MeV.

Charm-Mesonen mit  $\sim 20-25\%$  deutlich stärker ist als für Bottom-Mesonen mit  $\sim 2-4\%$ . In der HQET (s. Kapitel 3.1.5) erwartet man ein Verhältnis von  $f_{H^*}/f_H = 1$ , da in diesem Grenzübergang die Spins entkoppeln. Erwartungsgemäß ist die Abweichung von dieser Symmetrie also für das leichtere Charm-Quark größer. Ein Vergleich mit Gitter-QCD- und anderen Ergebnissen ist in Tabelle 3.5 dargestellt, die Resultate dieser Arbeit weisen mit diesen insgesamt eine gute Kompatibilität auf.

Analog werden die Verhältnisse zwischen  $H_s^{(*)}$  und  $H^{(*)}$  gebildet, um die  $SU_{\text{Fl}}(3)$ -Verletzung zu untersuchen:

$$\begin{aligned} f_{B_s}/f_B &= 1.17_{-0.04}^{+0.03}, & f_{B_s^*}/f_{B^*} &= 1.20_{-0.04}^{+0.04}, \\ f_{D_s}/f_D &= 1.18_{-0.05}^{+0.04}, & f_{D_s^*}/f_{D^*} &= 1.21_{-0.05}^{+0.05}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Sie liegt für alle verglichenen Kanäle im Bereich von  $\sim 20\%$  und ist somit innerhalb der Unsicherheiten unabhängig von der Spinparität des jeweiligen Kanals. Ein Vergleich mit Gitter-QCD-Rechnungen ist in Tabelle 3.6 dargestellt, erneut weisen die Ergebnisse eine gute Übereinstimmung auf.

Zum Abschluss dieses Kapitels werden die Zerfallskonstanten  $f_B$ ,  $f_D$  und  $f_{D_s}$  noch benutzt, um die Zerfallsbreite aus Gleichung (1.33) für die exklusiven leptonenischen Zerfälle  $B^+ \rightarrow \tau^+\bar{\nu}_\tau$ ,  $D^+ \rightarrow \mu^+\bar{\nu}_\mu$  und  $D_s^+ \rightarrow \mu^+\bar{\nu}_\mu$  zu bestimmen. Diese Prozesse sind vermessen worden [3] und können mit den theoretischen Vorhersagen dieser Arbeit verglichen werden. Zur Darstellung wird eine Reparametrisierung gewählt:

$$\Gamma(H \rightarrow l\bar{\nu}_l) = \frac{|V_{\text{CKM}}|^2}{|V_{\text{CKM}}^{\text{lit}}|^2} \frac{G_F^2}{8\pi} \underbrace{|V_{\text{CKM}}^{\text{lit}}|^2 m_H m_l^2 \left(1 - \frac{m_l^2}{m_H^2}\right)^2}_{:=G} f_H^2, \quad (3.31)$$

$f_{H^{(*)}}$	QCD-SR	Gitter-QCD	Exp.	Diese Arbeit
$f_D$	$206.2 \pm 8.9$ [102] $204 \pm 6$ [103] $208.3 \pm 8.9$ [104]	$208.3 \pm 3.4$ [105] $209.2 \pm 4.7$ [106]	$204.6 \pm 5.0$ (Av.) [107]	$201^{+12}_{-13}$
$f_{D_s}$	$245.3 \pm 16.3$ [102] $246 \pm 6$ [103] $246.0 \pm 16.5$ [104]	$246.0 \pm 3.6$ [105] $246.4 \pm 3.6$ [106]	$257.5 \pm 4.6$ (Av.) [107]	$238^{+13}_{-23}$
$f_{D^*}$	$252.2 \pm 22.7$ [104]	$278 \pm 23$ [108]	-	$242^{+20}_{-12}$
$f_{D_s^*}$	$305.5 \pm 27.3$ [104]	$311 \pm 9$ [108]	-	$293^{+19}_{-14}$
$f_B$	$206 \pm 7$ [103] $192 \pm 14.6$ [104]	$196.9 \pm 8.9$ [109] $189 \pm 4.5$ [110]	$211 \pm 26$ [111]	$207^{+17}_{-09}$
$f_{B_s}$	$225.6 \pm 18.5$ [112]	$242.0 \pm 9.5$ [109] $224 \pm 5.0$ [113]	-	$242^{+17}_{-12}$
$f_{B^*}$	$181.8 \pm 13.7$ [112]	$177 \pm 18$ [114] $175 \pm 6$ [115]	-	$210^{+10}_{-12}$
$f_{B_s^*}$	$213.6 \pm 19.2$ [112]	$213 \pm 7$ [115]	-	$251^{+14}_{-16}$

Tabelle 3.4.: Vergleich der Resultate für  $f_{H^{(*)}}$  mit Gitter-QCD, Experiment und anderen Summenregelberechnungen. Alle Angaben sind in MeV.

mit den prozessabhängigen Matrixelementen  $V_{\text{CKM}} = \{V_{ub}, V_{cd}, V_{cs}\}$  und den jeweiligen gemittelten Literaturwerten  $V_{\text{CKM}}^{\text{lit}}$  aus [3]. Die Massenparameter werden aus [3], die jeweilige Zerfallskonstante aus Tabelle 3.2 entnommen. Man erhält

$$\begin{aligned}
\Gamma(B^+ \rightarrow \tau^+ \bar{\nu}_\tau)^{\text{theo}} &= \left( \frac{|V_{ub}|}{0.00355} \right)^2 \cdot (5.8^{+1.0}_{-0.5}) \cdot 10^{-5} \text{ ps}^{-1}, \\
\Gamma(D^+ \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu)^{\text{theo}} &= \left( \frac{|V_{cd}|}{0.22522} \right)^2 \cdot (3.5^{+0.4}_{-0.4}) \cdot 10^{-4} \text{ ps}^{-1}, \\
\Gamma(D_s^+ \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu)^{\text{theo}} &= \left( \frac{|V_{cs}|}{0.97343} \right)^2 \cdot (0.95^{+0.11}_{-0.18}) \cdot 10^{-2} \text{ ps}^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Die angegebene Unsicherheit bezieht sich auf die Variation der Zerfallskonstanten innerhalb der in Tabelle 3.2 angegebenen Intervalle. Die restlichen Parameterunsicherheiten sind im Vergleich dazu klein und werden vernachlässigt.

Der experimentelle Vergleichswert für  $B^+ \rightarrow \tau^+ \bar{\nu}_\tau$  wird aus [117] entnommen, die anderen beiden aus [3]. Mit  $V_{\text{CKM}} = V_{\text{CKM}}^{\text{lit}}$  erhält man

$$\begin{aligned}
\Gamma(B^+ \rightarrow \tau^+ \bar{\nu}_\tau)^{\text{exp}} &= (7.6 \pm 3.3) \cdot 10^{-5} \text{ ps}^{-1}, \\
\Gamma(D^+ \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu)^{\text{exp}} &= (3.7 \pm 0.3) \cdot 10^{-4} \text{ ps}^{-1}, \\
\Gamma(D_s^+ \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu)^{\text{exp}} &= (1.11 \pm 0.05) \cdot 10^{-2} \text{ ps}^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Verhältnis	QCD-SR	HQET	Gitter-QCD	Diese Arbeit
$f_{D^*}/f_D$	-	$1.35 \pm 0.05$ [97]	$1.28 \pm 0.06$ [108]	$1.20^{+0.13}_{-0.07}$
$f_{B^*}/f_B$	$0.944 \pm 0.021$ [112]	$1.07 \pm 0.02$ [97]	$1.01^{+0.04}_{-0.01}$ [114] $0.941 \pm 0.026$ [115]	$1.02^{+0.02}_{-0.09}$
$f_{B_s^*}/f_{B_s}$	$0.947 \pm 0.030$ [112]	-	$0.953 \pm 0.023$ [115]	$1.04^{+0.01}_{-0.08}$

Tabelle 3.5.: Vergleich der Resultate für die Verletzung der Spinsymmetrie im Grenzübergang für schwere Quarks.

Die Messungen sind innerhalb der Unsicherheitsintervalle mit der Theorievorhersage konsistent.

### 3.2.3. Obere Grenzen für $f_H$ und $f_{H^*}$

Während die Standardsummenregel aus Gleichung (2.25) stark von der Wahl des Grenzparameters  $s_0^{H^{(*)}}$  abhängt, ist es möglich, auch unabhängig davon eine Aussage über die Größenordnung der Zerfallskonstanten aus der Summenregel abzuleiten. Zu diesem Zweck wird die Positivität der Spektraldichte ausgenutzt: Da alle Beiträge von  $\rho^{\text{had}}(s)$  durch Konstruktion positiv sind, liefert die Einbeziehung des gesamten Spektrums, d.h.  $s_0^{H^{(*)}} \rightarrow \infty$ , die obere Grenze (engl. *upper bound*) für die jeweilige Zerfallskonstante. Dabei müssen die im letzten Kapitel erläuterten Unsicherheiten einbezogen werden. Die oberen Grenzen setzen sich somit aus den Zentralwerten für  $s_0^{H^{(*)}} \rightarrow \infty$  und deren oberen Unsicherheiten in diesem Grenzübergang zusammen. Eine ausführlichere Behandlung dieses Themas findet sich in [118]. Als Ergebnis erhält man für die hier angegebenen Eingabeparameter

$$\begin{aligned}
f_{B^*}^{\max} &= 261 (210^{+10}_{-12}) \text{ MeV}, & f_B^{\max} &= 258 (207^{+17}_{-09}) \text{ MeV}, \\
f_{B_s^*}^{\max} &= 296 (251^{+14}_{-16}) \text{ MeV}, & f_{B_s}^{\max} &= 285 (242^{+17}_{-12}) \text{ MeV}, \\
f_{D^*}^{\max} &= 297 (242^{+20}_{-12}) \text{ MeV}, & f_D^{\max} &= 237 (201^{+12}_{-13}) \text{ MeV}, \\
f_{D_s^*}^{\max} &= 347 (293^{+19}_{-14}) \text{ MeV}, & f_{D_s}^{\max} &= 266 (237^{+13}_{-23}) \text{ MeV}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Verhältnis	Gitter-QCD	Diese Arbeit
$f_{D_s}/f_D$	$1.188 \pm 0.025$ [109] $1.164 \pm 0.018$ [116]	$1.18^{+0.04}_{-0.05}$
$f_{D_s^*}/f_{D^*}$	$1.16 \pm 0.06$ [108]	$1.21^{+0.05}_{-0.05}$
$f_{B_s}/f_B$	$1.229 \pm 0.026$ [109] $1.205 \pm 0.007$ [113]	$1.17^{+0.03}_{-0.04}$

Tabelle 3.6.: Vergleich der Resultate für die Verletzung der  $SU_{F1}(3)$ -Symmetrie im Grenzübergang für schwere Quarks.

Zu Vergleichszwecken sind in Klammern jeweils die Werte für die Zerfallskonstanten aus Tabelle 3.2 angegeben. Wie schon in [87] sei an dieser Stelle auf die signifikant strengeren Obergrenzen für Charm-Mesonen hingewiesen.

### 3.3. Auswertung für andere Summenregeln

In Kapitel 3.1.4 wurden verschiedene Ansätze alternativer Summenregeln vorgestellt, deren Einsatz eine Einordnung der systematischen Unsicherheit der Methode bieten soll. Dieser Abschnitt beschäftigt sich folgend mit der Auswertung dieser Summenregeln. Dazu werden die Summenregeln (3.14), (3.16) und (3.18) mit den entsprechenden Zentralwerten der Eingabeparameter aus Tabelle 3.1 ausgewertet. Für die modifizierten Summenregeln werden die gleichen Borelparameter gemäß Tabelle 3.2 verwendet, sofern diese die zuvor spezifizierten Voraussetzungen erfüllen. Der Grenzparameter wird dort (und folgend) durch Massenfixierung (s. Kapitel 3.2.2) bestimmt. Für die Hilbertsummenregeln wird nur ein Mittelwert aus Momenten mit  $n = 2$  und  $3$  einbezogen, da für höhere Ordnungen der Anteil der Kondensate zu stark anwächst und die Konvergenz der OPE stört. Der Parameter  $q_0^2$  wird ebenfalls entsprechend gewählt.

Für den Ausschluss der ersten radialen Anregung werden schließlich zusätzlich die in Kapitel 4.3.1 ausführlich dargelegten Massenrelationen (s. auch Tabelle 4.1) genutzt, während der Grenzparameter  $s_0^{H^{(*)}'}$  aufgrund der erwähnten Stabilität mit  $s_0^{H^{(*)}'} = m_{H^{(*)}'}^2$  abgeschätzt wird. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse ist in Tabelle 3.7 zu finden.

	$f_{B^*}$	$f_{B_s^*}$	$f_B$	$f_{B_s}$	$f_{D^*}$	$f_{D_s^*}$	$f_D$	$f_{D_s}$
Hilbert SR	196	236	198	231	228	281	203	238
Mod. SR (1/s-Gew.)	-	-	211	248	-	-	220	260
Mod. SR (s-Gew.)	208	245	201	233	232	271	175	207
Ausschluss Rad. Anregung	208	249	208	242	243	290	204	239
Standardsummenregel	210	251	207	242	242	293	201	237

Tabelle 3.7.: Vergleich der Zerfallskonstanten für verschiedene Summenregeln. Alle Werte sind in MeV angegeben und beziehen sich auf die Zentralwerte.

Da nur ein struktureller Vergleich der Zentralwerte für die Zwecke dieser Arbeit von Interesse ist, wurde auf die Angabe der Unsicherheiten verzichtet. Außerdem konnten im Falle der modifizierten Borelsummenregeln mit 1/s-Gewichtung für Vektorströme mit dem angegebenen Borelfenster keine Ergebnisse ermittelt werden, welche die Kriterien bezüglich OPE-Konvergenz und Kontinuumsanteil erfüllen. In diesem Bereich liefert die Summenregel keine verlässlichen Ergebnisse, deshalb wird auf ihre Angabe verzichtet.



Aus der Übersicht wird deutlich, dass die Zentralwerte in allen Kanälen weniger als 10% vom Ergebnis der Standardsummenregeln abweichen und damit innerhalb des Unsicherheitsintervalls der jeweiligen Summenregel liegen. Besonders der Ausschluss der ersten radialen Anregung bestätigt die Ergebnisse mit guter Genauigkeit ( $\leq 3\%$ ).

Nun können die Ergebnisse noch mit den in Kapitel 3.1.5 dargelegten HQET-Relationen verglichen werden. Dazu wird zunächst Gleichung (3.22) betrachtet, zuvor muss dort allerdings noch der kombinierte HQET-Parameter  $\delta$  abgeschätzt werden. Durch Vergleich mit den Verhältnissen aus (3.29) erhält man für Bottom-Mesonen ein Intervall von  $\delta \in [-110, 420]$  MeV. Setzt man das gleiche Intervall für Charm-Mesonen an, so gelangt man mit Gleichung (3.22) zu

$$\left(\frac{f_{D^*}}{f_D}\right)_{\text{HQET}} = 1.03 - 1.33, \quad (3.35)$$

Wobei zur Auswertung von (3.22) die Polmasse  $m_b^{\text{Pol}} = 4.6$  GeV bzw.  $m_c^{\text{Pol}} = 1.5$  GeV benutzt wurde. Diese korrespondieren mit der Genauigkeit  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  zu den in Tabelle 3.1 angegebenen Massen im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema. Das Ergebnis (3.35) ist konsistent mit den in (3.29) angeführten Resultaten.

Zur Abschätzung der Flavoursymmetrieverletzung für schwere Quarks werden die ermittelten Ergebnisse mit Gleichung (3.23) verglichen. Man erhält:

$$\frac{f_B}{f_D} = 1.03^{+0.10}_{-0.08}. \quad (3.36)$$

Dies ist mit dem in Gleichung (3.23) dargestellten Wert

$$\left(\frac{f_B}{f_D}\right)_{\text{HQET}} \simeq 0.69 \quad (3.37)$$

nicht konsistent, die Ursache dafür sind vermutlich die in (3.23) nicht berücksichtigten schweren Massenkorrekturen  $\mathcal{O}(1/m_Q)$ .

## 3.4. Diskussion der Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Auswertung kurz zusammengefasst und diskutiert. Die Resultate stimmen innerhalb der Unsicherheitsintervalle insgesamt gut mit den Vergleichswerten aus der Literatur (s. Tabelle 3.4) überein. Die Einzelunsicherheiten wurden durch Variation der Parameter innerhalb eines Intervalls ermittelt und quadratisch aufsummiert, dabei dominieren die Einzelunsicherheiten  $\Delta M^2$ ,  $\Delta\mu$  und  $\Delta m_Q$ . Bei der Aufsummierung wurden eventuelle Korrelationen der Parameter untereinander nicht beachtet, so dass die Gesamtunsicherheiten in dieser Hinsicht etwas zu groß angesetzt sind.

Eine nicht in dieser Form quantifizierbare Quelle für systematische Unsicherheiten ist die Approximation durch die Quark-Hadron-Dualität selbst, zu ihrer Untersuchung wurden

in Kapitel 3.3 modifizierte Summenregeln ausgewertet. Die so ermittelten Resultate sind mit den Ergebnissen der Standardanalyse kompatibel, die entsprechende systematische Unsicherheit ist also klein.

Der zweite zentrale Aspekt der Auswertung betrifft die Überprüfung der Spin- und Flavorsymmetrien im Grenzübergang für schwere Quarks. Die Tabellen 3.5 und 3.6 zeigen insgesamt eine gute Übereinstimmung innerhalb der Unsicherheitsintervalle, die Verletzung der Spinsymmetrie ist erwartungsgemäß für Bottom-Mesonen signifikant kleiner als für Charm-Mesonen. Die  $SU_{F1}(3)$ -Symmetrieverletzung bewegt sich für alle betrachteten Verhältnisse in einem Bereich von 17-21%.

Weitere Teilergebnisse sind die Bestimmung von oberen Grenzen für die Zerfallskonstanten (s. Gleichung (3.34)) und ein Vergleich der theoretisch ermittelten Zerfallsbreiten für leptonische Zerfälle (s. Gleichung (3.32)) mit den experimentell gemessenen Breiten (s. Gleichung (3.33)). Die Resultate dieser Arbeit sind mit letzteren innerhalb eines  $1\sigma$ -Bereiches konsistent.

Eine Verbesserung der Resultate kann perspektivisch durch die genauere Bestimmung der Eingabeparameter, insbesondere der schweren Quarkmasse, erzielt werden. Die Berechnung weiterer Beiträge trägt nur eingeschränktes Verbesserungspotential in sich, die perturbativen Korrekturen auf NNLO machen für alle Zerfallskanäle bereits weniger als 5% am Gesamtergebnis aus. Der Anteil der nichtperturbativen Terme mit  $D \geq 4$  fällt für vektorielle Ströme etwa doppelt so groß aus, wie für pseudoskalare Ströme (vergl. Abb. 3.11 und 3.12). Da der dort dominierende Beitrag des Quark-Gluon-Kondensats eine hohe Skalenabhängigkeit aufweist (s. Abschnitt 3.1.2), kann durch eine Berechnung von radiativen Korrekturen die Unsicherheit der Summenregel für vektorielle Ströme signifikant verringert werden.

Auch durch eine ausführliche statistische Analyse der Unsicherheiten unter Einbeziehung aller Korrelationen können die angegebenen Unsicherheitsintervalle potentiell verkleinert werden.

Insgesamt ist die Genauigkeit des Summenregelansatzes durch die erwähnte QHD-Approximation limitiert. Es ist in diesem Kontext realistischerweise nicht möglich, die systematische Unsicherheit der Methode unter einige Prozent zu drücken. Die ermittelten Ergebnisse erreichen dennoch eine für heutige Anwendungen kompetitive Genauigkeit und können zur Ergänzung und Überprüfung der bisherigen Referenzwerte herangezogen werden. Sie bilden vor diesem Hintergrund eine geeignete Grundlage für weitere Anwendungen in der Forschung (s. Kapitel 1.5) und den nachfolgenden Kapiteln dieser Arbeit.

## 4. Zerfallskonstanten von radial angeregten Zuständen

Im letzten Kapitel wurde die Methode der QCD-Summenregeln verwendet, um Zerfallskonstanten für verschiedene Mesonen zu berechnen. Die dabei verwendeten Korrelationsfunktionen tragen nicht nur Informationen über die Dynamik des Grundzustandes, sondern auch über Hadronzustände, die zuvor dem QCD-Kontinuum zugeschrieben wurden. Eine Anregung des Grundzustandes  $H$  mit gleicher Spinparität und Quarkinhalt nennt man *radiale Anregung*, die im Weiteren als  $H'$  bezeichnet wird. Die Extraktion von hadronischen Eigenschaften dieser Anregungen, insbesondere des hadronischen Matrixelementes  $f_{H'}$ , ist Gegenstand dieses Kapitels und orientiert sich an [92].

### 4.1. Radiale Anregungen und Mesonspektroskopie

In der Quantenmechanik werden die Attribute von gebundenen Zuständen (engl. *bound states*) untersucht, indem die Schrödingergleichung für ein bestimmtes Potential gelöst wird. Mit diesem Ansatz gelang die quantenmechanische Beschreibung vieler Systeme, unter anderem des Wasserstoffatoms. Eine ähnliche Vorgehensweise wurde in den 70er Jahren zur Beschreibung von Quarksystemen herangezogen. Zunächst bedienten sich die Ansätze nichtrelativistischer, statischer Potentiale für schwere Mesonen [119, 120, 121], spätere Arbeiten führen relativistische Quarkmodelle zur Mesonspektroskopie ein [122]. Eine aktuelle Betrachtung ist in [123] zu finden.

Die Bezeichnung von angeregten Zuständen orientiert sich historisch an diesen quantenmechanischen Modellen. Lösungen, welche höhere Hauptquantenzahlen als der Grundzustand aufweisen, werden als *radiale Anregungen*, solche Zustände mit unterschiedlicher Drehimpulsquantenzahl  $l$  als *orbitale Anregungen* bezeichnet. Wie bereits in Kapitel 1.4.1 erwähnt, ist ein Hadron ein gebundener Zustand, der durch einen bestimmten Quarkinhalt und Spinparität  $J^P$  beschrieben ist. Daher wird im Folgenden nicht zwischen orbitaler und radialer Anregung unterschieden, und alle Resonanzen mit identischer Spinparität und Quarkinhalt werden als *radiale Anregung* eines Grundzustandes mit derselben Konfiguration bezeichnet.

Für schwere Mesonen ist das hadronische Spektrum mit radial angeregten Zuständen experimentell nur schwer zugänglich, da die Signale vom hadronischen Hintergrund insbesondere für Bottom-Mesonen kaum zu isolieren sind. Mitte der 70er Jahre wurde in der QCD für  $N_c \rightarrow \infty$  das Bild einer Reihe von äquidistanten Resonanzen eingeführt [124, 125]. Einige spätere Arbeiten zur Untersuchung der Quark-Hadron-Dualität bedie-

nen sich ebenfalls einem Modell von äquidistanten Resonanzen [126, 127], darunter auch einige Analysen mit schweren Quarkflavours [128, 129]. Dennoch bewirken Kopplungen an Zwischenzustände des Kontinuums eine Veränderung in der Form des Spektrums sowie in den Charakteristika der Anregungen (Breite, Zerfallskonstante). Für die Zwecke dieser Arbeit kann dieses Modell daher nicht angewandt werden und die Eigenschaften der ersten radialen Anregungen werden später mit Hilfe von experimentellen Messungen und Symmetrieüberlegungen abgeschätzt.

## 4.2. Radiale Anregungen in den Summenregeln

Die Vorgehensweise zur Herleitung einer Summenregel unter Einbeziehung der ersten radialen Anregung orientiert sich konzeptionell an Kapitel 3. Ausgangspunkt bilden die Korrelationsfunktionen (2.5) und die Definition der Matrixelemente (2.7) und (2.8). Die Zerfallskonstanten  $f_{H^{(*)}}$  sind analog definiert als

$$(m_Q + m_q)\langle 0|\bar{q}i\gamma_5 Q|H'(q^2)\rangle = f_{H'}m_{H'}^2 \quad (4.1)$$

und

$$\langle 0|\bar{q}\gamma_\mu Q|H^{*'}(q^2, \lambda)\rangle = m_{H^{*'}}f_{H^{*'}}\epsilon_\mu(q^2, \lambda). \quad (4.2)$$

Die Entwicklung der Korrelationsfunktion in der Region  $q^2 \ll m_Q^2$  bleibt unverändert zur Grundzustandsanalyse. Jedoch wird auf hadronischer Seite die Spektraldichte entsprechend so modifiziert, dass neben dem Grundzustand auch die erste radiale Anregung aus dem Kontinuum isoliert wird:

$$\begin{aligned} \rho_T(s) &:= \frac{1}{\pi}\text{Im}\Pi_T(s) = f_{H^*}^2 m_{H^*}^2 \delta(s - m_{H^*}^2) + f_{H^{*'}}^2 m_{H^{*'}}^2 \frac{\Gamma_{H^{*'}} m_{H^{*'}}}{\pi[(m_{H^{*'}}^2 - s)^2 + \Gamma_{H^{*'}}^2 m_{H^{*'}}^2]} \\ &\quad + \rho_T^{\text{had}}(s)\theta(s - (m_H + m_P)^2), \\ \rho_5(s) &:= \frac{1}{\pi}\text{Im}\Pi_5(s) = f_H^2 m_H^4 \delta(s - m_H^2) + f_{H'}^2 m_{H'}^4 \frac{\Gamma_{H'} m_{H'}}{\pi[(m_{H'}^2 - s)^2 + \Gamma_{H'}^2 m_{H'}^2]} \\ &\quad + \rho_5^{\text{had}}(s)\theta(s - (m_{H^*} + m_P)^2), \end{aligned} \quad (4.3)$$

mit  $m_P$  als der Masse des leichtesten pseudoskalaren Mesons, abhängig vom Quarkinhalt des betrachteten Teilchens. Als Grenzprozess für die Kontinuumszustände wird der Zerfall  $H^* \rightarrow HP$  bzw.  $H \rightarrow H^*P$  gewählt. Im Unterschied zur in Abschnitt 3.1.4 verwendeten Definition wird die radiale Anregung in der hadronischen Spektraldichte nun mit Hilfe einer Breit-Wigner-Verteilung modelliert, da die möglichst genaue Bestimmung von  $f_{H^{(*)}}$  im Vordergrund steht. Die Breite  $\Gamma_{H'}$  ist im Allgemeinen energieabhängig, so dass  $\Gamma_{H'} \rightarrow \Gamma_{H'}(s)$  gilt. Dieser Fall wird in der späteren Auswertung gesondert untersucht und für die Herleitung der Summenregel wird im Weiteren eine energieunabhängige Breite angenommen. Das modifizierte Spektrum ist in Abb. 4.1 schematisch dargestellt.

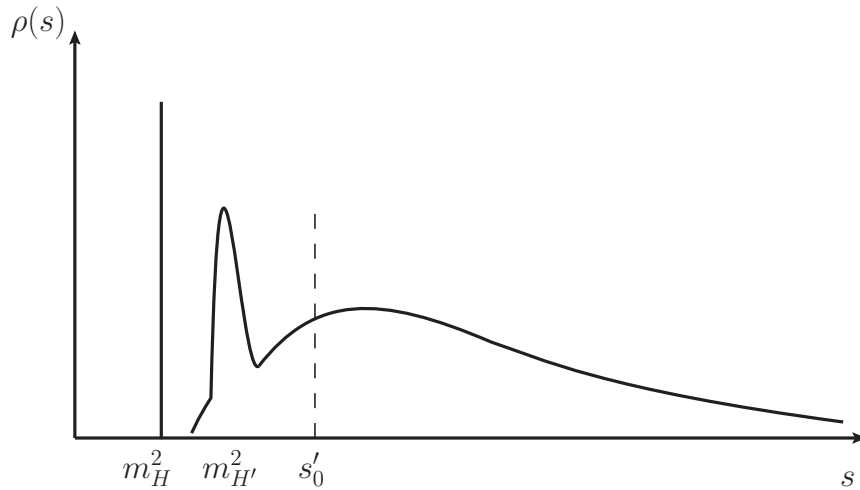


Abbildung 4.1.: Hadronische Spektraldichte mit isoliertem Grundzustand und erster radialer Anregung.

Wie in Abschnitt 4.1 angedeutet, ist das in Abb. 4.1 skizzierte Spektrum als Näherung zu verstehen. Durch die komplexen Kopplungen mit höheren Resonanzen ist die genaue Form des Spektrums schwierig abzuschätzen.

Nach QHD-Approximation und Boreltransformation (s. Abschnitt 2.2.4 und 2.2.5) ergibt sich für die Summenregeln schließlich:

$$f_{H^*}^2 m_{H^*}^2 e^{-\frac{m_{H^*}^2}{M^2}} + f_{H^{*'}}^2 m_{H^{*'}}^2 \int_{(m_{H^*} + m_P)^2}^{\infty} ds e^{-\frac{s}{M^2}} \frac{\Gamma_{H^{*'}} m_{H^{*'}}}{\pi [(m_{H^{*'}}^2 - s)^2 + \Gamma_{H^{*'}}^2 m_{H^{*'}}^2]} \quad (4.4)$$

$$= \Pi_T^{\text{pert}}(M^2, s_0^{H^{*'}}) + \Pi_T^{(\bar{q}q)}(M^2) + \Pi_T^{(D456)}(M^2),$$

$$f_H^2 m_H^4 e^{-\frac{m_H^2}{M^2}} + f_{H'}^2 m_{H'}^4 \int_{(m_{H^*} + m_P)^2}^{\infty} ds e^{-\frac{s}{M^2}} \frac{\Gamma_{H'} m_{H'}}{\pi [(m_{H'}^2 - s)^2 + \Gamma_{H'}^2 m_{H'}^2]} \quad (4.5)$$

$$= \Pi_5^{\text{pert}}(M^2, s_0^{H'}) + \Pi_5^{(\bar{q}q)}(M^2) + \Pi_5^{(D456)}(M^2),$$

wobei die Notation

$$\Pi_{T(5)}^{\text{pert,kond}}(M^2, s_0^{H^{(*)}'}) = \int_{(m_Q + m_q)^2}^{s_0^{H^{(*)}'}} ds e^{-\frac{s}{M^2}} \rho_{T(5)}^{\text{pert,kond}}(s) \quad (4.6)$$

verwendet wurde. Die Gleichungen (4.4) und (4.5) enthalten nun zusätzlich zu den hadronischen Eigenschaften der radialen Anregung auch den neuen Grenzparameter  $s_0^{H^{(*)}'}$ . Die OPE-Terme können vom vorherigen Kapitel übernommen werden.

Neben den hergeleiteten Standardsummenregeln soll erneut eine modifizierte Summenregel für einen Vergleich der systematischen Ungenauigkeit der Methode herangezogen werden. Dazu wird in Analogie zu Abschnitt 3.1.4 die jeweilige Summenregel vor der Boreltransformation mit einem Faktor  $(m_{H^{(*)}}^2 - q^2)$  multipliziert. Dadurch fällt der Grundzustandsbeitrag nach Boreltransformation weg und die resultierende Summenregel enthält an hadronischen Größen nur noch  $m_{H^{(*)}}, m_{H^{(*)}'}^2, \Gamma_{H^{(*)}'}$  und  $f_{H^{(*)}'}$ :

$$\begin{aligned} f_{H^{(*)}'} m_{H^{(*)}'}^2 \tilde{\Gamma}^* &= m_{H^{(*)}}^2 \int_{(m_Q+m_q)^2}^{s_0^{H^{(*)}'}} ds e^{-\frac{s}{M^2}} \rho_T^{\text{OPE}}(s) - \int_{(m_Q+m_q)^2}^{s_0^{H^{(*)}'}} ds s \cdot e^{-\frac{s}{M^2}} \rho_T^{\text{OPE}}(s), \\ f_{H^{(*)}'} m_{H^{(*)}'}^4 \tilde{\Gamma} &= m_{H^{(*)}}^2 \int_{(m_Q+m_q)^2}^{s_0^{H^{(*)}'}} ds e^{-\frac{s}{M^2}} \rho_T^{\text{OPE}}(s) - \int_{(m_Q+m_q)^2}^{s_0^{H^{(*)}'}} ds s \cdot e^{-\frac{s}{M^2}} \rho_T^{\text{OPE}}(s), \end{aligned} \quad (4.7)$$

mit der integrierten Breite

$$\tilde{\Gamma}^{(*)} = \frac{1}{\pi} \int_{L^{(*)}}^{\infty} ds \frac{m_{H^{(*)}} \Gamma_{H^{(*)}'} (m_{H^{(*)}} - s)}{(s - m_{H^{(*)}'}^2)^2 + m_{H^{(*)}'}^2 \Gamma_{H^{(*)}'}^2} e^{-\frac{s}{M^2}} \quad (4.8)$$

und  $L^* = (m_H + m_P)^2$  und  $L = (m_{H^*} + m_P)^2$ . Mit diesen Summenregeln wird folgend die numerische Auswertung durchgeführt.

### 4.3. Numerische Auswertung

Nachdem im letzten Abschnitt die verschiedenen Summenregeln zur Bestimmung von  $f_{H^{(*)}'}$  vorbereitet wurden, beschäftigt sich dieses Kapitel mit ihrer numerischen Auswertung. Obwohl die Summenregeln strukturell sehr ähnlich zu denen der Grundzustandsanalyse sind, muss hier zur Auswertung ein anderer Weg gewählt werden. Die nötigen Schritte werden in den kommenden Unterkapiteln ausführlich dargelegt.

#### 4.3.1. Universelle Eingabeparameter

Zunächst werden die Eingabeparameter diskutiert, welche für alle Ströme generell verwendet werden. Die Werte für Größen, die bereits in den Summenregeln (2.25) enthalten sind, können direkt aus Tabelle 3.1 übernommen werden. Die Summenregeln für radiale Anregungen enthalten allerdings zusätzlich noch deren Masse  $m_{H^{(*)}'}$ , sowie deren Breite  $\Gamma_{H^{(*)}'}$ . Einige dieser Größen sind experimentell gemessen: Die BaBar-Kollaboration [51] verzeichnet mit  $D(2550)$  ( $J^P = 0^-$ ) und  $D^*(2600)$  ( $J^P = 1^-$ ) zwei Kandidaten für radiale Anregungen, während  $D_s^{*'}(2700)$  ( $J^P = 1^-$ ) sogar in mehreren Experimenten beobachtet wurde [3]. Allerdings gibt es bislang keine bestätigten Beobachtungen von  $D_s'$ , und auch für Bottom-Mesonen sind bislang keine experimentellen Ergebnisse für Massen und Breiten der radialen Anregungen verfügbar. Aus diesem Grunde müssen diese Parameter für die folgende Auswertung abgeschätzt werden. Für die Massen bedient man sich dazu

verschiedener Symmetrierelationen: Zur Abschätzung von  $m_{D'_s}$  folgt aus der Symmetrie für leichte Flavour

$$m_{D'_s} - m_{D_s} \approx m_{D'} - m_D . \quad (4.9)$$

Die Abschätzung der Massen für Bottom-Mesonen orientiert sich im Gegensatz dazu an der Symmetrie für schwere Quarks, so dass die Massendifferenz zwischen Grundzustand und erster radialer Anregung für Bottom- und Charm-Mesonen etwa gleich ausfällt:

$$m_{B_{(s)}^{(*)'}} - m_{B_{(s)}^{(*)}} \approx m_{D_{(s)}^{(*)'}} - m_{D_{(s)}^{(*)}} . \quad (4.10)$$

Da die entsprechende Differenz für einige Charm-Mesonen gemessen wurde und außerdem die Grundzustandsmassen sehr präzise ( $\mathcal{O}(\Delta m_H) < 1$  MeV) ermittelt worden sind, können so alle Massen der radialen Anregungen für Bottom-Mesonen abgeschätzt werden. Diese Vorgehensweise stellt nur eine grobe Approximation dar, für die so ermittelten Massen wird deswegen im Folgendem ein entsprechend großes Unsicherheitsintervall von  $\pm 50$  MeV angesetzt.

Die unbekanntenen Zerfallsbreiten der Mesonen werden auf ähnliche Weise behandelt. Für die gemessenen radialen Anregungen bewegen sie sich in etwa in der Größenordnung  $\sim 100$  MeV, für  $D'_s$  wird daher dieser Wert in einem entsprechend großen Intervall gewählt. Aus der Symmetrieüberlegung im Grenzübergang für schwere Quarks folgt, dass dieser Wert auch für die Zerfallsbreite der Bottom-Mesonen übernommen wird. Die entsprechenden Ergebnisse sind in Tabelle 4.1 gesammelt, zum Vergleich sind dort auch die Vorhersagen des Quarkmodells aus [123] angegeben.

$H^{(*)'}$	$m_{H^{(*)}'}$	$m_{H^{(*)}'} - m_{H^{(*)}}$	$m_{H^{(*)}'}^{\text{QM}}$ [123]	$\Gamma_{H^{(*)}'}$	Ref.
$D'$	$2539 \pm 8$	$669 \pm 8$	2581	$130 \pm 18$	[3, 51]
$D^{*'}$	$2612 \pm 6$	$601 \pm 6$	2632	$93 \pm 14$	[3, 51]
$D'_s$	$2618 \pm 50$	$650 \pm 50$	2688	$100 \pm 50$	-
$D_s^{*'}$	$2709 \pm 4$	$597 \pm 4$	2731	$117 \pm 13$	[3, 51]
$B'$	$5929 \pm 50$	$650 \pm 50$	5890	$100 \pm 50$	-
$B^{*'}$	$5975 \pm 50$	$650 \pm 50$	5906	$100 \pm 50$	-
$B'_s$	$6017 \pm 50$	$650 \pm 50$	5976	$100 \pm 50$	-
$B_s^{*'}$	$6065 \pm 50$	$650 \pm 50$	5992	$100 \pm 50$	-

Tabelle 4.1.: Masse und Zerfallsbreite für die ersten radialen Anregungen der Mesonen  $H^{(*)}$ ,  $H = \{B, D\}$ . Resultate ohne Quellenangabe sind das Ergebnis von im Text dargelegten Symmetrieabschätzungen. Alle Werte sind in MeV angegeben.

An Tabelle 4.1 erkennt man, dass die experimentell ermittelten Massen in der Größenordnung der Vorhersagen des Quarkmodells liegen (Abb. 4.2). Ein weiteres Indiz für die Plausibilität der angegebenen Werte bietet die von der CDF-Kollaboration in  $B^0\pi^+$ - und  $B^+\pi^-$ -Massenverteilungen beobachtete Resonanz  $B(5970)$  [130]. Diese wird dort als orbitale Anregung mit  $J^P = 1^-$  interpretiert, und die zugehörigen Massen  $m_{B^0(5970)} = 5978 \pm 5(\text{stat.}) \pm 12(\text{sys.})$  MeV und  $m_{B^+(5970)} = 5961 \pm 5(\text{stat.}) \pm 12(\text{sys.})$  MeV sind mit der Abschätzung  $m_{B^{*'}} = 5975 \pm 50$  aus Tabelle 4.1 im  $1\sigma$ -Bereich kompatibel. Eine Bestätigung dieser Messwerte steht allerdings noch aus.

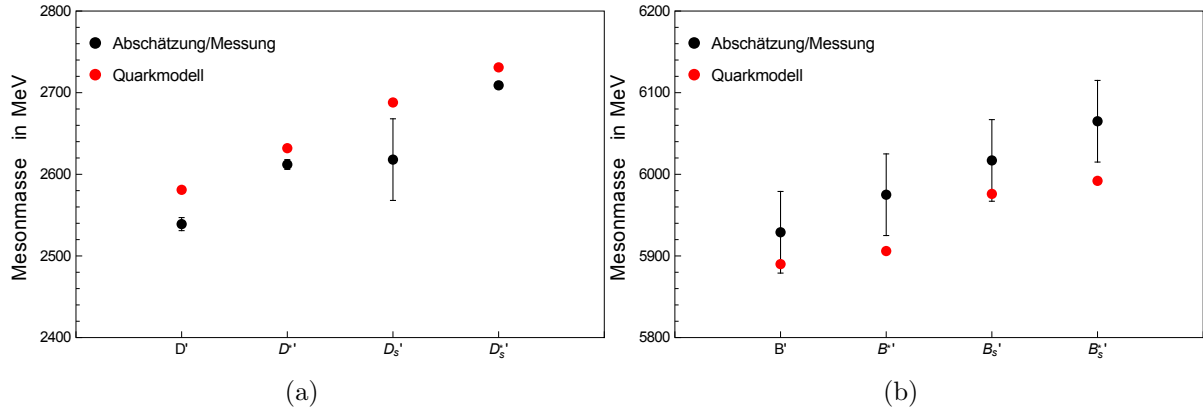


Abbildung 4.2.: Vergleich der Abschätzungen/Messung zur Masse der radial angeregten Mesonzustände zu den Vorhersagen des Quarkmodells für a) Charm- und b) Bottom-Mesonen.

### 4.3.2. Individuelle Eingabeparameter und $s_0^{H^{(*)}'}$

Der Vorgehensweise in Kapitel 3 folgend, werden in diesem Kapitel alle Eingabeparameter ermittelt, welche für die jeweiligen Zerfallskanäle individuell bestimmt werden müssen. Dies bezieht sich wie zuvor auf die Skala  $\mu$ , den Borelparameter  $M^2$  und den jeweiligen Grenzparameter  $s_0^{H^{(*)}'}$ . Allerdings gibt es insbesondere für letzteren gewichtige Unterschiede im Vergleich zur Grundzustandsanalyse.

Für die Festlegung der Skala  $\mu$  orientiert man sich an den selben Kriterien wie in Abschnitt 3.2.2. Es werden entsprechend die Intervalle  $\mu \in [1.3, 3.0]$  GeV mit dem Zentralwert  $\mu_{\text{zen}} = 1.5$  GeV für Zerfälle mit einem Charm-Quark, bzw.  $\mu \in [3.0, 5.0]$  GeV mit dem Zentralwert  $\mu_{\text{zen}} = 3$  GeV für solche mit einem Bottom-Quark (s. Tabelle 3.2) übernommen. Dies ist möglich, da die betrachteten Kriterien nicht von der Modifikation der hadronischen Spektraldichte beeinflusst werden. Für die Wahl von  $M^2$  werden ebenfalls die gleichen Kriterien der Grundzustandsanalyse herangezogen:  $M_{\text{Min}}^2$  wird so gewählt, dass die OPE schnell genug konvergiert, während  $M_{\text{Max}}^2$  so gewählt wird, dass der Anteil des unbekanntes Kontinuums gering ( $< 50\%$ ) bleibt. Für die Zwecke dieser Analyse ist es jedoch dienlich, das Borelfenster innerhalb dieser Kriterien gegenüber den in Kapitel 3 verwendeten Intervallen weiter nach oben zu verschieben, da durch Anwendung der Boreltransformation die Zerfallskonstante  $f_{H^{(*)}'}$  mit einem Unterdrückungsfaktor  $e^{-m_{H^{(*)}'}^2/M^2}$



multipliziert wird. Das Borelfenster für die Grundzustandsanalyse ist so gewählt worden, dass insbesondere der Bereich um den Grundzustand verstärkt wird, während die restlichen Regionen exponentiell unterdrückt werden.

In dieser Analyse soll jedoch gerade der Bereich der radialen Anregung untersucht werden, deshalb sollte das Borelfenster entsprechend der höheren Masse der radialen Anregung angepasst werden, damit der angeregte Zustand keine zu starke Unterdrückung erfährt. Mit dieser Maßgabe und unter Einhaltung der ursprünglichen Kriterien wird  $M^2 = 2.5 - 3.5 \text{ GeV}^2$  für Charm-Mesonen und  $M^2 = 6.0 - 8.0 \text{ GeV}^2$  für Bottom-Mesonen gewählt.

Während sich die Bestimmung dieser Parameter an der Grundzustandsanalyse orientiert hat, ist dies für die Abschätzung des Grenzparameters  $s_0^{H^{(*)}'}$  nicht möglich. Zwar kann auch hier im Prinzip eine Fixierung über die entsprechenden Mesonmassen (s. Gleichung (3.27)) durchgeführt werden. Da die Wahl des Grenzparameters allerdings die Summenregel stark beeinflusst, ist eine notwendige Voraussetzung dort, dass die Mesonmassen sehr genau bekannt sind. Schon eine Unsicherheit von  $\mathcal{O}(5 \text{ MeV})$ , wie in Tabelle 4.1 für Charm-Mesonen dargestellt, resultiert in einer großen Wahlfreiheit für  $s_0^{H^{(*)}'}$  und entsprechend großen Unsicherheitsintervallen. Mit den großen Massenunsicherheiten der experimentell nicht zugänglichen Mesonen verschlechtert sich die Situation entsprechend. Aus diesem Grund müssen weitere Methoden zur Abschätzung des Grenzparameters untersucht werden:

- Ein Modell mit äquidistanten Resonanzen (s. Abschnitt 4.1) vereinfacht den Sachverhalt. Wählt man  $s_0^{H^{(*)}'}$  jeweils genau auf dem mittleren, konstanten Abstand zwischen zwei Resonanzen  $H'$  und  $H''$ , so stellt man sicher, dass  $H'$  noch in die spätere Integration einbezogen wird, während  $H''$  dem unbekanntem Kontinuum zugeordnet wird. Da nun die Position von  $s_0^{H^{(*)}}$  durch Massenfixierung vergleichsweise gut bekannt ist, kann die Position von  $s_0^{H^{(*)}'}$  abgeschätzt werden, indem man die konstante Distanz zwischen zwei Resonanzen  $m_{H^{(*)}'}^2 - m_{H^{(*)}}^2$  addiert, d.h.

$$s_0^{H^{(*)}'} - s_0^{H^{(*)}} \sim m_{H^{(*)}'}^2 - m_{H^{(*)}}^2. \quad (4.11)$$

Da allerdings wie erwähnt Kopplungen mit hadronischen Zwischenzuständen des Kontinuums das Bild der äquidistanten Resonanzen stören, kann mit dieser Methode nur eine ungefähre Einordnung von  $s_0^{H^{(*)}'}$  geschehen. Hier ist zum einen wegen der Unsicherheit des Modells, zum anderen wegen der großen Unsicherheit für die angeregten Massen eine Fixierung des Grenzparameters mit ausreichender Genauigkeit nicht möglich.

- Modifiziert man analog zu Kapitel 3.1.4 die Summenregeln mit verschiedenen Gewichtungen in der Integration, so erhält man einen Satz verschiedener Summenregeln zur Bestimmung der gleichen Größe  $f_{H^{(*)}'}$ . Da die unterschiedliche Gewichtung der Integranden im Prinzip nicht die Form des Spektrums verändert, kann der Satz benutzt werden, um simultan  $s_0^{H^{(*)}'}$  und  $f_{H^{(*)}'}$  aus diesem Gleichungssystem zu ermitteln. Allerdings ist bei solchen modifizierten Summenregeln die Einhaltung aller

Stabilitätskriterien nicht immer gewährleistet (s. Kapitel 3.3) und die Lösung dieses Gleichungssystems führt nicht immer zu einem physikalisch plausiblen Ergebnis. Daher kann auch diese Methode hier nicht verwendet werden.

- Eine dritte Alternative zur Bestimmung von  $s_0^{H^{(*)}'}$  stellt der im Weiteren als *Anpassungsmethode* (engl. *fit method*) bezeichnete Ansatz dar. Dabei wird die QHD selbst als Anpassungskriterium verwendet und  $s_0^{H^{(*)}'}$  so ermittelt, dass die Verletzung der QHD über ein bestimmtes Borelfenster minimal wird. Diese Methode hat sich in der Analyse als praktikabel erwiesen, deshalb soll sie im folgenden Unterkapitel genauer erläutert werden.

### 4.3.3. Anpassungsmethode für $s_0^{H^{(*)}'}$

Der Ansatz der QHD liefert in einer Vielzahl von Anwendungen bestätigte Ergebnisse (s. Abschnitt 1.5). Vor diesem Hintergrund soll nun die QHD selbst als Kriterium für eine Anpassung zur Bestimmung von  $s_0^{H^{(*)}'}$  herangezogen werden. Dazu werden die Summenregeln (4.4) und (4.5) betrachtet. Die QHD beinhaltet eine Approximation zwischen hadronischer und der OPE-Darstellung der Korrelationsfunktionen, und wäre die QHD exakt erfüllt, so würde die Differenz der beiden Darstellungen verschwinden. Für verschiedene Werte von  $M^2$  wird nun folgend diese Differenz gebildet und quadratisch aufsummiert. Das entstehende Maß wird  $R_{T(5)}^{\text{QHD}}$  genannt:

$$R_T^{\text{QHD}} = \sum_i \left| f_{H^*}^2 m_{H^*}^2 e^{-\frac{m_{H^*}^2}{M_i^2}} + f_{H^{*'}}^2 m_{H^{*'}}^2 \int_{(m_{H^*} + m_P)^2}^{\infty} ds e^{-\frac{s}{M_i^2}} \frac{\Gamma_{H^{*'}} m_{H^{*'}}}{\pi[(m_{H^{*'}}^2 - s)^2 + \Gamma_{H^{*'}}^2 m_{H^{*'}}^2]} \right. \\ \left. - \left( \Pi_T^{\text{pert}}(M_i^2, s_0^{H^{*'}}) + \Pi_T^{(\bar{q}q)}(M_i^2) + \Pi_T^{(D456)}(M_i^2) \right) \right|^2, \quad (4.12)$$

bzw.

$$R_5^{\text{QHD}} = \sum_i \left| f_H^2 m_H^4 e^{-\frac{m_H^2}{M_i^2}} + f_{H'}^2 m_{H'}^4 \int_{(m_{H^*} + m_P)^2}^{\infty} ds e^{-\frac{s}{M_i^2}} \frac{\Gamma_{H'} m_{H'}}{\pi[(m_{H'}^2 - s)^2 + \Gamma_{H'}^2 m_{H'}^2]} \right. \\ \left. - \left( \Pi_5^{\text{pert}}(M_i^2, s_0^{H'}) + \Pi_5^{(\bar{q}q)}(M_i^2) + \Pi_5^{(D456)}(M_i^2) \right) \right|^2. \quad (4.13)$$

Ziel ist nun die Minimierung von  $R_{T(5)}^{\text{QHD}}$ . Auf diese Weise wird gerade das Wertepaar (inklusive Grenzparameter) ermittelt, für das die QHD im gewählten Borelfenster am besten erfüllt ist. Dieses Verfahren funktioniert für alle in Kapitel 4.2 vorgestellten Summenregeln. Für die Standardsummenregeln sind  $f_{H^{(*)}'}$ ,  $f_{H^{(*)}}$  und  $s_0^{H^{(*)}'}$  die freien Anpassungsparameter. Durch einen Vergleich mit den Ergebnissen aus Abschnitt 3.2.2 bietet dieser Ansatz eine zusätzliche Möglichkeit, die Konsistenz der Summenregeln zu überprüfen. Wird unter Verwendung der Summenregeln (4.7) der Grundzustand ausgeschlossen, werden lediglich  $f_{H^{(*)}'}$  und  $s_0^{H^{(*)}'}$  angepasst.

Im Vergleich zur Methode der Massenfixierung kommen in der Anpassungsprozedur zwar auch die Anregungsmassen  $m_{H^{(*)}}$  vor, sie ist allerdings wesentlich stabiler unter Variation dieser Massen. Die Funktionsweise ist in Abb. 4.3 am Beispiel des  $B'$ -Mesons dargestellt.

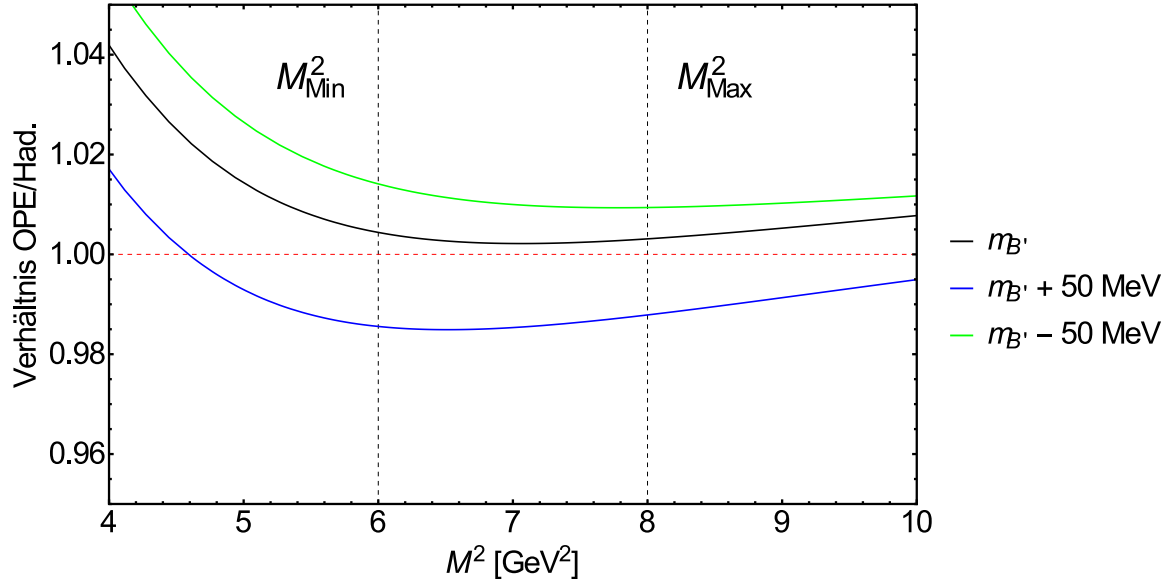


Abbildung 4.3.: Verhältnis zwischen hadronischer und OPE-Darstellung für  $B'$  im Borel-intervall  $M^2 = 6-8 \text{ GeV}^2$ . Die gestrichelte horizontale Linie markiert die exakte Erfüllung der QHD. Dargestellt sind die beste Anpassung (schwarze Kurve) und Vergleichsergebnisse bei Variation der Anregungsmasse (blaue und grüne Kurve).

Meson	Kap. 3	Anp. Standard			Anp. ohne GS		Upper Bound
	$f_H$ [MeV]	$f_H$ [MeV]	$f_{H'}$ [MeV]	$s_0^{H'}$ [GeV <sup>2</sup> ]	$f_{H'}$ [MeV]	$s_0^{H'}$ [GeV <sup>2</sup> ]	$f_{H'}^{\max}$ [MeV]
$D$	$201_{-13}^{+12}$	$194_{-6}^{+6}$	$137_{-23}^{+10}$	7.24	$138_{-22}^{+10}$	7.24	189
$D_s$	$238_{-23}^{+13}$	$230_{-9}^{+7}$	$143_{-31}^{+19}$	7.48	$146_{-36}^{+12}$	7.49	219
$D^*$	$242_{-12}^{+20}$	$235_{-12}^{+25}$	$182_{-27}^{+12}$	7.43	$183_{-24}^{+13}$	7.44	275
$D_s^*$	$293_{-14}^{+19}$	$279_{-12}^{+21}$	$174_{-45}^{+22}$	7.87	$178_{-39}^{+20}$	7.88	265
$B$	$207_{-9}^{+17}$	$200_{-10}^{+18}$	$163_{-11}^{+10}$	36.75	$166_{-10}^{+9}$	36.78	279
$B_s$	$242_{-12}^{+17}$	$234_{-11}^{+15}$	$174_{-19}^{+19}$	37.72	$178_{-17}^{+19}$	37.75	320
$B^*$	$210_{-12}^{+10}$	$208_{-21}^{+12}$	$163_{-13}^{+54}$	36.70	$165_{-12}^{+46}$	36.71	314
$B_s^*$	$251_{-16}^{+14}$	$244_{-26}^{+13}$	$190_{-20}^{+67}$	38.58	$194_{-18}^{+57}$	38.61	325

Tabelle 4.2.: Ergebnisse der verschiedenen Anpassungsprozeduren und obere Grenzen für Zerfallskonstanten von radialen Anregungen.

Man beachte, dass die Mittlung über das gesamte Borelintervall bedeutet, dass auf diese Weise keine mit  $M^2$  verknüpfte Parameterunsicherheit im Ergebnis angegeben werden kann. Aus diesem Grunde wird die Anpassungsprozedur auch für leicht veränderte Borelfenster vorgenommen, um auf diesem Wege die durch die Wahl des Fensters verknüpfte Unsicherheit abschätzen zu können. Sowohl für Charm- als auch für Bottom-Mesonen werden die in Abschnitt 4.3.2 angegebenen Fenster jeweils um  $0.5 \text{ GeV}^2$  nach oben und unten verschoben.

Die Ergebnisse dieser Prozedur sind folgend in Tabelle 4.2 gesammelt. Dort ist ebenfalls für jeden betrachteten Kanal eine obere Grenze für die Zerfallskonstante angegeben, die analog zur Grundzustandsanalyse durch  $s_0^{H^{(*)'}} \rightarrow \infty$  in (4.4) und (4.5) ermittelt wurde. Die Zerfallskonstante des Grundzustandes wurde dafür durch die entsprechende Summenregel mit  $s_0^{H^{(*)}} \rightarrow \infty$  ersetzt.

Man erkennt, dass die Zerfallskonstanten der radialen Anregung systematisch kleiner sind als die jeweiligen Zerfallskonstanten des Grundzustandes: Für alle Kanäle ergibt sich

$$\frac{f_{H^{(*)}'}}{f_{H^{(*)}}} \approx 0.6 - 0.8 . \quad (4.14)$$

In der Literatur gibt es bislang nur wenige Vergleichswerte für die Resultate aus Tabelle 4.2. Eine aktuelle Berechnung mit Gitter-QCD-Formalismus [57] liefert

$$f_{D'}^{\text{Lat}} = 117 \pm 25 \text{ MeV} , \quad (4.15)$$

dieser Wert weist innerhalb der Unsicherheiten eine gute Übereinstimmung mit den Resultaten dieser Arbeit auf. Die in [131] getätigte Abschätzung  $f_{D^{*'}} \sim 300 \text{ MeV}$  kann allerdings nicht bestätigt werden.

Meson	$\Delta_{\text{Par}}$	$\Delta_{M^2}$	$\Delta_{\text{Fit}}$	$\Delta_{\Gamma}$	$\Delta_{m_{H^{(*)}'}}$
$D'$	+9 (+9) -21 (-20)	+5 (+5) -10 (-8)	+1 (+1) -1 (-1)	+1 (+1) -1 (-1)	$< \pm 1$ ( $< \pm 1$ )
$D'_s$	+12 (+7) -27 (-29)	+7 (+6) -14 (-16)	+1 (+2) -1 (-2)	+8 (+4) -8 (-14)	+9 (+7) -4 (-4)
$D^{*'}$	+11 (+10) -24 (-22)	+8 (+7) -12 (-10)	+2 (+3) -2 (-3)	+1 (+1) -1 (-1)	$< \pm 1$ ( $< \pm 1$ )
$D_s^{*'}$	+14 (+13) -34 (-31)	+15 (+13) -29 (-23)	+5 (+7) -5 (-7)	+2 (+2) -2 (-2)	$< \pm 1$ ( $< \pm 1$ )
$B'$	+7 (+7) -8 (-7)	+5 (+5) -7 (-6)	+1 (+2) -1 (-2)	+4 (+4) -4 (-4)	+2 (+1) -1 (-1)
$B'_s$	+11 (+9) -11 (-10)	+8 (+7) -10 (-8)	+2 (+3) -2 (-3)	+11 (+10) -10 (-10)	+9 (+10) -1 (-1)
$B^{*'}$	+53 (+46) -12 (-10)	+4 (+3) -4 (-3)	+1 (+2) -1 (-2)	+4 (+4) -4 (-4)	+5 (+4) -3 (-3)
$B_s^{*'}$	+66 (+56) -15 (-13)	+8 (+7) -11 (-9)	+2 (+3) -2 (-3)	+7 (+7) -7 (-7)	+4 (+3) -1 (-1)

Tabelle 4.3.: Unsicherheiten für die Methode zur Anpassung mit Standardsummenregeln, die Unsicherheiten für Summenregeln mit ausgeschlossenen Grundzustand sind in Klammern dargestellt. Die Einzelunsicherheiten der Parameter sind in  $\Delta_{\text{Par}}$  gruppiert, während die restlichen Intervalle einzeln aufgelistet sind. Alle Werte sind in MeV angegeben.

Die Ergebnisse zeigen, dass die Summenregeln für pseudoskalare Zerfallskanäle insgesamt stabiler sind als für vektorielle und bestätigen in dieser Hinsicht die Grundzustandsanalyse. Ebenso weisen die Summenregeln für Mesonen mit Strange-Quark systematisch größere Unsicherheiten auf als ihr jeweiliges  $SU_{F1}(3)$ -Gegenstück: Die stabilsten Zerfallskanäle weisen eine relative Unsicherheit von 12% auf, während sie für  $D_s^{*'}$  und  $B_s^{*'}$  bei etwa 40% liegt. Dies bestätigt insgesamt die Tendenzen der Grundzustandsanalyse. Beide Anpassungsansätze liefern insgesamt ein sehr konsistentes Ergebnis, was auf eine geringe systematische Unsicherheit hindeutet. Tabelle 4.3 zeigt eine genauere Aufschlüsselung der Gesamtunsicherheiten.

Die Variation der Parameter wurde entlang dem in Kapitel 3 vorgestellten Verfahren durchgeführt, die resultierenden Unsicherheiten wurden dann quadratisch addiert und in  $\Delta_{\text{Par}}$  gruppiert. Gesondert hiervon wird im Gegensatz zur Grundzustandsanalyse die Unsicherheit des Borelparameters  $\Delta_{M^2}$  betrachtet. Diese wurde gemäß Abschnitt 4.3.2 ermittelt. Der Anpassungsfehler  $\Delta_{\text{Fit}}$  wird vom Programm ausgegeben und bietet einen Zugriff auf die systematische Unsicherheit der Methode. Schließlich sind noch die mit den hadronischen Größen  $\Gamma$  und  $m_{H^{(*)}}$  verknüpften Unsicherheiten einzeln aufgeführt. Man erkennt, dass diese nur für  $B_s'$  und  $D_s'$  gemeinsam in der Größenordnung der Parameterunsicherheiten liegen, und ansonsten gerade für Charm-Mesonen im Vergleich dazu klein sind. Damit ist gezeigt, dass der Einfluss dieser noch ungenau bekannten Größen auf das Anpassungsverfahren deutlich geringer ist als z.B. bei der Methode der Massenfixierung.

Insgesamt dominiert in dieser Auflistung die Unsicherheit der Eingabeparameter, welche wiederum hauptsächlich durch Variation der Skala  $\mu$  und der schweren Quarkmasse  $m_Q$  bestimmt wird. Insbesondere das asymmetrische Intervall der Skala spiegelt sich in den Unsicherheitsintervallen wieder. Erwähnenswert ist, dass obwohl  $\Delta_{\text{Fit}}$  eine gewisse Unsicherheit der Methode beinhaltet, die systematische Unsicherheit in diesen Größen insgesamt nur unzureichend quantifiziert ist. Er muss durch einen Vergleich mit modifizierten Summenregeln weiter abgeschätzt werden.

#### 4.3.4. Energieabhängige Zerfallsbreite

In den vorherigen Kapiteln wurde für die Auswertung stets eine konstante Zerfallsbreite  $\Gamma_{H^{(*)}}$  angenommen. In diesem Abschnitt soll der Einfluss einer energieabhängigen Breite untersucht werden. Zu diesem Zweck wird in (4.4) und (4.5) eine Ersetzung von  $m_{H^{(*)}}, \Gamma_{H^{(*)}}$  durch  $\sqrt{s}\Gamma_{H^{(*)}}(s)$  vorgenommen. Die nun auftretende energieabhängige Breite  $\Gamma_{H^{(*)}}(s)$  wird mit den asymptotischen Ansätzen [132, 133] beschrieben:

$$\begin{aligned}\Gamma_{H^{*'}}(s) &= \Gamma_{H^{*'}}^0 \frac{m_{H^{*'}}^2}{s} \left( \frac{\lambda(s, m_H^2, m_P^2)}{\lambda(m_{H^{*'}}^2, m_H^2, m_P^2)} \right)^{\frac{3}{2}}, \\ \Gamma_{H'}(s) &= \Gamma_{H'}^0 \frac{m_{H'}^2}{s} \left( \frac{\lambda(s, m_{H^*}^2, m_P^2)}{\lambda(m_{H'}^2, m_{H^*}^2, m_P^2)} \right)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Hier wurde die *Källén-Funktion*  $\lambda(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac$  verwendet und der Faktor  $\Gamma_{H^{(*)}'}^0$  bezeichnet die konstante, energieunabhängige Breite aus Tabelle 4.1. Der kinematische Faktor in Gleichung (4.16) folgt wie in [132] beschrieben aus einer Betrachtung des  $p$ -Wellen-Phasenraums.

Mit dieser Modifikation können die Summenregeln nun entlang der in den vorherigen Abschnitten dargelegten Vorgehensweise ausgewertet werden. Um den geringen Einfluss der Energieabhängigkeit auf das Endergebnis zu verdeutlichen, soll als Beispiel das  $D_s'$ -Meson betrachtet werden. Da seine Zerfallsbreite bisher nicht gemessen werden konnte, ist die damit verknüpfte Unsicherheit durch Abschätzung mit den erwähnten Symmetrierelationen von allen Charm-Mesonen am größten. Nun werden die Summenregeln mit Hilfe der Standardanpassungsprozedur (s. letztes Kapitel) für verschiedene Fälle ausgewertet: Mit konstanter Breite, mit energieabhängiger Breite, sowie unter der Annahme, dass die Breite der radialen Anregung wie die des Grundzustandes mit Null genähert werden kann. Man erhält

$$\begin{aligned} f_{D_s'} &= 128 \text{ MeV} & (\Gamma_{D_s'} = 0) , \\ f_{D_s'} &= 143 \pm 8 \text{ MeV} & (\Gamma_{D_s'} = 100 \pm 50 \text{ MeV}) , \\ f_{D_s'} &= 148 \pm 16 \text{ MeV} & (\Gamma_{D_s'} = \Gamma_{D_s'}(s), \quad \Gamma_{D_s'}^0 = 100 \pm 50 \text{ MeV}) . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Die angegebenen Unsicherheiten werden durch die Variation der Breite innerhalb der angegebenen Grenzen ermittelt, die Variation der anderen Größen wurden zur Vereinfachung ignoriert. Man erkennt, dass die Berücksichtigung der Breite gegenüber der Näherung durch die Deltafunktion eine Verschiebung im Ergebnis von über 10% verursacht. Die Modifizierung hin zur Energieabhängigkeit verändert das Ergebnis jedoch kaum, es unterscheidet sich nur um etwa 2%. Diese Schwankung liegt im Rahmen der systematischen Genauigkeit der Methode. Da die anderen Mesonen allesamt die gleiche Größenordnung und eine vergleichbare oder bessere Genauigkeit in der Breite aufweisen, gilt dies strukturell für die gesamte Analyse. Eine Vernachlässigung der Energieabhängigkeit ist somit gerechtfertigt.

### 4.3.5. Größenrelation der Resonanzen

Im vorherigen Kapitel wurde gezeigt, dass sich mit diesem Ansatz für die Relation zwischen den Zerfallskonstanten

$$\frac{f_{H^{(*)}'}}{f_{H^{(*)}}} \approx 0.6 - 0.8 \quad (4.18)$$

ergibt. Eine erste Näherung auf Basis früher Modelle mit äquidistantem Spektrum suggeriert jedoch  $f_{H^{(*)}'} \approx f_{H^{(*)}}$ , und in einer aktuellen Arbeit findet sich für  $D^{*'}$  auch die Abschätzung  $f_{D^{*}'}/f_{D^{*}} \approx 1.4$  [131]. In diesem Kapitel werden daher mögliche Ursachen für die Struktur in der Größenverteilung der Resonanzen näher untersucht.

Betrachtet man die Gleichungen (4.4) bzw. (4.5), so erkennt man, dass der auf OPE-Seite berechnete Wert im Prinzip auf eine gewichtete Summe der beiden Resonanzen verteilt wird. Wählt man beide Gewichtungen gleich, so ist  $\Pi^{\text{OPE}}(q^2) \sim f_H + f_{H'}$ . Die

Wertepaare, die diese Bedingung erfüllen, liegen damit auf einer Geraden. Mit den Gewichtungen über Masse und Zerfallsbreite erhält man hingegen eine Ellipse, ein Ausschnitt der physikalischen Region ist in Abb. 4.4 für das  $B'$ -Meson dargestellt. Zur Visualisierung ist dort statt der Differenz die Funktion  $\exp(-(\Pi^{\text{Had}} - \Pi^{\text{OPE}}))$  aufgetragen, so dass Wertepaare mit guter QHD-Näherung gegen Eins gehen und solche mit starker Abweichung gegen Null. Der in Abb. 4.4 dargestellte Kammrücken zeigt also die Anpassungsergebnisse, welche die QHD am besten erfüllen.

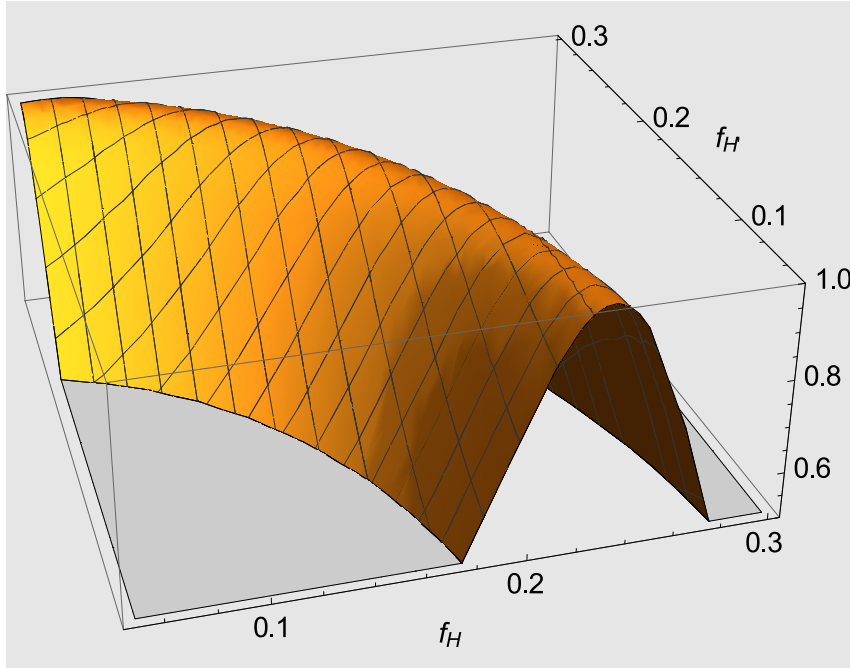


Abbildung 4.4.: Visualisierung der QHD-Bedingung für das  $B'$ -Meson. Gezeigt ist die exponentielle Differenz zwischen hadronischer und OPE-Darstellung. Solche Wertepaare, die die QHD-Bedingung erfüllen, erhalten also den Wert Eins.

Terme in OPE-Entwicklung	$f_D$ [MeV]	$f_{D'}$ [MeV]
Nur Pert. LO	120	123
Nur Pert. LO+NLO	138	159
Pert. LO+NLO+NNLO	150	177
Pert. + $\langle \bar{q}q \rangle$ LO	186	143
Pert. + $\langle \bar{q}q \rangle$ LO+NLO	190	142
Pert. + $\langle \bar{q}q \rangle$ LO+NLO + $\langle D456 \rangle$	194	137

Tabelle 4.4.: Ergebnisse der Anpassungsprozedur für verschiedene Beiträge der OPE-Entwicklung mit zentralen Eingabewerten. Der Übersichtlichkeit halber werden keine Unsicherheiten angegeben.

Folgend werden die einzelnen Beiträge der OPE-Entwicklung betrachtet, um zu untersuchen, wieso in der Anpassungsprozedur gerade Wertepaare mit dem angesprochenem Verhältnis (4.18) bevorzugt werden. Während die Spektraldichte des perturbativen Anteils  $\rho_{T(5)}^{\text{pert}}(s)$  explizit von  $s$  abhängt und somit über den Raum der Integration variiert, sind die Spektraldichten aller nichtperturbativen Beiträge mit Ausnahme eines numerisch sehr geringen  $\langle \bar{q}q \rangle$ -NLO-Terms (s. Gleichung (B.71)) proportional zu  $\delta^{(n)}(m_Q^2 - s)$ . Das bedeutet, dass alle wesentlichen Kondensatbeiträge im Spektrum in den Bereich  $s = m_Q$  eingehen, wodurch entsprechend die radiale Anregung gegenüber dem Grundzustand unterdrückt wird. Exemplarisch ist dies für das D-Meson in Tabelle 4.4 gezeigt. Sind nur perturbative Beiträge in der OPE enthalten, haben beide hadronischen Resonanzen die gleiche Größenordnung. Im Wesentlichen bricht das Quarkkondensat in führender Ordnung diese gleichmäßige Aufteilung, während NLO und höherdimensionale Kondensate aufgrund ihres geringeren numerischen Gewichts diesbezüglich keine Rolle spielen. Die Unterdrückung der radialen Anregung gegenüber dem Grundzustand ist damit auf den  $s$ -unabhängigen Anteil des Quarkkondensates zurückzuführen.

Mit den Ergebnissen aus den Tabellen 4.2 und 4.3 sowie den anschließenden Analysen zur Zerfallsbreite und Hierarchie der Beiträge (s. Tabelle 4.4) ist die numerische Auswertung für die radialen Anregungen in dieser Arbeit abgeschlossen.

## 4.4. Diskussion der Ergebnisse

Analog zur Grundzustandsanalyse werden in diesem Abschnitt die Ergebnisse der Auswertung gesammelt und diskutiert. Durch Erweiterung der hadronischen Darstellung wurden mit den bereits hergeleiteten Summenregeln die Zerfallskonstanten für radiale Anregungen schwerer Mesonen ermittelt. Die in Tabelle 4.2 dargestellten Ergebnisse zeigen dabei das Größenverhältnis  $f_{H^{(*)'}}/f_{H^{(*)}} \approx 0.6 - 0.8$ , die ebenfalls berechneten oberen Grenzen unterstützen diese Relation. Eine Analyse der einzelnen Beiträge ergibt, dass hauptsächlich die nichtperturbativen Beiträge für den Größenunterschied zwischen den Zerfallskonstanten von Grundzustand und radialer Anregung verantwortlich sind (s. Tabelle 4.4). Im Vergleich mit dem einzigen verfügbaren Gitter-QCD-Ergebnis (4.15) ergibt sich eine gute Übereinstimmung innerhalb des Unsicherheitsintervalls.

Zur Auswertung wurden in diesem Kapitel Anpassungsmethoden jeweils mit und ohne Einbeziehung des Grundzustandes verwendet. Dadurch konnten die Zerfallskonstanten für radial angeregte Zustände mit einer relativen Genauigkeit von 10-40% extrahiert werden. Die Breite der Resonanzen wurde dabei mit einem Breit-Wigner-Ansatz berücksichtigt, die Analyse zeigt weiterhin, dass die Verwendung einer energieunabhängigen Breite  $\Gamma_{H^{(*)}}$  im Rahmen der betrachteten Unsicherheiten gerechtfertigt ist (s. Kapitel 4.3.4). Durch die Behandlung der Grundzustandszerfallskonstanten als Anpassungsparameter konnte darüber hinaus eine weitere Konsistenzprüfung der Grundzustandsanalyse vorgenommen werden, die Ergebnisse bestätigen die Resultate aus Kapitel 3. Die Einführung der zusätzlichen Massen- und Breitenparameter (s. Kapitel 4.3.1) für radial angeregte Zustände wirkt sich signifikant auf die Struktur der Summenregel aus. An-



---

stelle der im letzten Hauptkapitel verwendeten Massenfixierung wurde auf die erwähnte Anpassungsmethode zurückgegriffen. Die systematische Unsicherheit dieser Prozedur ist nur schwer abzuschätzen. Sollten in Zukunft insbesondere die Massen der radialen Anregungen so genau vermessen werden, dass die Methode der Massenfixierung praktikabel wird, ist ein präziseres Endergebnis zu erwarten.

Insgesamt konnten mit der Anpassungsmethode auf der Basis von bereits hergeleiteten Summenregeln konsistente Ergebnisse erzielt und so bislang nicht vermessene Größen  $f_{H'}$  für die Anwendung bereitgestellt werden.



# 5. Starke Kopplungen $g_{B^* B \pi}$ und

## $g_{D^* D \pi}$

In diesem Kapitel wird eine Analyse der in Kapitel 2.3 aufgestellten Lichtkegelsummenregeln durchgeführt. Im Vordergrund stehen dabei eine Aktualisierung der Twist-3 und Twist-4 Beiträge in führender Ordnung und ein neuer Ansatz zur Herleitung der doppelten Spektraldichte. Letzterer bietet eine allgemeine Darstellung, welche auf alle Beiträge in führender Ordnung gleichsam angewendet werden kann. Darauf aufbauend werden anschließend durch Modifikation der hadronischen Darstellung in den Summenregeln die Kopplungen mit radialen Anregungen untersucht.

Die gewonnenen Resultate bilden die Grundlage für die in [86] geplante Analyse unter Einbeziehung der nächstführenden Ordnung, darüber hinaus soll eine in führender Ordnung durchgeführte Auswertung in dieser Arbeit die prinzipielle Funktionalität der Summenregeln sowie zukünftige Untersuchungsaspekte für [86] aufzeigen.

### 5.1. Invariante Amplituden und doppelte Spektraldichte

Die Grundlage der Auswertung bildet die Summenregel (2.45), die neben verschiedenen hadronischen Größen auch die doppelte Spektraldichte  $\rho^{\text{QCD}}(s_1, s_2)$  enthält. Zu ihrer Bestimmung muss der Imaginärteil der invarianten Amplitude  $F(q^2, (p+q)^2)$  bezüglich den Dispersionvariablen  $s_1$  und  $s_2$  gebildet werden (s. Gleichung (2.38)). Die Herleitung der invarianten Amplitude aus der Korrelationsfunktion ist folgend zu Beispielzwecken anhand des Twist-2 Beitrages dargestellt. Dazu wird Gleichung (2.30) noch einmal betrachtet:

$$\begin{aligned}
 F^{\text{Twist-2}}(q^2, (p+q)^2) &= i \int d^4x e^{iqx} \langle \pi(p) | T \{ \bar{q}(x) \gamma_\mu Q(x) \bar{Q}(0) i \gamma_5 q(0) \} | 0 \rangle \\
 &= i \int \frac{d^4x d^4k}{(2\pi)^4 (m_Q^2 - k^2)} e^{i(q-k)x} \\
 &\quad \times \left( \underbrace{m_Q \langle \pi(p) | \bar{q}(x) \gamma_\mu \gamma_5 q(0) | 0 \rangle}_{:=A_1} + \underbrace{k^\nu \langle \pi(p) | \bar{q}(x) \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 q(0) | 0 \rangle}_{:=A_2} \right).
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Von den angegebenen Strukturen besitzt nur das Matrixelement  $A_1$  einen Beitrag mit Twist-2 (s. Gleichung (2.40)), folgend wird nur dieser Beitrag betrachtet:

$$\langle \pi(p) | \bar{q}(x) \gamma_\mu \gamma_5 q(0) | 0 \rangle = -i p_\mu f_\pi \int_0^1 du e^{iupx} \varphi_\pi(u), \tag{5.2}$$

wobei die Skalenabhängigkeit der Verteilungsamplitude nicht explizit ausgeschrieben wird. Eingesetzt in (2.30) ergibt sich für den Twist-2 Anteil dann

$$\begin{aligned} F^{\text{Twist-2}}(q^2, (p+q)^2) &= m_Q^2 f_\pi \int \frac{d^4x d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{m_Q^2 - k^2} e^{i(q-k)x} \int_0^1 du e^{iupx} \varphi_\pi(u) \\ &= m_Q^2 f_\pi \int_0^1 du \frac{1}{m_Q^2 - (q+up)^2} \varphi_\pi(u). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Die Beiträge mit höherem Twist aus Zwei-Punkt- und Drei-Punkt-Diagrammen können analog mit den in Anhang C.1 gegebenen Matrixelementen ausgedrückt werden. Dabei wurden in der Diracstruktur der Matrixelemente die Identitäten

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma_\nu &= -i\sigma_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}, \\ \gamma_\mu \sigma_{\rho\lambda} &= i(g_{\mu\rho}\gamma_\lambda - g_{\mu\lambda}\gamma_\rho) + \epsilon_{\mu\rho\lambda\delta} \gamma^\delta \gamma_5, \\ \gamma_\mu \gamma_\nu \sigma_{\rho\lambda} &= (\sigma_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - \sigma_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}) + i(g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}) \\ &\quad - \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \gamma_5 - i\epsilon_{\nu\rho\lambda\alpha} g^{\alpha\beta} \sigma_{\mu\beta} \gamma_5. \end{aligned} \quad (5.4)$$

verwendet. Man erhält für die invariante Amplitude in führender Ordnung insgesamt

$$\begin{aligned} F^{\text{LO}}(q^2, (p+q)^2) &= m_Q^2 f_\pi \int_0^1 \frac{du}{m_Q^2 - (q+up)^2} \left[ \varphi_\pi(u) + \frac{\mu_\pi}{m_Q} u \phi_{3\pi}^p(u) \right. \\ &\quad + \frac{\mu_\pi}{6m_Q} \left( 2 + \frac{m_Q^2 + q^2}{m_Q^2 - (q+up)^2} \right) \phi_{3\pi}^\sigma(u) - \frac{m_Q^2 \phi_{4\pi}(u)}{2(m_Q^2 - (q+up)^2)^2} \\ &\quad \left. - \frac{u}{m_Q^2 - (q+up)^2} \int_0^u dv \psi_{4\pi}(v) \right] \\ &\quad + \int_0^1 dv \int \frac{\mathcal{D}\alpha}{[m_Q^2 - (q + (\alpha_1 + \alpha_3 v)p)^2]^2} \left[ 4m_Q f_{3\pi} v (q \cdot p) \Phi_{3\pi}(\alpha_i) \right. \\ &\quad \left. + m_Q^2 f_\pi (2\Psi_{4\pi}(\alpha_i) - \Phi_{4\pi}(\alpha_i) + 2\tilde{\Psi}_{4\pi}(\alpha_i) - \tilde{\Phi}_{4\pi}(\alpha_i)) \right], \end{aligned} \quad (5.5)$$

mit den in Anhang C.2 dargestellten Verteilungsamplituden  $\phi_{3\pi}^p, \phi_{3\pi}^\sigma, \Phi_{3\pi}$  (Twist-3) und  $\phi_{4\pi}, \psi_{4\pi}, \Psi_{4\pi}, \Phi_{4\pi}, \tilde{\Psi}_{4\pi}, \tilde{\Phi}_{4\pi}$  (Twist-4). Die Parameter  $\mu_\pi$  und  $f_{3\pi}$  sind durch die Definitionen der entsprechenden Matrixelemente (s. Anhang C.1) gegeben. Außerdem wurde das Integrationsmaß

$$\mathcal{D}\alpha = d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) \quad (5.6)$$

verwendet. Die Skalenabhängigkeit der Parameter ist nicht explizit aufgeführt, sie ist in Anhang C.2 dargelegt. Die in Gleichung (5.5) verwendeten Definitionen der Twist-4 Verteilungsamplituden sind mit den in Gleichung (2.40) eingeführten Entwicklungstermen  $g_1$  und  $g_2$  durch die Relationen (C.8) verknüpft. Man beachte außerdem, dass die Twist-3

Verteilungsamplituden aus C.2 gegenüber [82] aktualisiert wurden.

Für die Extraktion des Imaginärteils zur Bestimmung der doppelten Spektraldichte  $\rho^{\text{QCD}}(s_1, s_2)$  kann im Prinzip die Vorgehensweise aus [82] herangezogen werden. In dieser Arbeit wird ein alternativer Ansatz verwendet, welcher zum gleichen Ergebnis führt und auf beliebige Verteilungsamplituden generalisiert werden kann.

Alle angegebenen Verteilungsamplituden können anstatt in Gegenbauerpolynomen (s. C.2) auch in  $(1 - u)$  entwickelt werden,

$$\varphi_\pi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (1 - u)^k, \quad (5.7)$$

mit den entsprechenden Entwicklungskoeffizienten  $c_k$ . In den Betrachtungen dieser Arbeit ist  $m_\pi \ll m_{H^{(*)}}$  und somit wird im weiteren Verlauf  $p^2 = m_\pi^2 = 0$  gesetzt. Damit gilt außerdem

$$m_Q^2 - (q + up)^2 = m^2 - (p + q)^2 u - q^2 \bar{u}, \quad (5.8)$$

mit der Definition  $\bar{u} := 1 - u$ . Alle Beiträge in Gleichung (5.5) lassen sich mit diesen Umformungen verallgemeinert ausdrücken als

$$F_n(q^2, (p + q)^2) = K \sum_k c_k \int_0^1 du \frac{(1 - u)^k}{[m_Q^2 - (p + q)^2 u - q^2 \bar{u}]^n}, \quad n \in \{1, 2, 3\}. \quad (5.9)$$

Hier bezeichnet  $K$  die Vorfaktoren des jeweiligen Beitrags in (5.5), für Twist-2 ist beispielsweise  $K = m_Q^2 f_\pi$ .

Eine Ausnahme in dieser Darstellung bildet der logarithmische Anteil in der Verteilungsamplitude  $\phi_{4\pi}$  (s. Gleichung (C.17)). Dieser kann allerdings mit der Reihendarstellung (C.27) des Logarithmus entsprechend ausgedrückt werden. In Abb. 5.1 ist die relative Abweichung der entwickelten Verteilungsamplitude  $\phi_{4\pi}^{\text{APP}}$  gegenüber dem analytischen Ausdruck (C.17) dargestellt. Man erkennt, dass diese an allen Punkten des Integrationsbereiches  $u \in [0, 1]$  weniger als 5% beträgt. Da der zugehörige Twist-4 Term darüber hinaus nur einen geringen Beitrag  $\mathcal{O}(< 5\%)$  zum Gesamtergebnis liefert, weicht die Approximation mit weniger als 1% vom analytischen Ergebnis ab. Somit wird  $\phi_{4\pi}^{\text{APP}}$  anstelle von  $\phi_{4\pi}$  verwendet und alle Beiträge der Korrelationsfunktion in führender Ordnung können durch Gleichung (5.9) ausgedrückt und gemäß der folgenden Schritte behandelt werden.

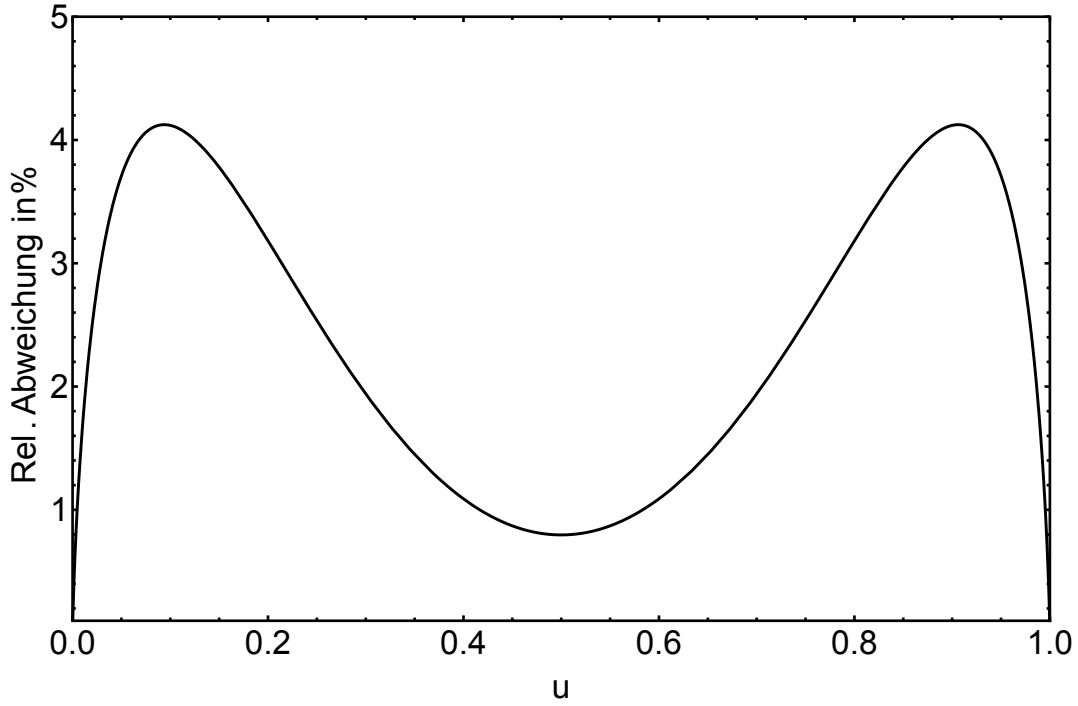


Abbildung 5.1.: Relative Abweichung der entwickelten Verteilungsamplitude  $\phi_{4\pi}^{\text{App}}$  zum exakten Ausdruck  $\phi_{4\pi}$  in Abhängigkeit von  $u$ .

In der kinematischen Region  $q^2 < 0$  wird  $(p+q)^2$  mit der Dispersionsvariablen  $s_2$  assoziiert, so dass

$$\begin{aligned} F_n(q^2, s_2) &= K \sum_k c_k \int_0^1 \frac{du}{u^n} \frac{(1-u)^k}{\left(\frac{m_Q^2}{u} - q^2 \frac{\bar{u}}{u} - s_2\right)^n} \\ &= K \sum_k \frac{c_k}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial s_2^{n-1}} \int_0^1 \frac{du}{u^n} \frac{(1-u)^k}{\frac{m_Q^2}{u} - q^2 \frac{\bar{u}}{u} - s_2}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Der Imaginärteil bezüglich einer Variablen  $x$  wird nun gebildet gemäß

$$\frac{1}{\pi} \text{Im}_x \frac{1}{(a-x)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d(a-x)^{n-1}} \delta(a-x), \quad a \in \mathbb{R}. \quad (5.11)$$

Für den Imaginärteil bezüglich  $s_2$  erhält man dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \text{Im}_{s_2} [F_n(q^2, s_2)] &= \frac{1}{\pi} K \sum_k \frac{c_k}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial s_2^{n-1}} \int_0^1 du \frac{(1-u)^k}{u^n} \text{Im} \left[ \frac{1}{\frac{m_Q^2}{u} - q^2 \frac{\bar{u}}{u} - s_2} \right] \\ &= K \sum_k \frac{c_k}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial s_2^{n-1}} \int_0^1 du \frac{(1-u)^k}{u^n} \delta \left( \frac{m_Q^2}{u} - q^2 \frac{\bar{u}}{u} - s_2 \right) \\ &= K \sum_k \frac{c_k}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial s_2^{n-1}} \int_0^1 du \frac{(1-u)^k}{u^{n-1}} \frac{1}{|s_2 - q^2|} \delta \left( \frac{m_Q^2 - q^2}{s_2 - q^2} - u \right), \end{aligned} \quad (5.12)$$

dabei wurde  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$  für  $a \in \mathbb{R}$  genutzt.

Da die Region  $q^2 < 0$  betrachtet wird und im Dispersionsintegral (2.39)  $s_2 \geq m_Q^2$  gilt, ist  $(m_Q^2 - q^2)/(s_2 - q^2) \in [0,1]$ . Somit führt die Integration über  $u$  zu

$$\frac{1}{\pi} \text{Im}_{s_2}[F_n(q^2, s_2)] = \frac{K}{(m_Q^2 - q^2)^{n-1}} \sum_k \frac{c_k}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial s_2^{n-1}} \left[ \left( \frac{s_2 - m_Q^2}{s_2 - q^2} \right)^k \cdot (s_2 - q^2)^{n-2} \right]. \quad (5.13)$$

Im nächsten Schritt wird der kinematische Bereich  $q^2 > m_Q^2$  betrachtet. Für die entsprechende Dispersionsrelation wird  $q^2$  mit der Dispersionsvariablen  $s_1$  verknüpft, daraus folgt  $q^2 \rightarrow s_1$  in (5.13), die infinitesimale Verschiebung  $i\epsilon$  wird nicht gesondert ausgeschrieben. Um die Spektraldichte für die doppelte Dispersionsrelation zu erlangen, muss nun der Imaginärteil von (5.13) mit  $q^2 \rightarrow s_1$  bezüglich  $s_1$  gebildet werden. Dies betrifft die Struktur

$$M_{k,n} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{(m_Q^2 - s_1)^{n-1}} \frac{\partial^{n-1}}{\partial s_2^{n-1}} \left[ \left( \frac{s_2 - m_Q^2}{s_2 - s_1} \right)^k \cdot (s_2 - s_1)^{n-2} \right]. \quad (5.14)$$

Im Prinzip kann die Extraktion des Imaginärteils bezüglich  $s_1$  unabhängig der Ableitung in  $s_2$  geschehen, da diese miteinander vertauschen. An dieser Stelle ist es allerdings sinnvoll, die Ableitung zuerst auszuführen. Für alle Fälle  $n = \{1,2,3\}$  entstehen dabei Faktoren, welche sich mit dem Term  $(m_Q^2 - s_1)^{-(n-1)}$  kürzen.

Somit bleiben zur Bildung des Imaginärteils nur Strukturen der Form  $(s_2 - s_1)^{-m}$  übrig, wobei die Potenz  $m$  von der betrachteten Konstellation in  $n$  und  $k$  abhängt.

Nach Anwendung von (5.11) erhält man für die doppelte Spektraldichte

$$\rho^{\text{QCD}}(s_1, s_2) = \frac{1}{\pi^2} \text{Im}_{s_1}[\text{Im}_{s_2}(F(s_1, s_2))] = \sum_k b_k \delta^{(k)}(s_2 - s_1), \quad (5.15)$$

wobei sich die neuen Koeffizienten  $b_k$  aus der Kombination der vorherigen Koeffizienten  $c_k$  und  $K$  mit den jeweiligen Faktoren der Extraktion des Imaginärteils ergeben. Die Darstellung (5.15) ermöglicht mit der verallgemeinerten Amplitude (5.9) die systematische Berechnung aller Beiträge in führender Ordnung. Für den Twist-2 Beitrag sind sie beispielsweise gegeben durch

$$b_k = f_\pi m_Q^2 c_k \frac{(m_Q^2 - s_2)^k}{k!}, \quad (5.16)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_1 &= 36a_2(\mu) + 90a_4(\mu) + 6, & c_2 &= -216a_2(\mu) - 1350a_4(\mu) - 6, \\ c_3 &= 360a_2(\mu) + 6300a_4(\mu), & c_4 &= -180a_2(\mu) - 12600a_4(\mu), \\ c_5 &= 11340a_4(\mu), & c_6 &= -3780a_4(\mu), \end{aligned}$$

alle anderen  $c_n$  verschwinden. Man beachte, dass sich die Größenordnung der Vorfaktoren von  $a_2(\mu)$  und  $a_4(\mu)$  aus dem Übergang von der Darstellung in Gegenbauerpolynomen (s. Gleichung (C.11)) zur Entwicklung in  $(1-u)$  ergibt. Die Beiträge der einzelnen

Koeffizienten bezüglich  $a_2(\mu)$  und  $a_4(\mu)$  kompensieren sich dabei größtenteils, so dass der asymptotische Anteil der Verteilungsamplitude tatsächlich dominiert. Das Ergebnis für die restlichen Beiträge in führender Ordnung ist in Anhang C.3 aufgeführt.

Damit ist die Herleitung der doppelten Spektraldichte für die führende Ordnung abgeschlossen. Das nächste Kapitel beschäftigt sich mit der Wahl und Konstruktion der Dualitätsregion.

## 5.2. Dualitätsregionen

Nach der Herleitung der doppelten Spektraldichte  $\rho^{\text{QCD}}(s_1, s_2)$  im letzten Abschnitt kann die Summenregel (2.45) ausgewertet werden. Zuvor muss allerdings noch die Dualitätsregion  $\Sigma$  im Kontext der Quark-Hadron-Dualität (s. Kapitel 2.3) gewählt werden. Da eine doppelte Dispersionsrelation in *zwei* Variablen  $s_1$  und  $s_2$  betrachtet wird, ist die Dualitätsregion hier anders als im Fall der Zweipunktsummenregeln kein Intervall auf einer eindimensionalen Achse, sondern eine zweidimensionale Fläche, deren Form und Ausdehnung entsprechend diskutiert werden müssen.

Die Spektraldichte in Gleichung (5.15) setzt jeweils bei  $m_Q^2$  ein und ist ausschließlich proportional zu Deltafunktionen bzw. deren Ableitungen, somit liefern nur Punkte mit  $s_1 = s_2$  einen Beitrag in führender Ordnung. Daher sind dort alle Dualitätsregionen äquivalent, welche eine entsprechende Diagonale von gleicher Länge einschließen (s. Abb. 5.2).

In diesem Fall kann eine symmetrische Dualitätsregion gewählt werden, so dass sich die Dualitätsregion mit einer einzigen Größe  $s_0$  parametrisieren lässt. Der Endpunkt der erwähnten Diagonalen ist in diesem Beispiel am Punkt  $(s_0, s_0)$  lokalisiert (s. Abb. 5.2). Für eine quadratische Dualitätsregion sind die Dispersionsintegrale mit

$$\iint_{\Sigma_{\square}} ds_1 ds_2 = \int_{m_Q^2}^{s_0} ds_2 \int_{m_Q^2}^{s_0} ds_1 \quad (5.17)$$

gegeben. Für eine Dualitätsregion in Dreiecksform lauten sie hingegen

$$\iint_{\Sigma_{\Delta}} ds_1 ds_2 = \int_{m_Q^2}^{2s_0 - m_Q^2} ds_2 \int_{m_Q^2}^{2s_0 - s_2} ds_1, \quad (5.18)$$

und in führender Ordnung von  $\alpha_s$  gilt wie erläutert

$$\iint_{\Sigma_{\Delta}} \rho_{\text{LO}}^{\text{QCD}}(s_1, s_2) e^{-\frac{s_1 + s_2}{2M^2}} ds_1 ds_2 = \iint_{\Sigma_{\square}} \rho_{\text{LO}}^{\text{QCD}}(s_1, s_2) e^{-\frac{s_1 + s_2}{2M^2}} ds_1 ds_2. \quad (5.19)$$

Im Allgemeinen gilt die Relation (5.19) nicht, Beiträge höherer Ordnung enthalten auch Anteile außerhalb der Diagonalen, die darüber hinaus auch unsymmetrisch sein können. Für diesen Fall kann die Dualitätsverletzung durch die Wahl verschiedener Dualitätsregionen untersucht werden.



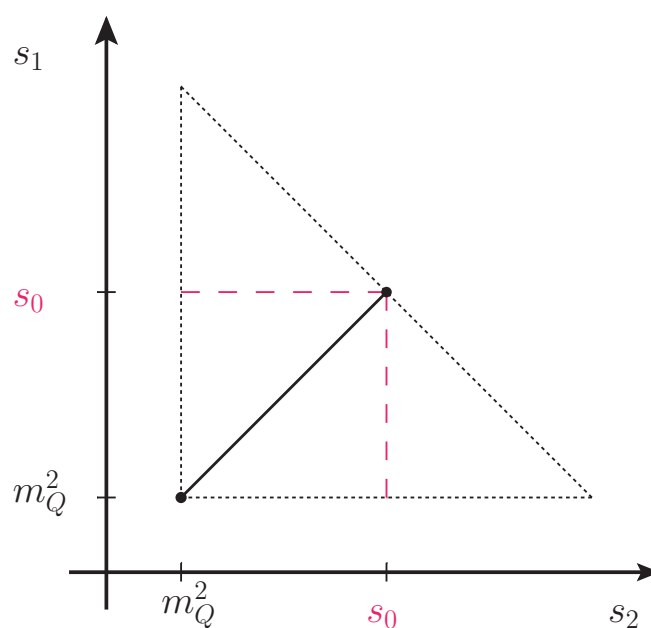


Abbildung 5.2.: Visualisierung der Dualitätsregionen in führender Ordnung. Nur Beiträge auf der in schwarz dargestellten Diagonalen tragen zur Summenregel bei, die Dualitätsregionen Dreieck (schwarz, gepunktet) und Quadrat (rot, gestrichelt) sind daher in diesem Fall äquivalent.

### 5.3. Numerische Analyse für $g_{D^*D\pi}$ und $g_{B^*B\pi}$

Im Vordergrund dieser Analyse steht die Bestimmung der starken Kopplungen  $g_{D^*D\pi}$  und  $g_{B^*B\pi}$  inklusive einer Abschätzung der Unsicherheiten. Darauf aufbauend werden im weiteren Verlauf des Kapitels eine Abschätzung der Verteilungsamplitudenparameter  $a_2(\mu)$  und  $a_4(\mu)$  sowie die Symmetrie schwerer Quarks durch das Verhältnis  $g_{D^*D\pi}/g_{B^*B\pi}$  diskutiert. Zum Schluss wird außerdem die Einbeziehung radialer Anregungen untersucht.

Man beachte, dass die Definition der starken Kopplung (2.26) für verschiedene schwache Isospinzustände variiert. Da für  $g_{H^*H\pi}$

$$g_{H^*H\pi} := g_{H^{*+}H^0\pi^+} = -\sqrt{2}g_{H^{*+}H^+\pi^0} = \sqrt{2}g_{H^{*0}H^0\pi^0} = -\sqrt{2}g_{H^{*0}H^+\pi^-} \quad (5.20)$$

gilt, wird in der Auswertung explizit die Kopplung  $g_{H^{*+}H^0\pi^+}$  betrachtet. In Analogie zur Vorgehensweise in den vorherigen Kapiteln werden zunächst die Eingabeparameter dargelegt.

#### 5.3.1. Allgemeine Eingabeparameter für Lichtkegelsummenregeln

Ein Großteil der modellunabhängigen Eingabeparameter für die Lichtkegelsummenregeln, wie beispielsweise die Quark- oder Mesonmassen, wird aus den Tabellen 3.1 und 3.2 übernommen. Zusätzlich zu diesen Größen enthält die Summenregel (2.45) weitere

Twist	Parameter (bei $\mu = 1$ GeV)	Ref.
2	$a_2 = 0.17 \pm 0.08$	[134]
	$a_4 = 0.06 \pm 0.10$	[134]
3	$\mu_\pi = 2.03 \pm 0.24$ GeV	[135]
	$f_{3\pi} = 0.0045 \pm 0.0015$ GeV <sup>2</sup>	[136]
	$\omega_{3\pi} = -1.5 \pm 0.7$	[136]
4	$\delta_\pi^2 = 0.18 \pm 0.06$ GeV <sup>2</sup>	[136]
	$\epsilon_\pi = \frac{21}{8}(0.2 \pm 0.1)$	[136]

Tabelle 5.1.: Hadronische Eingabeparameter für die Lichtkegelsummenregeln. Der Wert für  $\mu_\pi(1$  GeV) wurde von  $\mu_\pi(2$  GeV) =  $2.5 \pm 0.3$  GeV [135] extrapoliert.

hadronische Parameter, die aus der Parametrisierung der jeweiligen Matrixelemente (s. Anhang C.1) resultieren. Ihre Werte sind in Tabelle 5.1 dargestellt, ihr Skalenverhalten in Anhang C.2.

Die relativen Unsicherheiten dieser hadronischen Parameter sind mit einer Spanne von 12% ( $\mu_\pi$ ) bis hin zu  $> 100\%$  ( $a_4$ ) im Vergleich zu den restlichen Parametern der Summenregel groß. Um den Einfluss dieser Unsicherheiten auf das Gesamtergebnis abzuschätzen, wird die Hierarchie der verschiedenen Beiträge betrachtet. Da die Twist-2 und Twist-3 Beiträge in den Summenregeln dominieren, geht die Unsicherheit der zugehörigen Parameter aus Tabelle 5.1 wesentlich in die Gesamtunsicherheit ein. Die höchste relative Unsicherheit der dominierenden Beiträge weisen die Twist-2 Parameter  $a_2$  und  $a_4$  auf, ihre präzisere Bestimmung ist in diesem Kontext von aktuellem Interesse [134]. Im nächsten Abschnitt der Auswertung wird dieser Umstand noch einmal aufgegriffen.

Die ebenfalls in den Summenregeln enthaltene Pionzerfallskonstante  $f_\pi$  ist gegeben mit [3]

$$f_\pi := f_{\pi^\pm} = (130.41 \pm 0.03 \pm 0.20) \text{ MeV}. \quad (5.21)$$

Dieser Parameter ist mit  $\Delta f_\pi / f_\pi \approx 0.0018$  im Vergleich zu den Parametern aus Tabelle 5.1 mit hoher Präzision gegeben. In der numerischen Auswertung spielt die entsprechende Unsicherheit in der betrachteten Genauigkeit keine Rolle und wird daher im Folgenden vernachlässigt.

### 5.3.2. Auswertung für Lichtkegelsummenregeln

Nachdem die allgemeinen Eingabeparameter dargelegt wurden, müssen nun noch die spezifischen Größen  $M^2$ ,  $\mu$  und  $s_0$  gewählt werden. Die Skala wird analog zur Analyse der Grundzustandszerfallskonstanten gewählt:

$$\mu_c = 1.3 - 3.0 \text{ GeV} \quad (\mu_c^{\text{zen}} = 1.5 \text{ GeV}), \quad \mu_b = 3.0 - 5.0 \text{ GeV} \quad (\mu_b^{\text{zen}} = 3.0 \text{ GeV}). \quad (5.22)$$

Die Zentralwerte (und die daraus folgenden asymmetrischen Intervalle) wurden gemäß der Skalenrelation (3.24) gewählt.

Die Wahl des Borelparameters  $M^2$  orientiert sich an den bereits in Kapitel 3.2.2 verwendeten Kriterien: Zur Fixierung von  $M_{\text{Min}}^2$  soll die Konvergenz der Operatorentwicklung gewährleistet sein, so dass die Beiträge  $\sim M^{-2}$  im Verhältnis zum Gesamtergebnis kleiner als 5% bleiben. Die obere Grenze des Intervalls  $M_{\text{Max}}^2$  bemisst sich an der Unterdrückung der unbekanntenen Kontinuumsbeiträge. Sie wird so gewählt, dass der Anteil dieser Beiträge geringer als max. 50% des Gesamtergebnisses bleibt.

Zusätzlich zu diesen Kriterien soll der Beitrag der zu bestimmenden Kopplung  $g_{H^*H\pi}$  durch den exponentiellen Vorfaktor in der Summenregel (2.45) nicht zu stark unterdrückt werden, so dass gilt

$$\mathcal{O}\left(\frac{m_{H^*}^2 + m_H^2}{2M^2}\right) = 1. \quad (5.23)$$

Diesen Kriterien entsprechend werden folgende Borelintervalle gewählt:

$$\begin{aligned} \text{Charm:} \quad & M^2 = 3 - 5 \text{ GeV}^2 \quad (4 \text{ GeV}^2), \\ \text{Bottom:} \quad & M^2 = 9 - 15 \text{ GeV}^2 \quad (12 \text{ GeV}^2), \end{aligned} \quad (5.24)$$

mit den jeweiligen Zentralwerten in Klammern. Die Wahl des Grenzparameters  $s_0$  muss für die Lichtkegelsummenregeln gegenüber den vorherigen Analysen neu diskutiert werden. Man erwartet, dass die Kopplungen mit radialen Anregungen  $g_{H^*H'\pi}$  und  $g_{H^{**}H\pi}$  beide einen negativen Wert haben, dies wird durch eine spätere Abschätzung (s. Kapitel 5.4) bestätigt. Aus diesem Grund kann zur Bestimmung von  $s_0$  nicht die Massenfixierung aus Kapitel 3 verwendet werden, da sich in der hadronischen Darstellung positive und negative Beiträge kompensieren. Allerdings ist die vorliegende Lichtkegelsummenregel deutlich stabiler unter Variation des Grenzparameters, als die zuvor verwendeten Zweipunktsummenregeln. Daher ist es möglich,  $s_0$  etwa in der Größenordnung der Grenzparameter für die entsprechenden Zweipunktsummenregeln zu wählen und die mit dieser Abschätzungsprozedur verbundene Unsicherheit mit einem entsprechend großen Variationsintervall zu quantifizieren. Für die folgenden Anwendungen wird

$$\begin{aligned} \text{Charm:} \quad & s_0 = 7 - 11 \text{ GeV}^2 \quad (9 \text{ GeV}^2), \\ \text{Bottom:} \quad & s_0 = 36 - 44 \text{ GeV}^2 \quad (40 \text{ GeV}^2), \end{aligned} \quad (5.25)$$

gewählt.

In die Lichtkegelsummenregeln gehen auch die Zerfallskonstanten  $f_{H^{(*)}}$  ein. Hier können im Prinzip die in Tabelle 3.2 berechneten Ergebnisse oder experimentelle Resultate verwendet werden. Aus Konsistenzgründen werden im Folgenden aber anstelle des Zahlenwertes die Zweipunktsummenregeln (2.25) für  $f_{H^{(*)}}$  mit den in Tabelle 3.2 angegebenen Grenzparametern  $s_0^{H^{(*)}}$  eingesetzt, so dass diese Größe bei Veränderung der Eingabeparameter jeweils dynamisch mit angepasst wird.

Da für die vorliegende Analyse nur Beiträge in führender Ordnung betrachtet werden, werden auch für die Zweipunktsummenregeln nur Beiträge in dieser Ordnung einbezogen. Im hier verwendeten  $\overline{\text{MS}}$ -Schema verringert dies jedoch die Stabilität der Summenregel,

da die skalenabhängige schwere Quarkmasse einen großen Einfluss auf die Zweipunktsummenregel für  $f_{H^{(*)}}^{\text{LO}}$  hat. Diese Skalenabhängigkeit wird durch die Beiträge der höheren Ordnungen kompensiert, hier werden diese Terme allerdings nicht berücksichtigt.

Aus diesem Grund wird die Skala für die Zweipunktsummenregeln in dieser Berechnung auf  $\mu_{c(b)} = 1.5$  (3.0) GeV fixiert. Ebenso werden für diese anstelle der Borellintervalle (5.24) die in Tabelle 3.2 angegebenen Zentralwerte für die Zweipunktsummenregeln verwendet, damit durch den stark erhöhten Borelparameter die Region der Zerfallskonstanten nicht zu stark unterdrückt wird. Als Ergebnis erhält man

$$g_{D^*D\pi}^{\text{LO}} = 13.4_{-2.3}^{+2.0}, \quad g_{B^*B\pi}^{\text{LO}} = 21.4_{-3.2}^{+6.1}. \quad (5.26)$$

Aus diesen Resultaten kann sofort die Größe

$$V = \frac{g_{B^*B\pi} f_{B^*} \sqrt{m_D}}{g_{D^*D\pi} f_{D^*} \sqrt{m_B}} = 0.82_{-0.20}^{+0.28} \quad (5.27)$$

gebildet werden. Im Grenzübergang für schwere Quarks (HQL) gilt  $V = 1$  und in [137] wurde gezeigt, dass dieses Verhältnis in führender Ordnung von  $\alpha_s$  keine Massenkorrekturen  $\sim 1/m_Q$  besitzt. Das Resultat (5.27) ist innerhalb der Unsicherheit konsistent zur HQL-Vorhersage und bestätigt diese Struktur damit.

Die relativen Unsicherheiten für die Einzelergebnisse in (5.26) sind mit etwa 17% (Charm) und 29% (Bottom) insgesamt etwas größer als die Ergebnisse bisheriger Berechnungen in führender Ordnung [82]. Hier ist allerdings zu beachten, dass die dort angegebenen Unsicherheiten nur einer Variation des Borelintervalls entsprechen, während Parameter- und Skalenunsicherheiten vernachlässigt wurden. Die Einzelunsicherheiten sind zusammen mit den Ergebnissen in Tabelle 5.2 aufgeführt.

Wie schon in der Grundzustandsanalyse führt das asymmetrische Intervall für  $\mu$  zu einer entsprechenden Asymmetrie in der Gesamtunsicherheit. Diese wird für beide betrachteten Kanäle insgesamt durch die Unsicherheiten der individuellen Parameter  $M^2$  und  $\mu$ , sowie jene der schweren Quarkmasse dominiert. Von den hadronischen Parametern tragen vor allem die Twist-2 Parameter  $a_2$  und  $a_4$ , sowie die Twist-3 Parameter  $\mu_\pi$  und  $f_{3\pi}$  zur Gesamtunsicherheit bei, während von den Eingabeparametern der Zweipunktsummenregeln nur die Variation des Quarkkondensats signifikant in das Ergebnis eingeht. Die Stabilität des Ergebnisses unter Variation des Borelintervalls ist in Abb. 5.3 dargestellt, die Hierarchie der verschiedenen Twistbeiträge ist in den Abb. 5.4 und 5.5 gezeigt. Man erkennt, dass die Beiträge für Twist-2 und Twist-3 in etwa von gleicher Größenordnung sind, während die Twist-4 Beiträge im Vergleich dazu etwa eine Größenordnung kleiner sind.

Ein Vergleich mit experimentellen Ergebnissen beschränkt sich an dieser Stelle auf  $g_{D^*D\pi}$ , da  $g_{B^*B\pi}$  bislang noch nicht gemessen werden konnte. Mit den in [138, 139] angegebenen Messungen der Zerfallsbreite  $\Gamma_{\text{tot}}(D^{*\pm})$  und dem in [3] angegebenen Verzweigungsverhältnis für den Zerfall  $D^* \rightarrow D\pi$  kann die entsprechende Zerfallsbreite als Mittelung der beiden Messungen angegeben werden:

$$\Gamma^{\text{Exp}}(D^{*+} \rightarrow D^0\pi^+) = 56.5 \pm 1.3 \text{ keV}. \quad (5.28)$$

Summenregel für	$g_{D^*D\pi}$	$g_{B^*B\pi}$
Ergebnis	$13.4^{+2.0}_{-2.3}$	$21.4^{+6.1}_{-3.2}$
$\Delta m_Q$	$+0.7$ $-0.7$	$+1.4$ $-1.3$
$\Delta \mu$	$+0.1$ $-0.4$	$+5.1$ $-0.0$
$\Delta M^2$	$+0.2$ $-0.0$	$+1.7$ $-0.7$
$\Delta a_2$	$+0.6$ $-0.6$	$+1.0$ $-1.0$
$\Delta a_4$	$+0.9$ $-0.9$	$+1.4$ $-1.4$
$\Delta \mu_\pi$	$+1.1$ $-1.1$	$+1.3$ $-1.3$
$\Delta f_{3\pi}$	$+0.5$ $-0.5$	$+0.3$ $-0.3$
$\Delta \omega_{3\pi}$	$+0.1$ $-0.1$	$< 0.1$
$\Delta \delta_\pi^2$	$+0.1$ $-0.1$	$< 0.1$
$\Delta \epsilon_\pi$	$< 0.1$	$< 0.1$
$\Delta \langle \bar{q}q \rangle$	$+0.5$ $-0.6$	$+0.8$ $-0.9$
$\Delta \langle GG \rangle$	$< 0.1$	$< 0.1$
$\Delta m_0^2$	$< 0.1$	$+0.1$ $-0.1$
$\Delta s_0$	$+0.8$ $-1.3$	$+1.1$ $-1.5$

Tabelle 5.2.: Ergebnisse und Unsicherheiten für  $g_{H^*H\pi}$ .

Aus der Relation

$$\Gamma(D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+) = \frac{g_{D^*D\pi}^2}{24\pi m_{D^*}^2} |\vec{p}|^3 \quad (5.29)$$

erhält man für die Kopplung mit  $|\vec{p}| = 39$  MeV [3] schließlich

$$g_{D^*D\pi}^{\text{Exp}} = 17 \pm 0.2 . \quad (5.30)$$

Das Ergebnis (5.26) liegt gegenüber früheren Berechnungen in führender Ordnung [82, 83] näher am experimentellen Wert (5.30), ist mit diesem allerdings nicht innerhalb eines  $3\sigma$ -Intervalls konsistent. Dies zeigt, dass die Beiträge in nächstführender Ordnung einen wichtigen Anteil an der Summenregel ausmachen und nicht vernachlässigt werden sollten.

Eine weitere Vergleichsmöglichkeit bietet die Betrachtung der Kopplung in der Entwicklung für schwere Quarks:

$$g_{H^*H\pi} = \frac{2m_H}{f_\pi} \cdot \hat{g} \left[ 1 + \frac{\Delta}{m_H} \right] , \quad (5.31)$$

hier stellt  $\hat{g}$  die Kopplung in dieser Entwicklung dar und  $\Delta$  die Stärke der Massenkorrekturen. Diese Größen werden durch das Einsetzen der Ergebnisse (5.26) und anschließender

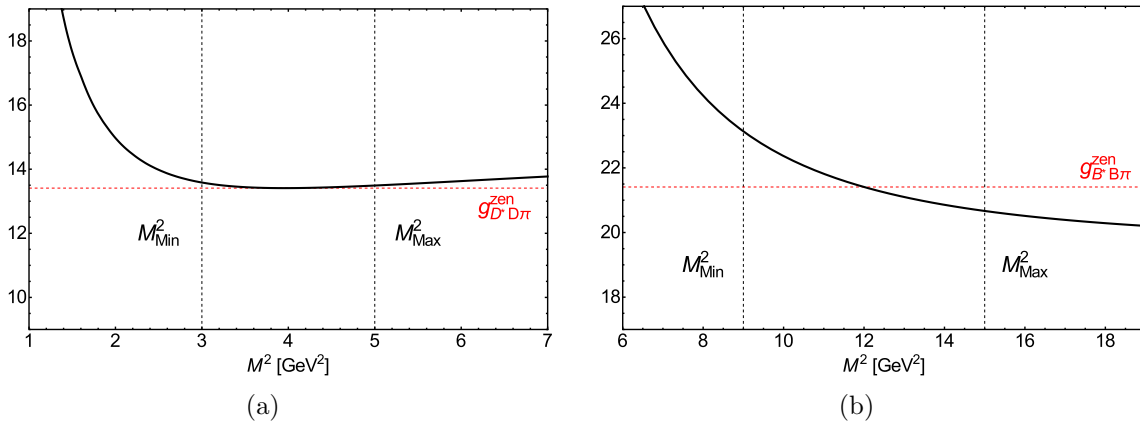


Abbildung 5.3.: Diagramme zur Stabilität der Lichtkegelsummenregel unter Variation von  $M^2$  für (a)  $g_{D^*D\pi}$  und (b)  $g_{B^*B\pi}$ . Die vertikalen Linien (schwarz, gestrichelt) zeigen das gewählte Borelfenster zwischen  $M_{\text{min}}^2$  und  $M_{\text{max}}^2$ , die horizontale Linie (rot, gepunktet) den Zentralwert der jeweiligen starken Kopplung.

Lösung des sich ergebenden Gleichungssystems bestimmt. Man erhält

$$\hat{g} = 0.15_{-0.10}^{+0.16}, \quad \Delta = 3.9_{-3.5}^{+13.0}, \quad (5.32)$$

wobei die Unsicherheiten durch Variation der Einzelunsicherheiten für  $g_{B^*B\pi}$  und  $g_{D^*D\pi}$  ermittelt wurden, während die entsprechenden Intervalle für Mesonmassen und  $f_\pi$  aufgrund ihres geringen Einflusses vernachlässigt wurden.

Einige aktuelle Vergleichswerte aus der Gitter-QCD für  $\hat{g}$  sind in Tabelle 5.3 aufgeführt. Obwohl der obere Bereich des Ergebnisintervalls (5.32) und die Vergleichswerte in dersel-

Quelle	$\hat{g}$
ALPHA Collaboration '14 [140]	$0.49 \pm 0.03$
Flynn et al. '13 [141]	$0.57 \pm 0.08$
Detmold et al. '12 [142]	$0.45 \pm 0.05$
Diese Arbeit	$0.15_{-0.10}^{+0.16}$

Tabelle 5.3.: Vergleich von  $\hat{g}$  mit Gitter-QCD-Resultaten.

ben Größenordnung liegen, ergibt sich keine Übereinstimmung innerhalb der Unsicherheiten. Dies liegt vermutlich in der Vernachlässigung der radiativen Korrekturen begründet, insbesondere die Einbeziehung des Twist-3 Beitrages in nächstführender Ordnung (s. Abschnitt 2.3.5) könnte den Wert signifikant anheben. Wie zuvor wird insbesondere durch die großen Unsicherheitsintervalle der Ergebnisse 5.32 deutlich, dass eine Betrachtung in führender Ordnung zwar eine annehmbare Abschätzung der Größenordnung ermöglicht, für Resultate in kompetitiver Genauigkeit jedoch die Erweiterung auf die nächstführende Ordnung notwendig ist.

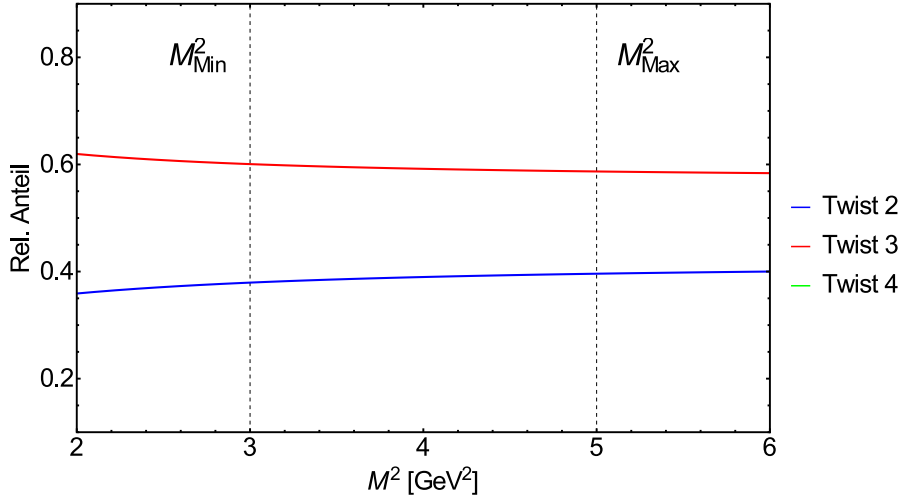


Abbildung 5.4.: Relative Größe der verschiedenen Twistbeiträge zur Lichtkegelsummenregel unter Variation von  $M^2$  für  $g_{D^*D\pi}$ . Die vertikalen Linien zeigen das gewählte Borelfenster zwischen  $M_{\text{Min}}^2$  und  $M_{\text{Max}}^2$ .

Bevor dieser Teil der Auswertung abgeschlossen wird, sollen an dieser Stelle noch einmal die Parameter  $a_2$  und  $a_4$  diskutiert werden: In Kapitel 5.3.1 wurde bereits ihre hohe Unsicherheit angesprochen. Die Ergebnisse aus Tabelle 5.2 bestätigen, dass diese sich signifikant auf das Ergebnis auswirkt.

Vor diesem Hintergrund wird das experimentelle Ergebnis (5.30) für  $g_{D^*D\pi}$  genutzt, um die Konsistenz der verwendeten Twist-2 Parameter in der Summenregel zu untersuchen. Durch explizites Ausführen der Dispersionsintegrale erhält man für die Lichtkegelsummenregel zur Bestimmung von  $g_{D^*D\pi}^{\text{Exp}}$  in führender Ordnung:

$$g_{D^*D\pi} m_D^2 m_{D^*} f_D f_{D^*} = m_c^2 f_\pi e^{\frac{m_D^2 + m_{D^*}^2}{2M^2}} \left[ M^2 \left( e^{-\frac{m_c^2}{M^2}} - e^{-\frac{s_0}{M^2}} \right) \varphi_\pi(u=1/2) \right] + \text{Twist-3} + \text{Twist-4}. \quad (5.33)$$

Mit dem experimentellen Resultat (5.30) als Eingabeparameter kann aus dieser Gleichung  $\varphi_\pi(u=1/2)$  bestimmt werden. Es ergibt sich

$$\varphi_\pi^{\text{Exp}}(u=1/2) = 2.2_{-0.5}^{+0.8}, \quad (5.34)$$

die Unsicherheiten wurden durch Variation der Eingabeparameter ermittelt. In der Summenregel wird die Verteilungsamplitude mit

$$\varphi_\pi^{\text{Theo}}(u, \mu) = 6u\bar{u} \left( 1 + a_2(\mu) C_2^{3/2}(u - \bar{u}) + a_4(\mu) C_4^{3/2}(u - \bar{u}) \right) \quad (5.35)$$

beschrieben. Das Einsetzen der Referenzwerte aus Tabelle 5.1 in (5.35) liefert

$$\varphi_\pi^{\text{Theo}}(1/2, \mu) = 1.3_{-0.2}^{+0.3} \quad (5.36)$$

wobei die Unsicherheiten sich aus der Variation von  $a_2$  und  $a_4$  sowie der Skala  $\mu$  ergeben. Das Ergebnis (5.34) ist mit dem in (5.36) ermittelten Variationsintervall in einem  $2\sigma$ -Bereich konsistent.

Damit ist die Auswertung für die Lichtkegelsummenregel in führender Ordnung abgeschlossen. Im nächsten Kapitel wird die Einbeziehung radialer Anregungen untersucht.

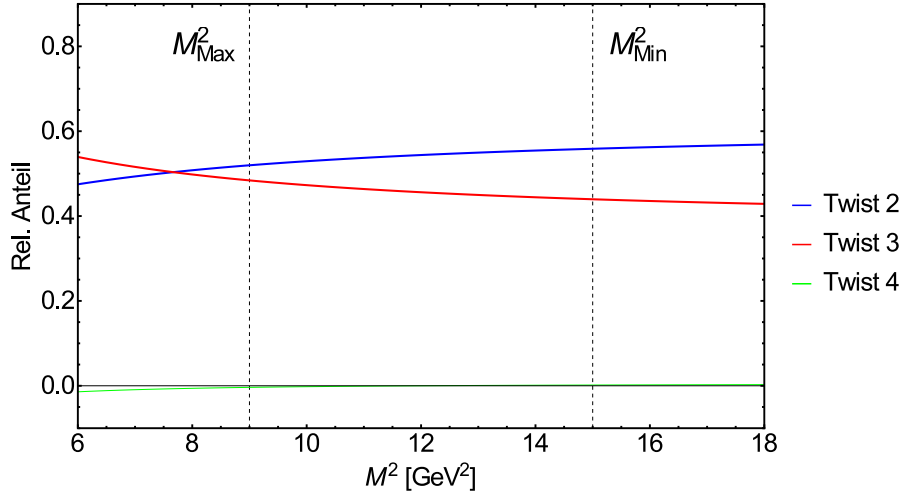


Abbildung 5.5.: Relative Größe der verschiedenen Twistbeiträge zur Lichtkegelsummenregel unter Variation von  $M^2$  für  $g_{B^*B\pi}$ . Die vertikalen Linien zeigen das gewählte Borelfenster zwischen  $M_{\text{Min}}^2$  und  $M_{\text{Max}}^2$ .

## 5.4. Radiale Anregungen in Lichtkegelsummenregeln

Die bisherige Auswertung der Lichtkegelsummenregeln umfasste auf hadronischer Seite die starke Kopplung  $g_{H^*H\pi}$  ohne Terme höherer Anregungszustände. In Analogie zum Vorgehen in Kapitel 4 werden nun die ersten radialen Anregungen der Mesonen  $H$  und  $H^*$  in die Analyse miteinbezogen. Obwohl die Genauigkeit der Methode durch die große Unsicherheit der zusätzlichen radialen Parameter und der Beschränkung auf die führende Ordnung limitiert ist, kann unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse eine Abschätzung der Größenordnung für die entsprechenden starken Kopplungen getroffen werden.

Die modifizierte hadronische Darstellung der Korrelationsfunktion ergibt sich in diesem Fall zu

$$\begin{aligned}
 F^{\text{had}}(M^2) = & g_{H^*H\pi} m_H^2 m_{H^*} f_H f_{H^*} \cdot e^{-\frac{m_{H^*}^2 + m_H^2}{2M^2}} + g_{H^*H'\pi} m_{H'}^2 m_{H^*} f_{H'} f_{H^*} \cdot e^{-\frac{m_{H^*}^2}{2M^2}} \cdot \tilde{\Gamma}_{H'} \\
 & + g_{H^*H\pi} m_H^2 m_{H^*} f_H f_{H^*} \cdot e^{-\frac{m_H^2}{2M^2}} \cdot \tilde{\Gamma}_{H^*} \\
 & + g_{H^*H'\pi} m_{H'}^2 m_{H^*} f_{H'} f_{H^*} \cdot \tilde{\Gamma}_{H'} \cdot \tilde{\Gamma}_{H^*} ,
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

mit der bereits in Kapitel 4 eingeführten integrierten Breite

$$\tilde{\Gamma}_{H^{(*)}'} = \frac{1}{\pi} \int_{L^{(*)}}^{\infty} ds \frac{m_{H^{(*)}'} \Gamma_{H^{(*)}'} (m_{H^{(*)}'} - s)}{(s - m_{H^{(*)}'}^2)^2 + m_{H^{(*)}'}^2 \Gamma_{H^{(*)}'}^2} e^{-\frac{s}{M^2}} \tag{5.38}$$

und  $L^* = (m_H + m_P)^2$  und  $L = (m_{H^*} + m_P)^2$ .



Die hadronische Darstellung (5.37) enthält neben den zusätzlichen Massen und Breiten der Anregungen (s. Tabelle 4.1) die vier starken Kopplungen  $g_{H^*H\pi}$ ,  $g_{H^*H'\pi}$ ,  $g_{H^*H\pi}$  und  $g_{H^*H'\pi}$ . Um die Anzahl der freien Parameter zu verringern, wird ausgenutzt, dass aus Symmetriegründen gilt

$$g'_{H^*H\pi} := g_{H^*H'\pi} \approx g_{H^*H\pi} , \quad (5.39)$$

so dass Gleichung (5.37) modifiziert werden kann zu

$$\begin{aligned} F^{\text{had}}(M^2) = & g_{H^*H\pi} m_H^2 m_{H^*} f_H f_{H^*} \cdot e^{-\frac{m_{H^*}^2 + m_H^2}{2M^2}} \\ & + g'_{H^*H\pi} \left( m_{H'}^2 m_{H^*} f_{H'} f_{H^*} \cdot e^{-\frac{m_{H^*}^2}{2M^2}} \cdot \tilde{\Gamma}_{H'} + m_H^2 m_{H^*} f_H f_{H^*} \cdot e^{-\frac{m_H^2}{2M^2}} \cdot \tilde{\Gamma}_{H^*} \right) \\ & + g_{H^*H'\pi} m_{H'}^2 m_{H^*} f_{H'} f_{H^*} \cdot \tilde{\Gamma}_{H'} \cdot \tilde{\Gamma}_{H^*} . \end{aligned} \quad (5.40)$$

Zur Bestimmung der verbliebenen freien Parameter wird erneut die in Kapitel 4 verwendete Anpassungsprozedur verwendet. Da diese Methode die bisher unbekanntenen Größen  $g'_{H^*H\pi}$  und  $g_{H^*H'\pi}$  bestimmen soll, wird die starke Kopplung  $g_{H^*H\pi}$  zur Verbesserung der Anpassungsgenauigkeit nicht als freier Parameter eingeführt, sondern auf den experimentell ermittelten Wert der starken Kopplung fixiert. Dieser steht mit (5.30) nur für  $g_{D^*D\pi}$  zur Verfügung, deshalb beschränkt sich die konkrete Auswertung im Folgenden auf diesen Fall.

Die Vorgehensweise in Kapitel 4 sieht die Behandlung des neuen Grenzparameters  $s'_0$  als zusätzliche Anpassungsgröße vor. In diesem Fall ist dies jedoch nicht nötig, da die Lichtkegelsummenregel im Vergleich zur Zweipunktsummenregel, wie im letzten Abschnitt erwähnt, stabiler unter Variation des Grenzparameters ist. Aus diesem Grund wird hier der Zentralwert mit  $s'_0 = 15 \text{ GeV}^2$  abgeschätzt, und die entsprechende Unsicherheit durch Variation in einem Intervall  $s'_0 \in [12,18] \text{ GeV}^2$  berücksichtigt. Für die Zerfallskonstanten  $f_H$ ,  $f_{H^*}$ ,  $f_{H'}$  und  $f_{H^*}$  werden die numerischen Ergebnisse der Standardanpassung aus Tabelle 4.2 verwendet. Man erhält:

$$g'_{D^*D\pi} = -8_{-3}^{+4} , \quad g_{D^*D'\pi} = 14_{-7}^{+7} , \quad (5.41)$$

die Analyse der Einzelunsicherheiten ist in Tabelle 5.4 zusammengefasst. Das Ergebnis deutet trotz der hohen relativen Ungenauigkeit von etwa 50% darauf hin, dass  $\mathcal{O}(g_{H^*H\pi}) = \mathcal{O}(g_{H^*H'\pi})$  gilt. Außerdem zeigt sich  $g'_{H^*H\pi} < 0$  sowie die Tendenz  $|g'_{H^*H\pi}| < |g_{H^*H\pi}|$ .

Analog zu Kapitel 4 erkennt man, dass der Einfluss von Massen und Breiten der radialen Anregungen auf die Gesamtunsicherheit im Vergleich zu den restlichen Parametern gering ist. Eine perspektivische Verbesserung der Methode kann durch die genauere Bestimmung der Twist-2 und Twist-3 Parameter erreicht werden. Vor allem aber ermöglicht die Einbeziehung von Beiträgen nächsthöherer Ordnung die Reduzierung der dominierenden Skalenunsicherheit  $\Delta\mu$ .

Zu beachten ist in diesem Kontext, dass die ebenfalls mit signifikanter Größe eingehenden Unsicherheiten der Zerfallskonstanten direkt mit  $\Delta\mu$  und  $\Delta m_Q$ , aber auch mit

Einzelunsicherheit	$g'_{D^*D\pi}$	$g_{D^{*'}D'\pi}$	Einzelunsicherheit	$g'_{D^*D\pi}$	$g_{D^{*'}D'\pi}$
$\Delta m_Q$	+0.1 -0.1	+1.0 -0.8	$\Delta f_D$	+1.5 -1.3	+2.5 -2.7
$\Delta \mu$	+2.8 -0.7	+1.1 -4.4	$\Delta f_{D^*}$	+1.1 -1.8	+3.5 -2.1
$\Delta a_2$	+0.7 -0.7	+0.9 -0.9	$\Delta f_{D'}$	+0.3 -0.8	+2.7 -0.9
$\Delta a_4$	+1.0 -1.0	+1.2 -1.2	$\Delta f_{D^{*'}}$	+0.2 -0.6	+2.5 -0.9
$\Delta \mu_\pi$	+1.7 -1.7	+2.7 -2.7	$\Delta m_{D'}$	< 0.1	< 0.1
$\Delta f_{3\pi}$	+0.7 -0.7	+1.0 -1.0	$\Delta m_{D^{*'}}$	< 0.1	< 0.1
$\Delta \omega_{3\pi}$	< 0.1	< 0.1	$\Delta \Gamma_{D'}$	+0.1 -0.1	+0.2 -0.2
$\Delta \delta_\pi^2$	+0.2 -0.2	+0.3 -0.3	$\Delta \Gamma_{D^{*'}}$	< 0.1	+0.1 -0.1
$\Delta \epsilon_\pi$	< 0.1	< 0.1	$\Delta s'_0$	+0.7 -0.4	+1.5 -2.7
$\Delta g_{D^*D\pi}^{\text{Exp}}$	+0.3 -0.3	+0.5 -0.5			

Tabelle 5.4.: Ergebnisse und Unsicherheiten für  $g'_{H^*H\pi}$  und  $g_{H^{*'}H'\pi}$ .

den hadronischen Größen  $\Delta m_{D^{(*)}'}$  und  $\Delta \Gamma_{D^{(*)}'}$ , korreliert sind. Somit führt diese naive Abschätzung zu erhöhten Unsicherheitsintervallen.

Weitere mögliche Untersuchungsaspekte sind der Ausschluss der starken Kopplung  $g_{H^*H\pi}$  aus der Summenregel, konzeptionell analog zu Gleichung (4.7). Dies bietet einen weiteren Zugriff auf die systematische Unsicherheit der Methode. Darüber hinaus ermöglicht die potentielle Senkung der Unsicherheitsfaktoren in der Methode die Behandlung von  $g_{H^*H\pi}$  als zusätzlichen Anpassungsparameter. Dadurch ergibt sich sowohl eine weitere Prüfgelegenheit für die Ergebnisse aus Kapitel 5.3.2 als auch die Möglichkeit zur Abschätzung von  $g'_{B^*B\pi}$  und  $g_{B^{*'}B'\pi}$ . Einige dieser Aspekte werden in [86] aufgegriffen.

Zum Abschluss dieser Auswertung wird die Kopplung  $g'_{D^*D\pi}$  verwendet, um die Breite für den Zerfall  $D^{*'} \rightarrow D\pi$  abzuschätzen. Dazu wird Gleichung (5.29) entsprechend modifiziert und man erhält

$$\Gamma(D^{*'} \rightarrow D^0\pi^+) = \frac{(g'_{D^*D\pi})^2}{24\pi m_{D^{*'}}^2} |\vec{p}|^3 = 31^{+31}_{-23} \text{ MeV}, \quad (5.42)$$

mit  $|\vec{p}| = 629 \text{ MeV}$ . Aufgrund der hohen Unsicherheit von  $g'_{D^*D\pi}$  lässt sich mit (5.42) die Breite nur grob abschätzen. Sie liegt von der Größenordnung her etwa im Bereich der in Tabelle 4.1 angegebenen totalen Breite von  $D^{*'}$ , ist allerdings erwartungsgemäß auch kleiner, da der untersuchte Zerfallskanal nur einen der möglichen Zerfälle darstellt.

Die Zerfälle  $D^* \rightarrow D'\pi$  und  $D^{*' \rightarrow D'\pi}$  sind mit den in dieser Arbeit verwendeten Massenabschätzungen kinematisch verboten und werden daher nicht betrachtet.

## 5.5. Diskussion der Ergebnisse

In diesem Schlussabschnitt werden die gewonnenen Ergebnisse wie in den vorherigen Kapiteln kurz zusammengefasst und diskutiert. Unter Verwendung der Resultate aus den Kapiteln 3 und 4 wurden Lichtkegelsummenregeln zur Bestimmung von starken Kopplungen untersucht. Der Hauptfokus lag dabei auf der Aktualisierung und Optimierung der LO-Beiträge, um diese für die geplante Analyse der Kopplungen unter Einbeziehung der nächstführenden Ordnung [86] bereitzustellen. Zu diesem Zweck wurden gegenüber früheren Berechnungen die Twist-3 und Twist-4 Beiträge aktualisiert und eine allgemeine Darstellung der doppelten Spektraldichte hergeleitet, auf die alle Beiträge reduziert werden können. Dies ermöglicht insgesamt eine einheitliche und kompakte Handhabung der LO Beiträge.

Die anschließende Auswertung in führender Ordnung unterstreicht, dass die Methode der Lichtkegelsummenregeln geeignet ist, um starke Kopplungen zu untersuchen. Vergleiche mit dem experimentellen Ergebnis (5.30) und aktuellen Gitter-QCD-Resultaten für den Grenzübergang schwerer Quarks (s. Tabelle 5.3) zeigen, dass die jeweiligen LO-Vorhersagen in der richtigen Größenordnung liegen. Die Kompatibilität mit dem HQL-Verhältnis 5.27 und die gelungene Konsistenzprüfung der Parameter  $a_2$  und  $a_4$  weisen ebenfalls auf die Funktionalität der Methode hin.

Die erwartungsgemäß hohen Unsicherheiten der Resultate und die ausbleibende Konsistenz mit Ergebnissen aus Gitter-QCD-Berechnungen legen jedoch nahe, dass die nächstführende Ordnung einen signifikanten Einfluss auf die verwendete Summenregel hat.

Im Anschluss an die Standardanalyse wurden in Kapitel 5.4 auch die Kopplungen mit angeregten Zuständen über eine Anpassungsprozedur berechnet. Obwohl die relative Ungenauigkeit der Eingabeparameter derzeit kein präzises Resultat ermöglicht, konnten Abschätzungen über Vorzeichen und Größenordnung der Kopplungen mit radial angeregten Zuständen durchgeführt werden. Darüber hinaus konnte in Gleichung (5.42) eine Vorhersage für  $\Gamma(D^{*+} \rightarrow D^0\pi^+)$  getroffen werden, die sich in der Größenordnung von vergleichbaren Parametern bewegt.

Eine Verbesserung der Ergebnisse kann durch die genauere Bestimmung der hadronischen Eingabeparameter erreicht werden. Hier sind vor allem die Zerfallskonstanten und die Parameter der Verteilungsamplituden für Twist-2 und Twist-3 zu nennen. Insbesondere jedoch stellen die Einbeziehung der nächstführenden Ordnung und die Untersuchung verschiedener Dualitätsansätze wichtige Schritte zur Weiterentwicklung der Resultate dar. Der Twist-2 Beitrag steht bereits zur Verfügung [83], da aber der Twist-3 Beitrag erwartungsgemäß in derselben Größenordnung liegt, sollte dieser für eine akkurate Analyse ebenfalls einbezogen werden. Der Vergleich verschiedener Dualitätsregionen ermöglicht dann einen Zugriff auf die systematische Unsicherheit der Methode während die Einbeziehung von radiativen Korrekturen die Stabilität der Summenregel erhöht.

Insgesamt ermöglicht die Analyse in führender Ordnung nicht nur eine Abschätzung von bisher in der Literatur nicht bestimmten Kopplungen mit radialen Anregungen, son-

den sie bildet durch Aktualisierung und Reorganisierung der Beiträge auch die Grundlage für eine weiterführende Analyse im Rahmen von Lichtkegelsummenregeln, die in [86] aufgenommen wird.

## 6. Zusammenfassung und Ausblick

Zielsetzung dieser Arbeit war die Berechnung verschiedener hadronischer Matrixelemente mit Hilfe von QCD-Summenregeln. Dabei sollten zum einen möglichst präzise Angaben für weitere Anwendungen im experimentellen und theoretischen Bereich bereitgestellt, zum anderen verschiedene, bisher nicht vermessene Größen zur Prüfung von Modellen abgeschätzt werden.

Im Einleitungskapitel wurden zunächst der physikalische Rahmen dieser Arbeit dargelegt und die folgenden Untersuchungen motiviert. Anschließend folgte in Kapitel 2 die Erläuterung und Einbettung der QCD-Summenregel-Technik in diesen Kontext, darauf aufbauend wurden Zweipunkt- und Lichtkegelsummenregeln für die konkreten Anwendungen dieser Arbeit hergeleitet. In Kapitel 3 wurden die Zweipunktsummenregeln benutzt, um Zerfallskonstanten für verschiedene schwere Mesonen zu ermitteln. Hier wurden zum ersten Mal Korrekturen des Quarkkondensats für vektorielle Ströme in nächstführender Ordnung einbezogen. Das Ergebnis für die einzelnen Zerfallskonstanten lautet

$$\begin{aligned}
 f_B &= 207_{-09}^{+17} [258] \text{ MeV} , & f_{B^*} &= 210_{-12}^{+10} [261] \text{ MeV} , \\
 f_{B_s} &= 242_{-12}^{+17} [285] \text{ MeV} , & f_{B_s^*} &= 251_{-16}^{+14} [296] \text{ MeV} , \\
 f_D &= 201_{-13}^{+12} [237] \text{ MeV} , & f_{D^*} &= 242_{-12}^{+20} [297] \text{ MeV} , \\
 f_{D_s} &= 238_{-23}^{+13} [266] \text{ MeV} , & f_{D_s^*} &= 293_{-14}^{+19} [347] \text{ MeV} .
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

In eckigen Klammern sind die ebenfalls ermittelten oberen Grenzen für die Zerfallskonstanten angegeben. Die Resultate sind dabei innerhalb der Unsicherheitsintervalle mit Vergleichswerten aus Gitter-QCD und Experiment konsistent (s. Tabelle 3.4). Während viele dieser Rechnungen nur auf einzelne Zerfallskanäle Bezug nehmen, bietet die vorliegende Analyse einen kompletten und methodisch konsistenten Überblick über eine ganze Reihe von schweren Mesonen und ihren hadronischen Eigenschaften.

Zusätzlich dazu wurden zur Abschätzung der systematischen Ungenauigkeit die Ergebnisse der Standard(Borel)-Summenregeln mit den Resultaten von modifizierten Summenregeln verglichen (s. Kapitel 3.3), die entsprechenden Ergebnisse konnten die Resultate (6.1) ebenfalls bestätigen. Schließlich bieten die berechneten Zerfallskonstanten die Möglichkeit, sowohl Spin- als auch Flavoursymmetrien im Grenzübergang schwerer Quarks zu untersuchen. Die entsprechenden Verhältnisse wurden in dieser Arbeit bestimmt als

$$\begin{aligned}
 f_{B^*}/f_B &= 1.02_{-0.09}^{+0.02}, & f_{B_s^*}/f_{B_s} &= 1.04_{-0.08}^{+0.01}, \\
 f_{D^*}/f_D &= 1.20_{-0.07}^{+0.13}, & f_{D_s^*}/f_{D_s} &= 1.24_{-0.05}^{+0.13},
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

und

$$\begin{aligned} f_{B_s}/f_B &= 1.17_{-0.04}^{+0.03}, & f_{B_s^*}/f_{B^*} &= 1.20_{-0.04}^{+0.04}, \\ f_{D_s}/f_D &= 1.18_{-0.05}^{+0.04}, & f_{D_s^*}/f_{D^*} &= 1.21_{-0.05}^{+0.05}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Erneut weisen die Ergebnisse innerhalb der Unsicherheiten eine gute Übereinstimmung mit den Vergleichswerten auf (s. Kapitel 3.2.2).

Die Resultate dieses Abschnittes sind in [87] veröffentlicht worden und können vielfältig eingesetzt werden, unter anderem zur Bestimmung von Formfaktoren für schwere Mesonzerfälle oder zur Bestimmung von CKM-Matrixelementen (s. Kapitel 1.5). Weitere Anwendungen sind beispielsweise in [92, 135] oder [147] zu finden, wo die Ergebnisse dieser Arbeit bereits explizit verwendet wurden.

Im darauffolgenden Kapitel 4 wurden die Ergebnisse ebenfalls eingesetzt, um die Erweiterung des Summenregelansatzes auf die erste radiale Anregung der jeweiligen Zerfallskonstanten zu untersuchen. Durch die Modifizierung der hadronischen Spektraldichte unter Einbeziehung dieser zusätzlichen Resonanz und ihrer Breite durch einen Breit-Wigner-Ansatz konnten die zugehörigen Zerfallskonstanten mit einer relativen Genauigkeit von 10-40 % extrahiert werden. Durch die erstmals in diesem Kontext verwendete Anpassungsmethode konnten darüber hinaus auch die Ergebnisse für die Grundzustandszerfallskonstanten durch eine unabhängige Prüfmöglichkeit bestätigt werden. Ebenso wurden obere Grenzen für die Zerfallskonstanten angeregter Mesonen bestimmt. Die Ergebnisse für die Anpassungsprozedur mit Grundzustand (A) und mit Ausschluss des Grundzustandes (B) für das  $D'$ -Meson weisen mit

$$f_{D'}^A = 137_{-23}^{+10} \text{ MeV}, \quad f_{D'}^B = 138_{-22}^{+10} \text{ MeV} \quad (6.4)$$

eine gute Übereinstimmung innerhalb des Unsicherheitsintervalls mit dem derzeit einzigen verfügbaren Gitter-QCD-Ergebnis [57] auf. Die Resultate zeigen außerdem, dass für die Größenrelationen zwischen Grundzustand und erster radialer Anregung gilt

$$\frac{f_{H^{(*)'}}}{f_{H^{(*)}}} \approx 0.6 - 0.8. \quad (6.5)$$

Eine Aufschlüsselung der Ergebnisse nach Beiträgen hat ergeben, dass für diesen Unterschied die nichtperturbativen Beiträge verantwortlich sind.

Insgesamt konnten mit der Anpassungsmethode auf der Basis der zuvor hergeleiteten Summenregeln konsistente Ergebnisse erzielt und so bislang nicht vermessene hadronische Matrixelemente für die Anwendung bereitgestellt werden. Die in [92] veröffentlichten Resultate dieser Analyse wurden dabei nicht nur im weiteren Verlauf dieser Arbeit, sondern auch in der Literatur (z.B. [148]) aufgegriffen.

Unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse dieser Arbeit wurde im letzten Kapitel 5 eine Analyse der starken Kopplungen  $g_{D^*D\pi}$  und  $g_{B^*B\pi}$  mit zuvor aufgestellten Lichtkegelsummenregeln durchgeführt. Die Twist-3 und Twist-4 Beiträge in führender Ordnung wurden aktualisiert und eine allgemeine Methode zur Berechnung der doppelten

---

Dispersionsrelation hergeleitet. In der anschließenden Auswertung wurden die starken Kopplungen bestimmt als

$$g_{D^*D\pi}^{\text{LO}} = 13.4_{-2.3}^{+2.0}, \quad g_{B^*B\pi}^{\text{LO}} = 21.4_{-3.2}^{+6.1}. \quad (6.6)$$

Diese Ergebnisse sind kompatibel zu bisherigeren Berechnungen in führender Ordnung [82]. Zusätzlich konnten auch erstmals die Kopplungen mit angeregten Zuständen über eine Anpassungsprozedur abgeschätzt werden (s. Kapitel 5.4). Die Ergebnisse dieser Analyse sollen perspektivisch in einer weiterführenden Untersuchung inklusive radiativer Korrekturen in [86] genutzt werden.





# A. Formelsammlung

## A.1. Wichtige Integralformeln

In diesem Abschnitt werden einige für diese Arbeit oft genutzte Integralformeln angegeben. Aus [14] stammen

$$\begin{aligned}
 I_{A_1} &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(k-q)^2 - m_1^2 + i\epsilon]^{n_1} \cdot [k^2 - m_2^2 + i\epsilon]^{n_2}} \\
 &= (-1)^{n_1+n_2} \cdot \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(n_1+n_2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} \cdot \int_0^1 dx \frac{x^{n_1-1}(1-x)^{n_2-1}}{\mathcal{D}^{n_1+n_2-\frac{D}{2}}}, \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{A_2} &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu}{[(k-q)^2 - m_1^2 + i\epsilon]^{n_1} \cdot [k^2 - m_2^2 + i\epsilon]^{n_2}} \\
 &= (-1)^{n_1+n_2} \cdot q^\mu \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(n_1+n_2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} \cdot \int_0^1 dx \frac{x^{n_1}(1-x)^{n_2-1}}{\mathcal{D}^{n_1+n_2-\frac{D}{2}}}, \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{A_3} &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu}{[(k-q)^2 - m_1^2 + i\epsilon]^{n_1} \cdot [k^2 - m_2^2 + i\epsilon]^{n_2}} \\
 &= (-1)^{n_1+n_2} \cdot \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} \cdot \left[ q^\mu q^\nu \Gamma(n_1+n_2 - \frac{D}{2}) \cdot \int_0^1 dx \frac{x^{n_1+1}(1-x)^{n_2-1}}{\mathcal{D}^{n_1+n_2-\frac{D}{2}}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{g^{\mu\nu}}{2} \Gamma\left(n_1+n_2-1 - \frac{D}{2}\right) \cdot \int_0^1 dx \frac{x^{n_1-1}(1-x)^{n_2-1}}{\mathcal{D}^{n_1+n_2-1-\frac{D}{2}}} \right], \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

mit  $\mathcal{D} = m_1^2 x + m_2^2(1-x) - q^2 x(1-x) - i\epsilon$  und  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ . Weiterhin wird die *Hypergeometrische Funktion*  $F(a, b, c, d)$  verwendet:

$$F(a, b, c, d) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-td)^{-a} dt, \quad \text{Re}(c) > \text{Re}(b) > 0. \tag{A.4}$$

## A.2. Dispersionsrelation

Die *Dispersionsrelation* ist ein für die Zwecke dieser Arbeit häufig genutztes Instrument. Mit ihrer Hilfe werden zwei Werte einer Funktion in einem analytischen Bereich miteinander verknüpft. Ist eine Funktion in einem bestimmten physikalischen Bereich bekannt, so kann sie mit Hilfe der Dispersionsrelation analytisch in eine andere Region fortgesetzt werden. Dies ist im Verlauf dieser Arbeit besonders bei der OPE-Darstellung der Korrelationsfunktionen wichtig.

Zur Erläuterung des Prinzips wird zunächst eine beliebige Funktion  $\Pi(q^2)$  betrachtet, die in einer komplexen Variablen  $q^2$  mit Ausnahme eines Schnittes auf der reellen Achse bei  $q^2 > m^2$  überall analytisch ist (s. Abb. A.1). Sie kann später mit der Korrelationsfunktion identifiziert werden, in diesem Falle entspricht  $m^2$  dann dem Massenquadrat des jeweiligen Mesons.

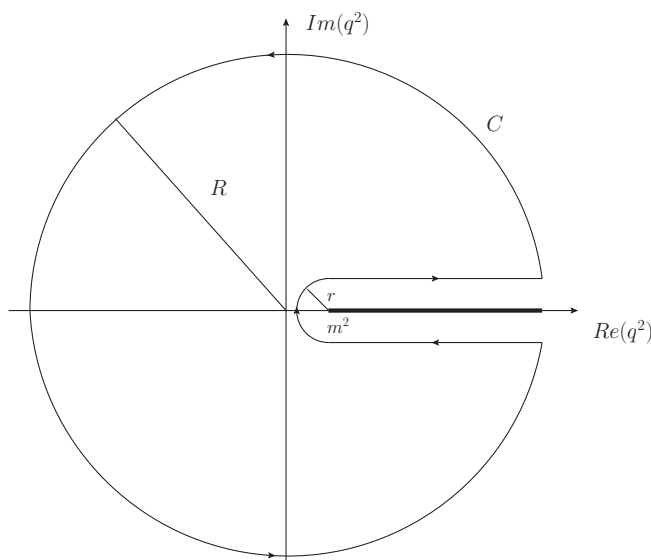


Abbildung A.1.: Integrationsweg um den Schnitt auf  $\text{Re}(q^2) > m^2$  zur analytischen Fortsetzung von  $\Pi(q^2)$ .

In einer analytischen Region ist die Anwendung des *Cauchy'schen Integralsatzes* möglich, wodurch die Korrelationsfunktion ausgedrückt werden kann als

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{\Pi(z)}{z - q^2}. \quad (\text{A.5})$$

Der hier verwendete Integrationsweg  $C$  ist in Abb. A.1 gezeigt: Er faltet sich um den nicht analytischen Schnitt auf der reellen Achse herum. Wählt man nun den Abstandsradius  $r$  zum Schnitt infinitesimal klein und den Radius des äußeren Bogens  $R$  unendlich groß, verschwinden alle Integrationsabschnitte mit Ausnahme der Konturen entlang des Schnittes. Diese sind nun infinitesimal um  $\epsilon$  verschoben, und die Korrelationsfunktion

kann in einer neuen Darstellung geschrieben werden als

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{m^2}^{\infty} ds \frac{\Pi(s+i\epsilon) - \Pi(s-i\epsilon)}{s - q^2 - i\epsilon}. \quad (\text{A.6})$$

Zur weiteren Verwendung dieser Darstellung wird das *Reflektionsprinzip von Schwarz* betrachtet: Die analytische Fortsetzung einer Funktion  $f(x)$  mit  $x, f(x) \in \mathbb{R}$  in den komplexen Raum besitzt die Eigenschaft  $f(z) = f^*(z^*)$ . Das bedeutet, für die betrachtete Funktion  $\Pi(q^2)$  gilt

$$2i \cdot \text{Im}(\Pi(q^2 + i\epsilon)) = \Pi(q^2 + i\epsilon) - \Pi(q^2 - i\epsilon). \quad (\text{A.7})$$

Eingesetzt in Gleichung (A.6) erhält man die Dispersionsrelation für eine Korrelationsfunktion  $\Pi(q^2)$ . Zu beachten ist allerdings, dass der äußere Kreisbogen für  $R \rightarrow \infty$  nur dann verschwindet, wenn die Funktion  $\Pi(q^2)$  für  $|q^2| \rightarrow \infty$  hinreichend schnell abfällt. Dies ist nicht immer der Fall, weswegen die Dispersionsrelation in der Regel noch durch Subtraktionsterme endlich gemacht werden muss. Für den Imaginärteil  $\text{Im}\Pi(s)$ , dessen Wachstum proportional zu  $s^n$  gegeben ist, wird als Subtraktionsterm ein Polynom der Ordnung  $n$  benötigt (siehe z.B. [143]). Für die spätere Anwendung wird daher die Dispersionsrelation inklusive Subtraktionstermen angegeben:

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{\pi} (q^2)^{n+1} \int_{m^2}^{\infty} \frac{\text{Im}\Pi(s)}{s - q^2} \frac{1}{s^{n+1}} ds + \left( \Pi(0) + q^2 \Pi'(0) + \dots + \frac{(q^2)^n}{n!} \Pi^{(n)}(0) \right). \quad (\text{A.8})$$

Die Subtraktionsterme sind dann von polynomialer Ordnung in  $q^2$  und können später durch verschiedene Prozeduren (z.B. *Boreltransformation*) entfernt werden.

### A.3. Herleitung der Fermionselbstenergie

In Abb. 3.7 (a) ist ein Diagramm mit Fermionselbstenergie dargestellt. In diesem Kapitel soll die Berechnung dieses Terms explizit durchgeführt werden.

Die Anwendung der Feynmanregeln führt in dimensionaler Regularisierung zu

$$\begin{aligned} \Sigma &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} i g_s \gamma^\tau T^a i \frac{\not{q} + \not{k} + m_Q}{(q+k)^2 - m_Q^2} i g_s \gamma^\sigma T^b \left( -i \frac{g_{\tau\sigma}}{k^2} \delta^{ab} \right) \\ &= -g_s^2 C_F \mu^{4-D} \left[ ((2-D)\not{q} + Dm_Q) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(q+k)^2 - m_Q^2} \right. \\ &\quad \left. + (2-D)\gamma^\delta \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2} \frac{k_\delta}{(q+k)^2 - m_Q^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

hier wurde  $T^a T^b \delta^{ab} = C_F$  und  $\not{k} = k_\mu \gamma^\mu$  genutzt. Die hier auftretenden Integrale können nun mit den in A.1 angegebenen Formeln umgeschrieben werden. Dies ergibt mit  $D =$

$4 - 2\epsilon$  und  $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \Sigma &= -i \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \mu^{2\epsilon} (4\pi)^\epsilon \left[ ((-2 + 2\epsilon)\not{q} + (4 - 2\epsilon)m_Q) \Gamma(\epsilon) \int_0^1 \frac{1}{\underbrace{(m_Q^2 x - q^2 x(1-x) - i\epsilon)^\epsilon}_{:=\mathcal{D}}} dx \right. \\ &\quad \left. - (-2 + 2\epsilon)\not{q} \Gamma(\epsilon) \int_0^1 \frac{x}{(m_Q^2 x - q^2 x(1-x) - i\epsilon)^\epsilon} dx \right] \quad (\text{A.10}) \\ &= -i \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \mu^{2\epsilon} (4\pi)^\epsilon \Gamma(\epsilon) \left[ (-2 + 2\epsilon)\not{q} \int_0^1 (1-x) \mathcal{D}^{-\epsilon} dx + m_Q (4 - 2\epsilon) \int_0^1 \mathcal{D}^{-\epsilon} dx \right]. \end{aligned}$$

Nun werden alle Funktionen in  $\epsilon$  entwickelt. Durch

$$\Gamma(\epsilon) = -\gamma_E + \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (\text{A.11})$$

tritt der divergente Anteil  $\sim 1/\epsilon$  auf. Ebenso impliziert dies, dass alle Entwicklungen in  $\epsilon$  nur bis zur ersten Ordnung geführt werden müssen, da alle höheren Ordnungen mit maximal  $1/\epsilon$  multipliziert werden und somit im Grenzübergang verschwinden. Wie die Konstante  $-\gamma_E$  wird auch der durch die Anwendung der Integralforneln auftretende Faktor  $(4\pi)^\epsilon$  durch die Redefinition des Integrationsmaßes entfernt, so dass diese hier nun nicht mehr explizit aufgeführt werden. Als einzige von  $\epsilon$  abhängige Funktionen bleiben  $\mathcal{D}^{-\epsilon} = e^{-\epsilon \ln \mathcal{D}} = 1 - \epsilon \ln \mathcal{D} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$  und  $\mu^{2\epsilon} = 1 + \epsilon \ln \mu^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ . Nach Einsetzen in (A.10) und einiger Umformung ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \Sigma &= -i \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left[ \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\mu^2}{m_Q^2} \right) (4m_Q - \not{q}) + 2m_Q - \frac{1}{2}\not{q} + \int_0^1 (4m_Q - 2\not{q}x) \right. \\ &\quad \left. \times \ln \left( \frac{1}{1-x/z} \right) dx \right]. \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

## A.4. Herleitung des Quarkpropagators im externen Gluonfeld

In diesem Abschnitt wird die Herleitung des effektiven Quarkpropagators  $S_{eff}(x,y)$  im externen Gluonfeld durchgeführt. Der theoretische Hintergrund ist z.B. in [144] zu finden.

Die Definition des Propagators für das schwere Quark  $Q$  mit Hilfe des Wick-Theorems lautet

$$S(x,y) = -i \langle 0 | T \{ Q(x) \bar{Q}(y) \} | 0 \rangle. \quad (\text{A.13})$$

Unter Verwendung der *Fock-Schwinger-Eichung*

$$x^\lambda A_\lambda^a = 0 \quad (\text{A.14})$$

lässt sich dieser Propagator bezüglich des als schwach angenommenen Vakuumfeldes  $A_\lambda^a$  in einer Reihe entwickeln:

$$\begin{aligned}
S(x,y) = & S^{(0)}(x-y) - g_s \underbrace{\int d^4\omega S^{(0)}(x-\omega) \gamma^\lambda T^a A_\lambda^a(\omega) S^{(0)}(\omega-y)}_{=S^{(1)}(x,y)} \\
& + g_s^2 \int d^4\omega' d^4\omega S^{(0)}(x-\omega') \gamma^\lambda T^a A_\lambda^a(\omega') S^{(0)}(\omega'-\omega) \gamma^\lambda T^a A_\lambda^a(\omega) S^{(0)}(\omega-y) \\
& + \dots
\end{aligned} \tag{A.15}$$

mit der Definition des freien Propagators gemäß

$$S^{(0)}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k} + m_Q}{k^2 - m_Q^2} e^{-i(x-y)k}. \tag{A.16}$$

Weiterhin lässt sich  $A_\lambda^a(\omega)$  in Abhängigkeit des Gluonfeldstärketensors  $G_{\tau\lambda}^a$  schreiben. Man erhält

$$A_\lambda^a(\omega) = \int_0^1 dt t G_{\tau\lambda}^a(t\omega) \omega^\tau. \tag{A.17}$$

Im Folgenden werden die Entwicklungen für  $S(x,y)$  und  $A_\lambda^a(\omega)$  nur bis zur ersten Ordnung betrachtet. Für die erste Korrektur  $S^{(1)}(x,y)$  des effektiven Quarkpropagators ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
S^{(1)}(x,y) = & ig_s \frac{1}{2} \int d^4\omega T^a G_{\tau\lambda}^a(0) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-\omega)} \frac{\not{k} + m_Q}{k^2 - m_Q^2} \gamma^\lambda \\
& \times \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \left( \frac{\not{k}' + m_Q}{k'^2 - m_Q^2} e^{ik'y} \right) \frac{\partial}{\partial k'^\tau} \left( e^{-ik'\omega} \right).
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Nach einigen Umformungen und Anwendung von

$$\int \frac{d^4\omega}{(2\pi)^4} e^{ik\omega - ik'\omega} = \delta^4(k - k') \tag{A.19}$$

gelangt man zu

$$\begin{aligned}
S^{(1)}(x,y) = & \frac{ig_s}{2} T^a G_{\tau\lambda}^a(0) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{\not{k} + m_Q}{k^2 - m_Q^2} \gamma^\lambda \left( \frac{\partial}{\partial k^\tau} \left( \frac{\not{k} + m_Q}{k^2 - m_Q^2} \right) \right. \\
& \left. + iy^\tau \frac{\not{k} + m_Q}{k^2 - m_Q^2} \right).
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Zur weiteren Betrachtung wird (A.20) nun nach  $y$ -Abhängigkeit sortiert. Für die Zwecke dieser Arbeit ist speziell der von  $y$  unabhängige Teil  $S'(x)$  von Interesse, da bei den

durchgeführten Rechnungen  $y = 0$  gilt. Für diesen Anteil ergibt sich

$$\begin{aligned}
S'(x) &= \frac{\not{k} + m_Q}{k^2 - m_Q^2} \gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial k^\tau} \left( \frac{\not{k} + m_Q}{k^2 - m_Q^2} \right) \\
&= \frac{\not{k} + m_Q}{k^2 - m_Q^2} \gamma^\lambda \left( -\frac{2k^\tau (\not{k} + m_Q)}{(k^2 - m_Q^2)^2} + \frac{\gamma^\tau}{k^2 - m_Q^2} \right) \\
&= \frac{1}{(k^2 - m_Q^2)^2} \left( \frac{-2\gamma^\lambda (-k^2 + m_Q^2) k^\tau}{k^2 - m_Q^2} - \frac{4k^\lambda (\not{k} + m_Q) k^\tau}{k^2 - m_Q^2} + (\not{k} + m_Q) \gamma^\lambda \gamma^\tau \right).
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Im nächsten Schritt wird eine Symmetriebetrachtung vorgenommen. Der Term  $S(x, y)$  ist insgesamt unter Vertauschung von  $\lambda$  und  $\tau$  invariant. Er enthält jedoch den antisymmetrischen Gluonfeldstärketensor  $G_{\tau\lambda}^a$ , für diesen gilt

$$G_{\tau\lambda}^a = -G_{\lambda\tau}^a. \tag{A.22}$$

Das bedeutet, der restliche Term muss auch unter Vertauschung von  $\lambda$  und  $\tau$  das Vorzeichen wechseln, damit die Symmetrie insgesamt erhalten bleibt. Daher fallen alle diesbezüglich symmetrischen Terme in Gleichung (A.21) weg. Man beachte, dass sich dort im letzten Term die Kombination von Diracmatrizen in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil zerlegen lässt:

$$\gamma^\lambda \gamma^\tau = -i\sigma^{\lambda\tau} + g^{\lambda\tau}, \tag{A.23}$$

mit dem antisymmetrischen Tensor  $\sigma^{\lambda\tau} = \frac{i}{2}[\gamma^\lambda, \gamma^\tau]$  und dem metrischen Tensor  $g^{\lambda\tau}$ . Letzterer ist symmetrisch und da dieser Anteil wie dargestellt letztendlich wegfällt, kann in der Folge  $\gamma^\lambda \gamma^\tau$  mit  $-i\sigma^{\lambda\tau}$  ersetzt werden. Mit  $\not{k}\sigma^{\lambda\tau} = k_\beta (i(g^{\beta\lambda}\gamma^\tau - g^{\beta\tau}\gamma^\lambda) + \epsilon^{\beta\lambda\tau\delta}\gamma_\delta\gamma_5)$  erhält man

$$S'(x) = -i \frac{k_\beta \epsilon^{\beta\lambda\tau\delta} \gamma_\delta \gamma_5 + m_Q \sigma^{\lambda\tau}}{(k^2 - m_Q^2)^2}. \tag{A.24}$$

Hier stellt  $\epsilon^{\beta\lambda\tau\delta}$  das total antisymmetrische Levi-Civita-Symbol dar. Nun wird der zu  $y$  proportionale Anteil  $S''(y)$  betrachtet. Dieser ergibt sich zu

$$S''(y) = i \frac{(\not{k} + m_Q) \gamma^\lambda (\not{k} + m_Q)}{(k^2 - m_Q^2)^2} = i \frac{\gamma^\lambda (m_Q^2 - k^2) + 2k^\lambda (\not{k} + m_Q)}{(k^2 - m_Q^2)^2}. \tag{A.25}$$

Schließlich gelangt man mit  $S'(x)$ ,  $S''(y)$  und Gleichung (A.20) in Kombination mit (A.15) zum Endergebnis für den gluonmodifizierten Propagator  $S_{eff}(x, y)$  als

$$\begin{aligned}
S_{eff}(x, y) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left( \frac{\not{k} + m_Q}{k^2 - m_Q^2} + \frac{g_s}{2} G_{\tau\lambda}^a(0) T^a \left( -\frac{\epsilon^{\tau\lambda\beta\delta} \gamma_\delta \gamma_5 k_\beta + m_Q \sigma^{\tau\lambda}}{(k^2 - m_Q^2)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + y^\tau \frac{(k^2 - m_Q^2) \gamma^\lambda - 2k^\lambda (\not{k} + m_Q)}{(k^2 - m_Q^2)^2} \right) \right).
\end{aligned} \tag{A.26}$$

Man beachte, dass dieser Propagator implizit noch Farbindizes  $i, j$  trägt, die hier aber zur Übersichtlichkeit nicht ausgeschrieben wurden.

# B. Zweipunktsummenregeln

## B.1. Herleitung der hadronischen Darstellung für Zweipunktsummenregeln

In diesem Abschnitt wird die hadronische Darstellung der Korrelationsfunktion für einen vektoriellen Strom explizit hergeleitet. Das Vorgehen ist für einen pseudoskalaren Strom analog, wichtige Zwischenergebnisse werden für beide Ströme angegeben.

Das Matrixelement zwischen Anfangszustand  $|i\rangle$  und einem Endzustand  $\langle f|$  ist

$$\begin{aligned} S_{fi} &:= \langle f|S|i\rangle = \langle f| \exp\left(\mathcal{T}\left\{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}} + i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{Int}}\right\}\right)|i\rangle \\ &= \delta_{fi} + i \cdot T_{fi}(2\pi)^4 \delta^4(q_f - q_i), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

mit der Einheitsmatrix  $\delta_{fi}$ , der Wechselwirkungsmatrix  $T_{fi}$  und dem *zeitgeordneten Produkt*  $\mathcal{T}$ , welches die Kausalität des Prozesses sicherstellt. Die betrachtete Lagrangedichte setzt sich aus dem QCD-Anteil  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  und den Wechselwirkungstermen  $\mathcal{L}_{\text{Int}}$  zusammen. Letzterer enthält auch die Kopplungen von externen Feldern an den korrespondierenden Strom. Betrachtet man die Kopplung des Vektorstromes  $J_\mu$  mit einem externen Feld  $A_\mu(x)$  (in diesem Beispiel mit den Quantenzahlen eines  $W$ -Bosons) gemäß  $\mathcal{L}_{\text{Int}}$ , so lässt sich die Streumatrix in Ordnungen der zugehörigen Kopplung  $\lambda$  entwickeln. Für den Übergang eines hadronischen Zustandes  $|h\rangle$  in das QCD-Vakuum erhält man für eine Entwicklung bis zur ersten Ordnung

$$S_{0h}^{(1)} := \langle 0|S^{(1)}|h\rangle = \langle 0|\left(\mathbb{1} + i\lambda \int d^4x A_\mu(x)J_\mu\right)|h\rangle. \quad (\text{B.2})$$

Dies ist in Abbildung B.1 visualisiert.

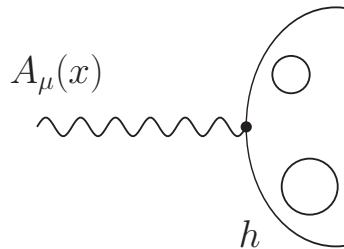


Abbildung B.1.: Visualisierung von  $S_{0h}^{(1)}$ .

Das externe Feld ist mit  $A_\mu(x) = \epsilon_\mu e^{iqx}$  durch eine ebene Welle mit dem Viererimpuls  $q^\mu$  und dem Polarisationsvektor  $\epsilon_\mu$  gegeben, dann ist

$$S_{0h}^{(1)} = i\lambda\epsilon_\mu \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | J_\mu(x) | h \rangle . \quad (\text{B.3})$$

Nach einer Translation des Stromes zum Ursprung durch  $J_\mu(x) = e^{i\hat{q}x} J_\mu(0) e^{-i\hat{q}x}$  kann nun die Integration ausgeführt werden, und dies führt zu

$$S_{0h}^{(1)} = i\lambda\epsilon_\mu \underbrace{\int d^4x e^{iqx - iq_h x}}_{=(2\pi)^4 \delta^4(q - q_h)} \langle 0 | J_\mu(0) | h \rangle . \quad (\text{B.4})$$

Mit (B.1) lässt sich nun die Wechselwirkungsmatrix  $T$  identifizieren als

$$T_{0h}^{(1)} = \lambda\epsilon_\mu \langle 0 | J_\mu(0) | h \rangle , \quad T_{h0}^{(1)} = T_{0h}^{(1)} . \quad (\text{B.5})$$

Es wird deutlich, dass die hier gemäß Definition (2.8) auftretende Zerfallskonstante die Übergangsamplitude für einen Zerfall des Hadrons in das QCD-Vakuum parametrisiert. Die Zerfallskonstante wird nun mit Hilfe des *optischen Theorems* mit der Korrelationsfunktion in Verbindung gebracht, indem die nächste Ordnung in der Entwicklung der Streumatrix betrachtet wird:

$$\begin{aligned} S_{00}^{(2)} &= -\lambda^2 \epsilon_\mu \epsilon_\nu^* \int \int d^4x d^4y e^{iqx} e^{-iq'y} \langle 0 | \mathcal{T} \{ J_\mu(x - y) J_\nu^\dagger(0) \} | 0 \rangle \\ &= -\lambda^2 \epsilon_\mu \epsilon_\nu^* \underbrace{\int d^4y e^{i(q - q')y}}_{=(2\pi)^4 \delta^4(q - q')} \underbrace{\int d^4x' e^{iqx'}}_{=-i\Pi_{\mu\nu}(q)} \langle 0 | \mathcal{T} \{ J_\mu(x') J_\nu^\dagger(0) \} | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Dieser Übergang ist in Abbildung B.2 dargestellt.

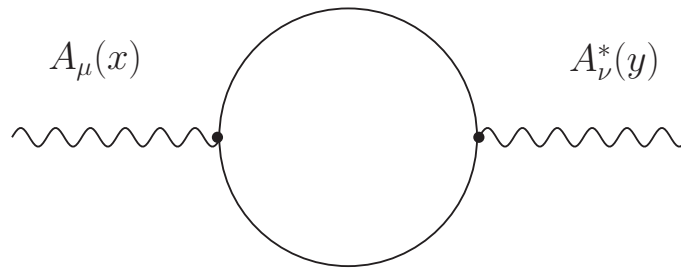


Abbildung B.2.: Visualisierung von  $S_{00}^{(2)}$ .

Daraus folgt für die zweite Entwicklungsordnung der Wechselwirkungsmatrix gemäß (B.1)

$$T_{00}^{(2)} = \lambda^2 \epsilon_\mu \epsilon_\nu^* \Pi_{\mu\nu}^{\text{had}}(q) . \quad (\text{B.7})$$



Die Anwendung des optischen Theorems verknüpft nun die Terme  $T_{00}^{(2)}$  und  $T_{0h}^{(1)}$  zu

$$\text{Im}T_{00}^{(2)} = \sum_h |T_{0h}^{(1)}|^2 d\tau_h, \quad (\text{B.8})$$

wobei  $d\tau_h$  den zur Verfügung stehenden Phasenraum bezeichnet. Für ein Ein-Teilchen-System ist er mit

$$d\tau_h = \frac{d^3q_h}{(2\pi)^3 2E_h} (2\pi)^4 \delta(q_h - q) \quad (\text{B.9})$$

gegeben [7]. Man beachte, dass über alle erlaubten hadronischen Zwischenzustände aufsummiert werden muss. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung B.3 verdeutlicht.

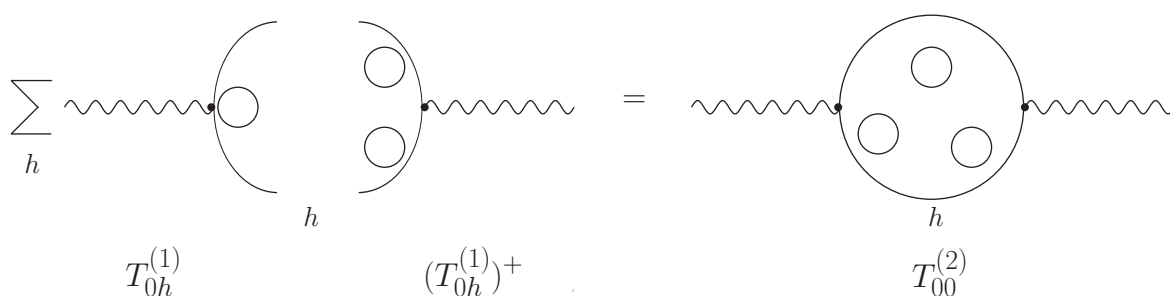


Abbildung B.3.: Verknüpfung zwischen  $T_{00}^{(2)}$  und  $T_{0h}^{(1)}$  über das optische Theorem.

Die Kombination von (B.7) und (B.5) mit (B.8) ergibt nun die Relation zwischen Korrelationsfunktion und Zerfallskonstante:

$$\text{Im}\Pi_{\mu\nu}^{\text{had}}(q) = \overline{\sum}_h \langle 0|J_\mu|h\rangle \langle h|J_\nu|0\rangle d\tau_h. \quad (\text{B.10})$$

## B.2. OPE-Terme für Standardsummenregeln schwerer Mesonen

In diesem Abschnitt wird die konkrete Berechnung der nichtperturbativen Wilsonkoeffizienten zur Herleitung von  $\Pi^{\text{OPE}}(q^2)$  durchgeführt.

### B.2.1. Herleitung des Quarkkondensats in führender Ordnung

Zur Berechnung des Wilsonkoeffizienten für das Quarkkondensat in führender Ordnung wird zunächst die Korrelationsfunktion für die korrespondierenden Ströme betrachtet und das Wick-Theorem benutzt, um die Quarkfelder im zeitgeordneten Produkt zu kontrahieren. Zu beachten ist dabei, dass die leichten Quarkfelder  $\bar{q}(x), q(0)$  unterschiedliche  $x$ -Koordinaten besitzen. Aus diesem Grund muss das leichte Quarkfeld zunächst um  $x = 0$  entwickelt werden (s. Kapitel 2.2.3):

$$\bar{q}(x) = \bar{q}(0) + x^\mu \bar{q}(x) \overleftarrow{\partial}_\mu \Big|_{x=0} + \frac{1}{2} x^\mu x^\nu \bar{q}(x) \overleftarrow{\partial}_\mu \overleftarrow{\partial}_\nu \Big|_{x=0} + \dots \quad (\text{B.11})$$

Für das Quarkkondensat sind nur die ersten beiden Terme von Bedeutung, denn nur diese führen zu einer Struktur  $\sim \langle \bar{q}q \rangle$ . Der quadratische Term dieser Entwicklung führt zu einem Beitrag der Dimension  $D = 5$  und wird in Abschnitt B.2.3 betrachtet. Unter Zuhilfenahme der Diracgleichung ergibt sich nun

$$\bar{q}(x) (i \overleftarrow{\partial}_\mu \gamma_\mu + m_q) = 0 \Leftrightarrow \bar{q}(x) \overleftarrow{\partial}_\mu = \frac{i}{4} m_q \bar{q}(x) \gamma_\mu. \quad (\text{B.12})$$

Dies führt eingesetzt in die Korrelationsfunktion (2.5) zu

$$\begin{aligned} \Pi^{(\bar{q}q)}(q^2) &= i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | \mathcal{T} \{ (\bar{q}(0) + x^\mu \frac{i}{4} m_q \bar{q}(x) \gamma_\mu) \Gamma^a Q(x) \bar{Q}(0) \Gamma^b q(0) \} | 0 \rangle \\ &= i \underbrace{\int d^4x e^{iqx} \langle 0 | \mathcal{T} \{ \bar{q}(0) \Gamma^a Q(x) \bar{Q}(0) \Gamma^b q(0) \} | 0 \rangle}_{:= \Pi_{m_Q}^{(\bar{q}q)}(q^2)} \\ &\quad - \frac{1}{4} m_q \underbrace{\int d^4x e^{iqx} \langle 0 | \mathcal{T} \{ x^\mu \bar{q}(0) \gamma_\mu \Gamma^a Q(x) \bar{Q}(0) \Gamma^b q(0) \} | 0 \rangle}_{:= \Pi_{m_q}^{(\bar{q}q)}(q^2)}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Die Korrelationsfunktion gliedert sich nun in zwei Anteile. Einen solchen, der nur von der Masse des schweren Quarkfeldes abhängt und mit  $\Pi_{m_Q}^{(\bar{q}q)}(q^2)$  bezeichnet wird, und einen Term  $\Pi_{m_q}^{(\bar{q}q)}(q^2)$ , in den auch die Masse des leichten Quarkfeldes eingeht. Im chiralen Limit verschwindet dieser Term.

Nun wird die Integration über den Parameter  $x$  ausgeführt. Hier ist anzumerken, dass der Propagator nun in seiner Ortsdarstellung verwendet werden muss. Diese lautet

$$S_0^{ij}(x, m) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \frac{(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} \delta^{ij}. \quad (\text{B.14})$$

Nun wird unter Ausnutzung von

$$\int d^4x e^{iqx} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} = \int d^4k \delta(q-k) \quad (\text{B.15})$$

die Integration ausgeführt, welche hier effektiv dem propagierenden Quark den externen Impuls  $q^\mu$  zuweist. Betrachtet man nun zunächst  $\Pi_{m_Q}^{(\bar{q}q)}(q^2)$ , liefert eine Kontraktion des propagierenden Quarks per Wick-Theorem innerhalb des zeitgeordneten Produktes eine Struktur der Form

$$M^{a,b} = \bar{q}(0) \underbrace{\Gamma^a S_0^{ij}(\not{q}, m_Q) \Gamma^b}_{A^{ab}} q(0) = \bar{q}(0) \Gamma^a i \frac{\not{q} + m_Q}{q^2 - m_Q^2} \delta^{ij} \Gamma^b q(0). \quad (\text{B.16})$$

Mit Eigenschaften der Dirac-Matrizen unter Spurbildung gelangt man zu

$$\text{Tr}(A^{ab}) = -i \frac{m_Q}{m_Q^2 - q^2} \cdot \text{Tr}(\Gamma^a \Gamma^b). \quad (\text{B.17})$$

Indem für  $\Gamma^{a,b}$  nun die der Parität des betrachteten Stromes entsprechenden Diracstrukturen eingesetzt werden ( $\Gamma^{a,b} = i\gamma^5$  für  $J^P = O^-$  und  $\Gamma^{a,b} = \gamma^{\mu,\nu}$  für  $J^P = 1^-$ ), erhält man das Ergebnis für diesen Teil der Korrelationsfunktion:

$$\begin{aligned} \Pi_{m_Q, \mu\nu}^{(\bar{q}q)}(q^2) &= \frac{m_Q}{m_Q^2 - q^2} g^{\mu\nu} \langle \bar{q}q \rangle, \\ \Pi_{m_Q, 5}^{(\bar{q}q)}(q^2) &= -\frac{m_Q}{m_Q^2 - q^2} \langle \bar{q}q \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Die Berechnung der leichten Massenkorrekturen erfordert einige zusätzliche Rechenschritte. Zunächst wird genutzt, dass gilt  $x^\mu e^{iqx} = -i \frac{\partial}{\partial q^\mu} e^{iqx}$ , und nach Integration über  $x$  und Mittelung über Lorentz- und Farbindizes erhält man

$$\Pi_{m_q}^{(\bar{q}q)}(q^2) = \frac{1}{16} m_q \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{1}{m_Q^2 - q^2} \text{Tr}(\gamma_\mu \Gamma^a (\not{q} + m_Q) \Gamma^b) \langle \bar{q}q \rangle. \quad (\text{B.19})$$

Das Einsetzen der gewünschten Diracstrukturen für  $\Gamma^{a,b}$  liefert schließlich das Endergebnis für die leichte Massenkorrektur:

$$\begin{aligned} \Pi_{m_q, \mu\nu}^{(\bar{q}q)}(q^2) &= \frac{1}{m_Q^2 - q^2} \left( -\frac{1}{2} \frac{m_q m_Q^2}{m_Q^2 - q^2} g^{\mu\nu} + m_q \frac{q^\mu q^\nu}{m_Q^2 - q^2} \right) \langle \bar{q}q \rangle, \\ \Pi_{m_q, 5}^{(\bar{q}q)}(q^2) &= \frac{m_Q}{m_Q^2 - q^2} \left( \frac{m_q}{2m_Q} + \frac{m_q m_Q}{2(m_Q^2 - q^2)} \right) \langle \bar{q}q \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Jetzt werden die Gleichungen (B.18) und (B.20) zum Gesamtergebnis für die führende Ordnung des Quarkkondensats kombiniert. Infolge der Definition der Zerfallskonstanten als Matrixelement eines pseudoskalarer Stromes wird das Ergebnis mit einem zusätzlichen Faktor von  $(m_q + m_Q)^2$  modifiziert (s. Kapitel 2.2.1). Man erhält nach Boreltransformation:

$$\begin{aligned} \Pi_T^{(\bar{q}q), LO}(M^2) &= -m_Q \langle \bar{q}q \rangle e^{-\frac{m_Q^2}{M^2}} \left( 1 - \frac{m_q m_Q}{2M^2} \right), \\ \Pi_5^{(\bar{q}q), LO}(M^2) &= -(m_Q + m_q)^2 m_Q \langle \bar{q}q \rangle e^{-\frac{m_Q^2}{M^2}} \left( 1 - \frac{m_q}{2m_Q} - \frac{m_q m_Q}{2M^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

### B.2.2. Herleitung des Gluonkondensats

Den Ausgangspunkt für die Berechnung dieses Beitrages bilden die Korrelationsfunktion (2.5) sowie die Diagramme aus Abb. 3.4. Für die Kontraktion der Felder muss nun auf die Definition des gluonmodifizierten Propagators zurück gegriffen werden (s. Kapitel A.4):

$$S^{(1)}(k, m) = \frac{i}{2} g_s G_{\mu\nu} \frac{m\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\mu\gamma^\nu \not{k} + 2k^\mu\gamma^\nu}{(m^2 - k^2)^2}. \quad (\text{B.22})$$

Schreibt man die Korrelationsfunktion mit diesem Propagator, erhält man nach Mitteilung für das linke Diagramm aus Abb. 3.4 zunächst

$$\begin{aligned} \Pi_1^{(GG)}(q^2) &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-1) \langle 0 | \text{Tr} \left( \Gamma^c \frac{1}{i} S^{(1)}(k, m_Q) \Gamma^d \frac{1}{i} S^{(1)}(k - q, 0) \right) | 0 \rangle, \\ &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \langle 0 | \text{Tr} \left( \Gamma^c S_{(1)}(k, m_Q) \Gamma^d S_{(1)}(k - q, 0) \right) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Das zusätzliche Vorzeichen ergibt sich aus den Feynmanregeln für eine geschlossene Fermionschleife, die Farbindices wurden nicht explizit ausgeschrieben, da im nächsten Schritt die Spur gebildet wird. Explizites Einsetzen von (B.22) in (B.23) führt zu

$$\begin{aligned} \Pi_1^{(GG)}(q^2) &= -\frac{i}{4} g_s^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(m_Q^2 - k^2)^2 (k - q)^4} \langle 0 | \text{Tr} \left( \Gamma^c G_{\mu\nu} (m_Q \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\mu\gamma^\nu \not{k} + 2k^\mu\gamma^\nu) \Gamma^d \right. \\ &\quad \left. \cdot G_{\mu'\nu'} (\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'} (\not{k} - \not{q}) + 2(k - q)^{\mu'}\gamma^{\nu'}) \right) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Durch die Spurbildung über die Feldstärketensoren tritt das Gluonkondensat über die Relation

$$\langle 0 | \text{Tr} (G_{\mu\nu} G_{\mu'\nu'}) | 0 \rangle = T^a T^b \delta^{ab} \frac{1}{8 \cdot 12} \langle G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \rangle (g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} - g_{\mu\nu'} g_{\nu\mu'}) \quad (\text{B.25})$$

auf. Der Vorfaktor  $1/8 \cdot 12$  ergibt sich aus  $N_C - 1 = 8$  für die  $SU_C(3)$  und  $D(D - 1) = 12$  in vier Dimensionen. Daraus erhält man für das linke Diagramm aus Abb. 3.4 insgesamt

$$\begin{aligned} \Pi_1^{(GG)}(q^2) &= -\frac{i}{96} g_s^2 \langle G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \rangle \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(m_Q^2 - k^2)^2 (k - q)^4} \\ &\quad \times \text{Tr} \left( \Gamma^c (m_Q \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\mu\gamma^\nu \not{k} + 2k^\mu\gamma^\nu) \Gamma^d (\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'} (\not{k} - \not{q}) + 2(k - q)^{\mu'}\gamma^{\nu'}) \right) \\ &\quad \times (g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} - g_{\mu\nu'} g_{\nu\mu'}). \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Für den doppelt gluonmodifizierten Beitrag  $\Pi_2^{(GG)}(q^2)$  (rechtes Diagramm Abb. 3.4) wird das selbe Verfahren genutzt. Das bedeutet

$$\Pi_2^{(GG)}(q^2) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \langle 0 | \text{Tr} \left( \Gamma^c S^{(2)}(k, m_Q) \Gamma^d S^{(0)}(k - q, 0) \right) | 0 \rangle. \quad (\text{B.27})$$

Der doppelt gluonmodifizierte Propagator ist nun definiert als

$$S^{(2)}(k, m) = -\frac{m}{4} \langle G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \rangle g_s^2 \frac{m \not{k} + k^2}{(m^2 - k^2)^4}, \quad (\text{B.28})$$

und somit erhält man durch Einsetzen von (B.22) und (B.28) in (B.27) sofort

$$\begin{aligned} \Pi_2^{(GG)}(q^2) &= \frac{i}{4} g_s^2 m_Q \langle G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \rangle \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(m_Q^2 - k^2)^4 (k - q)^2} \\ &\quad \times \text{Tr} \left( \Gamma^c (m_Q \not{k} + k^2) \Gamma^d (\not{k} - \not{q}) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Unter Verwendung von (B.26) und (B.29) wird nun das Endergebnis für  $\Pi^{(GG)}(q^2) = \Pi_1^{(GG)}(q^2) + \Pi_2^{(GG)}(q^2)$  angegeben. Dazu muss  $\Gamma^{c,d}$  für die entsprechende Parität ersetzt werden, und dies führt nach Boreltransformation und Anwendung der Standardintegralformeln A.1 zu

$$\begin{aligned} \Pi_T^{(GG)}(M^2) &= -\frac{1}{12} \langle GG \rangle e^{-\frac{m_Q^2}{M^2}}, \\ \Pi_5^{(GG)}(M^2) &= \frac{1}{12} m_Q^2 \langle GG \rangle e^{-\frac{m_Q^2}{M^2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

### B.2.3. Herleitung des Quark-Gluon-Kondensats

Die zu diesem Beitrag korrespondierenden Diagramme sind in 3.5 dargestellt. Zunächst wird der in Abschnitt 3.1.2 definierte Beitrag  $\Pi^{(\bar{q}Gq), (1)}$  betrachtet. Dazu wird die Korrelationsfunktion herangezogen:

$$\Pi^{ab}(q^2) = i \int d^4 x e^{iqx} \langle 0 | \mathcal{T} \{ \bar{q}(x) \Gamma^a Q(x) \bar{Q}(0) \Gamma^b q(0) \} | 0 \rangle. \quad (\text{B.31})$$

Bei der Kontraktion der schweren Quarkfelder muss diesmal eine Gluonwechselwirkung einbezogen werden. Dies geschieht unter Verwendung des effektiven gluonmodifizierten Propagators  $S_{eff}^{ij} = S_{eff}^{ij}$ , welcher bereits bei der Herleitung des Gluonkondensats verwendet wurde. Schreibt man Gleichung (B.22) um, erhält man inklusive des freien Propagators

$$\begin{aligned} S_{eff}^{ij}(x, 0) &= i \underbrace{\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \cdot \left[ \frac{(\not{k} + m_Q) \delta^{ij}}{k^2 - m_Q^2} + \left( \frac{g_s}{2} \right) G_{\tau\lambda}^a(0) (T^a)^{ij} \right]}_{S_0} \\ &\quad \times \left( \frac{\epsilon^{\beta\lambda\tau\delta} \gamma_\delta \gamma_5 k_\beta + m_Q \sigma^{\lambda\tau}}{(k^2 - m_Q^2)^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Nach Anwendung des Wick-Theorems auf (B.31) und Einsetzen von (A.26) erhält man

$$\begin{aligned} \Pi^{(\bar{q}Gq), (1)} &= - \int d^4 x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{i(q-k)x} \\ &\quad \langle 0 | \bar{q} \Gamma^a \frac{g_s}{2} G_{\tau\lambda}^c(0) T^c \left[ \frac{\epsilon^{\beta\lambda\tau\delta} \gamma_\delta \gamma_5 k_\beta + m_Q \sigma^{\lambda\tau}}{(k^2 - m_Q^2)^2} \right] \Gamma^b q | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Alle Quarkfelder befinden sich hier am Ort  $x = 0$ , außerdem wurde der Anteil des freien Propagators in (A.26) hier nicht betrachtet, da dieser nur einem Beitrag für das Quark-kondensat entspricht. Jetzt kann das gewünschte Matrixelement unter Zuhilfenahme von (3.7) isoliert werden. Dazu ergibt sich mit

$$\langle 0 | \bar{q}_\alpha g_s G_{\tau\lambda}^a(0) T^a q_\beta | 0 \rangle = \frac{1}{48} \langle \bar{q} G q \rangle \cdot (\sigma_{\tau\lambda})_{\beta\alpha} \quad (\text{B.34})$$

schließlich

$$\begin{aligned} \Pi^{(\bar{q}Gq),(1)} = & -\frac{1}{96} \int d^4k \delta^4(q-k) \frac{1}{(k^2 - m_Q^2)^2} \cdot \text{Tr} \left[ \sigma_{\tau\lambda} \Gamma^a (\epsilon^{\tau\lambda\delta\beta} \gamma_\delta \gamma_5 k_\beta - m_Q \sigma^{\tau\lambda}) \Gamma^b \right] \\ & \cdot \langle \bar{q} G q \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Im letzten Schritt wurde erneut  $\int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{i(q-k)x} = \delta^4(q-k)$  genutzt.

Die Berechnung von  $\Pi^{(\bar{q}Gq),(2)}$  verläuft dazu im Prinzip analog, allerdings ergibt sich das entsprechende Matrixelement hier auf einem anderen Wege. Wie bereits erwähnt, stammt dieser Beitrag aus dem zweiten Term der lokalen Entwicklung des Quarkfeldes (B.11). Dort treten auch die partiellen Ableitungen  $\overleftarrow{\partial}_\mu$  und  $\overleftarrow{\partial}_\nu$  auf, welche durch die kovariante Ableitung  $D_\mu = \partial_\mu - ig_s T^a A_\mu^a$  ersetzt werden, um die Eichinvarianz zu gewährleisten. Die Bewegungsgleichungen der QCD führen dann zu

$$\langle 0 | \bar{q}_\alpha^i \overleftarrow{D}_\mu \overleftarrow{D}_\nu q_\beta^j | 0 \rangle = \delta^{ij} \left( \frac{1}{96} g_{\mu\nu} \delta_{\beta\alpha} - \frac{i}{288} (\sigma_{\mu\nu})_{\beta\alpha} \right) \langle \bar{q} G q \rangle. \quad (\text{B.36})$$

Hier ergibt sich also ein Matrixelement mit der Dimensionalität  $D = 5$ , obwohl kein externes Gluon explizit in der Konstruktion des Propagators auftritt. Um das Matrixelement aus (B.36) zu erhalten, muss die Entwicklung (B.11) in die Korrelationsfunktion (B.31) eingesetzt werden. Dies führt nach Übergang in den Impulsraum mittels  $x^\tau x^\lambda \rightarrow \left( -i \frac{\partial}{\partial q_\tau} \right) \left( -i \frac{\partial}{\partial q_\lambda} \right)$  zu

$$\begin{aligned} \Pi^{(\bar{q}Gq),(2)} = & - \left( -i \frac{\partial}{\partial q_\tau} \right) \left( -i \frac{\partial}{\partial q_\lambda} \right) \int d^4k \delta^4(q-k) \frac{1}{2} \delta^{ik} \langle 0 | \bar{q}_\alpha \overleftarrow{D}_\tau \overleftarrow{D}_\lambda q_\beta | 0 \rangle \\ & \cdot \left[ \Gamma^b \frac{\not{k} + m_Q}{k^2 - m_Q^2} \Gamma^b \right]_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Jetzt müssen für  $\Gamma^{a,b}$  die korrespondierenden Ströme eingesetzt werden. Mit der Reparametrisierung  $\langle \bar{q} G q \rangle := m_0^2 \langle \bar{q} q \rangle$  erhält man als Endergebnis für  $\Pi^{(\bar{q}Gq)} = \Pi^{(\bar{q}Gq),(1)} + \Pi^{(\bar{q}Gq),(2)}$  nach Boreltransformation

$$\begin{aligned} \Pi_T^{(\bar{q}Gq)}(M^2) &= m_0^2 \langle \bar{q} q \rangle \frac{m_Q^3}{4M^2} e^{-\frac{m_Q^2}{M^2}}, \\ \Pi_5^{(\bar{q}Gq)}(M^2) &= -m_0^2 \langle \bar{q} q \rangle \frac{m_Q^3}{2M^2} \left( 1 - \frac{m_Q^2}{2M^2} \right) e^{-\frac{m_Q^2}{M^2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

### B.2.4. Herleitung des 4-Quark-Kondensats

Auch für die Berechnung dieses Beitrages bildet die Korrelationsfunktion (2.5) in Kombination mit dem Wick-Theorem die Grundlage. Um einen Beitrag der Dimension  $D = 6$  zu erhalten, muss die lokale Entwicklung des Quarkfeldes betrachtet werden. Zu diesem Zweck wird die Entwicklung in Form einer Translation geschrieben. In der bereits eingeführten Fock-Schwinger-Eichung (A.14) bedeutet dies  $\bar{q}(x) \rightarrow \bar{q}(0)e^{-i\overleftarrow{p}_\mu x_\mu}$ . Das Einsetzen in (2.5) liefert nach Kontraktion der schweren Quarkfelder

$$\begin{aligned}\Pi^{(4q)} &= - \int d^4k \delta(q - \overleftarrow{p}_\mu - k) \langle 0 | \mathcal{T} \{ \bar{q}(0) e^{-i\overleftarrow{p}_\mu x_\mu} \Gamma^a \frac{\not{k} + m_Q}{k^2 - m_Q^2} \Gamma^b q(0) \} | 0 \rangle \\ &= - \langle 0 | \bar{q}(0) \Gamma^a \frac{(\not{q} - \overleftarrow{\not{p}}_\mu) + m_Q}{(q - \overleftarrow{p}_\mu)^2 - m_Q^2} \Gamma^b q(0) | 0 \rangle .\end{aligned}\quad (\text{B.39})$$

Mittels geometrischer Reihe wird dieser Ausdruck entwickelt, wodurch auch ein Term mit der Dimensionalität  $D = 6$  auftritt:

$$\Pi^{(4q)} = - \langle 0 | \bar{q} \left( \Gamma^a \frac{m_Q + \not{q}}{m_Q^2 - q^2} \not{p} \frac{m_Q + \not{q}}{m_Q^2 - q^2} \not{p} \frac{m_Q + \not{q}}{m_Q^2 - q^2} \not{p} \frac{m_Q + \not{q}}{m_Q^2 - q^2} \Gamma^b \right) q | 0 \rangle . \quad (\text{B.40})$$

Alle Felder befinden sich nun am Ursprung, und die Ortsabhängigkeit wird nicht mehr explizit ausgeschrieben. Im Prinzip kann (B.40) analog zu den in den vorherigen Kapiteln genannten Techniken berechnet werden. In diesem Falle bietet es sich allerdings an, eine andere Methode zu wählen. Es gibt zwei Operatoren, welche auf  $\langle \bar{q}q \rangle^2$  reduzierbar sind:

$$O_1 = \gamma_\mu p_\alpha p_\beta p_\gamma , \quad O_2 = \gamma_\mu \gamma_5 p_\alpha p_\beta p_\gamma . \quad (\text{B.41})$$

Alle weiteren Beiträge verschwinden oder sind auf diese Operatoren zurückführbar. Nun stellt man (B.40) in seiner puren Operatorstruktur dar:

$$\Pi^{(4q)} = - \frac{p_\alpha p_\beta p_\gamma}{(m_Q^2 - q^2)^4} \langle 0 | \bar{q} \underbrace{\left( \Gamma^a (m_Q + \not{q}) \gamma^\alpha (m_Q + \not{q}) \gamma^\beta (m_Q + \not{q}) \gamma^\gamma (m_Q + \not{q}) \Gamma^b \right)}_{:= F^{\alpha\beta\gamma, ab}} q | 0 \rangle . \quad (\text{B.42})$$

Um die Beiträge proportional zu den Operatoren in (B.41) zu isolieren, muss die Struktur  $F^{\alpha\beta\gamma, ab}$  bezüglich der Diracbasis entwickelt werden:

$$F^{\alpha\beta\gamma} = a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \gamma^\nu + c \cdot \gamma^5 + d \cdot \gamma^\delta \gamma^5 + \dots , \quad a, b, c, d \dots \in \mathbb{R} . \quad (\text{B.43})$$

Im vorliegenden Fall sind die Koeffizienten  $b$  für  $\langle \bar{q} \gamma_\mu p_\alpha p_\beta p_\gamma q \rangle$  und  $d$  für  $\langle \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 p_\alpha p_\beta p_\gamma q \rangle$  zu bestimmen. Dies geschieht durch Kontraktion mit der entsprechenden Struktur, und es folgt

$$\begin{aligned}b &= \frac{1}{4} \text{Tr}(F^{\alpha\beta\gamma, ab} \cdot \gamma^\mu) , \\ d &= \frac{1}{4} \text{Tr}(F^{\alpha\beta\gamma, ab} \cdot \gamma^\mu \gamma^5) .\end{aligned}\quad (\text{B.44})$$

Im letzten Schritt müssen jetzt die 6-dimensionalen Operatoren (B.41) mit  $\langle \bar{q}q \rangle^2$  in Verbindung gebracht werden. Dazu werden diese Operatoren zunächst in ihrer allgemeinen Struktur entwickelt:

$$\begin{aligned} \langle \bar{q} \gamma_\mu p_\alpha p_\beta p_\gamma q \rangle &= g_{\mu\alpha} g_{\beta\gamma} \cdot A + g_{\mu\beta} g_{\alpha\gamma} \cdot B + g_{\mu\gamma} g_{\alpha\beta} \cdot C, \\ \langle \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 p_\alpha p_\beta p_\gamma q \rangle &= \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \cdot D, \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

mit den Koeffizienten  $A, B, C, D$  und dem vollständig antisymmetrischen Tensor  $\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}$ . Nach einiger Rechnung gelangt man zu

$$A = -\frac{1}{72} \langle \bar{q} p_{\mu'} \not{p} p^{\mu'} q \rangle, \quad B = -5A, \quad C = A, \quad D = \frac{1}{24} \langle \bar{q} p_{\mu'} \not{p} p^{\mu'} q \rangle, \quad (\text{B.46})$$

wobei  $\gamma^5 = -\frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta$  und  $\bar{q} \not{p} = 0$  aufgrund der Vernachlässigung der leichten Masse  $m_q$  genutzt wurden. Das Matrixelement  $\langle \bar{q} p_{\mu'} \not{p} p^{\mu'} q \rangle$  wiederum ist durch die Relation (B.77) mit  $\langle \bar{q}q \rangle^2$  verknüpft. Somit ergibt sich durch Einsetzen der entsprechenden Struktur  $F^{\alpha\beta\gamma, ab}$  für das 4-Quark-Kondensat schließlich als Endergebnis nach Boreltransformation

$$\begin{aligned} \Pi_T^{(4q)}(M^2) &= -\frac{32\pi\alpha_s r_{vac} \langle \bar{q}q \rangle^2}{81M^2} \left( 1 + \frac{m_Q^2}{M^2} - \frac{m_Q^4}{8M^4} \right) e^{-\frac{m_Q^2}{M^2}}, \\ \Pi_5^{(4q)}(M^2) &= -\frac{16\pi\alpha_s r_{vac} \langle \bar{q}q \rangle^2 m_Q^2}{27M^2} \left( 1 + \frac{m_Q^2}{4M^2} - \frac{m_Q^4}{12M^4} \right) e^{-\frac{m_Q^2}{M^2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

### B.2.5. Herleitung des Quarkkondensats in nächstführender Ordnung

Vor der Herleitung des Quarkkondensats auf NLO wird zunächst eine für die spätere Regularisierungs- und Renormierungsprozedur nützliche Redefinition des Integrationsmaßes eingeführt. In allen folgenden Schritten wird stets auf die  $\overline{\text{MS}}$ -Renormierung zurückgegriffen, für weitere Informationen zur Renormierungsprozedur siehe Kapitel 1.4.2. Das auf  $D$  Dimensionen generalisierte Integrationsmaß lautet in dimensionaler Regularisierung:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \mu_{\overline{\text{MS}}}^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}, \quad (\text{B.48})$$

mit der genannten Renormierungsskala  $\mu_{\overline{\text{MS}}} =: \mu$ . Da während einer Renormierung nach  $\overline{\text{MS}}$ -Schema stets die gleichen Konstanten in einer Berechnung erscheinen, werden diese nun in Antizipation der späteren Renormierungsprozedur bereits im Integrationsmaß absorbiert. Hier wird daher zur späteren Verwendung als neues Integrationsmaß

$$\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \rightarrow \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{\Gamma(1+\epsilon)(4\pi)^\epsilon (2\pi)^D} =: \mu^{4-D} \int \frac{d^D \tilde{k}}{(2\pi)^D} \quad (\text{B.49})$$

eingeführt. Die eulersche Gammafunktion  $\Gamma(x)$  ist dabei mit  $\Gamma(x+1) = x!$  definiert.

Startpunkt der Berechnung sind die Korrelationsfunktion (2.5) und die Diagramme aus Abbildung 3.7. In Kapitel B.2.4 wurde anhand des 4-Quark-Kondensats erläutert



wie die Struktur des entsprechenden Operators durch Entwicklung in der Diracbasis und Kontraktion aus einer beliebigen Diracstruktur isoliert werden kann. Dieses Prinzip findet auch an dieser Stelle Anwendung. Um den gewünschten Beitrag zum Quarkkondensat  $\langle \bar{q}q \rangle$  aus der Korrelationsfunktion  $\Pi(q^2) \sim i\langle \bar{q}M^{ab}q \rangle$  zu isolieren, muss folglich der Anteil  $M^{ab} \sim \mathbf{1}$  gefunden werden. Gemäß einer Entwicklung wie in Gleichung (B.43) dargestellt, entspricht dies einfach einer Spurbildung. Damit ergibt sich für den gesuchten Wilsonkoeffizienten

$$C_{\alpha_s}^{\langle \bar{q}q \rangle, ab} = \frac{i}{4} \text{tr}(M^{ab}) . \quad (\text{B.50})$$

Als erstes Beispiel wird die Schleifenkorrektur der schweren Quarklinie (s. (a) in Abb.3.7) explizit berechnet. Durch Anwendung der Feynmanregeln auf das entsprechende Diagramm erhält man

$$M_S^{ab} = \Gamma^a i \frac{m_Q + \not{q}}{m_Q^2 - q^2} \Sigma(q^2, m_Q, \mu) i \frac{m_Q + \not{q}}{m_Q^2 - q^2} \Gamma^b , \quad (\text{B.51})$$

mit der *Selbstenergie*  $\Sigma := \Sigma(q^2, m_Q, \mu)$ . Die Gluonselbstenergie einer Fermionlinie mit der Masse  $m_Q$  ist eine von diesem konkreten Prozess unabhängige Größe, sie kann aus der Literatur entnommen oder explizit berechnet werden. Letzteres ist in Kapitel A.3 dargestellt. Das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned} \Sigma = & -i \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left[ \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\mu^2}{m_Q^2} \right) (4m_Q - \not{q}) + 2m_Q - \frac{1}{2} \not{q} \right. \\ & \left. + \int_0^1 (4m_Q - 2\not{q}x) \ln \left( \frac{1}{1-x/z} \right) dx \right] , \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

mit dem Parameter  $z := m_Q^2/q^2$  und dem infinitesimalen Regulator  $\epsilon > 0$ . An (B.52) wird durch den Pol  $1/\epsilon$  und der auftauchenden Renormierungsskala  $\mu$  explizit deutlich, dass für NLO-Beiträge eine Renormierung benötigt wird. Man beachte, dass in (B.52) einige typische Konstanten fehlen, welche später in der  $\overline{\text{MS}}$ -Renormierung entfernt werden (s. Kapitel 1.4.2). Der Grund dafür ist die Verwendung des neuen Integrationsmaßes (B.49) in der Herleitung der Selbstenergie. Gleichung (B.52) enthält einen endlichen Anteil  $\Sigma_F$  sowie einen divergierenden Anteil  $\Sigma_{\text{Pol}}$ . Um nun die Ergebnisse zu erhalten, muss die zum jeweiligen Strom korrespondierende Struktur für  $\Gamma^{a,b}$  eingesetzt werden, und somit ergibt sich mit den Gleichungen (B.52) und (B.50) schließlich:

$$\begin{aligned} \Pi_S^{\alpha_s, 5}(q^2) &= 2 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{m_Q^5}{(m_Q^2 - q^2)^2} \langle \bar{q}q \rangle \left[ \left( 2 + \frac{1}{z} \right) \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\mu^2}{m_Q^2} \right) + 2 \left( \frac{1}{z} + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{1}{z} - z \right) \ln \left( 1 - \frac{1}{z} \right) \right] , \\ \Pi_S^{\alpha_s, \mu\nu}(q^2) &= -2 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{m_Q^3}{(m_Q^2 - q^2)^2} \langle \bar{q}q \rangle \cdot \left[ \left( 2 + \frac{1}{z} \right) \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\mu^2}{m_Q^2} \right) + 2 \left( \frac{1}{z} + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{1}{z} - z \right) \ln \left( 1 - \frac{1}{z} \right) \right] g^{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Auch an dieser Stelle sei auf den zusätzlichen Faktor  $m_Q^2$  in  $\Pi_{S;5}^{\alpha_s}(q^2)$  hingewiesen, der aus der Definition der Ströme folgt (s. Abschnitt 2.2.1). Dieser Umstand wird für die folgenden Ergebnisse nicht mehr explizit erwähnt. Man beachte, dass hier zur Erleichterung der späteren Renormierung und der Vollständigkeit halber das komplette Ergebnis für den vektoriellen Strom angegeben wurde, obwohl in der weiteren Verwendung nur der transversale Anteil  $\sim g^{\mu\nu}$  relevant ist. Für die Selbstenergie des Propagators wird dieser Unterschied noch nicht wesentlich, da  $\Pi_S^{\alpha_s,\mu\nu}(q^2)$  vollständig proportional zu  $g^{\mu\nu}$  ist. Dies ist im Allgemeinen jedoch nicht der Fall.

Die Berechnung der weiteren NLO-Beiträge vollzieht sich analog zu diesem Beispiel. Zunächst wird die Vertexkorrektur (Abb. 3.7 (b)) betrachtet, deren Struktur sich unter Anwendung der Feynmanregeln ergibt zu

$$M_V^{ab} = \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} i g_s \gamma^\sigma T^{a'} i \frac{\not{k}}{k^2} \Gamma^{a_i} i \frac{\not{k} + \not{q} + m_Q}{(k+q)^2 - m_Q^2} i g_s \gamma^\tau T^{b'} \times (-i) \frac{g_{\sigma\tau}}{k^2} \delta^{a'b'} i \frac{\not{q} + m_Q}{q^2 - m_Q^2} \Gamma^b. \quad (\text{B.54})$$

Die Indizes  $a'$  und  $b'$  der Farbmatriizen wurden mit einem zusätzlichen Strich versehen, um Verwechslungen mit den Spinparitätsindizes  $a, b$  zu vermeiden. Nach Umordnung und Vereinfachung von (B.54) gelangt man mittels (B.50) zu

$$\Pi_V^{\alpha_s}(q^2) = -\frac{i}{4} \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{1}{m_Q^2 - q^2} \langle \bar{q}q \rangle \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^4} \frac{1}{(k+q)^2 - m_Q^2} \times \text{Tr} \left[ \gamma^\sigma \not{k} \Gamma^a (\not{k} + \not{q} + m_Q) \gamma_\sigma (\not{q} + m_Q) \Gamma^b \right]. \quad (\text{B.55})$$

Nachdem die Spuren mit

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^\sigma \not{k} \gamma^\mu (\not{k} + \not{q} + m_Q) \gamma_\sigma (\not{q} + m_Q) \gamma^\nu] &= 4m_Q (2(2-D)k^\mu k^\nu + 2kqg^{\mu\nu} - k^2 g^{\mu\nu} (2-D)), \\ \text{Tr}[\gamma^\sigma \not{k} i\gamma^5 (\not{k} + \not{q} + m_Q) \gamma_\sigma (\not{q} + m_Q) i\gamma^5] &= -4m_Q (Dk^2 + 2kq) \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

für die verschiedenen Spinparitäten ausgewertet wurden, können die auftretenden Integrale mit den Formeln aus Kapitel A.1 gelöst werden. Man erhält als Zwischenergebnis für die Vertexkorrektur:

$$\begin{aligned} \Pi_V^{\alpha_s,5}(q^2) &= -4 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{m_Q^3}{(m_Q^2 - q^2)^2} \langle \bar{q}q \rangle \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\mu^2}{m_Q^2} + 1 + \left( \frac{z}{2} - 1 \right) \ln \left( 1 - \frac{1}{z} \right) \right], \\ \Pi_V^{\alpha_s,\mu\nu}(q^2) &= \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{m_Q}{m_Q^2 - q^2} \langle \bar{q}q \rangle \cdot \left[ \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\mu^2}{m_Q^2} - \frac{1}{2} - 2 \int_0^1 dx x \ln \frac{1}{1-x/z} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \ln \frac{1}{1-1/z} \right) g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu \int_0^1 dx \frac{4x(1-x)}{m^2 - q^2 x} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

Als letzter betrachteter NLO-Beitrag wird nun das Boxdiagramm (im englischen auch als *Through*-Diagramm bezeichnet) aus Abb. 3.7 (c) berechnet. Im Gegensatz zu den bisherigen Beiträgen weist dieser ein anderes Konvergenzverhalten als die übrigen Beiträge

auf. Die Anwendung der Feynmanregeln auf Abb. 3.7 (c) liefert nämlich

$$M_B^{ab} = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} i g_s T^{a'} \gamma^\sigma i \frac{\not{k}}{k^2} \Gamma^a i \frac{\not{k} + \not{q} + m_Q}{(k+q)^2 - m_Q^2} \Gamma^b i \frac{\not{k}}{k^2} i g_s T^{b'} \gamma^\tau (-i) \frac{g_{\sigma\tau}}{k^2} \delta^{a'b'} , \quad (\text{B.58})$$

und Vereinfachung führt zum Zwischenergebnis

$$\Pi_B^{\alpha_s}(q^2) = \frac{i}{4} g_s^2 C_F m_Q D(\bar{q}q) \cdot \mu^{4-D} \int \frac{d^D \tilde{k}}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^4} \frac{1}{(k+q)^2 - m_Q^2} \cdot \text{Tr}(\Gamma^a \Gamma^b) . \quad (\text{B.59})$$

Man erkennt, dass (B.59) im Gegensatz zu den vorangegangenen NLO-Zwischenergebnissen ultraviolett (UV)-konvergent ist. Dennoch ist (B.59) als solches nicht endlich, da dieses Integral für kleine Impulse  $k \rightarrow 0$  divergiert, es ist also infrarot (IR)-divergent. Ein Vorzug in der dimensional Regularisierung liegt darin, auch diese Divergenz in Form eines  $1/\epsilon$ -Terms zu isolieren. Die gleiche Behandlung dieser Divergenzen ist nicht trivial, eigentlich ist eine Unterscheidung zwischen  $1/\epsilon_{UV}$  und  $1/\epsilon_{IR}$  notwendig, insbesondere ist  $\epsilon_{IR} < 0$ , während  $\epsilon_{UV} > 0$  gilt. In der dimensional Regularisierung unterscheidet sich das Divergenzverhalten dieser Terme jedoch im Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$  nicht wesentlich, und sie können deshalb in diesem Grenzübergang ineinander übersetzt werden. Genauer wird dies z.B. in [34] diskutiert. Es wird daher im Folgenden auf eine besondere Kennzeichnung dieser Polterme verzichtet.

Die Spur in (B.59) ist unabhängig von  $k$ , so kann das auftretende Integral also einzeln betrachtet und mit den Formeln aus Kapitel A.1 behandelt werden. Dies liefert

$$\int \frac{d^D \tilde{k}}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^4} \frac{1}{(k+q)^2 - m_Q^2 + i\epsilon} = -\frac{i}{(4\pi)^2} \cdot \int_0^1 dx \frac{1-x}{m_Q^2 x - q^2 x(1-x) - i\epsilon} . \quad (\text{B.60})$$

Dieses Integral wird mit Hilfe einer *hypergeometrischen Funktion*  $F(a, b, c, d)$  (s. Gleichung (A.4)) umgeschrieben:

$$\int_0^1 dx \frac{1-x}{(m^2 x - q^2 x(1-x) - i\epsilon)^{1+\epsilon}} = (m_Q^2 - q^2)^{-(1+\epsilon)} \frac{\Gamma(-\epsilon)\Gamma(2)}{\Gamma(2-\epsilon)} \times F\left(1+\epsilon, -\epsilon, 2-\epsilon, \frac{1}{1-z}\right) . \quad (\text{B.61})$$

Die explizite Auswertung der hypergeometrischen Funktion führt nun in Kombination mit Gleichung (B.59) nach Einsetzen der gewünschten Strukturen für  $\Gamma^{a,b}$  zum Endergebnis für den Boxbeitrag mit

$$\begin{aligned} \Pi_B^{\alpha_s,5}(q^2) &= 4 \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \frac{m_Q^3}{m_Q^2 - q^2} \langle \bar{q}q \rangle \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\mu^2}{m^2} - \frac{1}{2} - (1+z) \ln \left( 1 - \frac{1}{z} \right) \right) , \\ \Pi_{B,T}^{\alpha_s,\mu\nu}(q^2) &= -4 \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \frac{m_Q}{m_Q^2 - q^2} \langle \bar{q}q \rangle \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\mu^2}{m^2} - \frac{1}{2} - (1+z) \ln \left( 1 - \frac{1}{z} \right) \right) g^{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

Alle Ergebnisse (B.53), (B.57) und (B.62) enthalten divergente Terme, die durch die dimensionale Regularisierung in  $1/\epsilon$  isoliert sind. Um physikalisch sinnvolle Ergebnisse zu bekommen, müssen diese Divergenzen mit Hilfe eines Renormierungsschemas entfernt werden. Die Vorgehensweise zur Renormierung ist in Kapitel 1.4.2 dargelegt. Hier soll diese Prozedur anhand des Vektorstromes explizit nachvollzogen werden. Wie später deutlich wird, ist es zunächst zweckmäßig, die Polstruktur der Selbstenergie (B.53) umzuschreiben. Dazu wird die Struktur  $\Sigma$  aus (B.52) umformuliert zu

$$\Sigma = (m_Q - \not{q})\Sigma_q + m_Q\Sigma_{m_Q}, \quad (\text{B.63})$$

mit den Faktoren

$$\begin{aligned} \Sigma_q &= -i\frac{\alpha_s}{4\pi}C_F \cdot \left[ \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\mu^2}{m_Q^2} \right) + \frac{1}{2} + 2 \int_0^1 dx x \ln \frac{1}{1-x/z} \right], \\ \Sigma_m &= -i\frac{\alpha_s}{4\pi}C_F \cdot \left[ 3 \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\mu^2}{m_Q^2} \right) + \frac{3}{2} + 2 \int_0^1 dx (2-x) \ln \frac{1}{1-x/z} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.64})$$

Dies eingesetzt in die Struktur (B.51) ergibt für den divergenten Anteil

$$M_{S,\text{Pol}}^{\mu\nu} = -\langle \bar{q}\gamma^\mu \left( \Sigma_{q,\text{Pol}} \frac{1}{m_Q - \not{q}} + \frac{1}{m_Q - \not{q}} (m_Q \Sigma_{m,\text{Pol}}) \frac{1}{m_Q - \not{q}} \right) q \rangle, \quad (\text{B.65})$$

mit  $\Sigma_{q,\text{Pol}} = i\frac{\alpha_s}{4\pi}C_F\frac{1}{\epsilon}$  und  $\Sigma_{m,\text{Pol}} = 3i\frac{\alpha_s}{4\pi}C_F\frac{1}{\epsilon}$ . Aus dieser Struktur kann  $S_{\text{Pol}}^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\text{Tr}(M_{S,\text{Pol}}^{\mu\nu})$  hergeleitet werden. Die Vertex- und Boxkorrekturen bleiben unverändert, aus den Gleichungen (B.57) und (B.62) liest man nun für den Vektorstrom die divergenten Anteile ab und erhält insgesamt für die NLO-Polstruktur

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{Pol}}^{\mu\nu}(q^2) &= \frac{m_Q}{m_Q^2 - q^2} g^{\mu\nu} \left( 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{1}{\epsilon} (-1 + 2 - 4) \right) \langle \bar{q}q \rangle \\ &+ g^{\mu\nu} \langle \bar{q} \frac{1}{m_Q - \not{q}} \left( -3m_Q \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{1}{m_Q - \not{q}} q \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

Hier ist das Ergebnis in führender Ordnung miteinbezogen, weil die Pole der NLO nach Redefinition der Parameter in diesem Term absorbiert werden.

Jetzt wird das Quarkfeld und damit das Quarkkondensat redefiniert gemäß

$$\langle \bar{q}q \rangle = Z_{\bar{q}q} \langle \bar{q}q \rangle_R \quad \Leftrightarrow \quad Z_{\bar{q}q}^{-1} \langle \bar{q}q \rangle = \langle \bar{q}q \rangle_R. \quad (\text{B.67})$$

Mit Blick auf (B.66) erkennt man, dass die Wahl von

$$Z_{\bar{q}q}^{-1} = 1 - 3\frac{\alpha_s}{4\pi}C_F\frac{1}{\epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad Z_{\bar{q}q} = 1 + 3\frac{\alpha_s}{4\pi}C_F\frac{1}{\epsilon} \quad (\text{B.68})$$

unter Vernachlässigung von  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  die gewünschte Absorption leistet. Allerdings entfernt die Redefinition des Quarkfeldes auf diesem Wege nicht alle Divergenzen aus Gleichung (B.66), im zweiten Term steht dort immer noch ein Polterm. Aus der Form von (B.66)

lässt sich nun die Massenrenormierung der Form  $m_Q = Z_m m_{Q,R}$  ablesen. Ein Propagator mit renormierter Masse lässt sich entwickeln als

$$\frac{1}{m_Q(1-z_m) - \not{q}} = \frac{1}{m_Q - \not{q}} + \frac{1}{m_Q - \not{q}} m_Q z_m \frac{1}{m_Q - \not{q}} + \dots \quad (\text{B.69})$$

Dies impliziert

$$Z_m = 1 - 3 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{1}{\epsilon}, \quad (\text{B.70})$$

siehe auch Gleichung (1.32). Damit ist die Renormierung abgeschlossen, für den pseudoskalaren Fall vollzieht sie sich analog.

Nach dieser Prozedur wird das Endergebnis für das Quarkkondensat (inklusive führender Ordnung) angegeben. Nach Boreltransformation und Isolierung des transversalen Anteils für den Vektorstrom erhält man

$$\begin{aligned} \Pi_T^{(\bar{q}q)}(M^2) &= -m_Q \langle \bar{q}q \rangle e^{-\frac{m_Q^2}{M^2}} \left( 1 - \frac{m_q m_Q}{2M^2} + \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \left[ 1 - 3 \frac{m_Q^2}{M^2} \ln \frac{\mu^2}{m_Q^2} - 4 \frac{m_Q^2}{M^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{m_Q^2}{M^2} e^{\frac{m_Q^2}{M^2}} \Gamma\left(-1, \frac{m_Q^2}{M^2}\right) \right] \right), \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

$$\begin{aligned} \Pi_5^{(\bar{q}q)}(M^2) &= -(m_Q + m_q)^2 m_Q \langle \bar{q}q \rangle e^{-\frac{m_Q^2}{M^2}} \left( 1 - \frac{m_q}{2m_Q} - \frac{m_q m_Q}{2M^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \left[ \left( 3 \ln \frac{\mu^2}{m_Q^2} + 4 \right) \frac{m_Q^2}{M^2} - 7 - 3 \ln \frac{\mu^2}{m_Q^2} + 3 e^{\frac{m_Q^2}{M^2}} \Gamma\left(0, \frac{m_Q^2}{M^2}\right) \right] \right), \end{aligned}$$

mit der unvollständigen Gammafunktion  $\Gamma(a, z) = \int_z^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$ .

### B.3. Struktur des 4-Quark-Kondensats

In der Berechnung des 6-dimensionalen Beitrags der Operatorproduktentwicklung treten zwei Operatoren auf (s. Gleichung (B.41)). Beide lassen sich auf die Form  $\langle \bar{q} p_\mu \not{p} p^\mu q \rangle$  reduzieren, wobei  $p^\mu$  einen Vierimpuls darstellt und  $q := q(0)$  ein Quarkfeld. In diesem Abschnitt wird die Verknüpfung dieses Operators zu der im Weiteren verwendeten Größe  $\langle \bar{q}q \rangle^2$  erläutert. Es gilt

$$\bar{q} p_\mu \not{p} p^\mu q = \frac{1}{2} \bar{q} [p_\mu, [\not{p}, p^\mu]] q. \quad (\text{B.72})$$

Durch  $D_\mu = \partial_\mu - i g_s A_\mu$  und  $[D_\mu, D_\nu] = -i g_s F_{\mu\nu}$  mit dem antisymmetrischen Feldstärketensor  $F_{\mu\nu}^a$  erhält man

$$[p_\mu, p_\nu] = i g_s F_{\mu\nu}^a. \quad (\text{B.73})$$

Es muss beachtet werden, dass der Operator  $p_\mu = -i \partial_\mu$  hier und im Folgenden stets nach links wirkt, was durch komplexe Konjugation einen Vorzeichenwechsel in (B.73) bewirkt.

Der dies kennzeichnende Pfeil wird hier nicht explizit ausgeschrieben.

Mit dem korrespondierenden Strom  $j_\nu^a = \sum_{u,d,s} \bar{q} \gamma_\nu T^a q$  ist der Feldstärketensor verknüpft über

$$\partial_\mu F_{\nu\mu}^a = g_s j_\nu^a, \quad (\text{B.74})$$

wobei  $T^a$  die Generatoren der  $SU_C(3)$  darstellen. Aus (B.73) folgt nun

$$\begin{aligned} [p_\mu, [\not{p}, p^\mu]] &= [p_\mu, \gamma_\delta [p^\delta, p^\mu]] = i g_s [p_\mu, \gamma_\delta F^{\delta\mu}] \\ &= i g_s [p_\mu, F^{\delta\mu}] \gamma_\delta = -g_s [D_\mu, F^{\delta\mu}] \gamma_\delta = -g_s [\partial_\mu, F^{\delta\mu}] \gamma_\delta, \end{aligned}$$

und (B.74) liefert weiterhin

$$\bar{q} [p_\mu, [\not{p}, p^\mu]] q = -g_s^2 \bar{q} T^a j_\delta^a \gamma^\delta q = -g_s^2 \bar{q} T^a \gamma_\delta q \sum_{u,d,s} \bar{q} T^a \gamma_\delta q. \quad (\text{B.75})$$

So gelangt man zu der zentralen Relation

$$\langle \bar{q} p_\mu \not{p} p^\mu q \rangle = -\frac{g_s^2}{2} \langle \bar{q} T^a \gamma_\delta q \sum_{u,d,s} \bar{q} T^a \gamma_\delta q \rangle. \quad (\text{B.76})$$

Die Quarkfelder  $\bar{q}$  und  $q$  tragen implizit Lorentz- und Farbindizes, und Mittelung über  $q \sum_{u,d,s} \bar{q}$  führt wegen  $\langle q \bar{q} \rangle = -\langle \bar{q} q \rangle$  zu einem Faktor von  $-\langle \bar{q} q \rangle/12$ . Jetzt müssen die Farb- und Gammamatrizen im Matrixelement kontrahiert werden. Dies bedeutet  $\sum_a T^a T^a = C_F$  und  $\gamma^\delta \gamma_\delta = 4$ , wobei  $C_F$  für die betrachtete  $SU_C(3)$  einem Faktor von  $4/3$  entspricht. So erhält man

$$\langle \bar{q} p_\mu \not{p} p^\mu q \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} g_s^2 \langle \bar{q} q \rangle \langle \bar{q} T^a \gamma^\delta T^a \gamma_\delta q \rangle = \frac{8}{9} \pi \alpha_s \langle \bar{q} q \rangle^2. \quad (\text{B.77})$$

Die einfache Kontraktion der Farb- und Diracmatrizen miteinander war möglich, da diese in verschiedenen Räumen wirken und daher trivialerweise kommutieren.

## B.4. Explizite Summenregeln

In diesem Kapitel werden die in Kapitel B.2 herausgearbeiteten Beiträge der Summenregeln explizit angegeben.

### B.4.1. Perturbative Beiträge

Die Spektraldichten der perturbativen Beiträge in führender Ordnung inklusive leichten Massenkorrekturen sind

$$\rho_T^{\text{pert,LO}}(s) = \frac{1}{8\pi^2} \left[ s \cdot \left( 1 - \frac{m_Q}{s} \right) \left( 2 - \frac{m_Q}{s} \right) + 6m_q m_Q \left( 1 - \frac{m_Q}{s} \right) - 3m_q \left( 1 + \left( \frac{m_Q}{s} \right)^2 \right) \right], \quad (\text{B.78})$$

und

$$\rho_5^{\text{pert,LO}}(s) = \frac{3}{8\pi^2} (m_Q + m_q)^2 \left[ s \cdot \left( 1 - \frac{m_Q}{s} \right)^2 + 2 \left( 1 - \frac{m_Q}{s} \right) m_Q m_q - 2m_q^2 \right]. \quad (\text{B.79})$$

Die in Kapitel 3.1.1 diskutierten NLO-Beiträge  $\rho^{\text{pert,NLO}}(s)$  lauten für pseudoskalare und vektorielle Ströme explizit

$$\begin{aligned} \rho_T^{\text{pert,NLO}}(s) = & \frac{3C_F}{16\pi^2} s \left[ 1 - \frac{5}{2}z + \frac{2}{3}z^2 + \frac{5}{6}z^3 + \frac{1}{3}z(-5 - 4z + 5z^2) \ln(z) \right. \\ & - \frac{1}{3}(1-z)^2(4+5z) \ln(1-z) + \frac{2}{3}(1-z)^2(2+z) (2\text{Li}_2(z) \\ & \left. + \ln(z) \ln(1-z)) - z(1-z^2) \left( 3 \ln \left( \frac{\mu^2}{m_Q^2} \right) + 4 \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.80})$$

sowie

$$\begin{aligned} \rho_5^{\text{pert,NLO}}(s) = & \frac{3C_F}{16\pi^2} (m_Q + m_q)^2 s(1-z) \left[ \frac{9}{2}(1-z) + (3-z)(1-2z) \ln(z) \right. \\ & - (1-z)(5-2z) \ln(1-z) + 2(1-z) (2\text{Li}_2(z) + \ln(z) \ln(1-z)) \\ & \left. + (1-3z) \left( 3 \ln \left( \frac{\mu^2}{m_Q^2} \right) + 4 \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.81})$$

Hier ist die in der Literatur übliche Notation  $z = m_Q^2/s$  sowie der Dilogarithmus  $\text{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t} dt$  verwendet worden. Die in Gleichung (3.3) angegebenen Korrekturen für die leichte Quarkmasse  $m_q$  in NLO lauten

$$\begin{aligned} \delta\rho_T^{\text{pert,NLO}}(s) = & \frac{3C_F}{8\pi^2} m_q m_Q \left[ 2(1-z)(2\text{Li}_2(z) + \ln(z) \ln(1-z)) \right. \\ & + (3-4z-z^2) \ln(z) - (1-z)(5-z) \ln(1-z) + \frac{1}{2}(17-26z+z^2) \\ & \left. + 3(1-2z) \ln \left( \frac{\mu^2}{m_Q^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.82})$$

und

$$\begin{aligned} \delta\rho_5^{\text{pert,NLO}}(s) = & \frac{3C_F}{8\pi^2} (m_Q + m_q)^2 m_q m_Q \left[ (1-z)(4\text{Li}_2(z) + 2\ln(z)\ln(1-z)) \right. \\ & - 2(4-z)\ln(1-z) + 2(3-5z+z^2)\ln(z) + 2(7-9z) \\ & \left. + 3(2-3z)\ln\left(\frac{\mu^2}{m_Q^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.83})$$

### B.4.2. Nichtperturbative Beiträge

Die Spektraldichten der Beiträge für das Quarkkondensat inklusive NLO und leichten Massenkorrekturen sind gegeben mit

$$\begin{aligned} \rho_T^{\langle\bar{q}q\rangle}(s) = & -m_Q \langle\bar{q}q\rangle \left( \delta(m_Q^2 - s) - \frac{1}{2} m_q m_Q \delta'(s - m_Q^2) + \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \left[ \delta(m_Q^2 - s) \right. \right. \\ & \left. \left. - m_Q^2 \left( 3\ln\frac{\mu^2}{m_Q^2} + 4 \right) \delta'(s - m_Q^2) + \frac{m_Q^2}{s^2} \theta(s - m_Q^2) \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

und

$$\begin{aligned} \rho_5^{\langle\bar{q}q\rangle}(s) = & -(m_Q + m_q)^2 m_Q \langle\bar{q}q\rangle \left( \left( 1 - \frac{m_s}{2m_Q} \right) \delta(m_Q^2 - s) - \frac{1}{2} m_q m_Q \delta'(s - m_Q^2) \right. \\ & + \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \left[ \left( 7 + 3\ln\frac{\mu^2}{m_Q^2} \right) \delta(m_Q^2 - s) - m_Q^2 \left( 3\ln\frac{\mu^2}{m_Q^2} + 4 \right) \delta'(s - m_Q^2) \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{s} \theta(s - m_Q^2) \right] \right). \end{aligned} \quad (\text{B.85})$$

Die höherdimensionalen Kondensatbeiträge lauten für vektorielle Ströme

$$\begin{aligned} \rho_T^{\langle GG\rangle}(s) &= -\frac{1}{12} \langle GG\rangle \delta(s - m_Q^2), \\ \rho_T^{\langle\bar{q}Gq\rangle}(s) &= \frac{1}{4} m_Q^3 m_0^2 \langle\bar{q}q\rangle \delta''(s - m_Q^2), \\ \rho_T^{\langle 4q\rangle}(s) &= -\frac{8}{9} \pi \alpha_s r_{\text{vac}} \langle\bar{q}q\rangle^2 \left( -\frac{1}{18} m_Q^4 \delta'''(s - m_Q^2) + \frac{4}{9} m_Q^2 \delta''(s - m_Q^2) \right. \\ & \quad \left. + \frac{4}{9} \delta'(s - m_Q^2) \right), \end{aligned} \quad (\text{B.86})$$



und für pseudoskalare Ströme

$$\begin{aligned}
\rho_5^{\langle GG \rangle}(s) &= \frac{1}{12}(m_Q + m_q)^2 \langle GG \rangle \delta(s - m_Q^2), \\
\rho_5^{\langle \bar{q}Gq \rangle}(s) &= -\frac{1}{2}(m_Q + m_q)^2 m_Q m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle \left( \delta'(s - m_Q^2) - \frac{1}{2} m_Q^2 \delta''(s - m_Q^2) \right), \\
\rho_5^{\langle 4q \rangle}(s) &= -\frac{8}{9} \pi \alpha_s r_{\text{vac}} (m_Q + m_q)^2 \langle \bar{q}q \rangle^2 \left( -\frac{1}{18} m_Q^4 \delta'''(s - m_Q^2) - \frac{1}{6} m_Q^2 \delta''(s - m_Q^2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3} \delta'(s - m_Q^2) \right).
\end{aligned} \tag{B.87}$$

Die  $n$ -te Ableitung der Deltafunktion  $\delta^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \delta(x)$  ist dabei definiert mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(x) dx = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x) \Big|_{x=0}. \tag{B.88}$$

### B.4.3. Summenregeln für Grenzübergang zu schweren Quarks

Der in Abschnitt 3.1.5 thematisierte Grenzübergang zu schweren Quarks der Standardsummenregeln lautet für pseudoskalare Mesonen:

$$\begin{aligned}
f_{H^*}^2 m_{H^*} \left( \frac{m_{H^*}}{m_Q} \right) e^{-\frac{\bar{\Lambda}}{\tau} - \frac{\bar{\Lambda}^2}{2m_Q \tau}} &= \frac{\tau^3}{\pi^2} \int_0^{\frac{\omega_0}{\tau}} dz e^{-z} \left( \frac{z^2}{1 + \frac{2z\tau}{m_Q}} \right) \left( 2 + \frac{1}{1 + \frac{2z\tau}{m_Q}} \right) \\
&\times \left\{ 1 + \frac{2\alpha_s}{\pi} \left[ \ln\left(\frac{m_Q}{2\tau}\right) + \frac{3}{2} + \frac{2\pi^2}{9} - \ln(z) + \frac{2}{3} \mathcal{K}_T\left(\frac{2z\tau}{m_Q}\right) \right] \right\} \\
&- \langle q\bar{q} \rangle \left\{ 1 + \frac{2\alpha_s}{3\pi} \left( 3 + \left(\frac{2\tau}{m_Q}\right) \int_0^{\infty} dz \frac{e^{-z}}{(1 + \frac{2z\tau}{m_Q})^2} \right) \right\} \\
&- \frac{\langle GG \rangle}{12m_Q} + \frac{m_0^2 \langle q\bar{q} \rangle}{16\tau^2} + \frac{\pi \alpha_s r_{\text{vac}} \langle q\bar{q} \rangle^2}{162\tau^3} \left\{ 1 - \frac{16\tau}{m_Q} - \frac{32\tau^2}{m_Q^2} \right\},
\end{aligned} \tag{B.89}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_T(x) &= 2 \operatorname{Li}_2(-x) + \ln(x) \ln(1+x) + \frac{x}{(3+2x)} \ln(x) \\
&+ \frac{(1+2x)(2+x)(1+x)}{(3+2x)x^2} \ln(1+x) + \frac{6x^2+3x-8}{4(3+2x)x} - \frac{9}{4},
\end{aligned} \tag{B.90}$$

und somit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{K}_T(x) = \frac{4}{3} x \ln(x) - \frac{29}{18} x + \mathcal{O}(x^2). \tag{B.91}$$

Für den vektoriellen Fall ergibt sich analog

$$\begin{aligned}
f_H^2 m_H \left( \frac{m_H}{m_Q} \right)^3 e^{-\frac{\hat{\Lambda}}{\tau} - \frac{\hat{\Lambda}^2}{2m_Q \tau}} &= \frac{3\tau^3}{\pi^2} \int_0^{\frac{\omega_0}{\tau}} dz e^{-z} \left( \frac{z^2}{1 + \frac{2z\tau}{m_Q}} \right) \\
&\times \left\{ 1 + \frac{2\alpha_s}{\pi} \left[ \ln \left( \frac{m_Q}{2\tau} \right) + \frac{13}{6} + \frac{2\pi^2}{9} - \ln(z) + \frac{2}{3} \mathcal{K}_5 \left( \frac{2z\tau}{m_Q} \right) \right] \right\} \\
&- \langle q\bar{q} \rangle \left\{ 1 - \frac{2\alpha_s}{3\pi} \left( -1 + 3 \frac{2\tau}{m_Q} \int_0^\infty dz \frac{e^{-z}}{1 + \frac{2z\tau}{m_Q}} \right) \right\} + \frac{\langle GG \rangle}{12m_Q} \quad (\text{B.92}) \\
&+ \frac{m_0^2 \langle q\bar{q} \rangle}{16\tau^2} \left\{ 1 - \frac{4\tau}{m_Q} \right\} + \frac{\pi\alpha_s r_{\text{vac}} \langle q\bar{q} \rangle^2}{162\tau^3} \left\{ 1 + \frac{6\tau}{m_Q} - \frac{48\tau^2}{m_Q^2} \right\},
\end{aligned}$$

mit entsprechend

$$\mathcal{K}_5(x) = 2 \operatorname{Li}_2(-x) + \ln(x) \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \ln(x) + \frac{1+x}{x} \ln(1+x) - 1, \quad (\text{B.93})$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{K}_5(x) = -\frac{3}{2}x + \mathcal{O}(x^2). \quad (\text{B.94})$$

Der Grenzübergang  $m_Q \rightarrow \infty$  führt zu Relation (3.20), und die dort angegebene reskalierte Zerfallskonstante  $\hat{f}$  lautet

$$\hat{f} = e^{\frac{\hat{\Lambda}}{2\tau}} \left( \frac{3\tau^3}{\pi^2} \int_0^{\frac{\omega_0}{\tau}} dz z^2 e^{-z} - \langle q\bar{q} \rangle + \frac{m_0^2 \langle q\bar{q} \rangle}{16\tau^2} + \frac{\pi\alpha_s r_{\text{vac}} \langle q\bar{q} \rangle^2}{162\tau^3} \right)^{1/2}. \quad (\text{B.95})$$

# C. Lichtkegelsummenregeln

## C.1. Matrixelemente

Die in Kapitel 5.1 verwendeten Matrixelemente zur Herleitung der invarianten Amplitude (5.5) werden folgend explizit angegeben.

Zunächst werden die Zwei-Teilchen-Amplituden behandelt. Das Matrixelement für Twist-2 und Twist-4 ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \pi(p) | \bar{q}(x) \gamma_\mu \gamma_5 q(0) | 0 \rangle &= -ip_\mu f_\pi \int_0^1 du e^{iupx} (\varphi_\pi(u, \mu) + x^2 g_1(u) + \mathcal{O}(x^4)) \\ &+ f_\pi \left( x_\mu - \frac{x^2 p_\mu}{p \cdot x} \right) \int_0^1 du e^{iupx} g_2(u). \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Die entsprechenden Ausdrücke für Twist-3 lauten

$$\langle \pi(p) | \bar{q}(x) i \gamma_5 q(0) | 0 \rangle = \frac{f_\pi m_\pi^2}{m_u + m_d} \int_0^1 du e^{iupx} \phi_{3\pi}^p(u), \quad (\text{C.2})$$

und

$$\langle \pi(p) | \bar{q}(x) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 q(0) | 0 \rangle = i(p_\mu x_\nu - p_\nu x_\mu) \frac{f_\pi m_\pi^2}{6(m_u + m_d)} \int_0^1 du e^{iupx} \phi_{3\pi}^\sigma(u). \quad (\text{C.3})$$

Die Matrixelemente der Drei-Teilchen-Amplitude sind z.B. in [145, 146] zu finden. Für Twist-3 verwendet man:

$$\begin{aligned} \langle \pi(p) | \bar{q}(x) g_s G_{\mu\nu}(vx) \sigma_{\alpha\beta} \gamma_5 q(0) | 0 \rangle &= i f_{3\pi} \left( (p_\mu p_\alpha g_{\nu\beta} - p_\nu p_\alpha g_{\mu\beta} \right. \\ &\left. - (p_\mu p_\beta g_{\nu\alpha} - p_\nu p_\beta g_{\mu\alpha}) \right) \int \mathcal{D}\alpha_i \varphi_{3\pi}(\alpha_i) e^{ipx(\alpha_1 + \nu\alpha_3)}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Die Relationen für Twist-4 lauten

$$\begin{aligned} \langle \pi(p) | \bar{q}(x) \gamma_\mu \gamma_5 g_s G_{\alpha\beta}(vx) q(0) | 0 \rangle &= \\ f_\pi \left( p_\beta \left( g_{\alpha\mu} - \frac{x_\alpha p_\mu}{px} \right) - p_\alpha \left( g_{\beta\mu} - \frac{x_\beta p_\mu}{px} \right) \right) \int \mathcal{D}\alpha_i \Psi_{4\pi}(\alpha_i) e^{ipx(\alpha_1 + \nu\alpha_3)} \\ + f_\pi \frac{p_\mu}{px} (p_\alpha x_\beta - p_\beta x_\alpha) \int \mathcal{D}\alpha_i \Phi_{4\pi}(\alpha_i) e^{ipx(\alpha_1 + \nu\alpha_3)}, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

und

$$\begin{aligned} \langle \pi(p) | \bar{q}(x) \gamma_\mu g_s \tilde{G}_{\alpha\beta}(vx) q(0) | 0 \rangle = \\ i f_\pi \left( p_\beta \left( g_{\alpha\mu} - \frac{x_\alpha p_\mu}{px} \right) - p_\alpha \left( g_{\beta\mu} - \frac{x_\beta p_\mu}{px} \right) \right) \int \mathcal{D}\alpha_i \tilde{\Psi}_{4\pi}(\alpha_i) e^{ipx(\alpha_1 + v\alpha_3)} \\ + i f_\pi \frac{p_\mu}{px} (p_\alpha x_\beta - p_\beta x_\alpha) \int \mathcal{D}\alpha_i \tilde{\Phi}_{4\pi}(\alpha_i) e^{ipx(\alpha_1 + v\alpha_3)}, \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

mit  $\tilde{G}_{\alpha\beta}(vx) = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} G^{\sigma\tau}(vx)$  und  $\mathcal{D}\alpha_i = d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)$ .

Eine kompakte Form der Darstellung für die Zwei-Teilchen-Matrix-Elemente bietet [78]:

$$\begin{aligned} \langle \pi(p) | \bar{q}_\omega^i(x_1) q_\xi^j(x_2) | 0 \rangle_{x^2 \rightarrow 0} = \frac{i\delta^{ij}}{12} f_\pi \int_0^1 du e^{iupx_1 + i\bar{u}px_2} \left( (\not{p}\gamma_5)_{\xi\omega} \varphi_\pi(u) \right. \\ - (\gamma_5)_{\xi\omega} \mu_\pi \phi_{3\pi}^p(u) + \frac{1}{6} (\sigma_{\beta\tau} \gamma_5)_{\xi\omega} p_\beta (x_1 - x_2)_\tau \mu_\pi \phi_{3\pi}^\sigma(u) \\ \left. + \frac{1}{16} (\not{p}\gamma_5)_{\xi\omega} (x_1 - x_2)^2 \phi_{4\pi}(u) - \frac{i}{2} ((\not{x}_1 - \not{x}_2) \gamma_5)_{\xi\omega} \int_0^u \psi_{4\pi}(v) dv \right), \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

mit  $x_i = t_i x$ ,  $t \in \mathbb{R}$  und  $x^2 = 0$ . Es wurde zudem die Variable  $\bar{u} := 1 - u$  verwendet. Man beachte, dass die in Darstellung (C.7) angegebenen Verteilungsfunktionen mit den in Gleichung (C.1) angegebenen über folgende Relationen verknüpft sind:

$$\begin{aligned} \phi_{4\pi}(u) &= 16 \left( g_1(u) - \int_0^u g_s(v) dv \right), \\ \psi_{4\pi}(u) &= -2 \frac{dg_2(u)}{du}. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Die entsprechende Formel für Drei-Teilchen-Beiträge lautet

$$\begin{aligned} \langle \pi(p) | \bar{q}_\omega^i(x_1) g_s G_{\mu\nu}^a q_\xi^j(x_2) | 0 \rangle_{x^2 \rightarrow 0} = \frac{\lambda_{ji}^a}{32} \int \mathcal{D}\alpha_i e^{ip(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)} \\ \times \left( i f_{3\pi} (\sigma_{\lambda\rho} \gamma)_{\xi\omega} (p_\mu p_\lambda g_{\nu\rho} - p_\nu p_\lambda g_{\mu\rho}) \Phi_{3\pi}(\alpha_i) \right. \\ - f_\pi (\gamma_\lambda \gamma_5)_{\xi\omega} \left( (p_\nu g_{\mu\lambda} - p_\mu g_{\nu\lambda}) \Psi_{4\pi}(\alpha_i) + \frac{p_\lambda (p_\mu x_\nu - p_\nu x_\mu)}{px} (\Phi_{4\pi}(\alpha_i) + \Psi_{4\pi}(\alpha_i)) \right) \\ \left. - \frac{i f_\pi}{2} \epsilon_{\mu\nu\delta\rho} (\gamma_\lambda)_{\xi\omega} \left( (p^\rho g^{\delta\lambda} - p^\delta g^{\rho\lambda}) \tilde{\Psi}_{4\pi}(\alpha_i) + \frac{p_\lambda (p^\delta x^\rho - p^\rho x^\delta)}{px} (\tilde{\Phi}_{4\pi}(\alpha_i) + \tilde{\Psi}_{4\pi}(\alpha_i)) \right) \right), \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

mit der Konvention  $\epsilon^{0123} = -1$  bzw.  $\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ .

## C.2. Verteilungsamplituden

In diesem Kapitel werden die expliziten Ausdrücke der in dieser Arbeit verwendeten Verteilungsamplituden aufgeführt. Es gilt  $\bar{u} = 1 - u$  und zur Darstellung werden die Gegenbauerpolynome  $C_n^{(\alpha)}(z)$  genutzt:

$$C_n^{(\alpha)}(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{m=0}^{n/2} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha + n - m)}{m!(n - 2m)!} (2z)^{n-2m}, \quad \alpha \neq 0, \quad (\text{C.10})$$

$$C_n^{(0)}(z) = \sum_{m=0}^{n/2} (-1)^m \frac{(n - m - 1)!}{m!(n - 2m)!} (2z)^{n-2m}.$$

- Für Twist-2:

$$\varphi_\pi(u, \mu) = 6u\bar{u} \left( 1 + a_2(\mu) C_2^{3/2}(u - \bar{u}) + a_4(\mu) C_4^{3/2}(u - \bar{u}) \right), \quad (\text{C.11})$$

mit den skalenabhängigen Koeffizienten

$$a_2(\mu) = L(\mu, \mu_0) \frac{25C_F}{6\beta_0} a_2(\mu_0), \quad a_4(\mu) = L(\mu, \mu_0) \frac{91C_F}{15\beta_0} a_4(\mu_0), \quad (\text{C.12})$$

hier ist  $L(\mu, \mu_0) = \alpha_s(\mu)/\alpha_s(\mu_0)$  und  $\beta_0 = 11 - 2n_f/3$ . Die nicht von  $a_2(\mu)$  oder  $a_4(\mu)$  abhängigen Terme der Verteilungsamplitude werden *asymptotischer Anteil* genannt.

- Für Twist-3:

$$\phi_{3\pi}^p(u) = 1 + 30 \frac{f_{3\pi}}{\mu_\pi f_\pi} C_2^{1/2}(u - \bar{u}) - 3 \frac{f_{3\pi}\omega_{3\pi}}{\mu_\pi f_\pi} C_4^{1/2}(u - \bar{u}), \quad (\text{C.13})$$

$$\phi_{3\pi}^\sigma(u) = 6u(1 - \bar{u}) \left( 1 + 5 \frac{f_{3\pi}}{\mu_\pi f_\pi} \left( 1 - \frac{\omega_{3\pi}}{10} \right) C_2^{3/2}(u - \bar{u}) \right), \quad (\text{C.14})$$

und die Drei-Teilchen-Verteilungsamplitude:

$$\Phi_{3\pi}(\alpha_i) = 360\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2 \left( 1 + \frac{\omega_{3\pi}}{2} (7\alpha_3 - 3) \right). \quad (\text{C.15})$$

Die Skalenabhängigkeit der Twist 3-Parameter ist gegeben mit [78]:

$$\begin{aligned} \mu_\pi(\mu) &= L(\mu, \mu_0)^{-\frac{4}{\beta_0}} \mu_\pi(\mu_0), \\ f_{3\pi}(\mu) &= L(\mu, \mu_0)^{\frac{7C_F+9}{3\beta_0}} f_{3\pi}(\mu_0), \\ (f_{3\pi}\omega_{3\pi})(\mu) &= L(\mu, \mu_0)^{\frac{7C_F+60}{6\beta_0}} (f_{3\pi}\omega_{3\pi})(\mu_0). \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

- Für Twist-4:

$$\begin{aligned} \phi_{4\pi}(u) &= \frac{200}{3} \delta_\pi^2 u^2 \bar{u}^2 + 8\delta_\pi^2 \epsilon_\pi (u\bar{u}(2 + 13u\bar{u}) + 2u^3(10 - 15u + 6u^2) \ln u \\ &\quad + 2\bar{u}^3(10 - 15\bar{u} + 6\bar{u}^2) \ln \bar{u}), \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$\psi_{4\pi}(u) = \frac{20}{3} \delta_\pi^2 C_2^{1/2} (2u - 1) \quad (\text{C.18})$$

und die Drei-Teilchen-Verteilungsamplituden:

$$\begin{aligned} \Phi_{4\pi}(\alpha_i) &= 120 \delta_\pi^2 \epsilon_\pi (\alpha_1 - \alpha_2) \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \\ \Psi_{4\pi}(\alpha_i) &= 30 \delta_\pi^2 (\alpha_1 - \alpha_2) \alpha_3^2 \left( \frac{1}{3} + 2\epsilon_\pi (1 - 2\alpha_3) \right), \\ \tilde{\Phi}_{4\pi}(\alpha_i) &= -120 \delta_\pi^2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \left( \frac{1}{3} + \epsilon_\pi (1 - 3\alpha_3) \right), \\ \tilde{\Psi}_{4\pi}(\alpha_i) &= 30 \delta_\pi^2 \alpha_3^2 (1 - \alpha_3) \left( \frac{1}{3} + 2\epsilon_\pi (1 - 2\alpha_3) \right). \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Die Skalenabhängigkeit der Parameter  $\delta_\pi^2$  und  $\epsilon_\pi$  ist:

$$\begin{aligned} \delta_\pi^2(\mu) &= L(\mu, \mu_0) \frac{8C_F}{3\beta_0} \delta_\pi^2(\mu_0), \\ (\delta_\pi^2 \epsilon_\pi)(\mu) &= L(\mu, \mu_0) \frac{10}{\beta_0} (\delta_\pi^2 \epsilon_\pi)(\mu_0). \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

### C.3. Doppelte Spektraldichte in führender Ordnung

In diesem Kapitel werden die Beiträge der Spektraldichte  $\rho^{\text{QCD}}(s_1, s_2)$  explizit aufgeführt. Es gilt  $\delta^{(k)}(s_2 - s_1) := \frac{d^k}{d(s_2 - s_1)^k} \delta(s_2 - s_1)$ .

- Twist-2, Zwei-Teilchen-Beitrag:

$$\rho_{\text{Tw.2}}^{\text{QCD}}(s_1, s_2) = f_\pi m_Q^2 \sum_{k=0}^6 c_k \frac{(m_Q^2 - s_2)^k}{k!} \delta^{(k)}(s_2 - s_1), \quad (\text{C.21})$$

$$\begin{aligned} c_0 &= 0, & c_1 &= 36a_2(\mu) + 90a_4(\mu) + 6, \\ c_2 &= -216a_2(\mu) - 1350a_4(\mu) - 6, & c_3 &= 360a_2(\mu) + 6300a_4(\mu), \\ c_4 &= -180a_2(\mu) - 12600a_4(\mu), & c_5 &= 11340a_4(\mu), \\ c_6 &= -3780a_4(\mu). \end{aligned}$$

- Twist-3, Zwei-Teilchen-Beiträge:

$$\rho_{\text{Tw.3,p}}^{\text{QCD}}(s_1, s_2) = f_{3\pi} m_Q \sum_k c_k \frac{(m_Q^2 - s_2)^k}{k!} \delta^{(k)}(s_2 - s_1), \quad (\text{C.22})$$

$$\begin{aligned} c_0 &= -3\omega_{3\pi} + 30 + \frac{f_\pi \mu_\pi}{f_{3\pi}}, & c_1 &= 63\omega_{3\pi} - 210 - \frac{f_\pi \mu_\pi}{f_{3\pi}}, & c_2 &= -30(11\omega_{3\pi} - 12), \\ c_3 &= 30(23\omega_{3\pi} - 6), & c_4 &= -630\omega_{3\pi}, & c_5 &= 210\omega_{3\pi}, \end{aligned}$$

und

$$\rho_{\text{Tw.3},\sigma}^{\text{QCD}}(s_1, s_2) = f_{3\pi} m_Q \sum_{k=0}^4 c_k \frac{1}{k!} \delta^{(k)}(s_2 - s_1), \quad (\text{C.23})$$

$$\begin{aligned} c_0 &= 3\omega_{3\pi} - 30 - \frac{f_\pi \mu_\pi}{f_{3\pi}}, \\ c_1 &= -(3\omega_{3\pi} - 30)(13m_Q^2 - 15s_2) - \frac{f_\pi \mu_\pi}{f_{3\pi}}(5s_2 - 3m_Q^2), \\ c_2 &= \left( 18(\omega_{3\pi} - 10)(5m_Q^2 - 9s_2) + 4s_2 \frac{f_\pi \mu_\pi}{f_{3\pi}} \right) (m_Q^2 - s_2), \\ c_3 &= -30(\omega_{3\pi} - 10)(m_Q^2 - 7s_2)(m_Q^2 - s_2)^2, \\ c_4 &= -30(\omega_{3\pi} - 10)(m_Q^2 + 3s_2)(m_Q^2 - s_2)^3. \end{aligned}$$

- Twist-3, Drei-Teilchen-Beitrag:

$$\rho_{\text{Tw.3,3-Part.}}^{\text{QCD}}(s_1, s_2) = f_{3\pi} m_Q \sum_{k=0}^5 c_k \frac{(m_Q^2 - s_2)^k}{k!} \delta^{(k)}(s_2 - s_1), \quad (\text{C.24})$$

$$\begin{aligned} c_0 &= 0, & c_1 &= 30\omega_{3\pi} + 120, & c_2 &= -240\omega_{3\pi} - 540, \\ c_3 &= 600\omega_{3\pi} + 720, & c_4 &= -600\omega_{3\pi} - 300, & c_5 &= 210\omega_{3\pi}. \end{aligned}$$

- Twist 4, Zwei-Teilchen-Beitrag:

$$\rho_{\text{Tw.4},\psi}^{\text{QCD}}(s_1, s_2) = m_Q^2 f_\pi \delta_\pi^2 \sum_{k=0}^4 c_k \frac{(m_Q^2 - s_2)^{k-1}}{k!} \delta^{(k)}(s_2 - s_1), \quad (\text{C.25})$$

$$c_0 = 0, \quad c_1 = -\frac{20}{3}, \quad c_2 = \frac{160}{3}, \quad c_3 = -100, \quad c_4 = \frac{160}{3}.$$

- Twist 4, Drei-Teilchen-Beitrag:

$$\rho_{\text{Tw.4,3-Part.}}^{\text{QCD}}(s_1, s_2) = m_Q^2 f_\pi \delta_\pi^2 \sum_{k=0}^4 c_k \frac{(m_Q^2 - s_2)^{k-1}}{k!} \delta^{(k)}(s_2 - s_1), \quad (\text{C.26})$$

$$c_0 = 0, \quad c_1 = -\frac{20}{3}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 60, \quad c_4 = \frac{160}{3}.$$

Für die Approximation des logarithmischen Anteils von  $\phi_{4\pi}(u)$  wurde die Entwicklung

$$\ln(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (u-1)^k, \quad |u-1| < 1 \quad (\text{C.27})$$

bis zur Ordnung  $k = 5$  verwendet. Dies führt zu

$$\rho_{\text{Tw.4},\phi}^{\text{QCD}}(s_1, s_2) = m_Q^4 f_\pi \delta_\pi^2 \sum_{k=0}^{10} c_k \frac{(m_Q^2 - s_2)^{k-2}}{k!} \delta^{(k)}(s_2 - s_1), \quad (\text{C.28})$$

$$\begin{aligned} c_0 &= 0, & c_1 &= 0, & c_2 &= -\frac{120}{3}\epsilon_\pi - \frac{100}{3}, & c_3 &= 868\epsilon_\pi + 200, \\ c_4 &= -4824\epsilon_\pi - 200, & c_5 &= 11912\epsilon_\pi, & c_6 &= -16820\epsilon_\pi, & c_7 &= 15456\epsilon_\pi, \\ c_8 &= -9184\epsilon_\pi, & c_9 &= 3456\epsilon_\pi, & c_{10} &= -864\epsilon_\pi. \end{aligned}$$

Damit sind alle Spektraldichten in führender Ordnung erfasst.



# Literaturverzeichnis

- [1] A. A. Michelson and E. W. Morley, *On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether*, Am. J. Sci. **34** (1887) 333.
- [2] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*, Phys. Lett. B **716** (2012) 1 [arXiv:1207.7214 [hep-ex]].
- [3] K.A. Olive *et al.* (Particle Data Group), *The Review Of Particle Physics*, Chin. Phys. C, **38**, 090001 (2014).
- [4] D. Clowe, M. Bradac, A. H. Gonzalez, M. Markevitch, S. W. Randall, C. Jones and D. Zaritsky, *A direct empirical proof of the existence of dark matter*, Astrophys. J. **648** (2006) L109 [astro-ph/0608407].
- [5] A. G. Riess *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Astron. J. **116** (1998) 1009 [astro-ph/9805201].
- [6] S. Perlmutter *et al.* [Supernova Cosmology Project Collaboration], *Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae*, Astrophys. J. **517** (1999) 565 [astro-ph/9812133].
- [7] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995
- [8] G. Aad *et al.* [ATLAS and CMS Collaborations], *Combined Measurement of the Higgs Boson Mass in pp Collisions at  $\sqrt{s} = 7$  and 8 TeV with the ATLAS and CMS Experiments*, arXiv:1503.07589 [hep-ex].
- [9] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*, Nucl. Phys. B **44** (1972) 189.
- [10] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *Combinatorics of gauge fields*, Nucl. Phys. B **50** (1972) 318.
- [11] D. J. Gross and F. Wilczek, *Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories*, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343.
- [12] H. D. Politzer, *Asymptotic Freedom: An Approach to Strong Interactions*, Phys. Rept. **14** (1974) 129.

- [13] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, New York, Usa: Mcgraw-hill (1980) 705 P.(International Series In Pure and Applied Physics)
- [14] J. F. Donoghue, E. Golowich and B. R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model*, Cambridge University Press, 1922
- [15] J. L. Rosner, *Resource letter: The Standard model and beyond*, Am. J. Phys. **71** (2003) 302 [hep-ph/0206176].
- [16] F. Halzen and A. D. Martin, *Quarks And Leptons: An Introductory Course In Modern Particle Physics*, New York, USA: Wiley (1984) 396p
- [17] D. J. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley, 2008
- [18] O. Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*, Fr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, 1986
- [19] D. Decamp *et al.* [ALEPH Collaboration], *Determination of the Number of Light Neutrino Species*, Phys. Lett. B **231** (1989) 519.
- [20] F. Abe *et al.* [CDF Collaboration], *Observation of top quark production in  $\bar{p}p$  collisions*, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 2626 [hep-ex/9503002].
- [21] M. L. Perl, G. S. Abrams, A. Boyarski, M. Breidenbach, D. Briggs, F. Bulos, W. Chinowsky and J. T. Dakin *et al.*, *Evidence for Anomalous Lepton Production in  $e^+ - e^-$  Annihilation*, Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 1489.
- [22] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, *Remarks on the unified model of elementary particles*, Prog. Theor. Phys. **28** (1962) 870.
- [23] B. Pontecorvo, *Mesonium and anti-mesonium*, Sov. Phys. JETP **6** (1957) 429 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **33** (1957) 549].
- [24] B. Pontecorvo, *Neutrino Experiments and the Problem of Conservation of Leptonic Charge*, Sov. Phys. JETP **26** (1968) 984 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **53** (1967) 1717].
- [25] S. L. Glashow, *Partial Symmetries of Weak Interactions*, Nucl. Phys. **22** (1961) 579.
- [26] S. Weinberg, *A Model of Leptons*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264.
- [27] A. Salam, *Weak and Electromagnetic Interactions*, Conf. Proc. C **680519** (1968) 367.
- [28] H. Georgi, *Lie Algebras in particle Physics: From Isospin to Unified Theories*, Westview Press, 1999
- [29] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes and R. P. Hudson, *Experimental Test Of Parity Conservation In Beta Decay*, Phys. Rev. **105** (1957) 1413.
- [30] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch and R. Turlay, *Evidence for the  $2\pi$  Decay of the  $k(2)0$  Meson*, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 138.

- [31] N. Cabibbo, *Unitary Symmetry and Leptonic Decays*, Phys. Rev. Lett. **10** (1963) 531.
- [32] M. Kobayashi and T. Maskawa, *CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction*, Prog. Theor. Phys. **49** (1973) 652.
- [33] L. Wolfenstein, *Parametrization of the Kobayashi-Maskawa Matrix*, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 1945.
- [34] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics - An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*, World Scientific, 1987
- [35] W. Greiner und A. Schäfer, *Quantenchromodynamik*, Verlag Harri Deutsch, 1989
- [36] A. Khodjamirian, *Quantum chromodynamics and hadrons: An Elementary introduction*, hep-ph/0403145.
- [37] M. Y. Han and Y. Nambu, *Three Triplet Model with Double  $SU(3)$  Symmetry*, Phys. Rev. **139** (1965) B1006.
- [38] O. W. Greenberg, *Spin and Unitary Spin Independence in a Paraquark Model of Baryons and Mesons*, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 598.
- [39] H. D. Politzer, *Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?*, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346.
- [40] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*, Nucl. Phys. B **44** (1972) 189.
- [41] J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, 1984
- [42] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol. 1-3, Cambridge University Press, 2005
- [43] V. A. Smirnov, *Renormalization and Asymptotic Expansions*, Birkhäuser, 1991
- [44] J. M. Jauch, F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons*, Addison-Wesley, 1955
- [45] W. Pauli, F. Villars, *On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory*, Rev. Mod. Phys. **21**, 434–444, 1949
- [46] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, *Lowest order divergent graphs in  $nu$ -dimensional space*, Phys. Lett. B **40** (1972) 566.
- [47] G. 't Hooft, *Renormalization of Massless Yang-Mills Fields*, Nucl. Phys. B **33** (1971) 173.
- [48] J. F. Ashmore, *A Method of Gauge Invariant Regularization*, Lett. Nuovo Cim. **4**(1972) 289.

- [49] G. 't Hooft, *Dimensional regularization and the renormalization group*, Nucl. Phys. B **61** (1973) 455.
- [50] R. Aaij *et al.* [LHCb Collaboration], *First Evidence for the Decay  $B_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$* , Phys. Rev. Lett. **110** (2013) 2, 021801 [arXiv:1211.2674 [hep-ex]].
- [51] P. del Amo Sanchez *et al.* [BaBar Collaboration], *Observation of new resonances decaying to  $D\pi$  and  $D^*\pi$  in inclusive  $e^+e^-$  collisions near  $\sqrt{s}=10.58$  GeV*, Phys. Rev. D **82** (2010) 111101 [arXiv:1009.2076 [hep-ex]].
- [52] J. Brodzicka *et al.* [Belle Collaboration], *Observation of a new  $D(sJ)$  meson in  $B^+ \rightarrow \text{anti-}D^0 D^0 K^+$  decays*, Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 092001 [arXiv:0707.3491 [hep-ex]].
- [53] A. Poluektov, *Recent results in excited charm and beauty hadron spectroscopy*, PoS HQL **2012** (2012) 004.
- [54] T. A. Aaltonen *et al.* [CDF Collaboration], *Study of orbitally excited  $B$  mesons and evidence for a new  $B\pi$  resonance*, Phys. Rev. D **90** (2014) 1, 012013 [arXiv:1309.5961 [hep-ex]].
- [55] N. V. Krasnikov, A. A. Pivovarov and N. N. Tavkhelidze, *The Use of Finite Energy Sum Rules for the Description of the Hadronic Properties of QCD*, Z. Phys. C **19**, 301 (1983).
- [56] N. V. Krasnikov and A. A. Pivovarov, *The Use of Finite Energy Sum Rules for the Description of Resonances in QCD*, Phys. Lett. B **112**, 397 (1982) [Sov. J. Nucl. Phys. **35**, 744 (1982)] [Yad. Fiz. **35**, 1270 (1982)].
- [57] D. Becirevic, B. Blossier, A. Gerardin, A. Le Yaouanc and F. Sanfilippo, *On the significance of  $B$ -decays to radially excited  $D$* , Nucl. Phys. B **872** (2013) 313 [arXiv:1301.7336 [hep-ph]].
- [58] J. Segovia, E. Hernández, F. Fernández and D. R. Entem,  *$B$  decays into radially excited charmed mesons*, Phys. Rev. D **87** (2013) 11, 114009 [arXiv:1304.4970 [hep-ph]].
- [59] P. Colangelo and A. Khodjamirian, *QCD sum rules, a modern perspective*, Publiziert in \*Shifman, M. (ed.): *At the frontier of particle physics*, vol. 3\* 1495-1576 [hep-ph/0010175].
- [60] E. de Rafael, *An Introduction to sum rules in QCD: Course*, hep-ph/9802448.
- [61] M. A. Shifman, (ed.), *Vacuum structure and QCD sum rules*, Amsterdam, Netherlands: North-Holland (1992) 516 p.
- [62] K. G. Wilson and W. Zimmermann, *Operator product expansions and composite field operators in the general framework of quantum field theory*, Commun. Math. Phys. **24** (1972) 87.

- [63] W. Zimmermann, *Normal products and the short distance expansion in the perturbation theory of renormalizable interactions*, Annals Phys. **77** (1973) 570 [Lect. Notes Phys. **558** (2000) 278].
- [64] K. G. Wilson, *Nonlagrangian models of current algebra*, Phys. Rev. **179** (1969) 1499.
- [65] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, *QCD and Resonance Physics. Sum Rules*, Nucl. Phys. B **147** (1979) 385.
- [66] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, *QCD and Resonance Physics: Applications*, Nucl. Phys. B **147** (1979) 448.
- [67] K. Chetyrkin, J. H. Kuhn, A. Maier, P. Maierhofer, P. Marquard, M. Steinhauser and C. Sturm, *Precise Charm- and Bottom-Quark Masses: Theoretical and Experimental Uncertainties*, arXiv:1010.6157 [hep-ph].
- [68] B. Dehnadi, A. H. Hoang, V. Mateu and S. M. Zebarjad, *Charm Mass Determination from QCD Charmonium Sum Rules at Order  $\alpha_s^3$* , arXiv:1102.2264 [hep-ph].
- [69] Ch. Klein, *Berechnung hadronischer Übergangsamplituden in der Charm-Physik*, Dissertation, Universität Siegen, August 2011
- [70] H. Lehmann, K. Symanzik and W. Zimmermann, *On the formulation of quantized field theories*, Nuovo Cim. **1** (1955) 205.
- [71] G. C. Wick, *The Evaluation Of The Collision Matrix*, Phys. Rev. **80** (1950) 268.
- [72] E. C. Poggio, H. R. Quinn and S. Weinberg, *Smearing the Quark Model*, Phys. Rev. D **13** (1976) 1958.
- [73] M. A. Shifman, *Quark hadron duality*, Publiziert in \*Shifman, M. (ed.): *At the frontier of particle physics*, vol. 3\* 1447-1494 [hep-ph/0009131].
- [74] I. I. Balitsky, V. M. Braun and A. V. Kolesnichenko, *Radiative Decay  $\Sigma^+ \rightarrow p \gamma$  in Quantum Chromodynamics*, Nucl. Phys. B **312** (1989) 509.
- [75] V. M. Braun and I. E. Filyanov, *QCD Sum Rules in Exclusive Kinematics and Pion Wave Function*, Z. Phys. C **44** (1989) 157 [Sov. J. Nucl. Phys. **50** (1989) 511] [Yad. Fiz. **50** (1989) 818].
- [76] V. L. Chernyak and I. R. Zhitnitsky, *B meson exclusive decays into baryons*, Nucl. Phys. B **345** (1990) 137.
- [77] P. Ball, V. M. Braun and H. G. Dosch, *Form-factors of semileptonic D decays from QCD sum rules*, Phys. Rev. D **44** (1991) 3567.
- [78] G. Duplancic, A. Khodjamirian, T. Mannel, B. Melic and N. Offen, *Light-cone sum rules for  $B \rightarrow \pi$  form factors revisited*, JHEP **0804** (2008) 014 [arXiv:0801.1796 [hep-ph]].

- [79] A. Khodjamirian, R. Ruckl and C. W. Winhart, *The Scalar  $B \rightarrow \pi$  and  $D \rightarrow \pi$  form-factors in QCD*, Phys. Rev. D **58** (1998) 054013 [hep-ph/9802412].
- [80] P. Ball and R. Zwicky, *New results on  $B \rightarrow \pi$ ,  $K$ ,  $\eta$  decay formfactors from light-cone sum rules*, Phys. Rev. D **71** (2005) 014015 [hep-ph/0406232].
- [81] A. Khodjamirian, R. Ruckl, S. Weinzierl, C. W. Winhart and O. I. Yakovlev, *Predictions on  $B \rightarrow \pi$  anti- $l$   $\nu(l)$ ,  $D \rightarrow \pi$  anti- $l$   $\nu(l)$  and  $D \rightarrow K$  anti- $l$   $\nu(l)$  from QCD light cone sum rules*, Phys. Rev. D **62** (2000) 114002 [hep-ph/0001297].
- [82] V. M. Belyaev, V. M. Braun, A. Khodjamirian and R. Rückl,  *$D^* D \pi$  and  $B^* B \pi$  couplings in QCD*, Phys. Rev. D **51** (1995) 6177 [hep-ph/9410280].
- [83] A. Khodjamirian, R. Ruckl, S. Weinzierl and O. I. Yakovlev, *Perturbative QCD correction to the light cone sum rule for the  $B^* B \pi$  and  $D^* D \pi$  couplings*, Phys. Lett. B **457** (1999) 245 [hep-ph/9903421].
- [84] V. M. Braun and I. E. Halperin, *Soft contribution to the pion form-factor from light cone QCD sum rules*, Phys. Lett. B **328** (1994) 457 [hep-ph/9402270].
- [85] V. M. Belyaev,  *$\pi$  -  $A_1$  electromagnetic form-factors and light cone QCD sum rules*, Z. Phys. C **65** (1995) 93 [hep-ph/9404279].
- [86] P. Gelhausen, S. Imsong, A. Khodjamirian, N. Offen and Y.-M.- Wang, *Strong couplings  $D^* D \pi$  and  $B^* B \pi$  from QCD light-cone sum rules revisited*, Universität Siegen, Juni 2015 [in preparation].
- [87] P. Gelhausen, A. Khodjamirian, A. A. Pivovarov and D. Rosenthal, *Decay constants of heavy-light vector mesons from QCD sum rules*, Phys. Rev. D **88** (2013) 014015 [Erratum-ibid. D **89** (2014) 099901] [arXiv:1305.5432 [hep-ph]].
- [88] D. Rosenthal, *Radiative Corrections to heavy meson processes*, Dissertation, Universität Siegen, September 2015 [in preparation]
- [89] K. G. Chetyrkin and M. Steinhauser, *Heavy - light current correlators at order  $\alpha_s^{**2}$  in QCD and HQET*, Eur. Phys. J. C **21** (2001) 319 [hep-ph/0108017].
- [90] A. Khodjamirian and R. Rückl, *QCD sum rules for exclusive decays of heavy mesons*, Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. **15** (1998) 345 [hep-ph/9801443].
- [91] M. Jamin and B. O. Lange,  *$f(B)$  and  $f(B(s))$  from QCD sum rules*, Phys. Rev. D **65** (2002) 056005 [hep-ph/0108135].
- [92] P. Gelhausen, A. Khodjamirian, A. A. Pivovarov and D. Rosenthal, *Radial excitations of heavy-light mesons from QCD sum rules*, Eur. Phys. J. C **74** (2014) 8, 2979 [arXiv:1404.5891 [hep-ph]].
- [93] E. V. Shuryak, *Hadrons Containing a Heavy Quark and QCD Sum Rules*, Nucl. Phys. B **198** (1982) 83.

- [94] M. Neubert, *Heavy meson form-factors from QCD sum rules*, Phys. Rev. D **45** (1992) 2451.
- [95] E. Bagan, P. Ball, V. M. Braun and H. G. Dosch, *QCD sum rules in the effective heavy quark theory*, Phys. Lett. B **278** (1992) 457.
- [96] D. J. Broadhurst and A. G. Grozin, *Operator product expansion in static quark effective field theory: Large perturbative correction*, Phys. Lett. B **274** (1992) 421 [hep-ph/9908363].
- [97] M. Neubert, *Heavy quark symmetry*, Phys. Rept. **245** (1994) 259 [hep-ph/930632].
- [98] A. A. Penin and M. Steinhauser, *Heavy light meson decay constant from QCD sum rules in three loop approximation*, Phys. Rev. D **65** (2002) 054006 [hep-ph/0108110].
- [99] H. Leutwyler, *The Ratios of the light quark masses*, Phys. Lett. B **378** (1996) 313 [hep-ph/9602366].
- [100] B. L. Ioffe, *Condensates in quantum chromodynamics*, Phys. Atom. Nucl. **66** (2003) 30 [Yad. Fiz. **66** (2003) 32] [hep-ph/0207191].
- [101] A. Khodjamirian, C. Klein, T. Mannel and N. Offen, *Semileptonic charm decays  $D \rightarrow \pi l \nu(l)$  and  $D \rightarrow K l \nu(l)$  from QCD Light-Cone Sum Rules*, Phys. Rev. D **80** (2009) 114005 [arXiv:0907.2842 [hep-ph]].
- [102] W. Lucha, D. Melikhov and S. Simula, *OPE, charm-quark mass, and decay constants of  $D$  and  $D_s$  mesons from QCD sum rules*, Phys. Lett. B **701** (2011) 82 [arXiv:1101.5986 [hep-ph]].
- [103] S. Narison, *A fresh look into  $m_{c,b}$  and precise  $f_{D(s),B(s)}$  from heavy-light QCD spectral sum rules*, Phys. Lett. B **718** (2013) 1321 [arXiv:1209.2023 [hep-ph]].
- [104] D. Melikhov, *Advances in QCD sum rule calculations*, arXiv:1501.06319 [hep-ph].
- [105] H. Na, C. T. H. Davies, E. Follana, G. P. Lepage and J. Shigemitsu,  *$|V_{cd}|$  from  $D$  Meson Leptonic Decays*, Phys. Rev. D **86** (2012) 054510 [arXiv:1206.4936 [hep-lat]].
- [106] A. Bazavov *et al.* [Fermilab Lattice and MILC Collaborations], *Pseudoscalar meson physics with four dynamical quarks*, PoS LATTICE **2012** (2012) 159 [arXiv:1210.8431 [hep-lat]].
- [107] J. L. Rosner and S. Stone, *Leptonic decays of charged pseudoscalar mesons - 2013*, arXiv:1309.1924 [hep-ex].
- [108] D. Becirevic, V. Lubicz, F. Sanfilippo, S. Simula and C. Tarantino,  *$D$ -meson decay constants and a check of factorization in non-leptonic  $B$ -decays*, JHEP **1202** (2012) 042. [arXiv:1201.4039 [hep-lat]].

- [109] A. Bazavov *et al.* [Fermilab Lattice and MILC Collaborations], *B- and D-meson decay constants from three-flavor lattice QCD*, Phys. Rev. D **85** (2012) 114506 [arXiv:1112.3051 [hep-lat]].
- [110] H. Na, C. J. Monahan, C. T. H. Davies, R. Horgan, G. P. Lepage and J. Shigemitsu, *The B and B<sub>s</sub> Meson Decay Constants from Lattice QCD*, Phys. Rev. D **86** (2012) 034506 [arXiv:1202.4914 [hep-lat]].
- [111] I. Adachi *et al.* [Belle Collaboration], *Evidence for  $B^- \rightarrow \tau^- \bar{\nu}_\tau$  with a Hadronic Tagging Method Using the Full Data Sample of Belle*, Phys. Rev. Lett. **110** (2013) 13, 131801 [arXiv:1208.4678 [hep-ex]].
- [112] W. Lucha, D. Melikhov and S. Simula, *Accurate decay-constant ratios  $f_{B^*}/f_B$  and  $f_{B_s^*}/f_{B_s}$  from Borel QCD sum rules*, arXiv:1504.03017 [hep-ph].
- [113] R. J. Dowdall *et al.* [HPQCD Collaboration], *B-Meson Decay Constants from Improved Lattice Nonrelativistic QCD with Physical u, d, s, and c Quarks*, Phys. Rev. Lett. **110** (2013) 22, 222003 [arXiv:1302.2644 [hep-lat]].
- [114] C. Bernard, P. Williams, S. Datta, S. A. Gottlieb, C. E. Detar, U. M. Heller, C. McNeile and K. Orginos *et al.*, *Lattice results for the decay constant of heavy - light vector mesons*, Phys. Rev. D **65** (2002) 014510 [hep-lat/0109015].
- [115] B. Colquhoun, C. T. H. Davies, R. J. Dowdall, J. Kettle, J. Koponen, G. P. Lepage and A. T. Lytle, *B-meson decay constants: a more complete picture from full lattice QCD*, arXiv:1503.05762 [hep-lat].
- [116] C. T. H. Davies, C. McNeile, E. Follana, G. P. Lepage, H. Na and J. Shigemitsu, *Update: Precision D<sub>s</sub> decay constant from full lattice QCD using very fine lattices*, Phys. Rev. D **82** (2010) 114504 [arXiv:1008.4018 [hep-lat]].
- [117] B. Kronenbitter *et al.* [Belle Collaboration], *Measurement of the branching fraction of  $B^+ \rightarrow \tau^+ \nu_\tau$  decays with the semileptonic tagging method*, arXiv:1503.05613 [hep-ex].
- [118] A. Khodjamirian, *Upper bounds on  $f(D)$  and  $f(D(s))$  from two-point correlation function in QCD*, Phys. Rev. D **79** (2009) 031503 [arXiv:0812.3747 [hep-ph]].
- [119] T. Appelquist and H. D. Politzer, *Heavy Quarks and Longlived Hadrons*, Phys. Rev. D **12** (1975) 1404.
- [120] T. Appelquist and H. D. Politzer, *Orthocharmonium and  $e^+ e^-$  Annihilation*, Phys. Rev. Lett. **34** (1975) 43.
- [121] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, J. B. Kogut, K. D. Lane and T. M. Yan, *The Spectrum of Charmonium*, Phys. Rev. Lett. **34** (1975) 369 [Erratum-ibid. **36** (1976) 1276].
- [122] S. Godfrey and N. Isgur, *Mesons in a Relativized Quark Model with Chromodynamics*, Phys. Rev. D **32** (1985) 189.



- [123] D. Ebert, R. N. Faustov and V. O. Galkin, *Heavy-light meson spectroscopy and Regge trajectories in the relativistic quark model*, Eur. Phys. J. C **66** (2010) 197 [arXiv:0910.5612 [hep-ph]].
- [124] G. 't Hooft, *A Planar Diagram Theory for Strong Interactions*, Nucl. Phys. B **72** (1974) 461.
- [125] G. 't Hooft, *A Two-Dimensional Model for Mesons*, Nucl. Phys. B **75** (1974) 461.
- [126] I. I. Y. Bigi, M. A. Shifman, N. Uraltsev and A. I. Vainshtein, *Heavy flavor decays, OPE and duality in two-dimensional 't Hooft model*, Phys. Rev. D **59** (1999) 054011 [hep-ph/9805241].
- [127] S. Groote, J. G. Korner and A. A. Pivovarov, *Spectral moments of two point correlators in perturbation theory and beyond*, Phys. Rev. D **65** (2002) 036001 [hep-ph/0105227].
- [128] M. Beneke, G. Buchalla, M. Neubert and C. T. Sachrajda, *Penguins with Charm and Quark-Hadron Duality*, Eur. Phys. J. C **61** (2009) 439 [arXiv:0902.4446 [hep-ph]].
- [129] M. Beylich, G. Buchalla and T. Feldmann, *Theory of  $B^- \rightarrow K^*(*)l+l^-$  decays at high  $q^2$ : OPE and quark-hadron duality*, Eur. Phys. J. C **71** (2011) 1635 [arXiv:1101.5118 [hep-ph]].
- [130] T. A. Aaltonen *et al.* [CDF Collaboration], *Study of orbitally excited B mesons and evidence for a new  $B\pi$  resonance*, Phys. Rev. D **90** (2014) 1, 012013 [arXiv:1309.5961 [hep-ex]].
- [131] F. U. Bernlochner, Z. Ligeti and S. Turczyk, Phys. Rev. D **85** (2012) 094033 [arXiv:1202.1834 [hep-ph]].
- [132] J. H. Kuhn and A. Santamaria, *Tau decays to pions*, Z. Phys. C **48** (1990) 445.
- [133] C. Bruch, A. Khodjamirian and J. H. Kuhn, *Modeling the pion and kaon form factors in the timelike region*, Eur. Phys. J. C **39** (2005) 41 [hep-ph/0409080].
- [134] A. Khodjamirian, T. Mannel, N. Offen and Y. -M. Wang,  *$B \rightarrow \pi l \nu_l$  Width and  $|V_{ub}|$  from QCD Light-Cone Sum Rules*, Phys. Rev. D **83** (2011) 094031 [arXiv:1103.2655 [hep-ph]].
- [135] I. Sentitemsu Imsong, A. Khodjamirian, T. Mannel and D. van Dyk, *Extrapolation and unitarity bounds for the  $B \rightarrow \pi$  form factor*, JHEP **1502** (2015) 126 [arXiv:1409.7816 [hep-ph]].
- [136] P. Ball, V. M. Braun and A. Lenz, *Higher-twist distribution amplitudes of the K meson in QCD*, JHEP **0605** (2006) 004 [hep-ph/0603063].
- [137] G. Burdman, Z. Ligeti, M. Neubert and Y. Nir, *The Decay  $B \rightarrow \pi l \nu$  in heavy quark effective theory*, Phys. Rev. D **49** (1994) 2331 [hep-ph/9309272].

- [138] A. Anastassov *et al.* [CLEO Collaboration], *First measurement of  $\Gamma(D^{*+})$  and precision measurement of  $m(D^{*+}) - m(D0)$* , Phys. Rev. D **65** (2002) 032003 [hep-ex/0108043].
- [139] J. P. Lees *et al.* [BaBar Collaboration], *Measurement of the  $D^*(2010)^+$  meson width and the  $D^*(2010)^+ - D^0$  mass difference*, Phys. Rev. Lett. **111** (2013) 11, 111801 [arXiv:1304.5657 [hep-ex]].
- [140] F. Bernardoni *et al.* [ALPHA Collaboration], *Precision lattice QCD computation of the  $B^*B\pi$  coupling*, Phys. Lett. B **740** (2015) 278 [arXiv:1404.6951 [hep-lat]].
- [141] J. M. Flynn, P. Fritzschn, T. Kawanai, C. Lehner, C. T. Sachrajda, B. Samways, R. S. Van de Water and O. Witzel, *The  $B^*B\pi$  coupling with relativistic heavy quarks*, PoS LATTICE **2013** (2014) 408 [arXiv:1311.2251 [hep-lat]].
- [142] W. Detmold, C. J. D. Lin and S. Meinel, *Calculation of the heavy-hadron axial couplings  $g_1$ ,  $g_2$  and  $g_3$  using lattice QCD*, Phys. Rev. D **85** (2012) 114508 [arXiv:1203.3378 [hep-lat]].
- [143] A. V. Radyushkin, *Introduction into QCD sum rule approach* hep-ph/0101227.
- [144] V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, *Calculations in External Fields in Quantum Chromodynamics. Technical Review*, Fortsch. Phys. **32** (1984) 585.
- [145] V. M. Braun and I. E. Filyanov, *Conformal Invariance and Pion Wave Functions of Nonleading Twist*, Z. Phys. C **48**, 239 (1990) [Sov. J. Nucl. Phys. **52**, 126 (1990)] [Yad. Fiz. **52**, 199 (1990)].
- [146] A. S. Gorsky, *QCD Wave Functions of Light Mesons Revised*, Sov. J. Nucl. Phys. **45** (1987) 512 [Yad. Fiz. **45** (1987) 824].
- [147] T. Feldmann, B. Müller and D. van Dyk, *Analyzing  $b \rightarrow u$  transitions in semileptonic  $\bar{B}_s \rightarrow K^{*+}(\rightarrow K\pi)\ell^-\bar{\nu}_\ell$  decays*, arXiv:1503.09063 [hep-ph].
- [148] D. Becirevic, A. L. Yaouanc, A. Oyanguren, P. Roudeau and F. Sanfilippo, *Insight into  $D/B \rightarrow \pi\ell\nu_\ell$  decay using the pole models*, arXiv:1407.1019 [hep-ph].

## Danksagung

Zuallererst möchte ich mich bei Prof. Dr. Alexander Khodjamirian für die erstklassige Betreuung und Unterstützung während meiner Zeit als Masterstudent und Doktorand bedanken. Während der gesamten Zeit konnte ich mich mit allen Fragen, Anliegen und Problemen stets an Herrn Khodjamirian wenden, sein freundliches Wesen und seine fachliche Kompetenz waren ein zentraler Grundbaustein für den erfolgreichen Abschluss meiner Promotion.

Weiterhin bedanke ich mich bei Prof. Dr. Alexei Pivovarov für die vielen Stunden von gemeinsamer Projektarbeit und inhaltlichen Diskussionen. Seine Expertise und seine permanente Bereitschaft, mir bei allen Fragen weiterzuhelfen, waren für die Fertigstellung dieser Arbeit von unschätzbarem Wert.

Ebenso bedanke ich mich bei Prof. Dr. Thomas Mannel und der gesamten Arbeitsgruppe der Theoretischen Physik I in Siegen für die freundliche und anregende Arbeitsatmosphäre, die vielen Diskussionen und die wertvolle fachliche und menschliche Interaktion der vergangenen Jahre. Das hervorragende Arbeitsklima, die Bereitstellung der materiellen Infrastruktur sowie die vielen Möglichkeiten zur persönlichen Weiterbildung haben mich die Arbeitsgruppe über die Jahre hinweg nicht nur als Arbeitsplatz, sondern auch als sozialen Raum empfinden lassen, an dem ich stets gerne teilgenommen habe.

Besonders danken möchte ich vor diesem Hintergrund Dr. Sven Faller, Dr. Danny van Dyk und Prof. Dr. Thorsten Feldmann für ihre Bereitschaft, als Probeleser zu fungieren und für das damit verbundene wertvolle Feedback. Auch meine langjährigen Studienkollegen, deren Solidarität und Freundschaft mich seit dem ersten Semester bis an diese Stelle begleitet haben, sowie die vielen nicht explizit namentlich genannten Mitglieder des Fachbereichs und des Sekretariates seien an dieser Stelle herzlich bedankt.

Ein großes Dankeschön möchte ich auch an mein privates Umfeld richten. Zunächst an meinen Freundeskreis, der nicht nur all die Jahre meinen Alltag bereichert hat, sondern auch ganz konkret durch Probelesen und logistische Unterstützung bei der Verwirklichung meiner Ziele mitgeholfen hat. Ein besonderer Dank gebührt hier meiner Partnerin Lisa. Du musstest in den vergangenen Monaten manche Laune ertragen und oft auf meine Anwesenheit verzichten und hast mir dennoch geholfen, wo du nur konntest. Das werde ich dir nie vergessen.

Zum Schluss möchte ich meiner Familie danken. Ihre Unterstützung in den vergangenen Jahren war vermutlich die wichtigste Komponente bei der Fertigstellung dieser Arbeit. Der enorme emotionale Rückhalt und die Fürsorge, die mir seit meiner Kindheit zuteil wurden, sind in so wenigen Worten kaum angemessen zu würdigen. Ohne euch wären diese Zeilen niemals entstanden.